

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)»

**Институт информационных технологий, математики и механики**

**ОТЧЕТ**

по лабораторной работе

на тему:

**«Исследование динамики системы с двумя параметрами»**

**Выполнил:**

студент группы 3822Б1ПМ2 Махнёв Р.Д.

**Проверил:**

преподаватель каф. ТУДС Гринес Е.А.

Нижний Новгород  
2024

# Содержание

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Анализ состояний равновесия системы</b>                       | <b>3</b> |
| 1.1      | Общая бифуркационная диаграмма для всех состояний равновесия . . | 5        |
| <b>2</b> | <b>Фазовые портреты системы</b>                                  | <b>6</b> |

# 1. Анализ состояний равновесия системы

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(b - x - y), \\ \dot{y} = (a - y)(2x + y). \end{cases}$$

Это нелинейная динамическая система, зависящая от параметров. Покажем, как построить для неё бифуркационную диаграмму.

Сначала найдём координаты всех присутствующих в ней состояний равновесия в зависимости от параметров. Состояния равновесия находятся как решения системы уравнений

$$\begin{cases} -x(b - x - y) = 0 \\ (a - y)(2x + y) = 0 \end{cases}.$$

В результате получаем четыре состояния равновесия:  $(0, 0)$ ,  $(0, a)$ ,  $(b - a, a)$  и  $(-b, 2b)$ .

Теперь найдём матрицу Якоби этой системы. Следуя стандартным обозначениям, примем  $P(x, y) = -x(b - x - y)$  и  $Q(x, y) = (a - y)(2x + y)$ . Вычислим частные производные:

$$P'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(-x(b - x - y)) = \frac{\partial(-x)}{\partial x} \cdot (b - x - y) - x \cdot \frac{\partial(b - x - y)}{\partial x} = 2x + y - b,$$

$$P'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-x(b - x - y)) = \frac{\partial(-x)}{\partial y} \cdot (a - 2x + 3y) - x \cdot \frac{\partial(b - x - y)}{\partial y} = x,$$

$$Q'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}((a - y)(2x + y)) = \frac{\partial(a - y)}{\partial x} \cdot (2x + y) + (a - y) \cdot \frac{\partial(2x + y)}{\partial x} = 2(a - y) = 2a - 2y,$$

$$Q'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}((a - y)(2x + y)) = \frac{\partial(a - y)}{\partial y} \cdot (2x + y) + (a - y) \cdot \frac{\partial(2x + y)}{\partial y} = a - 2x - 2y.$$

Подставим теперь координаты состояний равновесия и проанализируем собственные числа матриц Якоби. Матрица Якоби состояния равновесия  $(0, 0)$  равна

$$\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 2a & a \end{pmatrix}.$$

Матрица нижнетреугольная, а значит её собственные числа совпадают с её диагональными элементами:  $\lambda_1 = -b$ ,  $\lambda_2 = a$ . Собственные числа всегда вещественные, поэтому состояние равновесия может быть негрубым только когда одно из этих собственных чисел равно нулю. Таким образом, бифуркационное множество для этого состояния равновесия –  $a = 0$  или  $b = 0$ . Опять же, так как мы явно знаем собственные числа матрицы Якоби, мы можем проанализировать тип состояния равновесия при любых значениях параметров:

- $-b > 0$ ,  $a > 0$  – неустойчивый узел;
- $-b < 0$ ,  $a < 0$  – устойчивый узел;
- $-b > 0$ ,  $a < 0$  или  $-b < 0$ ,  $a > 0$  – седло.

Для состояния равновесия с координатами  $(0, a)$  матрица Якоби равна

$$\begin{pmatrix} a - b & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Матрица диагональная, а значит её собственные числа совпадают с её диагональными элементами:  $\lambda_1 = a - b$ ,  $\lambda_2 = -a$ . Собственные числа всегда вещественные,

поэтому состояние равновесия может быть негрубым только когда одно из этих собственных чисел равно нулю. Таким образом, бифуркационное множество для этого состояния равновесия –  $a = b$  или  $a = 0$ . Так как мы явно знаем собственные числа матрицы Якоби, мы можем проанализировать тип состояния равновесия при любых значениях параметров:

- $a - b > 0$ ,  $-a > 0$  – неустойчивый узел;
- $a - b < 0$ ,  $-a < 0$  – устойчивый узел;
- $a - b > 0$ ,  $-a < 0$  или  $a - b < 0$ ,  $-a > 0$  – седло.

