## Лабораторная работа №1-2

## ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ<br>РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Цель работы:* научиться решать нелинейные уравнения методом простых итераций, методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона с помощью ЭВМ [1-5, 9].

*Содержание работы:*

1) изучить метод простых итераций, метод Ньютона и модифицированный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений;
2) на конкретном примере усвоить порядок решения нелинейных уравнений с помощью ЭВМ указанными методами;
3) составить программу на любом языке программирования и с ее помощью решить уравнение с точностью $\varepsilon = 0.001$ и $\delta = 0.01$. Сделать вывод о скорости сходимости всех трех методов;
4) изменить $\varepsilon = \varepsilon/10, \delta = \delta/10$ и снова решить задачу. Сделать выводы о: скорости сходимости рассматриваемых методов; о влиянии точности на скорость сходимости; о влиянии выбора начального приближения в методе простых итераций на скорость сходимости;
5) составить отчет о проделанной работе.

Пример выполнения работы

*Задание.*

1. Доказать графическим и аналитическим методами существование единственного корня нелинейного уравнения

$$f(x) = e^x + x = 0 \tag{1}$$

на отрезке $x \in [-1, 0]$.

2. Построить рабочие формулы метода простых итераций, метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона, реализующие процесс поиска корня нелинейного уравнения (1) на указанном отрезке.
3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую построенные итерационные процессы.

*Решение.*

1. Докажем *графическим методом* единственность корня

нелинейного уравнения (1). Из графика функции $f(x) = e^x + x$ (рис 1) видно, что функция $f(x)$ пересекает ось $OX$ в одной точке, являющейся приближенным значением единственного корня нелинейного уравнения (1).

Так как данная функция имеет сложный аналитический вид, преобразуем уравнение (1) к виду $e^x = -x$ и построим два графика $y = e^x$ и $y = -x$, имеющих более простой аналитический вид (рис. 2). Абсцисса точки пересечения графиков является приближенным значением корня. Заметим, что графический метод показывает количество корней исходного уравнения, но не доказывает единственность корня на отрезке.

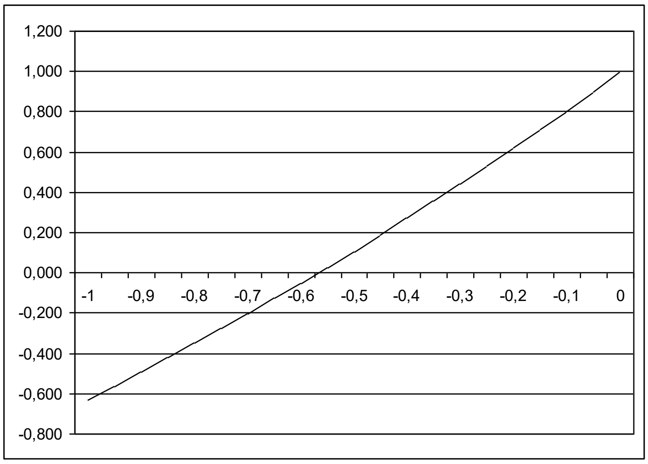


Рис. 1

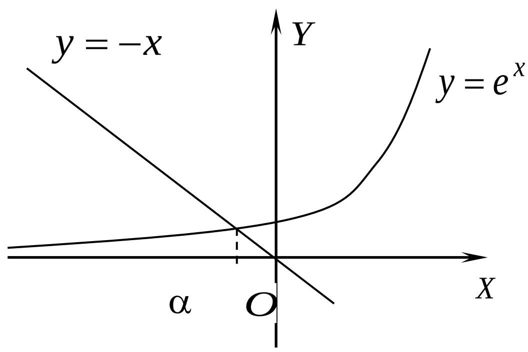


Рис. 2

*Аналитический метод.* Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 0]$, имеет на концах отрезка разные знаки ($f(-1) = -0.632$; $f(0) = 1$), а производная функции $f(x)$ не меняет знак на отрезке ($f'(x) = e^x + 1 > 0 \; \forall x \in [-1, 0]$). Следовательно, нелинейное уравнение (1) имеет на указанном отрезке единственный корень.

2. *Метод простых итераций.* Построим функцию $\varphi(x) = x + cf(x)$. Константа $c$ выбирается из достаточного условия сходимости

$$|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]. \tag{2}$$

Если производная $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, то значение $c$ выбирается из интервала $\frac{-2}{f'(x)} < c < 0$, если производная $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$, то – из интервала $0 < c < \frac{-2}{f'(x)}$. Так как для рассматриваемой задачи производная

$f'(x)$ всюду положительна на отрезке $[-1,0]$, то придавая переменной $x$ различные значения из интервала $[-1,0]$ и выбирая наименьший интервал $\frac{-2}{f'(x)} < c < 0$, получим $-1 < c < 0$. Выбираем произвольное значение $c$ из этого интервала. Пусть $c = -0.1$. Тогда рабочая формула метода простых итераций будет иметь вид:

$$x_{n+1} = x_n - 0,1 \cdot \left(e^{x_n} + x_n\right), n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

Итерационный процесс (3) можно начать, задав произвольное начальное приближение $x_0 \in [-1, 0]$, а заканчивается он при одновременном выполнении двух условий:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon \text{ и } \left|f\left(x_{n+1}\right)\right| \le \delta. \tag{4}$$

В этом случае значение $x_{n+1}$ является приближенным значением корня нелинейного уравнения (1) на отрезке $[-1,0]$.

*Метод Ньютона*. В качестве начального приближения $x_0$ здесь выбирается правый или левый конец отрезка в зависимости от того, в каком из концов выполняется достаточное условие сходимости метода Ньютона вида:

$$f\left(x_0\right) f''\left(x_0\right) > 0. \tag{5}$$

Заметим, что в точке $x = -1$ условие (5) не выполняется, а в точке $x = 0$ – выполняется. Следовательно, в качестве начального приближения выбирается точка $x_0 = 0$. Рабочая формула метода Ньютона $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,...$ для данного уравнения запишется так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} + 1}, n = 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

Условия выхода итерационного процесса (6) аналогичны условиям (4) метода простых итераций.

*Модифицированный метод Ньютона*. Начальное приближение $x_0$ выбирается аналогично методу Ньютона, т.е. $x_0 = 0$. Рабочая формула модифицированного метода Ньютона $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, n = 0, 1, 2, ...$ для данной задачи запишется так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_0} + 1}, n = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

Условия выхода итерационного процесса (7) аналогичны условиям

(4) метода простых итераций.

<u>Замечание:</u> для того чтобы сделать вывод о скорости сходимости методов, необходимо в каждом методе выбирать одинаковое начальное приближение. Так как метод Ньютона и его модификацию нельзя запустить с произвольного начального приближения из отрезка как метод простых итераций, а только из правой и (или) левой границы отрезка, то все три метода запускаем из этой границы.

3. Блок-схема метода простых итераций, метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона приведена на схеме (рис. 3).


Рис. 3

В качестве примера приведем программы на языках программирования Pascal и C, реализующие итерационный процесс метода простых итераций.

Пример программы на языке PASCAL

```
Program Pr_iter;
Uses Crt;
var n:integer;
    x0,x,eps,d,y,z,c:real;

begin
 clrscr;
 n:=0;x0:=-1;c:=-0.1;x:=x0;eps:=0.001;d:=0.01;
 repeat
  y:=x+c*(exp(x)+x);
  z:=x;
  writeln(n:3,x:9:5,y:9:5,abs(y-x):9:5,abs(exp(y)+y):9:5);
  x:=y;
```

```
 n:=n+1;
 until (abs(z-x)<=eps) and (abs(exp(x)+x)<=d);
end.
```

