Глава 9. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

9.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

Рассмотрим приближенные методы решения задач для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. В общем случае такое уравнение имеет вид:

$$F\left(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\right) = 0, \qquad (9.1)$$

где x, y – независимые переменные, $u(x, y)$ – искомая функция, $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ – первые и вторые частные производные по аргументам x и y.

Решением уравнения (9.1) называется функция $u = u\left(x, y\right)$, обращающая это уравнение в тождество. График решения представляет собой поверхность в пространстве V_3 (интегральная поверхность) (рис. 9.1).

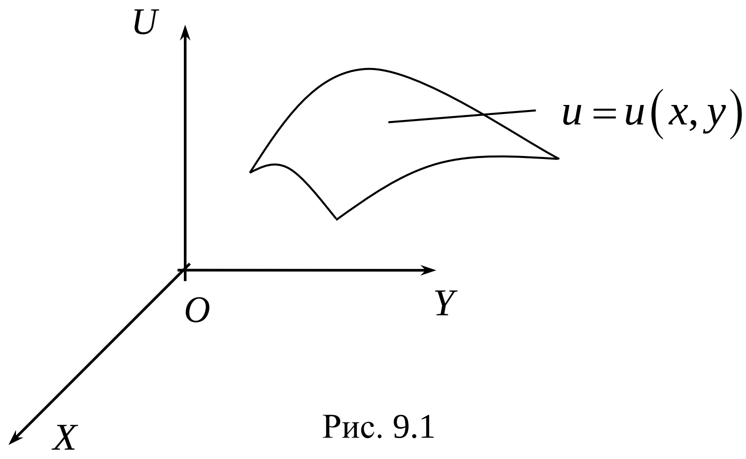

Рис. 9.1

Определение 9.1. Уравнение (9.1) называется вполне линейным, если оно является уравнением первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведений, т.е. вполне линейное уравнение может быть записано в виде:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Ku_x + Lu_y + Mu(x, y) = F(x, y), \qquad (9.2)$$

где коэффициенты A, B, C, K, L, M могут зависеть только от x и y.

Если коэффициенты A, B, C, K, L, M не зависят от x и y, т.е. являются постоянными, то уравнение (9.2) называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ – дискриминант уравнения.

В зависимости от знака δ линейное дифференциальное уравнение (9.2) относится к одному из следующих типов:

$\delta > 0$ – эллиптический тип;

$\delta = 0$ – параболический тип;

$\delta < 0$ – гиперболический тип;

δ не сохраняет постоянного знака в данной области – смешанный тип.

Тип линейного дифференциального уравнения (9.2) является его важной особенностью и сохраняется при любом невырожденном преобразовании

$$\xi = \varphi(x, y),\ \eta = \psi(x, y),$$

т.е., таком, чтобы якобиан был отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

С линейным дифференциальным уравнением (9.2) связано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0, \tag{9.3}$$

которое называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (9.2).

Решения характеристического уравнения (9.3) называются характеристиками уравнения (9.2).

1. Для уравнения (9.2) гиперболического типа существуют два семейства характеристик $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$. Производя преобразования $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$, уравнение (9.2) примет вид:

$$u_{\xi\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta). \tag{9.4}$$

Уравнение (9.4) называется каноническим видом дифференциального уравнения гиперболического типа.

2. Для уравнения (9.2) параболического типа существует одно

семейство характеристик $\varphi(x,y)=C$. В результате невырожденного преобразования $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=y$ уравнение (9.2) параболического типа приводится к каноническому виду

$$u_{\eta\eta}+\alpha(\xi,\eta)u_{\xi}+\beta(\xi,\eta)u_{\eta}+\gamma(\xi,\eta)u=f(\xi,\eta).$$

3. Для уравнения (9.2) эллиптического типа существуют два семейства комплексно сопряженных характеристик

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1;$$
$$\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2.$$

Производя преобразования $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, получим канонический вид уравнения эллиптического типа:

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\alpha(\xi,\eta)u_{\xi}+\beta(\xi,\eta)u_{\eta}+\gamma(\xi,\eta)u=f(\xi,\eta).$$

Выражение $\Delta u=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}$ называется оператором Лапласа.

Примером уравнения эллиптического типа является уравнение $\Delta u=0$, которое называется уравнением Лапласа.

Неоднородное уравнение Лапласа

$$\Delta u=f(\xi,\eta)$$

называется уравнением Пуассона.

9.2. Уравнение Лапласа в конечных разностях

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \quad (9.5)$$

Выбрав шаг $h>0$, заменим частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ отношениями конечных разностей по формулам

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2};\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}.
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Подставим (9.6) в (9.5), получим

$$\frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}+\frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}=0.$$

Следовательно,

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\left[u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)\right]. \tag{9.7}$$

Оценим точность такой замены.

Рассмотрим формулу Тейлора

$$\begin{aligned}
&f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(x,y)+\\
&+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x,y)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x+\theta h,y+\theta k),
\end{aligned} \tag{9.8}$$

где $0<0<1$.

Рассмотрим точки $A(x,y)$, $B(x-h,y)$, $C(x+h,y)$, $D(x,y+h)$, $K(x,y-h)$, лежащие в центре квадрата и на серединах его сторон (рис. 9.2).

