Лекция №1.

Основные этапы решения задач ИСО.

Несмотря на большое разнообразие задач ИСО, им всем присущи следующие основные этапы:

1. Постановка задачи.
2. Построение мат. модели.
3. Нахождение метода решения.
4. Проверка и корректировка модели.
5. Реализация найденного решения на практике.

<u>*Постановка задачи*</u> – чрезвычайно ответственный этап ИСО. Первоначально задача формулируется заказчиком- оперирующей стороной. Такая постановка задачи обычно не бывает окончательной. Во время анализа исследуемой операции задача уточняется. Здесь роль исследователя состоит в проведении тщательного обследования объекта, формулировании цели операции, изучении множества факторов, влияющих на результаты. Исследователь операции совместно с заказчиком выделяет совокупность существенных факторов, и уточняет окончательную содержательную постановку задачи.

<u>*Построение математической модели.*</u> Представляет процесс формализации содержательной постановки задачи. В общем случае модели принятия решений сводятся к моделям задач математического программирования вида:

$$\begin{aligned} &F = f(\overline{X},\overline{Y}) \Rightarrow ext \\ &g_i(\overline{X},\overline{Y}) \le b_i \quad (i=\overline{1..m}) \\ &\overline{X} \in \Omega_X \\ &\overline{Y} \in \Omega_Y \end{aligned} \qquad (1)$$

где F- целевая функция (критерий эффективности операции),

$\overline{X}$ - вектор контролируемых (управляемых) факторов,

$\overline{Y}$ - вектор неконтролируемых (неуправляемых) факторов,

g_i -функция потребления i-того ресурса,

b_i - количество активных средств i-того ресурса.

Нахождение метода решения. Для нахождения оптимального решения $\overline{X}_{\text{опт}}$ задачи (1) в зависимости от структуры целевой функции F и ограничений применяют те или иные методы теории мат. программирования:

1. Линейное программирование. $f(\overline{X},\overline{Y})$, $g_i(\overline{X},\overline{Y})$- линейные функции относительно своих переменных $\overline{X}$ и $\overline{Y}$.
2. Нелинейное программирование, если хотя бы одна из $f(\overline{X},\overline{Y})$, $g_i(\overline{X},\overline{Y})$- нелинейная.
3. Динамическое программирование, если $f(\overline{X},\overline{Y})$ явл. аддитивной (сепарабельной) или мультипликативной функцией своих аргументов.

$$f(\overline{X},\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\overline{X}_i,\overline{Y}_i)$$
$$f(\overline{X},\overline{Y}) = \prod_{i=1}^{k} f_i(\overline{X}_i,\overline{Y}_i)$$

4. Дискретное (целочисленное) программирование, если на переменные $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ наложено условие дискретности или целочисленности.
5. Геометрическое программирование, если целевая функция выражается соотношениями $f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} u_j, u_j = c_j \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_{ji}}, j = \overline{1,n}$, или $f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} .. x_m^{a_{im}}$, а ограничения $g_i(\overline{X}) \le 1$, $i = \overline{1,n}$. Здесь коэффициенты C_i и показатели степени a_{ij} являются произвольными константами, а независимые переменные $x_j>0$, j=1,m. Функции приведенного вида называются сигналами, а в случае $x_j>0$– позиномами.
6. Стохастическое программирование, если вектор $\overline{Y}$- случайная

величина, а целевая функция выражается мат. ожиданием. (Вместо $f(\overline{X},\overline{Y})$ рассматривают $M_Y[f(\overline{X},\overline{Y})]$).

7. Эвристическое программирование применяют для решения тех задач, в которых точный оптимум найти алгоритмическим путем невозможно из-за большой размерности исходной задачи или отсутствия методов решения. В таких случаях отказываются от поиска оптимального решения и отыскивают удовлетворительное с точки зрения практики решение. При этом пользуются специальными методами-эвристиками, основанными на опыте, знаниях и интуиции исследователя и позволяющими значительно сократить число просматриваемых планов.

Проверка и корректировка модели. В сложных системах ММ лишь частично отражает реальный процесс. Поэтому необходима проверка степени соответствия, или адекватности, между моделью и реальным объектом (процессом). Проверку производят сравнением предсказанного поведения на модели с фактическим (измеренным). Если их разница в пределах допустимого, то модель считается адекватной, в противном случае необходимо скорректировать модель. Корректировка может потребовать дополнительных исследований объекта, уточнения структуры модели. Четыре названных выше этапа повторяют многократно до тех пор, пока будет достигнуто удовлетворительное соответствие между выходом объекта и модели.

Реализация найденного решения на практике. Является важнейшим этапом, завершающим операционное исследование. Полученное решение в виде отчетов, инструкций и рекомендаций представляется заказчику. Опер. сторона принимает окончательное решение с учетом неформализуемой информации.

С точки зрения реализации оптимального решения на практике ИСО занимает особое место в проблематике АСУ различного назначения. Известно, что внедрение АСУ эффективно для решения таких задач управления, которые невозможно было решать при сложившейся ранее практике управления. Поэтому в настоящее время выдвинут т.н. принцип новых задач АСУ, под которым понимается поиск и постановка на производстве действительно новых задач оптимального управления, позволяющих создавать рентабельные АСУ.

ИСО является методологической основой для нахождения таких задач, разработки их моделей и алгоритмов решения, а также для практического внедрения оптимального решения.

Детерминированные линейные модели.

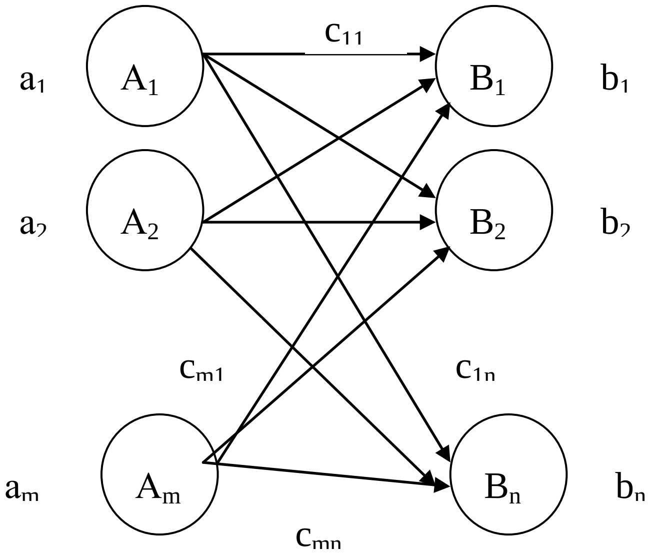
Детер. модели занимают в ИСО одно из главных мест. Это связано с тем, что в них отражены разнообразные проблемы распределения ограниченных ресурсов в экономике, военном деле, при проектировании новой техники и т.д. Пути решения подобных проблем состоят в планировании целенаправленной деятельности, без которого невозможны согласованные действия производственных коллективов. Планирование должно рассматриваться как основа управления сложными объектами.

1. *Классическая транспортная задача. (КТЗ)*

В настоящее время задачи транспортного типа или задача прикрепления поставщиков к потребителям стала типовой для промышленных предприятий, имеющих в своем составе несколько фирм, складов, оптовых баз и рынков сбыта. Эти задачи применяются для выбора оптимальных маршрутов доставки продукции от поставщиков к потребителям.

1.1 <u>*Постановка задачи.*</u> Имеются пункты производства $A_i, i=\overline{1,m}$ некоторой однородной продукции. В каждом пункте A_i объем производства составляет a_i. Эта продукция поставляется в пункты потребления B_j, $j=\overline{1,n}$, причем потребность пункта B_j равна b_j. Перевозка продукции возможна из любого пункта A_i в любой пункт B_j, при этом стоимость перевозки единицы продукции определяется величиной c_{ij}. Требуется найти такой план перевозки продукции, при котором запросы всех пунктов потребления будут полностью удовлетворяться, запасы продукции из всех пунктов производства полностью вывозиться, а суммарная стоимость перевозки была бы минимальной.

Замечание. Очевидно, что при такой постановке решение задачи будет существовать только если выполняется условие баланса: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Такая КТЗ называется *закрытой..* Графическая интерпретация задачи представлена на рис.1.



1.2Математическая модель КТЗ.

Пусть x_{ij} - количество продукции, перевезенной из пункта A_i в B_j. Тогда ММ КТЗ запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad (4)$$

Здесь целевая функция (1) отражает суммарные транспортные расходы. Ограничения (2) требуют, чтобы вся продукция была вывезена, а ограничения (3) –

чтобы потребности всех пунктов потребления были удовлетворены. Условие (4) вытекает из физического смысла введенных переменных.

Ограничения (2)-(4) задают планы перевозок $(x_{ij})_{mxn}$. Т.О., ММ КТЗ относится к классу ЗЛП. В этой задаче a_i- активные средства, b_j, c_{ij}- определенные (фиксированные) неконтролируемые факторы, а матрица плана перевозок $X = \left|x_{ij}\right|_{m\times n}$- стратегии оперирующей стороны. Цель операции задается целевой функцией (1). Если некоторая матрица $X* = \left|x*_{ij}\right|_{m\times n}$ является решением ЗЛП (1)-(4), то она является оптимальной (наилучшей) стратегией оперирующей стороны. Т.к. КТЗ относится к классу ЗЛП, то она может быть решена стандартными методами ЛП. Однако, учитывая особенности КТЗ, можно модифицировать общие алгоритмы решения ЗЛП таким образом, чтобы получить более эффективные алгоритмы. Для решения КТЗ используется алгоритм, разработанный в соответствии с методом потенциалов.

Лекция №2.

<u>Решение КТЗ методом потенциалов</u>.

Метод потенциалов является модификацией метода последовательного улучшения плана в ЗЛП. Решение задачи включает в себя следующие этапы:

1. Построение начального опорного плана.
2. Проверка опорного плана на оптимальность.
3. Переход в случае необходимости к лучшему опорному плану.

Сначала исходные данные записываются в распределительную таблицу, которая имеет следующий вид:

		v_1	…	v_j	…	v_n	
	A_i \ B_j	B_1	…	B_j	…	B_n	a_i
u_1	A_1	C_{11}		C_{1j}		C_{1n}	a_1
…	…					…	…
u_i	A_i	C_{i1}		C_{ij}		C_{in}	a_i
…	…					…	…
u_m	A_m	C_{m1}		C_{mj}		C_{mn}	a_m
	b_j	b_1	…	b_j	…	b_n	

Затем необходимо построить начальный опорный план.

<u>1.Построение начального опорного плана.</u>

Всего существует три метода отыскания начального ОП:

1) Метод северо-западного угла,
2) Метод минимального элемента,
3) Метод Фогеля.

Рассмотрим 2 первых метода.

Метод северо-западного угла.

Построение нач. ОП начинается с левой верхней клетки, которая заполняется элементом x_{11}. Для этого между пунктами A_1 и B_1 назначается максимально возможный объем перевозки, определяемый как $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$. При этом возможны три случая:

а) $a_1 < b_1$. При этом $x_{11} = a_1$, а все остальные перевозки из пункта производства A_1 $x_{1j} = 0 \quad (j = \overline{2, n})$. Это означает, что из пункта A_1 вывозится вся произведенная продукция в пункт потребления B_1, поэтому объем перевозок из A_1 другие пункты потребления равен 0 (нули в таблицу не записываются). Т.К. Из A_1 больше вывозить нечего, то первая строка таблицы вычеркивается, а потребность b_1 пункта B_1 уменьшается на величину a_1, т.е. $b_1 = b_1 - a_1$.

б) $a_1 > b_1$. При этом $x_{11} = b_1$, а $x_{i1} = 0 \quad (i = \overline{2, m})$. Ресурс в A_1 уменьшается на величину b_1, т.е. $a_1 = a_1 - b_1$, а столбец B_1 вычеркивается, т.к. потребность пункта B_1 полностью удовлетворена.

в) $a_1 = b_1$. Тогда $x_{11} = a_1 = b_1$. В этом случае вычеркивается либо строка, либо столбец (но не оба сразу!). В этом случае опорный план будет являться вырожденным, и чтобы найти нулевые базисные переменные либо строка, либо столбец в таблице остаются. Если вычеркивается строка, то считаем, что в пункте потребления B_1 остается потребность, равная 0, которая в дальнейшем д.б. удовлетворена. Если же вычеркиваем столбец, то считаем, что в пункте производства A_1 остался запас, равный 0, который в дальнейшем д.б. вывезен.

В таблицу заносятся нулевые базисные переменные, но небазисные нули не заносятся, чтобы не спутать их с нулевыми базисными переменными.

Пусть теперь x_{11} назначен, и один ряд таблицы (строка или столбец) вычеркнуты (закрыты). В оставшейся части таблицы вновь берем левую верхнюю клетку и в ней назначаем максимально возможный объем перевозки с учетом ранее назначенных. В результате закрывается еще один ряд. После назначения в (n+m-1) клетках объемов перевозок получится некоторый опорный план перевозок. В заполненных клетках будут записаны базисные переменные, а переменные в незаполненных клетках будут соответствовать небазисным, которые равны 0 и не записываются, чтобы не спутать с базисными нулями вырожденного опорного плана.

Метод минимального элемента.

В отличие от метода северо-западного угла, этот метод позволяет построить начальный опорный план, более близкий к оптимальному. Суть метода заключается в том, что в распределительной таблице находится клетка (α,β) с наименьшей стоимостью перевозки $c_{\alpha\beta}$. В эту клетку назначается максимально возможный объем перевозок $x_{\alpha\beta}$ и эта величина записывается в клетку (α,β). При этом возможны три случая, описанные в методе сев-зап угла. В результате закрывается один ряд . В ставшейся части таблицы вновь находится клетка с минимальной стоимостью перевозок, назначаем максимально возможный объем перевозки и т.д. Через (n+m-1) шагов получается опорный план. Базисные переменные (включая нулевые) будут записаны в клетках, а небазисные равны 0 и не записаны.

<u>2.Проверка опорного плана на оптимальность.</u>

Запишем исходную модель КТЗ в векторной форме:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}x_{ij} = G \qquad (6)$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad (7)$$

Здесь $D_{ij} = (\underbrace{0,\dots,0,\overset{i}{-1},0,\dots,0}_{m},\underbrace{0,\dots,\overset{j}{1},0\dots0}_{n})^T$ - вектор условия,

$G = (-a_1,\dots,-a_m,b_1,\dots b_n)^T$ - вектор ресурсов.

Из курса «Методы оптимизации» известно, что каждой ЗЛП соответствует двойственная задача. В двойственной задаче столько же переменных, сколько ограничений в исходной, и столько же ограничений, сколько в исходной задаче переменных.

Пусть u_i - двойственная переменная, соответствующая i-тым ограничениям (2) (потенциал пункта A_i), v_j - двойственная переменная, соответствующая j-тому ограничению (3) (потенциал пункта B_j). Тогда вектор двойственных переменных будет иметь вид: $y=(u_1,...,u_m,v_1,...,v_n)$, а сама двойственная задача запишется в виде:

$$f(y) = yG \Rightarrow \max \qquad (8)$$

$$yD_{ij} \le c_{ij} \quad (\forall i, j) \qquad (9)$$

В скалярной форме эта задача запишется:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i \Rightarrow \max \qquad (10)$$

$$v_j - u_i \le c_{ij} \quad (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}) \qquad (11)$$

Существует теорема (без доказательства):

Для оптимальности опорного плана $X=(x_{ij})_{mxn}$ КТЗ (1)-(4) необходимо и достаточно существование вектора двойственных переменных, компоненты которого удовлетворяют условию:

$$\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} \le 0 \quad (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}) \qquad (12)$$

Причем $\Delta_{ij}=0$, если x_{ij} - базисная переменная, и $\Delta_{ij} \le 0$, если x_{ij} - небазисная переменная.

Т.о. из теоремы следует, что если хотя бы для одной небазисной переменной x_{ij} $\Delta_{ij} > 0$, то опорный план неоптимален и его требуется улучшить.

Т.о., для проверки опорного плана $X = (x_{ij})_{mxn}$ на оптимальность необходимо определить потенциалы u_i, v_j всех пунктов A_i и B_j. Для этого используют условие (12) для базисных переменных:

$$v_j - u_i - c_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}) \qquad (13)$$

Для отыскания потенциалов u_i, v_j необходимо решить данную систему линейных уравнений. Уравнений в системе (13) будет (m+n-1), а кол-во неизвестных (m+n). Поэтому любой одной переменной можно придать любое значение, в том числе и нулевое. На распределительной таблице построение потенциалов производится следующим образом: полагаем для какой-либо строки i_1, содержащей базисные переменные, потенциал u_{i_1}=0. Просматривается эта строка, и находятся базисные клетки $x_{i_1 j}$. Для всех таких клеток из (13) можно определить потенциалы столбцов B_j $: v_j = u_{i_1} + c_{i_1 j}$. Далее по известным потенциалам столбцов можно определить потенциалы некоторых строк. Пусть потенциал v_{j_1} известен. Тогда просматривается столбец с номером j_1 и находятся клетки (i, j_1), содержащие базисные переменные. Для всех этих клеток из (13) можно найти потенциалы строк A_i: $u_i = v_{j_1} - c_{ij_1}$. Продолжая этот процесс, найдутся потенциалы строк u_i всех пунктов производства и потенциалы столбцов v_j всех пунктов потребления.

Далее для всех клеток (*i*,*j*) содержащих небазисные переменные, вычисляются оценки Δ_{ij}. Если все $\Delta_{ij} \le 0$, то рассматриваемый план КТЗ является оптимальным. Если хотя бы для одной клетки *(k,l)* справедливо $\Delta_{kl} > 0$, то опорный план неоптимален и необходимо перейти к лучшему опорному плану.

3.Переход к лучшему опорному плану.

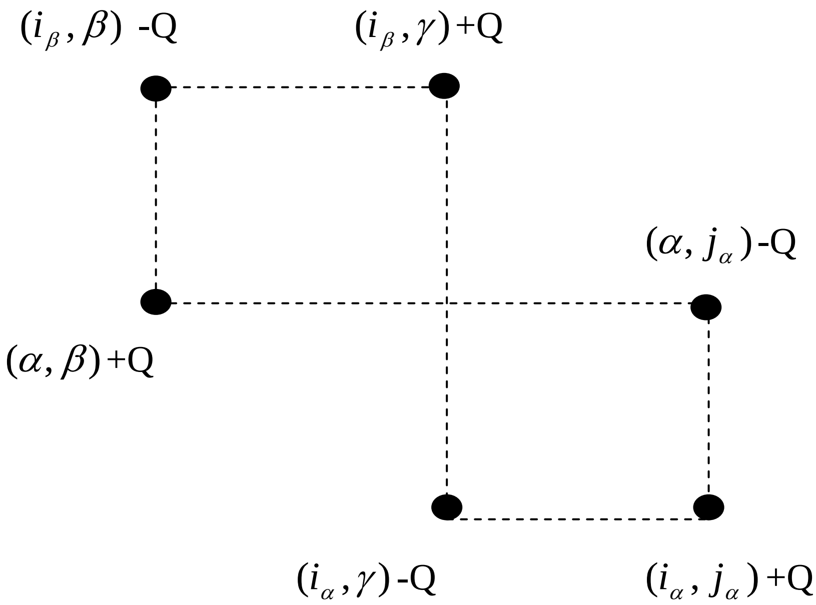
Пусть рассматриваемый опорный план не оптимален. Для перехода к плану с меньшим значением целевой функции необходимо увеличить на максимально возможную величину объем перевозки в любой небазисной клетке (*i*,*j*) с $\Delta_{ij} > 0$.

