Р. И. Григорчук, Некоторые вопросы динамики групповых действий на корневых деревьях, *Труды МИАН*, 2011, том 273, 72–191

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2011, т. 273, с. 72–191

УДК 512+517.98+519.1

Некоторые вопросы динамики групповых действий на корневых деревьях[1]

©2011 г. Р. И. Григорчук[2]

Поступило в мае 2010 г.

Светлой памяти Евгения Фроловича Мищенко

Эта статья сочетает черты обзора и исследовательской работы. В ней дан обзор некоторых результатов, полученных в последнее десятилетие, связанных с динамикой ветвящихся и самоподобных групп на границе сферически однородного корневого дерева и комбинаторикой и асимптотическими свойствами ассоциированных с группой или ее действием графов Шрейера. Особый акцент сделан на изучение существенно свободных действий самоподобных групп, которые являются антиподом к ветвящимся действиям. В то же время тема “свободное versus несвободное” пронизывает всю статью. Получены достаточные условия существенной свободы действия самоподобной группы на границе дерева. Приведены конкретные примеры таких действий. Приведены конструкции присоединенной динамической системы и шрейеровой динамической системы, порожденной графом Шрейера. Для групп, действующих на деревьях, введен след на присоединенной C^*-алгебре, порожденной купмановским представлением, и продемонстрирована его роль для изучения факторов фон Неймана, спектральных свойств групп, графов Шрейера и элементов присоединенной C^*-алгебры. Введены понятия асимптотического экспандера и асимптотического графа Рамануджана, и приведены примеры таких графов. Обсуждены вопросы, связанные с понятием цены действия, а также с понятием градиента ранга.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная теория динамических систем изучает системы, заданные действиями групп, т.е. системы вида (G, X, μ), где мера μ инвариантна или по крайней мере квазиинвариантна (изучаются также действия полугрупп, но эта проблематика развита значительно слабее, нежели проблематика групповых действий). Исследуются также топологические динамические системы вида (G, X), где X — топологическое пространство, а группа G действует гомеоморфизмами (топологическая динамика). Одним из важных классов действий, которые рассматриваются в современной динамике, является класс действий счетных групп, среди которых особую роль играют действия конечно порожденных групп. Изучение грубых свойств (таких, например, как структура разбиения на орбиты) действий счетных групп тесным образом связано с изучением счетных борелевских разбиений, а последнее направление тесно примыкает

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-8508.2010.1), а также NSF (проект DMS-0600975).

[2]Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843-3368, USA; Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: grigorch@math.tamu.edu

к современным исследованиям в дескриптивной теории множеств (берущим свое начало в отечественной научной школе благодаря пионерским работам Н.Н. Лузина и М.Я. Суслина). Групповой аспект теории динамических систем также в значительной степени обязан отечественной математической школе и связан с фундаментальными работами Н.Н. Боголюбова, И.М. Гельфанда, Ю.В. Линника, М.Л. Громова, Г.А. Маргулиса и других выдающихся математиков. Среди западной школы следует в первую очередь упомянуть работы Дж. фон Неймана, Г. Фюрстенберга, А. Конна и Р. Зиммера.

В исследованиях, проводившихся до недавнего времени, основную роль играли (существенно) свободные действия, а несвободные действия встречались эпизодически. Одними из первых работ, в которых фигурировали несвободные действия, явились работы автора [70, 72], а также А.М. Вершика и С.В. Керова [185], причем результаты автора в начале 80-х годов прошлого века в основном были алгебраического характера (связанными с геометрическим и асимптотическим направлением в теории групп) и привели к созданию теорий ветвящихся групп и самоподобных групп, в то время как работы А.М. Вершика и С.В. Керова в основном относились к теории представлений и концентрировались вокруг исследований бесконечной симметрической группы $\mathcal{S}(\infty)$ и некоторых других локально конечных групп. В последнее десятилетие в первую очередь после появления работ [87, 16] стала ясной важность изучения действий группы на индивидуальных орбитах для несвободных действий на пространствах с мерой или на топологических пространствах. Это вылилось в изучение графов Шрейера и орбитальных графов (ассоциированных с действиями на орбитах). В то же время два года назад А.М. Вершик выдвинул новую идею, связанную с изучением так называемых вполне несвободных действий. Оказалось, что подход автора и подход А.М. Вершика имеют точки соприкосновения; в частности, действия ветвящегося типа являются вполне несвободными и об этом пойдет речь ниже. В то же самое время, изучая на протяжении многих лет несвободные действия, автор осознавал важность свободных действий в интересующей его ситуации действий на границах корневых деревьев. Поэтому в нашей работе уделяется примерно одинаковое внимание обоим типам действий и их связи с различными вопросами.