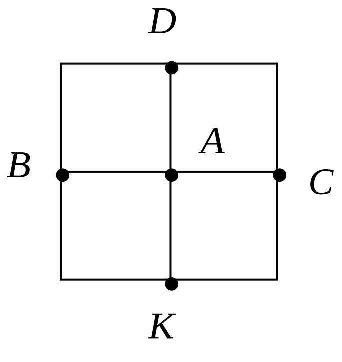

Рис. 9.2

Выразим значения функции $u(x,y)$ в точках B,C,D,K через значения этой функции и ее производных в центральной точке квадрата $A(x,y)$.

Согласно формуле (9.8) при $n=4$ имеем:

$$\begin{cases} u(x-h,y)=u(x,y)-hu_x+\frac{1}{2!}h^2u_{xx}-\frac{1}{3!}h^3u_{xxx}+\frac{1}{4!}h^4\overline{u}; \\ u(x+h,y)=u(x,y)+hu_x+\frac{1}{2!}h^2u_{xx}+\frac{1}{3!}h^3u_{xxx}+\frac{1}{4!}h^4\overline{\overline{u}}; \\ u(x,y-h)=u(x,y)-hu_y+\frac{1}{2!}h^2u_{yy}-\frac{1}{3!}h^3u_{yyy}+\frac{1}{4!}h^4\tilde{u}; \\ u(x,y+h)=u(x,y)+hu_y+\frac{1}{2!}h^2u_{yy}+\frac{1}{3!}h^3u_{yyy}+\frac{1}{4!}h^4\tilde{\tilde{u}}, \end{cases} \tag{9.9}$$

где $u_x,u_y,u_{xx},u_{yy},u_{xxx},u_{yyy}$ – значения производных в точке $A(x,y)$, $\overline{u}=\overline{u}_{xxxx}$, $\overline{\overline{u}}=\overline{\overline{u}}_{xxxx}$, $\tilde{u}=\tilde{u}_{yyyy}$, $\tilde{\tilde{u}}=\tilde{\tilde{u}}_{yyyy}$ – производные в некоторых промежуточных точках.

Складывая равенства (9.9), получим:

$$u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)=$$
$$=4u(x,y)+h^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+R_h(x,y),$$

где остаточный член

$$R_h(x,y)=\frac{h^4}{4!}\left[\overline{u}+\overline{\overline{u}}+\tilde{u}+\tilde{\tilde{u}}\right]$$

при $u(x,y)\in C^4$ имеет порядок $O\left(h^4\right)$.

Отсюда будем иметь:

$$u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)=$$
$$=4u(x,y)+h^2\cdot\Delta u+O\left(h^4\right).$$

Следовательно,

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}\Big[u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+ \\ +u(x,y+h)-4u(x,y)\Big]+O\left(h^2\right). \qquad (9.10)$$

Формула (9.10) выражает оператор Лапласа Δu через конечные разности и называется первой основной конечно-разностной формой оператора Лапласа.

Пренебрегая в уравнении (9.10) членом $O\left(h^2\right)$, получим, что уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ приближенно соответствует следующее уравнение в конечных разностях:

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\Big[u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)\Big],$$

что совпадает с уравнением (9.7).

Таким образом, при замене уравнения Лапласа (9.5) конечно-разностным уравнением (9.7) совершается ошибка порядка $O\left(h^2\right)$.

9.3. Решение задачи Дирихле методом сеток

Идея метода сеток (метода конечных разностей) для приближенного решения краевых задач для двумерных дифференциальных уравнений заключается в следующем:

1) в плоской области D, в которой разыскивается решение, строится сеточная область D_h, состоящая из одинаковых ячеек и приближающая данную область D;

2) заданное дифференциальное уравнение заменяется в узлах построенной сетки соответствующим конечно-разностным уравнением;

3) на основании граничных условий устанавливаются значения

искомого решения в граничных узлах области D_h.

Выбор сеточной области производится в зависимости от конкретной задачи, но во всех случаях контур Γ_h сеточной области D_h следует выбирать так, чтобы он как можно лучше аппроксимировал контур Γ заданной области D.

Рассмотрим применение метода сеток для построения решения задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in D; \qquad (9.11)$$

$$u(x, y)\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y).$$

Выбрав шаг h, строим квадратную сетку

$$x_i = x_0 + ih,\ y_j = y_0 + jh,\ i, j = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

с таким расчетом, чтобы узлы (x_i, y_j) сетки S_h или принадлежали области D, или отстояли от ее границы Γ на расстоянии меньшем, чем h.

Определение 9.2. Узлы сетки S_h называются соседними, если они удалены друг от друга в направлении оси OX или оси OY на расстояние, равное шагу сетки h.

Определение 9.3. Узел A_h сетки S_h называется внутренним, если он принадлежит области D, а все четыре соседних с ним узла – множеству S_h; в противном случае он называется граничным.

Определение 9.4. Граничный узел сетки S_h называется узлом первого рода B_h, если он имеет соседний внутренний узел этой сетки; в противном случае граничный узел называется узлом второго рода C_h.

Внутренние узлы A_h и граничные узлы первого рода B_h сетки S_h называются расчетными точками. Граничные узлы второго рода C_h в вычислениях не участвуют и могут быть изъяты из сетки.

Множество расчетных точек сетки S_h должно быть «связное», т.е. любые две расчетные точки можно соединить цепочкой узлов, каждые два смежных элемента которой являются соседними узлами.

Значение искомой функции $u = u(x, y)$ в точках (x_i, y_j) обозначим $u_{ij} = u(x_i, y_j)$.

