1. Что такое единичный симплекс Δ^n в $\mathbb{R}^n$?

(a) $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

(b) $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \ x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n\}$.

(c) $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n\}$.

(d) $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, \ x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n\}$.

Ответ: b

2. Даны норма $\|\cdot\|$, выпуклое множество $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ и прокс-функция $d(x) : Q \to \mathbb{R}$, которая является непрерывно дифференцируемой и 1-сильно выпуклой относительно нормы $\|\cdot\|$. Как выглядит итерация зеркального спуска для функции f?

(a) $x_{k+1} = \arg\min_{x \in Q} \left[\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\gamma}\|x - x_k\|^2\right]$

(b) $x_{k+1} = \arg\min_{x \in Q} \left[\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{\gamma}(d(x) - d(x_k))\right]$

(c) $x_{k+1} = \arg\min_{x \in Q} \left[\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{\gamma}(d(x) - d(x_k) - \langle \nabla d(x_k), x - x_k \rangle)\right]$

Ответ: c

3. Пусть $d(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - прокс функция, $V(x, y)$ - соотвествующая ей дивергенция Брегмана. Выберите неверное утверждение.

(a) $d(x) = -\log x, \ V(x, y) = \log \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 1$

(b) $d(x) = \frac{1}{x^2}, \ V(x, y) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{y^2} + \frac{2x}{y^3}$

(c) $d(x) = x \log x - x, \ V(x, y) = x \log \frac{x}{y}$

(d) $d(x) = \frac{x^2}{2}, \ V(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2$

(a) Из таблицы дивергенций с лекции $V(x, y) = \frac{x}{y} - \log \frac{x}{y} - 1 = \log \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 1$. Утверждение верно

(b) $V(x, y) = d(x) - d(y) - \langle \nabla d(y), x - y \rangle = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3}(x - y) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{y^2} + \frac{2x}{y^3}$. Утверждение верно

(c) Из таблицы $V(x, y) = x \log \frac{x}{y} - x + y$. Утверждение неверно

(d) Из таблицы $V(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2$. Утверждение верно

Ответ: c

4. Пусть $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}^3$ и $S = (s_1 \ s_2 \ s_3)$. В каком случае векторы s_1, s_2, s_3 являются сопряженными относительно некоторой симметричной положительно определенной матрицы A?

(a) $S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $S = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Если векторы сопряженные относительно $A \in \mathbb{S}^n_{++}$, то они линейно независимы, то есть $\det(S) \neq 0$. Этому условию соответсвует только матрица под вариантом b.
Ответ: b

5. Дана функция $R(x) : Q \to \mathbb{R}$. Какой вид имеет проксимальный оператор для R? Выберите неправильное утверждение.
(a) $Q = \mathbb{R},\ R(x) = \lambda|x|(\lambda > 0):\ \text{prox}_R(x) = \max(|x| - \lambda, 0) \cdot \text{sign}(x)$
(b) $Q = \mathbb{R},\ R(x) = \lambda x^2(\lambda > 0):\ \text{prox}_R(x) = \frac{x}{2\lambda+1}$
(c) $Q = [2\lambda, +\infty),\ R(x) = \lambda \log x(\lambda > 0):\ \text{prox}_R(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-4\lambda}}{2}$
(d) $Q = [0, +\infty),\ R(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 1] \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}:\ \text{prox}_R(x) = \min(x, 1)$

(a) Верно, обсуждалось на лекции
(b) $u = \arg\min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda x^2 + \frac{1}{2}(y - x)^2 \right\},\ x - u = 2\lambda u,\ u = \frac{x}{2\lambda+1}$. Утверждение верно
(c) $u = \arg\min_{y \in [2\lambda, +\infty)} \left\{ \lambda \log x + \frac{1}{2}(y - x)^2 \right\},\ x - u = \frac{\lambda}{u},\ u^2 - xu + \lambda = 0,\ u = \frac{x+\sqrt{x^2-4\lambda}}{2}$. Утверждение верно
(d) $\text{prox}_R(x) = \arg\min_{y \in [-1,1]} \left\{ \frac{1}{2}(y - x)^2 \right\} = \pi_{[-1,1]}(x) = \text{sign}(x) \min(|x|, 1)$. Утверждение неверно
Ответ: d

Ответы:
1. b
2. c
3. c
4. b
5. d