Матрица Якоби, вычисленная в состоянии равновесия  $(b - a, a)$ , равна

$$\begin{pmatrix} b - a & b - a \\ 0 & a - 2b \end{pmatrix}.$$

Матрица верхнетреугольная, а значит её собственные числа совпадают с её диагональными элементами:  $\lambda_1 = b - a$ ,  $\lambda_2 = a - 2b$ . Собственные числа всегда вещественные, поэтому состояние равновесия может быть негрубым только когда одно из этих собственных чисел равно нулю. Таким образом, бифуркационное множество для этого состояния равновесия –  $a = b$  или  $a = 2b$ . Поскольку здесь мы также явно знаем собственные числа матрицы Якоби, то мы можем проанализировать тип состояния равновесия при любых значениях параметров:

- $b - a > 0$ ,  $a - 2b > 0$  – неустойчивый узел;
- $b - a < 0$ ,  $a - 2b < 0$  – устойчивый узел;
- $b - a > 0$ ,  $a - 2b < 0$  или  $b - a < 0$ ,  $a - 2b > 0$  – седло.

Наконец, матрица Якоби в состоянии равновесия с координатами  $(-b, 2b)$  равна

$$\begin{pmatrix} -b & -b \\ 2a - 4b & a - 2b \end{pmatrix}.$$

Она не имеет какой-либо удобной структуры, поэтому для её исследования нужно исследовать её определитель и след:

$$\text{tr } J = a - 3b$$

$$\det J = -b \cdot (a - 2b) + b \cdot (2a - 4b) = b \cdot (2a - 4b - (a - 2b)) = b \cdot (a - 2b)$$

Сначала проанализируем первое вырождение состояния равновесия, а именно – наличие как минимум одного нулевого собственного числа. Для этого определитель должен обратиться в ноль:

$$\det J = b \cdot (a - 2b) = 0$$

Это уравнение имеет решения

$$\begin{bmatrix} b = 0 \\ a = 2b \end{bmatrix}.$$

Проверим, имеет ли место второе вырождение

$$\text{tr } J = 0, \det J > 0.$$

Для этого сначала решим уравнение  $\text{tr } J = 0$ :

$$\text{tr } J = a - 3b = 0,$$

откуда  $a = 3b$ . Подставим теперь это в выражение для определителя. Получим

$$b \cdot (a - 2b) = b \cdot (3b - 2b) = b \cdot b = b^2 \geq 0.$$

Таким образом, при  $a = 3b, b \neq 0$  происходит второе вырождение, при котором у матрицы Якоби состояния равновесия появляется пара чисто мнимых собственных чисел. **Результирующее бифуркационное множество есть  $b \cdot (a - 2b) = 0$  или  $a = 3b$  (при  $b \neq 0$ ).** С помощью следа и определителя мы можем определить, при каких значениях параметров данное состояние равновесия имеет определённый тип:

- $b \cdot (a - 2b) < 0$  – седло ( $\det J < 0$ );
- $b \cdot (a - 2b) > 0, a - 3b > 0$  – неустойчивый узел/фокус ( $\det J > 0, \text{tr } J > 0$ );
- $b \cdot (a - 2b) > 0, a - 3b < 0$  – устойчивый узел/фокус ( $\det J > 0, \text{tr } J < 0$ ).

### 1.1. Общая бифуркационная диаграмма для всех состояний равновесия

Выпишем бифуркационное множество для всех состояний равновесия:

- $a = 0$  или  $b = 0$  для  $(0, 0)$ ;
- $a = b$  или  $a = 0$  для  $(0, a)$ ;
- $a = b$  или  $a = 2b$  для  $(b - a, a)$ ;
- $b = 0$  или  $(a - 2b) = 0$  или  $a = 3b$  (при  $b \neq 0$ ) для  $(-b, 2b)$ .