Обычно решение отыскивается быстрее, если выбрана клетка с наибольшим значением Δ_{ij}.

Пусть выбрана клетка (α, β) с $\Delta_{\alpha\beta} > 0$. Соответствующая небазисная переменная $x_{\alpha\beta}$=0. Объем перевозки $x_{\alpha\beta}$ увеличиваем пока на неизвестную величину Q.Тогда для того, чтобы не нарушить баланс строки α, необходимо в строке α уменьшить объем перевозки некоторой базисной переменной $x_{\alpha j_\alpha}$ на эту же величину Q. Но, уменьшив ее, мы нарушаем баланс столбца j_α, который может быть восстановлен добавлением Q к некоторой базисной переменной $x_{i_\alpha j_\alpha}$ столбца j_α. Нарушенный баланс строки i_α восстанавливается уменьшением на Q некоторой другой базисной переменной строки i_α, и т.д.…

Если таким образом удается прийти к уменьшению некоторой базисной переменной $x_{i_\beta \beta}$ столбца β, то действительно можно увеличить объем перевозки $x_{\alpha\beta}$ в клетке (α, β). Тем самым будут найдены объемы перевозок, увеличиваемые или уменьшаемые на величину Q. Если полученные клетки соединить прямыми линиями, то получается замкнутая линия, называемая циклом. Цикл обладает следующим свойством: линия начинается и кончается в небазисной клетке (α, β), остальные вершины ломаной принадлежат строкам и столбцам таблицы, на пересечении которых находятся базисные клетки, угол между двумя соседними сторонами равен 90^0. Такой цикл всегда существует для любой небазисной клетки и он единственный.

Пусть цикл, соответствующий клетке (α, β), построен. В клетке (α, β) ставится знак «+», а далее поочередно в вершинах цикла ставятся «-», «+»… Объемы перевозок, отмеченные «+», увеличиваются, а «-» – уменьшаются на величину Q=min{ x_{ij}^- }. Таким образом, величина Q прибавляется ко всем объемам перевозок, отмеченных знаком «+», и вычитается от всех объемов перевозок, отмеченных знаком «-».



В результате получаем новый опорный план , в котором переменная $x_{\alpha\beta}$ становится новой базисной переменной, а одна из базисных переменных x_{kl}, значение которой стало =0, становится небазисной переменой (выводится из базиса). При этом значение целевой функции уменьшается на $\left|\Delta_{\alpha\beta} Q\right|$. Полученный новый опорный план записывается в новой распределительной таблице, и вновь проверяется на оптимальность и т.д. пока не получат оптимальный опорный план.

Примечание. Если в процессе построения начального опорного плана или в ходе решения получается вырожденный опорный план, то чтобы избежать зацикливаний, необходимо нулевым базисным переменным придать сколь угодно малое значение ε>0 и решить задачу как невырожденную. В оптимальном плане такой задачи необходимо считать ε=0.

Пример:

u_i	$A_i \backslash B_j$	1	2	3	4	5	a_i
	v_j						
	1	^{4}	^{5}	^{9}	^{3}	^{6}	15
	2	^{11}	^{9}	^{11}	^{7}	^{10}	20
	3	^{7}	^{9}	^{17}	^{16}	^{21}	20
	4	^{13}	^{6}	^{15}	^{16}	^{22}	25
	5	^{21}	^{25}	^{26}	^{15}	^{12}	10
	b_j	25	30	10	10	15	

Построение начального опорного плана методом минимального элемента.

u_i	$A_i \backslash B_j$	1	2	3	4	5	a_i
	v_j						
	1	5 ^{4}	^{5}	^{9}	10 ^{3}	^{6}	15
	2	^{11}	5 ^{9}	^{11}	^{7}	15 ^{10}	20
	3	20 ^{7}	^{9}	0 ^{17}	^{16}	^{21}	20
	4	^{13}	25 ^{6}	^{15}	^{16}	^{22}	25
	5	^{21}	^{25}	10 ^{26}	^{15}	0 ^{12}	10
	b_j	25	30	10	10	15	

Проверка опорного плана на оптимальность.

а) Определение потенциалов.

$u_1=0$

$v_1= u_1+c_{11}=0+4=4$

$v_4=u_1+c_{14}=0+3=3$

$u_3=v_1-c_{31}=4-7=-3$

$v_3=u_3+c_{33}=-3+17=14$

$u_5=v_3-c_{53}=14-26=-12$

$v_5=u_5+c_{55}=-12+12=0$

$u_2=v_5-c_{25}=0-10=-10$

$v_2=u_2+c_{22}=-10+9=-1$

$u_4=v_2-c_{42}=-1-6=-7$

	v_j	**4**	**-1**	**14**	**3**	**0**	
u_i	A_i \ B_j	1	2	3	4	5	a_i
0	1	5 ^{4}	^{5}	^{9}	10 ^{3}	^{6}	15
-10	2	^{11}	5 ^{9}	^{11}	^{7}	15 ^{10}	20
-3	3	20 ^{7}	^{9}	0 ^{17}	^{16}	^{21}	20
-7	4	^{13}	25 ^{6}	^{15}	^{16}	^{22}	25
-12	5	^{21}	^{25}	10 ^{26}	^{15}	0 ^{12}	10
	b_j	25	30	10	10	15	

б) Определение значений Δ (только для небазисных клеток!).

$\Delta_{12}=V_2-U_1-C_{12}=-1-0-5=-6<0$

$\Delta_{13}=V_3-U_1-C_{13}=14-0-9=$ **$5>0$!!!!!!** – План неоптимален!!!

....

Наибольшее значение $\Delta_{23}=V_3-U_2-C_{23}=14-(-10)-11=$ **$13>0$!!!!!!!**

Улучшение опорного плана.

Вводим в базис клетку (2,3).

	v_j	**4**	**-1**	**14**	**3**	**0**	
u_i	A_i \ B_j	1	2	3	4	5	a_i
0	1	5 ^{4}	^{5}	^{9}	10 ^{3}	^{6}	15
-10	2	^{11}	5 ^{9}	+ ^{11}	^{7}	- 15 ^{10}	20
-3	3	20 ^{7}	^{9}	0 ^{17}	^{16}	^{21}	20
-7	4	^{13}	25 ^{6}	^{15}	^{16}	^{22}	25
-12	5	^{21}	^{25}	- 10 ^{26}	^{15}	+ 0 ^{12}	10
	b_j	25	30	10	10	15	

$Q=\min\{x_{25},x_{53}\}=\min\{15,10\}=10$ Клетка (5,3) выводится из базиса.

Получили новый опорный план:

	v_j	**4**	**-1**	**14**	**3**	**0**	
u_i	A_i \ B_j	1	2	3	4	5	a_i
0	1	5 ^{4}	^{5}	^{9}	10 ^{3}	^{6}	15
-10	2	^{11}	5 ^{9}	**10** ^{11}	^{7}	**5** ^{10}	20
-3	3	20 ^{7}	^{9}	0 ^{17}	^{16}	^{21}	20
-7	4	^{13}	25 ^{6}	^{15}	^{16}	^{22}	25
-12	5	^{21}	^{25}	^{26}	^{15}	**10** ^{12}	10
	b_j	25	30	10	10	15	

И так далее.

Лекция №3

Задача поиска кратчайшего пути на транспортной сети.

<u>*Постановка задачи.*</u> Пусть дана некоторая транспортная сеть как совокупность узлов с номерами $i=\overline{1,n}$ и множества дуг D, соединяющих между собой некоторые узлы сети. Длина дуги $(i,j)\in D$ равна l_{ij}. На сети выделены узел r- начало пути, и узел s- конец пути. Требуется найти путь из узла r в узел s, имеющий минимальную длину, т.е. кратчайший путь.

<u>*Построение ММ.*</u> Для составления ММ задачи вводится переменная $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если дуга } (i,j) \text{ входит в путь}\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$.

Тогда ММ задачи будет иметь вид:

$$L=\sum_{(i,j)\in D} l_{ij}x_{ij}\Rightarrow \min \qquad (1)$$

$$\sum_{(r,j)\in D} x_{rj}=1 \qquad (2)$$

$$\sum_{(j,s)\in D} x_{js}=1 \qquad (3)$$

$$\sum_{(k,j)\in D} x_{kj}-\sum_{(j,i)\in D} x_{ji}=0, \quad j\neq r,s \qquad (4)$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \qquad (5)$$

В этой модели целевая функция (1) определяет длину пути, которая должна быть минимальной. Ограничение (2) требует, чтобы в рассматриваемый путь из r в s входила только одна дуга, исходящая из r. Условие (3) говорит о том, что путь кончается в s, т.е. в рассматриваемый путь из r в s входит только одна дуга, входящая в s. Условие (4) представляет собой условие непрерывности пути, означающее, что если путь входит в какой-либо узел пути (кроме начального и конечного), то он обязательно должен из него выходить. Или, если путь не заходит в узел, то он и не должен из него выходить.

Таким образом, задача о кратчайшем пути свелась к ММ (1)-(5), которая относится к классу задач булевского программирования. Существует эффективный метод решения задачи (1)-(5), основанный на рассмотрении двойственной задачи.

Алгоритм поиска кратчайших путей.

Запишем двойственную задачу по отношению к исходной (1)-(5). При этом в двойственной задаче столько же переменных, сколько ограничений в исходной, и столько же ограничений, сколько в исходной задаче переменных. Ограничения (2)-(4) записаны для каждого узла сети, поэтому в двойственной задаче будет содержаться n переменных, т.е. вектор двойственных переменных запишется:

$$z = (z_1, z_2, .. z_n).$$

Тогда двойственная ЗЛП будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & zB \Rightarrow \max \\ & zA_{ij} \le l_{ij} \quad \forall (i, j) \in D \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь $B = (0,...0,1,0...0,-1,0...0)^T$ - вектор ограничений (2)-(4), в котором на *r*-том месте стоит 1, а на *s*-том стоит –1. $A_{ij} = (0,\ldots 0,1,0\ldots 0,-1,0\ldots 0)^T$ - вектор коэффициентов в ограничениях (2)-(4), в котором на *i*-том месте стоит 1, а на *j*-том стоит -1. Двойственные переменные не ограничены по знаку. В скалярной форме (6) запишется:

$$\begin{aligned} & z_r - z_s \Rightarrow \max \\ & z_i - z_j \le l_{ij} \quad \forall (i, j) \in D \end{aligned} \qquad (7)$$

Также как и в методе потенциалов, одну из двойственных переменных можно назначить произвольно. Пусть $z_r = 0$. Для удобства записи сделаем замену: $\lambda_i = -z_i$. Тогда задача (7) примет вид:

$$\lambda_s \Rightarrow \max \qquad (8)$$

$$\lambda_j - \lambda_i \le l_{ij} \quad \forall (i, j) \in D \qquad (9)$$

$$\lambda_r = 0 \qquad (10)$$

Таким образом, вместо исходной задачи (1)-(5) необходимо решить двойственную задачу (8)-(10). Для этого исходные данные записываются в следующую таблицу:

	λ_j		$\dots$	$\lambda_r = 0$	$\dots$		$\dots$	
λ_i	$i \setminus j$	1	$\dots$	r	$\dots$	s	$\dots$	n
	1		$\dots$	l_{1r}	$\dots$	l_{1s}	$\dots$	l_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$					$\dots$
$\lambda_r = 0$	r	l_{r1}				l_{rs}		l_{rn}
$\dots$	$\dots$				$\dots$			$\dots$
	n	l_{n1}	$\dots$	l_{nr}	$\dots$	l_{ns}	$\dots$	

Клетки строк $\{\lambda_i\}$ и столбцов $\{\lambda_j\}$ заполняются величинами $\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n$ по мере решения задачи (8)-(10). Остальные клетки соответствуют дугам $(i, j) \in D$ и заполняются значениями длин дуг l_{ij}. Оставшиеся клетки не заполняются и в расчетах не участвуют.

Вначале в строке и столбце с номерами r записываются нулевые значения $\lambda_r = 0$. Далее последовательно заполняются элементы столбцов λ_j начиная с №1. Для определения элемента λ_j просматривается столбец №*j* и если в этом столбце существует хотя бы одна клетка (v, j) с известным элементом l_{vj} и известным значением λ_v, то λ_j вычисляется :

$$\lambda_j = \min_v (\lambda_v + l_{vj}) \quad (v, j) \in D$$

Минимум берется среди всех клеток (v, j), для которых известны l_{vj} и λ_v. Найденные значения записываются в строке и столбце с номером *j*. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не определится λ_s для конечного узла *s* искомого пути.

Рассматриваемый алгоритм позволяет найти кратчайшие пути из узла r до любого другого узла сети. Поэтому вычисление значений λ_j необходимо продолжать до тех пор, пока не найдутся значения всех λ_s, соответствующих всем конечным узлам , до которых необходимо найти кратчайший путь из узла *r*.

Если при просмотре столбцов $\{\lambda_j\}$ с неизвестными значениями λ_j невозможно их определить, то это значит, что до этих узлов j не существует пути из узла *r*. Строки и столбцы, соответствующие узлу *j*, из таблицы вычеркиваются.

Пусть найдены все λ_s для конечных узлов $s \in \{\overline{1,n}\}$. Далее поверяются условия оптимальности (9). При этом возможны 2 случая:

1. Для любых дуг $(i, j) \in D$ справедливо неравенство $\lambda_j - \lambda_i \le l_{ij}$. Это означает, что кратчайшие пути найдены.
2. Существует хотя бы одна дуга $(i, j) \in D$, для которой имеет место $\lambda_j - \lambda_i > l_{ij}$. Это означает, что решение задачи не найдено, и решение следует продолжить. Для этого в клетках столбцов $\{\lambda_j\}$ и строк $\{\lambda_i\}$, не удовлетворяющих неравенству (9), вместо значений λ_j записываются исправленные значения $\lambda'_j = \lambda_i + l_{ij}$.

После этого условие оптимальности проверяется вновь, и процедура повторяется до тех пор, пока не будет иметь места первый случай.

Когда задача решена, то величины λ_s, соответствующие концам пути, определяют длину кратчайшего пути из *r* в *s*, т.е. $\tilde{l}_{rs} = \lambda_s$.

Сам кратчайший путь, т.е. узлы, через которые он проходит, восстанавливается следующим образом: в столбце s находится клетка (t_1, s), для которой $l_{t_1 s} = \lambda_s - \lambda_{t_1}$. Такая клетка обязательно существует. Дуга (t_1, s) будет последним звеном искомого пути. Далее в столбце с номером t_1 находится клетка (t_2, t_1), для которой $l_{t_2 t_1} = \lambda_{t_1} - \lambda_{t_2}$. Дуга (t_2, t_1) будет предпоследним звеном цепи. Далее просматривается столбец t_2 и т.д. до тех пор, пока не найдется первое звено пути (r, t_k), для которого $l_{r t_k} = \lambda_{t_k} - \lambda_r$.

Таким образом, найден путь $\mu_{rs} = (r, t_k, ..t_2, t_1, s)$. Длина этого пути $l(\mu_{rs}) = l_{rt_k} + ... + l_{t_2 t_1} + l_{t_1 s} = (\lambda_{t_k} - \lambda_r) + (\lambda_{t_{k-1}} - \lambda_{t_k}) + ... + (\lambda_{t_1} - \lambda_{t_2}) + (\lambda_s - \lambda_{t_1}) = \lambda_s$

Для доказательства того, что найденный путь действительно является кратчайшим, рассматривается любой произвольный путь $\overline{\mu}_{rs} = (r, s_k, ..s_2, s_1, s)$ для дуг которого выполняется неравенство (9), и доказывается, что его длина $\geq \lambda_s$, т.е. $l(\mu_{rs}) \leq l(\overline{\mu}_{rs})$.

Так как предполагается, что для дуг пути $\overline{\mu}_{rs}$ выполняются неравенства (9), то можно записать:

$$\lambda_{s_k} - \lambda_r \leq l_{rs_k}$$

$$\lambda_{s_{k-1}} - \lambda_{s_k} \leq l_{s_k s_{k-1}}$$

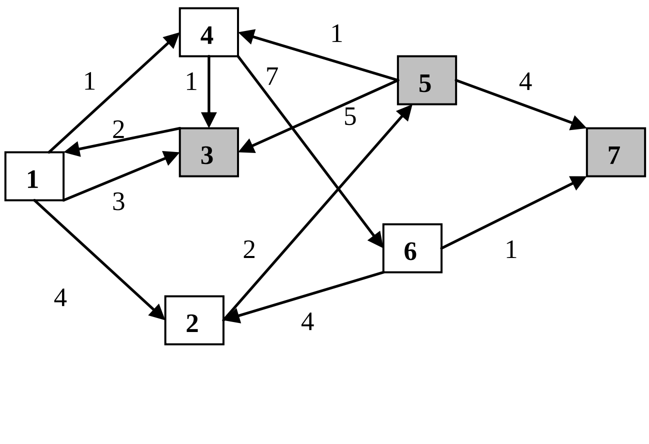
$$\dots$$

$$\lambda_s - \lambda_{s_1} \leq l_{s_1 s}$$

Если сложить левые и правые части этих неравенств, то можно записать $\lambda_s = l(\mu_{rs}) \leq l_{rs_k} + ... + l_{s_1 s} = l(\overline{\mu}_{rs})$. Таким образом $l(\mu_{rs}) \leq l(\overline{\mu}_{rs})$. Что и требовалось доказать.

Пример.

Найти кратчайший путь на заданной транспортной сети из узла №3 в узлы №5 и №7.



r=3,   s=5,7.

	λ_j	2	6	**0**	3	8	10	11
λ_i	$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
2	1		*4*	*3*	*1*			
6	2					*2*		
0	3	*2*						
3	4			*1*			*7*	
8	5			*5*	*1*			*4*
10	6		*4*					*1*
11	7							

Полагаем сначала $\lambda_3 = 0$. Далее:

1. j=1, v=3, l_{vj}=2. $\lambda_v = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$.

2. j=2, v=1, l_{vj} =4. λ_v =2$\Rightarrow \lambda_j$ =6.

