Глава 8. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

8.1. Постановка задачи

Рассмотрим простейшую двухточечную краевую задачу.

Задача 8.1. Найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению второго порядка вида:

$$y'' = f(x, y, y') \tag{8.1}$$

и принимающую при $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ заданные значения $y(a) = A; y(b) = B$. Геометрически (рис. 8.1) это означает, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через данные точки $M(a, A)$ и $N(b, B)$.

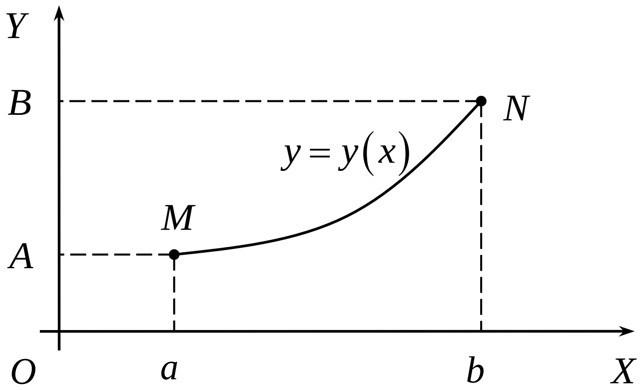

Рис. 8.1

Задача 8.2. Найти такое решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (8.1), чтобы производные имели заданное значение $y'(a) = A_1; y'(b) = B_1$. Геометрически (рис. 8.2) это сводится к отысканию интегральной кривой, пересекающей прямые $x = a$ и $x = b$ под заданными углами α и β к оси OX соответственно такими, что $\operatorname{tg}\alpha = A_1$ и $\operatorname{tg}\beta = B_1$.

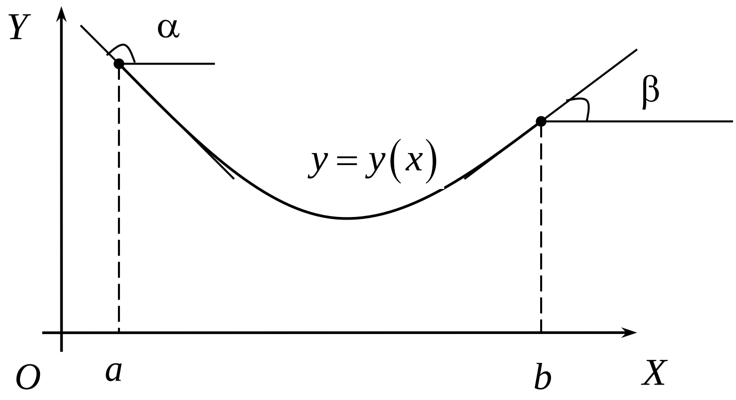

Рис. 8.2

Можно рассмотреть также смешанную краевую задачу.

Задача 8.3. Найти решение дифференциального уравнения (8.1), удовлетворяющего условиям

$$y(a) = A,\ y'(b) = B_1.$$

Задача 8.4. Найти решение дифференциального уравнения (8.1), удовлетворяющего условиям

$$y'(a) = A_1,\ y(b) = B.$$

Все эти четыре задачи можно записать кратко.

Дано дифференциальное уравнение

$$y'' = f(x, y, y')$$

с краевыми условиями:

$$\begin{cases} \alpha_0 y'(a) + \alpha_1 y(a) = A; \\ \beta_0 y'(b) + \beta_1 y(b) = B, \end{cases}$$

где $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

8.2. Метод конечных разностей

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{8.2}$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_0 y'(a) + \alpha_1 y(a) = A; \\ \beta_0 y'(b) + \beta_1 y(b) = B, \end{cases} \tag{8.3}$$

где числа $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ считаются известными и удовлетворяющими условиям: $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

Коэффициенты $p(x), q(x), f(x)$ являются непрерывными функциями на некотором отрезке $[a,b]$. Решением этого уравнения является некоторая непрерывная на $[a,b]$ функция $y(x)$, имеющая первую и вторую производные на $[a,b]$, удовлетворяющая исходному уравнению (8.2) и краевым условиям (8.3).