Для каждой внутренней точки (x_i, y_j) сетки S_h заменим дифференциальное уравнение (9.11) конечно-разностным уравнением

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1}\right). \qquad (9.12)$$

В граничных узлах первого рода B_h сетки S_h полагаем

$$u(B_h) = u(B) = \varphi(B),$$

где B – ближайшая к B_h точка границы Γ.

Система (9.12) является неоднородной линейной системой, причем число уравнений равно числу неизвестных. Система (9.12) всегда совместна и имеет единственное решение, так как соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение.

Если число узлов сетки велико, то решение системы (9.12) затруднено. Кроме того, значения функции $u(x, y)$ в граничных узлах выбраны грубо. Это заставляет для решения системы прибегать к итерационным методам с одновременным исправлением граничных значений.

Процесс усреднения Либмана

Определение 9.5. Функция $u(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные второго порядка в области D и удовлетворяющая внутри области D уравнению Лапласа, называется гармонической функцией.

Утверждение (принцип максимума). Гармоническая в ограниченной области D функция, непрерывная в замкнутой области $\bar{D} = D \cup \Gamma$, не может принимать внутри этой области значений больших, чем ее максимальное значение на границе Γ, и меньших, чем ее минимальное значение на границе Γ.

Исходя из принципа максимума за начальное приближение $u_{ij}^{(0)}$ во внутренних точках сетки S_h сеточной области D_h выбирается любая система чисел, удовлетворяющая неравенству

$$m \le u_{ij}^{(0)} \le M,$$

где $m = \min\limits_{(x,y)\in\Gamma} \varphi(x,y),\ M = \max\limits_{(x,y)\in\Gamma} \varphi(x,y)$.

За начальное приближение в граничных узлах первого рода B_h берется значение

$$u^{(0)}(B_h) = u(B) = \varphi(B),$$

где B – точка границы Γ, ближайшая к B_h.

Последовательные приближения для внутренних узлов A_h сетки находят по формулам

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1j}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k)} + u_{ij-1}^{(k)} + u_{ij+1}^{(k)}\right).$$

Значения функции $u(x,y)$ в граничных узлах сетки последовательно исправляются по формуле линейной интерполяции (рис. 9.3):

$$u^{(k+1)}(B_h) = u(B) + \frac{u^k(A_h) - u(B)}{h+\delta} \cdot \delta, \tag{9.13}$$

где A_h – ближайший к B_h внутренний узел сетки; δ – удаление узла B_h от точки B, причем

$\delta > 0$, если B_h – внутренняя точка области D,

$\delta < 0$, если B_h – внешняя точка области D.

Если B_h лежит на границе Γ, т.е. $B_h \equiv B$, $\delta = 0$, то по формуле (9.13)

$$u^{(k+1)}(B_h) = u(B) = \varphi(B).$$

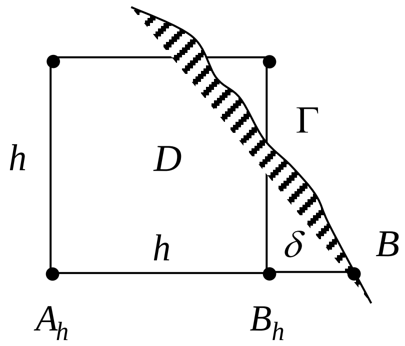

Рис. 9.3

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока в пределах заданной точности ε не совпадут два последовательных шаблона, т.е. пока не выполнится неравенство:

$$\left| u_{ij}^{(k+1)} - u_{ij}^{(k)} \right| \le \varepsilon$$

для всех значений i, j.

9.4. Метод сеток для уравнения параболического типа

В качестве примера уравнения параболического типа остановимся на уравнении теплопроводности для однородного стержня длиной $0 \le x \le l$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9.14}$$

где $u = u(x,t)$ – температура и t – время.

Будем предполагать, что $a = 1$, так как к этому можно прийти, введя новое время $\tau = a^2 t$. Таким образом, от уравнения (9.14) перейдем к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{9.15}$$

Пусть задано распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$

$$u(x,0) = f(x)$$

и законы изменения температуры в зависимости от времени на концах стержня $x = 0$ и $x = l$:

$$u(0,t) = \varphi(t);\ u(l,t) = \psi(t).$$

Требуется найти распределение температуры $u = u(x,t)$ вдоль стержня длиной $0 \le x \le l$ в любой момент времени t. Решим эту задачу методом сеток.

Для этого рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{x,t\}$ (рис. 9.4). В полуполосе $t \ge 0$, $0 \le x \le l$ построим прямоугольную сетку $x = ih, i = \overline{0,n}$, $t = jk,\ j = 0,1,2,\ldots$, где $h = \frac{l}{n}$ – шаг по оси OX и $k = \delta h^2$ – шаг по оси Ot Постоянная величина δ пока не определена. Ниже будет показано, как она выбирается.

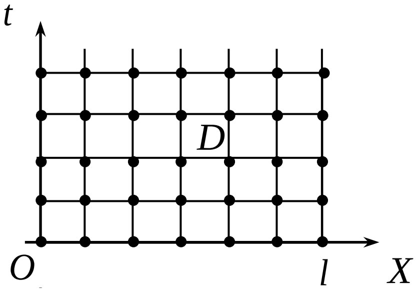

Рис. 9.4

Введя обозначения $x_i = ih$, $t_j = jk$, $u_{ij} = u\left(x_i, t_j\right)$ и заменяя уравнение (9.15) конечно-разностным уравнением, будем иметь:

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\delta h^2} = \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}. \qquad (9.16)$$

После преобразований получим:

$$u_{ij+1} = \delta u_{i-1j} + \left(1 - 2\delta\right) u_{ij} + \delta u_{i+1j}. \qquad (9.17)$$

Из формулы (9.17) видно, что для подсчета значения искомой функции $u\left(x, t\right)$ в узловых точках $\left(j+1\right)$-го слоя используются уже известные значения этой функции в трех соседних узловых точках j-го слоя (рис. 9.5).

