Глава 9. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

9.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

Рассмотрим приближенные методы решения задач для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. В общем случае такое уравнение имеет вид:

$$F\left(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\right) = 0, \tag{9.1}$$

где x, y – независимые переменные, $u(x, y)$ – искомая функция, $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ – первые и вторые частные производные по аргументам x и y.

Решением уравнения (9.1) называется функция $u = u\left(x, y\right)$, обращающая это уравнение в тождество. График решения представляет собой поверхность в пространстве V_3 (интегральная поверхность) (рис. 9.1).

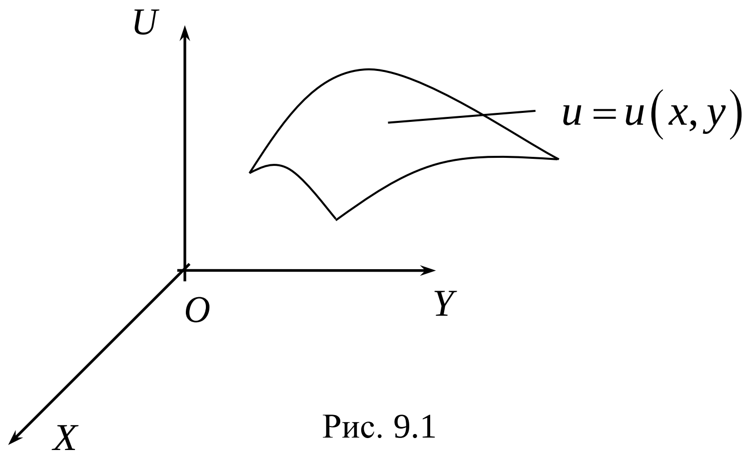

Рис. 9.1

Определение 9.1. Уравнение (9.1) называется вполне линейным, если оно является уравнением первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведений, т.е. вполне линейное уравнение может быть записано в виде:

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Ku_x+Lu_y+Mu(x,y)=F(x,y), \qquad (9.2)$$

где коэффициенты A,B,C,K,L,M могут зависеть только от x и y.

Если коэффициенты A,B,C,K,L,M не зависят от x и y, т.е. являются постоянными, то уравнение (9.2) называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть $\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$ – дискриминант уравнения.

В зависимости от знака δ линейное дифференциальное уравнение (9.2) относится к одному из следующих типов:

$\delta>0$ – эллиптический тип;

$\delta=0$ – параболический тип;

$\delta<0$ – гиперболический тип;

δ не сохраняет постоянного знака в данной области – смешанный тип.

Тип линейного дифференциального уравнения (9.2) является его важной особенностью и сохраняется при любом невырожденном преобразовании

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y),$$

т.е., таком, чтобы якобиан был отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}\neq 0.$$

С линейным дифференциальным уравнением (9.2) связано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A(dy)^2-2Bdxdy+C(dx)^2=0, \qquad (9.3)$$

которое называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (9.2).

Решения характеристического уравнения (9.3) называются характеристиками уравнения (9.2).

1. Для уравнения (9.2) гиперболического типа существуют два семейства характеристик $\varphi(x,y)=C_1$ и $\psi(x,y)=C_2$. Производя преобразования $\xi=\varphi(x,y)$ и $\eta=\psi(x,y)$, уравнение (9.2) примет вид:

$$u_{\xi\eta}+\alpha(\xi,\eta)u_\xi+\beta(\xi,\eta)u_\eta+\gamma(\xi,\eta)u=f(\xi,\eta). \qquad (9.4)$$

Уравнение (9.4) называется каноническим видом дифференциального уравнения гиперболического типа.

2. Для уравнения (9.2) параболического типа существует одно семейство характеристик $\varphi(x,y)=C$. В результате невырожденного преобразования $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=y$ уравнение (9.2) параболического типа приводится к каноническому виду

$$u_{\eta\eta}+\alpha(\xi,\eta)u_\xi+\beta(\xi,\eta)u_\eta+\gamma(\xi,\eta)u=f(\xi,\eta).$$

3. Для уравнения (9.2) эллиптического типа существуют два семейства комплексно сопряженных характеристик

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1;$$
$$\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2.$$

Производя преобразования $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, получим канонический вид уравнения эллиптического типа:

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\alpha(\xi,\eta)u_\xi+\beta(\xi,\eta)u_\eta+\gamma(\xi,\eta)u=f(\xi,\eta).$$

Выражение $\Delta u=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}$ называется оператором Лапласа.

Примером уравнения эллиптического типа является уравнение $\Delta u=0$, которое называется уравнением Лапласа.

