

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
Факультет радиотехники и кибернетики
Кафедра интеллектуальных информационных радиофизических систем

**РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ОЦЕНКИ
ЛЕТНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК БПЛА
МУЛЬТИРОТОРНОГО ТИПА**

Выпускная бакалаврская работа

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Выполнил:

Студент 314 группы

Агишев Руслан Тимурович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

Кочкаров Азрет Ахматович

Москва 2017

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Кочкарову Азрету Ахматовичу за неоценимую помощь и поддержку при выполнении данной работы.

Оглавление

ОГЛАВЛЕНИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
1. МОДЕЛЬ КВАДРОКОПТЕРА	6
2. ОЦЕНКА ГРУЗОПОДЪЕМНОСТИ ГРУППЫ БПЛА и ДОПУСТИМОЙ СКОРОСТИ ВЕТРА	18
2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	18
2.2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ	21
3. ОЦЕНКА МАНЕВРЕННОСТИ КВАДРОКОПТЕРА	30
3.1. УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ БПЛА	31
3.2. ТРАЕКТОРИЯ, ЗАДАВАЕМАЯ КОНТРОЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ	35
3.2.1. ТРАЕКТОРИЯ С НАИМЕНЬШЕЙ ОШИБКОЙ ОТКЛЮНЕНИЯ	35
3.2.2. ТРАЕКТОРИИ, ЗАДАВАЕМЫЕ ПОЛИНОМАМИ БОЛЕЕ НИЗКИХ СТЕПЕНЕЙ	38
3.3. СРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ	38
3.3.1. ТРАЕКТОРИИ, ЗАДАВАЕМЫЕ КОНТРОЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ	38
3.3.2. СРАВНЕНИЕ РАССЧИТАННОЙ ТРАЕКТОРИИ С КРИВОЙ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ КОНТРОЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ	47
4. АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ	50
5. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ	51
6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	51
7. ПРИЛОЖЕНИЯ	53

Введение

В последние годы все большее применение в различных областях находят беспилотные летательные аппараты [1-5]. В гражданской сфере чаще всего используются квадрокоптеры, т.е. дроны с четырьмя винтами. Легкость, малый размер, маневренность, простота управления - основные достоинства квадрокоптеров, которые позволяют использовать их во многих отраслях.

Установка на квадрокоптеры дополнительного оборудования (например, камер) позволяет справляться с проблемами преследование нарушителей, обзора местности в тяжелых условиях (наводнение). Часто эти малые летательные аппараты используются в сельском хозяйстве и для доставки товаров, как это делают такие кампании, как Amazon и DHL [6]. Транспортировка грузов является одной из важнейших задач квадрокоптеров.

Одними из результатов данной работы являются описание и создание модели из группы квадрокоптеров для переноса грузов. Реализованная компьютерная модель позволяет, варьируя такие параметры БПЛА, как

- масса квадрокоптера,
- максимальная сила тяги,
- емкость батареи,

оценивать летно-технические характеристики [21] исследуемой системы:

- максимальную массу полезной нагрузки,
- максимальную допустимую скорость ветра.

Кроме того, с помощью созданной модели существует возможность оценивать точность следования группой квадрокоптеров, жестко сцепленных с грузом, желаемой траектории в условиях изменяющейся среды (учтено наличие ветра).

БПЛА мультироторного типа широко используются в городских условиях с плотной застройкой. Поэтому движение квадрокоптера вдоль желаемой

траектории является важным вопросом. Существует множество алгоритмов реализации этой задачи. Результатом данной работы является реализация алгоритма с минимальной ошибкой следования БПЛА вдоль траектории [9], сравнение её с кривыми, заданными полиномами меньших степеней.

Полученные результаты сравнения позволяют выбрать оптимальную траекторию с точки зрения точности следования ЛА пространственной кривой без существенного снижения скорости. С помощью предложенной модели приведены оценки маневренности БПЛА мультироторного типа.

1. Модель квадрокоптера

Исследуемый беспилотный летательный аппарат мультироторного типа представляет собой квадрокоптер, летательный аппарат с четырьмя несущими винтами. В четырехроторном БПЛА вертикальную тягу создает каждый ротор. Соседние роторы вращаются в противоположных направлениях, при этом маневры осуществляются путем изменения скорости вращения винтов.

Квадрокоптер имеет шесть степеней свободы, а именно три линейных координаты [X; Y; Z] и три угловых [ϕ, θ, ψ]. В качестве управляющих каналов выступают общий газ и 4 угла.

Модель аппарата представлена на рис. 1.

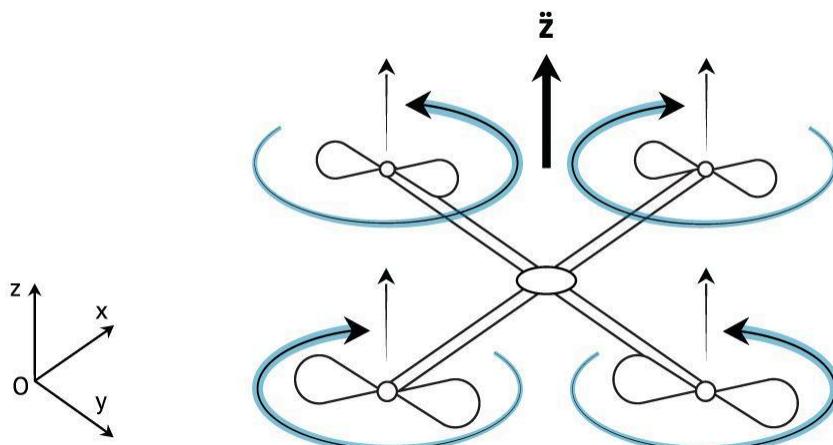


Рис. 1. Тип исследуемого БПЛА мультироторного типа (без нагрузки тела).

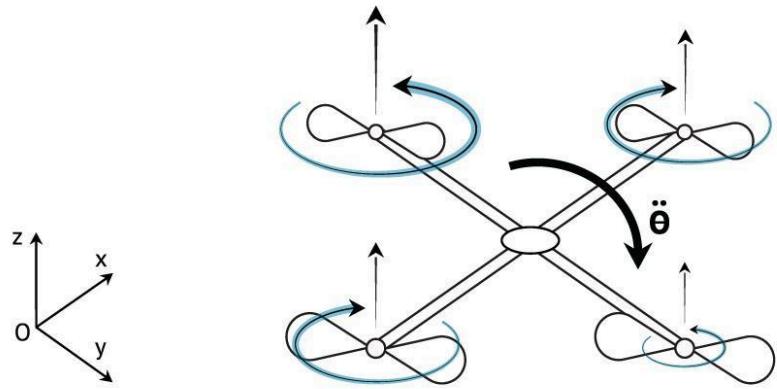
Маневры квадрокоптера осуществляются благодаря трем режимам работы винтов:

1. Управление высотой полета возможно реализовать, если все винты вращаются с одинаковой угловой скоростью. Чем быстрее вращаются винты, тем выше взлетает аппарат.
2. Квадрокоптер осуществляет поворот вокруг своей оси, если два мотора, находящихся на одной радиальной линии, вращаются быстрее, чем другие два мотора. Направление поворота-влева или вправо – определяется в зависимости от того, какие два мотора вращаются быстрее других.
3. Наклон коптера набок - крен или тангаж - один из моторов вращается быстрее остальных, а диаметральный ему – медленнее остальных. Это приведет к наклону коптера набок и в итоге к полету в горизонтальном направлении в сторону, противоположную лучу, на котором находится быстрый мотор.

Взлет/Снижение



Крен



Вращение

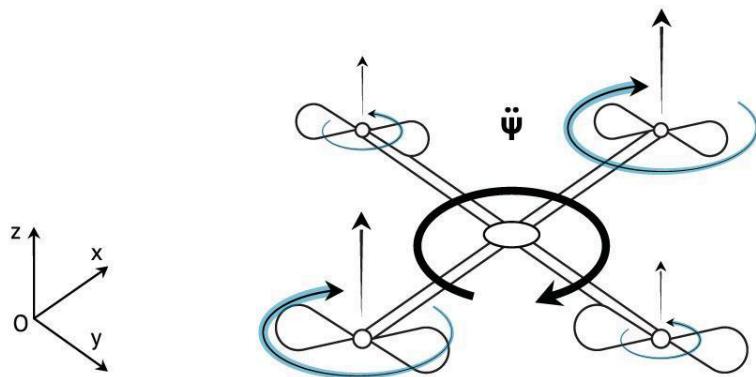


Рис. 2. Принципы полета квадрокоптера

Существует две основные конфигурации расположения винтов квадрокоптера относительно ССК: +-конфигурация (плюс-конфигурация) и X-конфигурация (крест-конфигурация) рис. 3. Динамика движения данных конфигураций во многом схожа, так как для перехода от одной конфигурации к другой достаточно применить преобразование

$$\psi_x = \psi_+ + \frac{\pi}{4},$$

где ψ_x и ψ_+ - углы рысканья x-конфигурации и +-конфигурации соответственно.

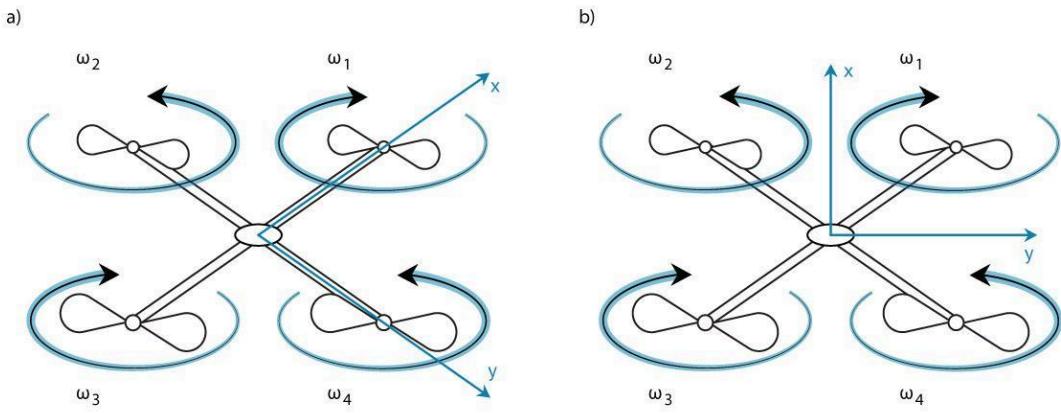


Рис. 3. Конфигурация расположения винтов квадрокоптера а) + -конфигурация, б) х-конфигурация

В дипломной работе рассматривается модель движения, которая описывает криволинейное неравномерное движение квадрокоптера относительно неподвижной декартовой системы координат. Считается, что эффекты образования вихрей не учитываются.

Считается, что вся масса основного тела сосредоточена в его центре масс.

Принято допущение, тело квадрокоптера аппроксимируется шаром радиусом $R = 0.01 \text{ м}$ и вся его масса сосредоточена в центре масс всего аппарата и составляет $M_s = 0.1 \text{ кг}$. Моторы считаются материальными точками массой $M_m = 0.02 \text{ кг}$. Соответственно, полная масса квадрокоптера составляет $m = 0.18 \text{ кг}$.

Площадь сечения квадрокоптера по осям Ox , Oy , Oz соответственно:

$$S_x = 0,002 \text{ м}^2,$$

$$S_y = 0,002 \text{ м}^2,$$

$$S_z = 0,004 \text{ м}^2.$$

Управление будет осуществляться путем изменения угловых скоростей на винтах.

В модели было учено физическое ограничение на максимальную силу тяги моторов: $F_{max} = 2mg$.

Движением квадрокоптера можно управлять, изменяя скорости вращения винтов. Аппарат движется относительно неподвижной инерциальной системы отсчета, связанной с Землей. Угловое положение аппарата задаем тремя углами Крылова: углами крена ϕ , тангажа θ и рыскания ψ , определяющими вращение вокруг осей соответственно.

Введем в рассмотрение две системы координат:

$Oxyz$ – неподвижная, инерциальная система координат.

$Axyz$ – подвижная система координат, связанная с телом аппарата.

На Рис. 4 приведены силы, действующие на аппарат в этом случае.

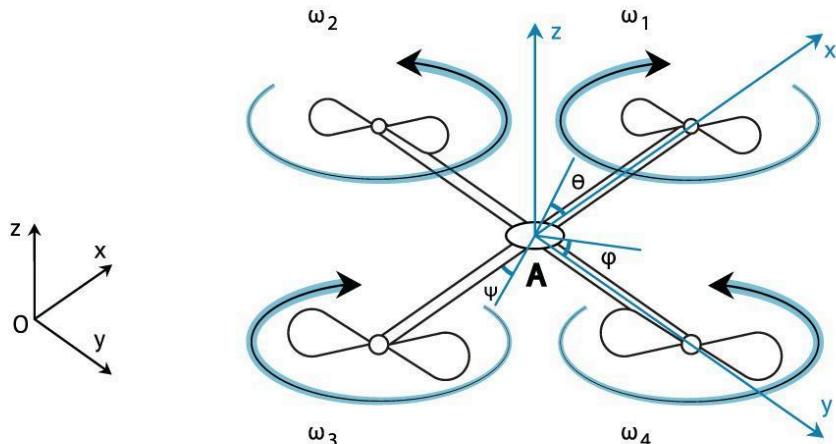


Рис. 4. Действующие на тело силы

Т. А - начало координат – является центром масс аппарата,

Ax – ось, располагаемая в диаметральной плоскости, направленная в сторону носа аппарата (при естественном положении совпадает с горизонтом).

Az - ось, совпадающая с линией пересечения основных плоскостей аппарата, направлена противоположно силе тяжести.

Ay - ось, перпендикулярная плоскости xy .

Оси совпадают с главными осями инерции тела

Второй закон Ньютона для квадрокоптера будет иметь вид:

$$m =$$

где m – общая масса тела квадрокоптера,

v – скорость в инерциальной системе отсчета,

f – вектор суммарной силы, приложенной к аппарату.

При переходе системы из неподвижной системы координат в подвижную уравнение движения принимает вид:

$$\dot{m} = m,$$

где – линейное ускорение относительно подвижной системы координат, w –

В подвижной системе координат:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{x,A} \\ \dot{v}_{y,A} \\ \dot{v}_{z,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv_{y,A} - qv_{z,A} \\ pv_{z,A} - rv_{x,A} \\ qv_{x,A} - pv_{y,A} \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix},$$

где $\begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$ – угловые скорости, $\begin{bmatrix} v_{x,A} & v_{y,A} & v_{z,A} \end{bmatrix}^T$ – линейные скорости, а

$$f = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T.$$

Связь между линейными скоростями и инерциальной и подвижной системой отчета задается соотношением:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Rv_A,$$

где R – матрица поворота от подвижной системы координат к инерциальной:

$$R = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix},$$

где $S_x = \sin(x)$,

$C_x = \cos(x)$.

После дифференцирования (5), пренебрегая \dot{R} , получается

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \dot{R} v_A.$$

На квадрокоптер действует сила тяжести

$$F_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}.$$

В подвижной системе координат сила тяжести принимает вид:

$$F_g = \begin{bmatrix} mg \sin(\theta) \\ -mg \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -mg \cos(\varphi) \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Также на квадрокоптер действует подъемная сила:

$$F = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2),$$

где k – экспериментально определяемая постоянная, а

ω_i - скорость вращения i-ого винта.

