МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)»

Институт информационных технологий, математики и механики

ОТЧЕТ

по **лабораторной** работе

на тему:
«Исследование динамики системы с двумя параметрами»

Выполнил:
студент группы 3822Б1ПМ2 Махнёв Р.Д.
Проверил:
преподаватель каф. ТУДС Гринес Е.А.

Нижний Новгород
2024

Содержание

1 Анализ состояний равновесия системы **3**
1.1 Общая бифуркационная диаграмма для всех состояний равновесия . . 5

2 Фазовые портреты системы **6**

1. Анализ состояний равновесия системы

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(b - x - y), \\ \dot{y} = (a - y)(2x + y). \end{cases}.$$

Это нелинейная динамическая система, зависящая от параметров. Покажем, как построить для неё бифуркационную диаграмму.

Сначала найдём координаты всех присутствующих в ней состоянияй равновесия в зависимости от параметров. Состояния равновесия находятся как решения системы уравнений

$$\begin{cases} -x(b - x - y) = 0 \\ (a - y)(2x + y) = 0 \end{cases}.$$

В результате получаем четыре состояния равновесия: $(0, 0)$, $(0, a)$, $(b - a, a)$ и $(-b, 2b)$.

Теперь найдём матрицу Якоби этой системы. Следуя стандартным обозначениям, примем $P(x, y) = -x(b - x - y)$ и $Q(x, y) = (a - y)(2x + y)$. Вычислим частные производные:

$$P'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(-x(b - x - y)) = \frac{\partial(-x)}{\partial x} \cdot (b - x - y) - x \cdot \frac{\partial(b - x - y)}{\partial x} = 2x + y - b,$$

$$P'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-x(b - x - y)) = \frac{\partial(-x)}{\partial y} \cdot (a - 2x + 3y) - x \cdot \frac{\partial(b - x - y)}{\partial y} = x,$$

$$Q'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}((a - y)(2x + y)) = \frac{\partial(a - y)}{\partial x} \cdot (2x + y) + (a - y) \cdot \frac{\partial(2x + y)}{\partial x} = 2(a - y) = 2a - 2y,$$

$$Q'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}((a - y)(2x + y)) = \frac{\partial(a - y)}{\partial y} \cdot (2x + y) + (a - y) \cdot \frac{\partial(2x + y)}{\partial y} = a - 2x - 2y.$$

Подставим теперь координаты состояний равновесия и проанализируем собственные числа матриц Якоби. Матрица Якоби состояния равновесия равновесия $(0, 0)$ равна

$$\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 2a & a \end{pmatrix}.$$

Матрица нижнетреугольная, а значит её собственные числа совпадают с её диагональными элементами: $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = a$. Собственные числа всегда вещественные, поэтому состояние равновесия может быть негрубым только когда одно из этих собственных чисел равно нулю. Таким образом, бифуркационное множество для этого состояния равновесия – $a = 0$ или $b = 0$. Опять же, так как мы явно знаем собственные числа матрицы Якоби, мы можем проанализировать тип состояния равновесия при любых значениях параметров:

- $-b > 0,\ a > 0$ – неустойчивый узел;
- $-b < 0,\ a < 0$ – устойчивый узел;
- $-b > 0,\ a < 0$ или $-b < 0,\ a > 0$ – седло.

Для состояния равновесия с координатами $(0, a)$ матрица Якоби равна

$$\begin{pmatrix} a - b & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Матрица диагональная, а значит её собственные числа совпадают с её диагональными элементами: $\lambda_1 = a - b$, $\lambda_2 = -a$. Собственные числа всегда вещественные, поэтому состояние равновесия может быть негрубым только когда одно из этих собственных чисел равно нулю. Таким образом, бифуркационное множество для этого состояния равновесия – $a = b$ или $a = 0$. Так как мы явно знаем собственные числа матрицы Якоби, мы можем проанализировать тип состояния равновесия при любых значениях параметров:

- $a - b > 0,\ -a > 0$ – неустойчивый узел;
- $a - b < 0,\ -a < 0$ – устойчивый узел;
- $a - b > 0,\ -a < 0$ или $a - b < 0,\ -a > 0$ – седло.