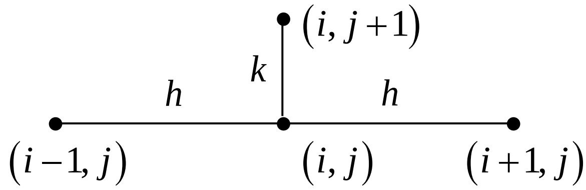

Рис. 9.5

Исходя из начального слоя $t = 0$, значения функции $u\left(x, t\right)$ для которого определяются из начального условия $u\left(x_i, 0\right) = f\left(x_i\right), i = \overline{0, n}$, и используя значения функции в граничных узловых точках, определяемые граничными условиями

$$u\left(0, t_j\right) = \varphi\left(t_j\right),$$

$$u\left(l, t_j\right) = \psi\left(t_j\right),$$

по формуле (9.17) последовательно вычисляются $u\left(x_i, t_1\right)$, $u\left(x_i, t_2\right)$, …, $i = \overline{0, n}$.

Рассмотрим вопрос выбора величины δ.

Определение 9.6. Конечно-разностная схема называется устойчивой, если малые погрешности, допущенные в процессе решения, затухают или остаются малыми при неограниченном увеличении номера текущего слоя. В противном случае конечно-разностная схема называется неустойчивой.

Конечно-разностная схема (9.17) будет устойчивой, если величина δ удовлетворяет условию

$$0 < \delta \le \frac{1}{2}.$$

При выборе δ нужно исходить еще из требования, чтобы ошибка, возникающая при замене дифференциального уравнения (9.15) конечно-разностным уравнением (9.16), была наименьшей.

Введем обозначения:

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t};$$

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2}\left[\left(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}\right) - \frac{1}{\delta}\left(u_{ij+1} - u_{ij}\right)\right].$$

Разность

$$R_h[u] = L_h[u] - L[u]$$

является погрешностью, которая возникает при замене уравнения (9.15) конечно-разностным уравнением (9.16).

Вычислим эту погрешность в узлах сетки для функции $u(x,t)$, которая является решением уравнения (9.15).

При этом $L[u] = 0$ и $R_h[u] = L_h[u]$.

Разлагая $L_h[u]$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_i, t_j), ограничиваясь членами порядка h^6, после приведения подобных членов получим:

$$R_h[u] = L_h[u] = \left(\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} - \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} \right) + h^2 \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2} \right) +$$

$$+ h^4 \left(\frac{1}{360} \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} - \frac{\delta^2}{6} \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial t^3} \right) + O\left(h^6\right).$$

Но так как $u(x,t)$ – решение уравнения (9.15), то заменяя частные производные по t на равные им частные производные по x, получим:

$$L_h[u] = h^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} + h^4 \left(\frac{1}{360} - \frac{\delta^2}{6} \right) \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} + O\left(h^6\right). \qquad (9.18)$$

Выберем δ так, чтобы первая скобка (9.18) была равна нулю. Получим $\delta = \frac{1}{6}$.

При $\delta = \frac{1}{6}$ оценка погрешности равна

$$R_h[u] = -\frac{h^4}{540} \cdot \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} + O\left(h^6\right) = O\left(h^4\right).$$

Тогда как при другом $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ будем иметь

$$R_h[u] = O\left(h^2\right).$$

Подставив в (9.17) $\delta = \frac{1}{6}$, получим:

$$u_{ij+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i-1j} + 4u_{ij} + u_{i+1j}\right).$$

При $\delta = \frac{1}{2}$ будем иметь

$$u_{ij+1} = \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j}}{2}.$$

Из рассмотренной конечно-разностной схемы (так называемой «явной схемы») ясно, что шаги h и k неодинаковы и выбор шага h накладывает ограничения на выбор шага k. При малом h продвижение решения по t весьма незначительно и объем работы чрезвычайно велик.

Рассмотрим другую устойчивую конечно-разностную схему (так называемую «неявную схему»), для которой шаг k может быть выбран достаточно крупным.

Соотношение шагов h и k выбирается так:

$$k = \frac{h^2}{S}.$$

Исходное дифференциальное уравнение (9.15) заменяется конечноразностным уравнением вида

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h^2/S} = \frac{u_{i+1j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i-1j+1}}{h^2}. \tag{9.19}$$

Начальные и граничные условия остаются теми же, что в предыдущем случае. Для решения системы линейных алгебраических уравнений (9.19) применяется метод прогонки.

