МКР 1

1. Формулировка байесовской задачи распознавания.

x – признак объекта или наблюдение.
$x \in X$ - мн-во наблюдений
k – состояние объекта.
$k \in K$ - мн-во состояний
$p_{XK}(x,k)$ - совместная вер-ть того, что объект находится в состоянии k, а признак этого объекта принял значение x.
$p_{XK}(x,k): X \times K \to \mathbb{R}$
D - мн-во решений, d - решение.
$W: K \times D \to \mathbb{R}$ - это штрафная функция, такая, что $W(k,d)$ обозначает штраф, который выплачивается, когда объект находится в состоянии k и принято решение d.
$q: X \to D$ - обозначает функцию, которая каждому наблюдению $x \in X$ присваивает решение $q(x) \in D$.

Байесовская задача статистических решений состоит в том, чтобы для заданных множеств X, K, D, заданных функций $p_{XK}: X \times K \to \mathbb{R}$, $W: K \times D \to \mathbb{R}$ построить стратегию $q: X \to D$, которая минимизирует байесовский риск:

$$R(q) = \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x,k)\, W(k, q(x))$$

Решением байесовской задачи является стратегия q^*, которая минимизирует риск $R(q)$. Она называется байесовской стратегией.

2. Доказать, что для любой рандомизированной стратегии найдётся детерминированная, которая не хуже её (и описать критерий превосходства одной стратегии над другой).

Теорема. Детерминированный характер байесовских стратегий

Пусть X, K, D — конечные мн-ва, $p_{XK}: X \times K \to \mathbb{R}$ - распределение вероятностей, $W: K \times D \to \mathbb{R}$ - штрафная функция. Пусть $q_r: D \times X \to \mathbb{R}$ - рандомизированная стратегия, риск которой равен: $R_{rand} = \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x,k) \sum_{d \in D} q_r(d|x) W(k,d)$

Тогда, существует детерминированная стратегия $q: X \to D$.

$$R_{det} = \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x,k) W(k, q(x))$$ не больше, чем R_{rand}

▶

$$R_{rand} = \sum_{x \in X} \sum_{d \in D} q_r(d|x) \cdot \sum_{k \in K} p_{XK}(x,k) W(k,d).$$

$\sum_{d \in D} q_r(d|x) = 1 \; \forall x \in X$; $q_r(d|x) \geq 0 \quad \forall d \in D$ и $x \in X$

$$R_{rand} \geq \sum_{x \in X} \min_{d \in D} \sum_{k \in K} p_{XK}(x,k) W(k,d). \quad *$$

Визначимо $q(x)$ любое значение d, для которого

$$\sum_{k \in K} p_{XK}(x,k) W(k, q(x)) = \min_{d \in D} \sum_{k \in K} p_{XK}(x,k) W(k,d)$$

Підставимо в *

$$\Rightarrow R_{rand} \geq \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x,k) W(k, q(x)) = R_{det}$$ ▲

Отсюда, мы видим, что если мы ~~води~~ имеем R_{rand} и R_{det} з условиями, что описаны в теореме то критерий превосходства говорит нам о том, что если ~~$R_{rand} \geq R_{det}$~~ то $R_{rah} \geq R_{det}$ ~~$R_{det} \leq R_{rand}$. то~~

то стратегия риска R_{rand} превосходит стратегию риска R_{det}.

Быстрый подсчёт суммы подмассива

Анализируемая задача

Имеется n мерный целочисленный массив A (n принимает значение 1, 2 или 3). На вход дается два n-мерных набора целочисленных индексов l и r. Нужно посчитать значения выражения. $\sum\limits_{l_i \le x_i \le r_i} A_x \quad i = \overline{1, n}$

$n = 1$ Одновимірний випадок

Визначення.

Cumulative sum - масив кожен ел-т якого є сумою всіх попередніх.

Наприклад: 0, 1, 1, 2, 4, 8....

В одновимірному випадку ми маємо масив чисел.

$[a_1, a_2, a_3, a_n \ldots] = $ Array

Ми маємо порахувати cumulative sum для нього.

$[C_a_1, C_a_2, C_a_3, \ldots] = $ C_Array.

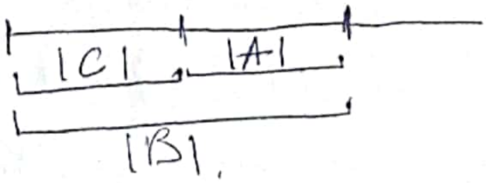
Задача: знайти суму будь-якого підмасиву в Array.

Наприклад: $[a_1, a_2, a_3, \underbrace{a_4, a_5, a_6}_{?=X.}, a_7, a_8, \ldots]$

$[\underbrace{C\_a_1, C\_a_2, C\_a_3}, \underbrace{C\_a_4, C\_a_5, C\_a_6}, C\_a_7, C\_a_8, \ldots]$

Тоді $X = C\_a_6 - C\_a_3$.

В теорії множин.



$\Rightarrow |A| = |B| - |C|.$

n = 2. Двовимірний випадок. Summed area-tabe

У даному випадку ми матимемо двовимірний ма... чисел.

Наприклад

6	3
4	7

$\xrightarrow{\text{cumulative sum}}$

6	9
10	25

Нехай нам потрібно знайти таку область.
Необхідно пам'ятати, що 25 – це сума всіх квадратів, а нам потрібно знайти квадрат, що позначено кольором.
Давайте позначимо шуканий квадрат точками.

6 A	9	B
10	25	
C		D

S(A)

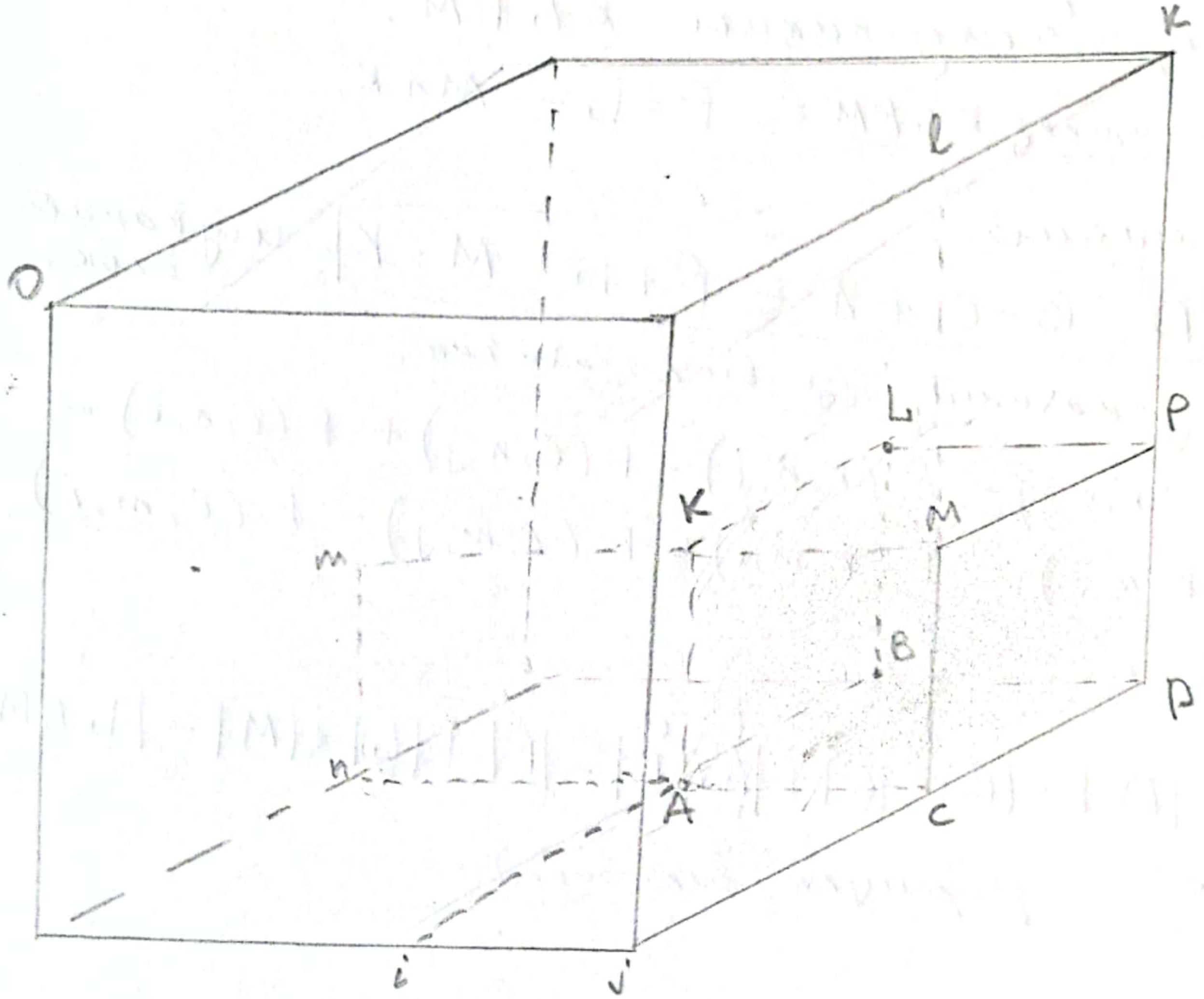
Нехай S(A) це квадрат, який має значення 6.
Аналогічно з B та C і D.
Виведемо формулу:
Нам потрібно знайти ABCD квадрат.
Тоді оскільки S(C) – це сума 6 і 4 = 10 вона в собі вклю-чає S(A) так само як і S(B).
Тоді S(D) – S(C) – S(B) + S(A) = <u>шукана сума</u>
Ми додали S(A) бо вона міститься в S(C) і S(B).
В теорії множин це виглядатиме так:

$$|X| = |D| - |C| - |B| + \cancel{A}|C \cap B|$$

Таким чином, якщо це все перевести в числа, маємо: 25 – 10 – 9 + 6 = 7.
Звідси, можна сказати що виведена формула є вірною для двовимірного випадку.

