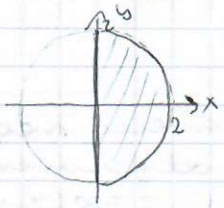
Zadanie 1

Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

a) $\iint\limits_{D} xy^2\,dx\,dy$ gdzie $D:\ x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0$

Obszar całkowania jest półkolem o promieniu 2.



φ - miara kąta między dodatnią częścią osi OX, a promieniem wodzącym pkt. P

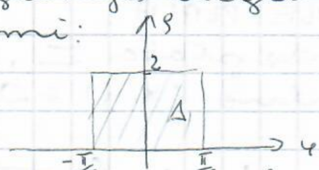
$0 \le \varphi \le 2\pi$ lub $-\pi < \varphi \le \pi$

ρ - odległość pkt. P od początku układu współrzędnych.

$0 \le \rho < \infty$

U nas obszar całkowania we współrzędnych biegunowych jest określony nierównościami:

$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ i $0 \le \rho \le 2$



Dokonując w rozważanej całce zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe otrzymamy

$$\iint\limits_{D} xy^2\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=} \iint\limits_{\Delta} \rho\cos\varphi\,(\rho\sin\varphi)^2\,\rho\,d\varphi\,d\rho =$$

bo:

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

oraz

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho^4 \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\rho = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right)\cdot\int_0^2 \rho^4\,d\rho =$$

$$\ulcorner \int \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi \underset{\uparrow}{=} \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\sin^3\varphi}{3} \lrcorner$$

$\sin\varphi = t$

$\cos\varphi\,d\varphi = dt$

$$= \left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 = \left[\frac{\sin^3\frac{\pi}{2}}{3} - \frac{(\sin(-\frac{\pi}{2}))^3}{3}\right]\cdot\left[\frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right]\left[\frac{32}{5}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{32}{5} = \frac{64}{15}$$