

0	$A \vdash A \rightarrow A$		$\frac{A, A, A \vdash A}{A, A \vdash A \rightarrow A}$		$3 [Ax]$
1	$A \rightarrow A \rightarrow A$	ax1			$2 [I \rightarrow]$
2	A	hyp			
3	$A \rightarrow A$	MP 1, 2	$\frac{A \vdash A \rightarrow (A \rightarrow A)}{A \vdash A \rightarrow A}$	$\frac{A \vdash A}{A \vdash A}$	$1 [I \rightarrow] \quad 1 [Ax]$
			$A \vdash A \rightarrow A$		$[E \rightarrow]_0$

Γ должна быть однаковой, если не перекидываем через \vdash (однаковой в правиле)

$\vdash A \rightarrow A$	\vdash	$\frac{\Gamma_2 \vdash \dots}{\Gamma_1 \vdash \dots}$	$\vdash A \rightarrow A$	$\frac{}{\Gamma \ni \psi \vdash \psi} [Ax]$
			\uparrow	
			визг Ax	визг Hyp

0 $\vdash A \rightarrow A$
 1 $A \rightarrow A \rightarrow A$ ax1
 2 $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$ ax1
 3 $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ ax2
 4 $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ MP 1, 3
 5 $A \rightarrow A$ MP 2, 4

if Ax \Rightarrow просто выводим
 if Hyp \nearrow

if MP: $\frac{\Gamma_1 \vdash \dots \quad \Gamma_2 \vdash \dots}{\Gamma_3 \vdash \dots}$ проверяем $\Gamma_1 = \Gamma_2$? Если да $\Gamma_3 = \Gamma_1$
 иначе $\Gamma_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и все Γ выше
 $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и все Γ выше

$\vdash (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$	$\vdash A \rightarrow A \rightarrow A$
$\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$	$\vdash A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$
1	$\vdash A \rightarrow A$



Examples:

$$\frac{\frac{A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B}{? \vdash B} \quad \frac{A \vdash A}{? \vdash B}}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \dots \quad \Gamma_2 \vdash \dots}{\Gamma_3 \vdash \dots}$$

$$\Gamma_3 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = (A \rightarrow B) \cup A = A \rightarrow B, A$$

меняем Γ_1 и Γ_2 (при необход. всё, что выше тоже):

$$\frac{\frac{(A \rightarrow B), A \vdash (A \rightarrow B)}{(A \rightarrow B), A \vdash B} \quad \frac{(A \rightarrow B), A \vdash A}{(A \rightarrow B), A \vdash B}}$$

2)

$$\frac{\frac{\frac{A, B \vdash A}{A \vdash B \rightarrow A}}{\vdash A \rightarrow B \rightarrow A} \quad \frac{A \vdash A}{? \vdash B \rightarrow A}}$$

\Rightarrow

$$\frac{\frac{\frac{A, A, B \vdash A}{A, A \vdash B \rightarrow A}}{A \vdash A \rightarrow B \rightarrow A} \quad \frac{A \vdash A}{A \vdash B \rightarrow A}}$$

objects	signs
AB 1 $A \rightarrow B \rightarrow A$	Ax 1
2 A	Hyp
3 $B \rightarrow A$	MP $A \rightarrow B \rightarrow A$; A)

$$\frac{\frac{A \vdash A \rightarrow B \rightarrow A}{A \vdash B \rightarrow A} \leftarrow \frac{A \vdash A}{A \vdash B \rightarrow A}}$$

$$MP = \frac{\Gamma_1 \vdash e_1 \quad \Gamma_2 \vdash e_2}{\Gamma_3 \vdash e_3}$$

$$1) \Gamma_1 = Ax^* \quad \Gamma_2 = Ax^* \Rightarrow$$

$$1) e_1 = Ax \wedge e_2 = Ax \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \emptyset$$

$$2) e_1 = Ax \wedge e_2 = \text{Hyp} \vee e_1 = \text{Hyp} \wedge e_2 = Ax \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \text{Hyp}$$

$$3) e_1 = \text{Hyp} \wedge e_2 = \text{Hyp} \Rightarrow \Gamma_3 = e_1 \vee e_2 \text{ у } \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_2 \text{ у всех их детей тоже меняем } \Gamma \text{ (дополняем до } e_1 \vee e_2)$$

e_1
or
 e_2