Тривимірний випадок

…з випадок із тривимірним масивом. Оскільки [illegible] інтерпретацію буде складно показати графічно, то покажемо як це буде виглядати як тривимірний простір:



Тривимірний випадок тем буде представляти собою формулу включень виключень. Запишемо наші суми і позначимо через „F".

$D = F(k, n, j)$
$B = F(k, n, i)$
$L = F(k, m, i)$
$P = F(k, m, j)$
$C = F(l, n, j)$
$A = F(l, n, i)$
$K = F(l, m, i)$
$M = F(l, m, j)$

Отже точка A – це сума (блок) межі якого l, n, i. Аналогічно тоді D – це сума всього блоку.

Виведемо формулу

$D - B - C + A$ це буде сума всього, що знаходиться над прямокутником $ABDC$.

Отже, щоб знайти шуканий блок нам потрібно знайти все що знаходиться над прямокутником $KLPM$.

$$\text{все\_що\_над } KLPM = P - L - M + K.$$

Тоді маємо

$X = \boxed{D - B - C + A - P + L + M - K}$ – шуканий блок.

З координатами буде виглядати так.

$X = F(k,n,j) - F(k,n,i) - F(l,n,j) + F(l,n,i) - F(k,m,j) + F(k,m,i) + F(l,m,j) - F(l,m,i).$

В теорії множин

$$|X| = |D| - |B| - |C| + |\overset{B}{A} \cap \overset{C}{B}| - |P| + |L| + |M| - |L \cap M|$$

Це буде формула вкл-вика

6. Постановка задачи и стратегия распознавания суммы цифр с шумом Бернулли ... . шум с помощью исключающего "ИЛИ".

X – мн-на зображень з числами. ; $X = \{0,1\}^{n \times mt}$

K – мн-на можливих невід'ємних чисел.

$$\begin{cases} k \in N_0 \\ k < 10^t, t \in N \end{cases}$$

$D = \{0, \dots, 9t\}$.

Y – впорядкований набір еталонів $z: \overline{0,9}$

$Y_z \in \{0,1\}^{n \times m}$.

ξ – шум $\xi_{ij} \sim Bern(p)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,mt}$

$X = (Y_{k_1} \circ Y_{k_2} \dots \circ Y_t) \oplus \xi$ — вхідне зобр.

$$p(X,k) = p(X/k)p(k) = p(X = (Y_{k_1} \circ \dots \circ Y_{k_t}) \oplus \xi / k)p(k) =$$

$$= P(\xi = (Y_{k_1} \circ \dots \circ Y_{k_t}) \oplus X)\, p(k) = \{\text{нез-ні}\} =$$

$$= P(\xi^1 = Y_{k_1} \oplus X^1, \dots, \xi^t = Y_{k_t} \oplus X^t) \cdot \prod_{i=1}^{t} p(k_i)$$

$$P(X,k) = \prod_{i=1}^{t} p(\xi^i = Y_{k_i} \oplus X^i)\, p(k_i)$$

<u>$t=1$</u>

$$p(X^1, k = d_1) = p(X^1, d_1), \quad d_1 = \overline{0,9}$$

<u>$t=2$</u>

$$p(X^{1,2}, k_1 + k_2 = d_2) = \sum_{k_2} p(X^1, d_2 - k_2)\, p(X^2, k_2).$$

$0 \le d_2 - k_2 \le 9$, $0 \le d_2 \le 18$.

сума цифр двоцифр. числа

<u>$t=3$</u>

$$p(X^{1,2,3}, k_1 + k_2 + k_3 = d_3) =$$

$$= \sum_{k_3} p(X^{1,2}, d_3 - k_3)\, p(X^3, k_3) \quad 0 \le d_3 - k_3 \le 18.$$

$0 \le d_3 \le 27$.

<u>$t=t$</u>

$$P(X, d_t) = \sum_{k_t} p(X^{1,\dots,t-1}, d_t - k_t)\, p(X^t, k_t) \quad 0 \le d_t - k_t \le 9(t-1)$$

$$p(X, d') = \sum_{\substack{k' \\ \sum_{t=1}^{t} k'_t = d'}} p(X, k = k') = \sum_{\substack{k' \\ \sum \dots}} \prod_{i=1}^{t} p(X^i, k_i = k_i') \circledequal$$

$$p(X^i, k_i) = p(\xi = y^{k_i} \oplus X^i)\, p(k_i) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \prod_{s=1}^{m} p^{y_{js}^{k_i} \oplus \cancel{X}_{js}^{i}} (1-p)^{1 \oplus y_{js}^{k_i} \oplus X_{js}^{i}} p(k_i)$$

$$\circledequal \sum_{k'} \prod_{i=1}^{t} \prod_{j,s}^{n,m} \left(p^{y_{js}^{k_i} \oplus X_{js}^{i}} (1-p)^{1 \oplus y_{js}^{k_i} \oplus X_{js}^{i}} \cdot p(k_i)\right) \to \max_{d' \in D}$$

маємо дуже малі числа, зле уникнення!

$$p(d|X) = \frac{p(X|d)\, p(d)}{\sum_{d' \in D} p(X|d')\, p(d')} \circledequal \left\{ \frac{p(X,k)}{p(X)} = \sum_{k'} p(k'|X) \right. =$$

$$= \sum_{k'} \prod_{i=1}^{t} \frac{p(X_i^{i} | k'^{i})}{\sum_{k_i=0}^{9} p(X^i, k_i)} \Bigg\} \circledequal \left\{ \begin{array}{c} \text{функція знак} \\ \text{суми і добутку} \end{array} \right\} \#$$

$$\# \quad \frac{p(X^i, k^i)}{\sum_{k_i=0}^{9} p(X^i, k_i)} = \frac{\prod_{j,s}^{n,m} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{y_{js}^{k_i'} \oplus X_{js}^{i}} (1-p)\, p(k_i')}{\sum_{k_i=0}^{9} \prod_{j,s}^{n,m} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{y_{js}^{k_i} \oplus X_{js}^{i}} (1-p)\, p(k_i)} =$$

$$= \underbrace{p(k_i') \left(\sum_{k_i=0}^{9} \prod_{j,s}^{n,m} \left(\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\left(y_{js}^{k_i} \oplus X_{js}^{i}\right) - \left(y_{js}^{k_i'} \oplus X_{js}^{i}\right)} \right) \cdot p(k_i') \right)^{-1}}$$

$$p(d|X) = \sum_{k'} \prod_{i=1}^{t} \Big(\quad \Big)$$

3. Постановка задачи и стратегия распознавания символов $\left(P(k) = \frac{1}{|K|}\right)$ на монохромных изображениях x (пиксель - чорный или белый) с шумом Бернулли $p(x) = p^{x}(1-p)^{1-x}$ при штрафной ф-ии $w(k,k') = \mathbb{1}(k \neq k')$

$K = \{0, \ldots, 9\}$; $X = \{0,1\}^{n \times m}$ ← картинка для розпізнавання (бінарна матриця $n \times m$).

$W = \mathbb{1}\{k \neq d\}$ - штрафна ф-я.

$Y = \langle y_0, \ldots, y_9 \rangle$, $y_i \in \{0,1\}^{n \times m}$ ← „еталонні матриці" (без шуму).

$N = \{\xi_{11}, \ldots, \xi_{1n}, \xi_2, \ldots, \xi_{n,m}\}$;

$\xi \sim Bern(p)$, ξ_{ij} - н.о.р.,

$X = y_i \oplus N$; N - шум.

$k^* = \arg\max_k p(X,k)$.

XoR: ⟶ вл-ті: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.
$a \oplus b = b \oplus a$.
$a \wedge (b \oplus c) = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c)$

Абелева група
0 - нейтральний. → $\{\{1,0\}, \oplus\}$
$a \oplus a = 0$.

Ми маємо $X = y_i \oplus N$

$y_i : K \to Y$, $\forall i = \overline{0,9}$

$P_{XK}(\xi = X, \eta = k)$ - об'єкт в стані k, а признак x прийняв значение x.
вип. величини

$p_{XK}(x,k) = P_{X|K}(x|k) \cdot P_K(k)$

всі $k \in K$ - незалежні: $P_K(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{|K|}$

$k^* = \arg\max_K P_{XK}(x,k) = \arg\max_k P_{X|K}(x|k)\, P_K(k) =$ ~~додат~~ поксоримо зправа на y_i

$= \arg\max_k p(\cancel{N = X}\ X = y_i \oplus N \mid k) \cdot \frac{1}{|K|} =$

$= \arg\max_k p \frac{(N = X \oplus Y, k)}{P_K = \frac{1}{|K|}} \frac{1}{|K|} = \arg\max_k P(N = X \oplus y_i, k) =$

$= \arg\max_k p(N = X \oplus y_k) = \arg\max \prod_{i,j=1,1}^{n,m} p^{x_i \oplus x_j}(1-p)^{1 \oplus x_i \oplus y_j} =$

$= \arg\max_k \prod_{i,j=1,1}^{n,m} \left(x_i \oplus x_j \ln p + (1 \oplus x_i \oplus y_j)\ln(1-p)\right).$

8. Мінімізація $S.p$ при $W(k,k') = (k-k')^2$ k-дискретное и его выпуклого замыкания в качестве мн-ва решения D

$$R(q,x) = \sum_x \sum_k p(x,k)\left(k - q(x)\right)^2$$

$$R(q) = \sum_x R(q,x)$$

доданки незалежні, тому можемо мінімізувати окремо

$$0 = \frac{dR(q,x)}{dq(x)} = -2\left(\sum_k p(x,k)\,(k - q(x))\right) =$$

$$= -2\sum_k p(x,k)\cdot k + 2\,q(x)\sum_k p(x,k) = 0.$$

$$\Rightarrow q(x)\sum_k p(x,k) = \sum_k p(x,k)\,k.$$

$$\Rightarrow q(x) = \frac{\sum_k p(x,k)\cdot k}{\sum_k p(x,k)} = \frac{\sum_k p(x,k)\,k}{p(x)} =$$

$$= \sum_k \frac{p(x,k)}{p(x)}\,k = \sum_k k\cdot p(k|x) = M(k|x) = q(x)$$

6. Стратегия определения оптимального места высадки спас. транспорта для группы тур. ... $W = \mathbb{1}(|k - k'| > d)$ (ограниченность ресурсов туристов.)

