

Глава 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные этапы решения нелинейных уравнений

Определение 2.1. *Нелинейным уравнением* называется уравнение вида

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

где $f(x)$ – нелинейная функция вида:

- нелинейная алгебраическая функция (полином или многочлен)
 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$;
- трансцендентная функция – тригонометрическая, обратная тригонометрическая, логарифмическая, показательная, гиперболическая функция и другие;
- комбинирование этих функций, например $(x^2 + \sin x)$.

Определение 2.2. *Решением* нелинейного уравнения (2.1) называется такое значение x^{**} , которое при подстановке в уравнение (2.1) обращает его в тождество.

На практике не всегда удастся найти точное решение. В этом случае решение уравнения (2.1) находят с применением приближенных (численных) методов.

Определение 2.3. Приближенным решением нелинейного уравнения (2.1) называется такое значение x^* , при подстановке которого в уравнение (2.1) последнее будет выполняться с определенной степенью точности, т.е. $|f(x^*)| \leq \varepsilon$, где ε – малая положительная величина.

Нахождение приближенных решений составляет основу численных методов и вычислительной математики. Решение нелинейных уравнений

распадается на два этапа: отделение корней уравнений и уточнение корней нелинейных уравнений.

На первом этапе необходимо исследовать уравнение и выяснить, имеются корни или нет. Если корни имеются, то необходимо определить их количество и затем найти интервалы, в каждом из которых находится только один корень, т.е. отделить корни.

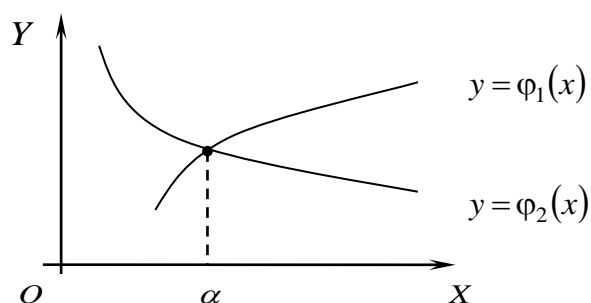


Рис. 2.1

Первый способ отделения корней — графический. Данный метод позволяет определить количество корней на отрезке, но не единственность корня. Если $f(x)$ имеет простой аналитический вид,

то, исходя из уравнения (2.1), можно построить график функции $y = f(x)$. Тогда точки пересечения графика функции с осью абсцисс будут являться приближенными значениями корней исходного нелинейного уравнения. Если $f(x)$ имеет сложный аналитический вид, то можно представить ее в виде разности двух более простых функций $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. Так как $f(x) = 0$, то выполняется равенство $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Построим два графика $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$ (рис. 2.1). Тогда задача решения нелинейного уравнения (2.1) сводится к поиску абсцисс точек пересечения двух графиков, которые и будут являться приближенными значениями корней уравнения (2.1).

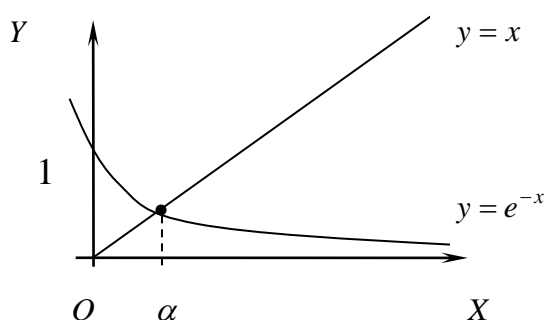


Рис. 2.2.

Пример 2.1. Пусть дано нелинейное уравнение вида $x - e^{-x} = 0$. Для решения его графическим методом представим

уравнение (2.1) в виде $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0$, где $\varphi_1(x) = x$; $\varphi_2(x) = e^{-x}$. Графики функций $y = x$; $y = e^{-x}$ представлены на рис. 2.2, из которого видно, что исходное уравнение имеет единственный корень α [2,3].

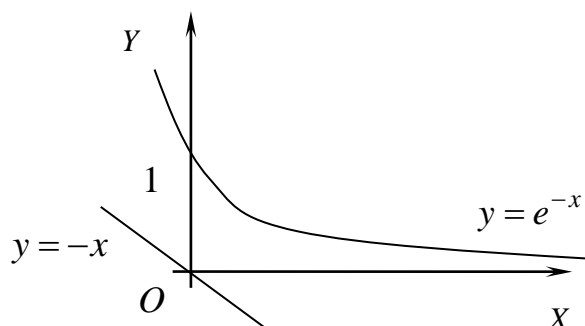


Рис. 2.3

Пример 2.2. Пусть задано нелинейное уравнение вида $e^{-x} + x = 0$ или $-x = e^{-x}$. Построив два графика функций $y = -x$ и $y = e^{-x}$, нетрудно заметить, что исходное уравнение не имеет корней

(рис. 2.3) [2,3].

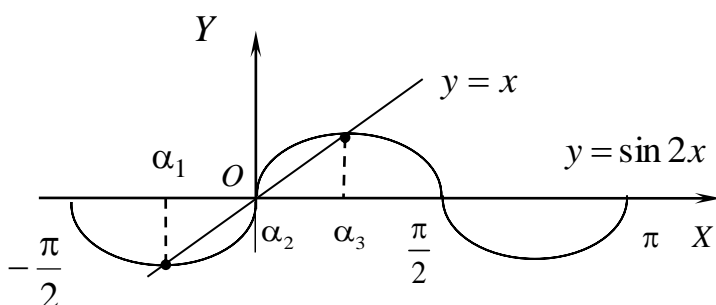


Рис. 2.4

Пример 2.3. Для нелинейного уравнения вида $x - \sin 2x = 0$ с помощью аналогичных преобразований получим, что исходное уравнение имеет три корня (рис. 2.4) [2,3].

Второй способ отделения корней нелинейных уравнений – аналитический (рис. 2.5). Процесс отделения корней здесь основывается на следующих теоремах.

Теорема 2.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков (т.е. $f(a)f(b) < 0$), то на отрезке содержится хотя бы один корень.

Теорема 2.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, выполняется условие вида $f(a)f(b) < 0$ и производная $f'(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$, то на отрезке имеется единственный корень.

