Лабораторная работа №12

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Цель работы: научиться решать краевые задачи для дифференциальных уравнений параболического типа методом сеток с помощью ЭВМ [1, 4].

Содержание работы:

1) изучить метод сеток для дифференциального уравнения параболического типа с использованием явной и неявной схемы;

2) заменить исходное уравнение, начальное и краевые условия конечно-разностными соотношениями;

3) составить программу численного решения краевой задачи на ЭВМ;

4) сравнить результаты, полученные с помощью явной и неявной схем, используя разные значения параметра S;

5) составить отчет о проделанной работе.

Пример выполнения работы

Задание.

1. Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (51)$$

на примере уравнения теплопроводности однородного стержня длиной $0 \le x \le l$ с начальным условием (52) и краевыми условиями (53):

$$f(x) = 0.6\, cos(-x); \qquad (52)$$

$$\varphi(t) = 0.8t + 0.6e^t; \quad \psi(t) = 2.2t - 0.7\, sin(-t) \qquad (53)$$

методом сеток.

2. Заменить уравнение (51), используя конечно-разностные соотношения.

3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую процесс построения решения.

Решение.

1. *Метод сеток.*

Найти решение уравнения (51) при условиях:

$$u(x,0) = f(x), \qquad (54)$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(l,t) = \psi_2(t), \qquad (55)$$

где $u = u(x,t)$ - температура, t - время, $a = 1$.

Рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{x,t\}$ (рис. 15). В полуполосе $t \geq 0,\ 0 \leq x \leq l$ построим прямоугольную сетку $x_i = ih,\ i = \overline{0,n},\ t_j = jk,\ j = \overline{0,m},\ u_{ij} = u(x_i,t_j)$, где $h = \frac{l}{n}$ – шаг по оси OX и $k = \delta h^2$ – шаг по оси Ot. Постоянная величина δ пока не определена.

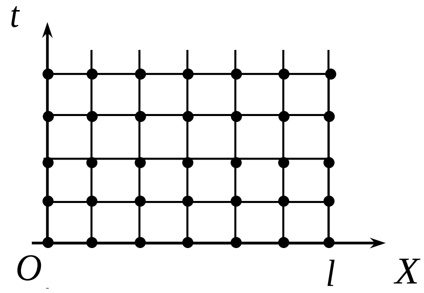

Рис. 15

Исходное дифференциальное уравнение заменим конечно-разностным уравнением в узловых точках (x_i,t_j). Рассмотрим два способа аппроксимации.

2. *Явная схема.*

Конечно-разностное уравнение запишется так:

$$\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{\delta h^2} = \frac{u_{i+1j}-2u_{ij}+u_{i-1j}}{h^2},\ i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{1,m-1}. \qquad (56)$$

После преобразований получим:

$$u_{ij+1} = \delta u_{i-1j} + (1-2\delta)u_{ij} + \delta u_{i+1j}. \qquad (57)$$

Из формулы (57) видно, что для подсчета значения искомой функции $u(x,t)$ в узловых точках $(j+1)$-го слоя используются уже известные значения этой функции в трех соседних узловых точках j -го слоя (рис. 16).

Величина δ выбирается из условия устойчивости конечно-

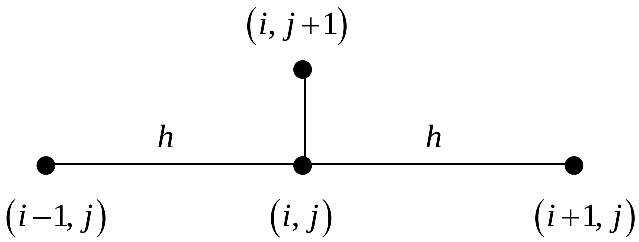

Рис.16

разностной схемы (55), например $\delta = \frac{1}{6}$. Тогда равенство (57) примет вид:

$$u_{ij+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1j} + 4u_{ij} + u_{i+1j}),\ i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{0,m-1} \qquad (58)$$

Начальное и краевые условия запишутся так:

$$u_{i0} = f_i,\quad u_{0j} = \varphi_j,\quad u_{nj} = \psi_j,\quad i = \overline{0,n},\quad j = 0,1,\ldots \qquad (59)$$

Решение получается в численном виде по формуле (58) с учетом краевых условий (59) и представляет собой значения искомой функции $u(x,t)$ в узлах сетки (x_i,t_j), т.е. $u_{ij} = u(x_i,t_j),\ i = \overline{0,n},\ j = 0,1,\ldots$.