$W(k, k') = \mathbb{1}\{|k' - k| > d\}$ - штрафна ф-я.

$p_{XK} : X \times K \to \mathbb{R}$, - розподіл ймов-ей.

$q : X \to K$ - стратегія.

X, K — мн-на станів / мн-на сигналів

мінімізуємо ризик

$$R(q) = \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p(x, k) \cdot w(k, q(x))$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x, k)\, \mathbb{1}\{|k - q(x)| > d\} \to \min_{q(x) \in K\ \forall x \in X}$$

$$q^* = \operatorname*{argmin}_q \left(\sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x, k) \cdot \mathbb{1}\{|k - q(x)| > d\} \right) = \left\{ \begin{array}{l} P = 1 - \bar{P} \\ \Rightarrow |k - q(x)| \le d \end{array} \right\} =$$

$$= \operatorname*{argmin}_q \left(1 - \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x, k) \cdot \mathbb{1}(|k - q(x)| \le d) \right) = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{argmin}(-a) \\ = \operatorname{argmax}(a) \\ 1 - \text{від } q \text{ не зал} \end{array} \right.$$

$$= \operatorname*{argmax}_q \left(\sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x, k)\, \mathbb{1}\{|k - q(x)| \le d\} \right)$$

$$= \{ \text{просумуємо для } k^* \in K : |k - q(x)| \le d \} =$$

$$= \operatorname*{argmax}_q \sum_{x \in X} \sum_{k^*} p_{XK}(x, k) = q^*.$$

$k \in K : |k - q(x)| \le d.$

7. $w = |k - k'|$

$X, K, p_{XK}: X \times K \to R$; $w: K \times K \to \mathbb{R}$

$q: X \to K$; $w(k,k') = |k-k'|$.

$$R(q) = \sum_{x} R(q,x).$$

$$\cancel{R(q,x)}\ R(k,x) = \sum_{k} p_{XK}(x,k)\,|k^* - k|$$

$$R(k,x) \longrightarrow \min_{q(x)\in K,\, x\in X}$$

$$R(k,x) = \sum_{k^*>k} p_{XK}(x,k^*)(k^*-k) - \sum_{k^*\le k} p_{XK}(x,k^*)(k^*-k)$$

модуль випуклий => існує екстремум мінімум.

нехай k^* - шукаємо мінімум

$$R(k,x) - R(k+1,x) \le 0$$

$$R(k,x) - R(k-1,x) \le 0$$

$$R(k,x) = \sum_{k^*\le k} p_{XK}(x,k^*)(k-k^*) + \sum_{k^*>k} p_{XK}(x,k^*)(k^*-k)$$

$$R(k+1,x) = \sum_{k^*< k+1} p_{XK}(x,k^*)(k+1-k^*) + \sum_{k^*\ge k+1} p_{XK}(x,k^*)(k^*-k-1) =$$

$$= \sum_{k^*\le k} p_{XK}(x,k^*)(k-k^*) + \sum_{k^*>k} p_{XK}(x,k^*)(k^*-k) +$$

$$+ \sum_{k^*\le k} p_{XK}(x,k^*) - \sum_{k^*>k} p_{XK}(x,k^*).$$

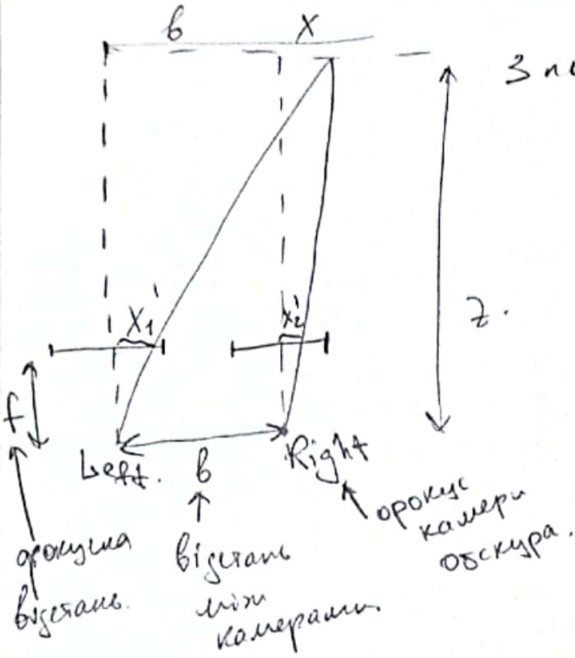
$$R(k,x) \le R(k+1,x) \Rightarrow -\sum_{k^*\le k} p_{XK}(x,k^*) + \sum_{k^*>k} p_{XK}(x,k^*) \le 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k^*>k} p_{XK}(x,k^*) - \sum_{k^*\le k} p_{XK}(x,k^*) \le 0}$$

$$\boxed{\sum_{k^*>k} p_{XK}(x,k^*) + \sum_{k^*\le k} p_{XK}(x,k^*) \ge 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k^*\le k} p_{XK}(x,k^*) \ge \frac{1}{2}$$ і аналог для

9. Постановка и алгоритм решения задачи бинокулярного стереоскопического зрения для однострочных чёрно-белых изобр-ий



З подібності трикутників

$$\frac{x_1'}{b+x} = \frac{f}{z} \Rightarrow b = \frac{x_1' \cdot z}{f} - x$$

$$\frac{x_2'}{x} = \frac{f}{z} \Rightarrow x = \frac{z \cdot x_2'}{f}$$

$$\Rightarrow b = z\,\frac{(x_1' - x_2')}{f} \Rightarrow z = \frac{b \cdot f}{\underbrace{x_1' - x_2'}_{disparity}}$$

L, R – ліве та праве зображення; $L \in [0,1]^{n\times m}$, $R \in [0,1]^{n\times m}$

y_1, y_2 – координати проекцій об'єкта, $d = y_1 - y_2$ – disparity

$z = \frac{b \cdot f}{d}$;

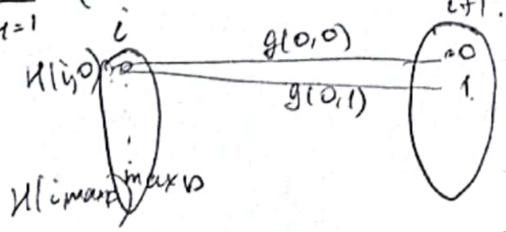
	y_1	y_2
r		

$L^r(y_1)$ – конкретний піксель r-ої стрічки y_1-стовпчика.

$H(r, y, d) = (L(r, y_1) - R(r, y_1 - d))^2$ – унарний штраф.

$g(d, d') = (d - d')^2$ – штраф.

$$\sum_{y_1=1}^{m} (H(r, y_1, d(r, y_1))) + \alpha \sum_{y_1=1}^{m-1} (g(d(r, y_1), d(r, y_1+1))) \to \min_{d:\, N\times M \to D}$$



$$f_1(d^1) = H(r, 1, d^1) \quad \forall d^1 \in D$$

$$f_2(d^2) = \min_{d_1 \in D} (f_1(d^1) + g(d^1, d^2) + H(r, 2, d^2)) \quad \forall d_2 \in D$$

$$f_m(d^m) = \min_{d^{m-1} \in D} (f_{m-1}(d^{m-1}) + g(d^{m-1}, d^m) + H(r, m, d^m)) \quad \forall d^m \in D$$

$$d^i = \arg\min_{d^i \in D} \Big(\min_{\underbrace{d^1, \dots, d^{i-1}}_{невідомо}, \underbrace{d^{i+1}, \dots d^m}_{відомо}} \Big(\sum_{y_1=1}^{m} H + \alpha \sum_{y_1=1}^{m-1} g \Big)\Big) =$$

$$= \arg\min_{d^i \in D} \Big(\min_{d^1, \dots d^{i+1}} \Big(\sum_{y_1=1}^{i+1} H + \alpha \sum_{y_1=1}^{i} g \Big)\Big) =$$

$$= \arg\min_{d^i \in D} \big(f_i(d^i) + g(d^i, d^{i+1}) \big)$$

Дана квадратична функція: $F(x) = ax^2 + bx + c$.
Вона обмежена знизу функцією Хевісайда зсунутою вправо на відоме число $k > 0$.
Функція Хевісайда $H(x) = \mathbb{1}(x \geq 0)$.

$F(x) \geq 0$, $x < k$

$F(x) \geq 1$ $x > k$

У відомій точці z існує рів-ть $F(z = 0)$, $z < k$.

Задача 1

Довести, що $F(y) = 0 \Leftrightarrow y = z$.

Будемо доводити від супротивного.

Нехай існує $y \neq z$ такий що $F(y) = 0$

тоді $y < k$.