3. j=4, v=1, l_{vj} =1. λ_v =2$\Rightarrow \lambda_j$ =3.

4. j=5, v=2, l_{vj} =2. λ_v =6$\Rightarrow \lambda_j$ =8.

5. j=6, v=4, l_{vj} =7. λ_v =3$\Rightarrow \lambda_j$ =10.

6. j=7, v_1=5, $l_{v_1 j}$ =4. λ_{v_1} =8$\Rightarrow l_{v_1 j} + \lambda_{v_1}$ =12

v_2=6, $l_{v_2 j}$ =1. λ_{v_2} =10$\Rightarrow l_{v_2 j} + \lambda_{v_2}$ =11

$\Rightarrow \lambda_j$ =11.

Проверка на оптимальность:

1. (1,2): $\lambda_2 - \lambda_1$=4=l_{12}
2. (1,3): $\lambda_3 - \lambda_1$=-2<l_{13}
3. (1,4): $\lambda_4 - \lambda_1$=1=l_{14}
4. (2,5): $\lambda_5 - \lambda_2$=2=l_{25}
5. (3,1): $\lambda_1 - \lambda_3$=2=l_{31}
6. (4,3): $\lambda_3 - \lambda_4$=-3<l_{43}
7. (4,6): $\lambda_6 - \lambda_4$=7=l_{46}
8. (5,3): $\lambda_3 - \lambda_5$=-8<l_{53}
9. (5,4): $\lambda_4 - \lambda_5$=-5<l_{54}
10. (5,7): $\lambda_7 - \lambda_5$=3<l_{57}
11. (6,2): $\lambda_2 - \lambda_6$=-8<l_{62}
12. (6,7): $\lambda_7 - \lambda_6$=1=l_{67}

Условие оптимальности выполняется для всех λ_j. Длина пути $l(\mu_{37}) = \lambda_7$ =11, $l(\mu_{35}) = \lambda_5$ =8.

Восстановление пути:

1. Путь μ_{37}: (3,1,4,6,7)
2. Путь μ_{35}(3,1,2,5).

Лекция №4.
Задача о максимальном потоке на сети.

Пусть задана транспортная сеть, состоящая из множества узлов J с номерами $i=\overline{0,n}$ и множества дуг *D*, соединяющие некоторые из этих узлов между собой.

Предполагается, что сеть является симметрическим графом, т.е. если дуга (*i*,*j*) входит в сеть, то в неё входит и симметрическая дуга (*j*,*i*), хотя реально такой дуги может и не быть. Каждой дуге $(i,j)\in D$ поставлено в соответствие число d_{ij} , называемое пропускной способностью дуги. Величина d_{ij} определяет максимальное количество продукции, которое может быть переведено по дуге (*i*,*j*) в единицу времени. Узел с номером Ø имеет неограниченный запас продукции и называется источником, а узел с номером *n* имеет неограниченную потребность в эой продукции и называется стоком. В остальных узлах, которые называются промежуточными, запас продукции или потребность в ней равны нулю.

Необходимо найти максимальное количество продукции, перевозимое из узла с номером $\varnothing$ в узел с номером *n* в единицу времени, при этом не нарушая пропускные способности дуг сети.

Данная постановка справедлива для смешанных и неориентированных графов, т.е. множество *D* может содержать дуги и рёбра, только дуги или только рёбра.

Для математической постановки задачи введём переменные x_{ij} - количество продукции, перевозимое по дуге (*i*,*j*). Эта велчина называется потоком по дуге (*i*,*j*). Тогда математическая модель задачи будет иметь вид:

$$V=\sum_{j=1}^{n}x_{0j}=\sum_{i=0}^{n-1}x_{in}\Rightarrow \max \qquad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}x_{ik}-\sum_{j=1}^{n}x_{kj}=0, k=\overline{1,n-1} \qquad (2)$$

$$0\le x_{ij}\le d_{ij}, i,j=\overline{0,n}; i\ne j \qquad (3)$$

Целевая функция (1) отражает величину потока по сети, которая должна быть максимизирована. Очевидно, поток на сети равен количеству продукции, вывозимой из источника или ввозимой в сток. Равенство (2) для промежуточных узлов записано из условия баланса: количество продукции, привозимого в узел, должно равняться количеству продукции, вывозимого из узла. Ограничения (3) очевидны. Модель (1)- (3) относиться к классу ЗЛП. Однако существует более эффективеый алгоритм решения этой модели. Это алгоритм Форда.

Важную роль в обосновании алгоритма Форда решения задачи о максимальном потоке играет понятие разреза сети.

Множество всех узлов сети разбивается на два непересекающихся подмножества R и $\overline{R}\left(R \cup \overline{R} = J, R \cap \overline{R} = \varnothing\right)$ так, чтобы источник $\varnothing \in R,$ а сток $n \in \overline{R}$. Если выделить все дуги, начальные узлы которых принадлежат подмножеству $R,$ а конечные - $\overline{R}$, то эти дуги будут образовывать <u>разрез сети</u> $(R, \overline{R})$, отделяющий источник $\varnothing$ от стока n.

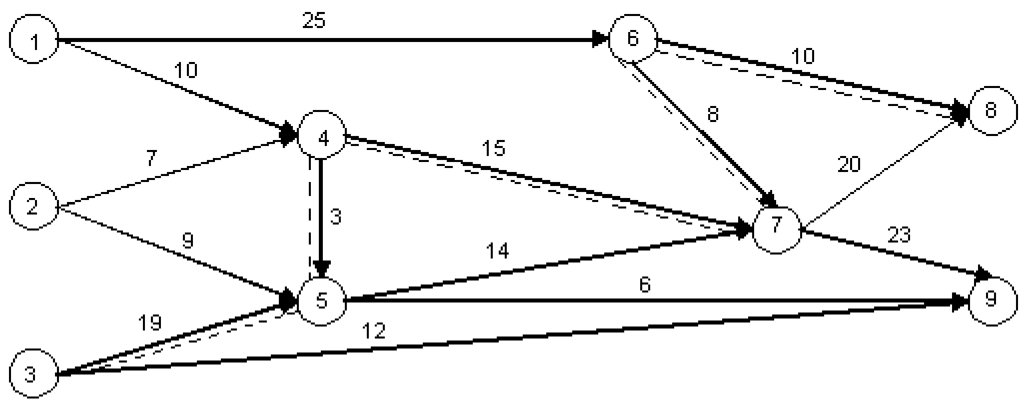
Таким образом, разрезом сети называется совокупность всех дуг (i,j), которые исходят из узлов $i \in R$ и заканчиваются в узлах $j \in \overline{R}$. Каждый разрез сети характеризуется пропускной способностью $d\,(R, \overline{R})$, которая численно равна сумме пропускных способностей дуг, образующих разрез, т.е.

$$d\,(R, \overline{R}) = \sum_{(i,j) \in (R, \overline{R})} d_{ij}$$

Очевидно, что любой путь из источника в сток содержит хотя бы одну дугу разреза $(R, \overline{R})$. Поэтому если удалить все дуги какого-либо разреза, то все пути из источника в сток будут блокированы. Поскольку пропускная способность пути равна наименьшей из пропускных способностей дуг, входящих в этот путь, то величина потока V перемещаемого по всем возможным путям, соединяющим исток со стоком, не может превышать пропускной способности любого разреза сети, т.е. $V \leq d(R, \overline{R})$. Следовательно, если удастся постоить такой поток, что его величина V^* окажется равной пропускной способности некоторого разреза $(R^*, \overline{R}^*)$, т.е. $V^* = d(R^*, \overline{R}^*)$, этот поток и будет максимальным, а $(R^*, \overline{R}^*)$ - разрезом с минимальной пропускной способностью.

Теорема Форда – Фалкерсона.

Алгоритм решения задачи о максимальном потоке основан на теореме Форда – Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе. Для рассмотрения этой теоремы вводятся понятияо прямой и обратной дуги цепи. Под цепью в данном случае понимается последовательность сцепленных дуг сети без учёта их ориетации. Дугу, принажлежащую некоторй цепи, называют прямой, если её направление совпадает с направлением обхода узлов этой цели, и обратной - в противном случае например, цепь μ=(3,5,4,7,6,8) на рис.1, связывающая узел 3 с вершиной 8, содержит три прямые дуги (3,5), (4,7), (6,8) и две обратные (4,5), (6,7).



<u>Теорема.</u> В любой сети максимальная величина потока из источника в сток равна пропускной способности минимального разреза сети.

<u>Доказательство</u>. Пусть имеем максимальный поток в сети. Если $x_{ij}=d_{ij}$, то говорят, что дуга (i,j) насыщена потоком. Предполагается, что V^* величина максимального потока в сети. Необходимо доказать, что найдется такой разрез $(R^*, \overline{R}^*)$ на этой сети, пропускная способность которого равна V^*, т.е. $V^* = d(R^*, \overline{R}^*)$.

Такой разрез можно построить, если в подмножество R включить все узлы, которые достигаются по некоторой цепи из истока, а в подмножество $\overline{R}$ – все остальные вершины .

Узлы , составляющие подмножество R , определяются последовательно , начиная с источника Ø , по следующему правилу : Ø $= R$; если $i \in R$ и $x_{ij} < d_{ij}$ то $j \in R$; если $i \in R$ и $x_{ji} >0$, то $j \in R$. (4)

Применение правила (4) приводит к построению разреза. Очевидно, разрез будет построен в том случае , если сток $n \in \overline{R}$.

Пусть сток $n \in R$. Тогда из правила (4) следует , что существует цепь из истока Ø в сток *n* с пропускной способностью больше нуля $\mu=(i_1,i_2,\dots,i_n)$, где $i_1=$ Ø, $i_n=n$. Это следует из того , что все прямые дуги , входящие в цепь, ненасыщенные ($x_{i_s i_{s+1}} < d_{i_s i_{s+1}}$), а для всех обратных дуг (i_{s+1},i_s) величина потока $x_{i_{s+1} i_s}>0$.

Пусть δ_1 наименьшая разность между пропускной способностью и величиной потока, взята по всем прямым дугам цепи μ , а δ_2 - наименьшая величина потока, взятая по всем обратным дугам этой цепи. Далее определяется величина $\delta=\min(\delta_1, \delta_2) > 0$ и увеличивается поток по всем прямым дугам цепи на δ ,а на ту же величину уменьшается поток по всем обратным дугам цепи. Таким образом, величина нового потока равна $V+\delta$, что противоречит предположению о максимальности V . Следовательно предположение $n \in R$ неверно, и $n \in \overline{R}$, а множество дуг $(R, \overline{R})$ есть разрез, отделяющий исток от стока.

Пропускная способность построенного разреза равна максимальному потоку на сети. Действительно, из правила (4) нахождения подмножества R следует , что если $i \in R,\ j \in \overline{R}$, то $x_{ij} = d_{ij}$; в противном случае узел *j* входил бы в *R*.

Таким образом,

$$\mathrm{V}^* = d\left(R^*, \overline{R}^*\right) = \sum_{\substack{(i,j)\in\left(R^*,\overline{R}^*\right)\\ i\in R^*,\, j\in\overline{R}^*}} d_{ij} = \sum_{\substack{i\in R^*\\ j\in\overline{R}^*}} x_{ij}$$

Теорема доказана.

<u>Алгоритм Форда нахождения максимального потока на сети.</u>

Исходные данные заносятся в таблицу размерности $(n+1) \times (n+1)$. Если дуга $(i,j)\in D$, то в соответствующей клетке таблицы записывается значение d_{ij}.

Если обратная дуга $(j,i)\in D$, то в соответствующей клетке записывается значение d_{ji}, если дуга $(j,i)\notin D$, то в клетке (j,i) записывается Ø.

Если дуги $(j,i)\notin D$, $(i,j)\notin D$, то соответствующие клетки остаются пустыми. Итак, заполненными будут только клетки, симметричные относительно главной диагонали.

*

j / i	0	…	…	…	n
0		…	$\boldsymbol{d_{0j}}$	…	d_{0n}
M					M
i	$\boldsymbol{d_{i0}}$	…	$\boldsymbol{d_{ij}}$	…	d_{in}
M					M
n	d_{n0}	…	d_{nj}	…	

Каждый шаг алгоритма Форда состоит из трёх действий.

1.Находится путь по таблице из узла- истока Ø в узел-сток n с пропускной способностью **больше 0**. Для этого столбец, соответствующий узлу-истоку, отмечается знаком *. Далее отыскиваются в строке с номером 0 элементы $d_{ij} > 0$ и столбцы, в которых они находятся, отмечаются сверху номером просматриваемой строки (цифрой 0). В результате окажутся выделенными все дуги (0, j) с положительными пропускными способностями. Эти дуги могут служить первыми дугами пути из истока в сток.

Далее просматриваются те строки, номера которых совпадают с номерами отмеченных столбцов. В каждой такой строке i отыскиваются элементы $d_{ij} > 0$, находящиеся в непомеченных столбцах, и эти столбцы отмечаются номером просматриваемой строки. Таким образом, окажутся выделенными дуги, которые могут служить вторыми дугами путей из истока в сток.

Аналогичный просмотр строк продолжается до тех пор, пока: а) либо не будет помечен столбец с номером n (сток) что означает выделение пути с пропускной способностью больше нуля из истока в сток; б) либо нельзя помечать новые столбцы (в просматриваемых строках не окажется положительных элементов) , при этом столбец с номером n также останется не отмеченным.

В последнем случае отсутствует путь из источника в сток, проходящий по дугам с положительной пропускной способностью.

В случае "a" искомый путь μ из источника в сток находится используя пометки столбцов. Пусть последний столбец n помечен номером k, тогда дуга (k,n) последнее звено искомого пути. Далее просматривается столбец с номером k, пусть отметка этого столбца l. Тогда дуга (l,k) предпоследнее звено искомого пути и т.д.Этот процесс продолжается до тех пор, пока не найдётся отметка *, т.е. отметка истока Ø. Пусть эта отметка будет цифра m. Таким образом путь от истока к стоку будет состоять из дуг μ=((Ø,m),…, (l,k), (k,n)). (5)

2.Клетки , соответствующие дугам этого пути, отмечаются знаком (–), а симметричные им клетки, т.е. соответствующие обратным дугам – знаком (+). По найденному пути (5) можно пропустить максимально возможный поток, величина которого равна $\Theta = min \{ d_{ij}^{-} \}$.Эта величина Θ отнимается от всех пропускных способностей клеток, отмеченных знаком (–) и прибавляется к пропускным способностям клеток, отмеченных знаком (+). В результате получается новая таблица, в которой записаны неиспользованные пропускные способности дуг после пропускания максимального потока по пути (5).

По новой таблице опять отыскивается, уже другой , путь от истока к стоку, состоящий из дуг с неиспользованными пропускными способностями. Если такой путь существует, то по этому пути пропускается максимально возможный поток из истока в сток. После этого корректируется таблица аналогично как на этапе 1.

Это процесс продолжается до тех пор, пока не будет иметь место случай б).

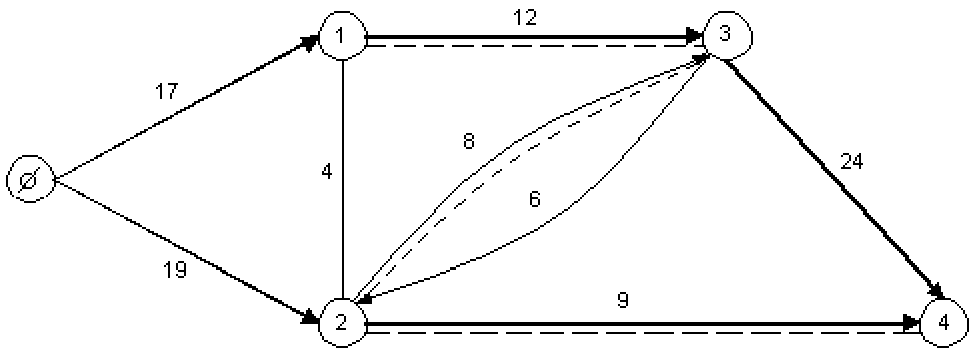
3.Пусть имеется случай б), т.е. когда не существует пути из истока в сток, состоящий из дуг с неиспользованными пропускными способностями. Это означает, что найдены все возможные пути перевозки продукции и задача решена. Для определения максимального потока на сети V^* в последней таблице выделяются отмеченные столбцы, номера которых образуют множество R^*, причём исток $n \in \overline{R}^*$. В результате получается минимальный разрез $(R^*, \overline{R}^*)$ и по теореме Форда- Фалкерсона

$$\mathrm{V}^* = \min_{(R,\overline{R})} d\left(R, \overline{R}\right) = d\left(R^*, \overline{R}^*\right) = \sum_{(i,j)\in\left(R^*,\overline{R}^*\right)} d_{ij}$$

Для нахождения значений потоков по дугам x_{ij}^{*}, образующих поток V^{*} из элементов первой таблицы вычитаются соответствующие элементы последней таблицы. Если в клетке получается неотрицательная величина , то она оставляется; если – отрицательная, то в клетке записывается $\varnothing$. Значения заполненных клеток будут соответствовать потокам по дугам x_{ij}^{*}. Причём

$$\mathrm{V}^{*} = \sum_{j=1}^{n} x_{0j}^{*} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{in}^{*}$$

<u>Пример.</u> На данной сети определить максимальный поток из узла $\varnothing$ в узел 4.



1.

	*	0	0	1	2
i \ j	0	1	2	3	4
0		17	19^-		
1	0		4	12	
2	0^+	4		8	9^-
3		0	6		24
4			0^+	0	

Θ_1= min (19,9)=9.

2.

	*	0	0	1	3
i \ j	0	1	2	3	4
0		17^-	10		
1	0^+		4	12^-	
2	9	4		8	
3		0^+	6		24^-
4			9	0^+	

Θ_2= min (17,12,24)=12.

3.

	*	0	0	2	3
i \ j	0	1	2	3	4
0		5	10^-		
1	12		4		
2	9^+	4		8^-	
3		12	6^+		12^-
4			9	12	

Θ_3= min (10,8,12)=8.

4.

	*	0	0		
i \ j	0	1	2	3	4
0		5	2		
1	12		4		
2	17	4			
3		12	14		4
4			9	12	

Пути из 0 в 4 нет! Определяются множества: R*={0,1,2}, $\overline{R}$ *={3,4}.

$(R^*, \overline{R}^*)$=((1,3),(2,3),(2,4))
$d(R^*, \overline{R}^*)=V^*$=12+8+9=29

5. В заключительной таблице положительные элементы определяют потоки по дугам x_{ij}^*.

i \ j	0	1	2	3	4
0		12	17		
1	-12		0	12	
2	-17	0		8	9
3		0	-8		20
4			-9	-12	

Лекция №5.

Задачи дискретного программирования.