Поставленная краевая задача решается с помощью перехода от исходной задачи к новой, записанной в конечно-разностной форме. Тогда решение новой задачи будет являться приближенным решением исходной задачи. В силу того, что первая и вторая производные, входящие в уравнение и в краевые условия, будут заменены приближенными конечно-разностными формулами, решения с применением метода конечных разностей получается не в виде непрерывной функции $y(x)$, а в виде таблицы ее значений в отдельных точках. Для этого разобьем $[a,b]$ на n равных частей так, чтобы $a = x_0, b = x_n, x_{i+1} = x_i + h, i = \overline{0,n}, h = \frac{(b-a)}{n}$. Наша задача – найти значения функции $y(x)$ в точках $x_i, i = \overline{0,n}$. Для того чтобы перейти от исходной задачи к конечно-разностной, надо получить формулы для представления первой и второй производных в конечно-разностном виде. Они получаются, если применить разложение функции

$y(x)$ в окрестности некоторой точки $x_i \in [a,b]$ в ряд Тейлора, ограничиваясь вторыми производными:

$$y(x_i + h) \cong y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i); \tag{8.4}$$

$$y(x_i - h) \cong y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i). \tag{8.5}$$

Складываем эти ряды и получаем выражение второй производной в конечно-разностной форме:

$$y(x_i + h) + y(x_i - h) \cong 2y(x_i) + h^2 y''(x_i);$$

$$y''(x_i) \cong \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2}. \tag{8.6}$$

Аналогично получим формулу для первой производной, если вычтем ряды (8.4) и (8.5):

$$y(x_i + h) - y(x_i - h) \cong 2hy'(x_i);$$

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h}. \tag{8.7}$$

Для точек $x_0 = a$ и $x_n = b$, чтобы не выходить за пределы отрезка $[a,b]$, можно считать:

$$\begin{aligned} y'(a) = y'(x_0) &= \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}; \\ y'(b) = y'(x_n) &= \frac{y(x_n) - y(x_n - h)}{h}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Введем обозначения: $y(x_i) = y_i$, $y(x_i + h) = y(x_{i+1}) = y_{i+1}$, $y(x_i - h) = y(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$.

Используя формулы (8.6) и (8.7), с учетом введенных обозначений дифференциальное уравнение (8.2) во внутренних точках $x = x_i, i = \overline{1, n-1}$ приближенно можно заменить системой линейных уравнений

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i,\ i=\overline{1,n-1}. \qquad (8.9)$$

Кроме того, в силу формул (8.8) краевые условия (8.3) дают еще два уравнения:

$$\alpha_0\frac{y_1-y_0}{h}+\alpha_1y_0=A;$$

$$\beta_0\frac{y_n-y_{n-1}}{h}+\beta_1y_n=B. \qquad (8.10)$$

Получили систему $(n+1)$-го линейного алгебраического уравнения (8.9) – (8.10) с $(n+1)$-м неизвестным $y_0,...,y_n$. Решив эту систему любым известным методом, получим таблицу значений искомой функции $y=y(x)$.

Заметим, что система представляет собой систему с разряженной матрицей, имеющей трехдиагональный вид. Поэтому для решения системы применяют специальные методы, позволяющие оперировать только с элементами матрицы, отличными от нуля. Одним из таких методов является *метод прогонки.*

8.3. Метод прогонки

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (8.11)$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases}\alpha_0y'(a)+\alpha_1y(a)=A,\\ \beta_0y'(b)+\beta_1y(b)=B,\end{cases} \qquad (8.12)$$

где $\alpha_0^2+\alpha_1^2\neq0, \beta_0^2+\beta_1^2\neq0$.