Эта работа изначально задумывалась как обзорная статья, аккумулирующая некоторый круг вопросов, касающихся динамики групп на корневых деревьях и впервые рассмотренных примерно десятилетие назад в работах [79, 80, 16, 87, 95]. Однако в ходе ее написания начали рождаться новые идеи, устанавливаться новые связи, вырисовываться контуры новых направлений исследований. Поэтому статья не получилась чисто обзорной, в ней достаточно много новых наблюдений и зарисовок. Посвятим следующую часть введения краткому описанию философии автора, касающейся динамики групповых действий, а затем перечислим содержание разделов статьи.

Существует тесная связь между некоммутативными динамическими системами и операторными алгебрами (в первую очередь алгебрами фон Неймана и C^*-алгебрами). Любое действие с квазиинвариантной мерой порождает унитарное представление группы, и, таким образом, задачи и методы некоммутативной динамики часто переплетаются с задачами и методами теории представлений (которые опять-таки переплетаются с задачами и методами теории операторных алгебр). Как известно, спектр представления (т.е. его разложение на неприводимые) может быть чисто точечным (т.е. содержать только конечномерные подпредставления), непрерывным (т.е. содержать только бесконечномерные подпредставления) или смешанным (т.е. содержать как конечномерные, так и бесконечномерные подпредставления). Для динамики одного автоморфизма (т.е. когда речь идет о действии циклической группы $\mathbb{Z}$) хорошо известно, что действие с чисто точечным спектром изоморфно действию сдвигом на компактной абелевой группе. Обобщением этого классического результата фон Неймана и Халмоша является теорема Макки [131], утверждающая, что точные эргодические действия с инвариантной мерой и чисто точечным спектром локально компактной топологической группы изоморфны действиям этой группы на пространствах вида K/H, снабженных образом λ нормированной меры Хаара на K, причем K — компактная топологическая группа, содержащая подгруппу, изоморфную данной, или ее гомоморфный образ, а H — ее замкнутая подгруппа.

В классической ситуации одного автоморфизма пространства с мерой принято считать дискретный случай (т.е. случай чисто точечного спектра) тривиальным (или по крайней мере весьма простым). Для действий некоммутативных групп случай чисто точечного спектра ничуть не проще (а, может быть, даже сложнее) случая непрерывного спектра. Особый интерес представляют действия дискретных групп G на однородных пространствах K/P проконечных групп (т.е. когда K — компактная вполне несвязная группа). Тогда если действие точное, то группа G вложима в проконечную группу, а значит, является финитно аппроксимируемой (т.е. обладает большим запасом подгрупп конечного индекса, а именно их пересечение является тривиальной подгруппой). На самом деле финитно аппроксимируемые группы как раз и есть тот класс групп, которые обладают точным действием с инвариантной мерой и чисто точечным спектром. При этом реализация Макки такого действия на однородном пространстве K/H может приводить к случаю, когда группа K связна (и тогда она является группой Ли), либо вполне несвязна (проконечный случай), либо смешанного типа (т.е. обладает нетривиальной связной подгруппой, фактор по которой вполне несвязен). Случай связной K представляется нам более простым и является более изученным. Все написанное в последних нескольких абзацах является хорошо известным. Менее известными являются следующие обстоятельства.

Оказывается, что динамические системы вида $(G, K/P, \lambda)$, $G \leq K$, где K — проконечная группа, возникают на кажущейся совершенно другой основе, а именно изоморфны системам вида $(G, \partial T, \nu)$, где T — некоторое сферически однородное корневое дерево, ∂T — его граница, G действует автоморфизмами дерева, а ν — равномерная мера на границе дерева (теорема 2.9). Первые нетривиальные действия такого типа были рассмотрены в [70, 72, 99], причем полученные там результаты в большей степени относятся к алгебре. Динамическому аспекту в большей степени уделено внимание в работах [80, 87, 16, 18, 142, 86] и других статьях, положивших начало ряду новых направлений на стыке алгебры, теории динамических систем, голоморфной динамики, теории операторных алгебр, дискретной математики и других разделов математики. Несмотря на то что теория действий на деревьях и их различных обобщениях (типа $\mathbb{R}$-деревьев, гиперболических пространств, билдингов, CAT(0)-пространств и т.д.) уже давно стала хорошо разработанной теорией (прекрасным примером служит материал книги Серра “Деревья” [168]), изучение действий на корневых деревьях потребовало новых понятий и методов и позволило переизложить многие результаты, связанные с такой широко применяемой в теории групп операцией, как сплетение, на геометрическом и динамическом языках. Это позволило значительно расширить область применения этой операции (особенно при ее итерировании) и лучше ее понять. Одним из центральных понятий, связанных с действиями на корневых деревьях, стало понятие ветвящейся группы, введенное автором [80, 79]. На языке динамических систем определение ветвящейся группы выглядит следующим образом.

