МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)»

Институт информационных технологий, математики и механики

ОТЧЕТ

по **лабораторной** работе

на тему:

«Исследование динамики системы с двумя параметрами»

Выполнил:
студент группы 3822Б1ПМ2 Махнёв Р.Д.
Проверил:
преподаватель каф. ТУДС Гринес Е.А.

Нижний Новгород
2024

Содержание

1 Анализ состояний равновесия системы **3**

1.1 Общая бифуркационная диаграмма для всех состояний равновесия . . 5

1.2 Поиск инвариантных прямых 6

2 Фазовые портреты системы **7**

1. Анализ состояний равновесия системы

Рассмотрим систему
$$\begin{cases} \dot{x} = -x(b - x - y), \\ \dot{y} = (a - y)(2x + y). \end{cases}.$$
Это нелинейная динамическая система, зависящая от параметров. Покажем, как построить для неё бифуркационную диаграмму.

Сначала найдём координаты всех присутствующих в ней состояний равновесия в зависимости от параметров. Состояния равновесия находятся как решения системы уравнений
$$\begin{cases} -x(b - x - y) = 0 \\ (a - y)(2x + y) = 0 \end{cases}.$$
В результате получаем четыре состояния равновесия: $(0, 0)$, $(0, a)$, $(b-a, a)$ и $(-b, 2b)$.

Теперь найдём матрицу Якоби этой системы. Следуя стандартным обозначениям, примем $P(x, y) = -x(b - x - y)$ и $Q(x, y) = (a - y)(2x + y)$. Вычислим частные производные:

$$P'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(-x(b - x - y)) = \frac{\partial(-x)}{\partial x} \cdot (b - x - y) - x \cdot \frac{\partial(b - x - y)}{\partial x} = 2x + y - b,$$

$$P'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-x(b - x - y)) = \frac{\partial(-x)}{\partial y} \cdot (a - 2x + 3y) - x \cdot \frac{\partial(b - x - y)}{\partial y} = x,$$

$$Q'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}((a-y)(2x+y)) = \frac{\partial(a - y)}{\partial x} \cdot (2x+y) + (a-y) \cdot \frac{\partial(2x + y)}{\partial x} = 2(a-y) = 2a-2y,$$

$$Q'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}((a - y)(2x + y)) = \frac{\partial(a - y)}{\partial y} \cdot (2x + y) + (a - y) \cdot \frac{\partial(2x + y)}{\partial y} = a - 2x - 2y.$$

Подставим теперь координаты состояний равновесия и проанализируем собственные числа матриц Якоби. Матрица Якоби состояния равновесия равновесия $(0, 0)$ равна
$$\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 2a & a \end{pmatrix}.$$
Матрица нижнетреугольная, а значит её собственные числа совпадают с её диагональными элементами: $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = a$. Собственные числа всегда вещественные, поэтому состояние равновесия может быть негрубым только когда одно из этих собственных чисел равно нулю. Таким образом, бифуркационное множество для этого состояния равновесия – $a = 0$ или $b = 0$. Опять же, так как мы явно знаем собственные числа матрицы Якоби, мы можем проанализировать тип состояния равновесия при любых значениях параметров:

- $-b > 0,\ a > 0$ – неустойчивый узел;
- $-b < 0,\ a < 0$ – устойчивый узел;
- $-b > 0,\ a < 0$ или $-b < 0,\ a > 0$ – седло.

Для состояния равновесия с координатами $(0, a)$ матрица Якоби равна
$$\begin{pmatrix} a - b & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Матрица диагональная, а значит её собственные числа совпадают с её диагональными элементами: $\lambda_1 = a - b$, $\lambda_2 = -a$. Собственные числа всегда вещественные, поэтому состояние равновесия может быть негрубым только когда одно из этих собственных чисел равно нулю. Таким образом, бифуркационное множество для этого состояния равновесия – $a = b$ или $a = 0$. Так как мы явно знаем собственные числа матрицы Якоби, мы можем проанализировать тип состояния равновесия при любых значениях параметров:

- $a - b > 0,\ -a > 0$ – неустойчивый узел;
- $a - b < 0,\ -a < 0$ – устойчивый узел;
- $a - b > 0,\ -a < 0$ или $a - b < 0,\ -a > 0$ – седло.