С учетом уравнений (8) и (9) выражение (4) примет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{x,A} \\ \dot{v}_{y,A} \\ \dot{v}_{z,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv_{y,A} - qv_{z,A} \\ pv_{z,A} - rv_{x,A} \\ qv_{x,A} - pv_{y,A} \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \sin(\theta) \\ -g \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -g \cos(\varphi) \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Так как инерциальная система отсчета предполагается неподвижной, подставив (10) в (7) и пренебрегая слагаемым в правой части, получается:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \frac{F}{m}.$$

Эту систему необходимо дополнить силой сопротивления

$$F_{comp} = c_d \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где c_d - коэффициент аэродинамической силы,

ρ - плотность воздуха,

v - скорость набегающего потока воздуха,

S - площадь набегающего потока аппарата, на которую действует набегающий поток.

Второй закон Ньютона для вращательной системы относительно инерциальной системы координат имеет вид:

$$\frac{dL}{dt} = M,$$

где L – угловой момент,

M – момент вращающей силы,

При переходе в подвижную систему координат:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d_A L}{dt} + w \times L = M,$$

В неинерциальной системе отсчета $L = Jw_A$, где J - тензор инерции.

Допустим, что тело квадрокоптера является симметричным, представляет собой шар радиусом R_s и массой M_s , на расстоянии от которого находятся моторы, представленные в виде материальных точек массой M_m на расстоянии длины лучей l от центра, что изображено на Рис. 5

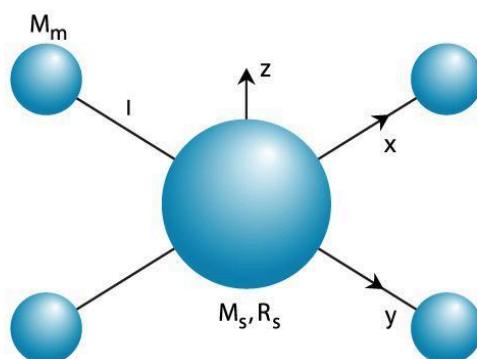


Рис. 5. Схематическое изображение квадрокоптера

Тензор инерции такого тела имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix},$$

где компоненты тензора выглядят следующим образом:

$$J_x = J_y = \frac{2M_s R_s^2}{5} + 2l^2 M_m,$$

$$J_z = \frac{2M_s R_s^2}{5} + 4l^2 M_m,$$

Представим

$$\begin{aligned} M_A &= [\tau_\varphi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T, \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= J^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_\varphi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\varphi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При допущении qr, pr, pq—малые, следует

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\varphi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{bmatrix}$$

где крутящие моменты $\tau_\varphi, \tau_\theta, \tau_\psi$ изображены на Рис.6

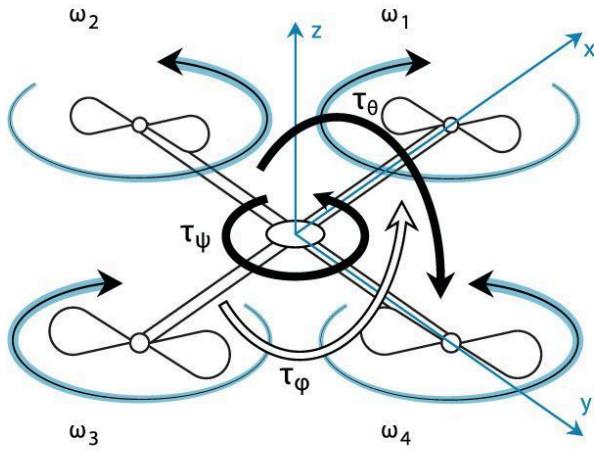


Рис. 6. Крутящие моменты, возникающие на винтах квадрокоптера

Угловые скорости в свою очередь представляются в виде:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\varphi & S_\varphi C_\theta \\ 0 & -S_\varphi & C_\varphi S_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S_\varphi T_\theta & C_\varphi T_\theta \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi \\ 0 & S_\varphi / C_\theta & C_\varphi / C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

где W – матрица перехода для угловых скоростей от инерциальной системы отсчета к подвижной системе отсчета.

$$T_x = \operatorname{tg}(x).$$

При малых φ и θ справедливо:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Поэтому из (11) и (12) следует:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\varphi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{bmatrix}.$$

Крутящие моменты винтов прямо пропорциональны квадрату скорости их вращения, выражения для тяги имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_\varphi &= lk(\omega_4^2 - \omega_2^2), \\ \tau_\theta &= lk(\omega_3^2 - \omega_1^2), \\ \tau_\psi &= b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2), \end{aligned}$$

где b и k экспериментально определяемые постоянные, а

ω_i - скорость вращения i -ого винта.

В итоге математическая модель квадрокоптера конфигурации + приобрела следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (C_\psi S_\theta C_\varphi + S_\psi S_\varphi) \frac{F}{m} - sign(x) c_d \frac{\dot{\rho} x^2}{2} S_x \\ \dot{y} = (S_\psi S_\theta C_\varphi - C_\psi S_\varphi) \frac{F}{m} - sign(y) c_d \frac{\dot{\rho} y^2}{2} S_y \\ \dot{z} = C_\theta C_\varphi \frac{F}{m} - g - sign(z) c_d \frac{\dot{\rho} z^2}{2} S_z \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{J_x} \tau_\varphi \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{array} \right.$$

Система получилась многомерной. Чтобы избавиться от многомерности, будем составлять систему управления на основе уравнений в подвижной системе отсчета.

Математическая модель квадрокоптера в подвижной системе отсчета имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -gS_\theta - sign(x)c_d \frac{\dot{\rho}x^2}{2} S_x \\ \ddot{y} = gC_\theta S_\varphi - sign(y)c_d \frac{\dot{\rho}y^2}{2} S_y \\ \ddot{z} = C_\theta C_\varphi g - \frac{F}{m} - sign(z)c_d \frac{\dot{\rho}z^2}{2} S_z \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{J_x} lk(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{J_y} lk(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{J_z} b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{array} \right.$$

Выполнив линеаризацию уравнений (16), с учетом, что углы тангажа и крена малые были получены уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -g\theta - sign(x)c_d \frac{\dot{\rho}x^2}{2} S_x \\ \ddot{y} = g\varphi - sign(y)c_d \frac{\dot{\rho}y^2}{2} S_y \\ \ddot{z} = g - \frac{F}{m} - sign(z)c_d \frac{\dot{\rho}z^2}{2} S_z \\ \ddot{\varphi} = \frac{2}{J_x} lk\omega_0(\omega_4 - \omega_2) \\ \ddot{\theta} = \frac{2}{J_y} lk\omega_0(\omega_3 - \omega_1) \\ \ddot{\psi} = \frac{2}{J_z} b\omega_0(-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \end{array} \right.$$

2. Оценка грузоподъемности группы БПЛА и допустимой скорости ветра

2.1. Постановка задачи

Одной из задач настоящей работы является создание модели для описания переноса тяжелых, в расчете на один квадрокоптер, грузов с помощью группы БПЛА. Для достижения желаемого результата на подобную модель разумно наложить ограничения по времени полета из начальной точки в конечную. Также немаловажно установить требования к точности достижения пункта доставки. Точность включает в себя малое отклонение по координате, по скорости движения, также малым должен быть и угол отклонения системы «груз + несущие квадрокоптеры» от горизонтали.

Для приближения к реальности нельзя, кроме того, не учитывать наличие ветра. Основной задачей работы являлось построение компьютерной модели для оценки максимально возможной массы, переносимой группой малых многороторных БПЛА. В данной работе рассмотрена динамика системы, состоящей из четырех квадрокоптеров, жестко прикрепленных к концам структуры в виде креста для транспортировки грузов. Параметры системы см. в Приложении 1.1. Рассмотрено движение такой системы с полезной нагрузкой, расположенной на перекрестьи. Движение подобной конфигурации описывается с помощью математической модели квадрокоптера. На ее основе произведено моделирование движения системы вдоль различных траекторий: прямой, синусоиды, ромба.

Набор траекторий позволяет исследовать поведение системы при выполнении различных маневров. Для каждой из них оценены координатные ошибки следования кривой в условиях изменяющейся среды: учтено наличие воздушного сопротивления движению системы, проведено моделирование порывов ветров. Наложены ограничения по времени полета из начальной точки в конечную.

С помощью метода Зиглера-Никольса были подобраны коэффициенты ПД-регуляторов, после чего смоделировано движение такой системы вдоль трех траекторий при наличии ветра. Исследована реакция системы при ее движении на сигнал ветра, заданный, как непрерывное изменение во времени скорости и направления ветра, так и в виде ступенчатых функций. В случае успешной транспортировки система остается в устойчивом положении.

Проведены оценки полной энергии, затрачиваемой квадрокоптерами на перенос груза для выбранных траекторий, в зависимости от силы и направления ветра. Спроектированная модель универсальна. Она позволяет производить исследования, предварительно задавая желаемые параметры летательных аппаратов, например, грузоподъемность и емкость батарей.

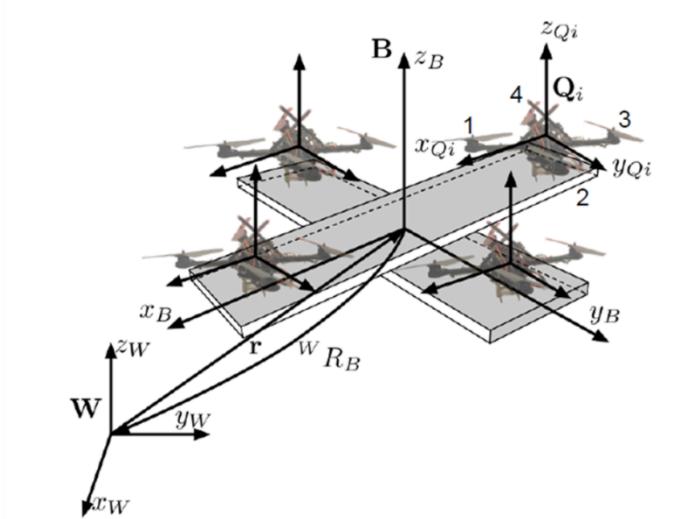


Рис. 7. Система из 4 квадрокоптеров

Будем рассматривать динамику системы, состоящей из n квадрокоптеров, жестко прикрепленных к полезной нагрузке. Для описания движения введем две системы координат: W (world), инерционную, связанную с землей, и B (body), центр которой совпадает с центром масс нагрузки.

Полная сила тяги, производимая i -ым квадрокоптером, а также моменты в связанной системе отсчета B будут определяться матричным соотношением [9]:

$$\left[F_{q,i} M_{xq,i} M_{yq,i} M_{zq,i} \right] = \left[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ l \ 0 \ - \ l \ - \ l \ 0 \ l \ 0 \ \frac{k_M}{k_F} \ - \ \frac{k_M}{k_F} \ \frac{k_M}{k_F} \ - \ \frac{k_M}{k_F} \right] \left[F_{i,1} \ F_{i,2} \ F_{i,3} \right]$$

Полные сила тяги и моменты, создаваемые n квадрокоптерами в инерциальной системе отсчета будут описываться [9]:

$$\left[F_B M_{xB} M_{yB} M_{zB} \right] = \sum_i \left[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ y_i \ \cos \cos \psi_i \ \psi_i \ 0 \ - \ x_i \ \sin \sin \psi_i \ \cos \cos \psi_i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \right]$$

Обозначая через m полную массу системы, получаем уравнение движения центра масс [9]:

$$\ddot{\vec{mr}} = [0 \ 0 \ - \ mg] + R_B^W [0 \ 0 \ F_B].$$

Здесь R_B^W обозначена матрица поворота при переходе из системы отсчета W в B. Полученное уравнение позволяет найти траекторию движения центра масс подвеса в зависимости от вырабатываемых каждым квадрокоптером сил тяги.

Уравнение Эйлера для вращательного движение твердого тела [9]:

$$I[\dot{p} \ \dot{q} \ \dot{r}] = [M_{xB} \ M_{yB} \ M_{zB}] - [p \ q \ r] \times I[p \ q \ r]$$

позволяет найти угловые ускорения тела-нагрузки. Будем считать, что xB-yB-zB – главные оси инерции, т.е. I – диагональная матрица. Последние 2 матричных выражения и определяют соответственное поступательное движение и вращение подвеса.

2.2. Результаты моделирования

Одной из основных компонент квадрокоптера в задаче подъема грузов служит ПИД-регулятор высоты [10, 18]. Он служит для удержания БПЛА на заданной высоте (desired). В среде MatLab/Simulink [11, 19] был смоделирован подобный регулятор, на вход которого подается ступенчатый сигнал, характеризующий подъем на определенную высоту.

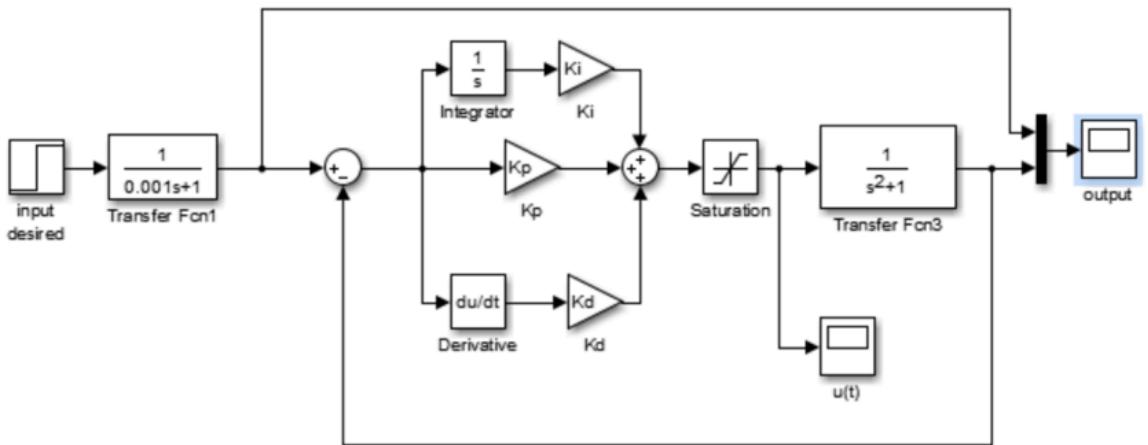


Рис. 8. ПИД-регулятор

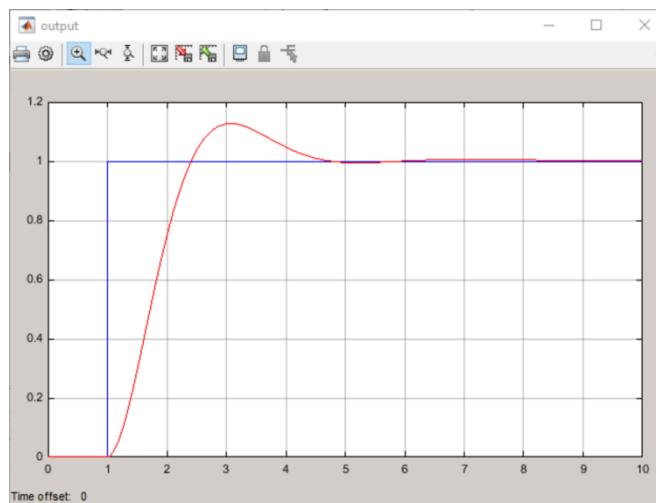


Рис. 9. Показания осциллографа

На Рис. 9 синим цветом изображен график желаемой высоты (1 метр), красным – стабилизированный сигнал на выходе ПИД-регулятора.

