Глава 7. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

7.1. Постановка задачи

Дифференциальные уравнения являются основным математическим инструментом моделирования и анализа разнообразных явлений и процессов в науке и технике.

Методы их решения подразделяются на два класса:

1) аналитические методы, в которых решение получается в виде аналитических функций;

2) численные (приближенные) методы, где искомые интегральные кривые получают в виде таблиц их числовых значений.

Применение аналитических методов позволяет исследовать полученные решения методами математического анализа и сделать соответствующие выводы о свойствах моделируемого явления или процесса. К сожалению, с помощью таких методов можно решать достаточно ограниченный круг реальных задач. Численные методы позволяют получить с определенной точностью приближенное решение практически любой задачи.

Решить дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{7.1}$$

численным методом означает, что для заданной последовательности аргументов $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ и числа $y_0 = y(x_0)$, не определяя аналитического вида функции $y = F(x)$, нужно найти значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющие условиям:

$$F(x_0) = y_0, y_k = F(x_k), \ k = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим три наиболее распространенных при решении практических задач численных метода интегрирования: метод Эйлера, метод Рунге–Кутта и метод Адамса.

7.2. Метод Эйлера

Этот метод обладает малой точностью и применяется в основном для ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в основу метода Эйлера, являются исходными для ряда других численных методов.

Пусть дано дифференциальное уравнение с начальным условием (задача Коши)

$$y' = f(x,y),\ y_0 = y(x_0) \tag{7.2}$$

и выполняются условия существования и единственности решения.

Теорема Пиккара (теорема о существовании и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении (7.1) функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $D = \{x_0 - a \le x \le x_0 + a; y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$ и удовлетворяет в D условию Липшица

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \le N \left| y_1 - y_2 \right|,$$

где N – константа Липшица, то существует единственное решение $y = y(x)$, $x_0 - H \le x \le x_0 + H$, уравнения (7.1), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, где $H < \min\left\{a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1}{N}\right\}$, $M = \max f(x,y)$ в D.

Требуется найти решение $y(x)$ задачи Коши (7.2).

Выбрав шаг h – достаточно малый, равный $h = (b-a)/n$, строим систему равноотстоящих точек $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0,n}$.

Искомую интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через точку

$M_0(x_0, y_0)$, приближенно заменим ломаной Эйлера с вершинами $M_i(x_i y_i), i = 0, 1, 2...$ (рис. 7.1).

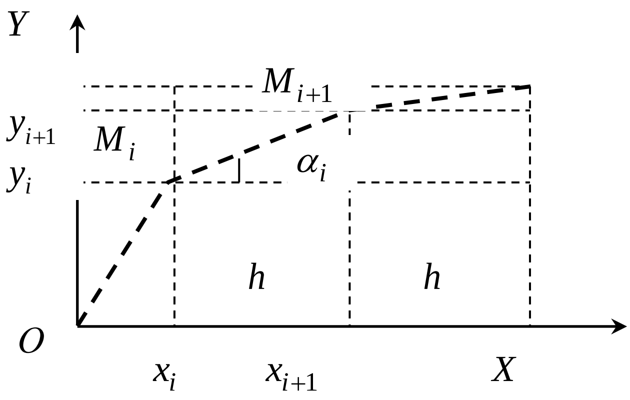

Рис. 7.1

Звено ломаной $M_i M_{i+1}$, заключенное между x_i и x_{i+1}, наклонено к оси OX под углом α_i. Тангенс этого угла вычисляется по формуле:

$$\mathrm{tg}\alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'(x_i) = f(x_i, y_i).$$

Сделав преобразование, получим формулу Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i),\ i = \overline{0, n}. \qquad (7.3)$$

Вычисление значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ осуществляется с использованием формулы (7.3) следующим образом. По заданным начальным условиям $x_0 = a$ и y_0, полагая $i = 0$ в выражении (7.3), вычисляется значение

$$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0).$$

Далее, определяя значение аргумента x по формуле $x_1 = x_0 + h$, используя найденное значение y_1 и полагая в формуле (7.3) $i = 1$, вычисляем следующее приближенное значение интегральной кривой $y = F(x)$:

$$y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1).$$

Поступая аналогичным образом при $i = \overline{2, n-1}$, определяем все остальные значения y_i, в том числе последнее значение $y_n = y_{n-1} + h\, f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)$, которое соответствует значению аргумента $x_n = b$.