Определение 1.1. (a) Группа G действует на пространстве (X, μ) с инвариантной мерой *слабо ветвящимся образом*, если на X существует возрастающая последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечных G-инвариантных разбиений, стремящаяся к разбиению на точки, такая, что действие G транзитивно на множестве атомов каждого разбиения ξ_n и для любого n и любого атома $A \in \xi_n$ найдется элемент $g \in G$, действующий на A нетривиально и в то же время действующий тривиально на дополнении A^{c} к A.

(б) Действие (G, X, μ) принадлежит *ветвящемуся типу*, если оно слабо ветвящееся и дополнительно для каждого атома A произвольного разбиения ξ_n подгруппа $\mathrm{rist}_G(A) < G$, состоящая из элементов, действующих тривиально на дополнении A^{c}, имеет конечный индекс в сужении $\mathrm{st}_G(A)|_A$ стабилизатора $\mathrm{st}_G(A)$ множества A на это множество, если отождествить ее с сужением $\mathrm{rist}_G(A)|_A$. Группа называется ветвящейся, если она обладает точным действием ветвящегося типа.

Заметим, что в таком виде определение ветвящихся групп никогда не приводилось, а использовались либо сугубо алгебраическое определение, либо геометрическое на языке действий на корневых деревьях [80, 19]. В разд. 2 мы приведем геометрическое определение и докажем его эквивалентность приведенному.

Ветвящиеся (минимально бесконечные) группы составляют один из трех подклассов, на которые естественным образом разбивается класс минимально бесконечных групп (т.е. бесконечных групп, каждая собственная фактор-группа которых конечна), чем в первую очередь и определяется значение этого класса в теории групп.

Другой важный класс групп, действующих на корневых деревьях, — это самоподобные группы, другими словами, группы, порожденные автоматами типа Мили. Автоматы типа Мили — это автоматы, работающие как трансдюсеры, или секвенциальные машины, т.е. это автоматы, работающие как синхронные преобразователи информации, переводящие побуквенно входную последовательность букв некоторого алфавита в выходную последовательность. Обратимые инициальные синхронные автоматы (точнее, их классы эквивалентности) составляют группу с (хорошо известной в информатике) операцией композиции автоматов [56, 119]. Эта группа зависит от мощности алфавита, т.е. на самом деле имеется последовательность групп, индексированная натуральными числами (мощностью алфавита).

Если рассматривать более общий класс автоматов — асинхронные автоматы, то, как показано в [87], имеется только одна универсальная группа, не зависящая от мощности алфавита, в которую вкладываются все группы синхронных автоматов. Эта группа названа в [87] группой рациональных гомеоморфизмов множества Кантора и, помимо самоподобных групп, содержит и другие весьма интересные подгруппы, например знаменитые группы Томпсона. Группа называется самоподобной, если она изоморфна группе, порожденной состояниями одного неинициального обратимого синхронного автомата.

Особым образом выделяются группы, порожденные конечными автоматами (в этой работе мы называем их сильно самоподобными группами). Простым примером самоподобной группы является бесконечная циклическая группа, реализованная действием одометра (в англоязычной литературе также называемого “adding machine” и нередко переводящегося на русский язык как *d-адический счетчик*, d — мощность алфавита). Одометр действует в пространстве бесконечных вправо последовательностей букв алфавита мощности $d \geq 2$, снабженном равномерной мерой Бернулли, или, эквивалентно, на границе d-регулярного корневого дерева (имеется обобщение понятия одометра на случай, когда фазовым пространством служит декартово произведение последовательности различных алфавитов). Эта динамическая система с дискретным спектром хорошо известна в эргодической теории. Существенно более сложным примером (сильно) самоподобной группы является группа $\mathcal{G}$, построенная автором в [70], а затем исследовавшаяся в [72] и многих других работах. Основными ее свойствами являются периодичность, промежуточный рост (между полиномиальным и экспоненциальным), а также неэлементарная аменабельность.