Неоднородное уравнение Лапласа

$$\Delta u=f(\xi,\eta)$$

называется уравнением Пуассона.

9.2. Уравнение Лапласа в конечных разностях

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{9.5}$$

Выбрав шаг $h > 0$, заменим частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ отношениями конечных разностей по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Подставим (9.6) в (9.5), получим

$$\frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} + \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2} = 0.$$

Следовательно,

$$u(x,y) = \frac{1}{4}\big[u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h)\big]. \tag{9.7}$$

Оценим точность такой замены.

Рассмотрим формулу Тейлора

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) &= f(x,y) + \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right) f(x,y) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x,y) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x+\theta h, y+\theta k), \end{aligned} \tag{9.8}$$

где $0 < 0 < 1$.

Рассмотрим точки $A(x,y)$, $B(x-h,y)$, $C(x+h,y)$, $D(x,y+h)$, $K(x,y-h)$, лежащие в центре квадрата и на серединах его сторон (рис. 9.2).

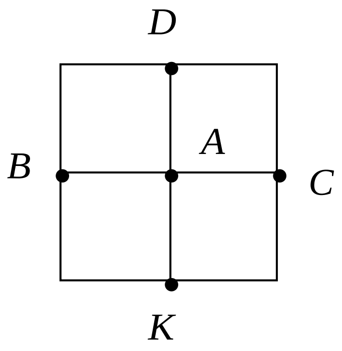

Рис. 9.2

Выразим значения функции $u(x,y)$ в точках B,C,D,K через значения этой функции и ее производных в центральной точке квадрата $A(x,y)$.

Согласно формуле (9.8) при $n=4$ имеем:

$$\begin{cases} u(x-h,y)=u(x,y)-hu_x+\frac{1}{2!}h^2u_{xx}-\frac{1}{3!}h^3u_{xxx}+\frac{1}{4!}h^4\bar{u}; \\ u(x+h,y)=u(x,y)+hu_x+\frac{1}{2!}h^2u_{xx}+\frac{1}{3!}h^3u_{xxx}+\frac{1}{4!}h^4\bar{\bar{u}}; \\ u(x,y-h)=u(x,y)-hu_y+\frac{1}{2!}h^2u_{yy}-\frac{1}{3!}h^3u_{yyy}+\frac{1}{4!}h^4\tilde{u}; \\ u(x,y+h)=u(x,y)+hu_y+\frac{1}{2!}h^2u_{yy}+\frac{1}{3!}h^3u_{yyy}+\frac{1}{4!}h^4\tilde{\tilde{u}}, \end{cases} \tag{9.9}$$

где $u_x,u_y,u_{xx},u_{yy},u_{xxx},u_{yyy}$ – значения производных в точке $A(x,y)$, $\bar{u}=\bar{u}_{xxxx}$, $\bar{\bar{u}}=\bar{\bar{u}}_{xxxx}$, $\tilde{u}=\tilde{u}_{yyyy}$, $\tilde{\tilde{u}}=\tilde{\tilde{u}}_{yyyy}$ – производные в некоторых промежуточных точках.

Складывая равенства (9.9), получим:

$$u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)=$$
$$=4u(x,y)+h^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+R_h(x,y),$$

где остаточный член

$$R_h(x,y)=\frac{h^4}{4!}\left[\bar{u}+\bar{\bar{u}}+\tilde{u}+\tilde{\tilde{u}}\right]$$

при $u(x,y)\in C^4$ имеет порядок $O\left(h^4\right)$.

Отсюда будем иметь:

$$u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)=$$
$$=4u(x,y)+h^2\cdot\Delta u+O\left(h^4\right).$$

Следовательно,

$$\Delta u=\frac{1}{h^2}\left[u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+\right.$$
$$\left.+u(x,y+h)-4u(x,y)\right]+O\left(h^2\right). \qquad (9.10)$$

Формула (9.10) выражает оператор Лапласа Δu через конечные разности и называется первой основной конечно-разностной формой оператора Лапласа.

Пренебрегая в уравнении (9.10) членом $O\left(h^2\right)$, получим, что уравнению Лапласа $\Delta u=0$ приближенно соответствует следующее уравнение в конечных разностях:

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\left[u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)\right],$$

что совпадает с уравнением (9.7).

Таким образом, при замене уравнения Лапласа (9.5) конечно-разностным уравнением (9.7) совершается ошибка порядка $O\left(h^2\right)$.