Таким образом, соединяя на координатной плоскости точки $\left(x_0, y_0\right)$, $\left(x_1, y_1\right)$, . . . , $\left(x_n, y_\mathrm{n}\right)$ отрезками прямых, получаем ломаную линию с вершинами в точках $M_0\left(x_0, y_0\right), M_1\left(x_1, y_1\right), \ . \ . \ . \ , M_n\left(x_n, y_n\right)$.

Запишем разложение y_{i+1} в ряд Тейлора:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hy'\left(x_i, y_i\right) + \frac{h^2}{2!} y''\left(x_i, y_i\right) + \frac{h^3}{3!} y'''\left(x_i, y_i\right) + \ldots. \tag{7.4}$$

Учитывая формулы (7.3) и (7.4), получим

$$\left|y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}\right| \le \max_{x_i} \frac{h^2}{2!} y''\left(x_i, y_i\right) = \max_{x_i} \frac{h^2}{2!} f'\left(x_i, y_i\right). \tag{7.5}$$

Соотношение (7.5) может быть использовано для выбора шага h. Как правило, шаг h выбирают таким образом, чтобы $h^2 < \varepsilon$, где ε – заданная точность.

Метод Эйлера может быть применен к решению систем дифференциальных уравнений.

Пусть задана система двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z); \\ z' = f_2(x, y, z), \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad z\left(x_0\right) = z_0.$$

Необходимо найти решение этой задачи Коши. Проводя аналогичные рассуждения, получаем расчетные формулы вида:

$$
\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + hf_1\left(x_i, y_i, z_i\right); \\
&z_{i+1} = z_i + hf_2\left(x_i, y_i, z_i\right); \qquad (7.6) \\
&x_{i+1} = x_i + h\ ,\ i = 0, 1, 2, ...,
\end{aligned}
$$

где h – шаг интегрирования.

В результате применения расчетной схемы (7.6) получается приближенное представление интегральных кривых $y = F_1\left(x\right)$ и $z = F_2\left(x\right)$ в форме двух ломаных Эйлера, построенных по полученным точкам $\left(x_i, y_i\right), \left(x_i, z_i\right), i = 0,1,2,...$.

Достоинством метода Эйлера является его простота и высокая скорость поиска решения. Недостатками метода Эйлера являются малая точность и систематическое накопление ошибок, так как при вычислении значений на каждом последующем шаге исходные данные не являются точными и содержат погрешности, зависящие от неточности предшествующих вычислений.

7.3. Метод Рунге–Кутта

Данный метод является одним из наиболее распространенных численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. По сравнению с методом Эйлера метод Рунге–Кутта имеет более высокую точность, но невысокую скорость поиска решения, так как относится к классу многошаговых методов.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f\left(x,y\right)$$

с начальным условием

$$y_0 = y\left(x_0\right).$$

Выберем шаг h и для краткости введем обозначения $x_i = x_0 + ih$, $y_i = y(x_i)$, где $i = 0,1,...$

Рассмотрим числа:

$$k_{1i} = hf\left(x_i, y_i\right);$$
$$k_{2i} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{1i}}{2}\right);$$
$$k_{3i} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{2i}}{2}\right);$$
$$k_{4i} = hf\left(x_i + h, y_i + k_{3i}\right).$$

По методу Рунге–Кутта последовательные значения y_i искомой функции y определяются по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}\right). \tag{7.8}$$

Погрешность метода Рунге–Кутта, заданного формулой (7.8), на каждом шаге есть величина порядка h^5 (в предположении, что $f(x, y) \in C^{(5)}$).

Формулу (7.8) еще называют формулой Рунге–Кутта четвертого порядка точности.

Помимо формулы (7.8) существуют еще другие формулы типа Рунге–Кутта с иными порядками точности. В частности формула $y_{i+1} = y_i + k_{2i}$ – формула Рунге–Кутта второго порядка точности. Эта формула на каждом шаге дает погрешность порядка h^3.