Многие задачи ИСО, такие, как распределение ресурсов, сетевого планирования и управления, календарного планирования, описываются математическими моделями ДП.

Рассмотрим задачу вида:

$$f(X) \Rightarrow \max \qquad (1)$$

$$g_i(X) \le 0 \quad (i = \overline{1, m}) \qquad (2)$$

$$X \in G \qquad (3)$$

Здесь $X = (x_1, \dots, x_n)$, G- некоторое множество n-мерного пространства R^n. Если множество G является конечным или счетным, то условие (3) – это условие дискретности. В таком случае данная задача является задачей дискретного программирования (ЗДП).

Если вводится ограничение $x_j \quad j = \overline{1, n}$- целые числа, то приходят к задаче целочисленного программирования, которая является частным случаем ЗДП.

Если условие целочисленности накладывается только на часть компонент вектора X, то задача (1)-(3) будет задачей частично-целочисленного программирования.

Если компоненты вектора X могут принимать только 2 значения-0 или 1, то (1)-(3) – задача булевского программирования.

В задачах ДП область допустимых решений является невыпуклой и несвязной. Поэтому отыскание решения таких задач сопряжено со многими трудностями. В частности, практически невозможно применение стандартных приемов, используемых при замене дискретной задачи ее непрерывным аналогом, состоящих в дальнейшем округлении найденного решения до ближайшего целочисленного. Например, рассматривается ЗЦЛП:

$$
\begin{aligned}
&x_1 - 3x_2 + 3x_3 \Rightarrow \max \\
&2x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \\
&4x_1 - 3x_2 \le 2 \\
&-3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0 \quad x_1, x_2, x_3 - \textit{целые}
\end{aligned}
$$

Решение соответствующей ЗЛП без требования целочисленности X*=(0,5; 0; 4,5), а искомое целочисленное решение X*=(2; 2; 5).

Если множество G конечно, то наиболее простой метод решения задачи (1)-(3) состоит в прямом переборе. Суть метода: в любом порядке перебираются множества возможных значений X и для каждого значения вычисляется значение целевой функции f(X). Далее находится наибольшее (наименьшее) значение f(X*), которое будет соответствовать оптимальному решению X*$\in$G. Однако в реальных задачах хотя G и конечно, но его размерность бывает очень большой, и такой перебор становится практически невозможным.

Поэтому для решения ЗДП разрабатываются специальные методы, основанные на принципе целенаправленного перебора, которые позволяют сократить полный перебор. Методы решения ЗДП по принципу подхода к проблеме делятся на 3 группы:

1. Методы отсечения, или отсекающих плоскостей
2. Метод ветвей и границ
3. Методы случайного поиска и эвристические методы

Метод ветвей и границ.

Метод ВИГ (или метод направленного перебора) относится к группе комбинаторных методов решения как линейных, так и нелинейных ЗДП. Этот метод дает общий подход к решению ЗДП, содержащих конечное число допустимых планов, и за конечное число шагов позволяет найти точное решение задач конечной размерности. Разные реализации метода объединяются общей идеей перехода от полного перебора планов к целенаправленному, сокращенному перебору.

Сокращение перебора осуществляется за счет массового отсечения неперспективных планов.

Пусть имеет место задача ДП в общем виде:

$$
\begin{aligned}
&f(X) \Rightarrow \min \\
&g_i(X) \le 0 \qquad\qquad (1) \\
&X \in G
\end{aligned}
$$

Здесь *f(X)*- скалярная функция своих аргументов, *G*- конечное множество.

Несмотря на большое разнообразие алгоритмов, разрабатываемых для решения прикладных задач вида (1), им всем свойственны общие основные этапы:

1. Вычисление нижней границы целевой функции *f(X)* на множестве *G* и его подмножествах (в случае решения задачи на максимум – вычисление верхней границы),
2. Разбиение множества *G* на дерево подмножеств,
3. Пересчет нижней границы *f(X)* на подмножествах,
4. Вычисление допустимых планов,
5. Проверка планов на оптимальность,
6. В случае получения приближенного решения – оценка его точности.

Рассмотрим все эти этапы.

1. Вычисление нижней границы (оценки) целевой функции *f(X)* на множестве планов *G* или его подмножествах $G_i \in G$ сводится к определению числа $\xi(G)$, для которого справедливо неравенство $\xi(G) \le f(X),\ \forall \mathrm{X} \in \mathrm{G}$, или $\xi(G_i) \le f(X),\ \forall \mathrm{X} \in \mathrm{G_i}$.

2. Разбиение (ветвление) множества *G* на дерево подмножеств.

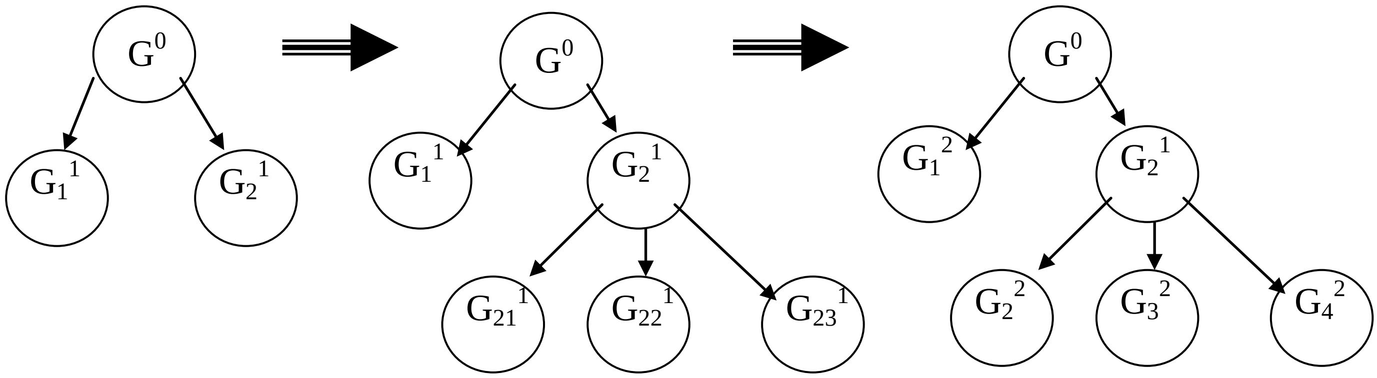
<u>*Определение.*</u> Множества $G_i \ \ (i = \overline{1, r}) : G_i \subset G,\ G_i \cap G_j = \otimes \ (\forall i, j : i \ne j)$ и $\bigcup_{i=1}^{r} G_i = G$ называются разбиением множества *G* на подмножества G_i.

Суть метода ветвей и границ состоит в последовательном разбиении множества G на дерево подмножеств и в дальнейшем массовом отсеивании неперспективных в том или ином смысле подмножеств. При разработке конкретного алгоритма должен быть указан способ такого разбиения, также как указан метод вычисления нижней границы целевой функции на множестве G и его подмножествах.

Ветвление происходит по следующей схеме:

0-й шаг. Имеется исходное множество $G=G^0$. Некоторым способом его разбивают на конечное число подмножеств $G_i^1 \ \ i=\overline{1,r_1}$.

к-тый (k>0) шаг. Имеются множества $G_i^k \ \ i=\overline{1,r_k}$, еще не подвергшиеся ветвлению. По определенному правилу, указанному ниже, среди них выбирают подмножества $G_{v(k)}^k$ и разбивают их на конечное число подмножеств $G_{v(k)}^k = \bigcup_{i=1}^{p_k} G_{v_i(k)}^k$. Затем еще не подвергавшиеся на этом шаге разбиению множества $G_i^k, \ i \neq v$ и новые подмножества $G_{v_i(k)}^k, \ i=\overline{1,p_k}$ обозначают (перенумеровывают) как $G_j^{k+1}, \ \ j=\overline{1,r_{k+1}}, \ \ r_{k+1}=r_k+p_k-1$.(Рис.1.)



3. Пересчет нижних границ целевой функции *f(X)* на подмножествах.

Очевидно, что если $G_i \subset G$, то $\min\limits_{X\in G} f(X) \le \min\limits_{X\in G_i} f(X)$. Поэтому, разбивая в процессе решения множество G^0 на подмножества $G_i \subset G, \ \ i=\overline{1,r}, \ \ \bigcup_{i=1}^{r} G_i = G$ значения нижних границ на этих подмножествах будут не меньше оценок для исходного множества G^0, т.е. $\xi(G^0) \le \xi(G_i) \quad \forall i = \overline{1, r}$. В конкретных ситуациях это неравенство для некоторых i превращается из нестрогого в строгое неравенство. Чем быстрее рост оценок на подмножествах, тем эффективнее разработанный алгоритм.

4. Вычисление допустимых планов.

Для конкретных задач могут быть указаны различные способы нахождения планов в последовательно разбиваемых подмножествах. Любой такой способ опирается на специфику задачи. При разработке конкретного алгоритма необходимо указать способ определения допустимых планов.

5. Проверка планов на оптимальность.

Пусть имеется разбиение $\bigcup\limits_{i=1}^{r} G_i = G^0$ и найден некоторый план $\overline{X}_0 \in G_v$, $1 \le v \le r$. Если при этом $f(\overline{X}_0) = \xi(G_v) \le \xi(G_i) \quad \forall i = \overline{1, r}$, то $\overline{X}_0$- оптимальный план исходной задачи (1).

Действительно, из последнего неравенства следует, что $f(\overline{X}_0) \le \xi(G_i) \le f(X)$ для $\forall X \in G_i$, а так как $G^0 = \bigcup\limits_{i=1}^{r} G_i$, то окончательно можно записать $f(\overline{X}_0) \le f(X)$ для $\forall X \in G$.

6. Оценка точности приближенного решения.

Пусть $G^0 = \bigcup\limits_{i=1}^{r} G_i$ и найден некоторый план $\tilde{X} \in G$. Обозначим $\xi = \min\limits_{i=\overline{1,r}} \zeta(G_i)$. Очевидно $\xi \le \min\limits_{\tilde{X} \in G^0} f(\tilde{X}) \le f(\tilde{X})$. Если разность $\Delta = f(\tilde{X}) - \xi$ невелика, то план $\tilde{X}$ можно принять за приближенное решение, а Δ будет оценкой его точности.

Формальная схема метода ветвей и границ.

0 шаг. Обозначается $G = G^0$. Вычисляется нижняя граница целевой функции $\xi(G^0)$. Если при этом удается найти такой план $\overline{X}_0 \in G^0$, что $f(\overline{X}_0) = \xi(G^0)$, то $\overline{X}_0$- оптимальный план задачи (1).

Если оптимальный план не найден, то некоторым способом разбивают множество G^0 на конечное число непересекающихся подмножеств $G^0 = \bigcup_{i=1}^{r} G^1{}_i$ и переходят к следующему (первому) шагу.

1 шаг. Вычисляют нижние границы $f(X)$ на полученных подмножествах: $\xi(G_i^1)$ $(i=\overline{1,r})$. Если удается найти такой план $\overline{X}$, что $\overline{X} \in G_s^1$ $(1 \le s \le r)$ и $f(\overline{X}) = \xi(G_s^1) \le \xi(G_i^1)$, $(\forall i = \overline{1,r})$, то $\overline{X}$ - оптимальный план задачи (1).

В противном случае продолжается процесс ветвления. Для разбиения выбирают наиболее перспективное множество G_v^1 по правилу: $\xi(G_v^1) = \min\limits_{i=\overline{1,r}} \xi(G_i^1)$.

Разбивают множество $G_v^1 = \bigcup_{i=1}^{p_1} G_{v_i}^1$. Далее переобозначают множества, не подвергшиеся разбиению на этом шаге, G_i^1, $i \ne v$ и новые подмножества $G_{v_i}^1$, $i=\overline{1,p_1}$ как G_j^2, $j=\overline{1,r_2}$, $r_2 = r_1 + p_1 - 1$, и переходят к следующему шагу.

к-й шаг. Исходные множества для рассмотрения на этом этапе G_j^k, $(j=\overline{1,r_k})$. Вычисляются оценки $\xi(G_j^k)$ $(j=\overline{1,r_k})$. Если удается найти такой план $\overline{X}$, что $\overline{X} \in G_s^k$ $(1 \le s \le r_k)$ и справедливо условие $f(\overline{X}) = \xi(G_s^k) \le \xi(G_j^k)$, $(\forall j = \overline{1,r_k})$, то $\overline{X}$ - оптимальный план задачи (1).

В противном случае снова выбирают для разбиения наиболее перспективное множество G_v^k по правилу: $\xi(G_v^k) = \min\limits_{i=\overline{1,r_k}} \xi(G_i^k)$. Далее не подвергшиеся разбиению G_j^k, $j \ne v$ и $G_{v_i}^k$, $i=\overline{1,p_k}$ на данном шаге переобозначают как G_j^2, $j=\overline{1,r_2}$, $r_2 = r_1 + p_1 - 1$.

Этот процесс ветвления продолжается до тех пор, пока не будет найдено решение задачи (1).

Замечание. При реализации описанной выше общей схемы метода ветвей и границ для конкретных задач дискретного программирования необходимо разрабатывать правила ветвления, способы вычисления нижних границ целевой функции $f(X)$ на рассматриваемых множествах и нахождения допустимых планов исходя из специфики этих задач.

Метод ветвей и границ решения задач целочисленного линейного программирования

Нулевой шаг. Алгоритм начинается с решения соответствующей задачи линейного программирования. Если оптимальный план X_0 не удовлетворяет условиям целочисленности, то значение $F(X_0)=\xi_0$ принимается за нижнюю границу (в случае минимизации) искомого оптимума, т.е.

$$\min_{x\in G_0} F(X)\le \xi_0,$$

где G0 - множество допустимых целочисленных планов.

Пусть некоторая компонента xi0 не получила в плане X_0 целого значения, тогда ветвление на нулевом шаге производится следующим образом:

$$G_0 = G_1^{(1)} \cup G_2^{(1)},$$

где $G_1^{(1)} = \{X | X\in G_0, x_{i_0} \le [x_{i_0}]\}, G_2^{(1)} = \{X | X\in G_0, x_{i_0} \ge [x_{i_0}]+1\}.$

k – й шаг (k≥ 1). Для множеств $G_\nu^{(k)}$, полученных при ветвлении на предыдущем шаге, вычисляются оценки $\xi(G_\nu^{(k)}) = F(X_\nu^{(k)})$, где $X_\nu^{(k)}$ – оптимальный план ЗЛП с дополнительным условием принадлежности плана множеству $G_\nu^{(k)}$. Если $G_\nu^{(k)}=\varnothing$, т.е. соответствующая ЗЛП неразрешима, то полагают $\xi(G_\nu^{(k)})=-\infty$.

Если $X_{\nu_k}^{(k)}$, где $\xi(G_{\nu_k}^{(k)})=\min_\nu \xi(G_\nu^{(k)})$ удовлетворяет условию целочисленности, то он является оптимальным планом исходной задачи целочисленного программирования. Если $X_{\nu_k}^{(k)}$ не удовлетворяет условию целочисленности, то выбирается одна их, его целочисленных компонент $x_r^{(k)}$ и проводится разбиение $G_{\nu_k}^{(k)} = G_{\nu_{k,1}}^{(k)} \cup G_{\nu_{k,2}}^{(k)}$,

где

$$G_{\nu_{k,1}}^{(k)} = \left\{ X \middle| X \in G_{\nu_k}^{(k)}, x_r \le \left[x_r^{(k)} \right] \right\},$$
$$G_{\nu_{k,2}}^{(k)} = \left\{ X \middle| X \in G_{\nu_k}^{(k)}, x_r \ge \left[x_r^{(k)} \right] + 1 \right\}.$$

Множества, еще не подвергнувшиеся разбиению, заново обозначаются $G_\nu^{(k+1)}$ и переходят к (k+1) -му шагу. Ветвление производится до тех пор, пока не будет найден оптимальный план исходной задачи.

Пример:

Автогараж располагает 3 видами грузовых машин: А, Б и В грузоподъемностью 5т, 4т и 3т соответственно. Одна машина типа А тратит на выполнение работы 60л бензина, типа Б - 30л, типа С - 20л. Найти число машин, исходя из следующих условий:

- затраты бензина не превосходят 3000л ,
- объем перевозок не менее 300т ,
- суммарное количество машин минимально.

Условные обозначения:

Управляемые параметры: X_1,X_2,X_3 - количество машин типа А,Б и В соответственно, т.е. количество неизвестных равно 3.

Целевые параметры: F_3 - количество используемых машин.

Искомые параметры: X_1 , X_2 , X_3
Целевая функция: $F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$
Ограничения:

$$60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$$
$$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$$
$$X_i \ge 0 \text{ - целые, } (i=1,3)$$

Решение данной задачи.

Решим задачу симплекс-методом без учета целочисленности. Получим следующий результат: решением является план ($33^1/_3$; $33^1/_3$; 0), , и значение целевой функции при этом $66^2/_3$.

Т.к. полученный план очевидно нецелочисленный, произведем ветвление относительно любой нецелой компоненты (либо относительно x_1, либо относительно x_2). Выберем x_1. Тогда исходная задача:

G^0	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33^1/_3;\ 33^1/_3;\ 0)$, $F=66^2/_3$.	

разбивается на две:

G^1_1	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ (-целая часть компоненты $X^*_1=33,3$) $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$	G^1_2	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \ge 34$ (-целая часть компоненты $X^*_1=33,3$ плюс 1) $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$

Решаем обе эти задачи. Полученные оптимальные планы и значения целевой функции удобнее всего отразить на дереве ветвлений:

G^0	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33^1/_3;\ 33^1/_3;\ 0)$, $F=66^2/_3$.	

G^1_1	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ (-целая часть компоненты $X^*_1=33,3$) $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$	G^1_2	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \ge 34$ (-целая часть компоненты $X^*_1=33,3$ плюс 1) $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33;\ 33\ ^3/_4;\ 0)$, $F=66\frac{3}{4}$.		Решение: $(34;\ 28;\ 6)$, $F=68$.	

На множестве G^1_2 полученный план – целый, однако оценка нижней границы (значение целевой функции) выше, чем на множестве G^1_1 ($F(G^1_1)=66\frac{3}{4} < F(G^1_2)=68$). Поэтому план (34; 28; 6) не является оптимальным. План же множества G^1_1 не целый, поэтому необходимо продолжить ветвление множества G^1_1 относительно нецелочисленной компоненты плана $(33;\ 33\ ^3/_4;\ 0)$, т.е. относительно $X_2 = 33\ ^3/_4$. Получим:

G^0	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33\,^1/_3;\ 33\,^1/_3;\ 0)$, $F=66\,^2/_3$.	

G^1_1	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33;\ 33\,^3/_4;\ 0)$, $F=66\,^3/_4$.	

G^1_2	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \ge 34$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(34;\ 28;\ 6)$, $F=68$.	