Теорема 2.3. Если функция $f(x)$ является многочленом n -й степени и на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то на отрезке имеется нечетное количество корней. Если на концах отрезка $[a, b]$ функция не меняет знак, то уравнение (2.1) либо не имеет корней на отрезке, либо имеет четное количество корней.

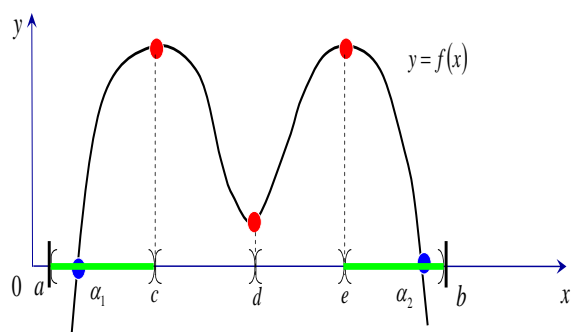


Рис. 2.5

При аналитическом методе исследований необходимо выявить интервалы монотонности функции $f(x)$. Для этого необходимо найти критические точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, т.е. точки, в которых первая производная $f'(\xi_i)$ равна нулю или не существует. Тогда вся числовая ось разбивается на интервалы монотонности (ξ_i, ξ_{i+1}) , на каждом из которых определяется знак производной $f'(x_i)$, где $x_i \in (\xi_i, \xi_{i+1})$. Затем выделяются те интервалы монотонности (ξ_i, ξ_{i+1}) , на которых функция $f(x)$ меняет знак, т.е. выполняется неравенство $f(\xi_i)f(\xi_{i+1}) < 0$. На каждом из этих интервалов для поиска корня используются методы уточнения корней.

Наиболее распространенными методами уточнения корня на отрезке являются итерационные (приближенные) методы: метод половинного деления (метод дихотомии), метод простых итераций, метод Ньютона (метод касательных) и его модификация.

2.2. Метод деления отрезка пополам

Для уточнения корня нелинейного уравнения (2.1) на отрезке $[a, b]$,

где $f(a)f(b) < 0$, а производная сохраняет знак, применим метод половинного деления (рис. 2.6). Для этого разделим отрезок $[a, b]$ пополам и исследуем знак функции в полученной точке c , где $c = \frac{a+b}{2}$. Из двух отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ выбираем тот, на котором функция меняет знак. Уменьшая новый отрезок в 2 раза, повторяем процесс и т.д. Получим последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$, на концах которых выполняется неравенство

$$f(a_n)f(b_n) < 0 \quad (2.2)$$

и длины этих отрезков равны

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a). \quad (2.3)$$

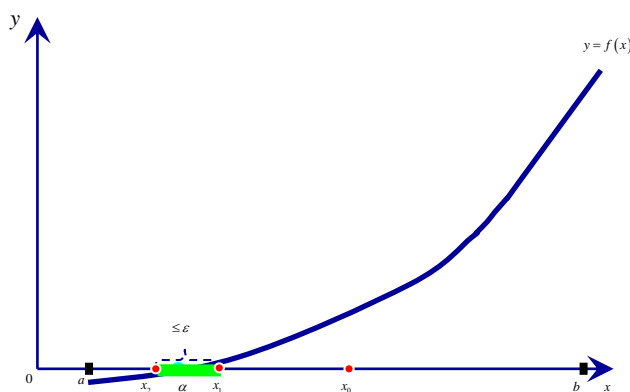


Рис. 2.6

Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ является монотонной неубывающей ограниченной последовательностью; а $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ — монотонной невозрастающей ограниченной последовательностью. Следовательно, эти последовательности сходятся. Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ в левой и правой частях соотношения (2.3), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}(b - a) = 0.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. С другой стороны, из неравенства (2.2)

следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)f(a_n) = (f(\xi))^2 \leq 0$. Последнее неравенство возможно только тогда, когда $f(\xi) = 0$. Следовательно, ξ является корнем исходного уравнения (2.1).

2.3. Метод простых итераций для решения нелинейных уравнений

Пусть известно, что нелинейное уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ – непрерывная функция, имеет на отрезке $[a, b]$ единственный вещественный корень $\xi \in [a, b]$. Требуется найти этот корень с заданной точностью ε . Применяя тождественные преобразования, приведем уравнение (2.1) к виду

$$x = \varphi(x). \quad (2.4)$$

Выберем произвольно приближенное значение корня (начальное приближение) $x_0 \in [a, b]$ и вычислим первое приближение $\varphi(x_0) = x_1$. Найденное значение x_1 подставим в правую часть соотношения (2.4) и вычислим $\varphi(x_1) = x_2$, и так далее, т.е.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Продолжая процесс вычислений дальше, получим числовую последовательность x_0, x_1, x_2, \dots . Если существует предел этой последовательности, то он и является приближенным значением корня уравнения (2.4). В самом деле, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$. Тогда, переходя к пределу в равенстве (2.5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ и учитывая непрерывность функции $\varphi(x_n)$ на отрезке $[a, b]$, получим $\varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ или $\xi = \varphi(\xi)$. Следовательно, предел последовательности $\{x_n\}$ является корнем уравнения (2.4).

Таким образом, корень можно вычислить с заданной точностью по

следующей итерационной формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

Геометрическая интерпретация метода простых итераций

Геометрически метод итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости XOY графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Действительный корень ξ уравнения (2.4) является абсциссой точки пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$ (рис. 2.7).