Для доведення і правильної реалізації потрібно довести, що вітки параболи направлені вгору а значить $\boxed{a \geq 0.}$

доведемо від супротивного

Нехай $a < 0$ тоді $F(x) \to -\infty$, $x \to +\infty$

~~тоді~~ бо від'ємний знак при старшому степені

звідси існує якесь число d, що $\forall x > d$ $F(x) < 0$.

а це не може бути, бо не відповідає умовам.

Так як ми допускаємо, що є два корені y та z. можемо розкласти $F(x)$

$F(x) = (x - z)(x - y)a = ax^2 + ayz - ax(y + z) =$

$= ax^2 - ax(y+z) + ayz.$

Знаходимо похідну

$F'(x) = 2ax - a(y+z) \Rightarrow F'(x) = 0$

$\Rightarrow 2ax - a(y+z) = 0 \Rightarrow x = \frac{y+z}{2}$ ← вершина параболи.

Scanned with CamScanner

$F'(x) > 0$ звідси $\frac{y+z}{2}$ - точка мінімуму.

$F\left(\frac{y+z}{2}\right) < F(y) = 0 \quad k > y$

$F\left(\frac{y+z}{2}\right) < F(z) = 0 \quad k > z.$

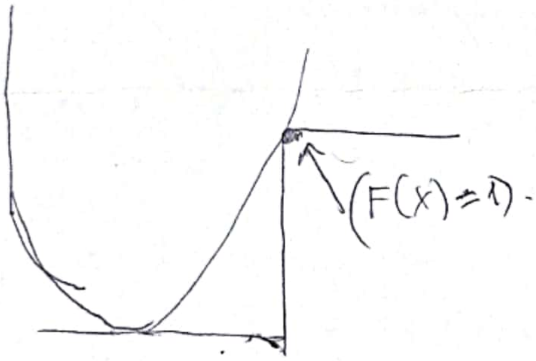
Звідси $F\left(\frac{y+z}{2}\right) < 0$ - протиріччя з умовами задачі.

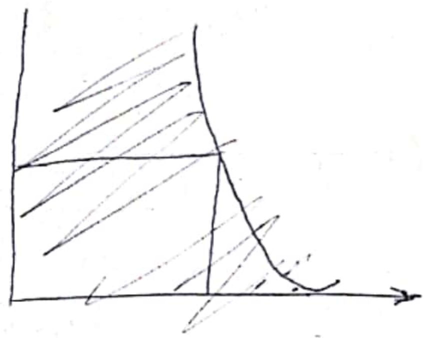
Так як. для $\forall x < \frac{y+z}{2} \quad F'(x) < 0$

$\forall x > \frac{y+z}{2} \quad F'(x) > 0$

Задача 2.

Довести, що $x \geq k$ і $F(x) = 1 \Rightarrow x = k$





Нехай задача 1 виконується, тоді з даних обмежень існує $x \geq k$ $F(x) = 1$. Доводимо від супротивного.

Існує $z > k$: $F(z) = 1$. Оскільки $F'(x) > 0$ при $x \in (y; +\infty)$ тоді $F(k) < F(z)$.

Виходить, що для будь-якого $x \in (k, z) \Rightarrow F(z) > F(x) > F(k)$

Тоді $F(x) < 1$. - а це суперечить з умовами задачі.

12. Нер-во Кантелли

$$\sum_{x \le c} p(x) \longrightarrow \max_{p : x \mapsto [0,1]}$$

$$\begin{cases} \sum_{x \in X} 1 \cdot p(x) = 1. \\ \sum_{x \in X} x\, p(x) = 0 & \text{- мат. ожид.-} \\ \sum_{x \in X} x^2 p(x) = a & \text{- дисперсия.} \\ p(x) \geq 0, \ \forall x \in X. \end{cases} \quad \Bigg| \begin{matrix} \varepsilon \\ h \\ \delta \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ x & 0 & h \\ x^2 & a & \delta \\ 1 & 0 & z. \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & x & x^2 & 10 \\ 1 & 0 & a. & \\ \varepsilon & h & \delta & z. \end{matrix}$$

$$\varepsilon + a\delta \to \min_{\varepsilon, \delta}$$

$$\varepsilon + hx + \delta x^2 \geq 0 \ ; \ x > c.$$

$$\varepsilon + hx + \delta x^2 \geq 1 \ : \ x \leq c.$$

? $\nexists x_0 > c : p(x_0) > 0.$ – возможен ли такой случай.

$$\sum_{x \in X} p(x) x = \sum_{x \le c} x\, p(x) \le \sum_{x \le c} c\, p(x) = c \sum_{x \le c} p(x) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$D(c) = 0.$

$\Rightarrow$ противоречие.

$\exists / x_1 \le c : p(x_1) > 0!$

$\exists !\ x_0\ p(x_0) \neq 0 \Rightarrow Mx = x_0 p(x_0) = x_0$

$\Rightarrow x_0 = 0$ $Dx = x_0^2 = 0 \Rightarrow$ не может быть

$$\Rightarrow \begin{cases} p_0 + p_c = 1 \\ x_0 p_0 + c p_c = 0 \\ x_0^2 p_0 + c^2 p_c = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 1 - p_c \\ x_0 = \dfrac{-c p_c}{p_0} \\ x_0^2 p_0 + c^2 p_c - a = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow x_0^2 p_0 + c^2 p_c - a = \frac{c^2 p_c^2}{p_0^2} p_0 + c^2 p_c - a =$$

$$= c^2 p_c^2 + c^2 p_c p_o - a p_o = 0$$

$$p_o = 1 - p_c$$

$$\Rightarrow c^2 p_c^2 + c^2 p_c (1 - p_c) - a(1 - p_c) = 0$$

$$\Rightarrow p_c = \frac{a}{(c^2 + a)}$$

9. Задача Неймана – Пірсона

$K = \{1, 2\}$ – два состояния; X – мн-во признаков, $p(x|k)$

$p : X \times K \to \mathbb{R}$; 1 – сост. – безопасное. 2 – сост. – опасное.

$p(k)$ – неизвестно

$\varepsilon \in \mathbb{R}$.

$\sum_{x \in X} p(x|1) \cdot q(2|x)$ – вер-ть ложной тревоги;

$\sum_{x \in X} p(x|2) \cdot q(1|x)$ – вер-ть пропуска;

Запишемо задачу лінійного прогр.

$$\sum_{x \in X} p(x|1)\, q(2|x) \to \min$$

$$\begin{cases} -\sum_{x \in X} p(x|2)\, q(1|x) \geq -\varepsilon & \varphi \\ q(1|x) + q(2|x) = 1 & \gamma(x) \\ q(1|x), q(2|x) \geq 0 \end{cases}$$

=> запишемо двоїсту задачу.

$$-\varepsilon \varphi + \sum \gamma(x) \to \max.$$

$$\begin{array}{l} q(1|x): \\ q(2|x): \\ \\ \end{array} \begin{cases} \gamma(x) - p(x|2) \cdot \varphi \leq 0 \\ \gamma(x) - p(x|1) \leq 0 \\ \varphi \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma(x) \leq p(x|2)\varphi \\ \gamma(x) \leq p(x|1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad p(x|2)\varphi < p(x|1) \Rightarrow \varphi < \frac{p(x|1)}{p(x|2)} \Rightarrow q(1|x) = 1.$$

$$p(x|2)\varphi > p(x|1) \Rightarrow \varphi > \frac{p(x|1)}{p(x|2)} \Rightarrow q(2|x) = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p(x|1)}{p(x|2)} \underset{2}{\overset{1}{\gtrless}} \varphi}$$

10. Задача Вальда

$K = \{1, 2\}$

$q : D \times X \to \mathbb{R}$

$D = \{1, 2, 0\}$ „not known".

Задача

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \sum_x p(x/1)\, q(0/x) \\ \sum_x p(x/2)\, q(0/x) \end{array} \right\} \to \min.$$

Пряма задача

$$C \to \min$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{x \in X} p(x/1)\, q(0/x) \le C & \varphi(1) \\ \sum_{x \in X} p(x/2)\, q(0/x) \le C & \varphi(2) \\ \sum_{x \in X} p(x/1)\, q(2/x) \le \varepsilon & \theta(1) \\ \sum_{x \in X} p(x/2)\, q(1/x) \le \varepsilon & \theta(2) \\ q(1/x) + q(2/x) + q(0/x) = 1,\ x \in X & \gamma(x). \\ q \ge 0 & \end{array} \right.$$

Перепишемо в іншому вигляді:

$$-C \to \max$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_x p(x/1)\, q(0/x) - C \le 0 & \varphi(1) \\ \sum_x p(x/2)\, q(0/x) - C \le 0. & \varphi(2) \\ \sum_x p(x/1)\, q(2/x) \le \varepsilon. & \theta(1) \\ \sum_x p(x/2)\, q(1/x) \le \varepsilon. & \theta(2) \\ q(1/x) + q(2/x) + q(0/x) = 1,\ x \in X. & \gamma(x) \\ q \ge 0 & \end{array} \right.$$

$\varphi(1)$, $\varphi(2)$

Двоїста задача

$$\varepsilon\,\Theta(1) + \varepsilon\,\Theta(2) + \sum_{x\in X} f(x) \to \min$$

$$\begin{cases} q(0/x): & f(x) + p(x/2)\,\varphi(2) + p(x/1)\cdot\varphi(1) \geq 0 \\ q(1/x): & f(x) + p(x/2)\,\Theta(2) \geq 0 \\ q(2/x): & f(x) + p(x/1)\,\Theta(1) \geq 0 \\ c: & -\varphi(1) - \varphi(2) = -1 \\ & \varphi(1)\,\varphi(2)\cdot\Theta(1)\,\Theta(2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\min\begin{Bmatrix} p(x/2)\varphi(2) + p(x/1)\varphi(1) \\ p(x/2)\,\Theta(2) \\ p(x/1)\,\Theta(1) \end{Bmatrix}$$