Уравнение (8.11) заменим конечно-разностными уравнениями

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i,\ i=\overline{1,n-1}. \qquad (8.13)$$

Краевые условия (8.12) заменим конечно-разностными уравнениями

$$\alpha_0\frac{y_1-y_0}{h}+\alpha_1y_0=A;$$

$$\beta_0\frac{y_n-y_{n-1}}{h}+\beta_1y_n=B.$$

Запишем систему (8.13) в канонической форме:

$$y_{i+1}\left(2+hp_i\right)+y_i\left(2h^2q_i-4\right)+y_{i-1}\left(2-hp_i\right)=2h^2f_i,\ i=\overline{1,n-1};$$

$$y_{i+1}+y_i\frac{2h^2q_i-4}{2+hp_i}+y_{i-1}\frac{2-hp_i}{2+hp_i}=\frac{2h^2f_i}{2+hp_i},\ i=\overline{1,n-1}.$$

Введем обозначения: $m_i=\dfrac{2h^2q_i-4}{2+hp_i},\ r_i=\dfrac{2-hp_i}{2+hp_i},\ \varphi_i=\dfrac{2h^2f_i}{2+hp_i}.$

Получим:

$$y_{i+1}+m_iy_i+r_iy_{i-1}=\varphi_i,\ i=\overline{1,n-1}. \qquad (8.14)$$

Будем искать y_i в виде:

$$y_i=c_i(d_i-y_{i+1}), \qquad (8.15)$$

где коэффициенты c_i, d_i требуется определить. Выразим $y_{i-1}=c_{i-1}\left(d_{i-1}-y_i\right)$ и подставим в исходную систему (8.14):

$$y_{i+1}+m_iy_i+r_ic_{i-1}(d_{i-1}-y_i)=\varphi_i.$$

Выразим из последнего соотношения y_i:

$$y_i=\frac{\varphi_i-y_{i+1}-r_ic_{i-1}d_{i-1}}{m_i-r_ic_{i-1}}=\frac{1}{m_i-r_ic_{i-1}}\left(\varphi_i-r_ic_{i-1}d_{i-1}-y_{i+1}\right).$$

Сравнивая полученную формулу с (8.15), получим выражения для c_i, d_i:

$$c_i=\frac{1}{m_i-r_ic_{i-1}};d_i=\varphi_i-r_ic_{i-1}d_{i-1},\ i=\overline{1,n-1}.$$

Чтобы начать расчеты по этим формулам, надо знать c_0, d_0. Найдем их из первого краевого условия. Выражая $y_0 = \dfrac{Ah - \alpha_0 y_1}{h\alpha_1 - \alpha_0}$ и сравнивая с $y_0 = c_0(d_0 - y_1)$, получим $c_0 = \dfrac{\alpha_0}{h\alpha_1 - \alpha_0}$, $d_0 = \dfrac{Ah}{\alpha_0}$.

Итак, вычисления, называемые прямым ходом, осуществляются в следующем порядке:

1. Вычисляют значения $m_i, r_i, \varphi_i, i = \overline{1, n-1}$.
2. Находят c_0, d_0.
3. Вычисляют c_i, d_i, $i = \overline{1, n-1}$.

Обратный ход вычислений состоит в следующем:

1. Решают систему из двух уравнений относительно y_n и y_{n-1}:

$$y_{n-1} = c_{n-1}\left(d_{n-1} - y_n\right);$$

$$\beta_0 \frac{y_n - c_{n-1}(d_{n-1} - y_n)}{h} + \beta_1 y_n = B$$

и получают $y_n = \dfrac{Bh + \beta_0 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0\left(1 + c_{n-1}\right) + h\beta_1}$.

2. Вычисляют $y_i = c_i\left(d_i - y_{i+1}\right), i = \overline{n-1, 0}$, начиная с y_{n-1} и далее до y_0.

3. Сравнивают полученное в п.2 y_0 со значением $y_0 = \dfrac{Ah - \alpha_0 y_1}{h\alpha_1 - \alpha_0}$, полученного из первого краевого условия.

