Лабораторная работа № 13

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Цель работы: научиться решать краевые задачи для дифференциальных уравнений гиперболического типа методом сеток с помощью ЭВМ [1, 4].

Содержание работы:

1) изучить метод сеток для дифференциального уравнения гиперболического типа;
2) заменить исходное уравнение конечно-разностными соотношениями;
3) составить программу численного решения краевой задачи на ЭВМ;
4) составить отчет о проделанной работе.

Пример выполнения работы

Задание.

1. Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (64)$$

на примере уравнения свободных колебаний однородной ограниченной струны длиной $0 \le x \le l$, где $a = \text{const}$ с дополнительными краевыми условиями

$$u(x,0) = f(x) = 0.6\cos(-x); \quad u_t'(x,0) = F(x) = -0.6\sin(-x) + 2;$$
$$u(0,t) = \phi(t) = 0.8t + 0.6e^t; \quad u(l,t) = \psi(t) = 2.2t - 0.7\sin(-t) \qquad (65)$$

методом сеток.

2. В полуполосе $0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \propto$ построить сетку $\{x_i, t_j\}$, где $x_i = ih,\ t_j = jk,\ i = \overline{0,n},\ j = 0,1,\ldots$
3. Заменить уравнение (64) конечно-разностными соотношениями в узлах сетки.
4. Составить программу на любом языке программирования, реализующую процесс построения решения при $l = 1,\ n = 10,\ j = \overline{0,10}$.

Решение.

Рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{x, t\}$ (рис. 17). В полуполосе $t \ge 0,\ 0 \le x \le 1$ построим прямоугольную сетку $x_i = ih,\ i = \overline{0,10},\ t_j = jk,\ j = \overline{0,10},\ u_{ij} = u(x_i, t_j)$, где $h = \frac{1}{10}$ – шаг по оси OX и $k = \frac{h}{a}$ – шаг по оси Ot.

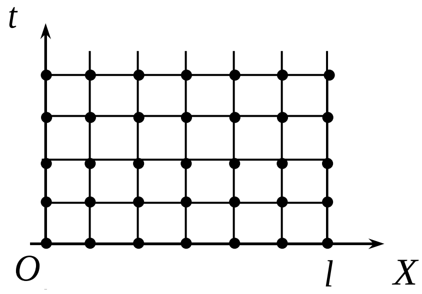

Рис. 17

Исходное дифференциальное уравнение заменим конечно-разностными уравнениями в узловых точках (x_i, t_j).

Конечно-разностные уравнения запишутся так:

$$a^2 \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h^2} = a^2 \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}. \qquad (66)$$

После преобразований получим:

$$u_{ij+1} = u_{i+1j} + u_{i-1j} - u_{ij-1}. \qquad (67)$$

Из формулы (67) видно, что для подсчета значения искомой функции $u(x,t)$ в узловых точках $(j+1)$-го слоя используются значения $u(x,t)$ в двух слоях j -м и $(j-1)$-м (рис. 18).

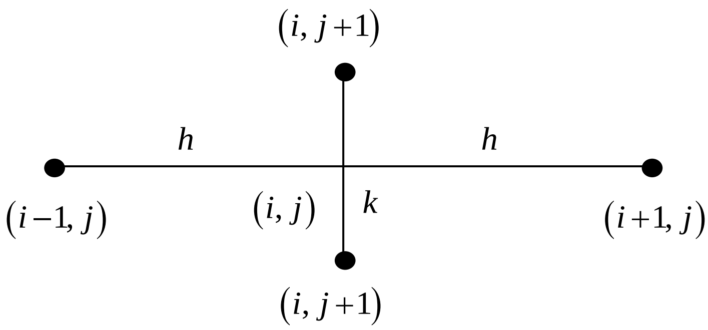

Рис. 18.