Матрица Якоби, вычисленная в состоянии равновесия $(b - a, a)$, равна

$$\begin{pmatrix} b-a & b-a \\ 0 & a-2b \end{pmatrix}.$$

Матрица верхнетреугольная, а значит её собственные числа совпадают с её диагональными элементами: $\lambda_1 = b - a,\ \lambda_2 = a - 2b$. Собственные числа всегда вещественные, поэтому состояние равновесия может быть негрубым только когда одно из этих собственных чисел равно нулю. Таким образом, бифуркационное множество для этого состояния равновесия – $a = b$ или $a = 2b$. Поскольку здесь мы также явно знаем собственные числа матрицы Якоби, то мы можем проанализировать тип состояния равновесия при любых значениях параметров:

- $b - a > 0,\ a - 2b > 0$ – неустойчивый узел;
- $b - a < 0,\ a - 2b < 0$ – устойчивый узел;
- $b - a > 0,\ a - 2b < 0$ или $b - a < 0,\ a - 2b > 0$ – седло.

Наконец, матрица Якоби в состоянии равновесия с координатами $(-b, 2b)$ равна

$$\begin{pmatrix} -b & -b \\ 2a-4b & a-2b \end{pmatrix}.$$

Она не имеет какой-либо удобной структуры, поэтому для её исследования нужно исследовать её определитель и след:

$$\operatorname{tr} J = a - 3b$$

$$\det J = -b \cdot (a - 2b) + b \cdot (2a - 4b) = b \cdot (2a - 4b - (a - 2b)) = b \cdot (a - 2b)$$

Сначала проанализируем первое вырождение состояния равновесия, а именно – наличие как минимум одного нулевого собственного число. Для этого определитель должен обратиться в ноль:

$$\det J = b \cdot (a - 2b) = 0$$

Это уравнение имеет решения

$$\left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a = 2b \end{array}\right..$$

Проверим, имеет ли место второе вырождение

$$\operatorname{tr} J = 0,\ \det J > 0.$$

Для этого сначала решим уравнение $\operatorname{tr} J = 0$:

$$\operatorname{tr} J = a - 3b = 0,$$

откуда $a = 3b$. Подставим теперь это в выражение для определителя. Получим

$$b \cdot (a - 2b) = b \cdot (3b - 2b) = b \cdot b = b^2 \geq 0.$$

Таким образом, при $a = 3b, b \neq 0$ происходит второе вырождение, при котором у матрицы Якоби состояния равновесия появляется пара чисто мнимых собственных чисел. Результирующее бифуркационное множество есть $b \cdot (a - 2b) = 0$ или $a = 3b$ (при $b \neq 0$). С помощью следа и определителя мы можем определить, при каких значениях параметров данное состояние равновесия имеет определённый тип:

- $b \cdot (a - 2b) < 0$ – седло ($\det J < 0$);
- $b \cdot (a - 2b) > 0,\ a - 3b > 0$ – неустойчивый узел/фокус ($\det J > 0,\ \operatorname{tr} J > 0$);
- $b \cdot (a - 2b) > 0,\ a - 3b < 0$ – устойчивый узел/фокус ($\det J > 0,\ \operatorname{tr} J < 0$).

1.1. Общая бифуркационная диаграмма для всех состояний равновесия

Выпишем бифуркационное множество для всех состояний равновесия:

- $a = 0$ или $b = 0$ для $(0, 0)$;
- $a = b$ или $a = 0$ для $(0, a)$;
- $a = b$ или $a = 2b$ для $(b - a, a)$;
- $b = 0$ или $(a - 2b) = 0$ или $a = 3b$ (при $b \neq 0$) для $(-b, 2b)$.

Воспользуемся GeoGebra для построения бифуркационного множества (по оси x параметр a, а по оси y – параметр b). Также отметим значения параметров, в которых будем определять типы состояний равновесия и строить фазовые портреты системы(см. рис. 1).