Для определения правильности выбора шага h на практике обычно на каждом этапе из двух шагов применяют двойной пересчет. Исходя из текущего верного значения $y(x_i)$, вычисляют $y(x_i + 2h)$ двумя способами: вначале с шагом h, а затем с шагом $2h$. Если расхождение полученных результатов не превышает допустимой погрешности, то шаг h для данного этапа выбран правильно и полученное с его помощью значение можно принять за $y\left(x_i + 2h\right)$. В противном случае шаг уменьшается в два раза. Эту вычислительную схему легко запрограммировать на ЭВМ.

Метод Рунге–Кутта может быть использован и при решении систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу Коши для системы двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z); \\ z' = f_2(x, y, z), \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad z\left(x_0\right) = z_0 .$$

Формулы метода Рунге–Кутта для данной системы примут вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}\right);$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}\left(m_{1i} + 2m_{2i} + 2m_{3i} + m_{4i}\right), i = \overline{0, n},$$

где

$$\begin{aligned}
&k_{1i} = hf_1\left(x_i, y_i, z_i\right); \\
&m_{1i} = hf_2\left(x_i, y_i, z_i\right); \\
&k_{2i} = hf_1\left(x_i + 0.5h\ , y_i + 0.5k_{1i}\ , z_i + 0.5m_{1i}\right); \\
&m_{2i} = hf_2\left(x_i + 0.5h\ , y_i + 0.5k_{1i}\ , z_i + 0.5m_{1i}\right); \\
&k_{3i} = hf_1\left(x_i + 0.5h\ , y_i + 0.5k_{2i}\ , z_i + 0.5m_{2i}\right); \\
&m_{3i} = hf_2\left(x_i + 0.5h\ , y_i + 0.5k_{2i}\ , z_i + 0.5m_{2i}\right); \\
&k_{4i} = hf_1\left(x_i + h\ , y_i + k_{3i}\ , z_i + m_{3i}\right); \\
&m_{4i} = hf_2\left(x_i + h\ , y_i + k_{3i}\ , z_i + m_{3i}\right).
\end{aligned}$$

Метод Рунге–Кутта обладает значительной точностью и, несмотря на свою трудоемкость, широко используется при численном решении дифференциальных уравнений и систем. Важным преимуществом этого метода является возможность применения переменного шага, что позволяет учитывать локальные особенности искомой функции.

7.4. Метод Адамса

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x,y) \tag{7.9}$$

с начальным условием

$$y_0 = y(x_0). \tag{7.10}$$

Пусть $x_i, i = 0,1,...$ – система равноотстоящих значений с шагом h и $y_i = y(x_i)$. Очевидно, что

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx. \tag{7.11}$$

Запишем вторую интерполяционную формулу Ньютона с точностью до разностей четвертого порядка:

$$y(x) = y_i + q\Delta y_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{i-3}, \tag{7.12}$$

где $q = \dfrac{x - x_n}{h}$.

В формуле (7.12) функцию y заменим на производную y', получим:

$$y'(x) = y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y'_{i-3}. \tag{7.13}$$

Так как $dx = h \cdot dq$, то подставив (7.13) в (7.11), получим:

$$\Delta y_i = h\int_0^1 \left(y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^3 y'_{i-3} \right) dq.$$

После преобразований будем иметь:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{1}{2}\Delta\left(hy'_{i-1}\right) + \frac{5}{12}\Delta^2\left(hy'_{i-2}\right) + \frac{3}{8}\Delta^3\left(hy'_{i-3}\right). \qquad (7.14)$$

Формула (7.14) называется экстраполяционной формулой Адамса.