Схема на Рис. 8 воспроизводит формулу, определяющую работу регулятора:

$$\left(\ddot{r}_T - \ddot{r}_{des} \right) + K_d \left(\dot{r}_T - \dot{r} \right) + K_p (r_T - r) + K_i \int (r_T - r) dr = 0.$$

Для правильной настройки ПИД-регулятора использовался метод Зиглера-Никольса [10, 11]. В результате выбраны следующие коэффициенты:

$$K_p = 2,94; K_i = 0,91; K_d = 2,37.$$

Следующая симуляция показывает, что теоретически квадрокоптер с хорошо отложенным ПИД-регулятором способен достичь требуемой высоты за короткое время.

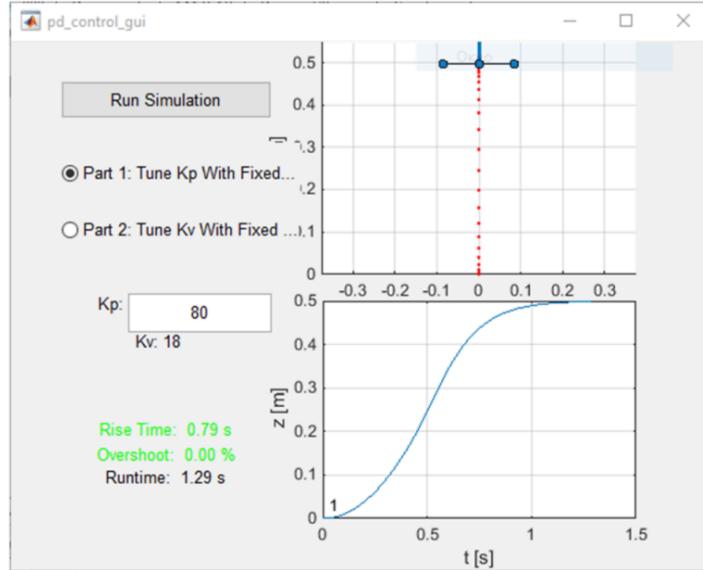


Рис. 10. Достижение заданной высоты

Сбалансированное распределение нагрузки означает, что и силы тяги квадрокоптеров должны быть равны, а, значит, и вырабатываемые ими мощности. Каждый БПЛА важен при подъеме и транспортировки грузов, поэтому задача равномерного распределения ставит цель достичь наибольшего времени в полете системы квадрокоптеров с грузом.

Выразим основные требования к системе при подъеме:

$$F_i = F/n \forall i = \overline{1, n}, F - \text{полная сила тяги всех коптеров}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\text{С учетом первого условия } \frac{F}{n} \left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \right) \times \vec{e_3} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{r}_i = \vec{0}.$$

Второе условие выражает геометрическую симметричность расположения квадрокоптеров на поднимаемой нагрузке относительно центра масс [12].

Рассмотрим далее подъем груза в виде креста с помощью четырех квадрокоптеров, расположенных симметрично, как показано на рис. 3. Будем считать, что крест – соединение двух одинаковых однородных тонких стержней, длины $2l$, а квадрокоптеры – точечные массы. Такая система удовлетворяет описанной в пункте I математической модели квадрокоптера, движение которой с учетом ветра будет отвечать уравнениями [13]:

$$\mu \ddot{r} = [0 \ 0 \ -\mu g] + R[0 \ 0 \ F] + \vec{W},$$

где $R = {}^W\mathbf{R}_B$,

$\mu = M + 4m$ – полная масса системы, M – масса нагрузки, m – масса одного коптера

$$I \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix} = \left[l(F_2 - F_4) \ l(F_3 - F_1) \ 0 \right] - [p \ q \ r] \times I[p \ q \ r]$$

$$\text{где } I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = 2ml^2 + \frac{1}{6}Ml^2$$

$$I_{zz} = 4ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2$$

Той же моделью будет описываться движение системы с дополнительным грузом, расположенным посередине креста. На Рис. 11 показана схема с шаром в виде дополнительного груза.

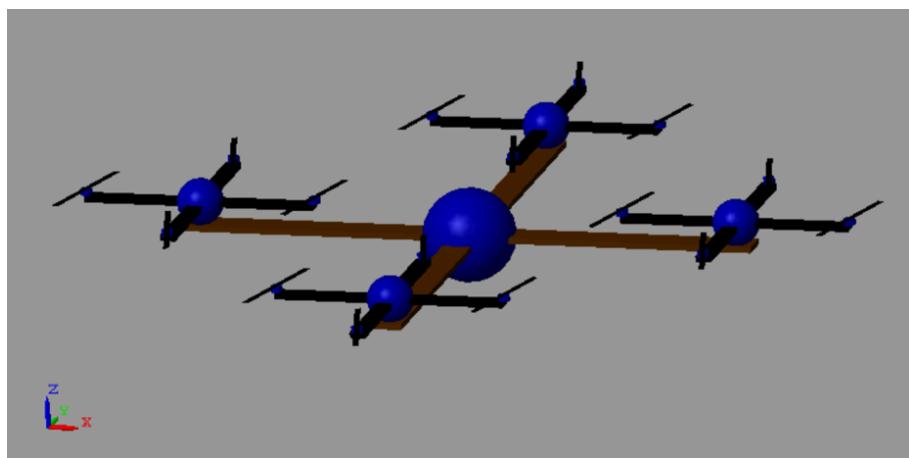


Рис. 11. Модель, собранная в SimMechanics

Визуализация в трехмерном пространстве выполнена с помощью пакета SimMechanics. При добавлении шара или груза иной формы меняются инерционные параметры системы:

$$\mu = M + 4m + m_{\text{гр}}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = 2ml^2 + \frac{1}{6}Ml^2 + \frac{2}{5}m_{\text{гр}}R^2$$

$$I_{zz} = 4ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2 + \frac{2}{5}m_{\text{гр}}R^2$$

$m_{\text{гр}}$ – масса шара, R – его радиус

В данной работе смоделировано плоское движение системы вдоль различных траекторий: прямой линии и синусоиды и ромба, см. Рис. 12, Рис. 13, Рис. 14. Также учтем возможное наличие ветра в виде силы \vec{W} [14]. Скорость ветра \vec{v} направлена под углом α к оси Оу. Действие силы \vec{W} ощущается сильнее при увеличении скорости движения и зависит от угла наклона креста к горизонту ϕ . Ее компоненты выражаются следующими равенствами:

$$W_y = \text{sign}(\cos \cos (\alpha)) \frac{1}{2} C_d \rho_{air} \left(\dot{y} - v_y \right)^2 S_y, \text{ где } S_y = |S \sin(\phi)|;$$

$$W_z = \text{sign}(\sin \sin (\alpha)) \frac{1}{2} C_d \rho_{air} \left(\dot{z} - v_z \right)^2 S_z, \text{ где } S_z = |S \cos(\phi)|.$$

Уравнения [15]:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W_y}{\mu} & -g & \frac{W_z}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-\sin(\phi)}{\mu} & 0 & \frac{\cos(\phi)}{\mu} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

где u_1 – управляющая сила, u_2 – момент,

далее линеаризуются, u_1 и u_2 выражаются через реальные и желаемые координаты:

$$\Phi_c = -\frac{1}{g} \left(-\frac{W_y}{\mu} + \ddot{y}_{des} + k_{d,y} (\dot{y}_{des} - \dot{y}) + k_{p,y} (y_{des} - y) \right);$$

$$u_2 = I_{xx} \left(k_{p,\phi} (\phi_c - \phi) + k_{d,\phi} (\dot{\phi}_c - \dot{\phi}) \right);$$

$$u_1 = \mu \left(g - \frac{W_z}{\mu} + \ddot{z}_{des} + k_{d,z} (\dot{z}_{des} - \dot{z}) + k_{p,z} (z_{des} - z) \right).$$

В ходе работы были подобраны указанные 6 коэффициентов для ПД-регуляторов.

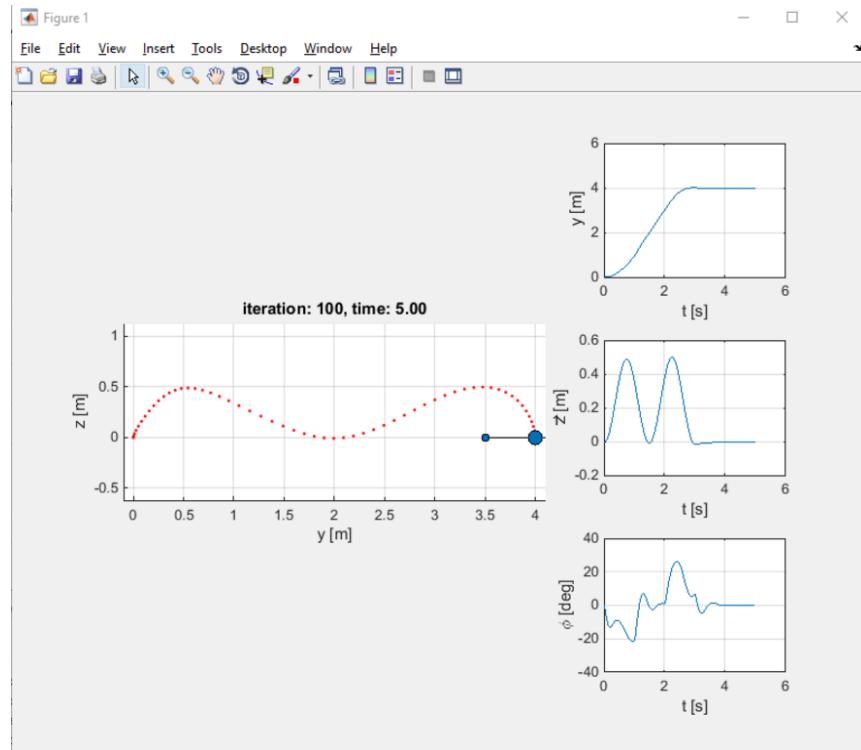


Рис. 12. Движение вдоль синусоиды

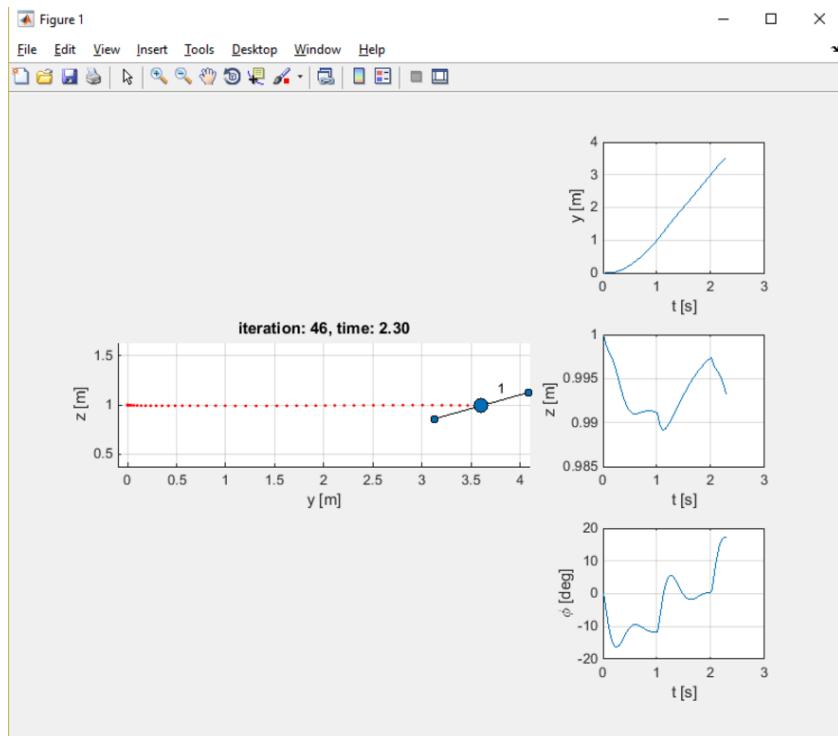


Рис. 13. Движение вдоль прямой

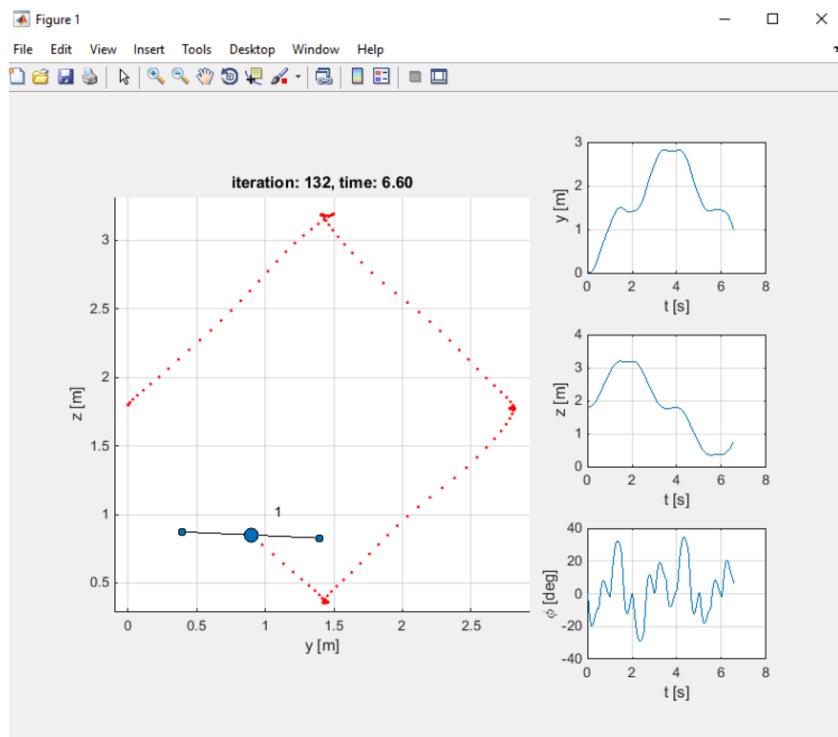


Рис. 14. Движение по ромбу

В созданной компьютерной модели ветер может быть задан, как произвольный сигнал, зависящий от времени [14]. В формулах для горизонтальной и вертикальной сил W_y и W_z скорость и направление ветра

задаются функционально: $\alpha(t), v(t)$, см. Приложение 1.2. Далее на Рис. 15 приведены графические данные силы набегающего потока воздуха при движении по прямой линии, $v(t) = 10\sin(t)$, $\alpha(t) = \pi\cos(t)$.

