Лекция №10.

Решение матричной игры ($m \times n$) среди смешанных стратегий. Теорема об активных стратегиях.

Игры ($m \times n$) с седловой точкой, имеющие практическое значение, встречаются достаточно редко. Более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цены игры различны.

Анализируя платежные матрицы игр ($m \times n$), мы показали, что если каждому игроку предоставить выбор только одной стратегии, то в расчете на разумного противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. При этом игрок A гарантирует себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Возникает вопрос: нельзя ли обеспечить выигрыш больший α, если применять не чистую стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий. Такие стратегии, состоящие в случайном чередовании исходных стратегий, называются смешанными.

При использовании смешанной стратегии перед каждой партией игры пускается в ход какой-то механизм случайного выбора, обеспечивающий появление каждой стратегии с некоторой вероятностью, и затем принимается стратегия, на которую пал жребий.

Смешанные стратегии представляют собой математическую модель гибкой тактики, при которой противник не знает и не может узнать заранее с какой обстановкой ему придется встретиться.

Пусть имеется игра ($m \times n$) без седловой точки. Игрок A имеет стратегии A_i $(i=\overline{1,m})$, а игрок B — стратегии B_j $(j=\overline{1,n})$. Обозначим смешанную стратегию игрока A как $S_A(p_1, p_2, ..., p_m)$, в которой стратегии $A_1, A_2, ..., A_m$ применяются с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_m$ соответственно. Очевидно для этих вероятностей справедливы условия:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad (1)$$
$$p_i \geq 0, (i = \overline{1,m}). \quad (2)$$

Смешанную стратегию игрока B обозначим $S_B(q_1, q_2, ..., q_n)$, в которой стратегии $B_1, B_2, ..., B_n$ применяются с вероятностями $q_1, q_2, ..., q_n$. Они удовлетворяют условиям:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \quad (3)$$
$$q_j \geq 0, (j = \overline{1,n}). \quad (4)$$

Отметим, что смешанных стратегии бесчисленное множество, так как вероятностей $p_i(q_j)$, удовлетворяющих условиям (1)-(2) ((3)-(4)) бесчисленное множество.

Поскольку игроки в партии применяют стратегии случайным образом, то и исход партии будет случайным.

Допустим игроки A и B используют соответственно свои смешанные стратегии S_A и S_B. Тогда среднее значение выигрыша будет равно:

$$J(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \quad (5)$$

Пусть оптимальными смешанными стратегиями игроков A и B будут соответственно:

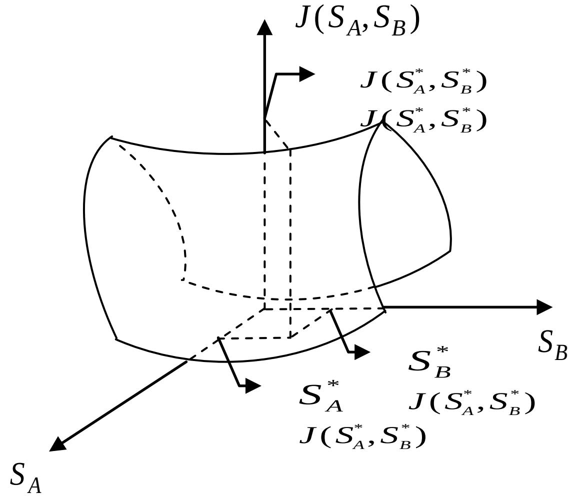
$$S_A^* = S_A^*(p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*) \text{ и } S_B^* = S_B^*(q_1^*, q_2^*, ..., q_m^*)$$

Пара смешанных стратегий (S_A^*, S_B^*) называется оптимальной парой, если ни одному из игроков невыгодно от нее отклоняться, если противник придерживается оптимальной смешанной стратегии. Величина среднего выигрыша $\gamma = J(S_A^*, S_B^*)$ называется ценой игры.

Из определения оптимальной пары (S_A^*, S_B^*) следует неравенство:

$$\underset{\forall S_A}{J(S_A, S_B^*)} \leq J(S_A^*, S_B^*) \leq \underset{\forall S_B}{J(S_A^*, S_B)} \quad (6)$$

Из этого неравенства вытекает, что оптимальная пара (S_A^*, S_B^*) является седловой точкой на платежной функции $J(S_A, S_B)$. Таким образом для определения оптимальной пары смешанных стратегий (S_A^*, S_B^*) необходимо найти седловую точку на платежной функции. Предположим, что найдено решение рассматриваемой игры. В оптимальных смешанных стратегиях некоторые вероятности p_i^* и q_j^* могут быть равными нулю. Это означает, что соответствующие им стратегии не используются. Такие стратегии называются пассивными, а те стратегии, которые входят в оптимальную смешанную стратегию называются активными.



