1. Какое из указанных ниже множеств является невыпуклым?

(a) $Q = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ и $x_i \geq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n\}$

(b) $Q = \mathbb{R}^n$

(c) $Q = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i < 0$ для всех $i = 1, \ldots, n\}$

(d) $Q = \{0\}$ (множество, содержащее одну точку - 0)

Вариант a эквивалентен $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2^2 = 1$ и $x_i \geq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n\}$. Если $n = 1$, то это случай, когда $Q = \{1\}$, а множество из одного элемента по соглашению считается выпуклым. Если $n \neq 1$, то пусть $x = \frac{1}{\sqrt{n-1}}(0; 1; 1; \ldots; 1)^\top$ и $y = \frac{1}{\sqrt{n-1}}(1; 0; 1; \ldots; 1)^\top$. Тогда $z = \alpha x + (1-\alpha)y = \frac{1}{\sqrt{n-1}}(1-\alpha; \alpha; \alpha + 1 - \alpha; \ldots; \alpha + 1 - \alpha)^\top = \frac{1}{\sqrt{n-1}}(1-\alpha; \alpha; 1; \ldots; 1)^\top$. $\|z\|_2^2 = \frac{(1-\alpha)^2 + \alpha^2 + (n-2)}{n-1}$ - при фиксированном n не для любого $\alpha \in [0; 1]$ будет выполнено $\|z\|_2^2 = 1$. Значит, множество невыпукло. Геометрически это можно интерпретировать так: множество Q - это часть сферы (не шара), если провести отрезок, соединяющий точки на этой части сферы, то не обязательно весь отрезок лежит на сфере.

Вариант b очевидно выпуклое множество

Вариант c: $x, y \in Q,\ z = \alpha x + (1-\alpha)y,\ \sum_{i=1}^n z_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i + (1-\alpha)\sum_{i=1}^n y_i$
$\alpha \in [0; 1] \Rightarrow \alpha > 0,\ 1 - \alpha > 0$, а значит $\sum_{i=1}^n x_i < 0 \bigwedge \sum_{i=1}^n y_i < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i < 0$
Множество выпуклое

Вариант d: по соглашению пустое множество и множество из одного элемента считаются выпуклыми

Ответ: a

2. Выберите правильное утверждение:

(a) Если функция $f_1(x)$ - выпуклая, а $f_2(x)$ - невыпуклая, то $f_1(x)+f_2(x)$ - невыпуклая

(b) Если функция $f_1(x)$ - выпуклая, а $f_2(x)$ - невыпуклая, то $f_1(x) + f_2(x)$ - выпуклая

(c) Если функция $f_1(x)$ - невыпуклая, а $f_2(x)$ - выпуклая, то $f_1(x) - f_2(x)$ может быть как выпуклой, так и невыпуклой

(d) Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - выпуклые, то $f_1(x) - f_2(x)$ может быть как выпуклой, так и невыпуклой

Вариант a: неверно, контрпример $f_1(x) = 2x^2,\ f_2(x) = -x^2,\ f_1(x) + f_2(x) = x^2$

Вариант b: неверно, контрпример $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = -2x^2,\ f_1(x) + f_2(x) = -x^2$

Вариант c: неверно. $-f_2(x)$ - невыпуклая функция, $f_1(x) + (-f_2(x))$ - невыпуклая функция (т.к. сумма невыпуклых функции)

Вариант d: верно, примеры

$f_1(x) = 2x^2,\ f_2(x) = x^2,\ f_1(x) - f_2(x) = x^2$

$f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = 2x^2,\ f_1(x) - f_2(x) = -x^2$

Ответ: d

3. Пусть функция $f(x)$ является L-гладкой и μ-сильно выпуклой. Выберите правильное утверждение.