G^1_{11}	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_2 \le 33$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$

G^1_{12}	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_2 \ge 34$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$

Перенумеровав полученные множества: $G^1_{11} = G^2_1$, $G^1_{12} = G^2_2$, $G^1_2 = G^2_3$, отразим решение в дереве:

G^0	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33^1/_3; 33^1/_3; 0)$, $F=66^2/_3$.	

G^1_1	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33; 33\ ^3/_4; 0)$, $F=66\frac{3}{4}$.	

G^2_3	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \ge 34$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(34; 28; 6)$, $F=68$.	

G^2_1	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_2 \le 33$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33; 33; 1)$, $F=67$	

G^2_2	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_2 \ge 34$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(32\ ^4/_5; 34; 0)$, $F=66\ ^4/_5$.	

Минимальное значение целевой функции достигается на множестве G^2_2, соответствующий план – не целый. Продолжаем ветвление: ветвим множество G^2_2 относительно компоненты $X_1=32\ ^4/_5$.

G^0

$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$
$60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$
$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$
$X_i \ge 0 \ (i=1,3)$

Решение: $(33\,^1/_3;\ 33\,^1/_3;\ 0)$, $F=66\,^2/_3$.

G^1_1

$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$
$60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$
$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$
$X_1 \le 33$
$X_i \ge 0 \ (i=1,3)$

Решение: $(33;\ 33\,^3/_4;\ 0)$, $F=66\,^3/_4$.

G^2_3

$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$
$60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$
$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$
$X_1 \ge 34$
$X_i \ge 0 \ (i=1,3)$

Решение: $(34;\ 28;\ 6)$, $F=68$.

G^2_1

$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$
$60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$
$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$
$X_1 \le 33$
$X_2 \le 33$
$X_i \ge 0 \ (i=1,3)$

Решение: $(33;\ 33;\ 1)$, $F=67$

G^2_2

$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$
$60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$
$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$
$X_1 \le 33$
$X_2 \ge 34$
$X_i \ge 0 \ (i=1,3)$

Решение: $(32\,^4/_5;\ 34;\ 0)$, $F=66\,^4/_5$.

G^2_{21}

$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$
$60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$
$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$
$X_1 \le 33$
$X_2 \le 33$
$X_1 \le 32$
$X_i \ge 0 \ (i=1,3)$

G^2_{21}

$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$
$60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$
$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$
$X_1 \le 33$
$X_2 \ge 34$
$X_1 \ge 33$
$X_i \ge 0 \ (i=1,3)$

Перенумеровываем: $G^2_3 = G^3_1$, $G^2_1 = G^3_2$, $G^2_{21} = G^3_3$, $G^2_{22} = G^3_4$ решим их:

G^0	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33\,^1/_3;\ 33\,^1/_3;\ 0)$, $F=66\,^2/_3$.	

G^1_1	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33;\ 33\,^3/_4;\ 0)$, $F=66\,^3/_4$.	

G^3_1	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \ge 34$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(34;\ 28;\ 6)$, $F=68$.	

G^3_2	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_2 \le 33$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33;\ 33;\ 1)$, $F=67$	

G^2_2	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_2 \ge 34$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(32\,^4/_5;\ 34;\ 0)$, $F=66\,^4/_5$.	

G^3_3	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_2 \le 33$ $X_1 \le 32$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(32;\ 35;\ 0)$, $F=67$	

G^3_4	$F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$ $60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \le 3000$ $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 300$ $X_1 \le 33$ $X_2 \ge 34$ $X_1 \ge 33$ $X_i \ge 0 \ (i=1,3)$
Решение: $(33;\ 34;\ 0)$, $F=67$	

Минимальное значение целевой функции F= 67 достигается сразу на трех множествах: G^3_2, G^3_3, G^3_4. На всех трех множествах полученные планы – целочисленные. Поэтому в качестве решения можно выбрать любое из:

(33; 33; 1), (32; 35; 0), (33; 34; 0). К примеру, возьмем первое.

Если бы при равных значениях F некоторые планы были бы не целые, то в качестве решения мы выбрали бы целочисленное.

В терминах постановки задачи данные результаты могут быть интерпретированы следующим образом: необходимо использовать 33 машины типа А, 33 машины типа Б и одну машину типа В. Суммарное количество машин при этом – 67 штук.

Лекция № 6.

Метод динамического программирования.

ДП представляет собой математический аппарат, разработанный с целью повышения эффективности вычислений при решении некоторого класса задач мат. программирования путем их декомпозиции на относительно небольшие и, следовательно, менее сложные задачи. Характерным для ДП является подход к решению задачи по этапам, с каждым из которых ассоциирована одна управляемая переменная. Набор рекуррентных вычислительных процедур, связывающий различные этапы, обеспечивает получение решения задачи при достижении последнего этапа.

Рассмотрим функционирование некоторого объекта в течение промежутка времени T. Пусть в момент времени t_j состояние объекта характеризуется вектором $Y_j = (y_1(t_j),...,y_n(t_j))$, причем в начальный момент времени t_1 состояние объекта задано, т.е. вектор Y_1 известен. Объект меняет свое состояние под воздействием управления $X_j = (x_1(t_j),...,x_r(t_j))$ в моменты времени t_j $(t_1 < t_2 < ... < t_N < T)$. При этом управляющее воздействие выбирается из заданной области $U_j(Y_j)$, т.е.

$$X_j \in U_j(Y_j), \quad j = \overline{1,N} \qquad (1)$$

Рассматривается случай, когда будущее состояние объекта зависит только от состояния объекта в данный момент времени и управляющего воздействия в этот момент времени, т.е.

$$Y_{j+1} = \varphi_j(X_j, Y_j) \quad j = \overline{1,N}. \qquad (2)$$

Здесь $\varphi_j(X_j, Y_j)$ - заданная функция своих аргументов. Уравнение (2) является уравнением движения объекта, т.е. описывает динамику объекта во времени.

Обозначим $F_j(X_j, Y_j)$ -выигрыш, получаемый от функционирования объекта на *j*-м участке времени, т.е. в полуинтервале $[t_j, t_{j+1})$. Если в момент времени t_1, когда объект находился в состоянии Y_1 выбрать управление $X_1 \in U_1(Y_1)$, то объект перейдет в состояние $Y_2 = \varphi_1(X_1, Y_1)$. Далее последовательно можно выбирать в соответствии с (1) $X_2, X_3, \ldots, X_N$, и из (2) определять $Y_2, Y_3, \ldots, Y_{N+1}$. Этим значениям X_j и Y_j будет соответствовать вполне определенное значение дохода:

$$F = \sum_{j=1}^{N} F_j(X_j, Y_j) \qquad (3)$$

Если выбирать другие значения управляющих воздействий, то им будут соответствовать другие состояния объекта, а следовательно, и другое значение общего дохода (3). Поэтому естественно поставить следующую оптимизационную задачу:

$$F = \sum_{j=1}^{N} F_j(X_j, Y_j) \Rightarrow \max \qquad (4)$$

$$Y_{j+1} = \varphi_j(X_j, Y_j) \quad j = \overline{1, N}. \qquad (5)$$

$$X_j \in U_j(Y_j), \quad j = \overline{1, N} \qquad (6)$$

$$Y_1 \text{- задан.} \qquad (7)$$

Здесь необходимо найти неизвестные X_j и Y_j, которые удовлетворяли бы ограничениям (5)-(7) и максимизировали бы целевую функцию (4).

Эта задача является в общем случае задачей нелинейного программирования и обладает следующими особенностями:

1. Искомые переменные разбиты на N групп, в каждую j-тую из которых входят только X_j и Y_j.
2. Целевая функция (4) является суммой функций $F_j(X_j, Y_j)$, каждая из которых зависит лишь от переменных соответствующей группы. В этом случае говорят, что целевая функция сепарабельна, или аддитивна.
3. Уравнение (5) является рекуррентным, т.е. через значения X_j и Y_j однозначно определяется Y_{j+1}.

Многие реальные задачи ИСО сводятся к ММ вида (4)-(7), которая допускает различные интерпретации.

Решение задачи вида (4)-(7) обычными методами оказывается либо невозможным, либо неэффективным из-за большой размерности. Поэтому ее решение сводится к последовательному решению N связанных между собой задач меньшей размерности. Для выявления этих задач и связей между ними рассмотрим задачу вида (4)-(7), соответствующую последним этапам $j=\overline{s,N}$. Она запишется в виде:

$$F=\sum_{j=s}^{N}F_j(X_j,Y_j)\Rightarrow\max \qquad (8)$$

$$Y_{j+1}=\varphi_j(X_j,Y_j) \quad j=\overline{s,N}. \qquad (9)$$

$$X_j\in U_j(Y_j), \quad j=\overline{s,N} \qquad (10)$$

Y_s - фиксирован. (11)

В этой задаче мы не знаем, чему равно конкретное значение Y_s, но если его зафиксировать, то получим соответствующее максимальное значение (8). Если зафиксировать другое значение Y_s, то естественно максимальное значение целевой функции (8) будет другим. Обозначим максимальное значение целевой функции (8)при некотором зафиксированном Y_s через $f_s(Y_s)$:

$$f_s(Y_s)=\max_{\substack{X_j,Y_j\\(9)-(11)}}\sum_{j=s}^{N}F_j(X_j,Y_j)$$

Запишем это равенство в виде:

$$f_s(Y_s)=\max_{\substack{X_j,Y_j\\(9)-(11)}}\left[F_s(X_s,Y_s)+\sum_{j=s+1}^{N}F_j(X_j,Y_j)\right] \qquad (12)$$

Здесь первое слагаемое $F_s(X_s,Y_s)$ не зависит от $X_j,Y_j \quad j=\overline{s+1,N}$, а вторая сумма функций зависит от X_s,Y_s. Поэтому выражение (12) можно переписать в виде:

$$f_s(Y_s) = \max_{\substack{X_s, Y_s \\ X_s \in U_s(Y_s) \\ Y_s - фикс}} \left[F_s(X_s, Y_s) + \max_{\substack{X_j, Y_j \\ (9)-(11) \\ Y_{s+1} = \varphi_s(X_s, Y_s) - фикс}} \sum_{j=s+1}^{N} F_j(X_j, Y_j) \right] =$$

$$= \max_{\substack{X_s, Y_s \\ X_s \in U_s(Y_s) \\ Y_s - фикс}} \left[F_s(X_s, Y_s) + f_{s+1}(Y_{s+1}) \big|_{Y_{s+1} = \varphi_s(X_s, Y_s)} \right]$$

Таким образом окончательно запишем:

$$f_s(Y_s) = \max_{\substack{X_s, Y_s \\ X_s \in U_s(Y_s) \\ \forall Y_s - фикс}} \left\lfloor F_s(X_s, Y_s) + f_{s+1}(Y_{s+1}) \big|_{Y_{s+1} = \varphi_s(X_s, Y_s)} \right\rfloor \qquad s = \overline{1, N-1} \quad (13)$$

Данное соотношение справедливо для всех $s = \overline{1, N-1}$, а для $s = N$ имеем:

$$f_N(Y_N) = \max_{\substack{X_N \in U_N(Y_N) \\ \forall Y_N - фикс}} F_N(X_N, Y_N) \qquad (14)$$

Полученные рекуррентные соотношения (13), (14) являются основными соотношениями МДП. Это так называемые соотношения Беллмана. Они позволяют свести решение ЗНП (4)-(7) к последовательному решению N задач максимизации меньшей размерности.

Соотношение (13) позволяет вычислить $f_s(Y_s)$, если известно $f_{s+1}(Y_{s+1})$, а (14) позволяет вычислить максимальное значение целевой функции на последнем этапе. Тогда рекуррентный процесс решения задачи (13)-(14) должен проводиться в порядке $s = N, N-1, \ldots, 1$. Действительно, зная $f_N(Y_N)$ из (13) можно найти значения $f_{N-1}(Y_{N-1})$ и т.д.

Рассмотрим алгоритм решения такой задачи.

1 шаг. Решается задача (14):

$$f_N(Y_N) = \max_{\substack{X_N \in U_N(Y_N) \\ \forall Y_N - фикс}} F_N(X_N, Y_N).$$

Решается столько однотипных задач, сколько существует возможных значений фиксированных Y_N. Здесь максимизируется функция $F_N(X_N, Y_N)$ по переменной $X_N \in U_N(Y_N)$ для каждого возможного фиксированного значения Y_N.

Решается столько однотипных задач, сколько существует возможных значений фиксированных Y_N. Поэтому для каждого Y_N в результате получаются условные точки максимума $X*_N\,(Y_N)$ и максимальное значение функции $f_N(Y_N) = F_N(X*_N, Y_N)$ в этих точках.

2 шаг. На этом шаге решается задача (13) при $s = N-1$:

$$f_{N-1}(Y_{N-1}) = \max_{\substack{X_{N-1}\in U_{N-1}(Y_{N-1}) \\ \forall Y_{N-1}-фикс}} \left\lfloor F_{N-1}(X_{N-1}, Y_{N-1}) + f_N(Y_N)\,|_{Y_N=\varphi_{N-1}(X_{N-1}, Y_{N-1})} \right\rfloor$$

Здесь решаются задачи максимизации функции $F_{N-1}(X_{N-1}, Y_{N-1}) + f_N(Y_N)$ по переменной $X_{N-1} \in U_{N-1}(Y_{N-1})$ при каждом возможном фиксированном значении Y_{N-1}. В результате находятся условные точки максимума $X*_{N-1}\,(Y_{N-1})$ и значения суммы двух функций в этих точках $f_{N-1}(Y_{N-1})$.

Далее, зная $f_{N-1}(Y_{N-1})$, решается задача (13) для $s = N-2, N-3, \ldots, 2$. Наконец, при $s = 1$ переходим к шагу N:

N шаг. $s = 1$, $f_1(Y_1) = \max\limits_{\substack{X_1\in U_1(Y_1) \\ Y_1-задан}} \left\lfloor F_1(X_1, Y_1) + f_2(Y_2)\,|_{Y_2=\varphi_1(X_1, Y_1)} \right\rfloor$. На этом шаге решается только одна задача оптимизации, т.к. Y_1- задан. В результате получим точку максимума $X*_1\,(Y_1)$ и значение $f_1(Y_1)$.

Для окончательного решение проводим обратное движение алгоритма:

1 шаг: $X*_1 = X*_1\,(Y_1)$; $Y*_2 = \varphi_1(X*_1, Y_1)$.

2 шаг: $X*_2 = X*_2\,(Y_2)\,|_{Y_2=Y*_2}$; $Y*_3 = \varphi_2(X*_2, Y*_2)$.

3 шаг: $X*_3 = X*_3\,(Y_3)\,|_{Y_3=Y*_3}$; $Y*_4 = \varphi_3(X*_3, Y*_3)$.

…

N шаг: $X*_N = X*_N\,(Y_N)\,|_{Y_N=Y*_N}$; $Y*_{N+1} = \varphi_N(X*_N, Y*_N)$.

$$f_1(Y_1) = \sum_{j=1}^{N} F_j(X*_j, Y*_j).$$

Таким образом, определяется решение исходной ЗНП (4)-(7) как $X*_j, Y*_j$, при этом максимальное значение целевой функции (4) будет равно значению $f_1(Y_1)$.

Достоинства метода динамического программирования.

1. На каждом этапе решается задача поиска экстремума лишь по части переменных, следовательно, размерность этих задач по сравнению с исходной значительно ниже. Это позволяет упростить поиск оптимальных значений искомых переменных.
2. Метод ДП дает возможность решать задачи, которые не могут быть решены другими методами.
3. Алгоритм метода ДП легко реализуется на ЭВМ.

Недостатки метода ДП.

1. Отсутствие универсального алгоритма, который был бы пригоден для решения всех задач рассматриваемого класса. Алгоритмы ДП объединены лишь общей идеей, и в каждом конкретном случае должны формироваться применительно к специфике прикладной задачи.
2. При большой размерности исходной задачи эти алгоритмы требуют значительных ресурсов ЭВМ.

Лекция №7.

Задача о загрузке рюкзака (задача о ранце).

<u>*Постановка задачи.*</u> Пусть имеются N видов грузов с номерами $j = \overline{1, N}$.

Единица груза j-го вида имеет вес a_j. Если груз j-го вида берется в количестве x_j, то его ценность в общем случае составляет $F_j(x_j)$. Имеется «рюкзак», грузоподъемность которого равна B. Требуется загрузить рюкзак имеющимися грузами таким образом, чтобы вес его был не больше заданного B, а ценность «рюкзака» была максимальной.

<u>*Составим Мат. Модель*</u> задачи. Пусть x_j – количество груза j-го вида, помещаемого в рюкзак. Тогда можно записать:

$$F = \sum_{j=1}^{N} F_j(x_j) \Rightarrow \max \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_j x_j \le B \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (3)$$

Здесь x_j могут быть и целыми числами. В общем случае это задача нелинейного программирования с сепарабельной целевой функцией, следовательно, она м.б. решена методом ДП.

Для этого погрузку «рюкзака» можно интерпретировать как N-этапный процесс принятия решений: на 1-м этапе принимается решение о том, сколько нужно взять груза 1-го вида, на 2-ом этапе – сколько груза 2-го вида и т.д. Такая интерпретация наталкивает на возможность применения для решения задачи (1) – (3) метода динамического программирования. Для этого приведем задачу (1) – (3) к виду (4) – (7) из предыдущей лекции.

Для этого введем обозначения: y_j – вес рюкзака перед погрузкой груза j-го вида или вес рюкзака после погрузки грузов видов 1, 2, …, j – 1.Очевидно, что

$$y_1 = 0. \qquad (4)$$

Текущий вес рюкзака определяется выражением

$$y_{j+1} = y_j + a_j x_j \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (5)$$

Текущий вес рюкзака y_{j+1} в силу (2) удовлетворяет неравенству

$$y_{j+1} \le \text{B}. \qquad (6)$$

Очевидно ограничения (4) – (6) эквивалентны ограничению (2), поэтому вместо модели (1) – (3) можно рассматривать модель (1), (3) – (6). Здесь ограничение (6) выводит эту модель за рамки модели (4) – (7) из предыдущей лекции. Для сведения задачи к общему виду задач динамич. программирования, запишем (6) с учетом (5):

$$y_j + a_j x_j \le B \qquad (j = \overline{1, N}).$$

Отсюда следует: $$x_j \le \frac{B - y_j}{a_j},$$

или окончательно с учетом (3):

$$\begin{aligned} & 0 \le x_j \le \frac{B - y_j}{a_j} \qquad (j = \overline{1, N}) \\ & y_j \in [0, B] \end{aligned} \qquad (7)$$

В результате исходная модель (1) – (3) свелась к эквивалентной модели вида

$$F = \sum_{j=1}^{N} F_j(x_j) \Rightarrow \max \qquad (8)$$

$$y_{j+1} = y_j + a_j x_j \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (9)$$

$$0 \le x_j \le \frac{B - y_j}{a_j} \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (10)$$

$$y_1 = 0 \qquad (11)$$

Задача (8)-(11) является частным случаем общей задачи динамического программирования, в которой $\varphi_j = y_j + a_j x_j$, $u_j(y_j) = \left[0, \frac{B - y_j}{a_j}\right]$. Здесь ограничение (9) является рекуррентным и отражает процесс загрузки рюкзака, а неравенство (10) задает область возможных значений x_j.