Пример программы на языке С

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
main()
{
 int n=0;
 float x,y,z,x0=-1,c=-0.1,eps=0.001,d=0.01;
 x=x0;
 clrscr();
 do
 {
  y=x+c*(exp(x)+x);z=x;
  printf("%d %.4f %.4f %.4f %.4f\n",n++,x,y,fabs(y-x), fabs(exp(y)+y));
  x=y;
 }
 while(fabs(z-x)>e || fabs(exp(x)+x)>d);
 getch();
}
```

*Решение:* в результате решения нелинейного уравнения (1) на указанном отрезке тремя методами при начальном приближении $x_0 = 0$ с точностями $\varepsilon = 0.001$ и $\delta = 0.01$ получены следующие результаты: методом простых итераций $x_{27} = -0.5621$; методом Ньютона $x_3 = -0.5671$; модифицированным методом Ньютона $x_5 = -0.5670$.

4. *Содержание отчета.*

В отчет о проделанной работе должны входить: номер и название работы; цель и содержание работы; задание на работу; теоретическая часть работы (вывод итерационных формул); листинг программы; таблицы результатов (в случае, если число итераций в таблице достаточно большое, в отчет достаточно занести две первых и две последних итерации); выводы о проделанной работе.

Порядок выполнения работы

1. Определить количество корней исходного нелинейного уравнения графическим методом и построить графики (см. рис. 1 и рис. 2).
2. Доказать аналитическим методом единственность корня

исходного нелинейного уравнения на указанном отрезке.

3. Записать итерационные формулы, реализующие процесс поиска корня на отрезке методом простых итераций, методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона.

4. Составить программу на любом языке программирования, реализующую построенные итерационные процессы, используя алгоритм методов (рис. 3). Печать результатов должна осуществляться на каждом шаге итераций в виде таблицы (заполнить по образцу):

| $n$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $\lvert x_{n+1}-x_n \rvert$ | $\lvert f(x_{n+1}) \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

5. Провести вычислительные эксперименты.

6. Сделать выводы о трудоемкости методов, скорости их сходимости и точности полученных результатов.

7. Составить отчет о проделанной работе.

Варианты индивидуальных заданий

Таблица 1.

| Номер варианта | Нелинейное уравнение | Отрезок |
|---|---|---|
| 1 | $e^x + x^2 - 2 = 0$ | $[-1.5;-0.5]$ |
| 2 | $e^x + x^2 - 2 = 0$ | $[0;0.6]$ |
| 3 | $e^{4x} + x = 0$ | $[-1;0]$ |
| 4 | $e^{-x} - x + 2 = 0$ | $[1.5;2.5]$ |
| 5 | $e^x - 2(x-1)^2 = 0$ | $[-1.1;1.5]$ |
| 6 | $2\sin(x) - x + 0.4 = 0$ | $[-2.5;-1.5]$ |
| 7 | $2\sin(x) - x + 0.4 = 0$ | $[-1;-0.1]$ |
| 8 | $2\sin(x) - x + 0.4 = 0$ | $[1.5;2.5]$ |
| 9 | $2x - 4\cos(x) - 0.6 = 0$ | $[1;1.5]$ |
| 10 | $3\cos(2x) - x + 0.25 = 0$ | $[-2.0;-1.8]$ |
| 11 | $3\cos(2x) - x + 0.25 = 0$ | $[-1.3;-0.9]$ |
| 12 | $3\cos(2x) - x + 0.25 = 0$ | $[0.5;0.75]$ |
| 13 | $3\cos(2x) - x + 0.25 = 0$ | $[2.5;2.9]$ |
| 14 | $3\cos(2x) - x + 0.25 = 0$ | $[3.2;3.5]$ |
| 15 | $e^x + \sin(x) - 1 = 0$ | $[-5.5;-4.8]$ |

| | | |
|---|---|---|
| 16 | $e^x + \sin(x) - 1 = 0$ | $[-4.7; -3.5]$ |
| 17 | $e^x + \sin(x) - 1 = 0$ | $[-1; 0.69]$ |

Окончание Таблицы 1.

| Номер варианта | Нелинейное уравнение | Отрезок |
|---|---|---|
| 18 | $e^x + \sin(2x) + 0.5 = 0$ | $[-10.9; -10.5]$ |
| 19 | $e^x + \sin(2x) + 0.5 = 0$ | $[-10; -9.5]$ |
| 20 | $e^x + \sin(2x) + 0.5 = 0$ | $[-8; -7.59]$ |
| 21 | $e^x + \sin(2x) + 0.5 = 0$ | $[-7; -6.5]$ |

Для выполнения лабораторной работы 1-2 необходимо получить номер варианта индивидуального задания из табл. 1.

## Лабораторная работа №8

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

*Цель работы:* научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) методами Эйлера и Рунге–Кутта четвертого порядка с помощью ЭВМ [1-5].

*Содержание работы:*

1) изучить методы Эйлера и Рунге–Кутта четвертого порядка для приближенного решения ОДУ;
2) на конкретном примере усвоить порядок решения ОДУ указанными методами с помощью ЭВМ;
3) составить программу на любом языке программирования, реализующую процесс приближенного решения ОДУ указанными методами;
4) сделать вывод о точности используемых методов;
5) составить отчет о проделанной работе.

Пример выполнения работы

*Задание.*

1. Аналитически решить задачу Коши вида:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x,y) = x^4 y; \tag{21}$$

$$y(x_0) = y(1) = y_0 = 1. \tag{22}$$

2. Записать рабочие формулы метода Эйлера и метода Рунге−Кутта четвертого порядка точности для численного решения уравнения (21) при начальном условии (22) на отрезке

$$x \in [x_0, x_n] = [1, 1.8]. \tag{23}$$

3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую построенные процессы.

*Решение.*

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (21) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Его аналитическим решением являются интегральные кривые вида $y(x,c) = ce^{\frac{x^5}{5}}$, где постоянная $c$ определяется из начального условия (22) и равна $c = e^{-\frac{1}{5}}$. Таким образом, решением задачи Коши (21), (22) является интегральная кривая $y(x) = e^{-\frac{1}{5}} e^{\frac{x^5}{5}}$.

2. Для построения рабочих формул методов Эйлера и Рунге−Кутта четвертого порядка точности разделим отрезок (23) на $n$ равных частей и сформируем систему равноотстоящих точек $x_{i+1} = x_i + h$, $i = \overline{0, n-1}$, где $x_0 = 1$, $x_n = 1.8$, шаг интегрирования $h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{0.8}{n}$.

Рабочая формула метода Эйлера в общем случае имеет вид:

$$y_{i+1}^E = y_i^E + hf\left(x_i, y_i^E\right), i = \overline{0, n-1}.$$

Для поставленной задачи данная формула запишется так:

$$y_{i+1}^E = y_i^E + hx_i^4 y_i^E, i = \overline{0, n-1}. \tag{24}$$

Для вычислений по методу Рунге−Кутта четвертого порядка необходимо предварительно вычислить четыре коэффициента:

$$k_{1i} = hf\left(x_i, y_i^{RK}\right);$$

$$k_{2i} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^{RK} + \frac{k_{1i}}{2}\right);$$

$$k_{3i} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^{RK} + \frac{k_{2i}}{2}\right);$$

$$k_{4i} = hf\left(x_i + h, y_i^{RK} + k_{3i}\right),$$

а рабочая формула имеет вид:

$$y_{i+1}^{RK} = y_i^{RK} + \frac{1}{6}\left(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}\right),\ i = \overline{0, n-1}. \tag{25}$$

Для рассматриваемой задачи коэффициенты запишутся так:

$$\begin{aligned} k_{1i} &= hx_i^4 y_i^{RK}; \\ k_{2i} &= h\left(x_i + \frac{h}{2}\right)^4 \left(y_i^{RK} + \frac{k_{1i}}{2}\right); \\ k_{3i} &= h\left(x_i + \frac{h}{2}\right)^4 \left(y_i^{RK} + \frac{k_{2i}}{2}\right); \\ k_{4i} &= h\left(x_i + h\right)^4 \left(y_i^{RK} + k_{3i}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Итерационные процессы, определяемые формулами (24), (25) и (26), можно начать, задав начальное условие (22). Процессы заканчиваются при достижении конца отрезка (23). В этом случае построенные интегральные кривые $\{x_{i+1}, y_{i+1}\}$ являются приближенными решениями рассматриваемыми методами задачи Коши (21) и (22) на отрезке (23).

3. Рассмотрим блок-схему построения приближенного решения задачи Коши методами Эйлера и Рунге–Кутта (рис. 8):


Рис. 8

Результаты построения аналитического решения задачи Коши (21), (22) на отрезке (23) и приближенных значений интегральных кривых по методам Эйлера и Рунге-Кутта четвертого порядка в виде графиков приведены на рис. 9.

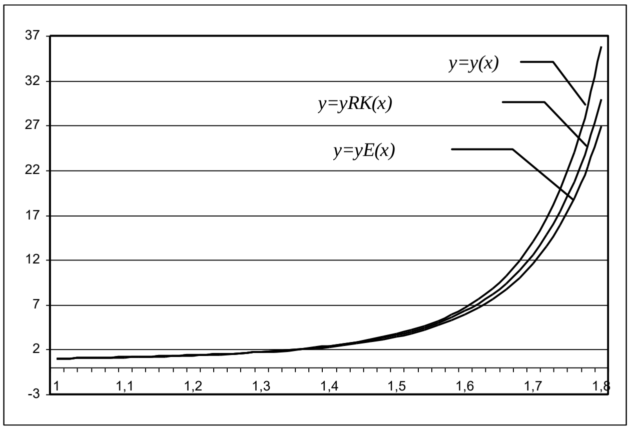


Рис. 9

4. Содержание отчета.

В отчет о проделанной работе должны входить: номер и название лабораторной работы; цель работы; содержание работы; задание на работу; теоретическая часть работы; листинг программы; таблицы результатов; графики; выводы о проделанной работе.

## Порядок выполнения работы

1. Аналитически решить задачу Коши (21), (22).
2. Записать рабочие формулы методов Эйлера и Рунге–Кутта четвертого порядка для приближенного решения сформулированной задачи на отрезке (23).
3. Используя блок-схему (см. рис.8), составить программу на любом языке программирования, реализующую метод Эйлера и метод Рунге–Кутта для задачи Коши. Печать результатов должна осуществляться на каждом шаге интегрирования в виде таблицы (заполнить по образцу):

| $i$ | $x_i$ | $y(x_i)$ | $y_i^E$ | $\lvert y(x_i)-y_i^E \rvert$ | $y_i^{RK}$ | $\lvert y(x_i)-y_i^{RK} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

4. Провести вычисления при $h = h/10$.
5. Построить графики точного решения и двух приближенных (методы Эйлера и Рунге–Кутта).
6. Составить отчет о проделанной работе.

## Варианты индивидуальных заданий

Таблица 6.

| Номер варианта | Задача Коши | Отрезок |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{dy}{dx} = x^2 y,\ y(-1) = 1$ | $[-1,0]$ |
| 2 | $\frac{dy}{dx} = (x+1)y,\ y(1) = -1$ | $[1,2]$ |
| 3 | $\frac{dy}{dx} = (x-2)y,\ y(-1) = -1$ | $[-1,0]$ |
| 4 | $\frac{dy}{dx} = x(y-1),\ y(1) = -1$ | $[1,2]$ |
| 5 | $\frac{dy}{dx} = x^2(y-1),\ y(0) = 0$ | $[0,1]$ |
| 6 | $\frac{dy}{dx} = x^2(y+2),\ y(1) = 0$ | $[1,2]$ |

Окончание Таблицы 6.

| Номер варианта | Задача Коши | Отрезок |
|---|---|---|
| 7 | $\frac{dy}{dx} = y\cos x,\ y(0)=1$ | $[0,1]$ |
| 8 | $\frac{dy}{dx} = xy,\ y(0)=-1$ | $[0,1]$ |
| 9 | $\frac{dy}{dx} = (x-1)y,\ y(-2)=-2$ | $[-2,-1]$ |
| 10 | $\frac{dy}{dx} = x^3 y,\ y(-2)=2$ | $[-2,-1]$ |
| 11 | $\frac{dy}{dx} = x(y+2),\ y(2)=-1$ | $[2,3]$ |
| 12 | $\frac{dy}{dx} = x^2(y+1),\ y(1)=0.1$ | $[1,2]$ |
| 13 | $\frac{dy}{dx} = y\sin x,\ y(2)=1$ | $[2,3]$ |
| 14 | $\frac{dy}{dx} = y\cos 2x,\ y(0)=-2$ | $[0,1]$ |
| 15 | $\frac{dy}{dx} = y^2 x,\ y(1)=2$ | $[1,1.3]$ |
| 16 | $\frac{dy}{dx} = (x+2)y,\ y(-1)=1$ | $[-1,0]$ |
| 17 | $\frac{dy}{dx} = x(y+1),\ y(1)=0$ | $[1,2]$ |
| 18 | $\frac{dy}{dx} = x(y-2),\ y(-1)=-1$ | $[-1,0]$ |
| 19 | $\frac{dy}{dx} = x^2(y-2),\ y(0)=2.2$ | $[0,1]$ |
| 20 | $\frac{dy}{dx} = y\sin 2x,\ y(0)=1$ | $[0,1]$ |
| 21 | $\frac{dy}{dx} = x(y+3),\ y(0)=1$ | $[0,1]$ |

Для выполнения лабораторной работы 8 необходимо получить номер варианта индивидуального задания из табл. 6.

## Лабораторная работа №9

## НЕПРЕРЫВНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Цель работы:* научиться решать нелинейные уравнения непрерывными схемами, в частности методом малого параметра [7-10].

*Содержание работы:*

1) изучить метод малого параметра для решения нелинейных уравнений;
2) на конкретном примере усвоить порядок решения нелинейных уравнений с помощью ЭВМ указанным методом;
3) составить программу на любом языке программирования и с ее помощью решить нелинейное уравнение с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\delta = 10^{-4}$;
4) составить отчет о проделанной работе.

Пример выполнения работы

*Задание.*

1. Определить графическим методом количество корней нелинейного уравнения

$$f(x) = e^{x} + x = 0 \tag{27}$$

на отрезке $x \in [-1, 0]$.

2. Записать рабочую формулу метода малого параметра, реализующую процесс поиска корней нелинейного уравнения (27) на указанном отрезке.
3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую построенный итерационный процесс.

*Решение.*

Итерационные методы решения нелинейного уравнения (27) можно разбить на две группы:
– дискретные схемы решения;
– непрерывные схемы решения.

Дискретные схемы решения были рассмотрены в лабораторных работах № 1-2 решения нелинейных уравнений методом простых итераций, методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона. Основными недостатками перечисленных методов являются:

- зависимость от начальных условий или от интервала нахождения корня;

- сравнительно низкая скорость сходимости;

- нет правил перехода от корня к корню уравнения (27) в случае, если их несколько.

При применении непрерывных схем для решения уравнения

$$f(x)=0 \tag{28}$$

процесс нахождения корней осуществляется путем решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt}=\Phi\big(f(x), f'(x)\big), x(0)=x_0 . \tag{29}$$

Непрерывные схемы решения обладают более высокой скоростью сходимости и более высокой точностью решения по сравнению с соответствующими дискретными схемами. Но проблема зависимости от начальных условий и отсутствие правил перехода от корня к корню в случае, когда уравнение (27) имеет более одного решения, остается открытой.

Перепишем уравнение (2) в виде

$$\mu\frac{dx}{dt}=-f(x), \tag{30}$$

где $\mu$ – малый параметр, $0<\mu<<1$.

Как видно из дифференциального уравнения (28) и уравнения (30), левая часть последнего заменяется производной $\frac{dx}{dt}$. Данная замена является грубым приближением решения задачи (28) к решению задачи (30). Это влечет за собой не только наибольшую погрешность при вычислениях, но и к снижению скорости расчетов.

Переход от задачи (28) к задаче (30) теоретически обоснован, так как интегральные кривые, являющиеся решением уравнения с малым параметром (30), проходят через все решения уравнения (28). Задачу нахождения корней этого уравнения непрерывным сингулярным аналогом метода простых итераций можно рассматривать как предел при $t\to\infty$ и $\mu\to 0$ решения задачи Коши вида

$$\mu\frac{dx}{dt}=-f(x), x(0)=x_0,$$

если этот предел существует.

Рассуждая аналогично, получим, что решение уравнения (30) в точке $x^*$ будет иметь вид:

$$z(t,\mu)=Ce^{\frac{-f(x^*)t}{\mu}}.$$

В силу того, что $\mu>0$, условие сходимости останется прежним.

Полученная модификация классических схем решения не зависит от начальных условий и обладает более высокой точностью решения.

Рассмотрим блок-схему метода малого параметра (рис. 10).


Рис. 10.

Приведем программу на языке программирования Pascal, реализующая итерационный процесс метода малого параметра.

## Пример программы на языке PASCAL

