1 Письменные задачи

Ниже вам будут представлены три сюжета из наук на стыке которых построен курс «Древесные симметрии бесконечности». Каждый сюжет в себя включает необходимую теорию и набор задач (не более 3 на каждый сюжет). Решение каждой задачи будет подразумевать под собой подробное изложение некоторого рассуждения, которое либо приводит вас к ответу, либо помогает вам доказать те или иные утверждения. Советуем писать все что считаете хоть немного нужным для объяснения. Любые картинки для пояснения приветствуются.

Засчитываться будут и частичные решения при достаточной близости к полноценному решению по мнению проверяющих.

1.1 Грамматики

Пусть X — некоторое конечное множество, которое мы будем называть алфавитом. Пусть X^* это множество всех строк *над* X, то есть конечных последовательностей символов (букв) из X. В частности, единственную строку длины 0 назовем ε. Языком над X называется любое непустое подмножество X^*. Приведем простейшие примеры языков над алфавитом $X = \{a, b\}$: $\{\varepsilon\}, \{a^2b^{100}a^nb \mid n \geq 1\}, \{a^n \mid n \vdots 3\}$.

Некоторые языки можно задавать с помощью так называемых грамматик: это формальные программы, которые преобразуют слова, поступающие им на вход. Приведем пример как с помощью грамматики задать язык всех арифметических выражений (формальное определение происходящего будет ниже): пусть $X = \{1, x, +, *, (,)\}$. Записываться это будет следующим образом:

$$E \to x \mid 1 \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

Читается эта запись вот так:

1. переменная x это арифметическое выражение
2. число 1 – арифметическое выражение
3. Если e_1, e_2 – арифметическое выражение, то $e_1 + e_2$ – тоже (сумма арифметических выражений – арифметическое выражение)
4. Если e_1, e_2 – арифметическое выражение, то $e_1 * e_2$ – тоже (произведение арифметических выражений – арифметическое выражение)
5. Если e — арифметическое выражение, то (e) тоже

Для примера: $x*(x+1)$ — арифметическое выражение, а $x*)1+$ – нет. На всякий случай дадим формальное определение грамматики. Также, решающим, заинтересованным в углублении своих знаний в этой тематике рекомендуется ознакомиться с литературой, например, А. Е. Пентус, М. Р. Пентус "Теория формальных языков" (кликабельно), или лекции по теоретической информатике Охотина Александра Сергеевича (тоже кликабельно). Строгое определение следующее:

Определение 1.1. Формальная грамматика это четверка $G = (\Sigma, N, R, S)$, где

1. Σ – конечное множество (алфавит языка)
2. N — конечное множество так называемых нетерминальных символов (непересекающееся с Σ)
3. Конечное множество R правил грамматики (функций переписывания), которые имеют вид
$$(\Sigma \cup N)^* N (\Sigma \cup N)^* \to (\Sigma \cup N)^*$$
(То есть последовательность букв алфавита и нетерминальных символов такая что в ней есть хотя бы один нетерминальный символ переписывается в другую последовательность)
4. Начальный символ $S \in N$, от «sentence» – с которого начинается грамматика.

Язык задаваемый этой грамматикой это множество всех слов в алфавите Σ, которые можно получить из символа S пользуясь правилами R.

Для решения задач ниже может пригодиться лемма о накачке:

Лемма 1.1. Пусть язык $L \subset \Sigma^*$ задается (какой-то) грамматикой. Тогда найдется число $p > 0$, что для всякой строки $w \in L$ длины хотя бы p существует разбиение $w = xuyvz$, где хотя бы одно из слов u, v непустое, длина слова uyv не больше p, причем $xu^i yv^i z \in L$ для всех $i \geq 0$. [1]

1.1.1 ПИСЬМЕННЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО СЮЖЕТА

1.(1 балл) Запишите грамматику арифметических выражений в формальном определении данном выше

2.(3 балла) Переделайте грамматику для арифметических выражений таким образом, чтобы язык определяемый ей не поменялся, но для каждого слова был бы единственный способ получить его операциями, соответствующий их приоритетам. Грамматика данная выше не подходит потому что, например, слово $x + x * x$ можно получить двумя разными способами.

3. (3 балла) Какие из следующих языков задаются грамматиками?

(a) $\{a^n b^{3n+2} \mid n \geq 0\}$
(b) $\{a^m b^n \mid 0 \leq m \leq n\}$
(c) $\{a^m b^n \mid 0 \leq m \leq n \leq 2m\}$
(d) $\{a^m b^{n+m} c^n \mid 0 \leq m, n\}$
(e) $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$
(f) $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
(g) Язык палиндромов $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w\text{записанное в обратном порядке}\}$
(h) $\{a^m b^m c^n \; m, n \geq 0\}$

[1] Примечание: если u — слово, то $u^i := \underbrace{uu\ldots u}_{i \text{ раз}}$

1.2 Деревья

Деревом называется связный (неориентированный) граф без циклов. Гомоморфизм графов это отображение вершин, сохраняющее отношение "быть соседом". Изоморфизм графов – биективный гомоморфизм.