9.3. Решение задачи Дирихле методом сеток

Идея метода сеток (метода конечных разностей) для приближенного решения краевых задач для двумерных дифференциальных уравнений заключается в следующем:

1) в плоской области D, в которой разыскивается решение, строится сеточная область D_h, состоящая из одинаковых ячеек и приближающая данную область D;

2) заданное дифференциальное уравнение заменяется в узлах построенной сетки соответствующим конечно-разностным уравнением;

3) на основании граничных условий устанавливаются значения искомого решения в граничных узлах области D_h.

Выбор сеточной области производится в зависимости от конкретной задачи, но во всех случаях контур Γ_h сеточной области D_h следует выбирать так, чтобы он как можно лучше аппроксимировал контур Γ заданной области D.

Рассмотрим применение метода сеток для построения решения задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \forall(x,y)\in D; \tag{9.11}$$

$$u(x,y)\big|_\Gamma=\varphi(x,y).$$

Выбрав шаг h, строим квадратную сетку

$$x_i=x_0+ih,\ y_j=y_0+jh,\ i,j=0,\pm1,\pm2,...$$

с таким расчетом, чтобы узлы (x_i,y_j) сетки S_h или принадлежали области D, или отстояли от ее границы Γ на расстоянии меньшем, чем h.

Определение 9.2. Узлы сетки S_h называются соседними, если они удалены друг от друга в направлении оси OX или оси OY на расстояние, равное шагу сетки h.

Определение 9.3. Узел A_h сетки S_h называется внутренним, если он принадлежит области D, а все четыре соседних с ним узла – множеству S_h; в противном случае он называется граничным.

Определение 9.4. Граничный узел сетки S_h называется узлом первого рода B_h, если он имеет соседний внутренний узел этой сетки; в противном случае граничный узел называется узлом второго рода C_h.

Внутренние узлы A_h и граничные узлы первого рода B_h сетки S_h называются расчетными точками. Граничные узлы второго рода C_h в вычислениях не участвуют и могут быть изъяты из сетки.

Множество расчетных точек сетки S_h должно быть «связное», т.е. любые две расчетные точки можно соединить цепочкой узлов, каждые два смежных элемента которой являются соседними узлами.

Значение искомой функции $u = u(x, y)$ в точках (x_i, y_j) обозначим $u_{ij} = u(x_i, y_j)$.

Для каждой внутренней точки (x_i, y_j) сетки S_h заменим дифференциальное уравнение (9.11) конечно-разностным уравнением

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1}\right). \qquad (9.12)$$

В граничных узлах первого рода B_h сетки S_h полагаем

$$u(B_h) = u(B) = \varphi(B),$$

где B – ближайшая к B_h точка границы Γ.

Система (9.12) является неоднородной линейной системой, причем число уравнений равно числу неизвестных. Система (9.12) всегда совместна и имеет единственное решение, так как соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение.

Если число узлов сетки велико, то решение системы (9.12) затруднено. Кроме того, значения функции $u(x, y)$ в граничных узлах выбраны грубо. Это заставляет для решения системы прибегать к итерационным методам с одновременным исправлением граничных значений.

Процесс усреднения Либмана

Определение 9.5. Функция $u(x,y)$, имеющая непрерывные частные производные второго порядка в области D и удовлетворяющая внутри области D уравнению Лапласа, называется гармонической функцией.

Утверждение (принцип максимума). Гармоническая в ограниченной области D функция, непрерывная в замкнутой области $\bar{D} = D \cup \Gamma$, не может принимать внутри этой области значений больших, чем ее максимальное значение на границе Γ, и меньших, чем ее минимальное значение на границе Γ.

Исходя из принципа максимума за начальное приближение $u_{ij}^{(0)}$ во внутренних точках сетки S_h сеточной области D_h выбирается любая система чисел, удовлетворяющая неравенству

$$m \le u_{ij}^{(0)} \le M,$$

где $m = \min\limits_{(x,y)\in\Gamma} \varphi(x,y), M = \max\limits_{(x,y)\in\Gamma} \varphi(x,y)$.

За начальное приближение в граничных узлах первого рода B_h берется значение

$$u^{(0)}(B_h) = u(B) = \varphi(B),$$

где B – точка границы Γ, ближайшая к B_h.

Последовательные приближения для внутренних узлов A_h сетки находят по формулам

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1j}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k)} + u_{ij-1}^{(k)} + u_{ij+1}^{(k)}\right).$$

Значения функции $u(x,y)$ в граничных узлах сетки последовательно исправляются по формуле линейной интерполяции (рис. 9.3):

$$u^{(k+1)}(B_h) = u(B) + \frac{u^k(A_h) - u(B)}{h+\delta} \cdot \delta, \tag{9.13}$$

где A_h – ближайший к B_h внутренний узел сетки; δ – удаление узла B_h от точки B, причем

$\delta > 0$, если B_h – внутренняя точка области D,

$\delta < 0$, если B_h – внешняя точка области D.