Суть метода прогонки состоит в том, что сначала вычисляются значения $u_{i0} = f_i$, выбирается значение S для получения требуемой скорости продвижения по оси t. В прямом ходе на очередном $(j+1)$-м временном слое вычисляются вспомогательные функции:

$$a_{1j+1} = \frac{1}{2+S};$$
$$b_{1j+1} = \varphi_{j+1} + Su_{1j};$$

$$a_{ij+1} = \frac{1}{2+S-a_{i-1j+1}};$$
$$b_{ij+1} = a_{i-1j+1}b_{i-1j+1} + Su_{ij}, i = \overline{2,n}.$$

В обратном ходе вычисляются значения искомой функции на $(j+1)$ слое по формуле

$$u_{ij+1} = a_{ij+1}(b_{ij+1} + u_{i+1\,j+1}).$$

Величина $u_{nj+1} = \psi_{j+1}$ является значением искомой функции в точке (x_n, t_{j+1}), а $u_{0\,j+1} = \varphi_{j+1}$ – в точке (x_0, t_{j+1}). Схема устойчива при любом $S > 0$. Погрешность метода $O(h^2 + k)$.

Лабораторная работа №12

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Задание.

1. Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.20}$$

на примере уравнения теплопроводности однородного стержня длиной $0 \le x \le l$ с начальным условием (9.21) и краевыми условиями (9.22):

$$f(x) = 0.6\cos(-x); \tag{9.21}$$

$$\varphi(t) = 0.8t + 0.6e^t;\ \ \psi(t) = 2.2t - 0.7\sin(-t) \tag{9.22}$$

методом сеток.

2. Заменить уравнение (9.20), используя конечно-разностные соотношения.

Решение.

1. *Метод сеток.*

Найти решение уравнения (9.20) при условиях:

$$u(x,0) = f(x), \tag{9.23}$$

$$u(0,t) = \varphi(t),\ u(l,t) = \psi(t), \tag{9.24}$$

где $u = u(x,t)$ - температура, t - время, $a = 1$.

Рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{x,t\}$ (рис. 9.4). В полуполосе $t \geq 0,\ 0 \leq x \leq l$ построим прямоугольную сетку $x_i = ih,\ i = \overline{0,n},\ t_j = jk,\ j = \overline{0,m}$, $u_{ij} = u(x_i, t_j)$, где $h = \dfrac{l}{n}$ – шаг по оси OX и $k = \delta h^2$ – шаг по оси Ot. Постоянная величина δ пока не определена.

Исходное дифференциальное уравнение заменим конечно-разностным уравнением в узловых точках (x_i, t_j). Рассмотрим два способа аппроксимации.

2. *Явная схема.*

Конечно-разностное уравнение запишется так:

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\delta h^2} = \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2},\ i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{1,m-1}. \tag{9.25}$$

После преобразований получим:

$$u_{ij+1} = \delta u_{i-1j} + (1 - 2\delta)u_{ij} + \delta u_{i+1j}. \tag{9.26}$$

Из формулы (9.26) видно, что для подсчета значения искомой функции $u(x,t)$ в узловых точках $(j+1)$-го слоя используются уже известные значения этой функции в трех соседних узловых точках j-го слоя (рис. 9.5).

Величина δ выбирается из условия устойчивости конечно-разностной схемы (9.25), например $\delta = \dfrac{1}{6}$. Тогда равенство (9.26) примет вид:

$$u_{ij+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i-1j} + 4u_{ij} + u_{i+1j}\right),\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{0, m-1}. \qquad (9.27)$$

Начальное и краевые условия запишутся так:

$$u_{i0} = f_i,\ u_{0j} = \varphi_j,\ u_{nj} = \psi_j,\ i = \overline{0, n},\ j = 0,1,\ldots. \qquad (9.28)$$

Решение получается в численном виде по формуле (9.27) с учетом краевых условий (9.28) и представляет собой значения искомой функции $u(x,t)$ в узлах сетки (x_i, t_j), т.е. $u_{ij} = u(x_i, t_j),\ i = \overline{0, n},\ j = 0,1,\ldots$.

Для исходной задачи (9.20)–(9.22) конечно-разностные соотношения уравнения (9.20) имеют вид (9.27), а начальное условие (9.21) и краевые условия (9.22) запишутся так:

$$u_{i0} = 0.6\cos(-x_i),\ u_{0j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j},\ u_{nj} = 2.2t_j - 0.7\sin(-t_j),\ i = \overline{0, n},\ j = 0,1,\ldots \qquad (9.29)$$

Алгоритм явной схемы имеет вид:

1) пусть $l = 1,\ n = 10,\ m = 10,\ \delta = \frac{1}{6}$. Построить систему равноотстоящих точек $l = 1$, $h = \frac{l}{n} = 0.1$, $x_{i+1} = x_i + h,\ i = \overline{0, n-1}$;

2) вычислить $u_{i0} = 0.6\cos(-x_i),\ i = \overline{0, n}$;

3) вычислить $u_{0j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j},\ t_j = j\delta h^2,\ j = \overline{1, m}$;

4) вычислить $u_{nj} = 2.2t_j - 0.7\sin(-t_j),\ t_j = j\delta h^2,\ j = \overline{1, m}$;

5) вычислить $u_{ij+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i-1j} + 4u_{ij} + u_{i+1j}\right),\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{0, m-1}$.

3. *Неявная схема.*

Рассмотрим другую устойчивую конечно-разностную схему (так называемую «неявную схему»), в которой используется другое соотношение между шагами h и k: $h^2 = kS$, $S > 0$. За счет выбора параметра

S можно изменять скорость продвижения по оси t.