Рассмотрим решение задачи (8)-(11) методом динамического программирования:

1 шаг. Вычисляется величина

$$f_N(y_N) = \max_{\substack{x_N \in \left[0, \frac{B-y_N}{a_N}\right] \\ \forall y_N \in [0,B] \text{- фикс.}}} F_N(x_N) \qquad (12).$$

В результате решения серии задач максимизации получаем точки максимума F_N $x_N^*(y_N)$ и значения $f_N(y_N) = F_N(x_N^*(y_N))$.

S-тый шаг ($s = \overline{N-1,1}$). Вычисляются величины

$$f_s(y_s) = \max_{\substack{x_s \in \left[0, \frac{B-y_s}{a_s}\right] \\ \forall y_s \in [0,B] \text{- фикс.}}} \left\lfloor F_s(x_s) + f_{s+1}(y_{s+1})\,|_{y_{s+1}=a_s x_s + y_s} \right\rfloor \qquad (13)$$

В результате решения серии задач максимизации, получаем $x_s^*(y_s)$ и $f_s(y_s)$. При s=1 решается только одна задача на максимум, т.к. значение $y_1 = 0$ - задано.

Для определения безусловных точек максимума, т.е. решения исходной задачи, проводим обратное движение алгоритма:

$$x_1^* = x_1^*(y_1), \quad f_1(y_1).$$

Отсюда:

$$y_2^* = y_1 + a_1 x_1^* \quad \Rightarrow \quad x_2^* = x_2^*(y_2)\,|_{y_2 = y_2^*}.$$

Далее: $y_3^* = y_2^* + a_2 x_2^* \Rightarrow x_3^* = x_3^*(y_3)\,|_{y_3 = y_3^*}$. И так далее $x_N^* = x_N^*(y_N)\,|_{y_N = y_N^*}$. Причем $f_1(y_1) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x_j^*)$ есть максимальное значение целевой функции.

Наличие условия целочисленности переменных x_j и a_j упрощает решение задачи. В этом случае $x_j \in \left\{0,1,\ldots,\left[\frac{B-y_j}{a_j}\right]\right\}, y_j \in \{0,1,\ldots,[B]\}$. Здесь [] указывает на то, что берется целая часть числа. Если a_j не целые, то $y_j \in \{0, B\}$.

Вычислительный процесс решения задачи о загрузке «рюкзака» методом динамического программирования можно организовать в противоположном порядке, а именно, рекуррентные соотношения Беллмана составляются в таком виде, что они решаются в порядке s=1, 2, …, N-1, N и далее обратным ходом в порядке s = N, N-1, … определяются оптимальные значения x_s^*.

Процесс загрузки «рюкзака» интерпретируем как N шаговый. На 1-ом шаге в рюкзак помещается груз вида N, далее – груз вида N – 1 и т. д. Необходимо выбрать такой параметр, характеризующий текущее состояние «рюкзака», значение которого перед загрузкой рюкзака было бы известным.

Пусть z_{j+1} – неиспользованный вес рюкзака перед загрузкой его грузом вида j или, что то же самое, после погрузки в «рюкзак» грузов вида N, N-1, …, j+1.

Тогда справедливы соотношения

$$z_j = z_{j+1} - a_j x_j \qquad (j = N, N-1, \dots, 1) \qquad (14)$$

$$z_{n+1} = B$$

Из (14), а также из условия $z_j \geq 0$, следует:

$$z_{j+1} - a_j x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, N})$$

Отсюда с учетом условия $z_j \geq 0$ получается область изменения x_j:

$$0 \leq x_j \leq \frac{z_{j+1}}{a_j} \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (15)$$

Теперь модель задачи о загрузке «рюкзака» запишется:

$$\sum_{j=1}^{N} F_j(x_j) \Rightarrow \max \qquad (16)$$

$$z_j = z_{j+1} - a_j x_j \qquad (j = N, N-1, \dots, 1) \qquad (17)$$

$$0 \leq x_j \leq \frac{z_{j+1}}{a_j} \qquad (j = \overline{1, N}) \qquad (18)$$

$$z_{N+1} = B \qquad (19)$$

Рекуррентные уравнения Беллмана для задачи (16) – (19) будут иметь вид:

$$\lambda_1(z_2) = \max_{\substack{x_1 \in \left[0, \frac{z_2}{a_1}\right] \\ \forall z_2 \in [0, B] \text{ - } \phi.}} F_1(x_1) \qquad (20)$$

$$k = \overline{2, N-1}: \lambda_k(z_{k+1}) = \max_{\substack{x_k \in \left[0, \frac{z_{k+1}}{a_k}\right] \\ \forall z_{k+1} \in [0, B] \text{ - } \phi}} [F_k(x_k) + \lambda_{k-1}(z_k)\,|_{z_k = z_{k+1} - a_k x_k}] \qquad (21)$$

$$\lambda_{\mathrm{N}}(z_{N+1}) = \max_{\substack{x_N \in \left[0, \frac{z_{N+1}}{a_N}\right] \\ z_{N+1}=B}} [F_N(x_N) + \lambda_{N-1}(z_N)|_{z_N = z_{N+1} - a_N x_N}] \qquad (22)$$

Решение задачи (16) – (19) получается путем последовательной оптимизации (20) –(22). В результате находятся условные точки максимума $x_j^*(z_{j+1})$. Так как z_{N+1}=B, то в результате обратного движения определяются оптимальные значения x_j^* на цепочке $z_{N+1}=B \Rightarrow x_N^* = x_N^*(z_{N+1}) \Rightarrow z_N^* = z_{N+1}^* - a_N x_N^* \Rightarrow x_{N-1}^* = x_{N-1}^*(z_N^*) \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1^*(z_2^*)$. При этом значение целевой функции совпадет со значением $\lambda_{\mathrm{N}}(z_{N+1})$:

$$\lambda_{\mathrm{N}}(z_{N+1}) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x_j^*).$$

Пример:

Постановка задачи:

Имеется свободный капитал в размере 4 млн. у.е. Этот капитал может быть распределен между 4-мя предприятиями, причем распределение осуществляется только целыми частями (0, 1, 2, 3 или 4 млн. у.е.). Прибыль, получаемая каждым предприятием при инвестировании в него определенной суммы, указана в таблице.

Капитал / Предпр.	0 млн. у.е.	1 млн. у.е.	2 млн. у.е.	3 млн. у.е.	4 млн. у.е.
1-е предпр.	0	10	17	25	36
2-е предпр.	0	11	16	25	35
3-е предпр.	0	10	18	24	34
4-е предпр.	0	9	19	26	35

Требуется распределить инвестиции между предприятиями из условия максимальной общей прибыли.

Построение ММ.

Обозначим: x_j- количество капиталовложений, выделенных *j*-тому предприятию ($j = \overline{1,4}$). Тогда прибыль, записанная в таблице, можно обозначить как $F_j(x_j)$ ($j = \overline{1,4}$). Например, $F_1(0)=0$; $F_1(1)=10$; $F_1(2)=17$ и т.д. .... $F_2(0)=0$; $F_2(1)=11$; $F_4(4)=35$.

Тогда математическая модель примет вид:

$$\sum_{j=1}^{4} F_j(x_j) \Rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_j \le 4$$

$$x_j \ge 0 \text{ – целые, } (j = \overline{1,4})$$

Данная модель является частным случаем задачи о загрузке рюкзака, где N=4, B=4, a_j=1 ($j = \overline{1,4}$). Введя новую переменную y_j- израсходованные средства до выделения капиталовложений j-тому предприятию, приведем исходную модель к виду ЗДП:

$$\sum_{j=1}^{4} F_j(x_j) \Rightarrow \max$$

$$y_{j+1} = y_j + x_j; \ (j = \overline{1,4})$$

$$y_1 = 0;$$

$$x_j \in [0; 4 - y_j]; \ \ (j = \overline{1,4})$$

Решение задачи проведем в соответствии с алгоритмом динамического программирования:

1 шаг.

$$f_4(y_4) = \max_{\substack{x_4 \in [0,4-y_4] \\ \forall y_4 \in [0,4] \text{- фикс.}}} F_4(x_4)$$

1) Зафиксируем y_4=0. Тогда допустимые значения $x_4 \in$[0, 4-0]=[0,1,2,3,4].

   1.1) x_4=0. Тогда $F_4(0)$=0.

   1.2) x_4=1. $F_4(1)$=9.

   1.3) x_4=2. $F_4(2)$=19.

   1.4) x_4=3. $F_4(3)$=26

   1.5) x_4=4. $F_4(4)$=35.

   Максимальное значение $f_4(0) = 35$, и достигается оно при x_4=4. Таким образом, заполняется первая строчка таблицы.

2) Зафиксируем y_4=1. Тогда допустимые значения $x_4 \in$[0, 4-1]= [0,1,2,3].

2.1) $x_4=0$. Тогда $F_4(0)=0$.

2.2) $x_4=1$. $F_4(1)=9$.

2.3) $x_4=2$. $F_4(2)=19$.

2.4) $x_4=3$. $F_4(3)=26$

Максимальное значение $f_4(1)=26$, и достигается оно при $x_4=3$. Таким образом, заполняется вторая строка таблицы.

Далее аналогично фиксируем $y_4=2$, $y_4=3$, $y_4=4$. Заполняем оставшиеся строки таблицы.

Таблица шага №1.

y_4 \ x_4	0	1	2	3	4	$f_4(y_4)$	$x_4(y_4)$
0	0	9	19	26	35	35	4
1	0	9	19	26	-	26	3
2	0	9	19	-	-	19	2
3	0	9	-	-	-	9	1
4	0	-	-	-	-	0	0

2 шаг.

$$f_3(y_3) = \max_{\substack{x_3\in[0,4-y_3] \\ \forall y_3\in[0,4]\text{ - фикс.}}} \left\lfloor F_3(x_3) + f_4(y_4)|_{y_4=y_3+x_3} \right\rfloor$$

1) Зафиксируем $y_3=0$. Тогда допустимые значения $x_3\in[0, 4-0]=[0,1,2,3,4]$.

1.1) $x_3=0$. Тогда $F_3(0)=0$. Определим значение второго слагаемого: $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3}$ при $y_3=0$ и $x_3=0$. Найдем $y_4=0+0=0$. Тогда, обратившись к таблице шага 1, увидим, что $f_4(0)=35$. Следовательно, $F_3(0)+ f_4(0)=0+35=35$. Этот результат заносим в таблицу шага 2 в ячейку, соответствующую $y_3=0$ и $x_3=0$.

1.2) $x_3=1$. Аналогично: $F_3(1)=10$. Найдем $y_4= y_3+ x_3=0+1=1$. Из таблицы шага 1 определим: $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3} = f_4(1)=26$. Сумма

$F_3(1)+ f_4(1)=10+26=36$.

1.3) $x_3=2$. $F_3(2)=18$. $y_4=0+2=2$. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3}=f_4(2)=19$. Тогда $F_3(2)+f_4(2)=18+19=37$.

1.4) $x_3=3$. $F_3(3)=24$, $y_4=0+3=3$. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3}=f_4(3)=9$. Тогда

$F_3(3)+f_4(3)=24+9=33$.

1.5) $x_3=4$. $F_3(4)=34$. $y_4=0+4=4$. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3}=f_4(4)=0$. Тогда

$F_3(4)+f_4(4)=34+0=34$.

Максимальное значение $f_3(0)=37$, и достигается оно при $x_3=2$. Первая строчка таблицы заполнена.

2) Зафиксируем $y_3=1$. Тогда допустимые значения $x_3\in[0, 4-1]=[0,1,2,3]$.

2.1) $x_3=0$. $F_3(0)=0$. $y_4=1+0=1$. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3}=f_4(1)=26$. Тогда

$F_3(0)+f_4(1)=0+26=26$.

2.2) $x_3=1$. $F_3(1)=10$. $y_4=1+1=2$. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3}=f_4(2)=19$. Тогда

$F_3(1)+f_4(2)=10+19=29$.

2.3) $x_3=2$. $F_3(2)=18$. $y_4=1+2=3$. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3}=f_4(3)=9$. Тогда

$F_3(2)+f_4(3)=18+9=27$.

2.4) $x_3=3$. $F_3(3)=24$ $y_4=1+3=4$. $\Rightarrow$ $f_4(y_4)|_{y_4=x_3+y_3}=f_4(4)=0$. Тогда

$F_3(3)+f_4(4)=24+0=24$.

Максимальное значение $f_3(1)=29$, и достигается оно при $x_3=1$. Таким образом, заполняется вторая строка таблицы.

3) Зафиксируем $y_3=2$. Тогда допустимые значения $x_3\in[0, 4-2]=[0,1,2]$.

3.1) $x_3=0$. $F_3(0)=0$. $y_4=2+0=2$. $\Rightarrow f_4(2)=19$. $F_3(0)+f_4(2)=0+19=19$.

3.2) $x_3=1$. $F_3(1)=10$. $y_4=2+1=3$. $\Rightarrow$ $f_4(3)=9$. $F_3(1)+f_4(3)=10+9=19$.

3.3) $x_3=2$. $F_3(2)=18$. $y_4=2+2=3$. $\Rightarrow$ $f_4(4)=0$. $F_3(2)+f_4(4)=18+0=18$.

Максимальное значение $f_3(2) = 19$ достигается при двух возможных значениях x_3: $x_3=1$ и $x_3=0$. В таблицу можно занести любое из них. Таким образом, заполняется третья строка таблицы.

Далее аналогично фиксируем $y_3=3$, $y_3=4$. Заполняем оставшиеся строки таблицы.

Таблица шага №2.

y_3 \ x_3	0	1	2	3	4	$f_3(y_3)$	$x_3(y_3)$
0	35	36	37	33	34	37	2
1	26	29	27	24	-	29	1
2	19	19	18	-	-	19	0 (или 1)
3	9	10	-	-	-	10	1
4	0	-	-	-	-	0	0

<u>3 шаг.</u>

$$f_2(y_2) = \max_{\substack{x_2 \in [0, 4-y_2] \\ \forall y_2 \in [0,4] \text{- фикс.}}} \left\lfloor F_2(x_2) + f_3(y_3)\,|_{y_3 = y_2 + x_2} \right\rfloor$$

Все вычисления производятся аналогично шагу 2. Не останавливаясь более подробно на этапах решения подзадачи данного шага, приведем получившуюся в результате таблицу.

Таблица шага №3.

y_2 \ x_2	0	1	2	3	4	$f_2(y_2)$	$x_2(y_2)$
0	37	40	35	35	35	40	1
1	29	30	26	25	-	30	1
2	19	21	16	-	-	21	1
3	10	11	-	-	-	11	1
4	0	-	-	-	-	0	0

<u>4 шаг.</u>

$$f_1(y_1) = \max_{\substack{x_2 \in [0, 4-y_1] \\ y_1 = 0}} \left\lfloor F_1(x_1) + f_2(y_2)\,|_{y_2 = y_1 + x_1} \right\rfloor$$

Последний шаг интересен тем, что здесь решается единственная задача максимизации при заданном y_1=0.

y_1=0. Следовательно $x_1 \in$[0, 4-0]= [0,1,2,3,4]. Выполняя все действия, аналогично предыдущим шагам, получим таблицу последнего шага, состоящую из единственной строки, соответствующей y_1=0.

Таблица шага №4.

y_1 \ x_1	0	1	2	3	4	$f_1(y_1)$	$x_1(y_1)$
0	40	40	38	36	36	40	0 (или 1)

Далее проводим обратное движение алгоритма:

1) y_1=0, x_1*=0, $\Rightarrow$ y_2*= y_1+ x_1*=0+0=0.
2) Определяем значение x_2* из таблицы шага № 3 по найденному y_2*=0. Значению y_2= y_2*=0 соответствует значение $x_2(y_2)$=1. Следовательно, x_2*=1. Далее можно определить y_3*= y_2*+ x_2*=0+1=1.
3) Аналогично, обращаясь к таблице шага №2, найдем: x_3*= x_3(1)=1, $\Rightarrow$

   y_4*= y_3*+ x_3*=1+1=2.
4) Из таблицы шага №1 : x_4*= x_4(2)=2.

Окончательно имеем: первому предприятию средства не выделяются (x_1*=0), второму выделяется 1 млн. у.е. (x_2*=1), третьему предприятию – 1 млн. у.е. (x_3*=1), и четвертому – 2 млн. у.е. (x_4*=2). При этом значение целевой функции (общая прибыль по всем 4-м предприятиям) составит:

$$\sum_{j=1}^{4} F_j(x_j^*) = f_1(y_1) = 40.$$

Лекция №8.

Элементы теории игр.

В предыдущих разделах изучаемого курса были рассмотрены задачи принятия решений в детерминированных ситуациях, или в неопределенных ситуациях, вызванных наличием случайных факторов с известными вероятностными характеристиками. Однако существуют реальные задачи, в которых необходимо принимать решения в таких неопределенных ситуациях, когда известны лишь области возможных значений неопределенных факторов, но неизвестны их законы распределения. Такие ситуации возникают тогда, когда в операции кроме оперирующей стороны принимают участи лица или автоматы, преследующие отличные от оперирующей стороны цели. Такие ситуации называются конфликтными. Необходимость анализа этих ситуаций при принятии решения потребовала разработку специального математического аппарата, получившего название «Теория игр». Задача теории игр – выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников конфликта.

Основные понятия и определения.

Любая реальная конфликтная ситуация бывает очень сложной, ее анализ затруднен из-за наличия многих второстепенных факторов. Чтобы сделать возможным математический анализ ситуации, необходимо отвлечься от второстепенных факторов и построить упрощенную, схематизированную модель ситуации. Такая модель называется **ИГРОЙ.**

Игры бывают **ПАРНЫЕ** и **МНОЖЕСТВЕННЫЕ.** В первом случае число участников равно двум, во втором – более двух. Участники множественной игры могут образовывать КОАЛИЦИИ (постоянные или временные), когда их цели совпадают. Игра с двумя постоянными коалициями превращается в парную. Наибольшее практическое значение имеют парные игры.

Пусть имеется парная игра, в которой участвуют два игрока A и B с противоположными интересами. Под ИГРОЙ понимается мероприятие, состоящее из ряда действий, или ходов, сторон А и В. Каждая партия в игре заканчивается выигрышем только одного из игроков.