В результате работы алгоритма получим значения $y_0, ..., y_n$ искомой функции в узловых точках $x_0, ..., x_n$, т.е. получим таблицу значений функции, которая является приближенным решением поставленной задачи. Используя полученную таблицу, можно найти аналитический вид функции. Как правило, эту функцию строят в виде многочлена, используя одну из известных интерполяционных формул.

Для оценки погрешности метода конечных разностей применяют двойной пересчет с шагом h и $\frac{h}{2}$. Приближенная оценка погрешности значения получается по формуле $\left|y_i^* - \bar{y}_i\right| = \frac{1}{3}\left|y_i^* - y_i\right|$, где $\bar{y}_i$ – значение точного решения краевой задачи в точке x_i; y_i и y_i^* – значения функции в точке x_i, полученные с шагом h и $\frac{h}{2}$ соответственно.

Лабораторная работа №11

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Задание.

Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + 2x^2 y' + xy = 3x \tag{8.16}$$

на отрезке $[0,1]$ с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &y(0) - 2y'(0) = 0, \\ &2y(1) - y'(1) = 1 \end{aligned} \tag{8.17}$$

методом конечных разностей и методом прогонки.

Решение.

1. *Метод конечных разностей.*

Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{8.18}$$

на отрезке $[a,b]$ с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \alpha_0 y'(a) + \alpha_1 y(a) = A, \\ \beta_0 y'(b) + \beta_1 y(b) = B, \end{aligned} \tag{8.19}$$

где числа $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ считаются известными и

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0 \tag{8.20}$$

т.е. одна из величин не равна нулю.

В данном случае параметры принимают следующие значения

$$\begin{aligned} & p(x) = 2x^2, q(x) = x, f(x) = 3x; \\ & \alpha_0 = -2, \alpha_1 = 1, A = 0, \beta_0 = -1, \beta_1 = 2, B = 1; \\ & [a,b] = [0,1]. \end{aligned} \tag{8.21}$$

Требуется найти решение краевой задачи (8.16),(8.17) на отрезке $[0,1]$.

Решение находим в виде табл. 8.5.

Таблица 8.5

x_i	x_0	x_1	…	x_n
y_i	y_0	y_1	…	y_n

Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей и сформируем систему равноотстоящих точек

$$h = \frac{b-a}{n}, x_{i+1} = x_i + h, x_0 = a, x_n = b.$$

Первая и вторая производная функции $y(x)$ в конечно-разностном виде имеют вид:

$$y''(x_i) \cong \frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2},$$
$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_i+h)-y(x_i)}{h}, i=\overline{1,n-1}.$$

Введем обозначения:

$$y(x_i)=y_i, y(x_i+h)=y(x_{i+1})=y_{i+1}, y(x_i-h)=y(x_{i-1})=y_{i-1};$$
$$p(x_i)=p_i, q(x_i)=q_i, f(x_i)=f_i, i=\overline{1,n-1}.$$

На концах отрезка $y'(a)=\frac{y_1-y_0}{h}, y'(b)=\frac{y_n-y_{n-1}}{h}$.

Применение этих соотношений позволяет записать дифференциальное уравнение и краевые условия в виде системы, состоящей из $n+1$ уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}+q_iy_i=f_i,\ i=\overline{1,n-1}, & (8.22)\\ \alpha_0\dfrac{y_1-y_0}{h}+\alpha_1y_0=A, & (8.23)\\ \beta_0\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}+\beta_1y_n=B. & (8.24)\end{cases}$$

Для поставленной задачи (8.16), (8.17) система (8.22)–(8.24) запишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+2x_i^2\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}+x_iy_i=3x_i, i=\overline{1,n-1},\\ -2\dfrac{y_1-y_0}{h}+y_0=0,\\ -\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}+2y_n=1.\end{cases} \quad (8.25)$$

Несложными преобразованиями систему (8.25) приведем к виду:

$$\begin{cases} y_{i+1}\left(1+2x_i^2h\right)+y_i\left(-2x_i^2h-2+x_ih^2\right)+y_{i-1}=3x_ih,\\ 2y_1-y_0(2+h)=0,\\ y_n(2h-1)+y_{n-1}=h, i=\overline{1,n-1}.\end{cases} \quad (8.26)$$

Решим эту систему методом прогонки.