Эта задача посвящена изучению автоморфизмов конкретного класса деревьев. Если X конечное множество, то на X^* есть структура бесконечного дерева: между двумя словами существует ребро (u, v), если выполняется одно из двух

$$v = us \text{ для некоторого } s \in X \text{ или } u = vs \text{ для некоторого } s \in X$$

Это дерево будет обозначаться $T(X)$. Введем так называемое множество автоморфизмов $T(X)$:

$$\mathbf{Aut}(T(X)) = \{\alpha : T(X) \longrightarrow T(X) \mid \alpha \text{ — изоморфизм } \}$$

Определение 1.2. Автоморфизм $f \in \mathbf{Aut}(T(X))$ называется автоморфизмом конечного порядка, если найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что

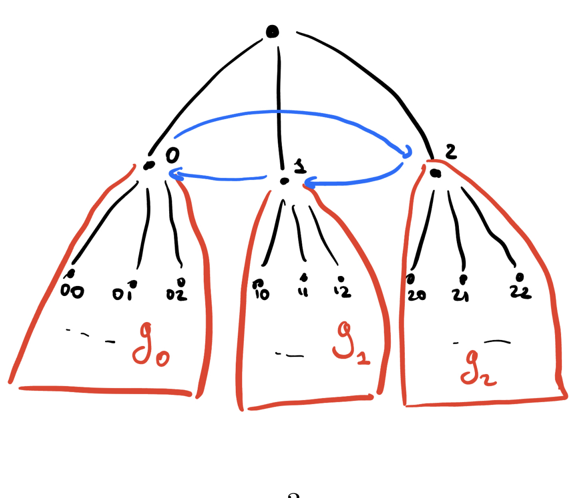
$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}}(x) = x$$

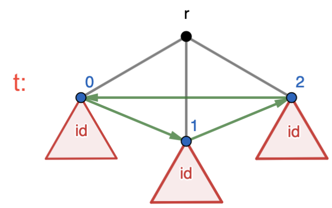
для любой вершины дерева x. Наименьшее положительное такое n называется порядком автоморфизма f. Если такого n не существует, то f называется автоморфизмом бесконечного порядка

В задачах вы докажете, что любой автоморфизм дерева сохраняет множество всех таких слов $v \in X^*$, что у них фиксирована длина (то есть $\{v \in X^* \mid |v| = n\}$). Из этого замечания следует, что автоморфизмы можно задавать в очень конкретной форме. Частный случай этой записи мы с вами увидим на примере $X = \{0, 1, 2\}$ уже сейчас. Пусть σ — любая перестановка X (то есть биекция X в себя) и g_0, g_1, g_2 — некоторые автоморфизмы $T(X)$. Тогда мы можем определить автоморфизм

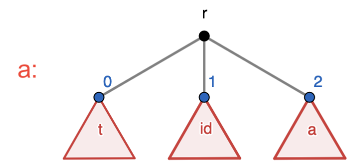
$$f(0w) = \sigma(0)g_0(w), f(1w) = \sigma(1)g_1(w), f(2w) = \sigma(2)g_2(w)$$

Эта запись означает, что если слово начинается на букву « 0 », то его образ начинается на букву $\sigma(0)$ и дальше определяется действием g_0, и так далее. Схематичная картинка для $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$ представлена ниже.





(a) автоморфизм t



(b) автоморфизм a

1.2.1 ПИСЬМЕННЫЕ ЗАДАЧИ ВТОРОГО СЮЖЕТА

0 (1 балл) Нарисуйте эти деревья. Для каких X, Y деревья $T(X)$ и $T(Y)$ изоморфны? Какую вершину сохраняют все автоморфизмы $T(X)$? Какие *подмножества* вершин $T(X)$ сохраняются всеми автоморфизмами?

Рассмотрим $a, t \in \mathbf{Aut}(T(\{0,1,2\}))$ определенные рекурсивно следующим образом:

$$t(0w) = 1w,\ t(1w) = 2w,\ t(2w) = 0w$$

(то есть $g_i(w) = w$ в контексте определения выше).

$$a(0w) = 0t(w),\ a(1w) = 1w,\ a(2w) = 2a(w)$$

(то есть $g_0 = t, g_1 = \mathrm{id}, g_2 = a$ в контексте определения выше)

1.(2 балла) Докажите, что a, t – это автоморфизмы конечного порядка. Чему равен минимальный конечный порядок этих автоморфизмов?

2.(4 балла) Докажите, что $(at)(x) := a(t(x))$ и $(ta)(x) := t(a(x))$ – это автоморфизмы бесконечного порядка. Есть ли у этих автоморфизмов неподвижные строки? (такие $w \in T(\{0,1,2\})$ что $(at)(w) = w$ или $(ta)(w) = w$ соответственно.

1.3 Анализ!

1.3.1 ПИСЬМЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО СЮЖЕТА

1.(2 балла) Пусть $x_0 = a, x_1 = b, x_{n+2} = \frac{1}{3}(x_n + 2x_{n+1})$. Докажите, что существует предел x_n и найдите его.

2. (2+2 балла) Пусть $x_1 \in \mathbb{R}$, определим $x_{n+1} = \left(2 + \frac{2}{n}\right) x_n - 1$.

2.1 (2 балла) При каких значениях x_1 эта последовательность расходится?

2.2 (балла) При каких значениях x_1 эта последовательность сходится? К какому пределу?