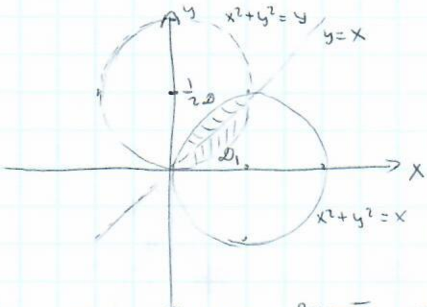
c) $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2}$ gdzie $D: \ x^2+y^2 \le x$, $x^2+y^2 \le y$

Obszar całkowania ma postać:

$x^2+y^2-x \le 0$ $\qquad$ $x^2+y^2-y \le 0$

$(x-\frac{1}{2})^2+y^2 \le \frac{1}{4}$ $\qquad$ $(x)^2+(y-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$



Ze względu na symetrię obszaru D względem prostej $y=x$, a także ze względu na symetrię funkcji podcałkowej względem tej prostej, mamy:

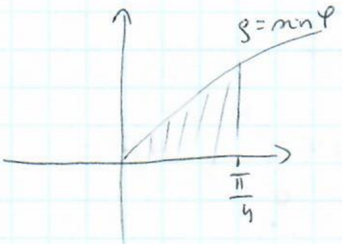
$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2} = 2\iint\limits_{D_1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2}$$

gdzie D_1 jest połową obszaru D. Obszar D_1 we współrzędnych biegunowych jest opisany przez nierówności

$0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$

$0 \le \rho \le \sin\varphi$

Stąd dokonując w całce zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe otrzymamy:



$$2\iint\limits_{D_1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2} = 2\iint\limits_{\Delta_1} \frac{\rho\, d\varphi\, d\rho}{(1-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin\varphi)^2} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \frac{\rho\, d\rho}{(1-\rho^2)^2} \underset{\downarrow}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[2\cdot\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right]_{\rho=0}^{\rho=\sin\varphi} d\varphi =$$

$1-\rho^2 = t$

$-2\rho\, d\rho = dt$

$\rho\, d\rho = \frac{dt}{-2}$

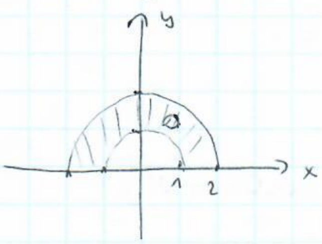
$$\int \frac{\rho\, d\rho}{(1-\rho^2)^2} = \int \frac{dt}{-2t^2} = -\frac{1}{2}\int t^{-2}\,dt = -\frac{1}{2}\,\frac{t^{-1}}{-1} =$$

$$= \frac{1}{2t} = \frac{1}{2(1-\rho^2)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1\right) d\varphi = \left[\mathrm{tg}\,\varphi - \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

d) $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dx\,dy$, gdzie $D: \ 1 \le x^2+y^2 \le 4$, $y \ge 0$

Obszar całkowania jest półpierścieniem o promieniu wewnętrznym 1 i zewnętrznym 2

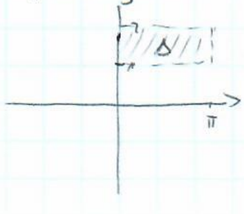


Obszar ten we współrzędnych biegunowych opisany jest przez nierówności:

$0 \le \varphi \le \pi$

$1 \le \rho \le 2$

$x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$



$$\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dx\,dy = \iint\limits_\Delta \frac{\ln\rho^2}{\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{2\ln\rho}{\rho^2}\,\rho\, d\rho = \int_0^{\pi} d\varphi \cdot \int_1^2 \frac{2\ln\rho}{\rho}\, d\rho =$$

$$= [\varphi]_0^{\pi} \cdot \left[\ln^2\rho\right]_1^2 = \pi \ln^2 2$$