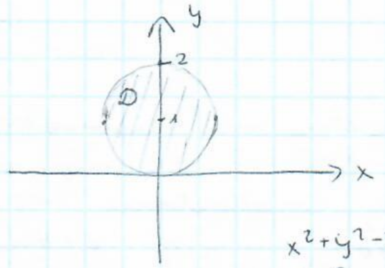
b) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ gdzie D: $x^2+y^2-2y \le 0$

Równanie okręgu $x^2+y^2-2y=0$ we współrzędnych biegunowych ($x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$) ma postać:

$$(\varrho\cos\varphi)^2+(\varrho\sin\varphi)^2-2\varrho\sin\varphi=0$$
$$\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi-2\varrho\sin\varphi=0$$
$$\varrho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-2\varrho\sin\varphi=0$$

$$\varrho^2-2\varrho\sin\varphi=0$$
$$\varrho(\varrho-2\sin\varphi)=0$$
$$\varrho=2\sin\varphi$$

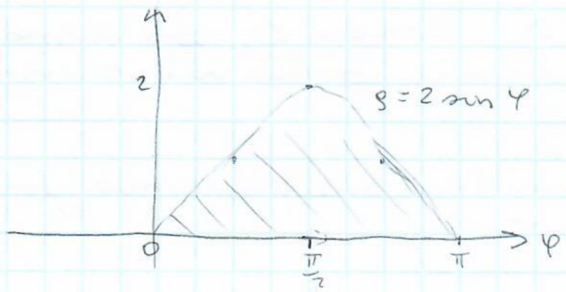
Zatem obszar całkowania D



w nowych zmiennych określony jest nierównościami

$0 \le \varphi \le \pi$
$0 \le \varrho \le 2\sin\varphi$

$x^2+y^2-2y \le 0$
$x=0$
$y=1$
$x^2+(y-1) \le 1$



$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_\Delta \left[(\varrho\cos\varphi)^2+(\varrho\sin\varphi)^2\right]\varrho\,d\varrho\,d\varphi =$$
$$= \iint\limits_\Delta \left[\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi\right]\varrho\,d\varrho\,d\varphi = \iint\limits_\Delta \varrho^3\,d\varrho\,d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi}\varrho^3\,d\varrho =$$
$$= \int_0^\pi \left[\frac{1}{4}\varrho^4\right]_{\varrho=0}^{\varrho=2\sin\varphi} d\varphi = \int_0 \left[\frac{1}{4}\cdot 16\sin^4\varphi - \frac{1}{4}\cdot 0\right] d\varphi = \int_0^\pi 4\sin^4\varphi\,d\varphi =$$
$$= 4\int_0^\pi \sin^4\varphi\,d\varphi =$$

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$$

Stąd

$$\int\sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x + \frac{3}{4}\int\sin^2 x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}\int\sin^0 x\,dx\right] =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x - \frac{3}{8}\cos x\sin x + \frac{3}{8}x$$

$$= 4\left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\cos x\sin^3 x - \frac{3}{8}\cos x\sin x\right]_0^\pi =$$
$$= 4\left[\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\cos\pi\sin^3\pi - \frac{3}{8}\cos\pi\sin\pi - \left(\frac{3}{8}0 - \frac{1}{4}\cos 0\sin^3 0 - \frac{3}{8}\cos 0\sin 0\right)\right] =$$
$$= 4\left[\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{3}{8}\cdot 0 - (0-0-0)\right] = \frac{3}{2}\pi.$$