Для исходной задачи (51)–(53) конечно-разностные соотношения уравнения (51) имеют вид (58), а начальное условие (52) и краевые условия (53) запишутся так:

$$u_{i0} = 0.6\,cos(-x_i)\,,\ u_{0j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j},\ u_{nj} = 2.2t_j - 0.7\,sin(-t_j)\,, i = \overline{0,n}, j = 0,1,\ldots \quad (60)$$

Алгоритм явной схемы имеет вид:

1) пусть $l = 1,\ n = 10,\ m = 10,\ \delta = \frac{1}{6}$. Построить систему равноотстоящих точек $l = 1$, $h = \frac{l}{n} = 0.1$, $x_{i+1} = x_i + h,\ i = \overline{0,n-1}$;
2) вычислить $u_{i0} = 0.6\,cos(-x_i)\,, i = \overline{0,n}$;
3) вычислить $u_{0j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j}, t_j = j\delta h^2, j = \overline{1,m}$;
4) вычислить $u_{nj} = 2.2t_j - 0.7\,sin(-t_j)\,, t_j = j\delta h^2, j = \overline{1,m}$;
5) вычислить $u_{ij+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1j} + 4u_{ij} + u_{i+1j}),\ i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{0,m-1}$.

3. *Неявная схема.*

Рассмотрим другую устойчивую конечно-разностную схему (так называемую «неявную схему»), в которой используется другое соотношение между шагами h и k: $h^2 = kS$, $S > 0$. За счет выбора параметра S можно изменять скорость продвижения по оси t.

Исходное дифференциальное уравнение (51) заменяется конечно-разностными соотношениями:

$$\frac{S(u_{ij+1} - u_{ij})}{h^2} = \frac{u_{i+1j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i-1j+1}}{h^2}. \quad (61)$$

Начальные и граничные условия остаются теми же, что и в явной схеме (59). Для решения системы линейных алгебраических уравнений (61) применяется метод прогонки, суть которого состоит в том, что сначала вычисляются значения $u_{i0} = f_i$, выбирается значение S для получения требуемой скорости продвижения по оси t. В прямом ходе на очередном $(j+1)$ -м временном слое вычисляются вспомогательные функции:

$$a_{1j+1} = \frac{1}{2+S},$$

$$b_{1j+1} = \varphi_{j+1} + Su_{1j},$$

$$a_{ij+1} = \frac{1}{2+S-a_{i-1j+1}},$$

$$b_{ij+1} = a_{i-1j+1}b_{i-1j+1} + Su_{ij},\ i = \overline{2,n},\ j = \overline{0,m-1}. \quad (62)$$

В обратном ходе вычисляются значения искомой функции на $(j+1)$ слое по формуле:

$$u_{ij+1} = a_{ij+1}(b_{ij+1} + u_{i+1j+1}),\ i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{0,m-1}$$

. (63)

Величина $u_{nj+1} = \psi_{j+1}$ является значением искомой функции в точках (x_n, t_{j+1}), а $u_{0j+1} = \varphi_{j+1}$ – в точках (x_0, t_{j+1}).

Алгоритм неявной схемы имеет вид:

1) пусть $l = 1,\ n = 10,\ m = 10,\ S = 6$. Построить систему равноотстоящих точек $l = 1$, $h = \frac{l}{n} = 0.1$, $x_{i+1} = x_i + h,\ i = \overline{0, n-1}$;

2) вычислить $u_{i0} = 0.6\,cos(-x_i)\,,\ i = \overline{0, n}$;

3) вычислить $u_{0j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j},\ t_j = j\delta h^2,\ j = \overline{1, m}$;

4) вычислить $u_{nj} = 2.2t_j - 0.7\,sin(-t_j)\,,\ t_j = j\delta h^2,\ j = \overline{1, m}$;

5) вычислить

$$a_{1j+1} = \frac{1}{2+S},\quad b_{1j+1} = 0.8t_{j+1} + 0.6e^{t_{j+1}} + Su_{1j},\quad j = \overline{0, m-1};$$