```
program lab9;
uses crt;
const a=-1;b=0;
var x,y,z,h,mu,eps,del:real;
    i,signf:integer;

function nf(x:real):real;
begin nf:=exp(x)+x; end;

begin
 clrscr;
 x:=a;mu:=0.01;h:=0.0001;i:=0;eps:=0.00001;del:=0.0001;
 repeat
 if nf(x)>0 then signf:=1 else signf:=-1;
 y:=x+signf*(h/mu)*nf(x);
 writeln(i:3,' ',x:6:3,' ',y:6:3,' ',abs(y-x):7:4,' ',nf(y):7:4);
 i:=i+1;
 if (abs(y-x)<=eps) and (abs(nf(y))<=del) then begin
```

```
   writeln('Reshenie ',y:6:3);
   signf:=-1*signf;
   i:=0;y:=y+h/mu;
 end;
 z:=y;
 x:=z;
 until x>b;
end.
```

В результате решения нелинейного уравнения (27) на указанном отрезке методом малого параметра при начальном приближении $x_0 = -1$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\delta = 10^{-4}$ получен результат $x_{564} = -0.567$.

4. Содержание отчета.

В отчете о проделанной работе должны входить: номер и название лабораторной работы; цель работы; содержание работы; задание на работу; теоретическая часть работы; листинг программы; таблицы результатов (в случае, если число итераций в таблице достаточно большое, в отчет занести две первых и две последних итерации); выводы о проделанной работе.

Порядок выполнения работы

1. Определить количество корней исходного нелинейного уравнения графическим методом.
2. Записать рабочую формулу метода малого параметра, реализующую вычислительный процесс поиска корней нелинейного уравнения (27) на указанном отрезке.
3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую построенный вычислительный процесс, используя приведенный алгоритм (см. рис. 10). Печать результатов должна осуществляться на каждом шаге в виде таблицы (заполнить по образцу):

| $n$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$ | $\lvert f(x_{n+1}) \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

4. Сделать выводы о проделанной работе.
5. Составить отчет о проделанной работе.

Варианты индивидуальных заданий

Таблица 7

| Вариант | Нелинейное уравнение | Отрезок |
|---|---|---|
| 1 | $3\cos(2x) - x + 0.25 = 0$ | $[-2.0;3.5]$ |
| 2 | $2\sin(x) - x + 0.4 = 0$ | $[-2.5;2.5]$ |
| 3 | $e^x + \sin(2x) + 0.5 = 0$ | $[-10.9;-2.1]$ |
| 4 | $e^x + x^2 - 2 = 0$ | $[-1.5;0.6]$ |
| 5 | $e^x + \sin(x) - 1 = 0$ | $[-5.5;0.69]$ |
| 6 | $\sin(x) - x - 0.1 = 0$ | $[-3;3]$ |
| 7 | $\sin(2x) - 0.3x + 0.5 = 0$ | $[-1.6;5.0]$ |
| 8 | $\sin(2x) - 0.1x - 0.5 = 0$ | $[-2.0;4.9]$ |
| 9 | $\sin(2x) - 0.1x - 0.5 = 0$ | $[-5.0;5.4]$ |
| 10 | $\sin(2x) - 0.1x - 0.3 = 0$ | $[-5.0;5.0]$ |
| 11 | $\sin(2x) - 0.1x - 0.3 = 0$ | $[0;4.6]$ |
| 12 | $\sin(2x) - 0.1x - 0.3 = 0$ | $[-5;5.5]$ |
| 13 | $\sin(3x) - e^x = 0$ | $[-5.4;-1]$ |
| 14 | $\sin(3x) - e^x + 0.5 = 0$ | $[-5.2;-0.8]$ |
| 15 | $\sin(3x) - e^x - 0.5 = 0$ | $[-8;-0.8]$ |
| 16 | $\cos(2x) - e^{3x} - 0.1 = 0$ | $[-7.5;0.3]$ |
| 17 | $\cos(2-x) - e^{-x} + 0.4 = 0$ | $[0.4;6.8]$ |
| 18 | $-\cos(x-3) - e^{-x} + 0.4 = 0$ | $[-0.5;4.6]$ |
| 19 | $\cos(2x) - e^{-x} + 0.3 = 0$ | $[-0.6;4.5]$ |
| 20 | $\cos(-3x) + e^{-x} - 0.2 = 0$ | $[0.2;5]$ |
| 21 | $\cos(-4x) + e^{-x} - 0.6 = 0$ | $[0.3;5.1]$ |

Для выполнения лабораторной работы 9 необходимо получить номер варианта индивидуального задания из табл. 7.

## Лабораторная работа №11

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Цель работы*: научиться решать краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом конечных разностей и методом прогонки с помощью ЭВМ [1, 4].

*Содержание работы:*

1) изучить метод конечных разностей и метод прогонки;
2) записать исходную задачу в конечно-разностной форме;
3) подготовить полученную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) к решению методом прогонки.
4) составить программу алгоритма прямого и обратного хода вычислений.
5) решить задачу на ЭВМ с шагом $h$ и $\frac{h}{2}$.
6) получить оценку приближенного решения задачи;
7) составить отчет о работе.

Пример выполнения работы

*Задание.*

1. Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + 2x^2 y' + xy = 3x \tag{36}$$

на отрезке $[0{,}1]$ с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &y(0) - 2y'(0) = 0, \\ &2y(1) - y'(1) = 1 \end{aligned} \tag{37}$$

методом конечных разностей и методом прогонки.

2. Составить программу на любом языке программирования, реализующую процесс построения решения.

*Решение.*

1. *Метод конечных разностей.*

Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{38}$$

на отрезке $[a,b]$ с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y'(a) + \alpha_1 y(a) = A, \\ &\beta_0 y'(b) + \beta_1 y(b) = B, \end{aligned} \tag{39}$$

где числа $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ считаются известными и

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0 \tag{40}$$

т.е. одна из величин не равна нулю.

В данном случае параметры принимают следующие значения

$$p(x)=2x^2, q(x)=x, f(x)=3x;$$
$$\alpha_0=-2, \alpha_1=1, A=0, \beta_0=-1, \beta_1=2, B=1; \quad (41)$$
$$[a,b]=[0,1].$$

Требуется найти решение краевой задачи (36),(37) на отрезке $[0,1]$.

Решение находим в виде табл. 10.

Таблица 10

| $x_i$ | $x_0$ | $x_1$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $y_0$ | $y_1$ | … | $y_n$ |

Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ на $n$ равных частей и сформируем систему равноотстоящих точек

$$h=\frac{b-a}{n}, x_{i+1}=x_i+h, x_0=a, x_n=b.$$

Первая и вторая производная функции $y(x)$ в конечно-разностном виде имеют вид:

$$y''(x_i)\cong\frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2},$$
$$y'(x_i)\cong\frac{y(x_i+h)-y(x_i)}{h}, i=\overline{1,n-1}.$$

Введем обозначения:

$$y(x_i)=y_i, y(x_i+h)=y(x_{i+1})=y_{i+1}, y(x_i-h)=y(x_{i-1})=y_{i-1};$$
$$p(x_i)=p_i, q(x_i)=q_i, f(x_i)=f_i, i=\overline{1,n-1}.$$

На концах отрезка $y'(a)=\frac{y_1-y_0}{h}, y'(b)=\frac{y_n-y_{n-1}}{h}$.

Применение этих соотношений позволяет записать дифференциальное уравнение и краевые условия в виде системы, состоящей из $n+1$ уравнения

$$\begin{cases}\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}+q_iy_i=f_i,\ i=\overline{1,n-1}, & (42)\\ \alpha_0\frac{y_1-y_0}{h}+\alpha_1y_0=A, & (43)\\ \beta_0\frac{y_n-y_{n-1}}{h}+\beta_1y_n=B. & (44)\end{cases}$$

Для поставленной задачи (36), (37) система (42)–(44) запишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+2x_i^2\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}+x_iy_i=3x_i, i=\overline{1,n-1}, \\ -2\dfrac{y_1-y_0}{h}+y_0=0, \\ -\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}+2y_n=1. \end{cases} \quad (45)$$

Несложными преобразованиями систему (45) приведем к виду:

$$\begin{cases} y_{i+1}\left(1+2x_i^2h\right)+y_i\left(-2x_i^2h-2+x_ih^2\right)+y_{i-1}=3x_ih, \\ 2y_1-y_0(2+h)=0, \\ y_n(2h-1)+y_{n-1}=h, i=\overline{1,n-1}. \end{cases} \quad (46)$$

Решим эту систему методом прогонки.

2. *Метод прогонки.*

Метод прогонки является модификацией метода Гаусса и применяется для систем, имеющих разреженную матрицу коэффициентов, например, трехдиагональную матрицу. Рассмотрим алгоритм метода прогонки на примере решения системы (42)–(44). Запишем ее в канонической форме:

$$y_{i+1}(2+hp_i)+y_i\left(2h^2q_i-4\right)+y_{i-1}(2-hp_i)=2h^2f_{i.}, i=\overline{1,n-1}.$$

Преобразовав последнее уравнение, получим:

$$y_{i+1}+y_i\underbrace{\frac{2h^2q_i-4}{2+hp_i}}_{m_i}+y_{i-1}\underbrace{\frac{2-hp_i}{2+hp_i}}_{r_i}=\underbrace{\frac{2h^2f_i}{2+hp_i}}_{\varphi_i}, i=\overline{1,n-1}.$$

Тогда

$$y_{i+1}+m_iy_i+r_iy_{i-1}=\varphi_i, i=\overline{1,n-1}. \quad (47)$$

Будем искать $y_i$ в виде:

$$y_i=c_i(d_i-y_{i+1}), \quad (48)$$

где коэффициенты $c_i, d_i$ требуется определить. Соотношение (48) при $i-1$ примет вид $y_{i-1}=c_{i-1}(d_{i-1}-y_i)$, и подставим $y_{i-1}$ в (46):

$$y_{i+1}+m_iy_i+r_ic_{i-1}\left(d_{i-1}-y_i\right)=\varphi_i, i=\overline{1,n-1}.$$

Выразим из последнего выражения $y_i$:

$$y_i=\frac{1}{m_i-r_ic_{i-1}}\left(\varphi_i-r_ic_{i-1}d_{i-1}-y_{i+1}\right).$$

Сравнивая полученную формулу с (48), получим выражения для $c_i, d_i$:

$$c_i=\frac{1}{m_i-r_ic_{i-1}}; d_i=\varphi_i-r_ic_{i-1}d_{i-1}, i=\overline{1,n-1}. \quad (49)$$

Чтобы начать расчеты по этим формулам, необходимо задать $c_0, d_0$. Определим их из первого краевого условия (43). Выражая $y_0 = \dfrac{Ah - \alpha_0 y_1}{h\alpha_1 - \alpha_0}$ и сравнивая с $y_0 = c_0(d_0 - y_1)$, получим $c_0 = \dfrac{\alpha_0}{h\alpha_1 - \alpha_0}; d_0 = \dfrac{Ah}{\alpha_0}$.

Таким образом, вычисления, называемые прямым ходом, осуществляются следующим образом:

1) вычислить значения $m_i, r_i, \varphi_i, i = \overline{1, n-1}$;

2) вычислить величины $c_0, d_0$;

3) по формулам (49) вычислить значения $c_i, d_i, i = \overline{1, n-1}$.

Обратный ход вычислений состоит в следующем:

1) решить систему из двух уравнений относительно $y_n, y_{n-1}$:

$$y_{n-1} = c_{n-1}\left(d_{n-1} - y_n\right);$$

$$\beta_0 \frac{y_n - c_{n-1}\left(d_{n-1} - y_n\right)}{h} + \beta_1 y_n = B$$

и получаем $y_n = \dfrac{Bh + \beta_0 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 + c_{n-1} + h\beta_1}$;

2) вычислить значения $y_i = c_i(d_i - y_{i+1}), i = \overline{n-1, 1}$, начиная с $y_{n-1}$ и далее до $y_1$;

3) вычисляем $y_0 = \dfrac{Ah - \alpha_0 y_1}{h\alpha_1 - \alpha_0}$.

Рассмотрим алгоритм метода прогонки на примере решения системы (46).

В уравнении (47) величины $m_i, r_i, \varphi_i$ принимают вид:

$$m_i = \frac{h^2 x_i - 2}{1 + hx_i^2}; r_i = \frac{2 - hx_i}{2 + 2hx_i^2}; \varphi_i = \frac{3h^2 x_i}{1 + hx_i^2}, i = \overline{0, n}.$$

Начальное приближение: $y_0 = \dfrac{2y_1}{h+2}; c_0 = -\dfrac{2}{h+2}; d_0 = 0$.

Прямой ход вычислений:

1. вычислить значения $m_i, r_i, \varphi_i, i = \overline{0, n}$;
2. вычислить величины $c_0, d_0$;
3. вычислить значения $c_i, d_i, i = \overline{1, n-1}$.

Обратный ход вычислений:

1) решаем систему из двух уравнений относительно $y_n, y_{n-1}$:

$$y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n),$$
$$y_n = \frac{h - c_{n-1}d_{n-1}}{2h - 1 - c_{n-1}}.$$

2) вычислить значения $y_i = c_i(d_i - y_{i+1}), i = \overline{n-1,1}$, начиная с $y_{n-1}$ и до $y_1$;

3) вычислить $y_0 = \dfrac{2y_1}{h+2}$.

Для оценки погрешности метода конечных разностей применяется двойной пересчет с шагами $h, \dfrac{h}{2}$. Приближенная оценка погрешности значения получается по формуле $\left|y_i^* - \bar{y}_i\right| = \dfrac{1}{3}\left|y_i^* - y_i\right|$, где $\bar{y}_i$ - значение точного решения краевой задачи в точке $(x_i, y_i)$ и $y_i^*$ - значение в точке $x_i$, полученные соответственно с шагами $h, \dfrac{h}{2}$.

В качестве примера приведем программу на языке программирования Pascal, реализующая прямой и обратный ход вычислений.

## Пример программы на языке Pascal

```
program Lab11;
uses crt;
const n=10;
var i:integer;
    a,b,h,x,al0,al1,bet0,bet1,a1,b1:real;
    m,r,fi,c,d,y: array [0..n] of real;

function p(x:real): real;
begin p:=2*x*x; end;

function q(x:real):real;
begin q:=x; end;

function f(x:real):real;
begin f:=3*x; end;

begin
clrscr;
a:=0;b:=1;h:=(b-a)/n;
al0:=-2;al1:=1;bet0:=-1;bet1:=1;a1:=0;b1:=1;
c[0]:=al0/(h*al1-al0);
d[0]:=a1*h/al0;
writeln(' N   x   m[i]   r[i]   fi[i]  c[i]   d[i]   y[i]');
x:=a;
for i:=0 to n do begin
```