Теорема об активных стратегиях.

Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш) равный цене игры γ независимо от того какие действия предпринимает другой игрок, и если только он не выходит за пределы своих активных стратегий (он может применять активные стратегии либо в чистом виде, либо менять их по любому закону).

Доказательство 1. Пусть найдено решение игры $(m \times n)$ в смешанных стратегиях, в которых первые r стратегий $(r \le m)$ игрока A и первые s стратегий $(s \le n)$ игрока B являются активными (это не нарушает общности, так как стратегии всегда можно перенумеровать таким образом, чтобы первыми были активные). Таким образом, известны оптимальные смешанные стратегии

$$S_A^* = S_A^*(p_1^*, p_2^*, ..., p_r^*, 0, ..., 0) \text{ и } S_B^* = S_B^*(q_1^*, q_2^*, ..., q_s^*, 0, ..., 0).$$

Для найденных вероятностей справедливы равенства $\sum_{i=1}^{r} p*_i = 1$ и $\sum_{j=1}^{s} q*_j = 1$.

Выигрыш при этом равен цене игры: $\gamma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j^*$

Выигрыш игрока A, если он пользуется оптимальной смешанной стратегией S_A^*, а игрок B — чистыми стратегиями $B_1, B_2, ..., B_s$, обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$. Из свойства оптимального решения игры следует, что отклонение игрока B от оптимальной стратегии S_B^* может лишь увеличить его проигрыш. Следовательно $\gamma_1 \geq \gamma, \gamma_2 \geq \gamma, ..., \gamma_s \geq \gamma$.

Выразим теперь цену игры γ при оптимальной паре (S_A^*, S_B^*) через выигрыш $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$. Так как в оптимальной смешанной стратегии S_B^* стратегии $B_1, B_2, ..., B_s$ применяются с вероятностями $q_1^*, q_2^*, ..., q_s^*$, то $\gamma = \gamma_1 q_1^* + \gamma_2 q_2^* + ... + \gamma_s q_s^*$. При этом справедливо $\sum_{j=1}^{s} q_j^* = 1$. Сумма $\gamma_1 q_1^* + \gamma_2 q_2^* + ... + \gamma_s q_s^*$ есть средневзвешенное значение величин $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$. Но средневзвешенное значение было бы больше γ, если хотя бы один из выигрышей γ_j был больше γ. Следовательно $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma$.

<u>Доказательство 2.</u> Пусть найдено решение игры $(m \times n)$ в смешанных стратегиях, в которых первые r стратегий $(r \leq m)$ игрока A и первые s стратегий $(s \leq n)$ игрока B являются активными (это не нарушает общности, так как стратегии всегда можно перенумеровать таким образом, чтобы первыми были активные), то есть

$$S_A^*(p_1^*, p_2^*, ..., p_r^*, 0, ..., 0) \text{ и } S_B^*(q_1^*, q_2^*, ..., q_s^*, 0, ..., 0).$$

Очевидно $\sum_{i=1}^{r} p*_i = 1$ и $\sum_{j=1}^{s} q*_j = 1$, при этом цена игры равна:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j^* \qquad (7)$$

Пусть игрок A придерживается своей оптимальной смешанной стратегией S_A^*, а игрок B использует чистую стратегию B_j. Тогда, в силу определения оптимальной пары (S_A^*, S_B^*) можно записать:

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* \geq \gamma \;\; (j = \overline{1,s}) \quad (8)$$

Учитывая неравенство (8) можно равенство (7) записать:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j^* = \sum_{j=1}^{s} q_j^* \sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* \geq \sum_{j=1}^{s} q_j^* \gamma = \gamma \quad (9)$$

Соотношение (9) выполнимо только тогда, когда неравенства (8) превращаются в равенства. Отсюда следует, что для любой смешанной стратегии $(q_1, q_2, ..., q_s, 0, ..., 0)$ выполняется равенство $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j = \gamma$.

Основная теорем теории игр. Любая конечная парная игра с нулевой суммой имеет по крайней мере одно решение, возможно в смешанных стратегиях.

Определение оптимальных смешанных стратегий.

В предыдущей лекции было показано, что если матричная игра ($m \times n$) имеет седловую точку, то пару оптимальных стратегий составляют чистые стратегии, определяемые на основе принципа минимакса. Если же игра не имеет седловой точки, то ее решение нужно искать в смешанных стратегиях.

Процесс отыскания оптимальных смешанных стратегий S_A^* и S_B^* является весьма трудоемким, особенно при большой размерности игры. Поэтому целесообразно, если это возможно, предварительно “редуцировать” игру, то есть упростить ее путем сокращения числа стратегий за счет вычеркивания дублирующих и доминируемых строк, а также замены некоторых групп стратегий смешанными стратегиями.