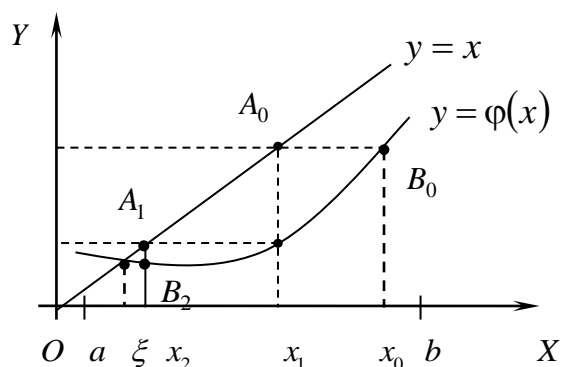


Рис. 2.7

Начиная процесс с некоторой точки $B_0(x_0, \varphi(x_0))$, строим ломаную линию $B_0A_0B_1A_1B_2\dots$ («лестница»), звенья которой попеременно параллельны оси OX и оси OY , вершины $B_0, B_1, B_2\dots$ лежат на кривой $y = \varphi(x)$, а вершины A_0, A_1, \dots – на прямой $y = x$. Общие абсциссы точек A_0 и B_1 , A_1 и B_2 , ... представляют собой соответственно последовательные приближения x_1, x_2, \dots корня ξ . В рассмотренном случае кривая $y = \varphi(x)$ пологая, $\varphi'(x) > 0$ и $|\varphi'(x)| < 1$.

Возможен другой вид ломаной $B_0A_0B_1A_1B_2\dots$ («спираль») (рис. 2.8). В этом случае последовательные приближения x_1, x_2, \dots стремятся к корню

ξ то с одной, то с другой стороны. В этом случае $\varphi'(x) < 0$, но $|\varphi'(x)| < 1$.

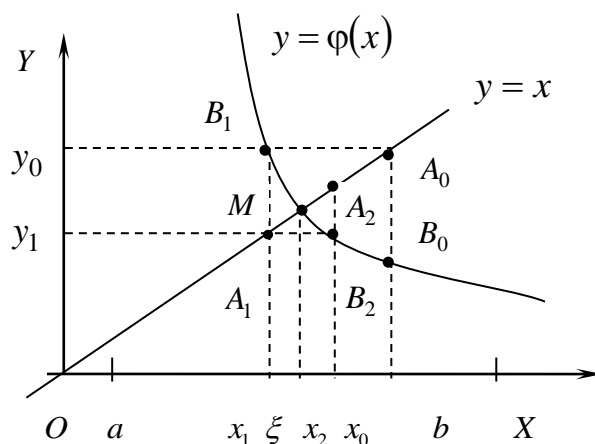


Рис. 2.8

Однако если рассмотреть случай, где $|\varphi'(x)| > 1$ (рис. 2.9), то процесс итераций расходится, т.е. последовательные приближения x_0, x_1, x_2, \dots все дальше удаляются от корня ξ и в какой-то момент могут выйти за пределы отрезка $[a, b]$. Поэтому для практического применения метода простых итераций нужно определить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

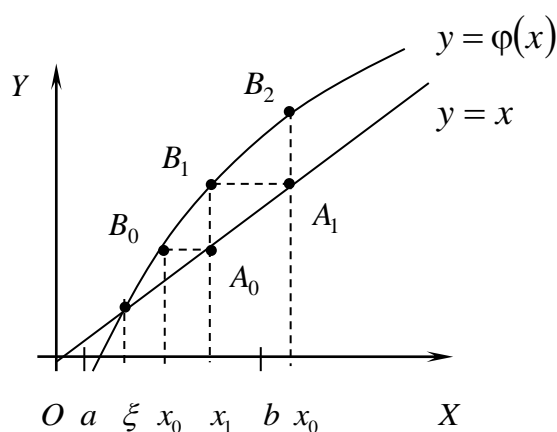


Рис. 2.9

Достаточное условие, при котором итерационный процесс, заданный формулой (2.5), сходится, определяет следующая теорема.

Теорема 2.4 (достаточные условия сходимости метода простых итераций). Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a, b]$ и выполняется условие

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \text{ при } a < x < b, \quad (2.6)$$

тогда процесс итераций, определяемый формулой (2.5), сходится независимо от выбора начального приближения $x_0 \in [a, b]$ и предельное значение $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ является единственным корнем уравнения (2.4) на отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

Рассмотрим два последовательных приближения $x_n = \varphi(x_{n-1})$ и $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. По условию теоремы x_n, x_{n+1} принадлежат отрезку $[a, b]$. Применяя теорему Лагранжа, получим:

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) \cdot \varphi'(c),$$

где точка c лежит между x_{n-1} и x_n . В силу условия (2.6)

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.7)$$

Придавая значения $n = 1, 2, 3, \dots$, получим

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &\leq q |x_1 - x_0|; \\ |x_3 - x_2| &\leq q |x_2 - x_1| \leq q^2 |x_1 - x_0|; \\ &\dots \\ |x_{n+1} - x_n| &\leq q |x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq q^n |x_1 - x_0|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рассмотрим ряд

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + x_n - x_{n-1} + \dots, \quad (2.9)$$

для частичных сумм которого выполняется соотношение $S_{n+1} = x_n$. Если докажем, что ряд (2.9) сходится, то тем самым будет доказана сходимость последовательности $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Сравним два ряда:

$$|x_0| + |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + \dots + |x_n - x_{n-1}| + \dots, \quad (2.10)$$

$$|x_0| + |x_1 - x_0| + q|x_1 - x_0| + \dots + q^{n-1}|x_1 - x_0| + \dots \quad (2.11)$$

В силу соотношений (2.8) члены ряда (2.10) не превышают соответствующих членов ряда (2.11), которые являются членами геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$. Следовательно, ряд (2.10) сходится, а ряд (2.9) сходится абсолютно. Таким образом, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi,$$

причем $\xi \in [a, b]$.

Переходя к пределу в равенстве (2.5), в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ получим

$$\xi = \varphi(\xi).$$

Следовательно, ξ – корень уравнения (2.4).

Докажем, что этот корень единственный. Предположим, что на отрезке $[a, b]$ существует еще один корень $\bar{\xi}$ уравнения (2.4) $\bar{\xi} = \varphi(\bar{\xi})$. Тогда в силу теоремы Лагранжа

$$\xi - \bar{\xi} = \varphi(\xi) - \varphi(\bar{\xi}) = (\xi - \bar{\xi}) \cdot \varphi'(\bar{c}),$$

где \bar{c} находится между ξ и $\bar{\xi}$. Отсюда $(\xi - \bar{\xi}) \cdot [1 - \varphi'(\bar{c})] = 0$. Но $|\varphi'(\bar{c})| < 1$, поэтому выражение в квадратных скобках не равно нулю. Следовательно, $\xi = \bar{\xi}$, т.е. ξ – единственный корень уравнения (2.4).