```
    m[i]:=(2*h*h*q(x)-4)/(2+h*p(x));
    r[i]:=(2-h*p(x))/(2+h*p(x));
    fi[i]:=(2*h*h*f(x))/(2+h*p(x));
    x:=x+h;
end;
for i:=1 to n do begin
    c[i]:=1/(m[i]-r[i]*c[i-1]);
    d[i]:=fi[i]-r[i]*c[i-1]*d[i-1];
end;
y[n]:=(b1+bet0*c[n-1]*d[n-1])/(bet0+c[n-1]+h*bet1);
for i:=n-1 downto 1 do begin
    y[i]:=c[i]*(d[i]-y[i+1]);
end;
y[0]:=(a1*h-al0*y[1])/(h*al1-al0);
x:=a;
for i:=0 to n do begin
    writeln(i:2,x:5:2,m[i]:7:3,r[i]:7:3,fi[i]:7:3,c[i]:7:3,d[i]:7:3,y[i]:7:3);
    x:=x+h;
end;
end.
```

Решение задачи (36), (37) с шагами $h = 0.1, h = 0.05$ приведена в виде табл. 11, 12, и графика (рис. 14).

Таблица 11

| $n$ | $x_i$ | $m_i$ | $r_i$ | $\varphi_i$ | $c_i$ | $d_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | -2.000 | 1.000 | 0.000 | -0.952 | 0.000 | -0.769 |
| 1 | 0.10 | -1.997 | 0.998 | 0.003 | -0.956 | 0.003 | -0.807 |
| 2 | 0.20 | -1.990 | 0.992 | 0.006 | -0.960 | 0.009 | -0.842 |
| 3 | 0.30 | -1.979 | 0.982 | 0.009 | -0.965 | 0.017 | -0.869 |
| 4 | 0.40 | -1.965 | 0.969 | 0.012 | -0.971 | 0.028 | -0.883 |
| 5 | 0.50 | -1.946 | 0.951 | 0.015 | -0.977 | 0.040 | -0.882 |
| 6 | 0.60 | -1.925 | 0.931 | 0.017 | -0.985 | 0.054 | -0.862 |
| 7 | 0.70 | -1.900 | 0.907 | 0.020 | -0.993 | 0.068 | -0.821 |
| 8 | 0.80 | -1.872 | 0.880 | 0.023 | -1.001 | 0.082 | -0.759 |
| 9 | 0.90 | -1.842 | 0.850 | 0.025 | -1.010 | 0.095 | -0.675 |
| 10 | 1.00 | -1.809 | 0.818 | 0.027 | -1.017 | 0.106 | -0.574 |

Таблица 12

| $n$ | $x_i$ | $m_i$ | $r_i$ | $\varphi_i$ | $c_i$ | $d_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | -2.000 | 1.000 | 0.000 | -0.976 | 0.000 | -0.742 |
| 1 | 0.05 | -2.000 | 1.000 | 0.000 | -0.976 | 0.000 | -0.760 |
| 2 | 0.10 | -1.999 | 0.999 | 0.001 | -0.977 | 0.001 | -0.778 |
| 3 | 0.15 | -1.997 | 0.998 | 0.001 | -0.978 | 0.002 | -0.795 |
| 4 | 0.20 | -1.996 | 0.996 | 0.001 | -0.979 | 0.004 | -0.811 |
| 5 | 0.25 | -1.993 | 0.994 | 0.002 | -0.980 | 0.005 | -0.825 |
| 6 | 0.30 | -1.990 | 0.991 | 0.002 | -0.982 | 0.008 | -0.836 |
| 7 | 0.35 | -1.987 | 0.988 | 0.003 | -0.983 | 0.010 | -0.844 |
| 8 | 0.40 | -1.983 | 0.984 | 0.003 | -0.984 | 0.013 | -0.849 |
| 9 | 0.45 | -1.979 | 0.980 | 0.003 | -0.986 | 0.015 | -0.850 |
| 10 | 0.50 | -1.974 | 0.975 | 0.004 | -0.988 | 0.019 | -0.846 |
| 11 | 0.55 | -1.969 | 0.970 | 0.004 | -0.990 | 0.022 | -0.838 |
| 12 | 0.60 | -1.963 | 0.965 | 0.004 | -0.992 | 0.025 | -0.825 |
| 13 | 0.65 | -1.957 | 0.959 | 0.005 | -0.993 | 0.029 | -0.807 |
| 14 | 0.70 | -1.950 | 0.952 | 0.005 | -0.996 | 0.032 | -0.784 |
| 15 | 0.75 | -1.943 | 0.945 | 0.005 | -0.998 | 0.036 | -0.755 |
| 16 | 0.80 | -1.936 | 0.938 | 0.006 | -1.000 | 0.039 | -0.721 |
| 17 | 0.85 | -1.928 | 0.930 | 0.006 | -1.002 | 0.043 | -0.681 |
| 18 | 0.90 | -1.920 | 0.922 | 0.006 | -1.004 | 0.046 | -0.637 |
| 19 | 0.95 | -1.911 | 0.914 | 0.007 | -1.006 | 0.049 | -0.589 |
| 20 | 1.00 | -1.902 | 0.905 | 0.007 | -1.008 | 0.052 | -0.537 |

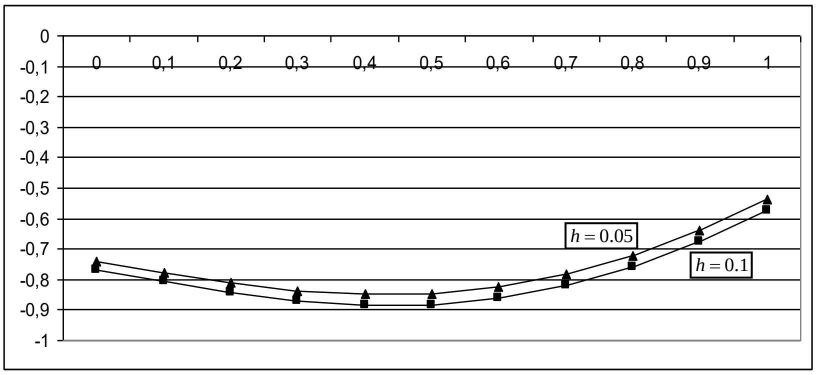


Рис. 14

Приближенная оценка погрешности в контрольной точке $x_i = 0.5$: $\left|y_i^* - \bar{y}_i\right| = \frac{1}{3}\left|-0.882 + 0.846\right| \cong 0.012$ .

В отчет о проделанной работе должны входить: номер и название лабораторной работы; цель работы; содержание работы; задание на работу; теоретическая часть работы (вывод формул); листинг программы; таблица результатов; выводы о проделанной работе.

## Порядок выполнения работы

1. Записать исходную двухточечную краевую задачу (36), (37) и определить исходные функции и данные (38), (39).
2. Записать конечно-разностный вид СЛАУ (42)–(44).
3. Записать алгоритм прямого и обратного хода вычисления для метода прогонки.
4. Составить программу на любом языке программирования, реализующую метод прогонки с шагами $h, \frac{h}{2}$. Печать результатов должна осуществляться на каждом шаге в виде таблицы (заполнить по образцу):

| $n$ | $x_i$ | $m_i$ | $r_i$ | $\varphi_i$ | $c_i$ | $d_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

5. Сделать выводы о проделанной работе и построить график.
6. Составить отчет о проделанной работе.

## Варианты индивидуальных заданий

Таблица 13

| Номер варианта | Краевая задача |
|---|---|
| 1 | $y'' + 5xy' - 0.2y = 2x$, $y(0) - y'(0) = 0, y(1) = 3.7.$ |
| 2 | $y'' - xy' - 4y = -2x$, $y(0) - y'(0) = 0, y(1) = 2.5.$ |
| 3 | $y'' + 0.5xy' + (1 + 2x^2)y = 4x$, $2y(0) + y'(0) = 1, y(1) = 1.57.$ |
| 4 | $y'' + (x - 4)y' - 3.1y = 2x$, $y(0) - y'(0) = 1, y(1) = 1.7.$ |
| 5 | $y'' + 2xy' + 2y = 2(5 - 2x`)$, $y(0) - y'(0) = 0, y(1) = 1.38.$ |
| 6 | $y'' + x^3y' + (1 - x^2)y = e^{-x^2}$, $2y(0) - y'(0) = 1, y(1) = 0.$ |
| 7 | $y'' + x^2y' + (1 - x)y = x^2 + 4$, $y(0) - y'(0) = 1, y(1) = 0.$ |
| 8 | $y'' + y'\sin x + y = \frac{1}{x}$, $2y(1) + y'(1) = 2, y(2) = 0.$ |
| 9 | $y'' + \frac{y'}{\sqrt{x^2 + 1}} + y = x$, $y(0) + 2y'(0) = 1, y(1) = 0.$ |
| 10 | $y'' + 4x^2y' - xy = 2x$, $y(0) - 2y'(0) = 0, 2y(1) - y'(1) = 1.$ |
| 11 | $y'' - xy' + y\cos x = x$, $y(0) + y'(0) = 1, 4y(1) - 2y'(1) = 2.$ |

Окончание Таблицы 13

| Номер варианта | Краевая задача |
|---|---|
| 12 | $y'' + y'\sin x + xy = x + 1$, $y(1) + y'(1) = 0.5, y(2) + y'(2) = 1.7.$ |
| 13 | $y'' + xy' - \sin(x-1)y = x + 3$, $y(1) + y'(1) = 0.3, y(2) + y'(2) = 2.$ |
| 14 | $y'' + (x^2 + 0.4)y' + y\sin x = x^2$, $y(0) + y'(0) = 1, y(1) + y'(1) = 2.$ |

Для выполнения лабораторной работы 11 необходимо получить номер варианта индивидуального задания из табл. 13.

## Лабораторная работа №12

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

*Цель работы:* научиться решать краевые задачи для дифференциальных уравнений параболического типа методом сеток с помощью ЭВМ [1, 4].

*Содержание работы:*

1) изучить метод сеток для дифференциального уравнения параболического типа с использованием явной и неявной схемы;
2) заменить исходное уравнение, начальное и краевые условия конечно-разностными соотношениями;
3) составить программу численного решения краевой задачи на ЭВМ;
4) сравнить результаты, полученные с помощью явной и неявной схем, используя разные значения параметра $S$;
5) составить отчет о проделанной работе.

Пример выполнения работы

*Задание.*

1. Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{51}$$

на примере уравнения теплопроводности однородного стержня длиной $0 \le x \le l$ с начальным условием (52) и краевыми условиями (53):

$$f(x) = 0.6\cos(-x); \tag{52}$$

$$\varphi(t) = 0.8t + 0.6e^{t};\ \ \psi(t) = 2.2t - 0.7\sin(-t) \tag{53}$$

методом сеток.

2. Заменить уравнение (51), используя конечно-разностные соотношения.

3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую процесс построения решения.

*Решение.*

1. *Метод сеток.*

Найти решение уравнения (51) при условиях:

$$u(x,0) = f(x), \tag{54}$$

$$u(0,t) = \varphi(t),\ u(l,t) = \psi(t), \tag{55}$$

где $u = u(x,t)$ - температура, $t$ - время, $a = 1$.

Рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{x,t\}$ (рис. 15). В полуполосе $t \ge 0,\ 0 \le x \le l$ построим прямоугольную сетку $x_i = ih,\ i = \overline{0,n},\ \ t_j = jk,\ j = \overline{0,m}$, $u_{ij} = u(x_i, t_j)$, где $h = \dfrac{l}{n}$ – шаг по оси $OX$ и $k = \delta h^2$ – шаг по оси $Ot$. Постоянная величина $\delta$ пока не определена.

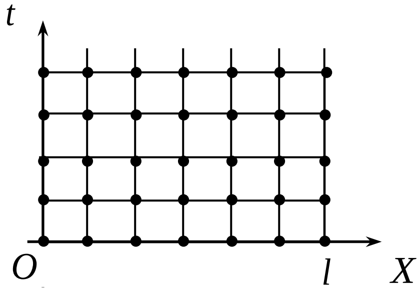


Рис. 15

Исходное дифференциальное уравнение заменим конечно-разностным уравнением в узловых точках $(x_i, t_j)$. Рассмотрим два способа аппроксимации.

2. *Явная схема.*

Конечно-разностное уравнение запишется так:

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\delta h^2} = \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2},\ i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{1,m-1}. \tag{56}$$

После преобразований получим:

$$u_{ij+1} = \delta u_{i-1j} + (1 - 2\delta)u_{ij} + \delta u_{i+1j}. \tag{57}$$

Из формулы (57) видно, что для подсчета значения искомой функции $u(x,t)$ в узловых точках $(j+1)$-го слоя используются уже известные значения этой функции в трех соседних узловых точках $j$-го слоя

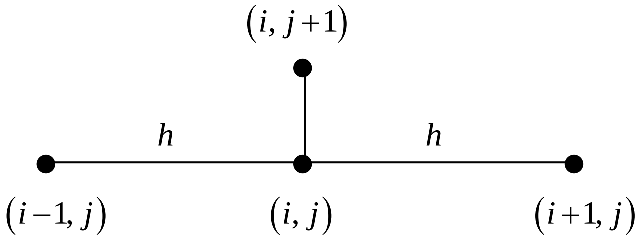


Рис.16

(рис. 16).

Величина $\delta$ выбирается из условия устойчивости конечно-разностной схемы (55), например $\delta = \frac{1}{6}$. Тогда равенство (57) примет вид:

$$u_{ij+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i-1j} + 4u_{ij} + u_{i+1j}\right), i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{0, m-1}. \quad (58)$$

Начальное и краевые условия запишутся так:

$$u_{i0} = f_i,\ u_{0j} = \varphi_j,\ u_{nj} = \psi_j,\ i = \overline{0, n},\ \ j = 0,1,\ldots. \quad (59)$$

Решение получается в численном виде по формуле (58) с учетом краевых условий (59) и представляет собой значения искомой функции $u(x,t)$ в узлах сетки $(x_i, t_j)$, т.е. $u_{ij} = u(x_i, t_j), i = \overline{0, n},\ j = 0,1,\ldots$.

Для исходной задачи (51)–(53) конечно-разностные соотношения уравнения (51) имеют вид (58), а начальное условие (52) и краевые условия (53) запишутся так:

$$u_{i0} = 0.6\cos(-x_i), u_{0j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j}, u_{nj} = 2.2t_j - 0.7\sin(-t_j), i = \overline{0, n}, j = 0,1,\ldots \quad (60)$$

Алгоритм явной схемы имеет вид:

1) пусть $l = 1, n = 10, m = 10, \delta = \frac{1}{6}$. Построить систему равноотстоящих точек $l = 1$, $h = \frac{l}{n} = 0.1$, $x_{i+1} = x_i + h, i = \overline{0, n-1}$;

2) вычислить $u_{i0} = 0.6\cos(-x_i), i = \overline{0, n}$;

3) вычислить $u_{0j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j}, t_j = j\delta h^2, j = \overline{1, m}$;

4) вычислить $u_{nj} = 2.2t_j - 0.7\sin\left(-t_j\right), t_j = j\delta h^2, j = \overline{1, m}$;

5) вычислить $u_{ij+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i-1j} + 4u_{ij} + u_{i+1j}\right), i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{0, m-1}$.

3. *Неявная схема.*

Рассмотрим другую устойчивую конечно-разностную схему (так называемую «неявную схему»), в которой используется другое соотношение между шагами $h$ и $k$: $h^2 = kS$, $S > 0$. За счет выбора параметра $S$ можно изменять скорость продвижения по оси $t$.

Исходное дифференциальное уравнение (51) заменяется конечно-разностными соотношениями:

$$\frac{S(u_{ij+1} - u_{ij})}{h^2} = \frac{u_{i+1j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i-1j+1}}{h^2}. \quad (61)$$

Начальные и граничные условия остаются теми же, что и в явной схеме (59). Для решения системы линейных алгебраических уравнений (61) применяется метод прогонки, суть которого состоит в том, что сначала вычисляются значения $u_{i0} = f_i$, выбирается значение $S$ для получения требуемой скорости продвижения по оси $t$. В прямом ходе на очередном $(j+1)$-м временном слое вычисляются вспомогательные функции:

$$\begin{aligned}
&a_{1j+1} = \frac{1}{2+S},\\
&b_{1j+1} = \varphi_{j+1} + Su_{1j},\\
&a_{ij+1} = \frac{1}{2+S-a_{i-1j+1}},\\
&b_{ij+1} = a_{i-1j+1} b_{i-1j+1} + Su_{ij},\ i = \overline{2,n},\ j = \overline{0,m-1}.
\end{aligned} \quad (62)$$

В обратном ходе вычисляются значения искомой функции на $(j+1)$ слое по формуле:

$$u_{ij+1} = a_{ij+1}(b_{ij+1} + u_{i+1j+1}),\ i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{0,m-1}. \quad (63)$$

Величина $u_{nj+1} = \psi_{j+1}$ является значением искомой функции в точках $(x_n, t_{j+1})$, а $u_{0j+1} = \varphi_{j+1}$ – в точках $(x_0, t_{j+1})$.

Алгоритм неявной схемы имеет вид:

1) пусть $l = 1, n = 10, m = 10, S = 6$. Построить систему равноотстоящих точек $l = 1$, $h = \frac{l}{n} = 0.1$, $x_{i+1} = x_i + h, i = \overline{0,n-1}$;

2) вычислить $u_{i0} = 0.6\cos(-x_i)$, $i = \overline{0,n}$;

3) вычислить $u_{0j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j}$, $t_j = j\delta h^2$, $j = \overline{1,m}$;

4) вычислить $u_{nj} = 2.2t_j - 0.7\sin(-t_j)$, $t_j = j\delta h^2$, $j = \overline{1,m}$;

5) вычислить $a_{1j+1} = \frac{1}{2+S}$, $b_{1j+1} = 0.8t_{j+1} + 0.6e^{t_{j+1}} + Su_{1j}$, $j = \overline{0,m-1}$;

6) вычислить $a_{ij+1} = \dfrac{1}{2+S-a_{i-1j+1}}$, $b_{ij+1} = a_{i-1j+1} b_{i-1j+1} + Su_{ij}$, $i = \overline{2,n}$, $j = \overline{0,m-1}$;

7) вычислить $u_{ij+1} = a_{ij+1}\left(b_{ij+1} + u_{i+1j+1}\right)$, $i = \overline{1,n-1}$, $j = \overline{0,m-1}$.

В качестве примера приведена программа на языке программирования Pascal, реализующая процесс вычислений по явной и неявной схеме.

## Пример программы на языке Pascal