Определение1. Если в платежной матрице $(a_{ij})_{mxn}$ игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующим строкам (столбцам) стратегии называются дублирующими.

Определение2. Если в матрице $(a_{ij})_{mxn}$ элементы $a_{ij} \geq a_{kj}$ $(1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq m)\,(k \neq i,\ j = \overline{1,n})$ и $a_{ij} > a_{kj}$ хотя бы для одного номера j, то стратегия A_i называется доминирующей над стратегией A_k.

Определение3. Если в матрице $(a_{ij})_{mxn}$ элементы $a_{ij} \leq a_{ik}$ $(i = \overline{1,m}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq n;\ \mathrm{j} \neq k,)$ и $a_{ij} < a_{ik}$ хотя бы для одного номера i, то стратегия B_j игрока B называется доминирующей над стратегией B_k.

Естественно, если для какой-то стратегии есть доминирующая или дублирующая стратегии, то их не рассматривают. Это позволяет уменьшить размерность пары ($m \times n$).

Пример. Имеется игра (4×5) с заданной платежной матрицей. Требуется “редуцировать” эту игру. После “редуцирования” она свелась к игре (2×2)

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	7	2	3	4
A_2	3	5	6	8	9
A_3	4	4	2	2	8
A_4	3	6	1	2	4

A \ B	B_1	B_3
A_1	4	2
A_2	3	6

Пусть теперь имеется парная конечная игра ($m \times n$) с нулевой суммой и платежной матрицей $(a_{ij})_{mxn}$ без седловой точки. Игрок A имеет стратегии $A_i\ (i = \overline{1,m})$, а игрок B — стратегии $B_j\ (j = \overline{1,n})$. Необходимо найти решение игры в смешанных стратегиях. То есть оптимальную пару смешанных стратегий $(S_A^*\ \ (p_i^*, i=\overline{1,m}),\ S_B^*\ \ (q_j^*, j=\overline{1,n}))$. Здесь p_i^* и q_j^* — вероятности применения стратегий A_i и B_j, которые удовлетворяют условиям $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ p_i^* \geq 0, q_j^* \geq 0.$ (S_A^*, S_B^*) соответствует выигрыш, равный цене игры $\gamma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j^*$.

Сначала найдем оптимальную смешанную стратегию S_A^*. Эта стратегия должна обеспечить игроку A выигрыш не меньший γ при любом поведении игрока B, и выигрыш равный γ при его оптимальном поведении.

Допустим, игрок A использует стратегию S_A^*, а игрок B — некоторую стратегию B_j в чистом виде, или $S_B(q_j = 1, q_s = 0, s \neq j, s = \overline{1,n})$. В этом случае игрок A имеет средний выигрыш:

$$\sum_{ij} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \quad j = \overline{1,n}.$$

Поскольку игрок B отклонился от оптимальной стратегии S_B^*, то это может привести лишь к увеличению среднего выигрыша игрока A, следовательно, можно записать:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq \gamma \quad j = \overline{1,n} \qquad (1)$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1 \qquad (2)$$
$$p_i^* \geq 0, i = \overline{1,m} \qquad (3)$$

Отметим, что выражение (3) превращается в равенство в случае, если все стратегии B_j активны (см. теорему об активных стратегиях). Но так как мы не знаем заранее, все ли B_j активны, то в (1) ставится неравенство.

Цена игры γ есть гарантированный выигрыш игрока A, естественно он будет стремиться максимизировать эту величину, то есть:

$$\gamma \Rightarrow \max \qquad (4)$$

Таким образом задача нахождения решения игры свелась к задаче линейного программирования (1)-(4), в которой необходимо найти вероятности p_i^* удовлетворяющие ограничениям (1)-(3) и максимизирующие целевую функцию (4).

Преобразуем эту ЗЛП к более удобному виду. Для этого предположим, что $a_{ij} > 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Если это условие не выполняется, то прибавляя одну и ту же положительную величину c к элементам платежной матрицы, всегда можно этого добиться. В этом случае цена игры $\gamma > 0$. Такое преобразование не приводит к изменению решения игры, что следует из следующей

<u>Теоремы</u>: Оптимальные смешанные стратегии S_A^* и S_B^* игроков A и B в матричной игре $(a_{ij})_{mxn}$ с ценой игры γ будут оптимальными и в матричной игре $(ba_{ij} + c)_{mxn}$ с ценой игры $\gamma^{'} = b\gamma + c$, где $b > 0,\ c \ge 0$. (Без доказательства).