Исходное дифференциальное уравнение (9.20) заменяется конечно-разностными соотношениями:

$$\frac{S\left(u_{ij+1}-u_{ij}\right)}{h^2}=\frac{u_{i+1j+1}-2u_{ij+1}+u_{i-1j+1}}{h^2}. \qquad (9.30)$$

Начальные и граничные условия остаются теми же, что и в явной схеме (9.28). Для решения системы линейных алгебраических уравнений (9.30) применяется метод прогонки, суть которого состоит в том, что сначала вычисляются значения $u_{i0}=f_i$, выбирается значение S для получения требуемой скорости продвижения по оси t. В прямом ходе на очередном $(j+1)$-м временном слое вычисляются вспомогательные функции:

$$\begin{aligned}
&a_{1j+1}=\frac{1}{2+S},\\
&b_{1j+1}=\varphi_{j+1}+Su_{1j},\\
&a_{ij+1}=\frac{1}{2+S-a_{i-1j+1}},\\
&b_{ij+1}=a_{i-1j+1}b_{i-1j+1}+Su_{ij},\ i=\overline{2,n},\ j=\overline{0,m-1}.
\end{aligned} \qquad (9.31)$$

В обратном ходе вычисляются значения искомой функции на $(j+1)$ слое по формуле:

$$u_{ij+1}=a_{ij+1}\left(b_{ij+1}+u_{i+1j+1}\right),\ i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{0,m-1}. \qquad (9.32)$$

Величина $u_{nj+1}=\psi_{j+1}$ является значением искомой функции в точках $\left(x_n,t_{j+1}\right)$, а $u_{0j+1}=\varphi_{j+1}$ – в точках $\left(x_0,t_{j+1}\right)$.

Алгоритм неявной схемы имеет вид:

1) пусть $l=1, n=10, m=10, S=6$. Построить систему равноотстоящих

точек $l=1$, $h=\frac{l}{n}=0.1$, $x_{i+1}=x_i+h, i=\overline{0,n-1}$;

2) вычислить $u_{i0}=0.6\cos\left(-x_i\right)$, $i=\overline{0,n}$;

3) вычислить $u_{0j}=0.8t_j+0.6e^{t_j}$, $t_j=j\delta h^2$, $j=\overline{1,m}$;

4) вычислить $u_{nj}=2.2t_j-0.7\sin\left(-t_j\right)$, $t_j=j\delta h^2$, $j=\overline{1,m}$;

5) вычислить $a_{1j+1}=\frac{1}{2+S}$, $b_{1j+1}=0.8t_{j+1}+0.6e^{t_{j+1}}+Su_{1j}$, $j=\overline{0,m-1}$;

6) вычислить $a_{ij+1}=\frac{1}{2+S-a_{i-1j+1}}$, $b_{ij+1}=a_{i-1j+1}b_{i-1j+1}+Su_{ij}$, $i=\overline{2,n}$, $j=\overline{0,m-1}$. ;

7) вычислить $u_{ij+1}=a_{ij+1}\left(b_{ij+1}+u_{i+1j+1}\right)$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{0,m-1}$.

9.5. Метод сеток для уравнений гиперболического типа

Примером уравнения гиперболического типа является уравнение свободных колебаний однородной ограниченной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9.33}$$

где $a=\text{const}$. Будем искать решение уравнения (9.33) при заданных начальных условиях:

$$u(x,0)=f(x); \tag{9.34}$$

$$u_t(x,0)=F(x),\ 0\le x\le l \tag{9.35}$$

и краевых условий:

$$\begin{aligned} &u(0,t)=\varphi_1(t);\\ &u(l,t)=\varphi_2(t); \end{aligned} \tag{9.36}$$

$$0\le t<\infty.$$

Решим эту задачу методом сеток. Как и в случае параболического уравнения, заменим прямоугольную область $0 \le x \le l$ и $0 \le t < \infty$ сеточной $\{x_i, t_j\}$, где $x_i = ih$, $t_j = jk$, $i = \overline{0,n}$, $j = 0,1,\ldots$. Шаг по оси OX – $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = l/n$, шаг по оси Ot – $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j = k$.

На сетке $\{x_i, t_j\}$ приближенно заменим дифференциальное уравнение (9.33) конечно-разностным уравнением:

$$\frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}. \qquad (9.37)$$

При $k = \dfrac{h}{a}$ уравнение (9.37) упрощается и принимает вид:

$$u_{ij+1} + u_{ij-1} = u_{i+1j} + u_{i-1j},$$

откуда

$$u_{ij+1} = u_{i+1j} + u_{i-1j} - u_{ij-1}, \; j = 0,1,\ldots \qquad (9.38)$$

Из уравнения (9.38) видно, что для получения значений $u(x,t)$ в $(j+1)$-м слое используются значения $u(x,t)$ в двух предыдущих слоях j-м и $(j-1)$-м (рис. 9.6). Для начала вычислений по формуле (9.38) необходимо знать значения $u(x,t)$ в двух слоях $j = 0$, $j = -1$.

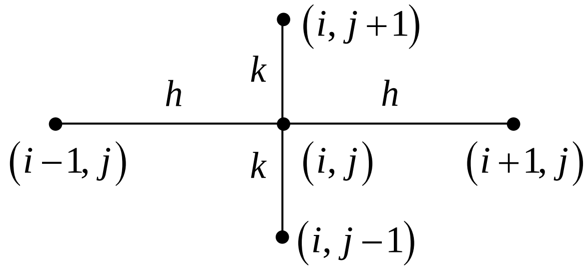

Рис. 9.6

Начальные условия (9.34) задают значения $u(x,t)$ лишь на нулевом слое $j = 0$. Используя начальное условие (9.35) $u_t(x,0) = F(x)$, можно определить значения $u(x,t)$ на слое с номером $j = -1$. Для этого запишем соотношение (9.35) в конечно-разностном виде: $\frac{u_{i,-1}-u_{i0}}{-k}=F_i$, где $F_i=F\left(x_i\right)$. Отсюда находим $u_{i,-1}=u_{i0}-kF_i$. Зная значения $u\left(x,t\right)$ на слое $j=-1$, можно начать вычисления. Краевые условия (9.36) используются для получения значений u_{0j} и u_{nj}.

