Лекция №7.

Задача о загрузке рюкзака (задача о ранце).

<u>*Постановка задачи.*</u> Пусть имеются N видов грузов с номерами $j = \overline{1, N}$.

Единица груза j-го вида имеет вес a_j. Если груз j-го вида берется в количестве x_j, то его ценность в общем случае составляет $F_j(x_j)$. Имеется «рюкзак», грузоподъемность которого равна B. Требуется загрузить рюкзак имеющимися грузами таким образом, чтобы вес его был не больше заданного B, а ценность «рюкзака» была максимальной.

<u>*Составим Мат. Модель*</u> задачи. Пусть x_j – количество груза j-го вида, помещаемого в рюкзак. Тогда можно записать:

$$F = \sum_{j=1}^{N} F_j(x_j) \Rightarrow \max \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_j x_j \le B \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (3)$$

Здесь x_j могут быть и целыми числами. В общем случае это задача нелинейного программирования с сепарабельной целевой функцией, следовательно, она м.б. решена методом ДП.

Для этого погрузку «рюкзака» можно интерпретировать как N-этапный процесс принятия решений: на 1-м этапе принимается решение о том, сколько нужно взять груза 1-го вида, на 2-ом этапе – сколько груза 2-го вида и т.д. Такая интерпретация наталкивает на возможность применения для решения задачи (1) – (3) метода динамического программирования. Для этого приведем задачу (1) – (3) к виду (4) – (7) из предыдущей лекции.

Для этого введем обозначения: y_j – вес рюкзака перед погрузкой груза j-го вида или вес рюкзака после погрузки грузов видов 1, 2, …, j – 1.Очевидно, что

$$y_1 = 0. \qquad (4)$$

Текущий вес рюкзака определяется выражением

$$y_{j+1} = y_j + a_j x_j \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (5)$$

Текущий вес рюкзака y_{j+1} в силу (2) удовлетворяет неравенству

$$y_{j+1} \le \text{B}. \qquad (6)$$

Очевидно ограничения (4) – (6) эквивалентны ограничению (2), поэтому вместо модели (1) – (3) можно рассматривать модель (1), (3) – (6). Здесь ограничение (6) выводит эту модель за рамки модели (4) – (7) из предыдущей лекции. Для сведения задачи к общему виду задач динамич. программирования, запишем (6) с учетом (5):

$$y_j + a_j x_j \le B \qquad (j = \overline{1, N}).$$

Отсюда следует: $$x_j \le \frac{B - y_j}{a_j},$$

или окончательно с учетом (3):

$$\begin{aligned} &0 \le x_j \le \frac{B - y_j}{a_j} \qquad (j = \overline{1, N}) \\ &y_j \in [0, B] \end{aligned} \qquad (7)$$

В результате исходная модель (1) – (3) свелась к эквивалентной модели вида

$$F = \sum_{j=1}^{N} F_j(x_j) \Rightarrow \max \qquad (8)$$

$$y_{j+1} = y_j + a_j x_j \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (9)$$

$$0 \le x_j \le \frac{B - y_j}{a_j} \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (10)$$

$$y_1 = 0 \qquad (11)$$

Задача (8)-(11) является частным случаем общей задачи динамического программирования, в которой $\varphi_j = y_j + a_j x_j$, $u_j(y_j) = \left[0, \frac{B - y_j}{a_j}\right]$. Здесь ограничение (9) является рекуррентным и отражает процесс загрузки рюкзака, а неравенство (10) задает область возможных значений x_j.

Рассмотрим решение задачи (8)-(11) методом динамического программирования:

1 шаг. Вычисляется величина

$$f_N(y_N) = \max_{\substack{x_N \in \left[0, \frac{B-y_N}{a_N}\right] \\ \forall y_N \in [0,B] \text{- фикс.}}} F_N(x_N) \qquad (12).$$

В результате решения серии задач максимизации получаем точки максимума F_N $x_N^*(y_N)$ и значения $f_N(y_N) = F_N(x_N^*(y_N))$.