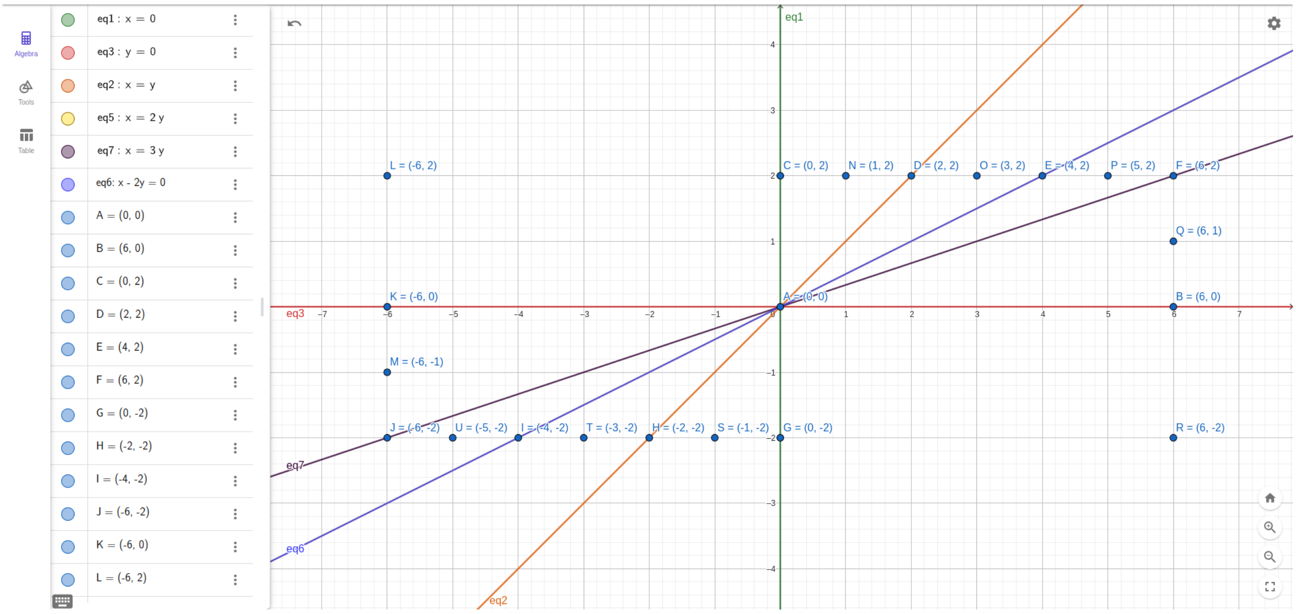

Рис. 1: Бифуркационные границы данной системы.

1.2. Поиск инвариантных прямых

Возьмем решение $(0, a)$ данной системы и выразим y через x: $y = 0x + a$

Запишем и проверим, выполняется ли необходимое и достаточное условие инвариантности прямой $y = 0x + a$.

$$Q(x, 0x + a) = 0 \cdot P(x, 0x + a)$$
$$0 \cdot (2x + a) = 0 \cdot x(b - x - a)$$

$0 = 0 \Rightarrow$ прямая $y = a$ является инвариантной прямой.

Теперь выразим x через y: $x = 0y + 0$

Запишем и проверим, выполняется ли необходимое и достаточное условие инвариантности прямой $x = 0y + 0$

$$P(0, y) = 0 \cdot Q(0, y)$$
$$0 \cdot (b - y) = 0 \cdot y(a - y)$$

$0 = 0 \Rightarrow$ прямая $x = 0$ является инвариантной прямой.

$$\begin{cases} -x(b - x - y) = 0 \\ (a - y)(2x + y) = 0 \end{cases}.$$

2. Фазовые портреты системы

1. Возьмем следующие значения параметров: $a^* = -4,\ b^* = 4$. При этих параметрах система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(b - x - y), \\ \dot{y} = (a - y)(2x + y). \end{cases}.$$

