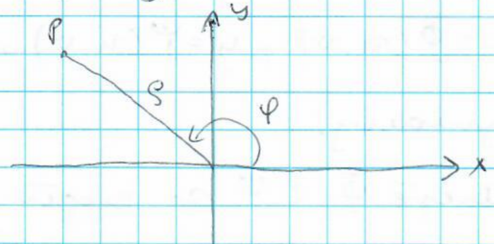
DEF: WSPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH

Położenie punktu P na płaszczyźnie można opisać parą liczb (φ, ρ), gdzie:

φ - oznacza miarę kąta między dodatnią częścią osi Ox, a promieniem wodzącym punktu P, $0 \le \varphi \le 2\pi$ albo $-\pi \le \varphi \le \pi$

ρ - oznacza odległość pkt P od początku układu współrzędnych, $0 \le \rho < \infty$

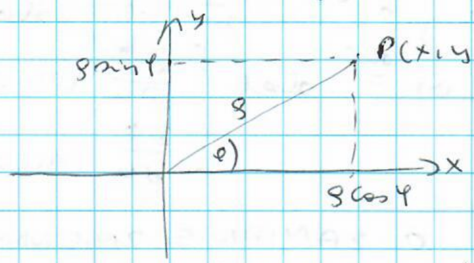
Parę liczb (φ, ρ) nazywamy współrzędnymi biegunowymi płaszczyzny



FAKT: ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY WSPÓŁRZĘDNYMI BIEGUNOWYMI I KARTEZJAŃSKIMI

Współrzędne kartezjańskie (x, y) punktu płaszczyzny danego przez współrzędnych biegunowych (φ, ρ) określone są wzorami:

$$\beta : \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$



TWIERDZENIE (WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE W CAŁCE PODWÓJNEJ)

Niech
1) obszar Δ we współrzędnych biegunowych będzie regularny,
2) funkcja f będzie ciągła na obszarze D, który jest obrazem zbioru Δ przy przekształceniu biegunowym $D = \beta(\Delta)$

wtedy

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

UWAGA:

Jeżeli we współrzędnych biegunowych obszar Δ ma postać:

$$\Delta = \{(\varphi, \rho) : \alpha \le \varphi \le \beta,\ g(\varphi) \le \rho \le h(\varphi)\}$$

gdzie funkcje nieujemne g i h są ciągłe na przedziale $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ to

$$\iint_\Delta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$