Точка ξ при этом называется неподвижной точкой для уравнения (2.4).

Приведение нелинейного уравнения $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$,

допускающему сходящиеся итерации

Выполнения достаточного условия сходимости можно добиться путем перехода от исходного уравнения $f(x)=0$ к эквивалентному виду $x = \varphi(x)$ следующим образом: умножим обе части уравнения (2.1) на неизвестную постоянную $c = \text{const} \neq 0$, $|c| < 1$, затем прибавим к обеим частям переменную x , тогда получим $x + cf(x) = x$. Обозначим через $\varphi(x) = x + cf(x)$, тогда $\varphi(x) = x$. Константа c выбирается так, чтобы выполнялось достаточное условие сходимости итерационного процесса (2.6), т.е. $|\varphi'(x)| = |1 + cf'(x)| < 1$ для всех $x \in [a, b]$. Это условие равносильно условию $-1 < 1 + cf'(x) < 1$, отсюда:

- 1) $\frac{-2}{f'(x)} < c < 0$ при $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$;
- 2) $0 < c < \frac{-2}{f'(x)}$ при $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$.

Оценка приближения

Из формулы (2.8) имеем:

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &= |x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - x_{n+k-2} + x_{n+k-2} - \dots + x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq q^{n+k-1}|x_1 - x_0| + q^{n+k-2}|x_1 - x_0| + \dots + q^n|x_1 - x_0| = q^n|x_1 - x_0| \cdot (1 + q + \dots + q^{k-1}) = \\ &= q^n|x_1 - x_0| \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q} < \frac{q^n}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Устремляя k к бесконечности и учитывая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n+k} = \xi$, окончательно получим:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|. \quad (2.12)$$

Отсюда видно, что чем меньше q , тем больше скорость сходимости итерационного процесса, заданного формулой (2.5).

Для оценки приближения можно использовать и другую формулу.

Пусть $f(x) = x - \varphi(x)$. Очевидно, что $f'(x) = 1 - \varphi'(x) \geq 1 - q$.

Учитывая, что $f(\xi) = 0$, получим:

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(\xi)| = |x_n - \xi| \cdot |f'(c_n)| \geq (1-q) \cdot |x_n - \xi|,$$

где c_n находится между x_n и ξ . Следовательно, $|x_n - \xi| \leq \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1-q}$, т.е.

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1-q}.$$

Используя формулу (2.7), получим:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.13)$$

Если $q \leq \frac{1}{2}$, то $|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$. В этом случае из неравенства

$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ вытекает неравенство $|\xi - x_n| < \varepsilon$, где ε – заданная точность.

Условия окончания итерационного процесса

Процесс итераций заканчивается при одновременном выполнении двух условий:

1) если два последующих приближения отличаются между собой по модулю на величину, не превышающую заданной точности ε , т.е. $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$. Отдельно этого критерия недостаточно, так как в случае крутизны графика, данное условие будет выполнено, но x_{n+1} может

находиться далеко от корня;

2) мера удовлетворения уравнению (2.1) последнего приближения корня: $|f(x_{n+1})| \leq \delta$. Отдельно данного критерия недостаточно, так как при пологой функции $f(x)$ это условие может быть выполнено, но x_{n+1} может находиться далеко от корня.

Достоинства и недостатки метода простых итераций

Метод простых итераций обладает следующими достоинствами:

1) является универсальным, простым для реализации на ЭВМ и самоисправляющимся, т.е. любая неточность на каком-либо шаге итераций не отразится на конечном результате, а отразится лишь на количестве итераций. Подобные ошибки устойчивы даже по отношению к грубым ошибкам (сбоям ЭВМ), если только ошибка не выбрасывает очередное приближение за пределы отрезка $[a, b]$;

2) позволяет достигнуть любой заданной точности при любом выборе начального приближения $x_0 \in [a, b]$.

Недостатки метода:

1) трудоемкость процесса приведения уравнения (2.1) к виду (2.4);

2) если начальное приближение x_0 выбрано достаточно далеко от корня, то число итераций, необходимых для достижения заданной точности, будет достаточно большое и объем вычислений возрастет.

2.4. Метод Ньютона (метод касательных) и его модификация для решения нелинейных уравнений

Пусть известно, что нелинейное уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке

$[a, b]$ единственный вещественный корень $\xi \in [a, b]$. Причем, производные $f'(x), f''(x)$ – непрерывны и сохраняют определенные знаки на отрезке $[a, b]$. Требуется найти этот корень с заданной точностью ε . Найдем какое-либо n -е приближенное значение корня $x_n \approx \xi$ ($a \leq x_n \leq b$) и уточним его методом Ньютона следующим образом.

Пусть

$$\xi = x_n + \alpha_n. \quad (2.14)$$

По формуле Тейлора получим

$$0 = f(\xi) = f(x_n + \alpha_n) = f(x_n) + \alpha_n f'(x_n).$$

Следовательно, $\alpha_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$

Внося эту правку в формулу (2.14), получим рабочую формулу метода Ньютона вида:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, \dots \quad (2.15)$$

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y = f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке (x_n, y_n) этой кривой.

Для определенности положим $f''(x) > 0$ и $f(b) > 0$. Выберем начальное приближение $x_0 = b$, для которого $f(b) > 0$. Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B_0(x_0, f(x_0))$. За первое приближение x_1 берем точку пересечения касательной с осью OX . На кривой определим точку $B_1(x_1, f(x_1))$ и проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в этой точке. Найдем следующее приближение x_2 и т.д. (рис. 2.10).