Отказ

$$\begin{cases} p(x/2)\,\varphi(2) + p(x/1)\,\varphi(1) < p(x/2)\,\Theta(2) \\ p(x/2)\,\varphi(2) + p(x/1)\,\varphi(1) < p(x/1)\,\Theta(1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(x/1)\varphi(1) < p(x/2)\,(\Theta(2) - \varphi(2)). \\ p(x/1)\,(\varphi(1) - \Theta(1)) < -p(x/2)\,\varphi(2) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{p(x/1)}{p(x/2)} < \frac{\Theta(2) - \varphi(2)}{\varphi(1)}}; \quad \frac{\varphi(1) - \Theta(1)}{\varphi(2)} < -\frac{p(x/2)}{p(x/1)}.$$

$$\to \frac{\Theta(1) - \varphi(1)}{\varphi(2)} > \frac{p(x/2)}{p(x/1)} \Rightarrow \boxed{\frac{p(x/1)}{p(x/2)} > \frac{\varphi(2)}{\Theta(1) - \varphi(1)}}$$

1. $$\begin{cases} p(x/2)\,\Theta(2) < p(x/2)\,\varphi(2) + p(x/1)\,\varphi(1) \\ p(x/2)\,\Theta(2) < p(x/1)\,\Theta(1). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(x/2)(\Theta(2) - \varphi(2)) < p(x/1)\varphi(1) \\ \boxed{\frac{p(x/1)}{p(x/2)} < \frac{\Theta(2)}{\Theta(1)}}, \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{p(x/1)}{p(x/2)} < \frac{\Theta(2) - \varphi(2)}{\varphi(1)}}$$

2. $$p(x/1)\,\Theta(1) < p(x/2)\,\varphi(2) + p(x/1)\,\varphi(1).$$

$$p(x/1)\,\Theta(1) < p(x/2)\,\Theta(2).$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p(x/1)}{p(x/2)} < \frac{\Theta(2)}{\Theta(1)}}$$

$$p(x/1)(\Theta(1) - \varphi(1)) < p(x/2)\,\varphi(2).$$

$$\boxed{\frac{p(x/1)}{p(x/2)} < \frac{\varphi(2)}{\Theta(1) - \varphi(1)}}.$$

5. $$G(\bar{\varphi}) = \sum_{t\in T} \max_{k\in K} \left[f_t(k) - \sum_{t'\in N(t)} \varphi_{tt'}(k) \right] + \sum_{tt'\in T} \max_{k\in K, k'\in K} \left[g_{tt'}(k,k') + \right.$$

$$\left. + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k')) \right] \longrightarrow \min_{\bar{\varphi}}$$

$\forall \varphi : \mathcal{T}\times K \to \mathbb{R}$ выполняется.

$$\begin{cases} f'_t(k) = f_t(k) - \sum_{t'\in N(t)} \varphi_{tt'}(k), \\ g'_{tt'}(k,k') = g_{tt'}(k,k') + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k') \end{cases}$$

Из св-в задачи ЛП следует:

$$\max_{\bar{k}\in K^T} F(\bar{k}) \le \max_{\substack{\bar{\alpha}\in \mathbb{R}^{\mathcal{T}\times K} \\ \bar{\beta}\in\mathbb{R}^{\mathcal{T}\times K\times K}}} F_\tau(\bar{\alpha},\bar{\beta}) = \min_{\bar{\varphi}\in\mathbb{R}^{\mathcal{T}\times K}} G(\bar{\varphi})$$

Тогда $\min_{\bar{\varphi}\in\mathbb{R}^{\mathcal{T}\times K}} G(\bar{\varphi})$ явл оценкой сверху для задачи $\max_{\bar{k}\in K^T} F(\bar{k})$

Алгоритм дифузии реализует минимизацию оценки сверху методом покоординатного спуска. Находит минимум оценки сверху по переменным $\varphi_{tt'}(k)$, $\forall t'\in N(t)$

С найденными $\bar{\varphi}$ выполняется преобразование

$$f_t^{i+1}(k) = f_t^i(k) - \sum_{t'\in N(t)} \varphi_{tt'}(k)$$

$$g_{tt'}^{i+1}(k,k') = g_{tt'}^i(k,k') + \varphi_{tt'}(k).$$

$\varphi_{t't}(k') = 0$ бо по них не відбувається мінімізація

Для мінімізації сверху следует выбрать такие $\varphi_{tt'}(k)$, $t'\in N(t)$ чтобы были справедливы равенства: $f_t^{i+1}(k) = \max_{k'\in K} g_{tt'}^{i+1}(k,k')$, $\forall t'\in N(t)$

$\sum_{t'}$

Справедлива следующая цепочка:

$$(|N(t)|+1)\cdot f_t^{i+1}(k) = f_t^{i+1}(k) + |N(t)|\cdot f_t^{i+1}(k) =$$

$$= f_t^{i+1}(k) + \sum_{t'\in N(t)} \max_{k'\in K} g_{tt'}^{i+1}(k,k') = f_t^{i+1}(k) - \sum_{t'\in N(t)} \varphi_{tt'}(k) +$$

$$+ \sum_{t'\in N(t)} \max_{k'\in K} \left(g_{tt'}^i(k,k') + \varphi_{tt'}(k) \right) = f_t^i(k) + \sum_{t'\in N(t)} \max g_{tt'}^i(k,k')$$

Отсюда следует

$$f_t^{i+1}(k) = \frac{f_t^i(k) + \sum\limits_{t' \in N(t)} \max g_{tt'}^i(k,k')}{|N(t)|+1}$$

Зная что для всех $t' \in N(t)$

$$f_t^{i+1}(k) = \max_{k' \in K} g_{tt'}^{i+1}(k,k') = \max_{k' \in K} \left(g_{tt'}^i(k,k') + \underbrace{\varphi_{tt'}(k)}_{k' \text{ независит}} \right) =$$

$$= \varphi_{tt'}(k) + \max_{k' \in K} g_{tt'}^i(k,k')$$

$$\varphi_{tt'}(k) = f_t^{i+1}(k) - \max_{k' \in K} g_{tt'}^i(k,k') = \frac{f_t^i(k) + \sum \max g_{tt'}^i(k,k')}{|N(t)|+1} -$$

$$- \max_{k' \in K} g_{tt'}^i(k,k')$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f_t^{i+1}(k) &= \frac{f_t^i(k) + \sum\limits_{t' \in N(t)} \max g_{tt'}^i(k,k')}{|N(t)|+1} \\ g_{tt'}^{i+1}(k,k') &= g_{tt'}^i(k,k') + \underline{f_t^{i+1}(k) - \max_{k' \in K} g_{tt'}^i(k,k')} \end{aligned}}$$

4. Для случайной величины с распределением $p(\bar{k})$ построить оценку сверху величины $\max\limits_{\bar{k}} p(\bar{k})$ через линейную релаксацию и двойств-ть в лин. прогр-ии

$t \in T$, K.

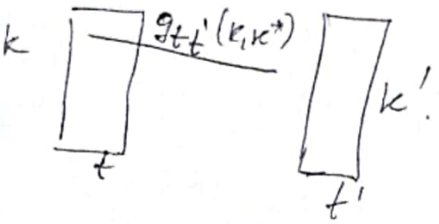
$tt' \in \tau$.

$N(t) = \{t' \mid tt' \in \tau\}$.

$f: T \times K \to \mathbb{R}$

$f_t(k)$ – задано ; $g: T \times T \times K \times K \to \mathbb{R}$

$g_{tt'}(k, k')$



$$p(\bar{k}) = \frac{1}{Z} \exp\Big(\sum_{tt' \in \tau} g_{tt'}(k_t, k_{t'}) + \sum_{\substack{\cancel{tt' \in \tau} \\ t \in T}} f_t(k_t)\Big)$$

$$g_{tt'}(k, k') = g_{t't}(k', k).$$

$$\arg\max_{k} p(\bar{k}) = \arg\max_{\bar{k}} \Big(\sum_{t \in T} f_t(k(t)) + \sum_{tt' \in \tau} g_{tt'}(k(t), k'(t))\Big)$$

$$\max_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \alpha_t(k) \cdot f_t(k) + \sum_{tt' \in \tau} \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K'} \beta_{tt'}(k, k') g_{tt'}(k, k')$$

$$\sum_t \sum_k f_t(k) \alpha_t(k) + \sum_{tt'} \sum_k \sum_{k'} g_{tt'}(k, k') \cdot \beta_{tt'}(k, k') \longrightarrow \max_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_k \alpha_t(k) = 1, \quad \forall t \in T & \Big|\ x_t. \\ \sum\limits_k \sum\limits_{k'} \beta_{tt'}(k, k^*) = 1, \quad \forall tt' \in \tau & \Big|\ \gamma(tt') \\ \alpha_t(k) - \sum\limits_{k' \in K} \beta_{tt'}(k, k') = 0, \quad t \in T,\ t' \in N(t),\ k \in K & \Big|\ \varphi_{tt'}(k) \\ \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{t\in T} \lambda_t + \sum_{tt'\in T} \gamma_{tt'} \to \min$$

$\lambda_t \ t\in T$
$\gamma_{tt'} \ tt'\in T$
$\varphi_{tt'}(k) \ k\in K \ t\in T, t'\in N(t)$

$$\alpha_t(k): \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{t'\in N(t)} \varphi_{tt'}(k) + \lambda_t \geq f_t(k) \\ \\ \beta_{tt'}(k,k'): -\varphi_{tt'}(k) - \varphi_{t't}(k') + \gamma_{tt'} \geq g_{tt'}(k,k') \end{array} \right.$$

$$\lambda_t \geq f_t(k) - \sum_{t'\in N(t)} \varphi_{tt'}(k), \ k\in K, t\in T \qquad 1)$$

$$\gamma_{tt'} \geq g_{tt'}(k,k') + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k') \quad \begin{array}{l} k\in K \\ k'\in K \end{array} \qquad 2)$$

(*)

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_t = \max\limits_{k\in K, k'\in K}(\dots) \\ \gamma_{tt'} = \max\limits_{k\in K, k'\in K}(\dots) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ підставимо в цільову ф-ю

$$\Rightarrow \sum_{t\in T} \max_{k\in K}\Big(f_t(k) - \sum_{t'\in N(t)} \varphi_{tt'}(k)\Big) +$$

$$+ \sum_{tt'\in T} \max_{k\in K, k'\in K}\Big(g_{tt'}(k,k') + \varphi_{tt'}(k) + \varphi_{t't}(k',k)\Big) \to \min_{\varphi}$$ φ - все значення

(*) за теор. про доп. нежорсткість нерівності 1), 2) не можуть виконуватися строго одночасно, бо тоді змінні $\alpha_t(k) = \beta_{tt'}(k,k') = 0$, а в нас є обмеження $\sum_k \alpha_t(k) = 1$, $\sum_{k,k'} \beta_{tt'}(k,k') = 1$ $\forall t\in T$, $\forall tt'\in \mathcal{E}$, тому.

