Хадиев Р.Р.

Домашняя работа №2 (base) (ML)

1) Задание 1 (0.5 балла)

Найдите экстремумы следующих функций (вручную, где возможно) и укажите их тип (максимум, минимум).

а) $f(x) = x^2 - 30x + 1$

б) $g(x) = -x^3 + 5x - 7x^2 + 17$

c) $h(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

d) $j(x) = \frac{1}{x^5} + x^{17} + 8$

а) $f(x) = x^2 - 30x + 1$ квадратичная функция. график парабола.

Найдем производную

$f'(x) = 2x - 30$

$2x - 30 = 0$

$x = 30$

$x = 15$

$f(15) = 15^2 - 30 \cdot 15 + 1$

$225 - 450 + 1 = -224$

Найдем производную второго порядка

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow (15; -224)$ минимум

Экстремум: минимум в точке $x = 15$ $f(15) = -224$

б) $g(x) = -x^3 + 5x - 7x^2 + 17$

Найдем производную

$g'(x) = -3x^2 + 5 - 14x$

$-3x^2 - 14x + 5 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 256$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; $x_1 = \frac{14 - \sqrt{256}}{2 \cdot (-3)} = \frac{14-16}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{14 + \sqrt{256}}{2 \cdot (-3)} = \frac{30}{-6} = -5$

$g\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} + 5\frac{1}{3} - 7 \cdot \frac{1}{9} + 17 = \frac{-1 + 45 - 21}{27} + 17 = 17\frac{23}{27}$

$g(-5) = 125 + 25 - 7 \cdot 25 + 17 = -58$

$\left(\frac{1}{3}; 17\frac{23}{27}\right)$ $(-5; -58)$

Найдем производную второго порядка

$g''(x) = -6x - 14$

$g''\left(\frac{1}{3}\right) = -6\frac{1}{3} - 14 = -2 - 14 = -16 < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}; 17\frac{23}{27}\right)$ - максимум

$g''(-5) = -6\cdot(-5) - 14 = 30 - 14 = 16 > 0 \Rightarrow (-5; -58)$ - минимум

Экстремумы: $\left(\frac{1}{3}; 17\frac{23}{27}\right)$ - максимум

$(-5; -58)$ - минимум

c) $h(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

Найдем производную

$h'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

$2x + \frac{1}{x^2} = 0$

$\frac{1}{x^2} = -2x$

$x^3 = -\frac{1}{2}$

$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$h\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \frac{1 + \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$

$h''(x) = 2 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = 6 > 0$

Экстремум: минимум в точке $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$

d) $j(x) = \frac{1}{x^5} + x^{17} + 8$

Найдем производную

$j'(x) = -\frac{5}{x^6} + 17x^{16}$

$-\frac{5}{x^6} + 17x^{16} = 0$

$-\frac{5}{x^6} = -17x^{16}$

$x^{22} = \frac{5}{17}$ $\quad x = \pm\left(\frac{5}{17}\right)^{\frac{1}{22}}$

$j\left(\frac{5}{17}^{\frac{1}{22}}\right) = \frac{1}{\left(\frac{5}{17}\right)^{\frac{5}{22}}} + \frac{5}{17}^{\frac{17}{22}} + 8$

$\left(\sqrt[22]{\frac{5}{17}};\ \sqrt[17]{\frac{17}{5}} + \sqrt[5]{\frac{5}{17}} + 8\right)$

$j''(x) = \frac{30}{x^7} + 272x^{15}$

$j''\left(\sqrt[22]{\frac{5}{17}}\right) > 0 \Rightarrow$ - минимум

$j''\left(-\sqrt[22]{\frac{5}{17}}\right) = 162{,}4 < 0 \Rightarrow$ максимум

Задание 3 (1 балл) Точки перегиба

а) $f(x) = x^2 - 30x + 1$

$f''(x) = 2$ постоянна не меняет знак $\Rightarrow$ точек перегиба нет

б) $g(x) = -x^3 + 5x - 7x^2 + 17$

$g''(x) = -6x - 14$ $\qquad g'''(x) = -6 \neq 0 \Rightarrow$

$-6x - 14 = 0$

$x = -\frac{14}{6} = -\frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 3} = -\frac{7}{3}$

$g\left(-\frac{7}{3}\right) = \underset{-12{,}7}{\left(-\frac{7}{3}\right)^3} + \underset{11{,}67}{5 \cdot \frac{7}{3}} - \underset{-38{,}11}{7\left(\frac{7}{3}\right)^2} + \underset{+17 = 22{,}14}{17} = 22{,}14$ $\qquad \left(-\frac{7}{3};\ 22{,}14\right)$

Точка перегиба в $x = -\frac{7}{3}$

c) $h(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

$h''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

$2 - \frac{2}{x^3} = 0$

$2x^3 = 2$

$x = 1$

$h'''(x) = -\frac{6}{x^4}$

$h'''(1) = -6 < 0 \Rightarrow (1;0)$ Точка перегиба

Точка перегиба $x = 1$

d) $j(x) = \frac{1}{x^5} + x^{17} + 8$

$j''(x) = \frac{30}{x^7} + 272x^{15}$

$j''(x) = 0$

$\frac{30}{x^7} + 272x^{15} = 0$

$272x^{15} = \frac{-30}{x^7}$

$272x^{22} = -30$

$x^{22} = -\frac{30}{272} \approx 0{,}11$

$x = \sqrt[22]{\frac{30}{272}} \approx 0{,}91$ Точка перегиба

$j(0{,}91) = \frac{1}{(0{,}91)^5} + 0{,}91^{17} + 8 = 9{,}8$

1,60 0,20

$g''(x) = \frac{-210}{x^8} + 4352x^{15}$

$g'''(0{,}91) \approx -\frac{210}{0{,}91^8} + 4352 \cdot 0{,}91^{15} = 611 > 0 \Rightarrow (0{,}91; 9{,}8)$ точка перегиба