В зависимости от различных внешних условий (силы, направления ветра, изменяющихся во времени) проведены оценки затрачиваемой энергии при транспортировке груза вдоль 3^x описанных траекторий. Подтверждено, что батареи квадрокоптеров теряют заряд быстрее при больших скоростях ветра. При движении системы затрачиваемая энергия оценивалась следующим образом [16]:

$$E = \int_{t_0}^{t_1} N dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

где N – полная мощность моторов БПЛА, \vec{F} – суммарная сила тяги,

\vec{v} – скорость ц. м. системы.

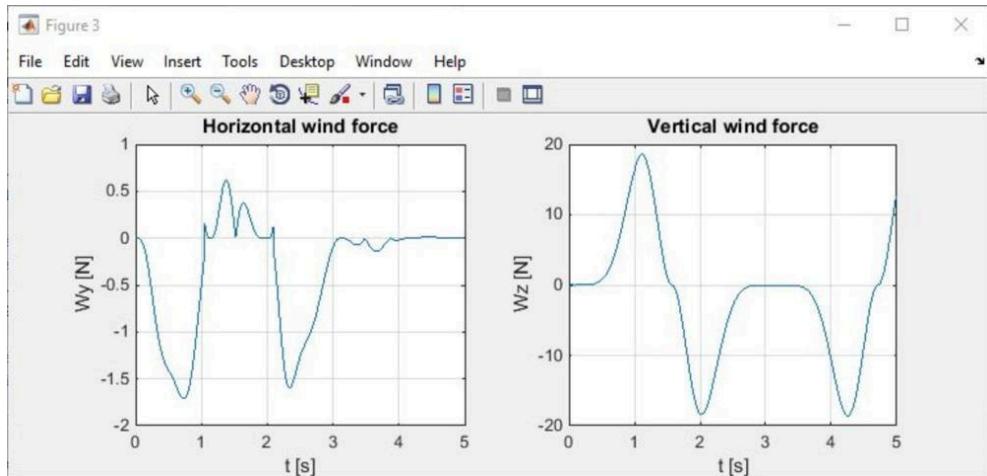


Рис. 15. Сила ветра

Показано, что существует возможность использовать хорошо изученную модель квадрокоптера для транспортировки грузов, не усложняя систему дополнительными подвесами и прочими механизмами крепления [17]. Важным преимуществом схемы крест является симметричное расположение летательных аппаратов. Симметрия позволила удовлетворить 2 ключевым

требованиям равномерного подъема и переноса груза. С помощью моделирования различных траекторий рассмотрено поведение системы с грузом при выполнении различных маневров. Для каждой из них соблюдены условия точности достижения конечной точки. Описанная и построенная модель позволяет оценивать максимальную переносимую массу и затрачиваемую энергию системой квадрокоптеров, предварительно задавая желаемые параметры [20]. Например, такие как грузоподъемность летательных аппаратов, силу и направление ветра, форму переносимого груза.

Приведем далее результаты моделирования для оценки грузоподъемности системы. В таблице приведена зависимость ошибки отклонения движения системы вдоль прямой линии, длиной 4 метра, строго против направления ветра. Максимальная грузоподъемность группы из 4^х БПЛА составляет 17.836 кг.

Масса груза, т [кг]	5	7	10	15
Отклонение от траектории, err [м]	0.612	0.622	0.636	0.770

Скорость ветра 7 м/с

Полученные данные в таблице свидетельствуют, что группа квадрокоптеров хорошо справляется с задачей переноса груза при небольшой лобовой скорости ветра. Далее усложним задачу и рассмотрим результаты эксперимента для скорости ветра в 15 м/с.

Масса груза, т [кг]	5	7	10	15
Отклонение от траектории, err [м]	0.757	0.726	0.707	2.203

Скорость ветра 15 м/с

Для грузов, массой больше 15 кг, система с задачей не справляется, траектория движения сильно отличается от прямой линии, см. Рис. 16.

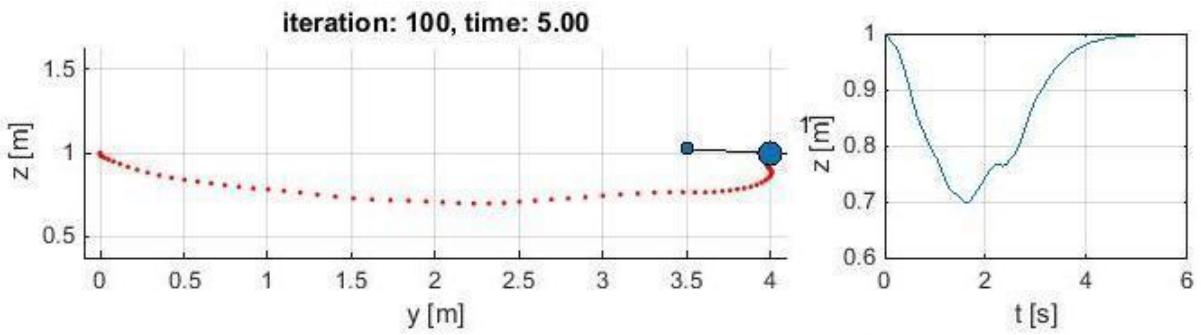


Рис. 16. Траектория системы, $m = 15$ кг, $v = 15$ м/с

3. Оценка маневренности квадрокоптера

В данной работе описана также компьютерная модель одного квадрокоптера. Основной задачей спроектированной модели является моделирование движения БПЛА вдоль различных траекторий с последующей оценкой ошибки отклонения. Эта величина является основной характеристикой для последующего сравнения траекторий и определения оптимальной. На основе сравнительного анализа возможных траекторий летательного аппарата, в данной работе предложен способ оценки маневренности БПЛА мультироторного типа, для получения результатов проведено моделирование. Представлены результаты облета вдоль заранее рассчитанных траекторий (прямой и спирали), а также вдоль гладких кривых, задаваемых сериями контрольных точек. Для каждого варианта облета траектории представлены графики зависимости координат и скоростей БПЛА от времени, демонстрирующие величину ошибки отклонения от желаемой траектории.

3.1. Управление движением БПЛА

В задаче следования БПЛА заданной траектории важно быстрое стремление к нулю ошибки отклонения по координате. Для этой цели необходимо потребовать, чтобы координаты БПЛА удовлетворяли уравнениям:

$$(\ddot{q}_{i,T} - \ddot{q}_{i,des}) + k_{d,i} (\dot{q}_{i,T} - \dot{q}_{i,des}) + k_{p,i} (r_{i,T} - r_i) = 0, i = \overline{1,3}$$

Последние равенства описывают работу ПД-регулятора. Решения каждого из трех уравнений экспоненциально стремятся к желаемым значениям $r_{i,des}$.

Управляющие движением квадрокоптера величины (силы тяги четырех моторов и создаваемые ими моменты) далее выражаются через переменные, определяющие положение (координаты x,y,z) и ориентацию (углы крена, тангла и рысканья) БПЛА в пространстве. Получаем полный набор соотношений для задачи следования траектории, см. Приложение 2.1:

$$\begin{aligned}
 F &= m \cdot (g - K_{d,z} \ddot{z} - K_{p,z} (z - z_{des})), \\
 \dot{x}_{des} &= \dot{x}_{des} + K_{p,x} (x_{des} - x) + K_{d,x} (\dot{x}_{des} - \dot{x}), \\
 \dot{y}_{des} &= \dot{y}_{des} + K_{p,y} (y_{des} - y) + K_{d,y} (\dot{y}_{des} - \dot{y}), \\
 \phi_{des} &= \frac{1}{g} (\dot{y}_{des} \cdot \sin(\psi_{des}) - \dot{x}_{des} \cdot \cos(\psi_{des})), \\
 \theta_{des} &= \frac{1}{g} (\dot{x}_{des} \cdot \cos(\psi_{des}) + \dot{y}_{des} \cdot \sin(\psi_{des})), \\
 p_{des} &= 0, q_{des} = 0, r_{des} = \psi_{des}, \\
 \dot{M} &= \begin{bmatrix} K_{p,\phi}(\phi_{des} - \phi) + K_{d,\phi}(p_{des} - p) \\ K_{p,\theta}(\theta_{des} - \theta) + K_{d,\theta}(q_{des} - q) \\ K_{p,\psi}(\psi_{des} - \psi) + K_{d,\psi}(r_{des} - r) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

С помощью данной системы уравнений реализована модель движения квадрокоптера по двум заданным траекториям: вдоль прямой линии и спирали, см. Рис. 17, Рис. 18.

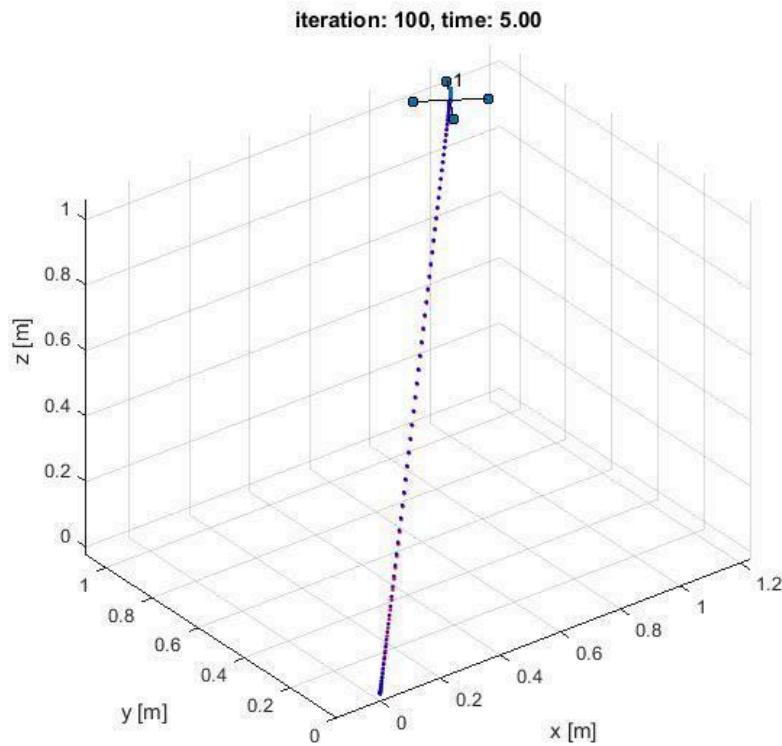


Рис. 17. Движение квадрокоптера вдоль прямой линии

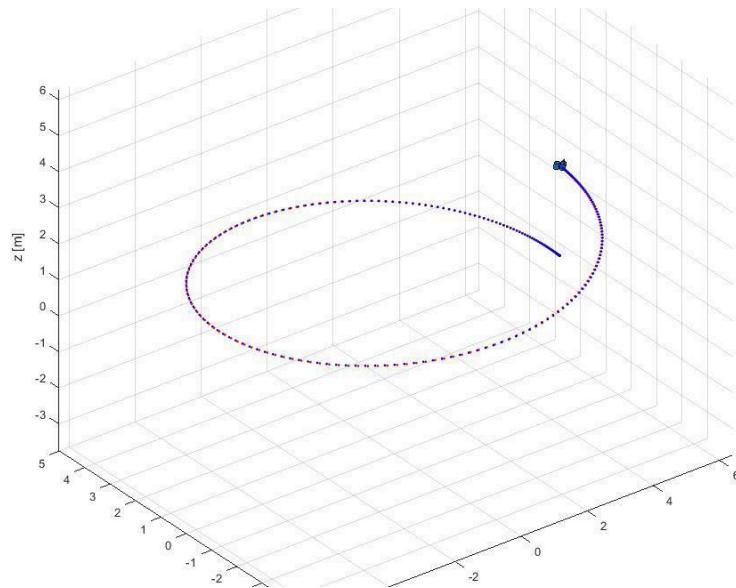


Рис. 18. Движение квадрокоптера вдоль спирали

На графиках красными точками отмечена траектория БПЛА, синими – желаемая траектория. Ошибки траекторий отслеживались с помощью графиков

зависимости координат и скоростей от времени, Рис. 19, Рис. 20, Рис. 21, Рис. 22. С их помощью производилась настройка ПД-регуляторов.