Для начала итерационного процесса нужно знать начальные значения y_0, y_1, y_2, y_3, так называемый начальный отрезок, который определяют, исходя из начального условия (7.10), каким-либо численным методом (например, методом Рунге–Кутта). Зная значения y_0, y_1, y_2, y_3, из (7.9) находят y'_0, y'_1, y'_2, y'_3 и составляют таблицу конечных разностей:

$$\Delta\left(hy'_0\right), \Delta\left(hy'_1\right), \Delta\left(hy'_2\right), \Delta^2\left(hy'_0\right), \Delta^2\left(hy'_1\right), \Delta^3\left(hy'_0\right). \qquad (7.15)$$

Дальнейшие значения $y_i, i = 4,5,...$ искомого решения можно шаг за шагом вычислять по формуле Адамса (7.14), пополняя по мере необходимости таблицу конечных разностей (7.15).

Для работы на ЭВМ формулу Адамса применяют в раскрытом виде. Так как

$$\begin{aligned}
&\Delta y'_{i-1} = y'_i - y'_{i-1};\\
&\Delta^2 y'_{i-2} = y'_i - 2y'_{i-1} + y'_{i-2};\\
&\Delta^3 y'_{i-3} = y'_i - 3y'_{i-1} + 3y'_{i-2} - y'_{i-3},
\end{aligned}$$

то после приведения подобных членов имеем:

$$\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}\right);\\
&x_{i+1} = x_i + h.
\end{aligned}$$

На практике шаг h выбирают так, чтобы можно было пренебречь величиной

$$\frac{1}{24}\Delta^3\left(hy'_{i-2}\right).$$

Метод Адамса легко распространяется на системы дифференциальных уравнений. Погрешность метода Адамса имеет тот же порядок, что и метод Рунге–Кутта.

Лабораторная работа №10

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Задание.

Найти аналитическое решение задачи Коши вида:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x,y) = x^4 y\,; \tag{7.16}$$

$$y(x_0) = y(1) = y_0 = 1\,. \tag{7.17}$$

и записать рабочие формулы метода Эйлера и метода Рунге–Кутта четвертого порядка точности для ее приближенного решения на отрезке

$$x \in [x_0, x_n] = [1, 1.8]\,. \tag{7.18}$$

Решение.

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (7.16) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Его аналитическим решением являются интегральные кривые вида $y(x,c) = ce^{\frac{x^5}{5}}$, где постоянная c определяется из начального условия (7.17) и равна $c = e^{-\frac{1}{5}}$. Таким образом, решением задачи Коши (7.16), (7.17) является интегральная кривая $y(x) = e^{-\frac{1}{5}} e^{\frac{x^5}{5}}$.

2. Для построения рабочих формул методов Эйлера и Рунге–Кутта четвертого порядка точности разделим отрезок (7.18) на n равных частей и

сформируем систему равноотстоящих точек $x_{i+1} = x_i + h$, $i = \overline{0, n-1}$, где $x_0 = 1$, $x_n = 1.8$, шаг интегрирования $h = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{0.8}{n}$.

Рабочая формула метода Эйлера в общем случае имеет вид:

$$y_{i+1}^E = y_i^E + hf\left(x_i, y_i^E\right), i = \overline{0, n-1}.$$

Для поставленной задачи данная формула запишется так:

$$y_{i+1}^E = y_i^E + hx_i^4 y_i^E, i = \overline{0, n-1}. \qquad (7.19)$$

Для вычислений по методу Рунге–Кутта четвертого порядка необходимо предварительно вычислить четыре коэффициента:

$$k_{1i} = hf\left(x_i, y_i^{RK}\right);$$
$$k_{2i} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^{RK} + \frac{k_{1i}}{2}\right);$$
$$k_{3i} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^{RK} + \frac{k_{2i}}{2}\right);$$
$$k_{4i} = hf\left(x_i + h, y_i^{RK} + k_{3i}\right),$$

а рабочая формула имеет вид:

$$y_{i+1}^{RK} = y_i^{RK} + \frac{1}{6}\left(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}\right), i = \overline{0, n-1}. \qquad (7.20)$$

Для рассматриваемой задачи коэффициенты запишутся так:

$$\begin{aligned} k_{1i} &= hx_i^4 y_i^{RK}; \\ k_{2i} &= h\left(x_i + \frac{h}{2}\right)^4 \left(y_i^{RK} + \frac{k_{1i}}{2}\right); \\ k_{3i} &= h\left(x_i + \frac{h}{2}\right)^4 \left(y_i^{RK} + \frac{k_{2i}}{2}\right); \\ k_{4i} &= h\left(x_i + h\right)^4 \left(y_i^{RK} + k_{3i}\right). \end{aligned} \qquad (7.21)$$

Итерационные процессы, определяемые формулами (7.19), (7.20) и (7.21), можно начать, задав начальное условие (7.17). Процессы заканчиваются при достижении конца отрезка (7.18). В этом случае построенные интегральные кривые $\{x_{i+1}, y_{i+1}\}$ являются приближенными решениями рассматриваемыми методами задачи Коши (7.16) и (7.17) на отрезке (7.18).