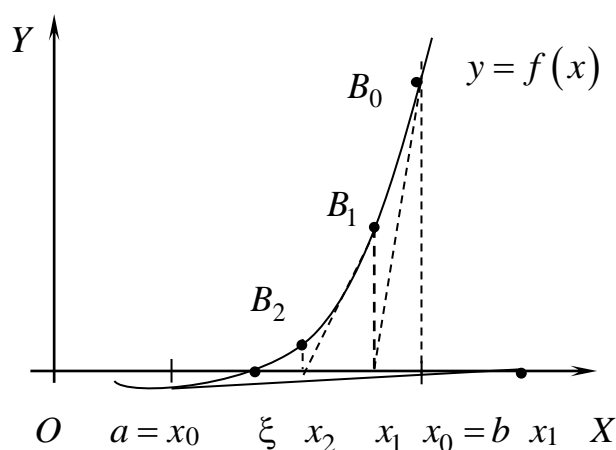


Рис. 2.10

Составим уравнение касательной в точке $B_n(x_n, f(x_n))$:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Полагая $y = 0, x = x_{n+1}$, из уравнения касательной получим итерационную формулу метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Если в качестве начального приближения взять другой конец отрезка $[a, b]$ $\tilde{x}_0 = a$, то следующее приближение $\tilde{x}_1 \notin [a, b]$.

Теорема 2.5. Если $f(a)f(b) < 0$ и производные $f'(x), f''(x)$ не равны нулю и сохраняют определенные знаки на отрезке $[a, b]$, то исходя из начального приближения x_0 , удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$, по методу Ньютона, заданному формулой (2.15), можно вычислить единственный корень ξ уравнения (2.1) с любой степенью точности.

Доказательство.

Пусть для определенности $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$ (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Из неравенства $f(x_0)f''(x_0) > 0$ следует, что $f(x_0) > 0$, т.е. $x_0 = b$.

Докажем, что все приближения x_n расположены правее ξ , т.е. $x_n > \xi$, а значит $f(x_n) > 0$.

Доказательство проведем методом индукции:

- а) $x_0 > \xi$;
- б) предположим, что $x_n > \xi$;
- с) докажем, что $x_{n+1} > \xi$.

Точное решение уравнения (2.1) можно представить в виде

$$\xi = x_n + (\xi - x_n).$$

Применяя формулу Тейлора, получим:

$$\begin{aligned} 0 &= f(\xi) = f(x_n + (\xi - x_n)) = \\ &= f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2}f''(c_n)(\xi - x_n)^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\xi < c_n < x_n$.

Так как по условию теоремы $f''(x) > 0$, то последнее слагаемое в соотношении (2.16) положительное, следовательно,

$$f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) < 0.$$

Отсюда, в силу того, что $f'(x_n) > 0$, получим:

$$\xi < x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \equiv x_{n+1}.$$

Таким образом доказали, что все последовательные приближения $x_{n+1} > \xi$, т.е. находятся правее ξ , и, следовательно, $f(x_{n+1}) > 0$.

Из соотношения (2.16), учитывая знаки $f(x_n)$ и $f'(x_n)$, следует, что $x_{n+1} < x_n$, т.е. последовательные приближения $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность. Т.е. эта

последовательность имеет конечный предел, который обозначим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{\xi}$. Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ в левой и правой частях соотношения (2.16), получим:

$$\bar{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right] = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})},$$

т.е. $\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})}$. Отсюда следует, что $f(\bar{\xi}) = 0$, т.е. $\xi = \bar{\xi}$. А это означает,

что последовательные приближения x_n сходятся к корню уравнения (2.1), что и требовалось доказать.

Вывод: в методе Ньютона в качестве начального приближения x_0 выбирается тот конец отрезка $[a, b]$, которому отвечает ордината того же знака, что и $f''(x)$, т.е. выполняется достаточное условие сходимости

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (2.17)$$

Замечание. Чем больше числовое значение $f'(x)$ в окрестности корня ξ , тем меньше поправка α_n . Поэтому методом Ньютона удобно пользоваться, когда в окрестности искомого корня ξ график функции

$y = f(x)$ имеет большую крутизну (т.е. $f'(x_n) \xrightarrow[n]{} \infty$, тогда $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow[n]{} 0$).

Если кривая $y = f(x)$ вблизи точки пересечения с осью OX почти

горизонтальная (т.е. $f'(x_n) \xrightarrow[n]{} 0$, тогда $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow[n]{} \infty$), то применять метод

Ньютона для решения уравнения (2.1) не рекомендуется.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, если считать $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Тогда достаточное

условие сходимости метода простых итераций примет вид:

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1 \text{ для всех } x \in [a, b]. \quad (2.18)$$

Если выполнено условие (2.18), то итерационный процесс, заданный формулой (2.15), будет сходиться при произвольном выборе начального приближения x_0 .

Достоинства метода Ньютона:

- 1) обладает достаточно большой скоростью сходимости, близкой к квадратичной;
- 2) достаточно простое получение итерационной формулы (2.15).

Недостатки метода Ньютона:

- 1) сходится не при любом выборе начального приближения x_0 ;
- 2) применим только, когда $f'(x) \neq 0$ для любого $x \in [a, b]$;
- 3) если в формуле (2.15) $f'(x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow \infty$ и очередное приближение x_{n+1} покидает пределы отрезка $[a, b]$, что говорит о расхождении итерационного процесса (2.15);

- 4) если в формуле (2.15) $f'(x_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow 0$ и разность между двумя соседними приближениями становится по модулю меньше заданной точности ε , но $|f(x_{n+1})| > \delta$, что говорит о заиклиивании итерационного процесса (2.15);

Модифицированный метод Ньютона позволяет решить две последние проблемы.

Если производная $f'(x)$ мало изменяется на отрезке $[a, b]$, то можно

считать, что $f'(x_n) \approx f'(x_0)$. Заменяв в формуле (2.15) $f'(x_n)$ на $f'(x_0)$, получим рабочую формулу модифицированного метода Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, n = 0, 1, \dots \quad (2.19)$$

В отличие от метода Ньютона, в модифицированном методе касательная заменяется на прямые, параллельные касательной, проведенной в точке $B_0(x_0, f(x_0))$ (рис. 2.11).