Матрица Якоби, вычисленная в состоянии равновесия $(b - a, a)$, равна

$$\begin{pmatrix} b-a & b-a \\ 0 & a-2b \end{pmatrix}.$$

Матрица верхнетреугольная, а значит её собственные числа совпадают с её диагональными элементами: $\lambda_1 = b - a,\ \lambda_2 = a - 2b$. Собственные числа всегда вещественные, поэтому состояние равновесия может быть негрубым только когда одно из этих собственных чисел равно нулю. Таким образом, бифуркационное множество для этого состояния равновесия – $a = b$ или $a = 2b$. Поскольку здесь мы также явно знаем собственные числа матрицы Якоби, то мы можем проанализировать тип состояния равновесия при любых значениях параметров:

- $b - a > 0,\ a - 2b > 0$ – неустойчивый узел;
- $b - a < 0,\ a - 2b < 0$ – устойчивый узел;
- $b - a > 0,\ a - 2b < 0$ или $b - a < 0,\ a - 2b > 0$ – седло.

Наконец, матрица Якоби в состоянии равновесия с координатами $(-b, 2b)$ равна

$$\begin{pmatrix} -b & -b \\ 2a-4b & a-2b \end{pmatrix}.$$

Она не имеет какой-либо удобной структуры, поэтому для её исследования нужно исследовать её определитель и след:

$$\operatorname{tr} J = a - 3b$$

$$\det J = -b \cdot (a - 2b) + b \cdot (2a - 4b) = b \cdot (2a - 4b - (a - 2b)) = b \cdot (a - 2b)$$

Сначала проанализируем первое вырождение состояния равновесия, а именно – наличие как минимум одного нулевого собственного число. Для этого определитель должен обратиться в ноль:

$$\det J = b \cdot (a - 2b) = 0$$

Это уравнение имеет решения

$$\left[\begin{aligned} b &= 0 \\ a &= 2b \end{aligned}\right..$$

Проверим, имеет ли место второе вырождение

$$\operatorname{tr} J = 0,\ \det J > 0.$$

Для этого сначала решим уравнение $\operatorname{tr} J = 0$:

$$\operatorname{tr} J = a - 3b = 0,$$

откуда $a = 3b$. Подставим теперь это в выражение для определителя. Получим

$$b \cdot (a - 2b) = b \cdot (3b - 2b) = b \cdot b = b^2 \geq 0.$$

Таким образом, при $a = 3b, b \neq 0$ происходит второе вырождение, при котором у матрицы Якоби состояния равновесия появляется пара чисто мнимых собственных чисел. Результирующее бифуркационное множество есть $b \cdot (a - 2b) = 0$ или $a = 3b$ (при $b \neq 0$). С помощью следа и определителя мы можем определить, при каких значениях параметров данное состояние равновесия имеет определённый тип:

- $b \cdot (a - 2b) < 0$ – седло ($\det J < 0$);
- $b \cdot (a - 2b) > 0,\ a - 3b > 0$ – неустойчивый узел/фокус ($\det J > 0,\ \operatorname{tr} J > 0$);
- $b \cdot (a - 2b) > 0,\ a - 3b < 0$ – устойчивый узел/фокус ($\det J > 0,\ \operatorname{tr} J < 0$).

1.1. Общая бифуркационная диаграмма для всех состояний равновесия

Выпишем бифуркационное множество для всех состояний равновесия:

- $a = 0$ или $b = 0$ для $(0, 0)$;
- $a = b$ или $a = 0$ для $(0, a)$;
- $a = b$ или $a = 2b$ для $(b - a, a)$;
- $b = 0$ или $(a - 2b) = 0$ или $a = 3b$ (при $b \neq 0$) для $(-b, 2b)$.