Для начала вычислений по формуле (67) необходимо знать значения функции $u(x,t)$ в двух слоях $j = 0, \quad j = -1$. Запишем начальное условие $u'_t(x, 0) = F(x)$ в конечно-разностном виде: $\frac{u_{i,0} - u_{i,-1}}{k} = F_i$, где $F_i = F(x_i)$. Из этого соотношения выразим $u_{i,-1}$:

$$u_{i,-1} = u_{i,0} - kF_i.$$

Для исходной задачи (64), (65) конечно-разностная форма уравнения (64) имеет вид (67), а краевые условия (65) запишутся так:

$$u_{i,0} = 0.6\,cos(-x_i)\,; \quad u_{i,-1} = u_{i,0} - kF_i$$
$$= 0.6\,cos(-x_i) - k(-0.6\,sin(-x_i) + 2);$$

$$u_{0,j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j}; \quad u_{n,j} = 2.2t_j - 0.7\sin(-t_j); \; i = \overline{0,10}; \; j = \overline{0,10}. \quad (68)$$

Алгоритм решения задачи:

1) построить систему равноотстоящих точек

$l = 1,\ h = \frac{l}{n} = 0.1,\ x_i = ih,\ i = \overline{0,10};\quad t_j = jk,\ j = \overline{0,10},\ k = \frac{h}{a};$

2) вычислить $u_{i,0} = 0.6\cos(-x_i),\ i = \overline{0,10};$

3) вычислить $u_{i,-1} = 0.6\cos(-x_i) - k(-0.6\sin(-x_i) + 2),\ i = \overline{1,9};$

4) вычислить $u_{0,j} = 0.8t_j + 0.6e^{t_j}; t_j = jk, j = \overline{1,10};$

5) вычислить $u_{n,j} = 2.2t_j - 0.7\sin(-t_j);\ t_j = jk, j = \overline{1,10};$

6) вычислить $u_{ij+1} = u_{i+1j} + u_{i-1j} - u_{ij-1},\ i = \overline{1,9},\ j = \overline{1,9}.$

В качестве примера приведена программа на языке программирования Pascal, реализующая процесс вычислений.

Пример программы на языке Pascal

```
program Lab13;
uses crt;
const n=10;m=10;a=0;b=1;delta=1/6;s=6;
var i,j:integer;
   x,h,t,gamma,m1,m2,alfa,betta,n1:real;
   a1,b1,u:array [0..n,0..m] of real;

function f(x:real): real;
begin f:=gamma*cos(m1*x); end;

function fi1(t:real):real;
begin fi1:=alfa*t+betta*exp(t); end;

function fi2(t:real):real;
begin fi2:=n1*t+m2*sin(m1*t); end;

procedure Yav;
begin
h:=(b-a)/n;
gamma:=0.6;m1:=-1;alfa:=0.8;betta:=0.6;m2:=2.2;n1:=-0.7;
for i:=0 to n do for j:=0 to m do u[i,j]:=0;
x:=a;
for i:=0 to n do begin
   u[i,0]:=f(x);
   x:=x+h;
end;
for j:=1 to m do begin
   u[0,j]:=fi1(j*delta*h*h);
   u[n,j]:=fi2(j*delta*h*h);
end;
for i:=1 to n-1 do for j:=0 to m-1 do u[i,j+1]:=1/6*(u[i-1,j]+4*u[i,j]+u[i+1,j]);
for i:=0 to n do write('  ',i:4);
writeln;
```

```
for j:=m downto 0 do begin
   write(j:2,' ');
   for i:=n downto 0 do write(u[i,j]:6:3);
   writeln;
end;
end;

procedure neyav;
begin
h:=(b-a)/n;
gamma:=0.6;m1:=-1;alfa:=0.8;betta:=0.6;m2:=2.2;n1:=-0.7;
for i:=0 to n do for j:=0 to m do u[i,j]:=0;
x:=a;
for i:=0 to n do begin
   u[i,0]:=f(x);
   x:=x+h;
end;
for j:=1 to m do begin
   u[0,j]:=fi1(j*h*h/s);
   u[n,j]:=fi2(j*h*h/s);
end;
for j:=0 to n-1 do begin
   a1[1,j+1]:=1/(2+s);
   b1[1,j+1]:=fi1((j+1)*h*h/s)+s*u[1,j];
end;
for i:=2 to n do
   for j:=0 to m-1 do begin
      a1[i,j+1]:=1/(2+s+a1[i-1,j+1]);
      b1[i,j+1]:=a1[i-1,j+1]*b1[i-1,j+1]+s*u[i,j];
   end;
for i:=1 to n-1 do for j:=0 to m-1 do u[i,j+1]:=a1[i,j+1]*(b1[i,j+1]+u[i+1,j+1]);
for i:=0 to n do write('  ',i:4);
writeln;
for j:=m downto 0 do begin
   write(j:2,' ');
   for i:=n downto 0 do write(u[i,j]:6:3);
   writeln;
end;
end;

begin
clrscr;
yav;
neyav;
end.
```

Решение задачи (1), (2) приведено в виде таблицы 18:

Табл. 18.