S-тый шаг ($s = \overline{N-1,1}$). Вычисляются величины

$$f_s(y_s) = \max_{\substack{x_s \in \left[0, \frac{B-y_s}{a_s}\right] \\ \forall y_s \in [0,B] \text{- фикс.}}} \left\lfloor F_s(x_s) + f_{s+1}(y_{s+1})\,|_{y_{s+1}=a_s x_s + y_s} \right\rfloor \qquad (13)$$

В результате решения серии задач максимизации, получаем $x_s^*(y_s)$ и $f_s(y_s)$. При s=1 решается только одна задача на максимум, т.к. значение $y_1 = 0$ - задано.

Для определения безусловных точек максимума, т.е. решения исходной задачи, проводим обратное движение алгоритма:

$x_1^* = x_1^*(y_1), \quad f_1(y_1)$.

Отсюда:

$y_2^* = y_1 + a_1 x_1^* \quad \Rightarrow \quad x_2^* = x_2^*(y_2)\,|_{y_2 = y_2^*}$.

Далее: $y_3^* = y_2^* + a_2 x_2^* \quad \Rightarrow \quad x_3^* = x_3^*(y_3)\,|_{y_3=y_3^*}$. И так далее $x_N^* = x_N^*(y_N)\,|_{y_N = y_N^*}$. Причем $f_1(y_1) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x_j^*)$ есть максимальное значение целевой функции.

Наличие условия целочисленности переменных x_j и a_j упрощает решение задачи. В этом случае $x_j \in \left\{0,1,\ldots,\left[\frac{B-y_j}{a_j}\right]\right\}, y_j \in \{0,1,\ldots,[B]\}$. Здесь [] указывает на то, что берется целая часть числа. Если a_j не целые, то $y_j \in \{0, B\}$.

Вычислительный процесс решения задачи о загрузке «рюкзака» методом динамического программирования можно организовать в противоположном порядке, а именно, рекуррентные соотношения Беллмана составляются в таком виде, что они решаются в порядке s=1, 2, …, N-1, N и далее обратным ходом в порядке s = N, N-1, … определяются оптимальные значения x_s^*.

Процесс загрузки «рюкзака» интерпретируем как N шаговый. На 1-ом шаге в рюкзак помещается груз вида N, далее – груз вида N – 1 и т. д. Необходимо выбрать такой параметр, характеризующий текущее состояние «рюкзака», значение которого перед загрузкой рюкзака было бы известным.

Пусть z_{j+1} – неиспользованный вес рюкзака перед загрузкой его грузом вида j или, что то же самое, после погрузки в «рюкзак» грузов вида N, N-1, …, j+1.

Тогда справедливы соотношения

$$z_j = z_{j+1} - a_j x_j \qquad (j = N, N-1, \dots, 1) \qquad (14)$$

$$z_{n+1} = B$$

Из (14), а также из условия $z_j \geq 0$, следует:

$$z_{j+1} - a_j x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1, N})$$

Отсюда с учетом условия $z_j \geq 0$ получается область изменения x_j:

$$0 \leq x_j \leq \frac{z_{j+1}}{a_j} \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (15)$$

Теперь модель задачи о загрузке «рюкзака» запишется:

$$\sum_{j=1}^{N} F_j(x_j) \Rightarrow \max \qquad (16)$$

$$z_j = z_{j+1} - a_j x_j \qquad (j = N, N-1, \dots, 1) \qquad (17)$$

$$0 \leq x_j \leq \frac{z_{j+1}}{a_j} \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (18)$$

$$z_{N+1} = B \qquad (19)$$

Рекуррентные уравнения Беллмана для задачи (16) – (19) будут иметь вид:

$$\lambda_1(z_2) = \max_{\substack{x_1 \in \left[0, \frac{z_2}{a_1}\right] \\ \forall z_2 \in [0, B] \text{ - } \phi.}} F_1(x_1) \qquad (20)$$

$$k = \overline{2, N-1}: \lambda_k(z_{k+1}) = \max_{\substack{x_k \in \left[0, \frac{z_{k+1}}{a_k}\right] \\ \forall z_{k+1} \in [0, B] \text{ - } \phi}} \left[F_k(x_k) + \lambda_{k-1}(z_k)\big|_{z_k = z_{k+1} - a_k x_k}\right] \qquad (21)$$

$$\lambda_{\mathrm{N}}(z_{N+1}) = \max_{\substack{x_N \in \left[0, \frac{z_{N+1}}{a_N}\right] \\ z_{N+1}=B}} [F_N(x_N) + \lambda_{N-1}(z_N)|_{z_N = z_{N+1} - a_N x_N}] \qquad (22)$$

