9.5. Метод сеток для уравнений гиперболического типа

Примером уравнения гиперболического типа является уравнение свободных колебаний однородной ограниченной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9.33}$$

где $a = \text{const}$. Будем искать решение уравнения (9.33) при заданных начальных условиях:

$$u(x,0) = f(x); \tag{9.34}$$

$$u_t(x,0) = F(x),\ 0 \le x \le l \tag{9.35}$$

и краевых условий:

$$\begin{aligned} &u(0,t) = \varphi_1(t); \\ &u(l,t) = \varphi_2(t); \end{aligned} \tag{9.36}$$

$$0 \le t < \infty .$$

Решим эту задачу методом сеток. Как и в случае параболического уравнения, заменим прямоугольную область $0 \le x \le l$ и $0 \le t < \infty$ сеточной $\{x_i, t_j\}$, где $x_i = ih$, $t_j = jk$, $i = \overline{0,n},\ j = 0,1,\ldots$. Шаг по оси OX – $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = l/n$, шаг по оси Ot – $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j = k$.

На сетке $\{x_i, t_j\}$ приближенно заменим дифференциальное уравнение (9.33) конечно-разностным уравнением:

$$\frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}. \tag{9.37}$$

При $k = \dfrac{h}{a}$ уравнение (9.37) упрощается и принимает вид:

$$u_{ij+1} + u_{ij-1} = u_{i+1j} + u_{i-1j},$$

откуда

$$u_{ij+1} = u_{i+1j} + u_{i-1j} - u_{ij-1},\ j = 0,1,\ldots \tag{9.38}$$

Из уравнения (9.38) видно, что для получения значений $u(x,t)$ в $(j+1)$-м слое используются значения $u(x,t)$ в двух предыдущих слоях j-м и $(j-1)$-м (рис. 9.6). Для начала вычислений по формуле (9.38) необходимо знать значения $u(x,t)$ в двух слоях $j=0$, $j=-1$.

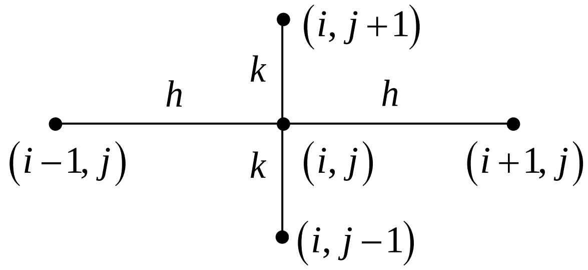

Рис. 9.6

Начальные условия (9.34) задают значения $u(x,t)$ лишь на нулевом слое $j=0$. Используя начальное условие (9.35) $u_t(x,0)=F(x)$, можно определить значения $u(x,t)$ на слое с номером $j=-1$. Для этого запишем соотношение (9.35) в конечно-разностном виде: $\dfrac{u_{i,-1}-u_{i0}}{-k}=F_i$, где $F_i=F(x_i)$. Отсюда находим $u_{i,-1}=u_{i0}-kF_i$. Зная значения $u(x,t)$ на слое $j=-1$, можно начать вычисления. Краевые условия (9.36) используются для получения значений u_{0j} и u_{nj}.