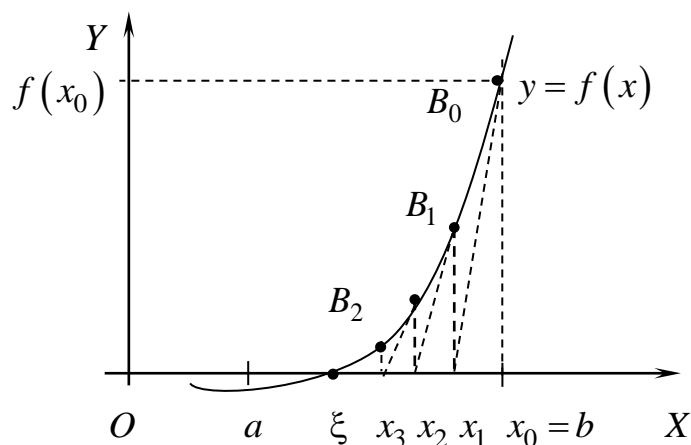


Рис. 2.11

Лабораторная работа №1-2 ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задание.

Доказать графическим и аналитическим методами существование единственного корня нелинейного уравнения

$$f(x) = e^x + x = 0 \quad (2.20)$$

на отрезке $x \in [-1, 0]$ и построить рабочие формулы метода простых

итераций, метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона, реализующие процесс поиска корня нелинейного уравнения (2.20) на указанном отрезке.

Решение.

1. Докажем *графическим методом* единственность корня нелинейного уравнения (2.20). Из графика функции $f(x) = e^x + x$ (рис 2.12) видно, что функция $f(x)$ пересекает ось OX в одной точке, являющейся приближенным значением единственного корня нелинейного уравнения (2.20).

Так как данная функция имеет сложный аналитический вид, преобразуем уравнение (2.20) к виду $e^x = -x$ и построим два графика $y = e^x$ и $y = -x$, имеющих более простой аналитический вид (рис. 2.13). Абсцисса точки пересечения графиков является приближенным значением корня. Заметим, что графический метод показывает количество корней исходного уравнения, но не доказывает единственность корня на отрезке.

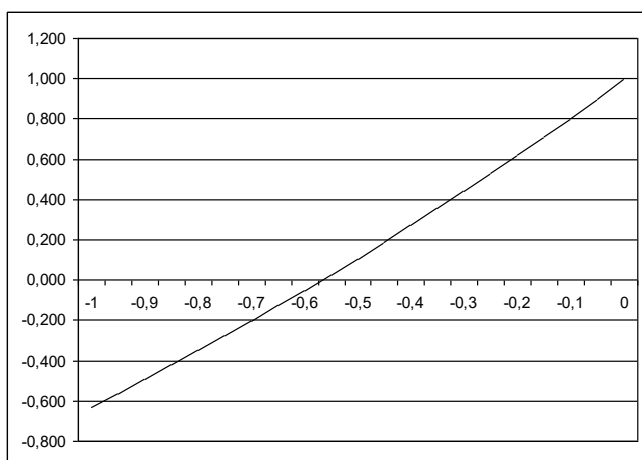


Рис. 2.12

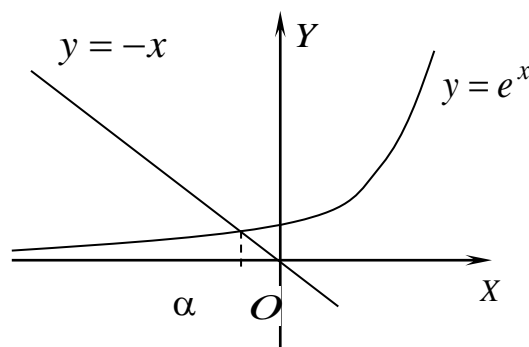


Рис. 2.13

Аналитический метод. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 0]$, имеет на концах отрезка разные знаки ($f(-1) = -0.632$; $f(0) = 1$), а производная функции $f(x)$ не меняет знак на отрезке ($f'(x) = e^x + 1 > 0 \forall x \in [-1, 0]$). Следовательно, нелинейное уравнение (2.20) имеет на указанном отрезке единственный корень.

2. *Метод простых итераций.* Построим функцию $\varphi(x) = x + cf(x)$. Константа c выбирается из достаточного условия сходимости

$$|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]. \quad (2.21)$$

Если производная $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, то значение c выбирается из интервала $\frac{-2}{f'(x)} < c < 0$, если производная $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$, то – из интервала $0 < c < \frac{-2}{f'(x)}$. Так как для рассматриваемой задачи производная $f'(x)$ всюду положительна на отрезке $[-1, 0]$, то придавая переменной x различные значения из интервала $[-1, 0]$ и выбирая наименьший интервал $\frac{-2}{f'(x)} < c < 0$, получим $-1 < c < 0$. Выбираем произвольное значение c из этого интервала. Пусть $c = -0.1$. Тогда рабочая формула метода простых итераций будет иметь вид:

$$x_{n+1} = x_n - 0.1 \cdot (e^{x_n} + x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Итерационный процесс (2.22) можно начать, задав произвольное начальное приближение $x_0 \in [-1, 0]$, а заканчивается он при одновременном выполнении двух условий:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \text{ и } |f(x_{n+1})| \leq \delta. \quad (2.23)$$

В этом случае значение x_{n+1} является приближенным значением корня нелинейного уравнения (2.20) на отрезке $[-1, 0]$.

Метод Ньютона. В качестве начального приближения x_0 здесь выбирается правый или левый конец отрезка в зависимости от того, в каком из концов выполняется достаточное условие сходимости метода Ньютона вида:

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (2.24)$$

Заметим, что в точке $x = -1$ условие (2.24) не выполняется, а в точке $x = 0$ – выполняется. Следовательно, в качестве начального приближения выбирается точка $x_0 = 0$. Рабочая формула метода Ньютона

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \dots$ для данного уравнения запишется так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} + 1}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Модифицированный метод Ньютона. Начальное приближение x_0 выбирается аналогично методу Ньютона, т.е. $x_0 = 0$. Рабочая формула модифицированного метода Ньютона $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, n = 0, 1, 2, \dots$ для данной задачи запишется так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_0} + 1}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Условия выхода итерационных процессов (2.25) и (2.26) аналогичны условиям (2.23) метода простых итераций.

2.5. Непрерывные схемы решения нелинейных уравнений

Приближенные методы решения нелинейного уравнения (2.1) можно разбить на две группы:

- дискретные схемы решения;
- непрерывные схемы решения.