6) вычислить

$$a_{ij+1} = \frac{1}{2+S-a_{i-1j+1}},\quad b_{ij+1} = a_{i-1j+1}b_{i-1j+1} + Su_{ij},\quad i = \overline{2, n},\quad j = \overline{0, m-1}.$$

7) вычислить

$$u_{ij+1} = a_{ij+1}(b_{ij+1} + u_{i+1j+1}),\quad i = \overline{1, n-1},\quad j = \overline{0, m-1}.$$

В качестве примера приведена программа на языке программирования Pascal, реализующая процесс вычислений по явной и неявной схеме.

Пример программы на языке Pascal

```
program Lab12;
uses crt;
const n=10;m=10;a=0;b=1;delta=1/6;s=6;
var i,j:integer;
   x,h,t,gamma,m1,m2,alfa,betta,n1:real;
   a1,b1,u:array [0..n,0..m] of real;
function f(x:real): real;
begin f:=gamma*cos(m1*x); end;
function fi1(t:real):real;
begin fi1:=alfa*t+betta*exp(t); end;
function fi2(t:real):real;
begin fi2:=n1*t+m2*sin(m1*t); end;
procedure Yav;
begin
h:=(b-a)/n;
gamma:=0.6;m1:=-1;alfa:=0.8;betta:=0.6;m2:=2.2;n1:=-0.7;
for i:=0 to n do for j:=0 to m do u[i,j]:=0;
x:=a;
for i:=0 to n do begin
   u[i,0]:=f(x);
   x:=x+h;
end;
for j:=1 to m do begin
```

```
   u[0,j]:=fi1(j*delta*h*h);
   u[n,j]:=fi2(j*delta*h*h);
end;
for i:=1 to n-1 do for j:=0 to m-1 do u[i,j+1]:=1/6*(u[i-1,j]+4*u[i,j]+u[i+1,j]);
for i:=0 to n do write('  ',i:4);
writeln;
for j:=m downto 0 do begin
   write(j:2,' ');
   for i:=n downto 0 do write(u[i,j]:6:3);
   writeln;
end;
end;
procedure neyav;
begin
h:=(b-a)/n;
gamma:=0.6;m1:=-1;alfa:=0.8;betta:=0.6;m2:=2.2;n1:=-0.7;
for i:=0 to n do for j:=0 to m do u[i,j]:=0;
x:=a;
for i:=0 to n do begin
   u[i,0]:=f(x);
   x:=x+h;
end;
for j:=1 to m do begin
   u[0,j]:=fi1(j*h*h/s);
   u[n,j]:=fi2(j*h*h/s);
end;
for j:=0 to m-1 do begin
   a1[1,j+1]:=1/(2+s);
   b1[1,j+1]:=fi1((j+1)*h*h/s)+s*u[1,j];
end;
for i:=2 to n do
   for j:=0 to m-1 do begin
      a1[i,j+1]:=1/(2+s-a1[i-1,j+1]);
      b1[i,j+1]:=a1[i-1,j+1]*b1[i-1,j+1]+s*u[i,j];
   end;
for i:=1 to n-1 do for j:=0 to m-1 do u[i,j+1]:=a1[i,j+1]*(b1[i,j+1]+u[i+1,j+1]);
for i:=0 to n do write('  ',i:4);
writeln;
for j:=m downto 0 do begin
   write(j:2,' ');
   for i:=n downto 0 do write(u[i,j]:6:3);
   writeln;
end;
end;
begin
clrscr;
yav;
neyav;
end.
```

Решение задачи (51)–(53) с применением явной и неявной схем приведены в виде таблиц 14 и 15.