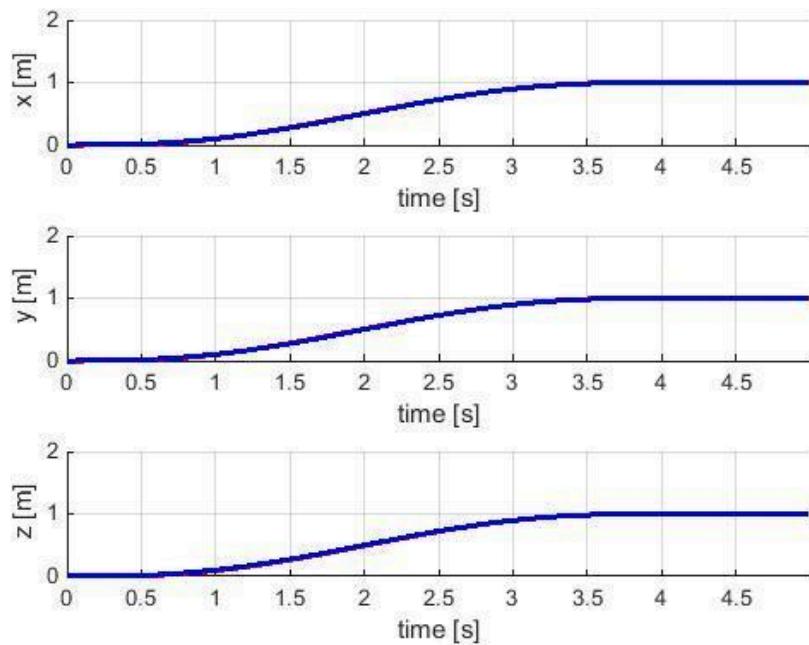


Рис. 19. Графики $\vec{r}(t)$ при движении вдоль прямой

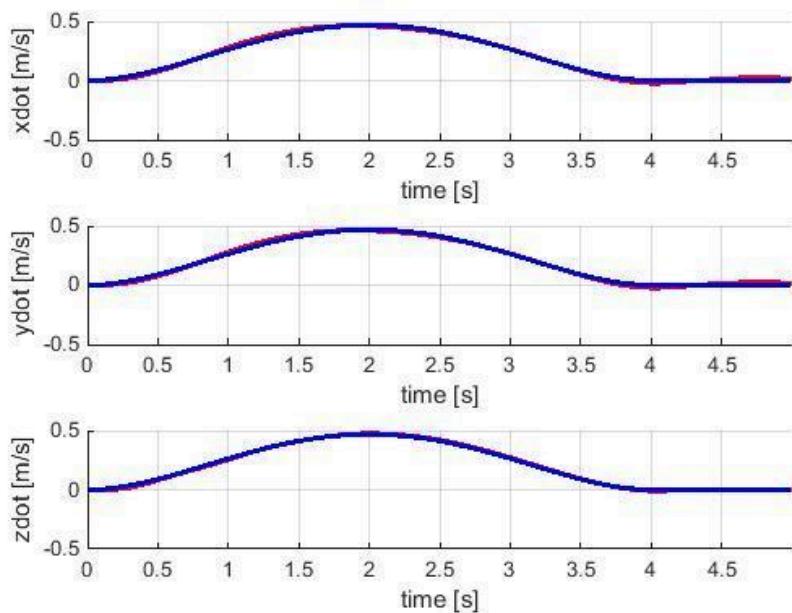


Рис. 20. Графики $\vec{v}(t)$ при движении вдоль прямой

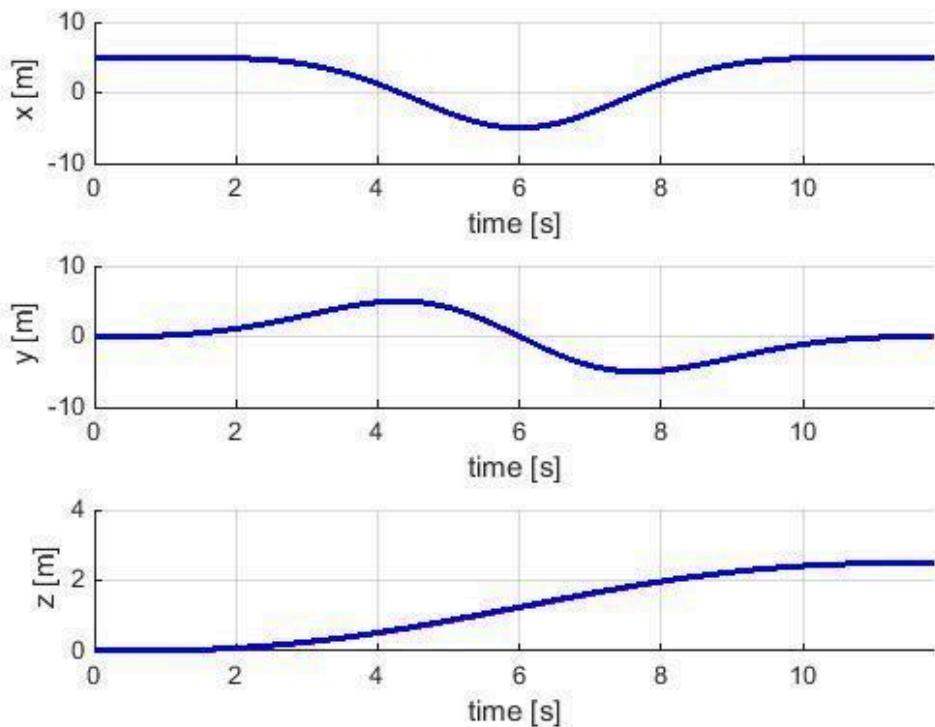


Рис. 21. Графики $\vec{r}(t)$ при движении вдоль спирали

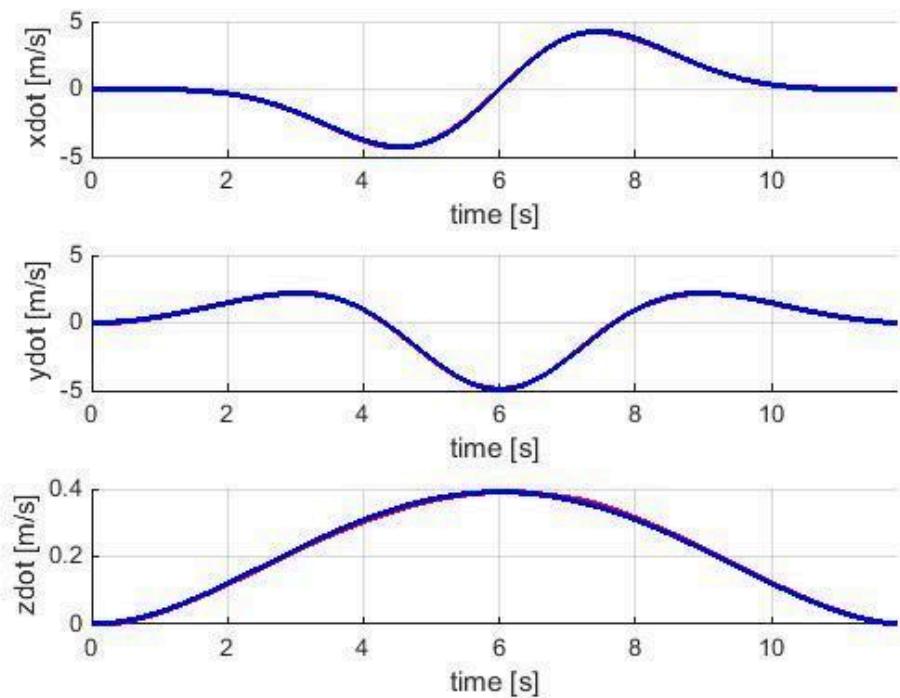


Рис. 22. Графики $\vec{v}(t)$ при движении вдоль спирали

3.2. Траектория, задаваемая контрольными точками

3.2.1. Траектория с наименьшей ошибкой отклонения

Более интересной и полезной с практической точки зрения выглядит задача проектирования движения БПЛА по траектории, задаваемой лишь контрольными точками. В реальности зачастую приходится иметь дело с препятствиями. Благодаря своей маневренности и способности зависать в воздухе, квадрокоптеры используются в городской плотно застроенной среде. Важным ограничением также является малое отклонение БПЛА от намеченной траектории. Из уравнений движения квадрокоптера можно получить, что управляющие сигналы (силы тяги и создаваемые моменты) зависят от $\dot{p}_{ttt}^{(4)}$.

Поэтому для построения гладких кривых, проходящих через заданный набор точек, используется вариационный метод минимизации четвертой производной по времени от координаты. Т.е. для нахождения кривой, соединяющей две соседние контрольные точки траектории, решается математическая задача:

$$p^*(t) = \arg \min_{p(t)} \int_0^T (p^{(4)})^2 dt$$

Здесь $p^*(t)$ – искомая траектория, T – время, затрачиваемое на ее прохождение до следующей контрольной точки. Решение подобной вариационной задачи эквивалентно решению дифференциального уравнения 8-ого порядка Эйлера-Лагранжа. Поэтому искомую траекторию нужно задать как полином 7-ой степени времени, например:

$$p_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \frac{t - S_{i-1}}{T_i} + \dots + \alpha_{i7} \left(\frac{t - S_{i-1}}{T_i} \right)^7$$

Здесь введены обозначения: $S_0 = 0, S_i = \sum_{k=1}^i T_k$ – время достижения i -ой контрольной точки при движении из начальной. Все описанные таким образом

полиномы p_i , $i=1..n$, должны удовлетворять $8n$ условиям для нахождения всех констант a_{ij} , $i=1..n, j=0..7$, а именно:

$$\begin{aligned} p_i(S_{i-1}) &= w_{i-1}, p_i(S_i) = w_i, i = \overline{1, n} \\ p_1^{(k)}(S_0) &= p_n^{(k)}(S_n) = 0, k = \overline{1, 3} \\ p_i^{(k)}(S_i) &= p_{i+1}^{(k)}(S_i), k = \overline{1, 6} \end{aligned}$$

Такая система уравнений относительно неизвестных a_{ij} далее записывается в матричном виде:

$$A\alpha = b .$$

Здесь A – матрица, размером $8n*8n$, α – столбец искомых коэффициентов, b – матрица $8n*3$. Решая систему уравнений отдельно для каждого из столбцов матрицы b , получаем коэффициенты, задающие траектории $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ соответственно. С подробностями реализации можно ознакомиться в Приложении 2.2. Результаты моделирования движения через 6 контрольных точек приведены на Рис. 23.

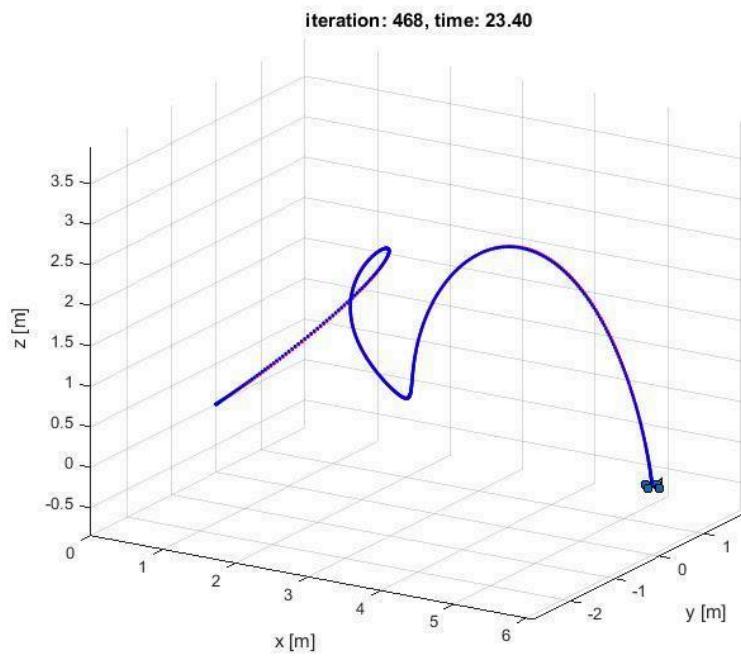


Рис. 23. Движение вдоль гладкой кривой, заданной контрольными точками:

$$(0 \ 0 \ 0) \rightarrow (1 \ 1 \ 1) \rightarrow (2 \ 0 \ 2) \rightarrow (3 \ -1 \ 1) \rightarrow (4 \ -2 \ 2) \rightarrow (5 \ -1 \ 3) \rightarrow (6 \ 0 \ 0)$$

На Рис. 24 далее приведены графики полиномов, полученных в результате решения вариационной задачи.

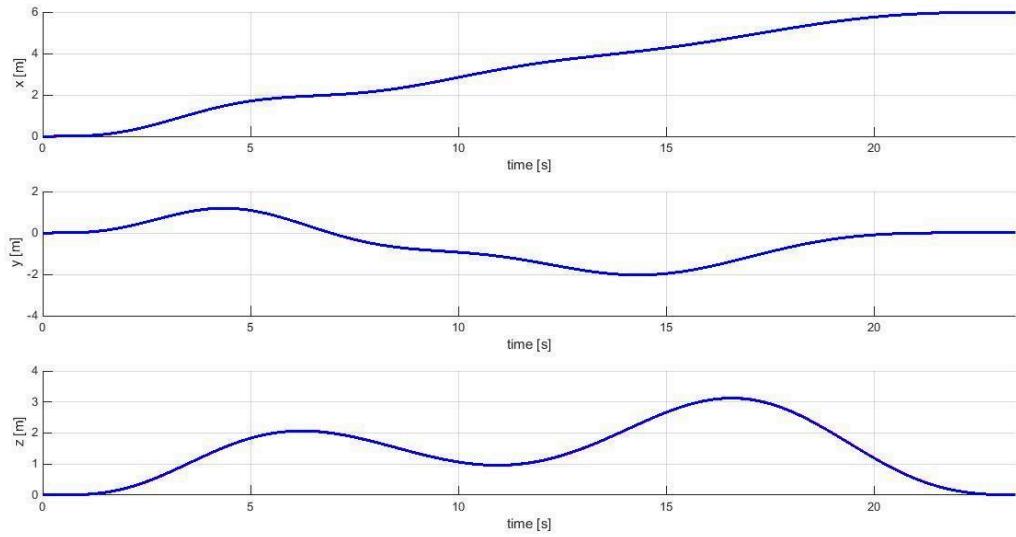


Рис. 24. Зависимость координат от времени при движении через 6 контрольных точек

3.2.2. Траектории, задаваемые полиномами более низких степеней

Проведем далее сравнительный анализ траектории с наименьшей ошибкой отклонения с рядом других пространственных кривых, описывающих движение квадрокоптера. В ходе данной работы произведено также моделирование движения БПЛА через серию контрольных точек, соединенных полиномами 3^{ей} и 5^{ой} степеней. Аналогично пункту 3.2.1, такие траектории задаются путем решения вариационных задач соответственно:

$$p^*(t) = \arg \min_{p(t)} \int_0^T (p^{(k)})^2 dt, k = \overline{2,3}.$$

В результате получаем:

$$p_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \frac{t - S_{i-1}}{T_i} + \alpha_{i2} \left(\frac{t - S_{i-1}}{T_i} \right)^2 + \alpha_{i3} \left(\frac{t - S_{i-1}}{T_i} \right)^3$$

$$p_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \frac{t - S_{i-1}}{T_i} + \dots + \alpha_{i5} \left(\frac{t - S_{i-1}}{T_i} \right)^5$$

с соответствующими условиями для

нахождения неизвестных констант α_{ij} , аналогичными описанным в пункте 3.2.1.

3.3. Сравнение траекторий движения

3.3.1. Траектории, задаваемые контрольными точками

Сравнительный анализ данных траекторий начнем с рассмотрения такого параметра, как величина ошибки отклонения квадрокоптера от желаемой кривой при движении с постоянной скоростью ($\langle v \rangle = 1\text{м/с}$). Введем в рассмотрение также траекторию, задаваемую ломаной линией line, см. Рис. 25. В табл. 1 введены обозначения: min snap – траектория с минимальной ошибкой отклонения, рассмотренная в пункте 3.2.2, min jerk и min acc задаются полиномами 5^ой и 3^ей степени соответственно. Измерение ошибки произведено путем вычисления L₂-нормы отклонения:

$$err = \|\vec{r}_{des} - \vec{r}\|_2 = \sqrt{\sum_i (x_{des,i} - x_i)^2} + \sqrt{\sum_i (y_{des,i} - y_i)^2} + \sqrt{\sum_i (z_{des,i} - z_i)^2}$$

Траект.\ N	4	5	6	7
Min snap	1.7566 м	2.0817 м	2.0525 м	2.1402 м
Min jerk	1.3839 м	1.7039 м	1.7255 м	1.8308 м
Min acc	1.2596 м	1.5160 м	1.5821 м	1.7317 м
Line	7.4793 м	8.9647 м	9.9736 м	10.5891 м

Таблица 1 Ошибки отклонения для 4 видов траекторий, проходящих через N контрольных точек.

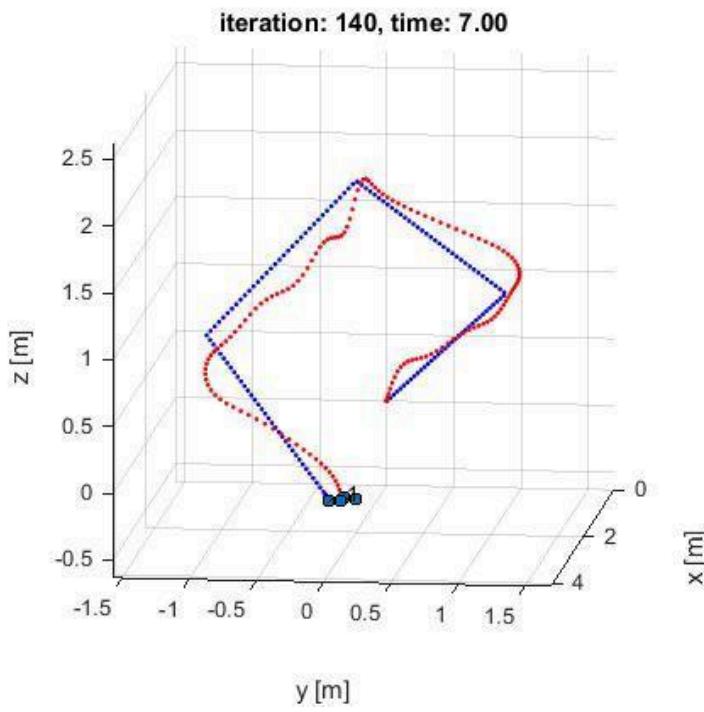


Рис. 25. Ломаная траектория, 4 контрольные точки. Синим цветом обозначена желаемая кривая, красным – реальная.