Лабораторная работа № 13

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Задание.

1. Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.37}$$

на примере уравнения свободных колебаний однородной ограниченной струны длиной $0\le x\le l$, где $a=\text{const}$ с дополнительными краевыми условиями

$$\begin{gathered}u\left(x,0\right)=f\left(x\right)=0.6\cos\left(-x\right);\ u_t'\left(x,0\right)=F\left(x\right)=-0.6\sin\left(-x\right)+2;\\ u\left(0,t\right)=\varphi\left(t\right)=0.8t+0.6e^t;\ u\left(l,t\right)=\psi\left(t\right)=2.2t-0.7\sin\left(-t\right)\end{gathered} \tag{9.38}$$

методом сеток.

2. В полуполосе $0\le x\le l,\ \ 0\le t<\infty$ построить сетку $\left\{x_i,t_j\right\}$, где $x_i=ih,\ t_j=jk,\ i=\overline{0,n},\ j=0,1,...$

3. Заменить уравнение (9.37) конечно-разностными соотношениями в

узлах сетки.

Решение.

Рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{x,t\}$ (рис. 9.4). В полуполосе $t \geq 0,\, 0 \leq x \leq 1$ построим прямоугольную сетку $x_i = ih,\, i = \overline{0,10},\ t_j = jk,\ j = \overline{0,10},\ u_{ij} = u\left(x_i, t_j\right)$, где $h = \dfrac{1}{10}$ – шаг по оси OX и $k = \dfrac{h}{a}$ – шаг по оси Ot.

Исходное дифференциальное уравнение заменим конечно-разностными уравнениями в узловых точках (x_i, t_j).

Конечно-разностные уравнения запишутся так:

$$a^2 \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h^2} = a^2 \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}. \tag{9.39}$$

После преобразований получим:

$$u_{ij+1} = u_{i+1j} + u_{i-1j} - u_{ij-1}. \tag{9.40}$$

Из формулы (9.40) видно, что для подсчета значения искомой функции $u(x,t)$ в узловых точках $(j+1)$-го слоя используются значения $u(x,t)$ в двух слоях j-м и $(j-1)$-м (рис. 9.6).

Для начала вычислений по формуле (9.40) необходимо знать значения функции $u(x,t)$ в двух слоях $j = 0,\ j = -1$. Запишем начальное условие $u'_t(x,0) = F(x)$ в конечно-разностном виде: $\dfrac{u_{i,0} - u_{i,-1}}{k} = F_i$, где $F_i = F(x_i)$. Из этого соотношения выразим $u_{i,-1}$:

$$u_{i,-1} = u_{i,0} - kF_i.$$

Для исходной задачи (9.37), (9.38) конечно-разностная форма уравнения (9.37) имеет вид (9.40), а краевые условия (9.38) запишутся так:

$$u_{i,0} = 0.6\cos(-x_i);\; u_{i,-1} = u_{i,0} - kF_i = 0.6\cos(-x_i) - k\left(-0.6\sin(-x_i) + 2\right);$$
$$u_{0,j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j};\; u_{n,j} = 2.2t_j - 0.7\sin\left(-t_j\right);\; i = \overline{0,10};\;\; j = \overline{0,10}. \tag{9.41}$$

Алгоритм решения задачи:

1) построить систему равноотстоящих точек

$$l = 1,\; h = \frac{l}{n} = 0.1,\; x_i = ih, i = \overline{0,10};\; t_j = jk,\; j = \overline{0,10},\; k = \frac{h}{a};$$

2) вычислить $u_{i,0} = 0.6\cos(-x_i),\; i = \overline{0,10}$;

3) вычислить $u_{i,-1} = 0.6\cos(-x_i) - k\left(-0.6\sin(-x_i) + 2\right),\; i = \overline{1,9}$;

4) вычислить $u_{0,j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j}; t_j = jk,\; j = \overline{1,10}$;

5) вычислить $u_{n,j} = 2.2t_j - 0.7\sin\left(-t_j\right);\; t_j = jk,\; j = \overline{1,10}$;

6) вычислить $u_{ij+1} = u_{i+1j} + u_{i-1j} - u_{ij-1},\; i = \overline{1,9},\; j = \overline{1,9}$.

9.6. Задачи для самостоятельной работы

1. Определить тип дифференциального уравнения в частных производных:

1.1. $$0.6\frac{\partial u}{\partial x^2} + 2\times 1.5\frac{\partial u}{\partial x\partial y} + 0.5\frac{\partial u}{\partial y^2} + 0.9\frac{\partial u}{\partial x} - 0.1\frac{\partial u}{\partial y} - 1.9u = F(x,y),$$

где x, y - независимые переменные, $u = u(x,y)$ - искомая функция.