   Состояния равновесия данной системы с выбранными параметрами: Определить тип каждого состояния равновесия можно двумя способами. Во-первых, с помощью GeoGebra можно построить любое сочетание неравенств, которые определяют тип состояний равновесия. Во-вторых, это можно сделать, взяв какие-нибудь конкретные значения параметров и проверив, какому из неравенств удовлетворяют значения параметров. Возьмем, например, $a^* = -4,\ b^* = 4$. Пересмотрим наши записи для каждого состояния равновесия:

   - так как $-b^* < 0$ и $a^* < 0$, то $(0, 0)$ – устойчивый узел;
   - так как $a^* - b^* < 0,\ -a^* > 0$, то $(0, a^*)$ – седло;
   - так как $b^* - a^* > 0,\ a^* - 2b^* < 0$, то $(b^* - a^*, a^*)$ – седло;
   - так как $b^*(a^* - 2b^*) < 0$, то $(-b^*, 2b^*)$ – седло.

2. Возьмем следующие значения параметров: $a^* = 1,\ b^* = 2$. При этих параметрах система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \cdot (-x - y + 2), \\ \dot{y} = (1 - y) \cdot (2 \cdot x + y), \end{cases}.$$

   Состояния равновесия данной системы с выбранными параметрами: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, 4)$, $(1, 1)$. Определим тип каждого состояния равновесия, проверив, какому из неравенств удовлетворяют взятые значения параметров. Пересмотрим наши записи для каждого состояния равновесия:

   - так как $-b^* < 0$ и $a^* > 0$ то $(0, 0)$ – Седло.
   - так как $a^* - b^* < 0$ и $-a^* < 0$ то $(0, 1)$ – Устойчивый узел.
   - так как $\lambda_0 > 0$ и $\lambda_1 < 0$ то $(-2, 4)$ – Седло.
   - так как $-a^* + b^* > 0$ и $a^* - 2 * b^* < 0$ то $(1, 1)$ – Седло;

   Возьмем следующие значения параметров: $a^* = 1,\ b^* = 2$. При этих параметрах система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \cdot (-x - y + 2), \\ \dot{y} = (1 - y) \cdot (2 \cdot x + y), \end{cases}.$$

   +++++++++ Состояния равновесия данной системы с выбранными параметрами: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, 4)$, $(1, 1)$. Определим тип каждого состояния равновесия, проверив, какому из неравенств удовлетворяют взятые значения параметров. Пересмотрим наши записи для каждого состояния равновесия:

   - так как $-b^* < 0$ и $a^* > 0$ то $(0, 0)$ – Седло.
   - так как $a^* - b^* < 0$ и $-a^* < 0$ то $(0, 1)$ – Устойчивый узел.

- так как $\lambda_0 > 0$ и $\lambda_1 < 0$ то $(-2, 4)$ – Седло.
- так как $-a^* + b^* > 0$ и $a^* - 2 * b^* < 0$ то $(1, 1)$ – Седло;

Возьмем следующие значения параметров: $a^* = 1,\ b^* = 5$. При этих параметрах система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \cdot (-x - y + 5), \\ \dot{y} = (1 - y) \cdot (2 \cdot x + y), \end{cases} .$$

Возьмем следующие значения параметров: $a^* = 1,\ b^* = 5$. При этих параметрах система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \cdot (-x - y + 5), \\ \dot{y} = (1 - y) \cdot (2 \cdot x + y). \end{cases} .$$

Состояния равновесия данной системы с выбранными параметрами: $(0,0)$, $(0,1)$, $(-5,10)$, $(4,1)$. Определим тип каждого состояния равновесия, проверив, какому из неравенств удовлетворяют взятые значения параметров. Пересмотрим наши записи для каждого состояния равновесия:

- так как $-b^* < 0$ и $a^* > 0$ то $(0,0)$ – седло;
- так как $a^* - b^* < 0$ и $-a^* < 0$ то $(0,1)$ – устойчивый узел;
- так как $\lambda_1 = -\sqrt{94} - 7 < 0$ и $\lambda_2 = -7 + \sqrt{94} > 0$ то $(-5,10)$ – седло;
- так как $-a^* + b^* > 0$ и $a^* - 2 * b^* < 0$ то $(4,1)$ – седло.