(a) Если функция $f(x)$ - дважды непрерывно-дифференцируема, то $\lambda_{min}(\nabla^2 f(x)) \geq \mu$ и $\lambda_{max}(\nabla^2 f(x)) \leq L$

(b) Возможна ситуация, что $L = \frac{\mu}{2}$

(c) Для всех x, y выполнены неравенства: $f(y) \leq f(x) - \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{L}{2}\|y - x\|_2^2$ и $f(y) \geq f(x) - \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$

(d) Для всех x, y выполнены неравенства: $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq \frac{1}{\mu}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2$ и $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq L\|x - y\|_2^2$

Вариант a: $\nabla^2 f(x) \succeq \mu I \Rightarrow \lambda_{min}(\nabla^2 f(x)) \geq \mu, \nabla^2 f(x) \preceq LI \Rightarrow \lambda_{max}(\nabla^2 f(x)) \leq L$

Вариант b не подходит, т.к. должно быть $L \geq \mu$

Вариант c не подходит, т.к. на самом деле в неравенствах перед скалярными произведениями должен стоять плюс

Вариант d не подходит, т.к. на самом деле в первом неравенстве вместо μ должно быть L, а второе неравенство должно иметь вид $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \leq L\|x - y\|_2^2$

Ответ: a

4. Выберите неправильное утверждение:

(a) Матрица Якоби для градиента $\nabla f(x)$ функции f равняется матрице Гессе $\nabla^2 f(x)$ функции f

(b) Матрица Якоби сложной функции $f(g(h(x)))$, где $f \in \mathbb{R}^n, g \in \mathbb{R}^m, h \in \mathbb{R}^p$ и $x \in \mathbb{R}^q$ имеет размерность $n \times q$

(c) Матрица Якоби функции $f(x)$, где $f \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$, равняется $(\nabla f(x))^\top$

(d) Матрица Якоби сложной функции $f(g(h(x)))$, где $f \in \mathbb{R}^m, g \in \mathbb{R}^p, h \in \mathbb{R}^q$ и $x \in \mathbb{R}^n$, равна $\frac{df^\top(g(h(x)))}{dx} = \frac{dh^\top}{dx} \cdot \frac{dg^\top}{dh} \cdot \frac{df^\top}{dg}$

Вариант a верен, обсуждалось на лекции

Вариант b верен. По сути, сложную функцию можно представить как обычную $f(g(h(x))) = \varphi(x)$. Тогда по определению матрицы Якоби, ее размерность будет равна $n \times q$

Вариант c верен. Размерность матрицы Якоби в данном случае будет $1 \times n$, что совпадает с размерностью $\nabla f^\top(x)$ (ну и по смыслу вектора совпадают)

Вариант d неверен, т.к. в данном случае это транспонированная матрица Якоби, а сама матрица Якоби равна $\frac{df(g(h(x)))}{dx^\top} = \frac{df}{dg^\top} \cdot \frac{dg}{dh^\top} \cdot \frac{dh}{dx^\top}$

Ответ: d

5. Пусть $f(x) = x^\top Ax + \|x\|_2^2$, где $x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда

(a) $\nabla f(x) = 2Ax + 2x, \nabla^2 f(x) = 2A + 2I$

(b) $\nabla f(x) = (A^\top + A)x + \frac{x}{\|x\|_2}, \nabla^2 f(x) = A^\top + A + \frac{1}{\|x\|_2}I - \frac{xx^\top}{\|x\|_2^3}$

(c) $\nabla f(x) = (A^\top + A)x + 2x, \nabla^2 f(x) = A^\top + A + 2I$

(d) $\nabla f(x) = (A^\top + A)x + 2x, \nabla^2 f(x) = A^\top + A + 2$

Вариант a был бы верным, если бы матрица A была симметричной $(A = A^\top)$

Вариант b был бы верным, если бы второе слагаемое в $f(x)$ имело вид $\|x\|_2$

Вариант c верный

$\nabla f(x) = (A + A^\top)x + 2x = (A + A^\top + 2I)x, \quad \nabla^2 f(x) = A + A^\top + 2I$

В варианте d нарушена размерность в матрице Гессе - нельзя прибавить к матрице скаляр

Ответ: c

Ответы:

1. a
2. d
3. a
4. d
5. c