Дискретные схемы решения были рассмотрены в §2.2-§2.4. Заметим, что основными недостатками перечисленных методов являются:

- зависимость от начальных условий или от интервала нахождения корня;
- сравнительно низкая скорость сходимости;
- нет правил перехода от корня к корню уравнения (2.1) в случае, если их несколько.

При применении непрерывных схем для решения нелинейного уравнения (2.1) процесс нахождения корней осуществляется путем решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \Phi(f(x), f'(x)); \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Пусть функция $f(x)$ определена и монотонна при $x > 0$ и существует конечная производная $f'(x)$. Задачу нахождения корней уравнения (2.1), являющуюся непрерывным аналогом метода простых итераций, можно рассматривать как предел при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -f(x); \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}\tag{2.28}$$

если этот предел существует. Обозначим через $x = x(t)$ решение задачи

Коши (2.28), x^* – искомое решение уравнения (2.1). Тогда должно иметь место тождество $\frac{dx^*}{dt} = -f(x^*)$. Вводя обозначение для отклонения $z(t) = x(t) - x^*$ и, вычитая из (2.28) последнее уравнение, имеем:

$$\frac{dz}{dt} = -\left(f(x) - f(x^*)\right). \quad (2.29)$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x^* с сохранением линейных членов $f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$ и подставляем полученное выражение в соотношение (2.29), получаем дифференциальное уравнение в отклонениях $\frac{dz}{dt} = -f'(x^*)z$, решение которого имеет вид

$$z(t) = Ce^{-f'(x^*)t}. \quad (2.30)$$

Заметим, что условием сходимости $x(t)$ к корню x^* является требование $f'(x^*) > 0$, так как в этом случае $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и, следовательно, $x(t) \rightarrow x^*$. Считая, что $f(x)$ монотонна при $x > 0$, последнее уравнение можно распространить на всю рассматриваемую выше область. Таким образом, условием применения непрерывной схемы метода простых итераций для решения задачи Коши (2.28) является

$$f'(x) > 0. \quad (2.31)$$

Непрерывные схемы решения обладают более высокой скоростью сходимости и более высокой точностью решения по сравнению с соответствующими дискретными схемами. Но проблема зависимости от начальных условий и отсутствие правил перехода от корня к корню в случае, когда уравнение (2.1) имеет более одного решения, остаются открытыми.

Как видно из дифференциального уравнения (2.28) и уравнения (2.1), левая часть последнего заменяется производной $\frac{dx}{dt}$. Данная замена является грубым приближением решения задачи (2.28) к решению задачи (2.1). Это влечет за собой не только большую погрешность при вычислениях, но и к снижению скорости расчетов.

Перепишем уравнение (2.1) в виде

$$\mu \frac{dx}{dt} = -f(x), \quad (2.32)$$

где μ – малый параметр, $0 < \mu \ll 1$.

Переход от задачи (2.1) к задаче (2.32) теоретически обоснован [8,9], так как интегральные кривые, являющиеся решением уравнения с малым параметром (2.32), проходят через все решения уравнения (2.1). Задачу нахождения корней этого уравнения непрерывным сингулярным аналогом метода простых итераций можно рассматривать как предел при $t \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow 0$ решения задачи Коши вида

$$\begin{aligned} \mu \frac{dx}{dt} &= -f(x), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

если этот предел существует.

Рассуждая аналогично, получим, что решение уравнения (2.32) в точке x^* будет иметь вид:

$$z(t, \mu) = C e^{-\frac{f'(x^*)}{\mu} t} \quad (2.34)$$

При этом, в силу того, что $\mu > 0$, условие сходимости (2.31) останется прежним.

Полученная модификация классических схем решения не зависит от начальных условий и обладает более высокой точностью решения. Для

доказательства более быстрой скорости сходимости предположим, что применение итерационных методов никогда не дает точного решения, и введем точность решения ε . Моменты нахождения решений с точностью ε классическими и модифицированными методами обозначим как t_1 и t_2 . Используя решения (2.30) и (2.34), запишем неравенства вида

$$z(t) = Ce^{-f'(x^*)t} \leq \varepsilon;$$

$$z(t, \mu) = Ce^{-\frac{f'(x^*)}{\mu}t} \leq \varepsilon.$$

Из соотношений видно, что $t_1 = t \leq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)}{f'(x^*)}$ и $t_2 = t \leq \frac{\mu \ln\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)}{f'(x^*)}$.

Сопоставляя полученные значения t_1 и t_2 , видим, что $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\mu}$, т.е. скорость

сходимости при решении задачи модифицированными методами в $\frac{1}{\mu}$ раз выше, чем классическими.

Лабораторная работа №3

НЕПРЕРЫВНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задание.

Определить графическим методом количество корней нелинейного уравнения

$$f(x) = e^x + x = 0 \tag{2.35}$$

на отрезке $x \in [-1, 0]$ и записать рабочую формулу метода малого параметра,

реализующую процесс поиска корней нелинейного уравнения (2.35) на отрезке.

Решение.

Отметим, что процесс определения количества корней нелинейного уравнения (2.35) на указанном отрезке был рассмотрен в лабораторной работе №1-2 [].

Согласно приведенной выше теории непрерывных схем решения нелинейных уравнений, запишем уравнение (2.35) в виде сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения $\mu \frac{dx}{dt} = -(e^x + x)$. Применяя известные схемы приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, например, методом Эйлера, с начальным приближением, равным левой границе отрезка $x_0 = -1$, запишем:

$$x_{i+1} = x_i \pm h \operatorname{sign}(e^{x_i} + x_i) \frac{1}{\mu} (e^{x_i} + x_i), i = \overline{0, n-1}.$$

Здесь знак сигнатуры $\operatorname{sign} f(x_i) = \operatorname{sign}(e^{x_i} + x_i)$ зависит от последовательного перехода к очередному корню в случае, если их несколько.

2.6. Задачи для самостоятельной работы

1. Для нелинейного уравнения $f(x) = e^x + \sin x - 1 = 0$ определить, является ли значение $x = 0$ точным или приближенным решением?
2. Определить вид уравнения:
 - 2.1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$?
 - 2.2. $f(x) = \sin 4x - e^{2x} + 3x - 1 = 0$?