```
program Lab12;
uses crt;
const n=10;m=10;a=0;b=1;delta=1/6;s=6;
var i,j:integer;
    x,h,t,gamma,m1,m2,alfa,betta,n1:real;
    a1,b1,u:array [0..n,0..m] of real;

function f(x:real): real;
begin f:=gamma*cos(m1*x); end;

function fi1(t:real):real;
begin fi1:=alfa*t+betta*exp(t); end;

function fi2(t:real):real;
begin fi2:=n1*t+m2*sin(m1*t); end;

procedure Yav;
begin
h:=(b-a)/n;
gamma:=0.6;m1:=-1;alfa:=0.8;betta:=0.6;m2:=2.2;n1:=-0.7;
for i:=0 to n do for j:=0 to m do u[i,j]:=0;
x:=a;
for i:=0 to n do begin
    u[i,0]:=f(x);
    x:=x+h;
end;
for j:=1 to m do begin
    u[0,j]:=fi1(j*delta*h*h);
    u[n,j]:=fi2(j*delta*h*h);
end;
for i:=1 to n-1 do for j:=0 to m-1 do u[i,j+1]:=1/6*(u[i-1,j]+4*u[i,j]+u[i+1,j]);
for i:=0 to n do write('  ',i:4);
writeln;
for j:=m downto 0 do begin
    write(j:2,' ');
    for i:=n downto 0 do write(u[i,j]:6:3);
```

```
    writeln;
end;
end;

procedure neyav;
begin
h:=(b-a)/n;
gamma:=0.6;m1:=-1;alfa:=0.8;betta:=0.6;m2:=2.2;n1:=-0.7;
for i:=0 to n do for j:=0 to m do u[i,j]:=0;
x:=a;
for i:=0 to n do begin
    u[i,0]:=f(x);
    x:=x+h;
end;
for j:=1 to m do begin
    u[0,j]:=fi1(j*h*h/s);
    u[n,j]:=fi2(j*h*h/s);
end;
for j:=0 to m-1 do begin
    a1[1,j+1]:=1/(2+s);
    b1[1,j+1]:=fi1((j+1)*h*h/s)+s*u[1,j];
end;
for i:=2 to n do
    for j:=0 to m-1 do begin
        a1[i,j+1]:=1/(2+s-a1[i-1,j+1]);
        b1[i,j+1]:=a1[i-1,j+1]*b1[i-1,j+1]+s*u[i,j];
    end;
for i:=1 to n-1 do for j:=0 to m-1 do u[i,j+1]:=a1[i,j+1]*(b1[i,j+1]+u[i+1,j+1]);
for i:=0 to n do write('  ',i:4);
writeln;
for j:=m downto 0 do begin
    write(j:2,' ');
    for i:=n downto 0 do write(u[i,j]:6:3);
    writeln;
end;
end;