Решение задачи (16) – (19) получается путем последовательной оптимизации (20) –(22). В результате находятся условные точки максимума $x_j^*(z_{j+1})$. Так как z_{N+1}=B, то в результате обратного движения определяются оптимальные значения x_j^* на цепочке $z_{N+1}=B \Rightarrow x_N^*=x_N^*(z_{N+1}) \Rightarrow z_N^*=z_{N+1}^*-a_N x_N^* \Rightarrow x_{N-1}^*=x_{N-1}^*(z_N^*) \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1^*(z_2^*)$. При этом значение целевой функции совпадет со значением $\lambda_{\mathrm{N}}(z_{N+1})$:

$$\lambda_{\mathrm{N}}(z_{N+1}) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x_j^*).$$

<u>Пример:</u>

Постановка задачи:

Имеется свободный капитал в размере 4 млн. у.е. Этот капитал может быть распределен между 4-мя предприятиями, причем распределение осуществляется только целыми частями (0, 1, 2, 3 или 4 млн. у.е.). Прибыль, получаемая каждым предприятием при инвестировании в него определенной суммы, указана в таблице.

Капитал / Предпр.	0 млн. у.е.	1 млн. у.е.	2 млн. у.е.	3 млн. у.е.	4 млн. у.е.
1-е предпр.	0	10	17	25	36
2-е предпр.	0	11	16	25	35
3-е предпр.	0	10	18	24	34
4-е предпр.	0	9	19	26	35

Требуется распределить инвестиции между предприятиями из условия максимальной общей прибыли.

Построение ММ.

Обозначим: x_j- количество капиталовложений, выделенных *j*-тому предприятию ($j = \overline{1,4}$). Тогда прибыль, записанная в таблице, можно обозначить как $F_j(x_j)$ ($j = \overline{1,4}$). Например, $F_1(0)=0$; $F_1(1)=10$; $F_1(2)=17$ и т.д. .... $F_2(0)=0$; $F_2(1)=11$; $F_4(4)=35$.

Тогда математическая модель примет вид:

$$\sum_{j=1}^{4} F_j(x_j) \Rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_j \leq 4$$

$$x_j \geq 0 \text{ – целые, } (j = \overline{1,4})$$

Данная модель является частным случаем задачи о загрузке рюкзака, где N=4, B=4, a_j=1 ($j = \overline{1,4}$). Введя новую переменную y_j- израсходованные средства до выделения капиталовложений j-тому предприятию, приведем исходную модель к виду ЗДП:

$$\sum_{j=1}^{4} F_j(x_j) \Rightarrow \max$$

$$y_{j+1} = y_j + x_j; \ (j = \overline{1,4})$$

$$y_1 = 0;$$

$$x_j \in \lfloor 0; 4 - y_j \rfloor; \ (j = \overline{1,4})$$

Решение задачи проведем в соответствии с алгоритмом динамического программирования:

<u>1 шаг.</u>

$$f_4(y_4) = \max_{\substack{x_4 \in [0, 4-y_4] \\ \forall y_4 \in [0,4] \text{ - фикс.}}} F_4(x_4)$$

1) Зафиксируем y_4=0. Тогда допустимые значения $x_4 \in [0, 4\text{-}0] = [0,1,2,3,4]$.

    1.1) x_4=0. Тогда $F_4(0)$=0.

    1.2) x_4=1. $F_4(1)$=9.

    1.3) x_4=2. $F_4(2)$=19.

    1.4) x_4=3. $F_4(3)$=26

    1.5) x_4=4. $F_4(4)$=35.

    Максимальное значение $f_4(0) = 35$, и достигается оно при x_4=4. Таким образом, заполняется первая строчка таблицы.