2.3. $f(x) = 3x^2 - x + e^{3x} - 4 = 0$

3. Определить графическим методом количество корней нелинейного уравнения $f(x) = \sin 4x + e^x - 1 = 0$.

4. Определить аналитическим методом количество корней нелинейного уравнения $f(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 0$ на отрезке $[0.5, 2.5]$.

5. Определить знак функции $f(x)$ и производной $f'(x)$ на отрезке $[-1.2, -0.8]$ для нелинейного уравнения $f(x) = \sin x + 2x + 3 = 0$ и сделать вывод о количестве корней.

6. Для нелинейного уравнения $f(x) = \sin x + 2x + 3 = 0$ определить, какое начальное приближение из отрезка $[-1.2, -0.8]$ необходимо выбрать для сходимости итерационного процесса по методу простых итераций.

7. Сделать вывод о сходимости итерационного процесса $x_{k+1} = x_k + 0.1(e^{x_k} + x_k^2 - 2)$, $k = 0, 1, \dots$, построенного для решения нелинейного уравнения $e^x + x^2 - 2 = 0$ методом простых итераций на отрезке $x \in [-1.5; -0.5]$.

8. Определить вид нелинейного уравнения, для приближенного решения которого построена следующая итерационная формула: $x_{k+1} = x_k + c(e^{-x_k} - 3x_k^2 + 2)$, $k = 0, 1, \dots$

9. Для нелинейного уравнения $f(x) = \sin x + e^x - 1 = 0$ на отрезке $[-1.0, 0.69]$ по итерационной формуле $x_{k+1} = x_k - 0.2(e^{x_k} + \sin x - 1)$, $k = 0, 1, \dots$ и начальном приближении $x_0 = 0.56$ вычислить x_1, x_2 и найти абсолютную погрешность между точным и приближенным значением $A = 0$ и x_2 .

10. Для нелинейного уравнения $f(x) = \sin x + 2x + 3 = 0$ определить, какую из границ отрезка $[-1.2, -0.8]$ необходимо выбрать для сходимости итерационного процесса по методу Ньютона.

11. Вычислить значение x_2 по итерационной формуле метода

Ньютона для решения нелинейного уравнения $f(x) = e^x + x^2 - 2 = 0$ при $x_0 = 1$.

12. Вычислить значение x_2 по итерационной формуле модифицированного метода Ньютона для решения нелинейного уравнения $f(x) = e^x + x^2 - 2 = 0$ при $x_0 = 1$.

13. Проверить, выполняется ли одно из условий окончания итерационного процесса, если модуль разности между пятой $x_5 = 0.002$ и шестой $x_6 = 0.0015$ итерацией не превышает заданной точности $\varepsilon = 0.001$.

14. Проверить выполнение условий окончания итерационного процесса при заданных точностях $\varepsilon = 0.001$, $\delta = 0.01$, очередных приближений $x_9 = 0.003$, $x_8 = 0.0025$ и $f(x_9) = -0.0014$.

15. Записать нелинейное уравнение $f(x) = \sin(2x) - 0.1x - 0.3 = 0$ в виде сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения.

16. Определить аналитическое решение нелинейного уравнения $f(x) = 2x - 1 = 0$, а также решить его с помощью обыкновенного дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = 2x(t) - 1$ путем предельного перехода $\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$ и сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = 2x(t, \mu) - 1 \text{ при } \lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu).$$

2.7. Вопросы для самоподготовки

1. Дать определение нелинейного уравнения.
2. Дать определение решения нелинейного уравнения.
3. Дать определение приближенного решения нелинейного уравнения

и точности решения.

4. Назвать основные этапы приближенного решения нелинейных уравнений.

5. В чем состоит этап отделения корней нелинейных уравнений и какие основные методы здесь применяются?

6. В чем состоит графический метод? Приведите примеры.

7. Сформулируйте теорему о существовании хотя бы одного корня нелинейного уравнения.

8. Сформулируйте теорему о существовании единственного корня нелинейного уравнения.

9. В чем состоит аналитический метод?

10. В чем состоит этап уточнения корней нелинейных уравнений и какие основные методы здесь применяются?

11. В чем состоит метод деления отрезка пополам?

12. Привести геометрическую интерпретацию метода деления отрезка пополам.

13. Привести основные понятия, применяемые в итерационных методах.

14. В чем состоит метод простых итераций для решения нелинейных уравнений?

15. Доказать теорему о достаточных условиях сходимости метода простых итераций для решения нелинейных уравнений.

16. Привести геометрическую интерпретацию метода простых итераций для решения нелинейных уравнений (сходимость типа «лестница»).

17. Привести геометрическую интерпретацию метода простых итераций для решения нелинейных уравнений (сходимость типа «спираль»).

18. Привести геометрическую интерпретацию метода простых итераций для решения нелинейных уравнений (расходящийся процесс).

19. Описать процесс приведения нелинейного уравнения к виду, допускающему сходящиеся итерации.

20. Построить оценку приближения итерационного процесса по методу простых итераций.

21. Привести условия окончания итерационного процесса по методу простых итераций для решения нелинейных уравнений. Объяснить геометрически, почему необходимо выполнение двух условий одновременно.

22. Привести основные достоинства и недостатки метода простых итераций.

23. В чем состоит метод Ньютона для решения нелинейных уравнений?

24. Привести геометрическую интерпретацию метода Ньютона для решения нелинейных уравнений.

25. Доказать теорему о достаточных условиях сходимости метода Ньютона для решения нелинейных уравнений.

26. Привести условия окончания, основные достоинства и недостатки метода Ньютона для решения нелинейных уравнений.

27. В чем состоит модифицированный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений?

28. Привести геометрическую интерпретацию модифицированного решения нелинейных уравнений.

29. В чем состоит принципиальное отличие метода Ньютона от модифицированного метода Ньютона для решения нелинейных уравнений?

30. Какие схемы решения нелинейных уравнений применяются в

итерационных методах?

31. Назвать основные недостатки дискретных схем решения нелинейных уравнений.

32. Назвать основные достоинства непрерывных схем решения нелинейных уравнений.