begin
clrscr;
yav;
neyav;
end.
```

Решение задачи (51)–(53) с применением явной и неявной схем приведены в виде таблиц 14 и 15.

Таблица 14

| №п/п | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | -0.048 | 0.070 | 0.094 | 0.100 | 0.105 | 0.110 | 0.116 | 0.132 | 0.181 | 0.316 | 0.623 |
| 9 | -0.043 | 0.088 | 0.111 | 0.119 | 0.125 | 0.131 | 0.136 | 0.149 | 0.192 | 0.319 | 0.621 |
| 8 | -0.039 | 0.108 | 0.131 | 0.141 | 0.149 | 0.156 | 0.162 | 0.172 | 0.207 | 0.323 | 0.619 |
| 7 | -0.034 | 0.132 | 0.155 | 0.167 | 0.177 | 0.185 | 0.192 | 0.201 | 0.228 | 0.331 | 0.616 |
| 6 | -0.029 | 0.159 | 0.183 | 0.198 | 0.210 | 0.221 | 0.229 | 0.237 | 0.257 | 0.343 | 0.614 |
| 5 | -0.024 | 0.191 | 0.216 | 0.234 | 0.250 | 0.263 | 0.273 | 0.282 | 0.295 | 0.361 | 0.612 |
| 4 | -0.019 | 0.227 | 0.255 | 0.277 | 0.297 | 0.313 | 0.326 | 0.336 | 0.345 | 0.390 | 0.609 |
| 3 | -0.014 | 0.269 | 0.301 | 0.328 | 0.352 | 0.372 | 0.389 | 0.401 | 0.410 | 0.433 | 0.607 |
| 2 | -0.010 | 0.317 | 0.355 | 0.388 | 0.417 | 0.442 | 0.463 | 0.479 | 0.491 | 0.498 | 0.605 |
| 1 | -0.005 | 0.372 | 0.417 | 0.458 | 0.494 | 0.526 | 0.552 | 0.572 | 0.587 | 0.596 | 0.602 |
| 0 | 0.324 | 0.373 | 0.418 | 0.459 | 0.495 | 0.527 | 0.553 | 0.573 | 0.588 | 0.597 | 0.600 |

Таблица 15

| №п/п | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | -0.048 | -0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.010 | 0.078 | 0.623 |
| 9 | -0.043 | -0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.010 | 0.078 | 0.621 |
| 8 | -0.039 | -0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.010 | 0.077 | 0.619 |
| 7 | -0.034 | -0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.009 | 0.077 | 0.616 |
| 6 | -0.029 | -0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.009 | 0.077 | 0.614 |
| 5 | -0.024 | -0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.009 | 0.076 | 0.612 |
| 4 | -0.019 | -0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.009 | 0.076 | 0.609 |
| 3 | -0.014 | -0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.009 | 0.076 | 0.607 |
| 2 | -0.010 | -0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.009 | 0.076 | 0.605 |
| 1 | -0.005 | 0.319 | 0.357 | 0.391 | 0.421 | 0.447 | 0.468 | 0.485 | 0.499 | 0.523 | 0.602 |
| 0 | 0.324 | 0.373 | 0.418 | 0.459 | 0.495 | 0.527 | 0.553 | 0.573 | 0.588 | 0.597 | 0.600 |

В отчет о проделанной работе должны входить: номер и название лабораторной работы; цель работы; содержание работы; задание на работу; теоретическая часть работы (вывод формул); листинг программы; таблица результатов; выводы о проделанной работе.

## Порядок выполнения работы

1. Записать исходное дифференциальное уравнение параболического типа (51), начальное условие (52), краевые условия (53).

2. Записать алгоритмы явной и неявной схем вычислений.

3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую явную и неявную схему вычислений. Неявную схему реализовать при трех различных значениях $S$: $S=6$, $S>6$, $0<S<6$. Печать результатов должна осуществляться на каждом шаге в виде табл. 16 (заполнить по образцу):

Таблица 16

| $t_j$ \ $x_i$ | $x_0$ | $x_1$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $t_0$ | $u(x_0,t_0)$ | $u(x_1,t_0)$ | ... | $u(x_n,t_0)$ |
| $t_1$ | $u(x_0,t_1)$ | $u(x_1,t_1)$ | ... | $u(x_n,t_1)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | ... | $\vdots$ |
| $t_m$ | $u(x_0,t_m)$ | $u(x_1,t_m)$ | ... | $u(x_n,t_m)$ |

4. Сделать вывод об изменении скорости продвижения по оси $t$ в зависимости от значения параметра $S$.

5. Составить отчет о проделанной работе.

Варианты индивидуальных заданий граничных условий

Граничные условия: $f(x)=\gamma\cos mx,\ \varphi(t)=\alpha t+\beta e^{t},\ \psi(t)=Nt+M\sin mt$.

Табл. 17.

| Номер варианта | Параметры | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\gamma$ | $m$ | $\alpha$ | $\beta$ | $M$ | $N$ |
| 1 | 0.6 | 0.3 | 0.1 | 0.4 | -0.2 | 1 |
| 2 | 0.8 | 0.9 | 0.3 | -0.5 | 0.9 | -0.9 |
| 3 | 0.5 | 0.4 | -0.5 | 0.6 | 1 | -0.8 |
| 4 | 1.1 | 1 | -0.4 | -0.5 | 0.7 | 0.4 |
| 5 | 1.4 | 1 | -0.2 | 2.2 | 0.3 | -0.6 |
| 6 | 0.3 | 0.7 | 0.5 | -1.4 | -2 | 0.3 |
| 7 | 0.7 | 0.6 | -0.5 | 0.9 | 1 | 0.2 |
| 8 | 0.6 | -0.3 | 1 | -1 | 0.9 | 0.4 |
| 9 | -0.3 | 0.4 | 1.2 | 1 | -0.3 | 0.6 |
| 10 | -0.6 | 0.2 | -0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.9 |
| 11 | 0.3 | -0.4 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | -0.7 |
| 12 | -0.5 | 0.6 | 0.7 | -0.6 | 1 | 0.8 |
| 13 | 1 | 0.8 | -0.2 | -0.4 | 0.6 | 0.3 |
| 14 | 1.2 | 2.2 | 0.6 | 1.3 | 2 | -0.8 |
| 15 | -0.4 | 2 | 0.7 | -0.4 | 2.1 | -0.4 |

Для выполнения лабораторной работы 12 необходимо получить номер варианта индивидуального задания из табл. 17.

## Лабораторная работа № 13

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

*Цель работы:* научиться решать краевые задачи для дифференциальных уравнений гиперболического типа методом сеток с помощью ЭВМ [1, 4].

*Содержание работы:*

1) изучить метод сеток для дифференциального уравнения гиперболического типа;
2) заменить исходное уравнение конечно-разностными соотношениями;
3) составить программу численного решения краевой задачи на ЭВМ;
4) составить отчет о проделанной работе.

Пример выполнения работы

*Задание.*

1. Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (64)$$

на примере уравнения свободных колебаний однородной ограниченной струны длиной $0 \le x \le l$, где $a = \text{const}$ с дополнительными краевыми условиями

$$\begin{aligned} &u(x,0) = f(x) = 0.6\cos(-x);\ u_t'(x,0) = F(x) = -0.6\sin(-x) + 2;\\ &u(0,t) = \varphi(t) = 0.8t + 0.6e^t;\ u(l,t) = \psi(t) = 2.2t - 0.7\sin(-t) \end{aligned} \qquad (65)$$

методом сеток.

2. В полуполосе $0 \le x \le l,\ \ 0 \le t < \infty$ построить сетку $\{x_i, t_j\}$, где $x_i = ih, t_j = jk, i = \overline{0,n},\ j = 0,1,...$

3. Заменить уравнение (64) конечно-разностными соотношениями в узлах сетки.

4. Составить программу на любом языке программирования, реализующую процесс построения решения при $l = 1, n = 10,\ j = \overline{0,10}$.

*Решение.*

Рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{x,t\}$ (рис. 17). В полуполосе $t \geq 0, 0 \leq x \leq 1$ построим прямоугольную сетку $x_i = ih, i = \overline{0,10}, \ t_j = jk, \ j = \overline{0,10}, \ u_{ij} = u\left(x_i, t_j\right)$, где $h = \dfrac{1}{10}$ – шаг по оси $OX$ и $k = \dfrac{h}{a}$ – шаг по оси $Ot$.

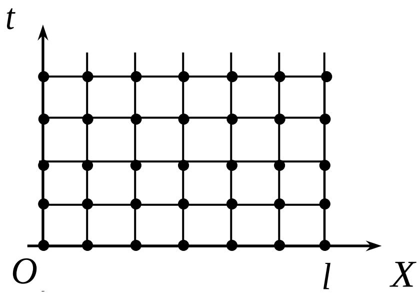


Рис. 17

Исходное дифференциальное уравнение заменим конечно-разностными уравнениями в узловых точках $(x_i, t_j)$.

Конечно-разностные уравнения запишутся так:

$$a^2 \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h^2} = a^2 \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}. \qquad (66)$$

После преобразований получим:

$$u_{ij+1} = u_{i+1j} + u_{i-1j} - u_{ij-1}. \qquad (67)$$

Из формулы (67) видно, что для подсчета значения искомой функции $u(x,t)$ в узловых точках $(j+1)$-го слоя используются значения $u(x,t)$ в двух слоях $j$-м и $(j-1)$-м (рис. 18).

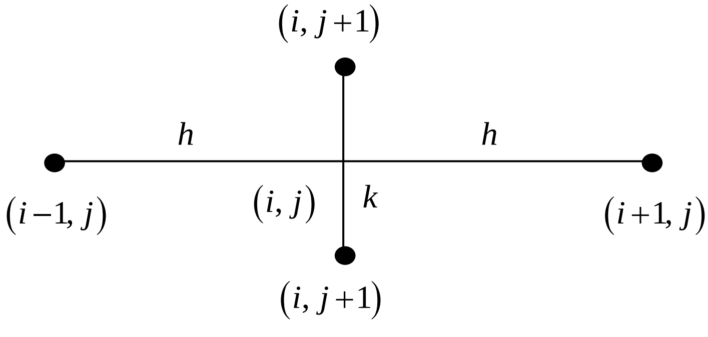


Рис. 18.

Для начала вычислений по формуле (67) необходимо знать значения

функции $u(x,t)$ в двух слоях $j=0,\ j=-1$. Запишем начальное условие $u_t'(x,0)=F(x)$ в конечно-разностном виде: $\dfrac{u_{i,0}-u_{i,-1}}{k}=F_i$, где $F_i=F(x_i)$.
Из этого соотношения выразим $u_{i,-1}$:

$$u_{i,-1}=u_{i,0}-kF_i.$$

Для исходной задачи (64), (65) конечно-разностная форма уравнения (64) имеет вид (67), а краевые условия (65) запишутся так:

$$u_{i,0}=0.6\cos(-x_i);\ u_{i,-1}=u_{i,0}-kF_i=0.6\cos(-x_i)-k\left(-0.6\sin(-x_i)+2\right);$$
$$u_{0,j}=0.8t_j+0.6e^{t_j};\ u_{n,j}=2.2t_j-0.7\sin\left(-t_j\right);\ i=\overline{0,10};\ j=\overline{0,10}. \qquad (68)$$

Алгоритм решения задачи:

1) построить систему равноотстоящих точек

$$l=1,\ h=\frac{l}{n}=0.1,\ x_i=ih, i=\overline{0,10};\ t_j=jk,\ j=\overline{0,10},\ k=\frac{h}{a};$$

2) вычислить $u_{i,0}=0.6\cos(-x_i),\ i=\overline{0,10}$;

3) вычислить $u_{i,-1}=0.6\cos(-x_i)-k\left(-0.6\sin(-x_i)+2\right),\ i=\overline{1,9}$;

4) вычислить $u_{0,j}=0.8t_j+0.6e^{t_j};t_j=jk,\ j=\overline{1,10}$;

5) вычислить $u_{n,j}=2.2t_j-0.7\sin\left(-t_j\right);\ t_j=jk,\ j=\overline{1,10}$;

6) вычислить $u_{ij+1}=u_{i+1j}+u_{i-1j}-u_{ij-1},\ i=\overline{1,9},\ j=\overline{1,9}$.

В качестве примера приведена программа на языке программирования Pascal, реализующая процесс вычислений.

Пример программы на языке Pascal