Если B_h лежит на границе Γ, т.е. $B_h \equiv B$, $\delta = 0$, то по формуле (9.13)

$$u^{(k+1)}(B_h) = u(B) = \varphi(B).$$

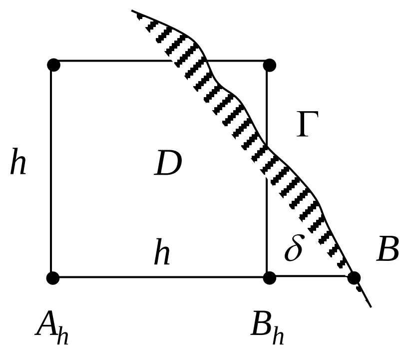

Рис. 9.3

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока в пределах заданной точности ε не совпадут два последовательных шаблона, т.е. пока не выполнится неравенство:

$$\left| u_{ij}^{(k+1)} - u_{ij}^{(k)} \right| \le \varepsilon$$

для всех значений i, j.

9.4. Метод сеток для уравнения параболического типа

В качестве примера уравнения параболического типа остановимся на уравнении теплопроводности для однородного стержня длиной $0 \le x \le l$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9.14}$$

где $u = u(x,t)$ – температура и t – время.

Будем предполагать, что $a = 1$, так как к этому можно прийти, введя новое время $\tau = a^2 t$. Таким образом, от уравнения (9.14) перейдем к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{9.15}$$

Пусть задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$

$$u(x,0) = f(x)$$

и законы изменения температуры в зависимости от времени на концах стержня $x = 0$ и $x = l$:

$$u(0,t) = \varphi(t);\ u(l,t) = \psi(t).$$

Требуется найти распределение температуры $u = u(x,t)$ вдоль стержня длиной $0 \le x \le l$ в любой момент времени t. Решим эту задачу методом сеток.

Для этого рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{x,t\}$ (рис. 9.4). В полуполосе $t \ge 0$, $0 \le x \le l$ построим прямоугольную сетку $x = ih, i = \overline{0,n}$, $t = jk$, $j = 0,1,2,\ldots$, где $h = \frac{l}{n}$ – шаг по оси OX и $k = \delta h^2$ – шаг по оси Ot Постоянная величина δ пока не определена. Ниже будет показано, как она выбирается.

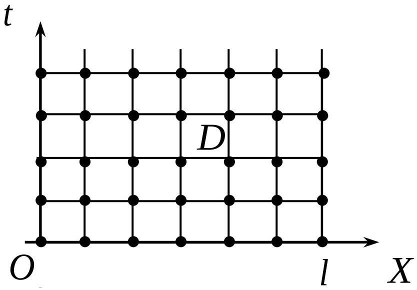

Рис. 9.4

Введя обозначения $x_i = ih$, $t_j = jk$, $u_{ij} = u\left(x_i, t_j\right)$ и заменяя уравнение (9.15) конечно-разностным уравнением, будем иметь:

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\delta h^2} = \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}. \tag{9.16}$$

После преобразований получим:

$$u_{ij+1} = \delta u_{i-1j} + \left(1 - 2\delta\right) u_{ij} + \delta u_{i+1j}. \tag{9.17}$$

Из формулы (9.17) видно, что для подсчета значения искомой функции $u\left(x,t\right)$ в узловых точках $\left(j+1\right)$-го слоя используются уже известные значения этой функции в трех соседних узловых точках j-го слоя (рис. 9.5).

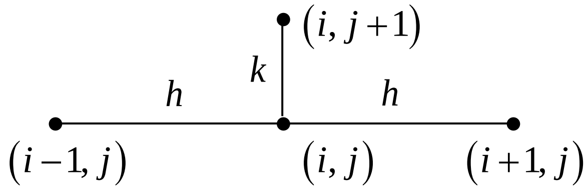

Рис. 9.5

Исходя из начального слоя $t = 0$, значения функции $u\left(x,t\right)$ для которого определяются из начального условия $u\left(x_i, 0\right) = f\left(x_i\right), i = \overline{0,n}$, и используя значения функции в граничных узловых точках, определяемые граничными условиями

$$u\left(0, t_j\right) = \varphi\left(t_j\right),$$

$$u\left(l, t_j\right) = \psi\left(t_j\right),$$

по формуле (9.17) последовательно вычисляются $u\left(x_i, t_1\right)$, $u\left(x_i, t_2\right)$, …, $i = \overline{0,n}$.

Рассмотрим вопрос выбора величины δ.

