ANALIZA MATEMATYCZNA II

Zajęcia 12 – Zamiana zmiennych dla całki podwójnej. Obliczanie całki podwójnej we współrzędnych biegunowych. Przykłady. Zastosowania geometryczne.

DEF. PRZEKSZTAŁCANIE OBSZARÓW NA PŁASZCZYŹNIE

Niech Δ i D będą obszarami odpowiednio na płaszczyznach uOv i xOy. Przekształceniem obszaru Δ w obszar D nazywamy funkcję $J: \Delta \to D$ określoną wzorem:

$$(x,y) = J(u,v) = (\Phi(u,v), \Psi(u,v)) \quad \text{gdzie } (u,v) \in \Delta$$

Obrazem zbioru Δ przy przekształceniu J nazywamy zbiór

$$J(\Delta) \overset{def}{=} \{(x,y) : x = \Phi(u,v),\ y = \Psi(u,v),\ (u,v) \in \Delta\}$$

Przekształcenie J nazywamy:

a) ciągłym jeżeli funkcje Φ i Ψ są ciągłe na obszarze Δ,

b) różnowartościowym, jeżeli różnym punktom obszaru Δ odpowiadają różne punkty jego obrazu D

DEF: JAKOBIAN PRZEKSZTAŁCENIA

Jakobianem przekształcenia $J(u,v) = (\Phi(u,v), \Psi(u,v))$ nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$\mathcal{J}_J(u,v) \overset{def}{=} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial \Psi}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}$$

TWIERDZENIE O ZAMIANIE ZMIENNYCH W CAŁCE PODWÓJNEJ

Niech

1) przekształcenie $J: \begin{cases} x = \Phi(u,v) \\ y = \Psi(u,v) \end{cases}$ przekształca różnowartościowo wnętrze obszaru regularnego Δ na wnętrze obszaru regularnego D

2) funkcje Φ i Ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na pewnym zbiorze otwartym zawierającym obszar Δ.

3) funkcja f jest ciągła na obszarze D

4) jakobian $\mathcal{J}_J$ jest różny od zera wewnątrz obszaru Δ.

Wtedy

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(\Phi(u,v), \Psi(u,v))\,|\mathcal{J}_J(u,v)|\,du\,dv$$