2. *Метод прогонки.*

Метод прогонки является модификацией метода Гаусса и применяется для систем, имеющих разреженную матрицу коэффициентов, например, трехдиагональную матрицу. Рассмотрим алгоритм метода прогонки на примере решения системы (8.22)–(8.24). Запишем ее в канонической форме:

$$y_{i+1}(2+hp_i)+y_i\left(2h^2q_i-4\right)+y_{i-1}(2-hp_i)=2h^2 f_{i.}, i=\overline{1,n-1}.$$

Преобразовав последнее уравнение, получим:

$$y_{i+1}+y_i\underbrace{\frac{2h^2q_i-4}{2+hp_i}}_{m_i}+y_{i-1}\underbrace{\frac{2-hp_i}{2+hp_i}}_{r_i}=\underbrace{\frac{2h^2 f_i}{2+hp_i}}_{\varphi_i}, i=\overline{1,n-1}.$$

Тогда

$$y_{i+1}+m_iy_i+r_iy_{i-1}=\varphi_i, i=\overline{1,n-1}. \tag{8.27}$$

Будем искать y_i в виде:

$$y_i=c_i(d_i-y_{i+1}), \tag{8.28}$$

где коэффициенты c_i, d_i требуется определить. Соотношение (8.28) при $i-1$ примет вид $y_{i-1}=c_{i-1}(d_{i-1}-y_i)$, и подставим y_{i-1} в (46):

$$y_{i+1}+m_iy_i+r_ic_{i-1}\left(d_{i-1}-y_i\right)=\varphi_i, i=\overline{1,n-1}.$$

Выразим из последнего выражения y_i:

$$y_i=\frac{1}{m_i-r_ic_{i-1}}\left(\varphi_i-r_ic_{i-1}d_{i-1}-y_{i+1}\right).$$

Сравнивая полученную формулу с (8.28), получим выражения для c_i, d_i:

$$c_i=\frac{1}{m_i-r_ic_{i-1}}; d_i=\varphi_i-r_ic_{i-1}d_{i-1}, i=\overline{1,n-1}. \tag{8.29}$$

Чтобы начать расчеты по этим формулам, необходимо задать c_0, d_0.

Определим их из первого краевого условия (8.23). Выражая $y_0 = \dfrac{Ah - \alpha_0 y_1}{h\alpha_1 - \alpha_0}$ и сравнивая с $y_0 = c_0(d_0 - y_1)$, получим $c_0 = \dfrac{\alpha_0}{h\alpha_1 - \alpha_0}; d_0 = \dfrac{Ah}{\alpha_0}$.

Таким образом, вычисления, называемые прямым ходом, осуществляются следующим образом:

1) вычислить значения $m_i, r_i, \varphi_i, i = \overline{1, n-1}$;

2) вычислить величины c_0, d_0;

3) по формулам (8.29) вычислить значения $c_i, d_i, i = \overline{1, n-1}$.

Обратный ход вычислений состоит в следующем:

1) решить систему из двух уравнений относительно y_n, y_{n-1}:

$$y_{n-1} = c_{n-1}\left(d_{n-1} - y_n\right);$$
$$\beta_0 \frac{y_n - c_{n-1}\left(d_{n-1} - y_n\right)}{h} + \beta_1 y_n = B$$

и получаем $y_n = \dfrac{Bh + \beta_0 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 + c_{n-1} + h\beta_1}$;

2) вычислить значения $y_i = c_i(d_i - y_{i+1}), i = \overline{n-1, 1}$, начиная с y_{n-1} и далее до y_1;

3) вычислить $y_0 = \dfrac{Ah - \alpha_0 y_1}{h\alpha_1 - \alpha_0}$.

Рассмотрим алгоритм метода прогонки на примере решения системы (4.26).