```
program Lab13;
uses crt;
const n=10;m=10;a=0;b=1;delta=1/6;s=6;
var i,j:integer;
   x,h,t,gamma,m1,m2,alfa,betta,n1:real;
   a1,b1,u:array [0..n,0..m] of real;

function f(x:real): real;
begin f:=gamma*cos(m1*x); end;

function fi1(t:real):real;
begin fi1:=alfa*t+betta*exp(t); end;

function fi2(t:real):real;
begin fi2:=n1*t+m2*sin(m1*t); end;
```

```
procedure Yav;
begin
h:=(b-a)/n;
gamma:=0.6;m1:=-1;alfa:=0.8;betta:=0.6;m2:=2.2;n1:=-0.7;
for i:=0 to n do for j:=0 to m do u[i,j]:=0;
x:=a;
for i:=0 to n do begin
   u[i,0]:=f(x);
   x:=x+h;
end;
for j:=1 to m do begin
   u[0,j]:=fi1(j*delta*h*h);
   u[n,j]:=fi2(j*delta*h*h);
end;
for i:=1 to n-1 do for j:=0 to m-1 do u[i,j+1]:=1/6*(u[i-1,j]+4*u[i,j]+u[i+1,j]);
for i:=0 to n do write('  ',i:4);
writeln;
for j:=m downto 0 do begin
   write(j:2,' ');
   for i:=n downto 0 do write(u[i,j]:6:3);
   writeln;
end;
end;

procedure neyav;
begin
h:=(b-a)/n;
gamma:=0.6;m1:=-1;alfa:=0.8;betta:=0.6;m2:=2.2;n1:=-0.7;
for i:=0 to n do for j:=0 to m do u[i,j]:=0;
x:=a;
for i:=0 to n do begin
   u[i,0]:=f(x);
   x:=x+h;
end;
for j:=1 to m do begin
   u[0,j]:=fi1(j*h*h/s);
   u[n,j]:=fi2(j*h*h/s);
end;
for j:=0 to n-1 do begin
   a1[1,j+1]:=1/(2+s);
   b1[1,j+1]:=fi1((j+1)*h*h/s)+s*u[1,j];
end;
for i:=2 to n do
   for j:=0 to m-1 do begin
      a1[i,j+1]:=1/(2+s+a1[i-1,j+1]);
      b1[i,j+1]:=a1[i-1,j+1]*b1[i-1,j+1]+s*u[i,j];
   end;
for i:=1 to n-1 do for j:=0 to m-1 do u[i,j+1]:=a1[i,j+1]*(b1[i,j+1]+u[i+1,j+1]);
```

```
for i:=0 to n do write('  ',i:4);
writeln;
for j:=m downto 0 do begin
   write(j:2,' ');
   for i:=n downto 0 do write(u[i,j]:6:3);
   writeln;
end;
end;

begin
clrscr;
yav;
neyav;
end.
```

Решение задачи (1), (2) приведено в виде таблицы 18:

Табл. 18.

| № п/п | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | -0.048 | 0.070 | 0.094 | 0.100 | 0.105 | 0.110 | 0.116 | 0.132 | 0.181 | 0.32 | 0.62 |
| 9 | -0.043 | 0.088 | 0.111 | 0.119 | 0.125 | 0.131 | 0.136 | 0.149 | 0.192 | 0.32 | 0.62 |
| 8 | -0.039 | 0.108 | 0.131 | 0.141 | 0.149 | 0.156 | 0.162 | 0.172 | 0.207 | 0.32 | 0.62 |
| 7 | -0.034 | 0.132 | 0.155 | 0.167 | 0.177 | 0.185 | 0.192 | 0.201 | 0.228 | 0.33 | 0.62 |
| 6 | -0.029 | 0.159 | 0.183 | 0.198 | 0.210 | 0.221 | 0.229 | 0.237 | 0.257 | 0.34 | 0.61 |
| 5 | -0.024 | 0.191 | 0.216 | 0.234 | 0.250 | 0.263 | 0.273 | 0.282 | 0.295 | 0.36 | 0.61 |
| 4 | -0.019 | 0.227 | 0.255 | 0.277 | 0.297 | 0.313 | 0.326 | 0.336 | 0.345 | 0.39 | 0.61 |
| 3 | -0.014 | 0.269 | 0.301 | 0.328 | 0.352 | 0.372 | 0.389 | 0.401 | 0.410 | 0.43 | 0.61 |
| 2 | -0.010 | 0.317 | 0.355 | 0.388 | 0.417 | 0.442 | 0.463 | 0.479 | 0.491 | 0.50 | 0.61 |
| 1 | -0.005 | 0.372 | 0.417 | 0.458 | 0.494 | 0.526 | 0.552 | 0.572 | 0.587 | 0.60 | 0.6 |
| 0 | 0.324 | 0.373 | 0.418 | 0.459 | 0.495 | 0.527 | 0.553 | 0.573 | 0.588 | 0.60 | 0.60 |

В отчет о проделанной работе должны входить: номер и название лабораторной работы; цель работы; содержание работы; задание на работу; теоретическая часть работы (вывод формул); листинг программы; таблица результатов; выводы о проделанной работе.

Порядок выполнения работы

1. Записать исходное дифференциальное уравнение гиперболического типа (64) и краевые условия (65).

2. Записать алгоритм решения задачи.

3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую численный метод решения дифференциального уравнения гиперболического типа. Печать результатов должна осуществляться на

каждом шаге в виде таблицы 19:

Табл. 19.

| $t_j \backslash x_i$ | $x_0$ | $x_1$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $t_0$ | $u(x_0,t_0)$ | $u(x_1,t_0)$ | ... | $u(x_n,t_0)$ |
| $t_1$ | $u(x_0,t_1)$ | $u(x_1,t_1)$ | ... | $u(x_n,t_1)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | ... | $\vdots$ |
| $t_m$ | $u(x_0,t_m)$ | $u(x_1,t_m)$ | ... | $u(x_n,t_m)$ |

4. Сделать выводы о проделанной работе.
5. Составить отчет о проделанной работе.

Варианты индивидуальных заданий

Табл. 20.

| Номер варианта | Параметры | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\gamma$ | $m$ | $\alpha$ | $\beta$ | $M$ | $N$ |
| 1 | 0.6 | 0.3 | 0.1 | 0.4 | -0.2 | 1 |
| 2 | 0.8 | 0.9 | 0.3 | -0.5 | 0.9 | -0.9 |
| 3 | 0.5 | 0.4 | -0.5 | 0.6 | 1 | -0.8 |
| 4 | 1.1 | 1 | -0.4 | -0.5 | 0.7 | 0.4 |
| 5 | 1.4 | 1 | -0.2 | 2.2 | 0.3 | -0.6 |
| 6 | 0.3 | 0.7 | 0.5 | -1.4 | -2 | 0.3 |
| 7 | 0.7 | 0.6 | -0.5 | 0.9 | 1 | 0.2 |
| 8 | 0.6 | -0.3 | 1 | -1 | 0.9 | 0.4 |
| 9 | -0.3 | 0.4 | 1.2 | 1 | -0.3 | 0.6 |
| 10 | -0.6 | 0.2 | -0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.9 |
| 11 | 0.3 | -0.4 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | -0.7 |
| 12 | -0.5 | 0.6 | 0.7 | -0.6 | 1 | 0.8 |
| 13 | 1 | 0.8 | -0.2 | -0.4 | 0.6 | 0.3 |
| 14 | 1.2 | 2.2 | 0.6 | 1.3 | 2 | -0.8 |
| 15 | -0.4 | 2 | 0.7 | -0.4 | 2.1 | -0.4 |

Граничные условия:

$$f(x) = \gamma\cos mx,\ F(x) = \alpha + \beta\sin mx,\ \varphi(t) = \alpha t + \beta e^t,\ \psi(t) = Nt + M\sin mt.$$

Для выполнения лабораторной работы 13 необходимо получить номер варианта индивидуального задания из табл. 20.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики: учебное пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон. - 8-е изд., стер. – Издательство "Лань", 2011. – 672с.

2. Горбунов, Д.А. Вычислительная математика: учебное пособие / Д.А. Горбунов, Е.М. Комиссарова. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2008.- 148с.

3. Горбунов, Д.А. Численные методы решения инженерных задач: учебное пособие. / Д.А. Горбунов, Е.М. Комиссарова. - Казань: РИЦ «Школа», 2008. - 154с.

4. Амосов, А.А. Вычислительные методы: учебное пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова - 4-е изд., стер. – Издательство "Лань", 2014. – 672с.

5. Копченова, Н.В. Вычислительная математика: учебное пособие / Н.В. Копченова, И.А. Марон. - 4-е изд., стер. – Издательство "Лань", 2017. – 368с.

6. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры: учебное пособие / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. - 4-е изд., стер. - Издательство "Лань", 2009. - 736с.

7. Моисеев, В.С. Метод малого параметра для решения задач анализа и синтеза проектных решений на базе неявно заданных функциональных зависимостей / В.С. Моисеев, Д.А. Горбунов //Изв. вузов. Авиационная техника. – 1998.- №4. - С.3-10.

8. Горбунов, Д.А. Основы прикладной теории неявных математических моделей и методов: монография / Д.А. Горбунов, В.С. Моисеев. Казань: РИЦ, 2012.- 172с.

9. Горбунов, Д.А. Метод малого параметра для решения нелинейных уравнений / Д.А. Горбунов, С.В. Сотников. Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: сборник статей XVI Международной научно-технической конференции. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2016.- С.18-23.

10. Моисеев, В.С. Оптимизация стохастического размещения объектов. / В.С. Моисеев, С.В. Сотников. Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева.- 2002.- № 3. С. 23-29.