Исходя из данных, представленных в табл. 1, очевидно, что гладкие траектории намного более предпочтительны, нежели ломаная, для задачи следования траектории, задаваемой контрольными точками. Данные в ячейках, выделенные жирным, соответствуют случаю, когда не все контрольные точки были пройдены корректно (число успешно пройденных точек $< N$). Корректность прохождения точек в данной модели определялась 2 условиями:

- координатной точностью (центра масс БПЛА во время пролета по траектории проходит сферическую окрестность контрольной точки радиуса $r = 10$ см);
- сохранением скорости движения (во время прохождения сферической окрестности контрольной точки квадрокоптер не теряет в скорости более чем в 2 раза).

При следовании вдоль пространственных кривых, задаваемых полиномами, степени ниже 7^ой (min jerk и min acc), ошибки отклонения оказываются ниже, чем для траектории min snap. Однако, траектория, задаваемая полиномом 7^ой

степени, является более надежной, то есть гарантирует прохождение всех контрольных точек и при более жестких требованиях корректности их прохождения, чем указанные выше.

Тем не менее, нередко квадрокоптерам приходится выполнять маневры, плохо описываемые гладкими полиномами. Рассмотрим простой пример: пролет вдоль прямой линии и возвращение в исходную точку. В таком случае ожидается, что БПЛА поменяет направление своего движения на 180 градусов. Однако так происходит не для всех видов траекторий. Определим описанный маневр 4^мя контрольными точками и проведем моделирование. Для такого простой случая получаем очень длинную гладкую траекторию, описанную полиномами 7^ой степени, Рис. 26. Соответственно возрастает и нежелательное потребление энергии.

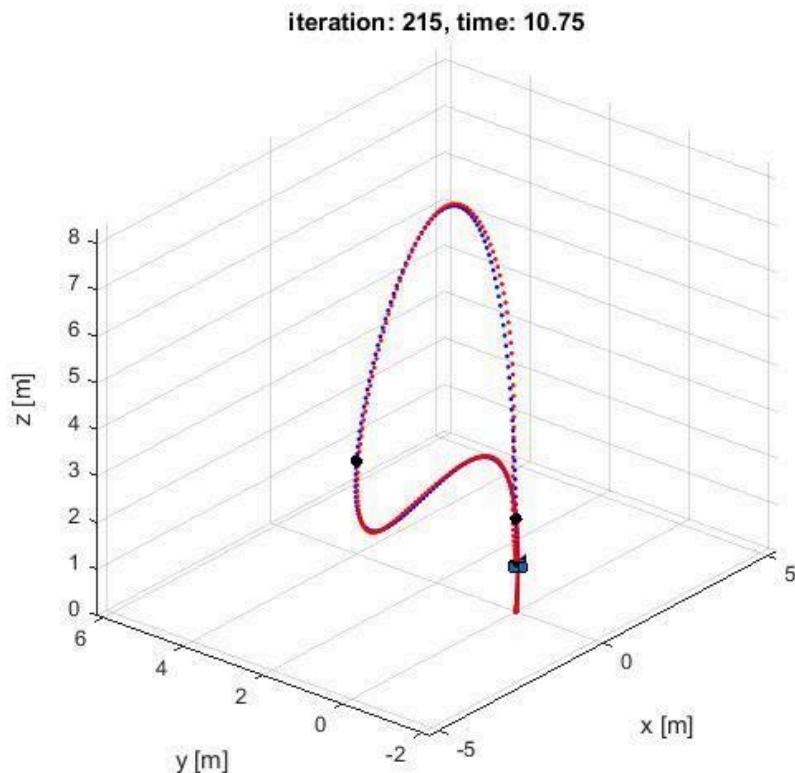


Рис. 26. Траектория min snap. Выполнения маневра «угол», заданного контрольными точками: (0,0,2); (0,4,2); (0,0,2); (0,0,1).

Траектория min jerk имеет аналогичные недостатки при выполнении подобных маневров, где требуется резкое изменение направления движения. Обратим далее внимание на кривые меньшего порядка гладкости, min acc и line.

Тип траектории	Контрольные точки	Ошибка отклонения	Длина траектории	Средняя скорость	Потребление энергии
Min snap	3/4	3.892 м	23.908 м	2.224 м/с	48.165 Дж
Min jerk	4/4	1.601 м	14.528 м	1.333 м/с	22.391 Дж
Min acc	¾	1.086 м	11.841 м	1.072 м/с	12.499 Дж
Line	2/4	12.648 м	11.336 м	1.031 м/с	9.677 Дж

Таблица 2 Выполнение маневра «угол» вдоль различных траекторий

Согласно данным табл. 2, для выполнения резких маневров лучше подходит аппроксимации траектории полиномами низких порядков. Снижается длина траектории и энергетические затраты. Иллюстрации далее более приближены к желаемому результату, чем, например, Рис. 26.

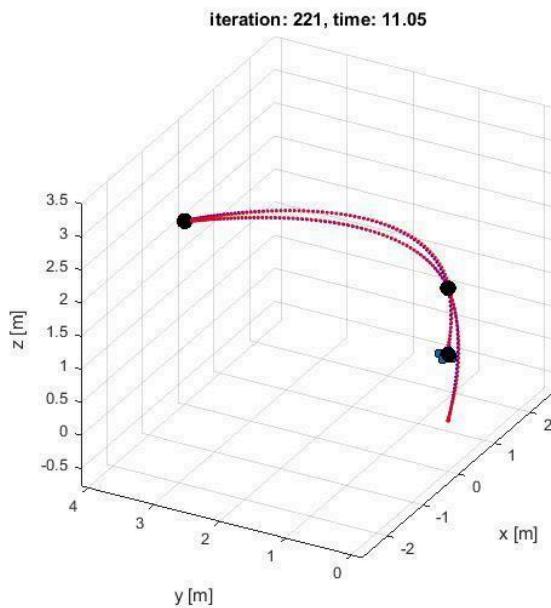


Рис. 27. Траектория min acc. Выполнения маневра «угол»

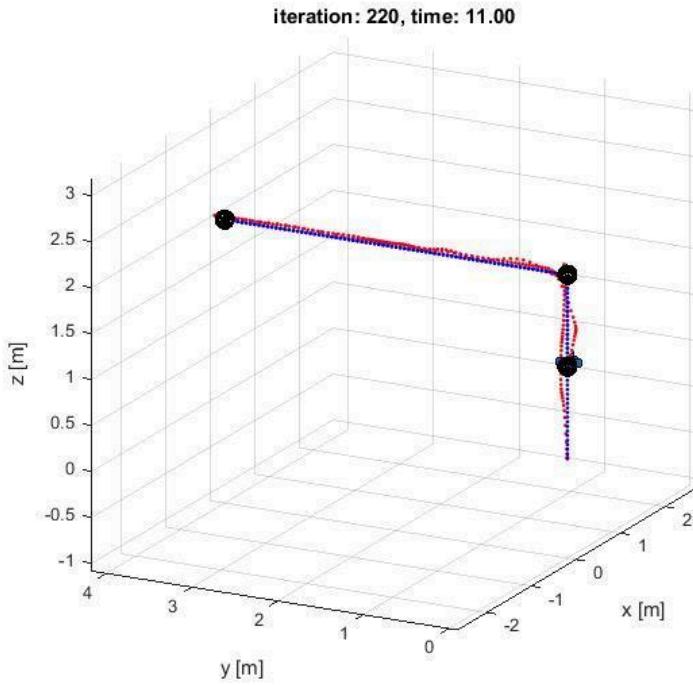


Рис. 28. Траектория line. Выполнения маневра «угол»

Стоит, однако, отметить, что добавление лишь одной промежуточной контрольной точки $(0,2,2)$ снижает потребление энергии для траектории min snap практически в 2 раза. Достоинством же траекторий, определяемых полиномами низких порядков, является их простота. Такие кривые могут быть заданы меньшим количеством контрольных точек.

Итак, в общем случае предпочтительными для задачи аппроксимации траектории полёта выглядят кривые высокой степени гладкости (min snap или min jerk). Исключительным случаем является наличие резкой смены направления движения БПЛА (на 180°). Тогда разумно использовать полиномы низких степеней (min acc).

Приведенные рассуждения имеют качественный характер. Проведем далее моделирование движения БПЛА для более точной оценки угловых диапазонов использования траекторий различной степени гладкости. Исследуем, на сколько острыми должны быть углы, определяемые соседними контрольными точками, чтобы аппроксимировать траекторию полиномами низкой степени t. Решение

поставленной проблемы позволит определить маневренность квадрокоптера – важную ЛТХ БПЛА для задач мониторинга и построения карт местности.

Маневренность летательного аппарата характеризуется минимальным временем, необходимым для изменения направления движения и положения в пространстве [23]. В качестве маневра будем рассматривать траекторию-поворот, задаваемую тремя контрольными точками. Летательный аппарат начинает движение из точки с координатами $(0,0,z)$. Будем рассчитывать минимальное время, необходимое для успешного прохождения контрольной точки $(0,a,z)$ и последующей остановки в пункте с координатами $(a \cdot \sin \phi, a \cdot (1 - \cos \phi), z)$, см. Рис. 29. Зафиксируем расстояние между контрольными точками, $a = 4 \text{ м}$. Таким образом, маневр будет задаваться только углом ϕ . Далее будем аппроксимировать траекторию БПЛА полиномами 3^{ей} или 7^{ой} степени.

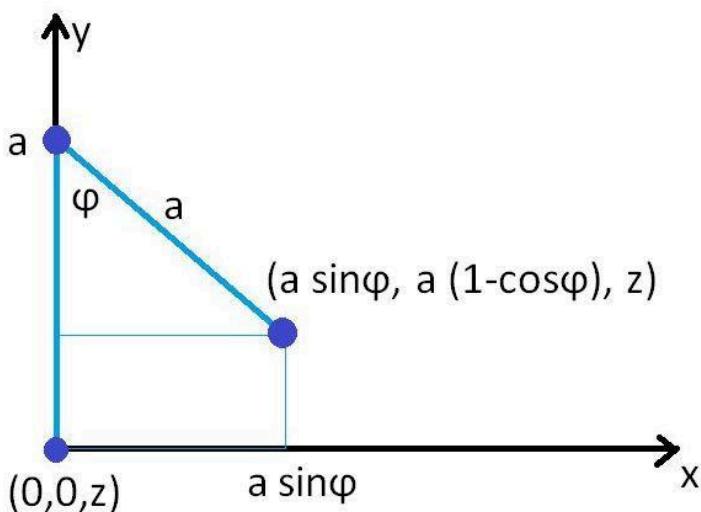


Рис. 29. Расположение контрольных точек

Успешность прохождения пунктов траектории, как и ранее, определяется двумя условиями. Введение условия сохранения скорости в окрестности контрольной точки обусловлено тем, что рассматриваемый маневр состоит из

минимального количества контрольных точек. В действительности же пространственные кривые строятся из гораздо большего числа промежуточных пунктов. Из энергетических соображений понятно, что скорость летательного аппарата не должна изменяться скачкообразно на протяжении всего полета.

Приведем далее наиболее важные результаты эксперимента. Данные в таблице, отмеченные зеленым, соответствуют удачным полетам, т.е. случаям успешного прохождения $n=2$ контрольных точек. Для малых углов, $\phi \leq \pi/14 \approx 13^\circ$, квадрокоптер сбрасывает скорость в точке разворота более чем в 2 раза. Этим случаям соответствуют данные в правой половине таблицы. Тогда целесообразно аппроксимировать траекторию полиномами 3^{ей} степени гладкости: несмотря на неизбежное резкое изменение скорости в точке разворота, летательный аппарат справляется с маневром на 0,15 с быстрее.

φ , рад	$\pi/9$	$\pi/10$	$\pi/12$	$\pi/13$	$\pi/14$	$\pi/16$	$\pi/24$	$\pi/36$
$\langle v \rangle$, м/с	1,96	1,96	1,95	1,95	2,01	2,01	2,00	2,00
$\deg P(t)$	7	7	7	7	3	3	3	3
T_{\min} , с	4,15	4,15	4,15	4,15	4,00	4,00	4,00	4,00
$v/2$, м/с	0,9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0
n	2	2	2	2	1	1	1	1

Исходя из полученных результатов, опишем метод автоматического выбора степени гладкости траектории на основе последовательности контрольных точек. Задача заключается в поиске среди последовательности контрольных точек серии пунктов траектории, описывающих разворот летательного аппарата. Каждая контрольная точка задается тремя координатами и номером:

$w_k = (x_k, y_k, z_k)$. Тогда, например, последовательность номеров:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow k \rightarrow k+1 \rightarrow k \rightarrow \dots$ будет соответствовать смене направления движения на противоположное. В более общем случае разворот можно детектировать в последовательности контрольных точек, вычисляя угол между двумя соседними векторами, задаваемыми тремя соседними точками. В случае резкой смены направления его косинус должен быть близок к -1:

$$\frac{(\Delta \vec{w}_{k+2}, \Delta \vec{w}_{k+1})}{\Delta w_{k+2} \cdot \Delta w_{k+1}} \sim (-1).$$

Здесь введено обозначение $\Delta \vec{w}_{k+1} \equiv \vec{w}_{k+1} - \vec{w}_k$.

Или $\cos \phi \sim 1$, см. Рис. 30. В случае выполнения указанного условия, для каких либо трех соседних контрольных точек, используем для аппроксимации траекторию 3^{ей} степени гладкости (min acc), иначе выбираем кривую 7^{ой} степени (min snap), как наиболее предпочтительную в общем случае [22].

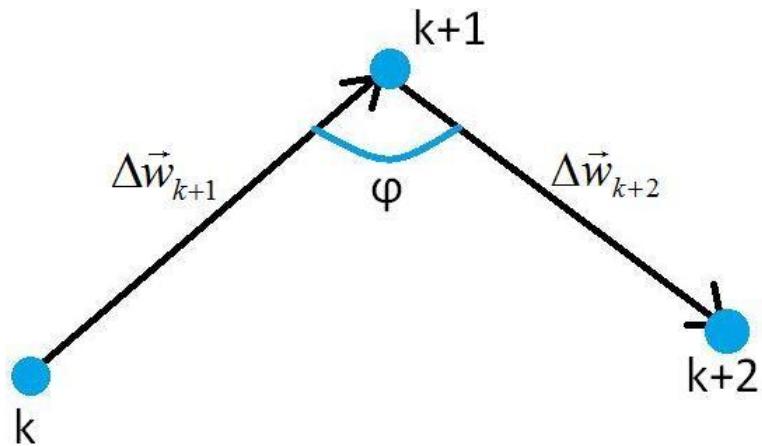


Рис. 30. Три соседние контрольные точки

Основываясь на данные моделирования, резкими можно считать маневры, если среди контрольных точек кривой есть такие 3 соседние, что угол $\phi \leq 13^{\circ}$. В этом случае аппроксимируем траекторию полиномами 3^{ей} степени гладкости (min acc), иначе выбираем min snap, $\deg P(t) = 7$. Программная реализация описанного алгоритма представлена в Приложении 2.3. Следующие два примера, Рис. 31, Рис. 32, иллюстрируют различие траекторий min acc и min snap для случая $\phi_{\min} = 12^{\circ}$. Моделирование производилось для одинаково расположенных контрольных точек.