Теперь, поделив левую и правую части каждого из неравенств (1)-(3) на величину $\gamma > 0$ и обозначив $p_i^* / \gamma = x_i$, преобразуем ЗЛП (1)-(4) к виду:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1 \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (5)$$

$$x_i \ge 0 \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (6)$$

$$L = \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \min \qquad (7)$$

Таким образом, определение оптимальной смешанной стратегии S_A^* свелась к ЗЛП (5)-(7). Пусть она решена и найдены оптимальные значения x_i^* $(i = \overline{1,m})$. Тогда с учетом введенного обозначения и вида целевой функции (7) найдем искомые вероятности и максимальный выигрыш игрока A $p_i^* = \gamma \cdot x_i^*$ $(i = \overline{1,m})$, где $\gamma = 1 / \sum_{i=1}^{m} x_i^*$.

Определим оптимальную смешанную стратегию $S_B^* \ (q_j^*,\ j=\overline{1,n})$ игрока B.

Пусть игрок B использует оптимальную стратегию S_B^*, а игрок A — чистую стратегию A_i

игрок A имеет средний выигрыш: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*,\ (i=\overline{1,m})$.

Так как игрок A отклонился от оптимальной смешанной стратегии, то его средний выигрыш может быть только меньше или равен цене игры γ. Поэтому можно записать:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le \gamma \quad i=\overline{1,m} \qquad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1 \qquad (9)$$

$$q_j^* \ge 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (10)$$

Тут, так же, как и в (1), ставим неравенство, так как неизвестно, все ли стратегии игрока А активны.

Игрок B, выбирая свою оптимальную смешанную стратегию S_B^* стремится уменьшить средний выигрыш игрока A. Тогда целевая функция будет иметь вид $\gamma \Rightarrow \min$ (11)

Теперь преобразуем ЗЛП (8)-(11). Для этого разделим левые и правые части выражений (8)-(10) на величину $\gamma > 0$ и введем обозначим $y_j = q_j^* / \gamma$. Тогда ЗЛП (8)-(11) перепишется:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le 1 \quad i=\overline{1,m} \qquad (13)$$

$$y_j \ge 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\gamma}$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \max \qquad (15)$$

Пусть y_j^* решение ЗЛП (13)-(15), тогда из введенных обозначений следует $\gamma = 1/\sum_{j=1}^{n} y_j^*$, $q_j^* = \gamma y_j^*$, $(j = \overline{1,n})$

Таким образом найденная пара оптимальных стратегий (S_A^*, S_B^*), которая является решением игры ($m \times n$) среди смешанных стратегий.

Цена игры γ, которая получается при решении ЗЛП (5)-(7) и (13)-(15) должна быть одной и той же величиной. Будут ли они действительно равны? Положительный ответ на этот вопрос следует из факта, что эти две задачи образуют пару двойственных ЗЛП. Теорема о таких задачах гласит: если одна из ЗЛП двойственной пары имеет решение, то другая задача также имеет решение, причем экстремальные значения целевых функций совпадают.

Покажем, что ЗЛП (13)-(15) имеет решение. Для этого необходимо, чтобы условия (13)-(14) были совместны, то есть имели хотя бы одно решение, а максимизируемая целевая функция была ограничена сверху.

Действительно, ограничения (13)-(14) совместны, так как $y_j = 0,\ j = \overline{1,n}$ удовлетворяют ограничениям (13), (14). Следовательно, множество планов (13), (14) не пустое. В силу условия (13) все значения $y_j, (j = \overline{1,n})$ ограничены сверху, а это означает ограниченность сверху целевой функции (15). Таким образом, ЗЛП (13)-(15) имеет решение. Тогда на основании теоремы о двойственности ЗЛП (5)-(7) тоже имеет решение, причем $\max \sum_{j=1}^{n} y_j = \min \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{\gamma}$, то есть в обеих задачах значение цены игры γ одинаковые.

Теорема. Любая парная конечная игра с нулевой суммой имеет решение по крайне мере среди смешанных стратегий.

Если в результате решения задач (5)-(7) и (13)-(15) найдены оптимальные смешанные стратегии игроков A и B S^*_A и S^*_B, и при этом все их стратегии активны ($p_i^* > 0 \;\; i = \overline{1,m}$ и $q_j^* > 0 \;\; \mathrm{j} = \overline{1,n}$), то такая игра называется ПОЛНОСТЬЮ УСРЕДНЕННОЙ. В этом случае решение S^*_A и S^*_B обращает неравенства (1) и (8) в строгие равенства согласно теореме об активных стратегиях. Если же в оптимальной паре (S^*_A,S^*_B) присутствуют неактивные стратегии ($\exists p_i^* = 0$ или $\exists q_j^* = 0$), то игра называется не полностью усредненной, и оптимальные решения обращают (1) или (8) в строгое неравенство.