В уравнении (8.27) величины m_i, r_i, φ_i принимают вид:

$$m_i = \frac{h^2 x_i - 2}{1 + hx_i^2}; r_i = \frac{2 - hx_i}{2 + 2hx_i^2}; \varphi_i = \frac{3h^2 x_i}{1 + hx_i^2}, i = \overline{0, n}.$$

Начальное приближение: $y_0 = \dfrac{2y_1}{h+2}; c_0 = -\dfrac{2}{h+2}; d_0 = 0$.

Прямой ход вычислений:

1. вычислить значения $m_i, r_i, \varphi_i, i = \overline{0,n}$;

2. вычислить величины c_0, d_0;

3. вычислить значения $c_i, d_i, i = \overline{1, n-1}$.

Обратный ход вычислений:

1) решить систему из двух уравнений относительно y_n, y_{n-1}:

$$y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n),$$

$$y_n = \frac{h - c_{n-1}d_{n-1}}{2h - 1 - c_{n-1}}.$$

2) вычислить значения $y_i = c_i(d_i - y_{i+1}), i = \overline{n-1, 1}$, начиная с y_{n-1} и до y_1;

3) вычислить $y_0 = \dfrac{2y_1}{h+2}$.

Решение задачи (8.16), (8.17) с шагами $h = 0.1, h = 0.05$ приведено в виде графика (рис. 8.4).

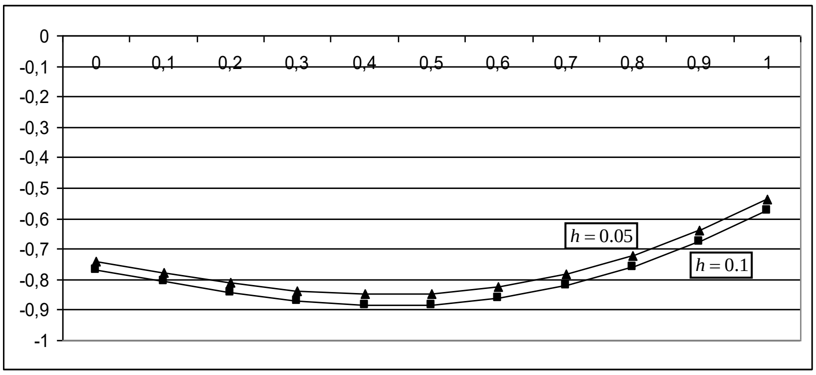

Рис. 8.4

8.4. Задачи для самостоятельной работы

1. Определить тип краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

1.1. $y'' + (x^2 + 0.4)y' + y\sin x = x^2$ с краевыми условиями $y(0) = 1, y(1) = 2.$

1.2. $y'' + xy' - \sin(x-1)y = x + 3$ с краевыми условиями $y'(1) = 0.3, y'(2) = 2.$

1.3. $y'' + y'\sin x + xy = x + 1$ с краевыми условиями $y(1) = 0.5, y'(2) = 1.7.$

1.4. $y'' - xy' + y\cos x = x$ с краевыми условиями $y'(0) = 1, 4y(1) = 2.$

2. Определить тип дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 4x^2y' - xy = 2x$.

3. Записать линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' + (x-4)y' - 3.1y = 2x$ в виде конечно-разностных уравнений.

4. Записать краевые условия $y(0) - y'(0) = 1, y(1) = 1.7$ для линейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + (x-4)y' - 3.1y = 2x$ в конечно-разностной форме.

8.5. Вопросы для самоподготовки

1. Привести примеры простейшей двухточечной краевой задачи и их геометрическую интерпретацию.

2. Привести примеры смешанной краевой задачи.

3. Дать определение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

4. Привести краткую форму записи простейшей и смешанной краевой задачи.

5. Записать постановку краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

6. Дать определение линейного дифференциального уравнения второго порядка.

7. Дать определение конечно-разностного уравнения.

8. Привести метод конечных разностей для решения краевой задачи

для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

9. Привести метод прогонки для решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Привести прямой и обратный ход вычислений.