Из св-в двоїст ЛП

$$\max_{\bar k\in K^T} F(\bar k) \leq \max F(\bar\alpha, \bar\beta) = \min G(\bar\varphi)$$

МКР 2

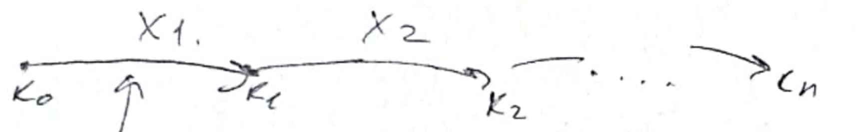
1. Для стохастического автомата с известным распределением вероятностей $p(\bar{X},\bar{K}) = p_0(k_0)\cdot\prod_{i=1}^{n}\cdot p_i(x_i; k_i/k_{i-1})$ указать алгоритм, который по последовательности сигналов $x_1, x_2, \dots x_n$ находит наиболее вероятную посл-ть решений.

$\bar{X} = X\times X\times X\times\dots\times X = X^n$

$\bar{k}\in\bar{K} = K\times K\times K\dots\times K = K^n$

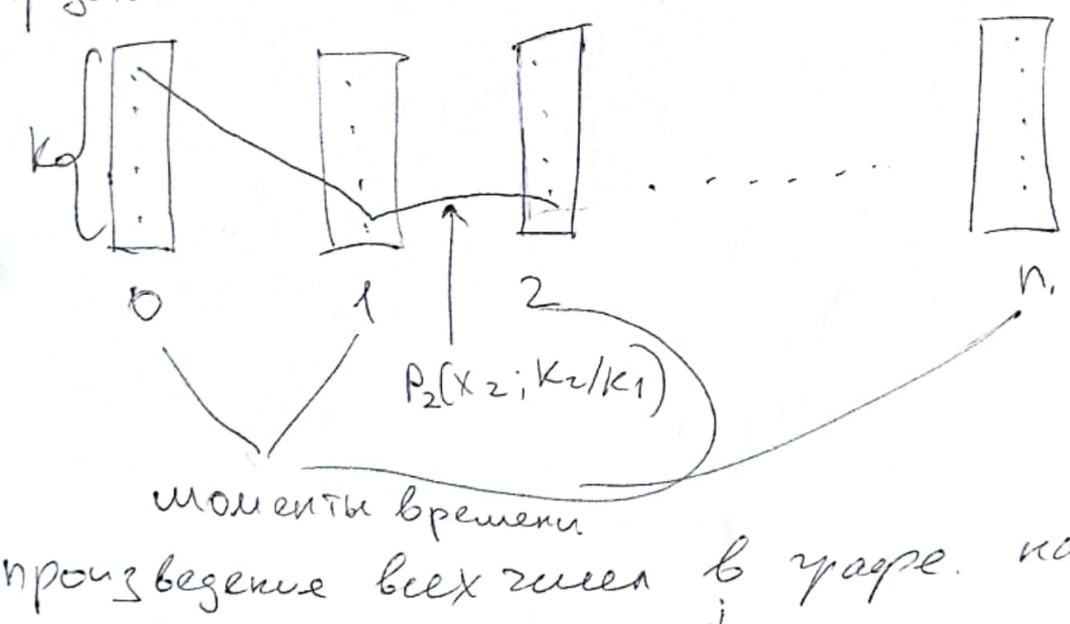
$P(\bar{k},\bar{x}) = p_0(k_0)\prod_{i-1}^{n} p_i(x_i, k_i/k_{i-1})$.

Есть цепочка состояний.



$p(x_1; k_1/k_0)$ · вер-ть перепрыгивания из k_0 в k_1.

Представим это в виде графа.



произведение всех чисел в графе назовём „качеством"

$$\begin{cases} f_j(k_j) = \max\limits_{k_0,k_1\dots k_{j-1}} p(k_0)\prod\limits_{i=1}^{j} p_i(x_i, k_i/k_{i-1}) \\ f_0(k_0) = p_0(k_0)\end{cases}$$

ищем путь от 0-го момента вр-ни до j-го.

$$f_1(k_1) = \max_{k_0} \underbrace{p_0(k_0)}_{f_0(k_0)} p_1(x_1, k_1 \backslash k_0)$$

$$f_j(k_j) = \max_{k_0, k_1, \dots, k_{j-2}} \dots \max_{k_{j-1}} p_0(k_0) \prod_{i=1}^{j-1} p_i(x_i, k_i / k_{i-1}) \cdot$$

$$\cdot p_j(x_j, k_j / k_{j-1}) = \left\{ \begin{matrix} \text{переставим} \\ \text{максимумы} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \max_{k_{j-1}} \max_{k_0, \dots, k_{j-2}} p_j(x_j, k_j / k_{j-1}) \cdot p_0(k_0) \prod_{i=1}^{j-1} p_i(x_i, k_i / k_{i-1}) =$$

$$= \max_{k_{j-1}} p_j(x_j; k_j / k_{j-1}) \cdot f_{j-1}(k_{j-1}).$$

$$k_n^* = \underset{k_n}{\operatorname{argmax}} (f_n(k_n))$$

$$k_{n-1}^* = \underset{k_{n-1}}{\operatorname{argmax}} \left(f_{n-1}(k_{n-1}) \cdot p(x_n, k_n^* / k_{n-1}) \right).$$

$$k_i^* = \dots \qquad i = \overline{n-1, 1}$$

$$\dots$$

$$k_0^* = \underset{k_0}{\operatorname{argmax}}\, p_0(k_0)$$

2. Для стохастического автомата ...... указать алгоритм который находит наиболее вероятное состояние k_t автомата в момент времени t.

$$p(\bar{x},\bar{k}) = p_0(k_0)\cdot\prod_{i=1}^{n} p_i(x_i, k_i/k_{i-1}),\ t\text{ - мом. часу.}$$

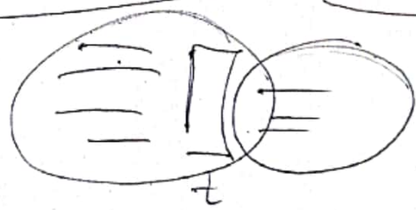
k_t - стан в мом. часу t.

$$\arg\max_{k_t^*} p(k_t^*/\bar{x}) = \sum_{\substack{\bar{k}\in K^{n+1}\\ k_t = k_t^*}} p(\bar{x},\bar{k}) =$$

$$= \sum_{\substack{\bar{k}\in K^{n+1}\\ k_t = k_t^*}} p_0(k_0)\prod_{i=1}^{n} p_i(x_i; k_i/k_{i-1}) = \left\{\begin{array}{l}\text{разбиваем сумму}\\ \text{всех частей которые}\\ \text{приходят слева и}\\ \text{справа мом. вр. } t.\end{array}\right\} =$$

$$= \sum_{\substack{\bar{k}\in K^{n+1}\\ k_t = k_t^*}} p_0(k_0)\cdot\prod_{i=1}^{t} p_i(x_i; k_i/k_{i-1})\cdot\prod_{i=t+1}^{n} p_i(x_i; k_i/k_{i-1}) =$$

$$= \{k_t = k_t^*\} = \underbrace{\sum_{k_0,\dots k_{t-1}} p_0(k_0)\prod_{i=0}^{t} p_i(x_i; k_i/k_{i-1})}_{f_t^{\wedge}(k_t^*)}\cdot\underbrace{\sum_{k_{t+1},\dots,k_n}\prod_{i=t+1}^{n} p_i(x_i; k_i/k_{i-1})}_{f_t^{\sqcap}(k_t^*)}$$



$$= f_t^{\wedge}(k_t^*)\cdot f_t^{\sqcap}(k_t^*)$$

$$f_t^{\wedge}(k_t^*) = \sum_{k_{t-1}} p_t(x_t; k_t/k_{t-1})\cdot f_{t-1}^{\wedge}(k_{t-1}).$$

Аналогично

$$f_t^{\sqcap}(k_t^*) = \sum_{k_{t+1}} p_{t+1}(x_{t+1}; k_{t+1}/k_t)\cdot f_{t+1}^{\sqcap}(k_{t+1}).$$

$$f_0^{\wedge}(k_0^*) = p_0(k_0^*)$$

$$f_n^{\sqcap}(k_n^*) = 1.$$

$$\sum_{n} f_n^{\wedge}(k) = \sum_{n} p(\bar{k},\bar{x}) = p(\bar{x}) = 1$$

$$\Rightarrow k_t^* = \arg\max_{k_t^*} f_t^{\wedge}(k_t^*)\cdot f_t^{\sqcap}(k_t^*)$$