1.2. $$0.8\frac{\partial u}{\partial x^2} + 2\times 0.45\frac{\partial u}{\partial x\partial y} + 1.2\frac{\partial u}{\partial y^2} + 0.9\frac{\partial u}{\partial x} - 0.1\frac{\partial u}{\partial y} - 1.9\,u = F(x,y),$$

где x, y - независимые переменные, $u = u(x,y)$ - искомая функция.

1.3. $$2.0\frac{\partial u}{\partial x^2} + 2\times 2.0\frac{\partial u}{\partial x\partial y} + 2.0\frac{\partial u}{\partial y^2} + 0.9\frac{\partial u}{\partial x} - 0.1\frac{\partial u}{\partial y} - 1.9\,u = F(x,y),$$

где x, y - независимые переменные, $u = u(x, y)$ - искомая функция.

2. Записать характеристическое уравнение для дифференциального уравнения в частных производных

$$2.1\frac{\partial u}{\partial x^2} + 2\times 1.3\frac{\partial u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2.5\frac{\partial u}{\partial y} + u = F(x, y).$$

3. Задачу приближенного решения дифференциального уравнения параболического типа $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, при $a = 1$, с начальным условием $f(x) = 0.6\cos(-x)$, при $0 \le x \le 1$ и краевыми условиями $\varphi(t) = 0.6t - 0.3e^t$, $\psi(t) = 2.5t + 0.2\sin(-t)$, методом сеток записать в конечно-разностной форме.

4. Задачу приближенного решения дифференциального уравнения гиперболического типа $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, при $a = 1$, с краевыми условиями

$$u(x,0) = f(x) = 0.5\cos(-x);\ u'_t(x,0) = F(x) = -0.3\sin(-x) + 1;$$
$$u(0,t) = \varphi(t) = 0.7t + 0.4e^t;\ u(l,t) = \psi(t) = 2.1t - 0.6\sin(-t);$$
$$t \ge 0,\ 0 \le x \le 1,$$

методом сеток записать в конечно-разностной форме.

9.7. Вопросы для самоподготовки

1. Дать определение дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, решения уравнения.

2. Привести геометрическую интерпретацию уравнения.

3. Дать определение вполне линейного уравнения.

4. Дать определение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Привести его

классификацию.

5. Дать определение характеристического уравнения и характеристик.

6. Дать определение уравнения гиперболического типа. Привести его канонический вид.

7. Дать определение уравнения параболического типа. Привести его канонический вид.

8. Дать определение уравнения эллиптического типа. Привести его канонический вид.

9. Дать определения оператора Лапласа, уравнения Лапласа, уравнения Пуассона.

10. Вывести уравнение Лапласа в конечных разностях. Привести его геометрическую интерпретацию и оценить погрешность.

11. В чем состоит основная идея метода сеток для приближенного решения краевых задач для двумерных дифференциальных уравнений.

12. Привести решение задачи Дирихле методом сеток.

13. Дать определение соседних, внутренних узлов сетки, а также граничных узлов первого и второго рода.

14. Привести процесс усреднения Либмана: дать определение гармонической функции, сформулировать принцип максимума; привести геометрическую интерпретацию.

15. Привести метод сеток для уравнения параболического типа на примере уравнения теплопроводности для однородного стержня.

16. Дать определение устойчивой и неустойчивой конечно-разностной схемы. Привести оценку погрешности.

17. Дать определения явной и неявной конечно-разностной схемы.

18. Рассмотреть метод прогонки для неявной конечно-разностной схемы.

19. Привести метод сеток для уравнений гиперболического типа на примере уравнения свободных колебаний однородной ограниченной струны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики: учебное пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон. - 8-е изд., стер. – Издательство "Лань", 2011. – 672с.

2. Горбунов, Д.А. Вычислительная математика: учебное пособие / Д.А. Горбунов, Е.М. Комиссарова. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2008.- 148с.

3. Горбунов, Д.А. Численные методы решения инженерных задач: учебное пособие. / Д.А. Горбунов, Е.М. Комиссарова. - Казань: РИЦ «Школа», 2008. - 154с.

4. Амосов, А.А. Вычислительные методы: учебное пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова - 4-е изд., стер. – Издательство "Лань", 2014. – 672с.

5. Копченова, Н.В. Вычислительная математика: учебное пособие / Н.В. Копченова, И.А. Марон. - 4-е изд., стер. – Издательство "Лань", 2017. – 368с.

6. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры: учебное пособие / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. - 4-е изд., стер. - Издательство "Лань", 2009. - 736с.

7. Моисеев, В.С. Метод малого параметра для решения задач анализа и синтеза проектных решений на базе неявно заданных функциональных зависимостей / В.С. Моисеев, Д.А. Горбунов //Изв. вузов. Авиационная техника. – 1998.- №4. - С.3-10.

8. Горбунов, Д.А. Основы прикладной теории неявных математических моделей и методов: монография / Д.А. Горбунов, В.С. Моисеев. Казань: РИЦ, 2012.- 172с.

9. Горбунов, Д.А. Метод малого параметра для решения нелинейных уравнений / Д.А. Горбунов, С.В. Сотников. Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: сборник статей XVI Международной научно-технической конференции. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2016.- С.18-23.

10. Моисеев, В.С. Оптимизация стохастического размещения объектов. / В.С. Моисеев, С.В. Сотников. Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева.- 2002.- № 3. С. 23-29.

Горбунов Дмитрий Алексеевич
Сотников Сергей Викторович

КУРС ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Редактор Л.М. Самуйлина