Воспользуемся GeoGebra для построения бифуркационного множества (по оси  $x$  – параметр  $a$ , а по оси  $y$  – параметр  $b$ ). Определить тип каждого состояния равновесия можно двумя способами. Во-первых, с помощью GeoGebra можно построить любое сочетание неравенств, которые определяют тип состояний равновесия. Во-вторых, это можно сделать, взяв какие-нибудь конкретные значения параметров и проверив, какому из неравенств удовлетворяют значения параметров. Возьмем, например,  $a^* = -4, b^* = 4$ . Пересмотрим наши записи для каждого состояния равновесия:

- так как  $-b^* < 0$  и  $a^* < 0$ , то  $(0, 0)$  – устойчивый узел;
- так как  $a^* - b^* < 0, -a^* > 0$ , то  $(0, a^*)$  – седло;
- так как  $b^* - a^* > 0, a^* - 2b^* < 0$ , то  $(b^* - a^*, a^*)$  – седло;
- так как  $b^*(a^* - 2b^*) < 0$ , то  $(-b^*, 2b^*)$  – седло.

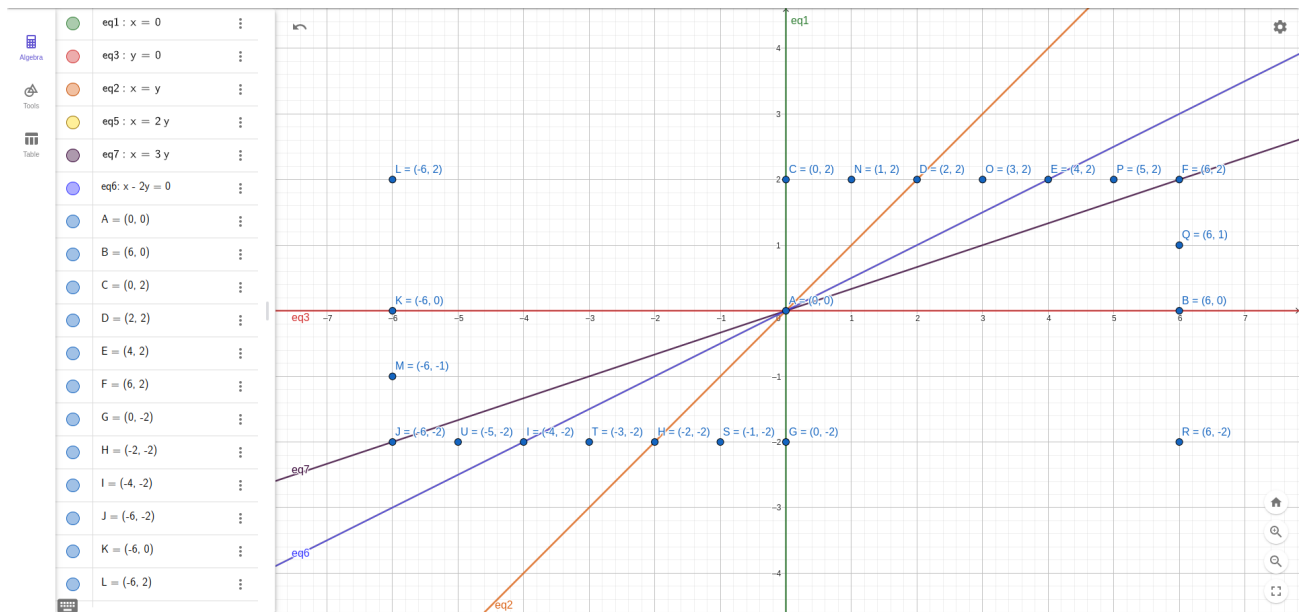


Рис. 1: Бифуркационные границы данной системы.

## 2. Фазовые портреты системы

sdfsd