Определение 9.6. Конечно-разностная схема называется устойчивой, если малые погрешности, допущенные в процессе решения, затухают или остаются малыми при неограниченном увеличении номера текущего слоя. В противном случае конечно-разностная схема называется неустойчивой.

Конечно-разностная схема (9.17) будет устойчивой, если величина δ удовлетворяет условию

$$0 < \delta \le \frac{1}{2}.$$

При выборе δ нужно исходить еще из требования, чтобы ошибка, возникающая при замене дифференциального уравнения (9.15) конечно-разностным уравнением (9.16), была наименьшей.

Введем обозначения:

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t};$$

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2}\left[\left(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}\right) - \frac{1}{\delta}\left(u_{ij+1} - u_{ij}\right)\right].$$

Разность

$$R_h[u] = L_h[u] - L[u]$$

является погрешностью, которая возникает при замене уравнения (9.15) конечно-разностным уравнением (9.16).

Вычислим эту погрешность в узлах сетки для функции $u(x,t)$, которая является решением уравнения (9.15).

При этом $L[u] = 0$ и $R_h[u] = L_h[u]$.

Разлагая $L_h[u]$по формуле Тейлора в окрестности точки $\left(x_i, t_j\right)$, ограничиваясь членами порядка h^6, после приведения подобных членов получим:

$$R_h[u] = L_h[u] = \left(\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} - \frac{\partial u_{ij}}{\partial t}\right) + h^2\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2}\right) +$$

$$+h^4\left(\frac{1}{360}\frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} - \frac{\delta^2}{6}\frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial t^3}\right) + O\left(h^6\right).$$

Но так как $u(x,t)$ – решение уравнения (9.15), то заменяя частные производные по t на равные им частные производные по x, получим:

$$L_h[u] = h^2\left(\frac{1}{12} - \frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} + h^4\left(\frac{1}{360} - \frac{\delta^2}{6}\right)\frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} + O\left(h^6\right). \qquad (9.18)$$

Выберем δ так, чтобы первая скобка (9.18) была равна нулю. Получим $\delta = \frac{1}{6}$.

При $\delta = \frac{1}{6}$ оценка погрешности равна

$$R_h[u] = -\frac{h^4}{540}\cdot\frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} + O\left(h^6\right) = O\left(h^4\right).$$

Тогда как при другом $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ будем иметь

$$R_h[u] = O\left(h^2\right).$$

Подставив в (9.17) $\delta = \frac{1}{6}$, получим:

$$u_{ij+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i-1j} + 4u_{ij} + u_{i+1j}\right).$$

При $\delta = \frac{1}{2}$ будем иметь

$$u_{ij+1} = \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j}}{2}.$$

Из рассмотренной конечно-разностной схемы (так называемой «явной схемы») ясно, что шаги h и k неодинаковы и выбор шага h накладывает ограничения на выбор шага k. При малом h продвижение решения по t весьма незначительно и объем работы чрезвычайно велик.

Рассмотрим другую устойчивую конечно-разностную схему (так называемую «неявную схему»), для которой шаг k может быть выбран достаточно крупным.

Соотношение шагов h и k выбирается так:

$$k = \frac{h^2}{S}.$$

Исходное дифференциальное уравнение (9.15) заменяется конечноразностным уравнением вида

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h^2/S} = \frac{u_{i+1j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i-1j+1}}{h^2}. \tag{9.19}$$

Начальные и граничные условия остаются теми же, что в предыдущем случае. Для решения системы линейных алгебраических уравнений (9.19) применяется метод прогонки.

Суть метода прогонки состоит в том, что сначала вычисляются значения $u_{i0} = f_i$, выбирается значение S для получения требуемой скорости продвижения по оси t. В прямом ходе на очередном $(j+1)$-м временном слое вычисляются вспомогательные функции:

$$a_{1j+1} = \frac{1}{2+S};$$
$$b_{1j+1} = \varphi_{j+1} + Su_{1j};$$

$$a_{ij+1} = \frac{1}{2+S-a_{i-1j+1}};$$
$$b_{ij+1} = a_{i-1j+1}b_{i-1j+1} + Su_{ij}, i = \overline{2,n}.$$

В обратном ходе вычисляются значения искомой функции на $(j+1)$ слое по формуле

$$u_{ij+1} = a_{ij+1}(b_{ij+1} + u_{i+1j+1}).$$

Величина $u_{nj+1} = \psi_{j+1}$ является значением искомой функции в точке (x_n, t_{j+1}), а $u_{0j+1} = \varphi_{j+1}$ – в точке (x_0, t_{j+1}). Схема устойчива при любом $S > 0$. Погрешность метода $O(h^2 + k)$.