3. Есть два автомата $\underline{A}$ и $\underline{B}$

$$p^A(\bar{x},\bar{k}) = p_0^A(k_0)\cdot\prod_{i=1}^{n} p_i^A(x_i, k_i/k_{i-1});$$

$$p^B(\bar{x},\bar{k}) = p_0^B(k_0)\cdot\prod_{i=1}^{n} p_i^B(x_i; k_i/k_{i-1});$$ $x_1,\dots,x_n$ - посл-ть сигналов

Указать ~~алгоритм~~ автомат который прогенерировал эту посл-ть.

$$p^A(\bar{x}) = \sum_k p^A(\bar{k},\bar{x}) = p(\bar{x}, A)$$

$$p^B(\bar{x}) = \sum_k p^B(\bar{k},\bar{x}) = p(\bar{x}, B)$$

$$p(\bar{x}/A)\cdot p(A) > p(\bar{x}/B)\,p(B)$$

$$\Rightarrow \frac{p(\bar{x}/A)}{p(\bar{x}/B)} \underset{B}{\overset{A}{\gtrless}} \frac{p(B)}{p(A)} \Rightarrow \frac{p(\bar{x}/A)}{p(\bar{x}/B)} \underset{B}{\overset{A}{\gtrless}} \varphi.$$

~~Рассмотрим частный случай~~.

Алгоритм для $p_a(\bar{x})$ такой же как и для $p_b(\bar{x})$, поэтому будем использовать символ $p(\bar{x})$

$$p(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}} p(\bar{k},\bar{x}) = \sum_{k_0}\sum_{k_1}\dots\sum_{k_{n-1}}\sum_{k_n} p(k_0)\prod_{i=1}^{n} p(x_i, k_i/k_{i-1}) =$$

$$= \sum_{k_0} p(k_0)\sum_{k_1} p(x_1; k_1/k_0)\dots\sum_{k_i} p(x_i; k_i/k_{i-1})\dots\sum_{k_{n-1}} p(x_{n-1}; k_{n-1}/k_{n-2})\cdot$$

$$\cdot\sum_{k_n} p(x_n; k_n/k_{n-1})$$

$i = 1,2,\dots n$

$$f_i(k_{i-1}) = \sum_{k_i} p(x_i; k_i/k_{i-1})\dots\sum_{k_{n-1}} p(x_{n-1}, k_{n-1}/k_{n-2})\sum_{k_n} p(x_n; k_n/k_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad f_n(k_{n-1}) = \sum_{k_n} p(x_n, k_n/k_{n-1})$$

$$f_i(k_{i-1}) = \sum_{k_i} p(x_i, k_i/k_{i-1})\,f_{i+1}(k_i), \quad i = n-1,\dots 2,1$$

$$p(\bar{x}) = \sum_{k_0} p(k_0) f_1(k_0)$$

На основании отношения правдоподобия $p_a(\bar{x})/p_b(\bar{x})$ принимается решение в пользу одного из автоматов

2 Елипс, персептрон.

Есть наборы X_1, X_2; X_1 – сгенерировано двум. гаус. распр.

$$p(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\det A}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^T A^{-1}(x-\bar{m})}{2}}$$

$$(x-m)^T B(x-\bar{m}) \gtrless c.$$

$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ (собств. числа матр).

$\bar{v}^T A v > 0 \quad \forall \bar{v} \neq 0.$

$v^T A v = \bar{v}^T \lambda \bar{v} = \lambda \|\bar{v}\|^2 \Rightarrow \lambda\|\bar{v}\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$; $B^T = B$.

$(x^T - m^T) B(\bar{x} - \bar{m}) \lessgtr c.$

$x^T B(x-m) - m^T B(x-m) \gtrless c$

$x^T B x - x^T B m - m^T B x + m^T B m \gtrless c$

$x^T B x - 2x^T B m + m^T B m \gtrless c$

$x^T B x = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \quad | b_{12} = b_{22}$

$x^T B m = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2\end{pmatrix} = x_1(b_{11}m_1 + b_{12}m_2) + x_2(b_{12}m_1 + b_{22}m_2)$

$m^T B m - c = b_{11}m_1^2 + 2b_{12}m_1m_2 + b_{22}m_2^2 - c = d.$

$b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 - 2x_1(b_{11}m_1 + b_{12}m_2) - 2x_2(b_{12}m_1 + b_{22}m_2)$
$+ d \gtrless 0.$

Персептрон.

$\bar{\alpha}\bar{x} \gtrless 0$, $\bar{\alpha}\bar{y} \lessgtr 0.$

$\bar{y} = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1, x_2, 1)$

$b_{11}y_1 + 2b_{12}y_2 + b_{22}y_3 - 2y_4(b_{11}m_1 + b_{12}m_2) - 2y_5(b_{12}m_1 + b_{22}m_2)$
$+ dy_6 \lessgtr 0.$

$\bar{\alpha} = (b_{11}, 2b_{12}, b_{22}, -2(b_{11}m_1 + b_{12}m_2), -2(b_{12}m_1 + b_{22}m_2), d)$

$f(\vec{v}) = \langle V_x^2, V_y^2, V_xV_y, V_x, V_y, 1\rangle$

для вл. векторов.

$g(\vec{u}) = \langle U_x^2, U_y^2, U_xU_y, 0, 0, 0\rangle$

Алгоритм $\Lambda(A \to \langle \overset{\leq}{U_1}\ \bar{U_2} \rangle$ – вл. ве-р

$\alpha = 0, A = 0, \mu = 0, C = 0$

$\exists \bar{u}, \Lambda(A): U^T A \bar{U} \leq 0$

$\Rightarrow \alpha \pm g(\bar{u})$

$\exists v \in X_1: (V - \bar{\mu})^T A(V - \bar{\mu}) \geq c$

$\Rightarrow \alpha -= f(\bar{v})$

$\exists v \in X_2: \ |\ | \not< c$

$\Rightarrow \alpha += f(\bar{V})$

$\bar{u} \mapsto (u_1^2, u_1u_2, u_1, u_2, 0)$.

$\uparrow$ власний вектор

Запишемо рівняння для вл. векторів.

На кожному кроці додаємо всі власні вектори в зовнішній клас

$$b_{11} = \alpha_1$$
$$2b_{12} = \alpha_2 \Rightarrow b_{12} = \frac{\alpha_2}{2}.$$
$$b_{22} = \alpha_3.$$

$$\Rightarrow \bar{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{\alpha_2}{2} \\ \frac{\alpha_2}{2} & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$-2(b_{11}m_1 + b_{12}m_2) = \alpha_4$$
$$-2(b_{12}m_1 + b_{22}m_2) = \alpha_5.$$

$$\Rightarrow -2\left(\alpha_1 m_1 + \frac{\alpha_2}{2} m_2\right) = \alpha_4 \qquad \Rightarrow -2\alpha_1 m_1 - \alpha_2 m_2 = \alpha_4$$
$$-2\left(\frac{\alpha_2}{2} m_1 + \alpha_3 m_2\right) = \alpha_5. \qquad -\alpha_2 m_1 - 2\alpha_3 m_2 = \alpha_5$$

$$\Rightarrow -\frac{2\alpha_1 m_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_4}{\alpha_2} = m_2.$$

$$-\alpha_2 m_1 - 2\alpha_3 \cdot \left(-\frac{2\alpha_1 m_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_4}{\alpha_2}\right) = \alpha_5.$$

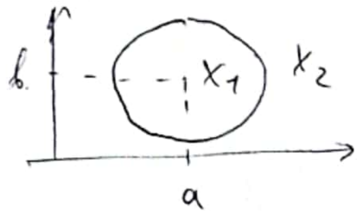
$$-\alpha_2 m_1 + \frac{4\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2} m_1 + \frac{2\alpha_3\alpha_4}{\alpha_2} = \alpha_5.$$

$$m_1\left(\frac{4\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2} - \alpha_2\right) + \frac{2\alpha_3\alpha_4}{\alpha_2} = \alpha_5$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} m_1 &= \frac{\alpha_5 - 2\alpha_3\alpha_4}{4\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2} \\ m_2 &= -\frac{2\alpha_1 m_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \end{aligned}}$$

VI розділ.

1. Круг і персептрон



$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$.

r - радіус ; a, b - формують позицію центра.

$(x-a)^2+(y-b)^2 < r^2$ бо на границі не має бути точок.

$x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2-r^2<0$.

Використаємо персептрон: Є два класи X_1 - всередині кола

Модифікуємо в скалярний добуток X_2 - ззовні

$\alpha : a^2+b^2-r^2,\ 1,\ -2a,\ -2b$.

$x : 1,\ x^2+y^2,\ x,\ y$.

$-X_1 \cup X_2 = X'$.

while $(\exists x' \in X' : \alpha x' \leq 0)$.

{

$\bar{\alpha} \mathrel{+}= \bar{x}'$.

}

до X_1 додать $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow$ отримуємо $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

$\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_2}$. $\Rightarrow \alpha = (\alpha_1', 1, \alpha_3', \alpha_4')$.