№ п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	-0.048	0.070	0.094	0.100	0.105	0.110	0.116	0.132	0.181	0.32	0.62

9	-0.043	0.088	0.111	0.119	0.125	0.131	0.136	0.149	0.192	0.32	0.62
8	-0.039	0.108	0.131	0.141	0.149	0.156	0.162	0.172	0.207	0.32	0.62
7	-0.034	0.132	0.155	0.167	0.177	0.185	0.192	0.201	0.228	0.33	0.62
6	-0.029	0.159	0.183	0.198	0.210	0.221	0.229	0.237	0.257	0.34	0.61
5	-0.024	0.191	0.216	0.234	0.250	0.263	0.273	0.282	0.295	0.36	0.61
4	-0.019	0.227	0.255	0.277	0.297	0.313	0.326	0.336	0.345	0.39	0.61
3	-0.014	0.269	0.301	0.328	0.352	0.372	0.389	0.401	0.410	0.43	0.61
2	-0.010	0.317	0.355	0.388	0.417	0.442	0.463	0.479	0.491	0.50	0.61
1	-0.005	0.372	0.417	0.458	0.494	0.526	0.552	0.572	0.587	0.60	0.6
0	0.324	0.373	0.418	0.459	0.495	0.527	0.553	0.573	0.588	0.60	0.60

В отчет о проделанной работе должны входить: номер и название лабораторной работы; цель работы; содержание работы; задание на работу; теоретическая часть работы (вывод формул); листинг программы; таблица результатов; выводы о проделанной работе.

Порядок выполнения работы

1. Записать исходное дифференциальное уравнение гиперболического типа (64) и краевые условия (65).
2. Записать алгоритм решения задачи.
3. Составить программу на любом языке программирования, реализующую численный метод решения дифференциального уравнения гиперболического типа. Печать результатов должна осуществляться на каждом шаге в виде таблицы 19:

Табл. 19.

$t_j \backslash x_i$	x_0	x_1	…	x_n
t_0	$u(x_0,t_0)$	$u(x_1,t_0)$	…	$u(x_n,t_0)$
t_1	$u(x_0,t_1)$	$u(x_1,t_1)$	…	$u(x_n,t_1)$
⋮	⋮	⋮	…	⋮
t_m	$u(x_0,t_m)$	$u(x_1,t_m)$	…	$u(x_n,t_m)$

4. Сделать выводы о проделанной работе.
5. Составить отчет о проделанной работе.

Варианты индивидуальных заданий

Табл. 20.

Номер варианта	Параметры					
	γ	m	α	β	M	N
1	0.6	0.3	0.1	0.4	-0.2	1
2	0.8	0.9	0.3	-0.5	0.9	-0.9
3	0.5	0.4	-0.5	0.6	1	-0.8
4	1.1	1	-0.4	-0.5	0.7	0.4
5	1.4	1	-0.2	2.2	0.3	-0.6

6	0.3	0.7	0.5	-1.4	-2	0.3
7	0.7	0.6	-0.5	0.9	1	0.2
8	0.6	-0.3	1	-1	0.9	0.4
9	-0.3	0.4	1.2	1	-0.3	0.6
10	-0.6	0.2	-0.1	0.3	0.2	0.9
11	0.3	-0.4	0.2	0.3	0.4	-0.7
12	-0.5	0.6	0.7	-0.6	1	0.8
13	1	0.8	-0.2	-0.4	0.6	0.3
14	1.2	2.2	0.6	1.3	2	-0.8
15	-0.4	2	0.7	-0.4	2.1	-0.4

Граничные условия:

$f(x) = \gamma \cos m x, \quad F(x) = \alpha + \beta \sin m x, \quad \phi(t) = \alpha t + \beta e^t, \quad \psi(t) = Nt + M \sin m t$

Для выполнения лабораторной работы 13 необходимо получить номер варианта индивидуального задания из табл. 20.