Чтобы игра могла быть подвергнута математическому анализу, необходимо четко сформулировать ПРАВИЛА ИГРЫ, под которыми понимается система условий, регламентирующая:

1. возможные варианты действий игроков;
2. объем информации каждой стороны о поведении другой;
3. исход игры, к которому приводит каждая совокупность ходов.

Исход игры должен оцениваться КОЛИЧЕСТВЕННО. Если это не вытекает из сути игры, то можно условно выразить исход игры числом. Например, в шахматной игре выигрышу приписывается значение 1, проигрышу – 0, ничьей – 0,5.

Игра называется ИГРОЙ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ, если один игрок выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой, т.е. сумма выигрышей сторон равна нулю. Таким образом, в игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны. Если a- выигрыш игрока А, b- выигрыш игрока В, то $\boxed{a+b=0}$, следовательно $\boxed{a=-b}$. Поэтому при анализе такой игры достаточно рассмотреть выигрыш одного из игроков. Пример игры с нулевой суммой – шахматная игра, а игры с ненулевой суммой – карточная игра с банкиром, который держит банк и забирает часть выигрыша себе.

Игра по времени разворачивается в виде последовательности ХОДОВ. Ходом в теории игр называется выбор одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление. Ходы бывают ЛИЧНЫЕ и СЛУЧАЙНЫЕ. При личном ходе игрок сам принимает решение об осуществлении одного из возможных вариантов действий. При случайном ходе такое решение принимается на основе какого-либо механизма случайного выбора (бросание монеты, выбор карты из перетасованной колоды, датчик случайных чисел и т.п.). Некоторые игры состоят только из случайных ходов (чисто азартные игры), или только из личных ходов (шахматы и т.д.), либо содержат как личные, так и случайные ходы (карточные игры).

Теория игр занимается анализом только тех игр, которые содержат личные ходы. Ее задача – дать рекомендации игрокам при выборе их личных ходов в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

СТРАТЕГИЕЙ игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока в зависимости от сложившейся ситуации. Обычно, принимая участие в игре, игрок не следует каким-либо жестким, фиксированным правилам: выбор при каждом личном ходе принимается им в ходе игры в зависимости от конкретной сложившейся ситуации. Однако теоретически дело не изменится, если мы представим себе, что все эти решения приняты игроком заранее («если сложится такая-то ситуация, то я поступлю так-то...»). В принципе это возможно при любой игре. Если такая система решений будет принята, это будет означать, что игрок выбрал определенную стратегию. Теперь он может не участвовать в игре лично, а заменить свое участие списком правил, которые за него будет применять незаинтересованное лицо. Именно так играет в шахматы ЭВМ.

Игра называется КОНЕЧНОЙ, если у каждого игрока имеется только конечное число стратегий, и БЕСКОНЕЧНОЙ, если хотя бы у одного из игроков имеется бесконечное число стратегий.

ЦЕЛЬЮ ТЕОРИИ ИГР является определение оптимальной стратегии для каждого из игроков.

ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИЕЙ игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш (или минимально возможный средний проигрыш).

При выборе этой стратегии основой рассуждения является предположение, что противник по меньшей мере так же разумен, как и мы сами, и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели. Таким образом в теории игр все рекомендации определяются без учета возможных просчетов и ошибок игроков, а также элементов азарта и риска.

Игра называется игрой с ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ, если результаты случайных ходов и предыдущих личных ходов полностью известны каждому игроку. В противном случае игра является игрой с НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ. Например, шахматы и шашки – игры с полной информацией, а карточные игры – с неполной информацией.

Парная игра с нулевой суммой. Платежная матрица.

Рассмотрим парную конечную игру с нулевой суммой с игрокам А и В, которые имеют конечное число стратегий соответственно A_1, A_2, ... A_m и B_1, B_2, ... B_n. Такая игра называется игрой *mxn*. Исход каждой партии завершается выигрышем одного из игроков.

Обозначим a_{ij}- выигрыш игрока А, если он использует стратегию A_i, а игрок В стратегию B_j. Тогда выигрыш игрока В очевидно равен $b_{ij}=- a_{ij}$, так как игра с нулевой суммой. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь выигрыш одного из игроков. Если игра содержит кроме личных и случайные ходы, то выигрыш a_{ij} есть величина случайная, зависящая от исходов всех случайных ходов. В этом случае оценкой ожидаемого выигрыша является математическое ожидание случайного выигрыша. В дальнейшем будем обозначать a_{ij} как сам выигрыш (в игре без случайных ходов), так и его мат. ожидание (в игре со случайными ходами).

Предположим, что известны a_{ij} для любой пары (A_i B_j). Эти значения записываются в таблицу, называемую ПЛАТЕЖНОЙ МАТРИЦЕЙ.

A_i \ B_j	B_1	...	B_n
A_1	a_{11}		a_{1n}
...			
A_m	a_{m1}		a_{mn}

Построение такой матрицы для игр с большим числом стратегий представляет собой очень сложную задачу. Например, для шахматной игры построение платежной матрицы является невозможным даже для современных ЭВМ.

однако в принципе любая конечная парная игра с нулевой суммой может быть приведена к матричной форме.

Пример 1. Игра «поиск».

Имеется два игрока *A и B,* игрок *A* прячется, а *B* его ищет. В распоряжении игрока *A* имеется два убежища (I и II), любое из которых он может выбрать по своему усмотрению. Условия игры таковы: если *B* найдет *A* в том убежище, где *A* спрятался, то *A* платит ему штраф 1 руб.; если *B* не найдет *A* (т. е. будет искать в другом убежище), то он сам должен заплатить *A* такой же штраф. Требуется построить платежную матрицу.

Решение. Игра состоит всего из двух ходов, оба - личные. У нас *(A)* две стратегии:

A_1 — прятаться в убежище I, A_2 — прятаться в убежище II. У противника (B) тоже две стратегии:

B_1 — искать в убежище I, B_2,— искать в убежище II. Модель этой задачи представляется игрой 2x2. Ее матрица имеет, вид табл. 7.1.

Таблица 1

	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	1	-1

На примере этой игры, как она ни элементарна, можно уяснить себе некоторые важные идеи теории игр.

Предположим сначала, что данная игра выполняется только один раз (играется единственная «партия»). Тогда, очевидно, нет смысла говорить о преимуществах тех или других стратегий - каждый из игроков может с равным основанием принять любую из них. Однако при многократном повторении игры положение меняется.

Действительно, допустим, что мы (игрок *A)* выбрали какую-то стратегию (скажем, A_1) и придерживаемся ее. Тогда, уже по результатам первых нескольких партий, противник догадается о нашей стратегии, начнет всегда искать в убежище I и выигрывать. То же будет, если мы выберем стратегию A_2. Нам явно невыгодно придерживаться одной какой-то стратегии; чтобы не оказаться в проигрыше, мы должны чередовать их. Однако, если мы будем чередовать убежища I и II в какой-то определенной последовательности (скажем, через одну партию), противник тоже догадается об этом и ответит наихудшим для нас образом. Очевидно, надежным способом, гарантирующим нас от верного проигрыша, будет такая организация выбора в каждой партии, когда мы сами его наперед не знаем. Например, можно бросить монету, и, если выпадет герб, выбрать убежище I, а если решка - убежище II.

Оригинальное положение, в котором оказался игрок *A* (чтобы не проигрывать, выбирать убежище случайным образом), очевидно, присуще не только ему, но и его противнику *B*, для которого справедливы все вышеприведенные рассуждения. Оптимальной стратегией каждого оказывается «смешанная» стратегия, в которой возможные стратегии игрока чередуются случайным образом, с одинаковыми вероятностями.

Таким образом, мы подошли к одному из существенных понятий теории игр - к понятию смешанной стратегии, то есть такой, в которой отдельные «чистые» стратегии чередуются случайным образом с какими-то вероятностями. В данном примере из соображений симметрии ясно, что стратегии A_1 и A_2 должны применяться с одинаковыми вероятностями; в более сложных примерах решение может быть далеко не тривиальным.

Пример 2. Игра «вооружение и самолет».

В нашем распоряжении имеются три вида вооружения: A_1, A_2., A_3; у противника - три вида самолетов: B_1, B_2, B_3. Наша задача - поразить самолет; задача противника - сохранить его непораженным. Наш личный ход - выбор типа вооружения; личный ход противника - выбор самолета для боевых действий. В данной игре имеется еще и случайный ход - применение вооружения. Вооружением A_1 самолеты B_1, B_2, B_3 поражаются соответственно с вероятностями 0,5, 0,6, 0,8; вооружением A_2. - с вероятностями 0,9, 0,7, 0,8; вооружением A_3, - *с* вероятностями 0,7, 0,5, 0,6. Построить матрицу игры и проанализировать ситуацию.

Решение. Матрица игры 3х3 имеет следующий вид.

Таблица 2

	B_1	B_2	B_3
A_1	0.5	0.6	0.8
A_2	0.9	0.7	0.8
A_3	0.7	0.5	0.6

где выигрыш - вероятность поражения самолета (мы стремимся его максимизировать, а противник - минимизировать). Станем сначала на точку зрения игрока A и переберем одну за другой все его стратегии. На A_1 противник ответит нам B_1 , и мы выиграем 0,5; на A_3 – B_2, и мы выиграем 0,7; на A_3 - снова B_2, и мы выиграем1ё 0,5. Очевидно, некоторое преимущество над другими имеет стратегия A_2 - при ней мы выиграем больше, а именно 0,7.

Станем теперь на точку зрения противника. Пусть он выбирает B_1-мы отвечаем ему A_2., и он отдает 0,9; на B_2 мы отвечаем ему A_2., и он отдает 0,7; на B_3 – A_3, и он отдает 0,8. Естественно, он предпочтет B_2, чтобы отдать только 0,7.

Мы видим, что в данном примере стратегии A_2. и B_2 с выигрышем 0,7 являются наивыгоднейшими сразу для обеих сторон; игроку A выгоднее всего выбирать стратегию A_2, игроку B - стратегию B_2, и максимальный выигрыш A совпадает с минимальным проигрышем B. Достигнуто как бы положение равновесия: если A выберет стратегию A_2., то B не может найти лучшего выхода, чем B_2, и наоборот: если B выберет стратегию B_2, то A не может найти лучшего выхода, чем A_2.

В дальнейшем мы увидим, что пара стратегий, обладающих таким свойством, являются оптимальными стратегиями сторон и образуют так называемое решение игры.

Лекция №9.

Решение игры $(m \times n)$ среди чистых стратегий.

Рассмотрим игру $(m \times n)$ с платёжной матрицей:

B_j \ A_i	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	α_1
$\vdots$						$\vdots$
A_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}	α_i
$\vdots$						$\vdots$
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	α_m
	β_1	...	β_j	...	β_n	

$$\alpha_i = \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

$$\beta_j = \max_{1 \le i \le m} a_{ij}$$

Если каждый из игроков выбирает одну из своих стратегий и в дальнейшем в процессе игры не может её менять, то говорят, что игрок применяет чистую стратегию. Необходимо определить наилучшие чистые стратегии игроков A и B, которые в дальнейшем будут применяться постоянно. Под наилучшей чистой стратегией понимается стратегия, которая приносит игроку A максимально возможный выигрыш (игроку B минимально возможный проигрыш).

Вначале найдём наилучшую чистую стратегию игрока A. Пусть он использует чистую стратегию A_i. Какой при этом у него будет гарантированный выигрыш? Очевидно, это будет зависеть от того, какую стратегию использует игрок B. Он может применять самую невыгодную для игрока A стратегию. Следовательно, гарантированный выигрыш игрока A будет равен

$$\alpha_i = \min_{1 \le j \le n} a_{ij}.$$

Но, так как он сам выбирает какую чистую стратегию использовать, то он будет применять ту чистую стратегию, которая даёт ему наибольший гарантированный выигрыш. Для этого ему нужно среди значений α_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ найти наибольший выигрыш $\alpha = \max\limits_{1\le i\le m} \alpha_i$. Таким образом, гарантированный выигрыш игрока A вычисляется как максимин на платёжной матрице:

$$\alpha = \max_{1\le i\le m} \alpha_i = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij} \tag{1}$$

Пусть максимум по i в выражении (1) достигается при $i = l$, то есть $\alpha = \alpha_l = \max\limits_{1\le i\le m} \alpha_i$.

Тогда стратегия A_l является наилучшей чистой стратегией игрока A, и она называется МАКСИМИННОЙ стратегией, которая даёт игроку A наибольший гарантированный выигрыш.

Величина α называется нижней ценой игры. При максиминной стратегии A_l игрок A гарантирует себе выигрыш не меньший α при любом поведении противника, поэтому величина α и называется «нижней ценой игры».

Теперь найдём наилучшую чистую стратегию игрока B. Допустим он использует свою стратегию B_j. Его проигрыш будет зависеть от действий игрока A, который может применить стратегию, дающую ему наибольший выигрыш. Поэтому гарантированный проигрыш игрока B будет равен

$$\beta_j = \max_{1\le i\le m} a_{ij}$$

Естественно игрок B будет выбирать ту стратегию, которая обеспечит ему минимальный проигрыш. Величина гарантированного минимального проигрыша определяется как

$$\beta = \min_{1\le j\le n} \beta_j = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} a_{ij} \tag{2}$$

Пусть минимум по j в выражении (2) достигается при $j = k$. Тогда стратегия B_k является наилучшей чистой стратегией игрока B. Она называется МИНИМАКСНОЙ стратегией, а величина проигрыша игрока β – верхней ценой игры.

Можно показать, что для любой платёжной матрицы $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ справедливо $\alpha \le \beta$.

B_j \ A_i	B_1	…	B_k	…	B_h	…	B_n
A_1							
$\vdots$							
A_l			a_{lk}	…	a_{lh}		
$\vdots$			$\vdots$				
A_s			α_{sk}				
$\vdots$							
A_m							

Действительно, пусть имеется матрица $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, для которой вычислены

$$\alpha = a_{lh} = \max_i \min_j a_{ij},$$

$$\beta = a_{sk} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Элемент a_{lh} является минимальным элементом строки l, поэтому имеет место неравенство $a_{lh} \le a_{lk}$.

С другой стороны элемент a_{sk} является максимальным элементом столбца k, поэтому имеет место неравенство $a_{lk} \le a_{sk}$. Объединяя эти неравенства, получим неравенство вида

$$a_{lh} \le a_{lk} \le a_{sk} \text{ или } a_{lh} \le a_{sk}.$$

Последнее неравенство означает, что

$$\boxed{\alpha \le \beta}$$

Вычислим нижнюю и верхнюю цены игры для рассмотренных ранее примеров.

1. Игра в прятки.

B \ A	B_1	B_2	
A_1	-1	1	$\alpha_1 = -1$
A_2	1	-1	$\alpha_2 = -1$

$\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 1$

Нижняя цена игры

α=-1.

Верхняя цена игры

$\beta = 1$.

Следовательно $\alpha < \beta$.

2. Игра «вооружение и самолёты».

B \ A	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,6	0,8	0,5
A_2	0,9	0,7	0,8	0,7
A_3	0,7	0,5	0,6	0,5
β_j	0,9	0,7	0,8	

Нижняя цена игры

$$\alpha = 0,7 .$$

Верхняя цена игры

$$\beta = 0,7 .$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\alpha = \beta .$$

В первом примере $\alpha < \beta$, и мы убедились при анализе этой игры, что наилучшие стратегии игроков будут смешанные стратегии.

Во втором примере $\alpha = \beta$. Анализ игры показал, что наилучшими стратегиями будут чистые стратегии.

Если платёжная матрица игры $(m \times n)$ обладает свойством $\alpha = \beta$, то такая игра называется игрой с седловой точкой. На платёжной матрице такой игры существует элемент

$$a_{lk} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} .$$

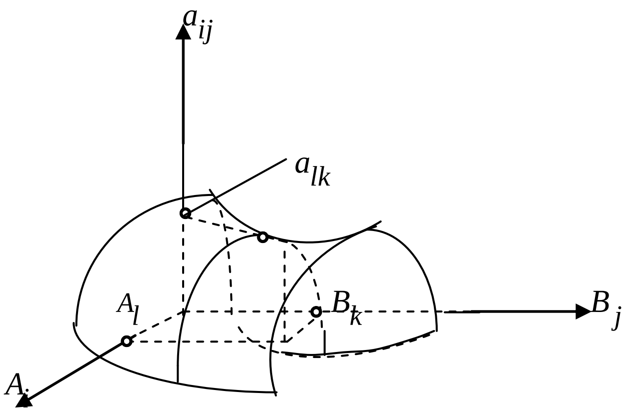
Этот элемент называется седловой точкой, для которой справедливо неравенство

$$a_{ik} \le a_{lk} \le a_{lj}, \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right).$$

Величина $\gamma = \alpha = \beta = a_{lk}$ называется чистой ценой игры. Пара стратегий (A_l, B_k) является оптимальной парой, то есть образует решение игры $(m \times n)$ среди чистых стратегий.

<u>Теорема о седловой точке.</u> Любая конечная парная игра с нулевой суммой и с полной информацией является игрой с седловой точкой.

Например, игры в шашки, шахматы являются конечными, парными играми с нулевой суммой и с полной информацией, поэтому они относятся к играм с седловой точкой.



Графическая интерпретация игры с седловой точкой представлена на рисунке. Если игрок A допускает отклонение от своей оптимальной стратегии A_l, то он ухудшает свое положение, скатываясь по разрезу седла. Аналогично для игрока B, он будет увеличивать выигрыш игрока A, поднимаясь по профилю седла.

Из теоремы о седловой точке следует, что каждая игра с полной информацией имеет седловую точку и следовательно, решение в чистых стратегиях. Другими словами, в каждой игре с полной информацией существует пара оптимальных стратегий той и другой стороны, дающая устойчивый выигрыш, равный чистой цене игры. Если игра с полной информацией состоит только из личных ходов, то при применении каждой стороной своей оптимальной стратегии игра должна кончаться всегда вполне определенным исходом, равным цене игры.

В качестве примера приведем следующую игру с полной информацией. Два игрока поочередно кладут одинаковые монеты на круглый стол, выбирая произвольно положение монеты (взаимное перекрытие монет не допускается). Выигрывает тот, кто положит последнюю монету (когда места для других уже не останется). Нетрудно убедиться, что исход этой игры предрешен, и существует определенная стратегия, обеспечивающая достоверный выигрыш тому из игроков, кто кладет монету первым. А именно, он должен первый раз положить монету в центр стола, а далее на каждый ход противника отвечать симметричным ходом. Очевидно, как бы ни вел себя противник, ему не избежать проигрыша. Поэтому игра имеет смысл только для лиц, не знающих ее решения. Точно так же дело обстоит с шахматами и другими играми с полной информацией; любая из этих игр обладает седловой точкой и, значит, решением, указывающим каждому игроку его оптимальную стратегию, так что игра имеет смысл только до тех пор, пока неизвестно решение. Решение шахматной игры не найдено (и в обозримом будущем вряд ли будет найдено) только потому, что число стратегий (комбинаций ходов) в шахматах слишком велико, чтобы можно было построить платежную матрицу и найти в ней седловую точку.