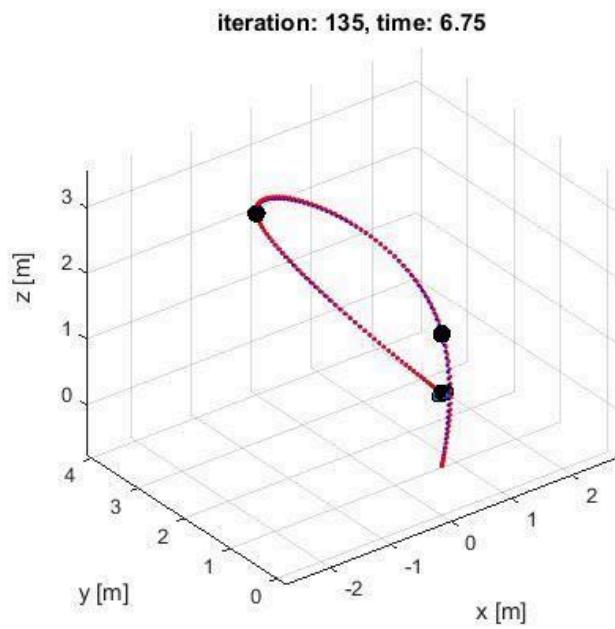


Рис. 31. Траектория min acc

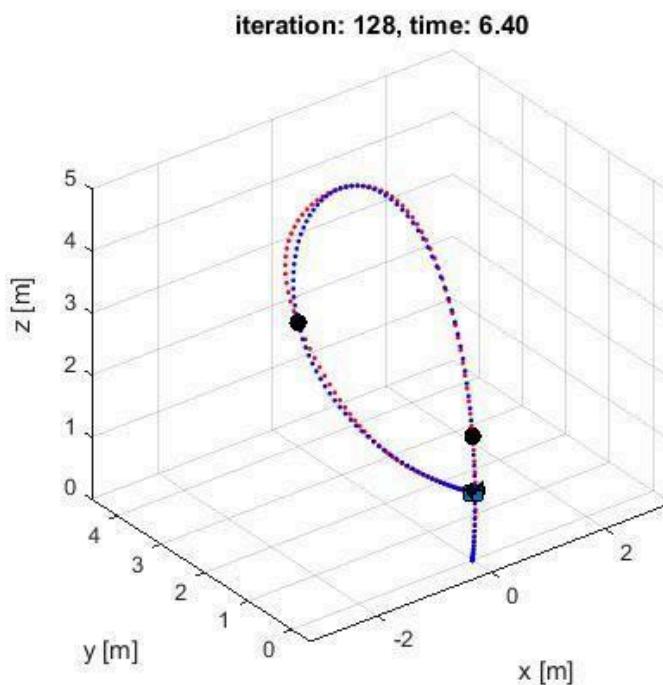


Рис. 32. Траектория min snap

В первом случае длина траектории составила $L = 10,8\text{ м}$, при использовании же полиномов 7^ой степени получаем $L = 14,7\text{ м}$. Время прохождения траекторий в обоих случаях почти одинаково, $T = 6,4$ и $6,8\text{ с}$ соответственно. Соответственно средняя скорость во втором случае почти в 1,5 раза больше, а

значит, растут затраты энергии. Приведем полученные результаты далее в таблице, рассмотрим также траекторию, задаваемую полиномами 5^{ой} степени.

траектория	ϕ min, град	L, м	T, с	$\langle v \rangle$, м/с	E, Дж
deg = 7	12	14,7	6,4	2,3	16,6
deg = 5	12	12,2	6,5	1,9	11,1
deg = 3	12	10,8	6,8	1,6	7,4

3.3.2. Сравнение рассчитанной траектории с кривой, определенной контрольными точками

В данном пункте, как пример, сопоставим две спиральные траектории. Первая из них рассчитана заранее, а другую зададим, как серию из 25 контрольных точек, соединенных полиномами 7^{ой} степени:

```
t = pi*(0:0.1:2.5);
x = 5*cos(t);
y = 5*sin(t);
z = t/pi;
w = [x; y; z];
```

Во втором случае квадрокоптер не справляется с поставленной задачей для скоростей, больших 2 м/с. Далее приведены результаты следования траектории min snap со средней скоростью $\langle v \rangle = 1.5$ м/с.

Тип траектории	Контрольные точки	Средняя скор.	Ошибка отклонения	Время полета
Min snap	20/25	1.5 м/с	6.9485 м	26 с

Таблица 3 Данные облета спирали, заданной контрольными точками

Почти все контрольные точки пройдены корректно (20 из 25), что иллюстрировано на Рис. 33.

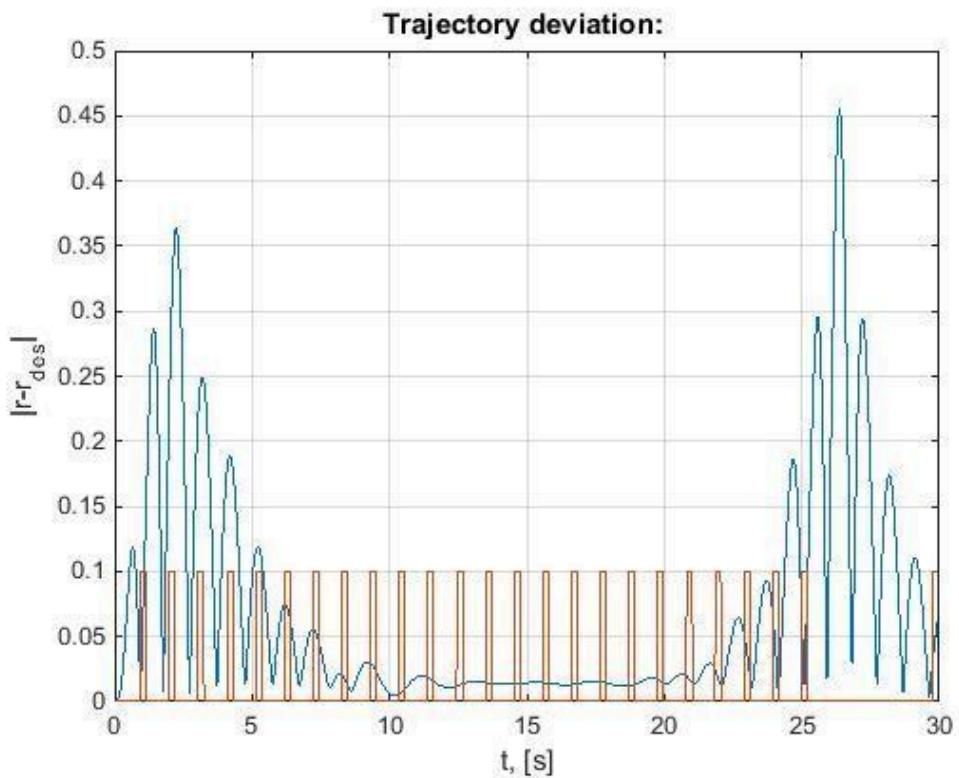


Рис. 33. Корректность прохождения контрольных точек

Синий график показывает ошибку отклонения от желаемой траектории. 25 красных столбиков отмечены в моменты времени прохождения контрольных точек. Уровень их высоты равен $r = 10$ см, т.е. максимально допустимой неточности по координате.

Для спиральной траектории, рассчитанной заранее, имеем данные табл. 4.

Тип траектории	Средняя скорость	Ошибка отклонения	Время полета
Helix	2.71 м/с	1.5406 м	11.6 с

Таблица 4

Как и стояло ожидать, движение вдоль заранее рассчитанной траектории осуществимо для больших скоростей с небольшой ошибкой отклонения. Однако, такие траектории не находят большого практического применения.

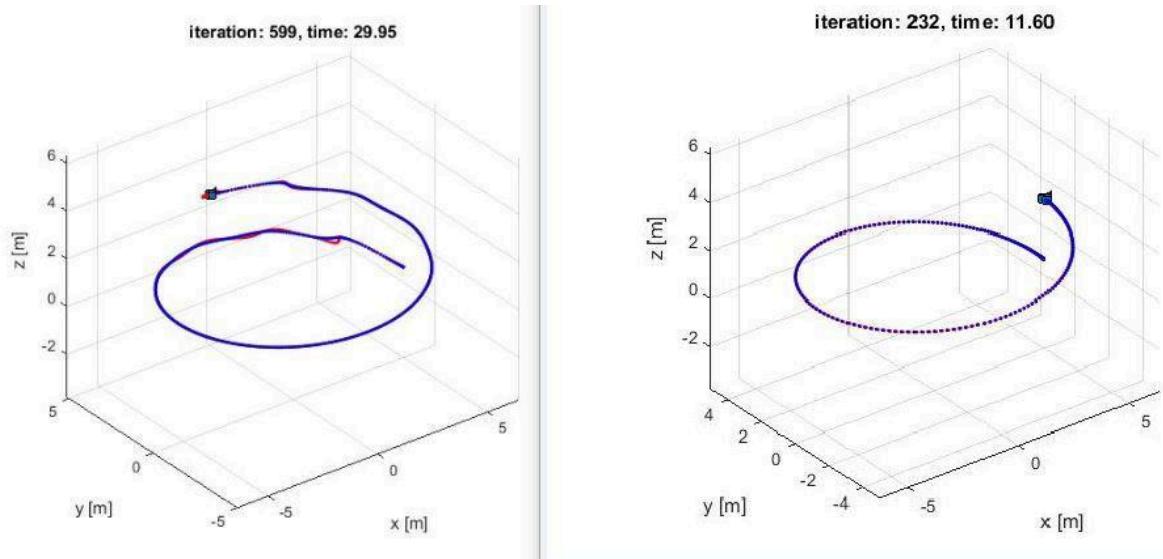


Рис. 34.

Сравнение двух спиральных траекторий

4. Апробация работы

Гранты

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00342, грант № 16-29-04268) и гранта Президента РФ (НШ-6831.2016.8).

Конференции и научно-практические семинары

Результаты работы были представлены на конференциях и научно-практических семинарах в рамках следующих докладов:

1. Кочкаров А.А., Агишев Р.Т. «Согласованное взаимодействие групп малых многороторных БПЛА для транспортировки грузов». Доклад на 59-ой научной конференции МФТИ, 21-26 ноября 2016, г. Долгопрудный.

2. Кочкаров А.А., Агишев Р.Т. «Согласованное взаимодействие групп малых многороторных БПЛА для транспортировки грузов». Доклад на 4-ой Всероссийской научно-технической конференции "Минцевские чтения", 24 ноября 2016, г. Москва

3. Кочкаров А.А., Агишев Р.Т., «Сравнительный анализ полетов квадрокоптера вдоль траекторий различной степени гладкости». Доклад на V Всероссийской научно-технической конференции «РТИ системы ВКО-2017», г. Москва.

Публикации

1. А.А. Кочкаров, Р.Т. Агишев «Согласованное взаимодействие групп малых многороторных БПЛА для транспортировки грузов». Известия ЮФУ. Технические науки.

2. Кочкаров А.А., Агишев Р.Т. «Моделирование движения квадрокоптера по траектории с минимальной ошибкой отклонения». Журнал «Новые информационные технологии в автоматизированных системах». Издательство: Московский институт электроники НИУ ВШЭ (Москва).

3. Кочкаров А.А., Агишев Р.Т., «Сравнительный анализ полетов квадрокоптера вдоль траекторий различной степени гладкости». Журнал «Современная наука».

5. Результаты и выводы

Основными результатами проведенной дипломной работы являются создание двумерной модели системы БПЛА мультироторного типа и трехмерной модели одного летательного аппарата.

2D-модель системы четырех квадрокоптеров, жестко сцепленных с грузом, позволяет оценивать грузоподъемность летательных аппаратов в условиях меняющейся среды.

С помощью 3D-модели проведены оценки маневренности квадрокоптера, были выявлены основные преимущества и недостатки траекторий БПЛА различной степени гладкости. Полученные результаты сравнительного анализа пространственных кривых позволили описать и реализовать метод автоматического метода выбора траектории подходящей степени гладкости, исходя из взаимного расположения контрольных точек.

6. Список литературы

1. Малинецкий Г.Г., Кочкаров А.А. Будущее российского оружия и междисциплинарные подходы // Интеллект и технологии. – 2014. – № 1(7). – С. 48-51.
2. Кочкаров А.А., Яцкин Д.В., Рахманов О.А. Особенности решения задачи геометрического мониторинга // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2016. – № 2(175). – С. 158–168.
3. Кочкаров А.А., Калинов И.А. Создание программно-аппаратного комплекса пространственной навигации и мониторинга мультироторного БПЛА на основе модифицированного алгоритма визуальной одометрии // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон.журн. – 2016. – № 09. – С. 74–91.

4. *Кочкаров А.А., Яцкин Д.В., Калинов И.А.* Новый подход в применении малых БПЛА для мониторинга сложных пространств // Интеллект и технологии. – 2016. – № 2(14). – С. 68-71.
5. *Кочкаров А.А.* Некоторые особенности применения малых и сверхмалых беспилотных летательных аппаратов // Труды Второй Всероссийской научно-технической конференции молодых конструкторов и инженеров «Минцевские чтения», посвященной 120-летию со дня рождения академика А.Л. Минца и 60-летию аспирантуры Радиотехнического института. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. – С. 301-304.
6. Clarity from above PwC global report on the commercial applications of drone technology, May 2016.
7. *Гурьянов А.Е.* Моделирование управления квадрокоптером, август 2014, МГТУ им. Баумана.
8. *Steven M. LaValle* Planning algorithms, University of Illinois, 2006.
9. *Mellinger D., Michael N., and Kumar V.* Trajectory Generation and Control for Precise Aggressive Maneuvers with Quadrotors // Int. Symposium on Experimental Robotics, December 2010.
10. *Вадутов О.С.* Настройка типовых регуляторов по методу Циглера-Никольса // Издательство Томского политехнического университета, 2014.
11. *Гэн К., Чулин Н.А.* Алгоритмы стабилизации для автоматического управления траекторным движением квадрокоптера, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2015.
12. *Sreenath K., Michael N., and Kumar V.* Trajectory generation and control of a quadrotor with a cable suspended load – a differentially-flat hybrid system // in ICRA, Karlsruhe, Germany, May 2013.
13. *J. Escareño-S. Salazar-H. Romero-R. Lozano* Trajectory Control of a Quadrotor Subject to 2D Wind Disturbances.
14. *Еремин В. Ю., Ивченко Б. А., Чижсов В. М.* Моделирование порывов ветра, действующих на привязной аэростат, 2003.