Результаты построения аналитического решения задачи Коши (7.16), (7.17) на отрезке (7.18) и приближенных значений интегральных кривых по методам Эйлера и Рунге-Кутта четвертого порядка в виде графиков приведены на рис. 7.2.

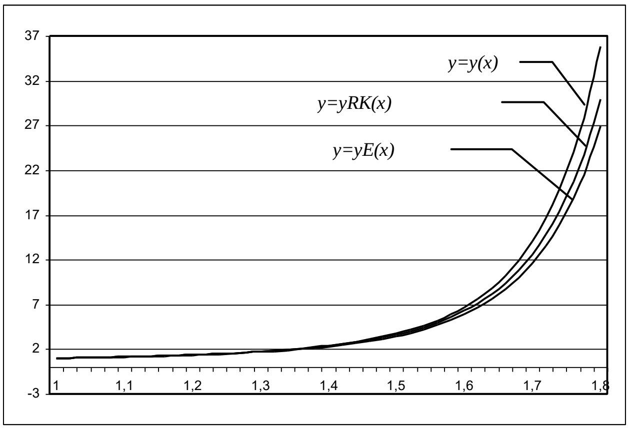

Рис. 7.2

7.5. Задачи для самостоятельной работы

1. Найти решение задачи Коши $\dfrac{dy}{dx} = x^2(y-3)$, $y(1) = 0$.

2. Для приближенного решения какого обыкновенного дифференциального уравнения построена следующая формула Эйлера: $y_{k+1} = y_k + h(x_k + 2)(y_k - 1)$, $k = \overline{0, n-1}$?

3. Записать рабочие формулы метода Рунге-Кутта четвертого порядка точности для приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = y\sin(x^2 - 1)$.

4. Записать рабочие формулы метода Эйлера для приближенного

решения обыкновенного дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3}\cos\left(x^2+1\right)$.

5. Записать рабочие формулы метода Рунге-Кутта четвертого порядка точности для приближенного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=y\sin\left(x^2-1\right), \\ \frac{dz}{dx}=y\cos x\, z. \end{cases}$.

6. Записать рабочие формулы метода Эйлера для приближенного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=\frac{y}{3}\cos\left(x^2+1\right), \\ \frac{dz}{dx}=\frac{y^2}{5}\exp\left(x+z^3-2\right). \end{cases}$.

7. Записать экстраполяционную формулу Адамса в раскрытом виде для приближенного решения задачи Коши $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2}\left(y-1\right)$, $y\left(1\right)=0$.

7.6. Вопросы для самоподготовки

1. Дать определение обыкновенного дифференциального уравнения, начального условия, задачи Коши.

2. Назвать основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. В чем состоят аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений?

4. В чем состоят численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений?

5. Назвать основные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

6. В чем состоит метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений? Сформулировать теорему Пиккара. Привести геометрическую интерпретацию метода Эйлера.

7. Дать определение систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

8. В чем состоит метод Эйлера для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений?

9. Привести основные достоинства и недостатки метода Эйлера.

10. В чем состоит метод Рунге-Кутта для решения обыкновенных дифференциальных уравнений?

11. В чем состоит метод Рунге-Кутта для решения двух дифференциальных уравнений?

12. Назвать основные достоинства и недостатки метода Рунге-Кутта.

13. В чем состоит метод Адамса для решения обыкновенных дифференциальных уравнений?

14. Назвать основные достоинства и недостатки метода Адамса.

15. В чем состоит принципиальное отличие одношаговых и многошаговых методов решения дифференциальных уравнений?