Лекция №10.

Решение матричной игры ($m \times n$) среди смешанных стратегий.

Теорема об активных стратегиях.

Игры ($m \times n$) с седловой точкой, имеющие практическое значение, встречаются достаточно редко. Более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цены игры различны.

Анализируя платежные матрицы игр ($m \times n$), мы показали, что если каждому игроку предоставить выбор только одной стратегии, то в расчете на разумного противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. При этом игрок A гарантирует себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Возникает вопрос: нельзя ли обеспечить выигрыш больший α, если применять не чистую стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий. Такие стратегии, состоящие в случайном чередовании исходных стратегий, называются смешанными.

При использовании смешанной стратегии перед каждой партией игры пускается в ход какой-то механизм случайного выбора, обеспечивающий появление каждой стратегии с некоторой вероятностью, и затем принимается стратегия, на которую пал жребий.

Смешанные стратегии представляют собой математическую модель гибкой тактики, при которой противник не знает и не может узнать заранее с какой обстановкой ему придется встретиться.

Пусть имеется игра ($m \times n$) без седловой точки. Игрок A имеет стратегии A_i $(i = \overline{1,m})$, а игрок B — стратегии B_j $(j = \overline{1,n})$. Обозначим смешанную стратегию игрока A как $S_A(p_1, p_2, ..., p_m)$, в которой стратегии $A_1, A_2, ..., A_m$ применяются с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_m$ соответственно. Очевидно для этих вероятностей справедливы условия:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad (1)$$
$$p_i \geq 0, (i = \overline{1,m}). \quad (2)$$

Смешанную стратегию игрока B обозначим $S_B(q_1, q_2, ..., q_n)$, в которой стратегии $B_1, B_2, ..., B_n$ применяются с вероятностями $q_1, q_2, ..., q_n$. Они удовлетворяют условиям:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \quad (3)$$
$$q_j \geq 0, (j = \overline{1,n}). \quad (4)$$

Отметим, что смешанных стратегии бесчисленное множество, так как вероятностей $p_i(q_j)$, удовлетворяющих условиям (1)-(2) ((3)-(4)) бесчисленное множество.

Поскольку игроки в партии применяют стратегии случайным образом, то и исход партии будет случайным.

Допустим игроки A и B используют соответственно свои смешанные стратегии S_A и S_B. Тогда среднее значение выигрыша будет равно:

$$J(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \quad (5)$$

Пусть оптимальными смешанными стратегиями игроков A и B будут соответственно:

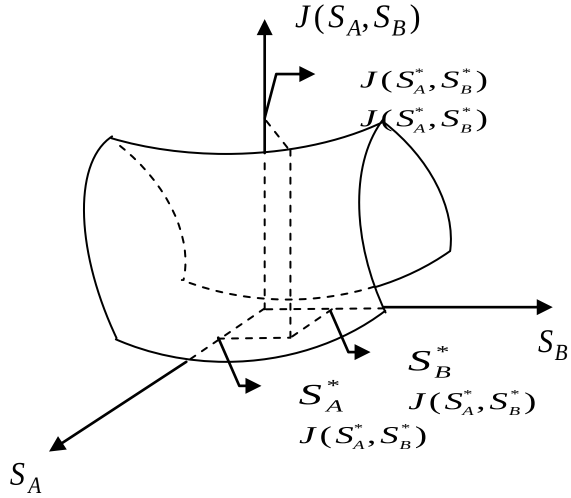
$$S_A^* = S_A^*(p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*) \text{ и } S_B^* = S_B^*(q_1^*, q_2^*, ..., q_m^*)$$

Пара смешанных стратегий (S_A^*, S_B^*) называется оптимальной парой, если ни одному из игроков невыгодно от нее отклоняться, если противник придерживается оптимальной смешанной стратегии. Величина среднего выигрыша $\gamma = J(S_A^*, S_B^*)$ называется ценой игры.

Из определения оптимальной пары (S_A^*, S_B^*) следует неравенство:

$$\underset{\forall S_A}{J(S_A, S_B^*)} \leq J(S_A^*, S_B^*) \leq \underset{\forall S_B}{J(S_A^*, S_B)} \quad (6)$$

Из этого неравенства вытекает, что оптимальная пара (S_A^*, S_B^*) является седловой точкой на платежной функции $J(S_A, S_B)$. Таким образом для определения оптимальной пары смешанных стратегий (S_A^*, S_B^*) необходимо найти седловую точку на платежной функции. Предположим, что найдено решение рассматриваемой игры. В оптимальных смешанных стратегиях некоторые вероятности p_i^* и q_j^* могут быть равными нулю. Это означает, что соответствующие им стратегии не используются. Такие стратегии называются пассивными, а те стратегии, которые входят в оптимальную смешанную стратегию называются активными.



<u>Теорема об активных стратегиях.</u>

Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш) равный цене игры γ независимо от того какие действия предпринимает другой игрок, и если только он не выходит за пределы своих активных стратегий (он может применять активные стратегии либо в чистом виде, либо менять их по любому закону).

<u>Доказательство 1.</u> Пусть найдено решение игры $(m \times n)$ в смешанных стратегиях, в которых первые r стратегий $(r \leq m)$ игрока A и первые s стратегий $(s \leq n)$ игрока B являются активными (это не нарушает общности, так как стратегии всегда можно перенумеровать таким образом, чтобы первыми были активные). Таким образом, известны оптимальные смешанные стратегии

$$S_A^* = S_A^*(p_1^*, p_2^*, ..., p_r^*, 0, ..., 0) \text{ и } S_B^* = S_B^*(q_1^*, q_2^*, ..., q_s^*, 0, ..., 0).$$

Для найденных вероятностей справедливы равенства $\sum_{i=1}^{r} p*_i = 1$ и $\sum_{j=1}^{s} q*_j = 1$.

Выигрыш при этом равен цене игры: $\gamma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j^*$

Выигрыш игрока A, если он пользуется оптимальной смешанной стратегией S_A^*, а игрок B — чистыми стратегиями $B_1, B_2, ..., B_s$, обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$. Из свойства оптимального решения игры следует, что отклонение игрока B от оптимальной стратегии S_B^* может лишь увеличить его проигрыш. Следовательно $\gamma_1 \geq \gamma, \gamma_2 \geq \gamma, ..., \gamma_s \geq \gamma$.

Выразим теперь цену игры γ при оптимальной паре (S_A^*, S_B^*) через выигрыш $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$. Так как в оптимальной смешанной стратегии S_B^* стратегии $B_1, B_2, ..., B_s$ применяются с вероятностями $q_1^*, q_2^*, ..., q_s^*$, то $\gamma = \gamma_1 q_1^* + \gamma_2 q_2^* + ... + \gamma_s q_s^*$. При этом справедливо $\sum_{j=1}^{s} q_j^* = 1$. Сумма $\gamma_1 q_1^* + \gamma_2 q_2^* + ... + \gamma_s q_s^*$ есть средневзвешенное значение величин $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$. Но средневзвешенное значение было бы больше γ, если хотя бы один из выигрышей γ_j был больше γ. Следовательно $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma$.

<u>Доказательство 2.</u> Пусть найдено решение игры $(m \times n)$ в смешанных стратегиях, в которых первые r стратегий $(r \leq m)$ игрока A и первые s стратегий $(s \leq n)$ игрока B являются активными (это не нарушает общности, так как стратегии всегда можно перенумеровать таким образом, чтобы первыми были активные), то есть

$$S_A^*(p_1^*, p_2^*, ..., p_r^*, 0, ..., 0) \text{ и } S_B^*(q_1^*, q_2^*, ..., q_s^*, 0, ..., 0).$$

Очевидно $\sum_{i=1}^{r} p*_i = 1$ и $\sum_{j=1}^{s} q*_j = 1$, при этом цена игры равна:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j^* \qquad (7)$$

Пусть игрок A придерживается своей оптимальной смешанной стратегией S_A^*, а игрок B использует чистую стратегию B_j. Тогда, в силу определения оптимальной пары (S_A^*, S_B^*) можно записать:

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* \geq \gamma \quad (j = \overline{1,s}) \quad (8)$$

Учитывая неравенство (8) можно равенство (7) записать:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j^* = \sum_{j=1}^{s} q_j^* \sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* \geq \sum_{j=1}^{s} q_j^* \gamma = \gamma \quad (9)$$

Соотношение (9) выполнимо только тогда, когда неравенства (8) превращаются в равенства. Отсюда следует, что для любой смешанной стратегии $(q_1, q_2, ..., q_s, 0, ..., 0)$ выполняется равенство $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j = \gamma$.

Основная теорем теории игр. Любая конечная парная игра с нулевой суммой имеет по крайней мере одно решение, возможно в смешанных стратегиях.

Определение оптимальных смешанных стратегий.

В предыдущей лекции было показано, что если матричная игра ($m \times n$) имеет седловую точку, то пару оптимальных стратегий составляют чистые стратегии, определяемые на основе принципа минимакса. Если же игра не имеет седловой точки, то ее решение нужно искать в смешанных стратегиях.

Процесс отыскания оптимальных смешанных стратегий S_A^* и S_B^* является весьма трудоемким, особенно при большой размерности игры. Поэтому целесообразно, если это возможно, предварительно “редуцировать” игру, то есть упростить ее путем сокращения числа стратегий за счет вычеркивания дублирующих и доминируемых строк, а также замены некоторых групп стратегий смешанными стратегиями.

<u>Определение1.</u> Если в платежной матрице $(a_{ij})_{mxn}$ игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующим строкам (столбцам) стратегии называются <u>дублирующими</u>.

<u>Определение2.</u> Если в матрице $(a_{ij})_{mxn}$ элементы $a_{ij} \ge a_{kj}$ $(1 \le i \le m; 1 \le k \le m)\,(k \ne i,\ j = \overline{1,n})$ и $a_{ij} > a_{kj}$ хотя бы для одного номера j, то стратегия A_i называется доминирующей над стратегией A_k.

<u>Определение3.</u> Если в матрице $(a_{ij})_{mxn}$ элементы $a_{ij} \le a_{ik}$ $(i = \overline{1,m}; 1 \le j \le n; 1 \le k \le n;\ \mathrm{j} \ne k,)$ и $a_{ij} < a_{ik}$ хотя бы для одного номера i, то стратегия B_j игрока B называется доминирующей над стратегией B_k.

Естественно, если для какой-то стратегии есть доминирующая или дублирующая стратегии, то их не рассматривают. Это позволяет уменьшить размерность пары ($m \times n$).

<u>Пример.</u> Имеется игра (4×5) с заданной платежной матрицей. Требуется “редуцировать” эту игру. После “редуцирования” она свелась к игре (2×2)

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	7	2	3	4
A_2	3	5	6	8	9
A_3	4	4	2	2	8
A_4	3	6	1	2	4

A \ B	B_1	B_3
A_1	4	2
A_2	3	6

Пусть теперь имеется парная конечная игра ($m \times n$) с нулевой суммой и платежной матрицей $(a_{ij})_{mxn}$ без седловой точки. Игрок A имеет стратегии $A_i\ (i = \overline{1,m})$, а игрок B — стратегии $B_j\ (j = \overline{1,n})$. Необходимо найти решение игры в смешанных стратегиях. То есть оптимальную пару смешанных стратегий $(S_A^* \ (p_i^*, i=\overline{1,m}),\ S_B^* \ (q_j^*, j=\overline{1,n}))$. Здесь p_i^* и q_j^* — вероятности применения стратегий A_i и B_j, которые удовлетворяют условиям $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, p_i^* \ge 0, q_j^* \ge 0$. (S_A^*, S_B^*) соответствует выигрыш, равный цене игры $\gamma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j^*$.

Сначала найдем оптимальную смешанную стратегию S_A^*. Эта стратегия должна обеспечить игроку A выигрыш не меньший γ при любом поведении игрока B, и выигрыш равный γ при его оптимальном поведении.

Допустим, игрок A использует стратегию S_A^*, а игрок B — некоторую стратегию B_j в чистом виде, или $S_B(q_j = 1, q_s = 0, s \ne j, s = \overline{1,n})$. В этом случае игрок A имеет средний выигрыш:

$$\sum_{ij} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \quad j = \overline{1,n}.$$

Поскольку игрок B отклонился от оптимальной стратегии S_B^*, то это может привести лишь к увеличению среднего выигрыша игрока A, следовательно, можно записать:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge \gamma \quad j = \overline{1,n} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1 \qquad (2)$$

$$p_i^* \ge 0, i = \overline{1,m} \qquad (3)$$

Отметим, что выражение (3) превращается в равенство в случае, если все стратегии B_j активны (см. теорему об активных стратегиях). Но так как мы не знаем заранее, все ли B_j активны, то в (1) ставится неравенство.

Цена игры γ есть гарантированный выигрыш игрока A, естественно он будет стремиться максимизировать эту величину, то есть:

$$\gamma \Rightarrow \max \qquad (4)$$

Таким образом задача нахождения решения игры свелась к задаче линейного программирования (1)-(4), в которой необходимо найти вероятности p_i^* удовлетворяющие ограничениям (1)-(3) и максимизирующие целевую функцию (4).

Преобразуем эту ЗЛП к более удобному виду. Для этого предположим, что $a_{ij} > 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Если это условие не выполняется, то прибавляя одну и ту же положительную величину c к элементам платежной матрицы, всегда можно этого добиться. В этом случае цена игры $\gamma > 0$. Такое преобразование не приводит к изменению решения игры, что следует из следующей

<u>Теоремы</u>: Оптимальные смешанные стратегии S_A^* и S_B^* игроков A и B в матричной игре $(a_{ij})_{mxn}$ с ценой игры γ будут оптимальными и в матричной игре $(ba_{ij} + c)_{mxn}$ с ценой игры $\gamma' = b\gamma + c$, где $b > 0,\ c \geq 0$. (Без доказательства).

Теперь, поделив левую и правую части каждого из неравенств (1)-(3) на величину $\gamma > 0$ и обозначив $p_i^* / \gamma = x_i$, преобразуем ЗЛП (1)-(4) к виду:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (5)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (6)$$

$$L = \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \min \qquad (7)$$

Таким образом, определение оптимальной смешанной стратегии S_A^* свелась к ЗЛП (5)-(7). Пусть она решена и найдены оптимальные значения x_i^* $(i = \overline{1,m})$. Тогда с учетом введенного обозначения и вида целевой функции (7) найдем искомые вероятности и максимальный выигрыш игрока A $p_i^* = \gamma \cdot x_i^*$ $(i = \overline{1,m})$, где $\gamma = 1 / \sum_{i=1}^{m} x_i^*$.

Определим оптимальную смешанную стратегию $S_B^* \ (q_j^*,\ j=\overline{1,n})$ игрока B.

Пусть игрок B использует оптимальную стратегию S_B^*, а игрок A — чистую стратегию A_i

игрок A имеет средний выигрыш: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*,\ (i=\overline{1,m})$.

Так как игрок A отклонился от оптимальной смешанной стратегии, то его средний выигрыш может быть только меньше или равен цене игры γ. Поэтому можно записать:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le \gamma \quad i=\overline{1,m} \qquad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1 \qquad (9)$$

$$q_j^* \ge 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (10)$$

Тут, так же, как и в (1), ставим неравенство, так как неизвестно, все ли стратегии игрока А активны.

Игрок B, выбирая свою оптимальную смешанную стратегию S_B^* стремится уменьшить средний выигрыш игрока A. Тогда целевая функция будет иметь вид $\gamma \Rightarrow \min$ (11)

Теперь преобразуем ЗЛП (8)-(11). Для этого разделим левые и правые части выражений (8)-(10) на величину $\gamma > 0$ и введем обозначим $y_j = q_j^* / \gamma$. Тогда ЗЛП (8)-(11) перепишется:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le 1 \quad i=\overline{1,m} \qquad (13)$$

$$y_j \ge 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\gamma}$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \max \qquad (15)$$

Пусть y_j^* решение ЗЛП (13)-(15), тогда из введенных обозначений следует $\gamma = 1/\sum_{j=1}^{n} y_j^*$, $q_j^* = \gamma y_j^*,\ (j=\overline{1,n})$

Таким образом найденная пара оптимальных стратегий (S_A^*, S_B^*), которая является решением игры ($m \times n$) среди смешанных стратегий.

Цена игры γ, которая получается при решении ЗЛП (5)-(7) и (13)-(15) должна быть одной и той же величиной. Будут ли они действительно равны? Положительный ответ на этот вопрос следует из факта, что эти две задачи образуют пару двойственных ЗЛП. Теорема о таких задачах гласит: если одна из ЗЛП двойственной пары имеет решение, то другая задача также имеет решение, причем экстремальные значения целевых функций совпадают.

Покажем, что ЗЛП (13)-(15) имеет решение. Для этого необходимо, чтобы условия (13)-(14) были совместны, то есть имели хотя бы одно решение, а максимизируемая целевая функция была ограничена сверху.

Действительно, ограничения (13)-(14) совместны, так как $y_j = 0,\ j=\overline{1,n}$ удовлетворяют ограничениям (13), (14). Следовательно, множество планов (13), (14) не пустое. В силу условия (13) все значения $y_j, (j=\overline{1,n})$ ограничены сверху, а это означает ограниченность сверху целевой функции (15). Таким образом, ЗЛП (13)-(15) имеет решение. Тогда на основании теоремы о двойственности ЗЛП (5)-(7) тоже имеет решение, причем $\max \sum_{j=1}^{n} y_j = \min \sum_{i=1}^{m} x_i = \dfrac{1}{\gamma}$, то есть в обеих задачах значение цены игры γ одинаковые.

Теорема. Любая парная конечная игра с нулевой суммой имеет решение по крайне мере среди смешанных стратегий.

Если в результате решения задач (5)-(7) и (13)-(15) найдены оптимальные смешанные стратегии игроков А и В S^*_A и S^*_B, и при этом все их стратегии активны ($p_i^* > 0 \quad i = \overline{1,m}$ и $q_j^* > 0 \quad \mathrm{j} = \overline{1,n}$), то такая игра называется ПОЛНОСТЬЮ УСРЕДНЕННОЙ. В этом случае решение S^*_A и S^*_B обращает неравенства (1) и (8) в строгие равенства согласно теореме об активных стратегиях. Если же в оптимальной паре (S^*_A,S^*_B) присутствуют неактивные стратегии ($\exists p_i^* = 0$ или $\exists q_j^* = 0$), то игра называется не полностью усредненной, и оптимальные решения обращают (1) или (8) в строгое неравенство.