Таблица 14

№п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	-0.048	0.070	0.094	0.100	0.105	0.110	0.116	0.132	0.181	0.316	0.623
9	-0.043	0.088	0.111	0.119	0.125	0.131	0.136	0.149	0.192	0.319	0.621
8	-0.039	0.108	0.131	0.141	0.149	0.156	0.162	0.172	0.207	0.323	0.619
7	-0.034	0.132	0.155	0.167	0.177	0.185	0.192	0.201	0.228	0.331	0.616
6	-0.029	0.159	0.183	0.198	0.210	0.221	0.229	0.237	0.257	0.343	0.614
5	-0.024	0.191	0.216	0.234	0.250	0.263	0.273	0.282	0.295	0.361	0.612
4	-0.019	0.227	0.255	0.277	0.297	0.313	0.326	0.336	0.345	0.390	0.609
3	-0.014	0.269	0.301	0.328	0.352	0.372	0.389	0.401	0.410	0.433	0.607
2	-0.010	0.317	0.355	0.388	0.417	0.442	0.463	0.479	0.491	0.498	0.605
1	-0.005	0.372	0.417	0.458	0.494	0.526	0.552	0.572	0.587	0.596	0.602
0	0.324	0.373	0.418	0.459	0.495	0.527	0.553	0.573	0.588	0.597	0.600

Таблица 15

№п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	-0.048	-0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.010	0.078	0.623
9	-0.043	-0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.010	0.078	0.621
8	-0.039	-0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.010	0.077	0.619
7	-0.034	-0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.009	0.077	0.616
6	-0.029	-0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.009	0.077	0.614
5	-0.024	-0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.009	0.076	0.612
4	-0.019	-0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.009	0.076	0.609
3	-0.014	-0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.009	0.076	0.607
2	-0.010	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.009	0.076	0.605
1	-0.005	0.319	0.357	0.391	0.421	0.447	0.468	0.485	0.499	0.523	0.602
0	0.324	0.373	0.418	0.459	0.495	0.527	0.553	0.573	0.588	0.597	0.600

В отчет о проделанной работе должны входить: номер и название лабораторной работы; цель работы; содержание работы; задание на работу; теоретическая часть работы (вывод формул); листинг программы; таблица результатов; выводы о проделанной работе.

Порядок выполнения работы

1. Записать исходное дифференциальное уравнение параболического типа (51), начальное условие (52), краевые условия (53).

2. Записать алгоритмы явной и неявной схем вычислений.

3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую явную и неявную схему вычислений. Неявную схему реализовать при трех различных значениях S: $S = 6$, $S > 6$, $0 < S < 6$. Печать результатов должна осуществляться на каждом шаге в виде табл. 16 (заполнить по образцу):

Таблица 16

$t_j \backslash x_i$	x_0	x_1	$\dots$	x_n
t_0	$u(x_0, t_0)$	$u(x_1, t_0)$	$\dots$	$u(x_n, t_0)$
t_1	$u(x_0, t_1)$	$u(x_1, t_1)$	$\dots$	$u(x_n, t_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
t_m	$u(x_0, t_m)$	$u(x_1, t_m)$	$\dots$	$u(x_n, t_m)$

4. Сделать вывод об изменении скорости продвижения по оси t в зависимости от значения параметра S.

5. Составить отчет о проделанной работе.

Варианты индивидуальных заданий граничных условий

Граничные условия: $f(x) = \gamma \cos m\, x, \quad \phi(t) = \alpha t + \beta e^t, \quad \psi(t) = Nt + M \sin m\, t.$

Табл. 17.

Номер варианта	Параметры					
	γ	m	α	β	M	N
1	0.6	0.3	0.1	0.4	-0.2	1
2	0.8	0.9	0.3	-0.5	0.9	-0.9
3	0.5	0.4	-0.5	0.6	1	-0.8
4	1.1	1	-0.4	-0.5	0.7	0.4
5	1.4	1	-0.2	2.2	0.3	-0.6
6	0.3	0.7	0.5	-1.4	-2	0.3
7	0.7	0.6	-0.5	0.9	1	0.2
8	0.6	-0.3	1	-1	0.9	0.4
9	-0.3	0.4	1.2	1	-0.3	0.6
10	-0.6	0.2	-0.1	0.3	0.2	0.9
11	0.3	-0.4	0.2	0.3	0.4	-0.7
12	-0.5	0.6	0.7	-0.6	1	0.8
13	1	0.8	-0.2	-0.4	0.6	0.3
14	1.2	2.2	0.6	1.3	2	-0.8
15	-0.4	2	0.7	-0.4	2.1	-0.4

Для выполнения лабораторной работы 12 необходимо получить номер варианта индивидуального задания из табл. 17.