15. Julian Cayero , Josep Cugueró and Bernardo Morcego Impedance control of a planar quadrotor with an extended Kalman filter external forces estimator.
16. Иванов Е.М. О работе в потенциальных полях // Фундаментальные исследования. – 2005. – № 2. – С. 65-66.
17. Fink J., Michael N., Kim S., and Kumar V. Planning and control for cooperative manipulation and transportation with aerial robots // Int. J. Robot. Res.
18. Ситников Д. В., Бурьян Ю. А., Русских Г. С. Система управления движением мультикоптера Омский государственный технический университет, 2012.
19. Control of Quadrotors for Robust Perching and Landing Daniel Mellinger, Michael Shomin, and Vijay Kumar GRASP Lab, University of Pennsylvania.
20. C. Trouwborst Control of Quadcopters for Collaborative Interaction, // BSc Report, Juli 2014.
21. Барбасов В.К., Гречищев А.В., Орлов П.Ю., Руднев П.Р.,
Левин Е.Л., «Мульти rotorный БПЛА как средство получения
геоинформационного контента в чрезвычайных ситуациях»,
Московский Государственный Университет Геодезии и Картографии.
(МИИГАИК), г. Москва
22. N. Michael, D. Mellinger, Q. Lindsey, and V. Kumar, “The GRASP Multiple Micro-UAV Testbed” // IEEE Robotics and Automation Magazine, 2010.
23. Г.П. Свищев Авиация: Энциклопедия. — М.: Большая Российская Энциклопедия, 1994.

7. Приложения

В данном разделе приведен Matlab-код основных функций и алгоритмов, описанных в данной работе.

Приложение 1.1. Параметры системы для транспортировки грузов

```
function [ params ] = sys_params()
% sys_params System parameters

% parameters of a single quadrotor DJI F450 + E600
params.quad.mass      = 1.691; % 0.970 + 0.721 [kg] =
(frame+pixhawk+propulsion)+batery
```

```

params.quad.thrustmax = 6.400; % 4*1.600 [kg]
params.quad.k = params.quad.thrustmax/params.quad.mass; % thrust/weigth
coefficient u1 = k*mg
% E600 bateriy
params.quad.charge = 4500; % [mA*h]
params.quad.voltage = 22.2; % [V]
params.quad.energy = 1/2 * params.quad.charge * params.quad.voltage * 3.6; %
[J]

% parameters of a ball-payload
params.payload.mass = 8; % [kg]
params.payload.radius = 0.1; % [m]
params.payload.Ixx = 2/5*params.payload.mass*params.payload.radius^2;
params.payload.square = pi*params.payload.radius^2; % [m^2] - square of
ball-section (Sy = Sz = pi*R^2)

% parameters of a cube-payload
% params.payload.mass = 5; % [kg]
% params.payload.side = 0.2; % [m]
% params.payload.Ixx = 1/6*params.payload.mass*params.payload.side^2;

% parameters of a system "cross + payload + 4*quads"
params.cross.length = 0.5; % distance [m] between middle of the cross and
quadrotor
params.cross.width = 0.1; % width [m] of plank, cross is two planks
params.cross.mass = 2*0.5; % mass [kg] of a cross
params.cross.square = 2*2*params.cross.length*params.cross.width; % square [m^2]
of a cross
params.mass = params.cross.mass + 4*params.quad.mass +
params.payload.mass;
params.Ixx = 2*params.quad.mass*params.cross.length^2 + ...
2*1/12*(params.cross.mass/2)*(2*params.cross.length)^2 + ...
params.payload.Ixx;

% environmental properties
params.cd = 1.95;
params.wind.vel = 7.2; % [m/s]
params.wind.ang = pi; % [rad]
params.air_dens = 1.225; % [kg/m^3]
% params.air_dens = 0; % switch off the wind and air resistance
params.gravity = 9.81;

% accuracy at the destination point
params.postol = 0.01;
params.veltol = 0.05;
params.angtol = 0.03;

params.timelim = 5; % boundary on the time of motion along the trajectory

% saturation of a thrust force of a system
params.minF = 0;
params.maxF = 4*params.quad.thrustmax * params.gravity;

% maximum weight of PAYload [kg] quadrotors can carry
params.weightmax = 4*params.quad.thrustmax - 4*params.quad.mass -
params.cross.mass;

% total mass of the system [kg]
params.mass = params.cross.mass + 4*params.quad.mass + params.payload.mass;

end

```

Приложение 1.2. Управление системой в 2D

```
function [ u1, u2 ] = controller(t, state, des_state, params)
%CONTROLLER Controller for the planar quadrotor
%
% state: The current state of the robot with the following fields:
% state.pos = [y; z], state.vel = [y_dot; z_dot], state.rot = [phi],
% state.omega = [phi_dot]
%
% des_state: The desired states are:
% des_state.pos = [y; z], des_state.vel = [y_dot; z_dot], des_state.acc =
% [y_ddot; z_ddot]
%
% params: system parameters

Kpz      = 20;      Kvz      = 12;
Kpy      = 15;      Kvy      = 10;
Kpphi   = 900;     Kvphi   = 100;

% wind resistance
W = wind(t, state);
Wy = W(1);
Wz = W(2);
% control equations
u1 = params.mass*(-Wz/params.mass + params.gravity +
des_state.acc(2)+Kvz*(des_state.vel(2)-state.vel(2))...
+ Kpz*(des_state.pos(2)-state.pos(2)));

phi_c = (-1/params.gravity)*(-Wy/params.mass +
des_state.acc(1)+Kvy*(des_state.vel(1)-state.vel(1))...
+ Kpy*(des_state.pos(1)-state.pos(1)));
phi_c_dot = 0;

u2 = params.Ixx*(Kvphi*(phi_c_dot-state.omega(1))+Kpphi*(phi_c-state.rot(1)));

end

function [W,vel,ang] = wind(t, state)
% WIND returns the 2D-force of wind W acting on the surface of the
% quadrotor. I.e. W(1) = Wy is caused by the existance of the Sz projection
% of the surface of the system S on Oz-axis.

params = sys_params;
vel = params.wind.vel + 2*sin(10*t);
ang = params.wind.ang * ((t<=1) + ((1<t)&&(t<=2))*11/5 +...
((2<t)&&(t<=3))*12/8 + ((3<t)&&(t<=4))*3/12);
W = zeros(1,2);
W(1) =
sign(cos(ang))*params.cd*params.air_dens*(state.vel(1)-vel*cos(ang))^2*...
(abs(params.cross.square * sin(state.rot(1))) + params.payload.square)/2;

W(2) =
sign(sin(ang))*params.cd*params.air_dens*(state.vel(2)-vel*sin(ang))^2*...
(abs(params.cross.square * cos(state.rot(1))) + params.payload.square)/2;

end
```

Приложение 2.1. Управление квадрокоптером в 3D

```
function [F, M] = controller(t, state, des_state, params)
```

```

%CONTROLLER Controller for the quadrotor
%
% state: The current state of the robot with the following fields:
% state.pos = [x; y; z], state.vel = [x_dot; y_dot; z_dot],
% state.rot = [phi; theta; psi], state.omega = [p; q; r]
%
% des_state: The desired states are:
% des_state.pos = [x; y; z], des_state.vel = [x_dot; y_dot; z_dot],
% des_state.acc = [x_ddot; y_ddot; z_ddot], des_state.yaw,
% des_state.yawdot
%
% params: robot parameters

% Coefficients for regulator
PD = true;
if PD
    % Proportional + Derivative controller
    Kpx    = 10;    Kdx    = 2;
    Kpy    = 10;    Kdy    = 2;
    Kpz    = 100;   Kdz    = 2;      % Force u1
    Kpphi  = 10;   Kdphi  = 1;      % Moment u2(1)
    Kpth   = 10;   Kdth   = 1;      % Moment u2(2)
    Kppsi  = 10;   Kdpsi  = 1;      % Moment u2(3)

else
    % Proportional controller, fast visualisation
    Kpx    = 10;    Kdx    = 0;
    Kpy    = 10;    Kdy    = 0;
    Kpz    = 100;   Kdz    = 0;
    Kpphi  = 10;   Kdphi  = 0;
    Kpth   = 10;   Kdth   = 0;
    Kppsi  = 10;   Kdpsi  = 0;

end

% Thrust u1 = F
F = params.mass*(params.gravity - Kdz*state.vel(3) - ...
    Kpz*(state.pos(3)-des_state.pos(3)));

acc_c(1) = des_state.acc(1) + Kpx*(des_state.pos(1) - state.pos(1)) + ...
    Kdx*(des_state.vel(1) - state.vel(1));
acc_c(2) = des_state.acc(2) + Kpy*(des_state.pos(2) - state.pos(2)) + ...
    Kdy*(des_state.vel(2) - state.vel(2));

phi_c = (1/params.gravity)*(acc_c(1)*sin(des_state.yaw) - ...
    acc_c(2)*cos(des_state.yaw));
th_c = (1/params.gravity)*(acc_c(1)*cos(des_state.yaw) + ...
    acc_c(2)*sin(des_state.yaw));

p_des = 0; q_des = 0; r_des = des_state.yawdot;

% Moment u2 = M
M = zeros(3,1);
M(1) = Kpphi*(phi_c-state.rot(1)) + Kdphi*(p_des-state.omega(1));
M(2) = Kpth*(th_c-state.rot(2)) + Kdth*(q_des-state.omega(2));
M(3) = Kppsi*(des_state.yaw-state.rot(3)) + Kdpsi*(r_des-state.omega(3));

end

```

Приложение 2.2. Моделирование траектории 7-ой степени гладкости

```
function [ desired_state ] = traj_generator(t, state, mode, vel, waypoints)
```

```

% TRAJ_GENERATOR: Generate the trajectory passing through all
% positions listed in the waypoints list
%
% t,state: time and current state (same variable as "state" in controller)
% waypoints: The 3xP matrix listing all the points in order
% along the generated trajectory
%
% desired_state: Contains all the information that is passed to the
% controller for generating inputs for the quadrotor

persistent w0 S d0 m
if nargin > 2
    d = waypoints(:,2:end) - waypoints(:,1:end-1);
    d0 = 1/vel * sqrt(d(1,:).^2 + d(2,:).^2 + d(3,:).^2);
    S = [0, cumsum(d0)];
    w0 = waypoints;
    m = mode;
else
    %% Minimum snap trajectory
    if strcmp(m, 'snap')
        % creating matrices A and b in Aa=b
        n = size(w0,2)-1;
        A = zeros(8*n,8*n);
        b = zeros(8*n,3);

        for i=1:n
            % pi(S(i-1)) = w(i-1)
            A(i,(1+8*(i-1)): (8*i)) = give_matrix(S(i),S(i),d0(i), 1, m);
            b(i,:) = w0(:,i)';
            % pi(S(i)) = w(i)
            A(i+n,(1+8*(i-1)): (8*i)) = give_matrix(S(i+1),S(i),d0(i), 1, m);
            b(i+n,:) = w0(:,i+1)';
        end
        % p1(k) (S0) = 0
        A(1+2*n,1:8) = give_matrix(0,0,d0(1), 2, m); % k=1
        A(2+2*n,1:8) = give_matrix(0,0,d0(1), 3, m); % k=2
        A(3+2*n,1:8) = give_matrix(0,0,d0(1), 4, m); % k=3

        % pn(k) (Sn) = 0
        A(4+2*n,(8*n-7):(8*n)) = give_matrix(S(n+1),S(n),d0(n), 2, m); % k=1
        A(5+2*n,(8*n-7):(8*n)) = give_matrix(S(n+1),S(n),d0(n), 3, m); % k=2
        A(6+2*n,(8*n-7):(8*n)) = give_matrix(S(n+1),S(n),d0(n), 4, m); % k=3

        % pi(k) (Si)-p(i+1)(k) (Si) = 0
        for k=1:6
            for i=1:(n-1)
                A(i+(k+1)*n+6 - (k-1),(1+8*(i-1)): (16+8*(i-1))) = ...
                    [give_matrix(S(i+1),S(i),d0(i), k+1,
m), -give_matrix(S(i+1),S(i+1),d0(i+1), k+1, m)]; % k=1:6
            end
        end

        % a = [x(t), y(t), z(t)]
        a = A\b;
    if(t > S(end))
        t = S(end);
    end
    t_index = find(S >= t,1);

    if(t_index > 1)
        t = t - S(t_index-1);
    end
end

```

```

        if(t_index == 1)
            desired_state.pos = w0(:,1);
            desired_state.vel = zeros(3,1);
            desired_state.acc = zeros(3,1);
            desired_state.yaw = 0;
            desired_state.yawdot = 0;
        else
            desired_state.pos = (give_matrix(t+S(t_index-1), S(t_index-1),
d0(t_index-1), 1, m)...
                *a((1+8*(t_index-2)):(8*(t_index-1)),:))';
            desired_state.vel = (give_matrix(t+S(t_index-1), S(t_index-1),
d0(t_index-1), 2, m)...
                *a((1+8*(t_index-2)):(8*(t_index-1)),:))';
            desired_state.acc = (give_matrix(t+S(t_index-1), S(t_index-1),
d0(t_index-1), 3, m)...
                *a((1+8*(t_index-2)):(8*(t_index-1)),:))';
            if numel(state)~=0
                desired_state.yaw = state.rot(3);
                desired_state.yawdot = state.omega(3);
            else
                desired_state.yaw = 0;
                desired_state.yawdot = 0;
            end
        end
    end
end

function [r, A] = give_matrix(t,S,T, k, mode)
a = (t-S)/T;
if strcmp(mode, 'snap')
    A = [1 a a^2 a^3 a^4 a^5 a^6 a^7;
        0 1/T 2*a/T 3*a^2/T 4*a^3/T 5*a^4/T 6*a^5/T 7*a^6/T;
        0 0 2/T^2 3*2*a/T^2 4*3*a^2/T^2 5*4*a^3/T^2 6*5*a^4/T^2 7*6*a^5/T^2;
        0 0 0 6/T^3 4*3*2*a/T^3 5*4*3*a^2/T^3 6*5*4*a^3/T^3 7*6*5*a^4/T^3;
        0 0 0 0 24/T^4 5*4*3*2*a/T^4 6*5*4*3*a^2/T^4 7*6*5*4*a^3/T^4;
        0 0 0 0 0 120/T^5 6*5*4*3*2*a/T^5 7*6*5*4*3*a^2/T^5;
        0 0 0 0 0 0 720/T^6 7*6*5*4*3*2*a/T^6];
end
end

```

Приложение 2.3. Реализация алгоритма автоматического выбора оптимальной траектории

```

function [mode, minangle, counter] = traj_type(waypoints)
W = waypoints';
N = size(W,1)-1;
dW = nan(N, 3);
cosin = nan(N-1, 1);
counter = 0;
d = -0.97;

for i=1:N
    dW(i,:) = W(i+1,:)-W(i,:);
end
for i=1:(N-1)
    cosin(i) = dW(i+1,:)*(dW(i,:))'/(norm(dW(i+1,:))*norm(dW(i,:)));
    counter = counter + (cosin(i)<=d);
end

```

```
if counter == 0
    mode = 'snap';
else
    mode = 'acc';
end

minangle = 180 - ceil(acos(min(cosin))*180/pi);

end
```