Воспользуемся GeoGebra для построения бифуркационного множества (по оси x параметр a, а по оси y – параметр b). Определить тип каждого состояния равновесия можно двумя способами. Во-первых, с помощью GeoGebra можно построить любое сочетание неравенств, которые определяют тип состояний равновесия. Во-вторых, это можно сделать, взяв какие-нибудь конкретные значения параметров и проверив, какому из неравенств удовлетворяют значения параметров. Возьмем, например, $a^* = -4,\ b^* = 4$. Пересмотрим наши записи для каждого состояния равновесия:

- так как $-b^* < 0$ и $a^* < 0$, то $(0, 0)$ – устойчивый узел;
- так как $a^* - b^* < 0,\ -a^* > 0$, то $(0, a^*)$ – седло;
- так как $b^* - a^* > 0,\ a^* - 2b^* < 0$, то $(b^* - a^*, a^*)$ – седло;
- так как $b^*(a^* - 2b^*) < 0$, то $(-b^*, 2b^*)$ – седло.

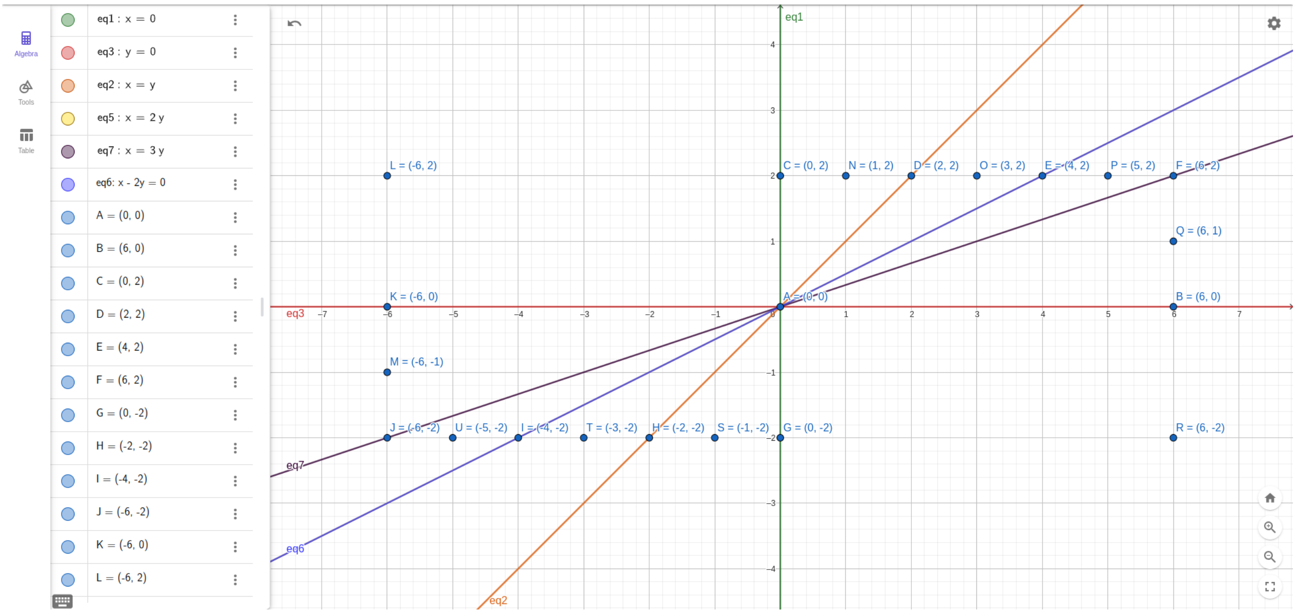

Рис. 1: Бифуркационные границы данной системы.

2. Фазовые портреты системы

sdfsd