2) Зафиксируем y_4=1. Тогда допустимые значения $x_4 \in [0, 4\text{-}1] = [0,1,2,3]$.

2.1) x_4=0. Тогда $F_4(0)$=0.

2.2) x_4=1. $F_4(1)$=9.

2.3) x_4=2. $F_4(2)$=19.

2.4) x_4=3. $F_4(3)$=26

Максимальное значение $f_4(1) = 26$, и достигается оно при x_4=3. Таким образом, заполняется вторая строка таблицы.

Далее аналогично фиксируем y_4=2, y_4=3, y_4=4. Заполняем оставшиеся строки таблицы.

Таблица шага №1.

y_4 \ x_4	0	1	2	3	4	$f_4(y_4)$	$x_4(y_4)$
0	0	9	19	26	35	35	4
1	0	9	19	26	-	26	3
2	0	9	19	-	-	19	2
3	0	9	-	-	-	9	1
4	0	-	-	-	-	0	0

<u>2 шаг.</u>

$$f_3(y_3) = \max_{\substack{x_3 \in [0,4-y_3] \\ \forall y_3 \in [0,4] \text{- фикс.}}} \left[F_3(x_3) + f_4(y_4)\,|_{y_4 = y_3 + x_3} \right]$$

1) Зафиксируем y_3=0. Тогда допустимые значения $x_3 \in$[0, 4-0]=[0,1,2,3,4].

1.1) x_3=0. Тогда $F_3(0)$=0. Определим значение второго слагаемого: $f_4(y_4)\,|_{y_4 = x_3 + y_3}$ при y_3=0 и x_3=0. Найдем y_4=0+0=0. Тогда, обратившись к таблице шага 1, увидим, что $f_4(0) = 35$. Следовательно, $F_3(0)$+ $f_4(0)$=0+35=35. Этот результат заносим в таблицу шага 2 в ячейку, соответствующую y_3=0 и x_3=0.

1.2) x_3=1. Аналогично: $F_3(1)$=10. Найдем y_4= y_3+ x_3=0+1=1. Из таблицы шага 1 определим: $f_4(y_4)\,|_{y_4 = x_3 + y_3} = f_4(1) = 26$. Сумма

$F_3(1)$+ $f_4(1)$=10+26=36.

1.3) x_3=2. F_3(2)=18. y_4=0+2=2. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3} = f_4(2)$ =19. Тогда F_3(2)+ $f_4(2)$ =18+19=37.

1.4) x_3=3. F_3(3)=24, y_4=0+3=3. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3} = f_4(3)$ =9. Тогда

F_3(3)+ $f_4(3)$ =24+9=33.

1.5) x_3=4. F_3(4)=34. y_4=0+4=4. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3} = f_4(4)$ =0. Тогда

F_3(4)+ $f_4(4)$ =34+0=34.

Максимальное значение $f_3(0)$ =37, и достигается оно при x_3=2. Первая строчка таблицы заполнена.

2) Зафиксируем y_3=1. Тогда допустимые значения $x_3 \in$[0, 4-1]= [0,1,2,3].

2.1) x_3=0. F_3(0)=0. y_4=1+0=1. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3} = f_4(1)$ =26. Тогда

F_3(0)+ $f_4(1)$ =0+26=26.

2.2) x_3=1. F_3(1)=10. y_4=1+1=2. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3} = f_4(2)$=19. Тогда

F_3(1)+ $f_4(2)$ =10+19=29.

2.3) x_3=2. F_3(2)=18. y_4=1+2=3. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3} = f_4(3)$ =9. Тогда

F_3(2)+ $f_4(3)$ =18+9=27.

2.4) x_3=3. F_3(3)=24 y_4=1+3=4. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3} = f_4(4)$ =0. Тогда

F_3(3)+ $f_4(4)$ =24+0=24.

Максимальное значение $f_3(1) = 29$, и достигается оно при x_3=1. Таким образом, заполняется вторая строка таблицы.

3) Зафиксируем y_3=2. Тогда допустимые значения $x_3 \in$[0, 4-2]= [0,1,2].