$\Rightarrow$ коло $a = -\frac{1}{2}\alpha_3'$

$b = -\frac{1}{2}\alpha_4'$

$r^2 = \left(\frac{\alpha_3'^2}{4} + \frac{\alpha_4'^2}{4} - \alpha_1'\right)$

Т. Новикова

Сформулировать алгоритм перцептрона Розенблата и доказать его сх-ть.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} \forall \bar{x} \in A : \alpha \bar{x} + b \geqslant 0. \\ \forall \bar{x} \in B : \alpha \bar{x} + b < 0 \end{cases}$$

Найти $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}$

$A' = \{ (x_1, \dots, x_n, 1) \mid (x_1, \dots x_n) \in A \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

$B' = \{ (x_1, \dots x_n, 1) \mid (x_1, \dots, x_n) \in B \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \forall \bar{x} \in A' : \alpha \bar{x} > 0 \\ \forall \bar{x} \in B' : \alpha \bar{x} < 0. \end{cases}$$

$$\alpha \bar{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \sum_{n+1}^{n} \alpha_i x_i + \underbrace{\alpha_{n+1} x_{n+1}}_{= b}$$

$A'' = A'$

$B'' = \{ -x \mid \bar{x} \in B' \}$

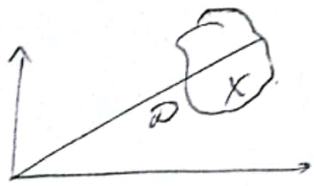
$$\begin{cases} \forall \bar{x} \in A'' : \alpha \bar{x} > 0 \\ \forall \bar{x} \in B'' : \alpha \bar{x} > 0. \\ \alpha \in \mathbb{R}^{n+1} \end{cases}$$

$X = A'' \cup B'' \Rightarrow \forall x \in X : \alpha \bar{x} > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\bar{\alpha} = (0, \dots 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$

while $(\exists \bar{x} \in X : \alpha x < 0) \Rightarrow \bar{\alpha} = \bar{\alpha} + \bar{x}$.

Док-м сх-ть



$D = \max_{x \in \bar{X}} |\bar{x}|$.

$X = \{ \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \dots, \bar{x}^m \}$; $C = \{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{x}^i \mid \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \forall i\, \alpha_i \geqslant 0 \}$.

$\varepsilon = \min_{x \in C} |x|$. ; $\bar{x}^* = \operatorname{argmin}_{\bar{x} \in C} |\bar{x}|$

$|\bar{\alpha}^{t+1}| \, |\bar{x}^*| = \geqslant \bar{\alpha}^{t+1} \cdot x^* = (\alpha^t + x^t) x^* = \bar{\alpha}^t \cdot \bar{x}^* + \bar{x}^t \bar{x}^* \geqslant$

$\geqslant \alpha^t \bar{x}^* + \varepsilon^2 \geqslant (t+1) \varepsilon^2$.

$\bar{\alpha}^0 (x^0) = 0$.

$\Rightarrow \alpha^t \bar{x}^* \geqslant \varepsilon^2 t \Rightarrow$

$\Rightarrow |\alpha^t| \geqslant t \varepsilon$.

$|\alpha^t| x^*_\varepsilon \geqslant t \cdot \varepsilon^2$

$\Rightarrow |\alpha^t| \geqslant t \varepsilon$.

$$|\alpha^{t+1}|^2 = (\alpha^t + x^t)^2 = |\alpha^t|^2 + 2\bar{\alpha}^t \bar{x}^t + |\bar{x}^t|^2 \le$$

$$\le |\alpha^t|^2 + D^2 \le (t+1) D^2$$

$$\Rightarrow |\alpha^t|^2 \le D^2 (t).$$

$$|\alpha^t| \le D\sqrt{t}.$$

$$\Rightarrow t\varepsilon \le |\alpha^t| \le D\sqrt{t} \Rightarrow t \cdot \varepsilon \le D\sqrt{t} \Rightarrow \boxed{t \le \frac{D^2}{\varepsilon^2}}$$

Это значит что алгоритм персептрона может изменить вектор α не более чем $\frac{D^2}{\varepsilon^2}$ раз

Постановка и решение задачи распределения смесей изображений ... EM алгоритм для BMM.

$X_z \in \{0,1\}^{n \times m}$, $z = \overline{1,N}$, $k = \{1,2\}$

$$p(X_z|k) = \prod_{i,j}^{n,m} p_{k,ij}^{x_{z,ij}} (1-p_{k,ij})^{1-x_{z,ij}}$$

X_z - картинка, на якій зображена цифра.

$p(k|X_z) - ?$

1) $p^t(k) = \sum_{z=1}^{N} p^{t-1}(k, X_z) = \sum_{z=1}^{N} p(k|X_z) p(X_z) =$

$= \sum_{z=1}^{N} p^t(k|X_z) \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{z=1}^{N} p^t(k|X_z)$

2) $p^{t+1}(X_z|k) = \arg\max_{p(X_z|k)} \sum_{z=1}^{N} p^t(k|X_z) \ln p(X_z|k) =$

$= \arg\max_{p(X_z|k)} \sum_{z=1}^{N} p^t(k|X_z) \sum_{i,j=1}^{n,m} (X_{z,ij} \ln p_{k,ij} + (1-X_{z,ij}) \ln(1-p_{k,ij}))$

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial p_{k,ij}} = \sum_{z=1}^{N} p^t(k|X_z) \left(\frac{X_{z,ij}}{p_{k,ij}} - \frac{(1-X_{z,ij})}{(1-p_{k,ij})} \right) = 0$$

$\Rightarrow \sum_{z=1}^{N} p(k|X_z)(X_{z,ij} - p_{k,ij}) = 0$

$\Rightarrow p_{k,ij} = \frac{\sum_{z=1}^{N} p(k|X_z) X_{z,ij}}{\sum_{z=1}^{N} p(k|X_z)}$

$\Rightarrow$ 1) Визначаємо $p_0 = p(k|X_z)$

2) $p^t(k) = \sum_{z=1} p^{(t-1)}(k|X_z) \cdot \frac{1}{N}$, $p^t_{k,ij} = \frac{\sum_{z=1}^{N} p(k|X_z) X_{z,ij}}{\sum p(k|X_z)}$

3) $p^t(X_z|k) = \prod_{i,j}^{n,m} p_{k,ij}^{t\ X_{z,ij}} (1-p^t_{k,ij})^{1-X_{z,ij}}$

4) $p^t(k|X_z) = \{\text{Баєс}\} = \frac{p^t(X_z|k) p^t(k)}{\sum_{k'} p^t(X_z|k') p^t(k')}$

Scanned with CamScanner

$$\underbrace{\sum_X \sum_{k,k'} p(X)\, p(k|X)\, \mathbb{1}(k \neq k')\, q(k'|X)}_{} \to \min_{q: X \times K \to [0,1]}$$

цільова функція.

$$\begin{cases} \sum_X \sum_{k,k'} p(X)\, p(k|X)\, (k-k')^2\, q(k'|X) \le M \\ \sum_{k'} q(k'|X) = 1. \quad \forall x. \\ q(k'|X) \ge 0 \quad \forall x, k \end{cases}$$

Перетворимо цільову функцію.

$$\sum_X \sum_{k,k'} p(X) p(k|X)\, \mathbb{1}(k \neq k')\, q(k'|X) = \{\text{розпишемо індикатор}\} =$$

$$= 1 - \sum_X \sum_{k'} p(k'|X) p(x)\, q(k'|X) \to \min_{q: X \times K \to [0,1]}$$

бо $1 - \min = \max$.

$$= \sum_X \sum_{k'} p(k'|x) P(x)\, q(k'|X) \to \max_{q: X \times K \to [0,1]}$$

Перепишемо задачу ЛП

$$\sum_X \sum_{k'} p(k'|x) p(x)\, q(k'|x) \to \max_{q: X \times K \to [0,1]}$$

$$\begin{cases} \sum_X \sum_{k,k'} p(X) (p(k|X)) (k-k')^2\, q(k'|X) \le M. \\ \sum_{X'} \sum_{k'} q(k'|X)\, \mathbb{1}(X \neq X') \quad \forall X \in X \\ q(k'|X) \ge 0 \quad \forall x \in X., \forall k \in K. \end{cases}$$

α - змінні

$\varphi(X)$ - змінні

двоїстої задачі

Транспонована матриця

$\sum_{k'} p(k'\|x) p(x)$	$p(x,k)(k-k')^2$	$\sum \mathbb{1}(x \neq x')$
z	M	1
	α	$\varphi(X)$

Тоді маємо

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \alpha M + \sum \varphi(x) \to \min\limits_{\alpha, \varphi}$ — двоїста задача

$$\begin{cases} \sum\limits_k p(x,k)(k-k')^2 \cdot \alpha + \varphi(x) \geq \sum\limits_{k'} p(k'|x)p(x) \\ \alpha \geq 0. \end{cases}$$

Звідси маємо.

$$\varphi(x) \geq \sum_{k'} p(k'|x)p(x) - \alpha \cdot \sum_k p(x,k)(k-k')^2; \ \alpha \geq 0$$

$\varphi(x)$ не менше жодного доданку.

Не всі сумірівні $\Rightarrow$ звідси слідує, що

$$\varphi(x) \geq \max_{k'} \left(\sum_{k'} p(k'|x)p(x) - \alpha \sum_k p(x,k)(k-k')^2 \right)$$

$k \in K$.

Тоді $\varphi(x) > \left(\sum_{k'} p(k'|x)p(x) - \alpha \sum_k p(x,k)(k-k')^2 \right)$

k^* — максимум $\quad \forall k \neq k^*$

Використовуючи теорему про доповнюючу жорсткість ми маємо, що $q(k|x) = 0 \ \forall k \neq k^*$

$$\varphi(x) = \max \left(\sum_{k'} p(k'|x)p(x) - \alpha \sum_k p(x,k)(k-k')^2 \right) \text{ де } k^*$$

Так як у нас є в обмеженнях $\sum_{k'} q(k'|x) = 1 \ \forall x \in X$

То маємо $q(k|x) = 0 \ \forall k \in k^*$.

Тоді $q(k^*|x) = 1$.