3.1) x_3=0. F_3(0)=0. y_4=2+0=2. $\Rightarrow$ f_4(2) =19. F_3(0)+ f_4(2)=0+19=19.

3.2) x_3=1. F_3(1)=10. y_4=2+1=3. $\Rightarrow$ $f_4(3)$ =9. F_3(1)+ $f_4(3)$ =10+9=19.

3.3) x_3=2. F_3(2)=18. y_4=2+2=3. $\Rightarrow$ $f_4(4)$ =0. F_3(2)+ $f_4(4)$ =18+0=18.

Максимальное значение $f_3(2) = 19$ достигается при двух возможных значениях x_3: x_3=1 и x_3=0. В таблицу можно занести любое из них. Таким образом, заполняется третья строка таблицы.

Далее аналогично фиксируем y_3=3, y_3=4. Заполняем оставшиеся строки таблицы.

Таблица шага №2.

y_3 \ x_3	0	1	2	3	4	$f_3(y_3)$	$x_3(y_3)$
0	35	36	37	33	34	37	2
1	26	29	27	24	-	29	1
2	19	19	18	-	-	19	0 (или 1)
3	9	10	-	-	-	10	1
4	0	-	-	-	-	0	0

3 шаг.

$$f_2(y_2) = \max_{\substack{x_2 \in [0,4-y_2] \\ \forall y_2 \in [0,4]\text{- фикс.}}} \left\lfloor F_2(x_2) + f_3(y_3)\,|_{y_3=y_2+x_2} \right\rfloor$$

Все вычисления производятся аналогично шагу 2. Не останавливаясь более подробно на этапах решения подзадачи данного шага, приведем получившуюся в результате таблицу.

Таблица шага №3.

y_2 \ x_2	0	1	2	3	4	$f_2(y_2)$	$x_2(y_2)$
0	37	40	35	35	35	40	1
1	29	30	26	25	-	30	1
2	19	21	16	-	-	21	1
3	10	11	-	-	-	11	1
4	0	-	-	-	-	0	0

4 шаг.

$$f_1(y_1) = \max_{\substack{x_2 \in [0,4-y_1] \\ y_1=0}} \left\lfloor F_1(x_1) + f_2(y_2)\,|_{y_2=y_1+x_1} \right\rfloor$$

Последний шаг интересен тем, что здесь решается единственная задача максимизации при заданном $y_1=0$.

$y_1=0$. Следовательно $x_1 \in [0, 4-0] = [0,1,2,3,4]$. Выполняя все действия, аналогично предыдущим шагам, получим таблицу последнего шага, состоящую из единственной строки, соответствующей $y_1=0$.

Таблица шага №4.

y_1 \ x_1	0	1	2	3	4	$f_1(y_1)$	$x_1(y_1)$
0	40	40	38	36	36	40	0 (или 1)

Далее проводим обратное движение алгоритма:

1) $y_1=0$, $x_1^*=0$, $\Rightarrow$ $y_2^*= y_1+ x_1^*=0+0=0$.
2) Определяем значение x_2^* из таблицы шага № 3 по найденному $y_2^*=0$. Значению $y_2= y_2^*=0$ соответствует значение $x_2(y_2)=1$. Следовательно, $x_2^*=1$. Далее можно определить $y_3^*= y_2^*+ x_2^*=0+1=1$.
3) Аналогично, обращаясь к таблице шага №2, найдем: $x_3^*= x_3(1)=1$, $\Rightarrow$

   $y_4^*= y_3^*+ x_3^*=1+1=2$.
4) Из таблицы шага №1 : $x_4^*= x_4(2)=2$.

Окончательно имеем: первому предприятию средства не выделяются ($x_1^*=0$), второму выделяется 1 млн. у.е. ($x_2^*=1$), третьему предприятию – 1 млн. у.е. ($x_3^*=1$), и четвертому – 2 млн. у.е. ($x_4^*=2$). При этом значение целевой функции (общая прибыль по всем 4-м предприятиям) составит:

$$\sum_{j=1}^{4} F_j(x_j^*) = f_1(y_1) = 40.$$