Самоподобные группы, особенно те из них, которые обладают ветвящимся свойством, являются весьма интересным классом групп, связанным с многими вопросами теории динамических систем и других разделов математики. Теория групп итерированной монодромии, созданная В. Некрашевичем [142], придала новое дыхание голоморфной динамике и стала широко применяться для изучения множеств Жюлиа и других фрактальных объектов [142].

Действия на корневых деревьях оказались полезными для теории проконечных групп, так как любая проконечная группа со счетной базой открытых множеств вкладывается в группу автоморфизмов (снабженную естественной топологией) подходящим образом выбранного корневого дерева T. Более того, если действие группы G транзитивно на уровнях (это эквивалентно эргодичности действия на границе), то замыкание $\overline{G}$ в $\mathrm{Aut}(T)$, являющееся проконечной группой, действует на границе ∂T транзитивно, а равномерная мера ν становится при этом образом меры Хаара на $\overline{G}$. В этом случае динамическая система $(G, \partial T, \nu)$ изоморфна системе $(G, \overline{G}/P, \nu)$, где $P = \mathrm{st}_{\overline{G}}(\xi)$, $\xi \in \partial T$. Как уже упоминалось, верно и обратное, а именно всякое действие с чисто точечным спектром типа $(G, K/P, \mu)$, где K — проконечная группа, изоморфно действию на границе подходящего корневого дерева (в чем несложно убедиться, применяя описанную в следующем разделе конструкцию действия на дереве классов смежности финитно аппроксимируемой группы, см. ниже теорему 2.9). Таким образом, в теореме Макки проконечный случай соответствует действиям на корневых деревьях. Еще одним аргументом в пользу корневых деревьев является факт, замеченный в [87], состоящий в том, что любое компактное однородное ультраметрическое пространство изометрично границе корневого дерева с подходящей метрикой на нем (более слабая версия этого утверждения содержится в [59]).

При изучении действий групп обычно принято предполагать существенную свободу действия, т.е. рассматривать такие действия, что для любого неединичного элемента группы мера множества неподвижных точек равна нулю. Одной из первых попыток обратить внимание на случай не существенно свободных действий явилась заметка [70] и последовавшие за ней работы [72, 73, 99], повлекшие формирование концепции ветвящегося действия и соответственно ветвящейся группы. Очевидно, что слабо ветвящееся действие не является существенно свободным. Также одной из пионерских работ на тему использования не существенно свободных действий явилась работа А.М. Вершика и С.В. Керова [185]. Вопрос об актуальности исследований несвободных действий недавно поднят А.М. Вершиком в [184]. Тема альтернативы “свободное versus несвободное действие” пронизывает бо́льшую часть нашей работы.

Важным объектом, возникающим при изучении не существенно свободных действий, являются орбитальные графы Γ_ξ, $\xi \in X$, действия (на пространстве X), вершинами которых являются точки орбиты, а ребра соответствуют переходу от одной вершины к другой под воздействием образующего элемента (при этом ребра получают соответствующие метки). Если действие существенно свободно, то такие графы почти наверное изоморфны графу Кэли группы, построенному по системе образующих. Для не существенно свободных действий графы Γ_ξ почти наверное неизоморфны графам Кэли, но изоморфны графам Шрейера, т.е. графам вида $\Gamma = \Gamma(G, H, A)$, где $H \leq G$ — подгруппа (соответствующая стабилизатору некоторой точки границы), а A — система порождающих. Вершинами такого графа являются левые (можно рассматривать правые) классы смежности gH, а две вершины fH, gH соединены ориентированным ребром, меченым образующим $a \in A$, если $gH = afH$. Графы Кэли получаются из этой конструкции в том случае, когда H — тривиальная подгруппа. В зависимости от ситуации можно рассматривать различные модификации понятия графа Шрейера: делать ребра неориентированными, стирать с них метки, выделять в графе вершину, рассматривая ее как начало отсчета, и т.д. Соответственно выбранной категории целесообразно рассматривать пространства графов с естественной компактной топологией на них и говорить о сходимости графов в этой топологии. Например, топология в пространстве графов Кэли групп была впервые определена в [72] и использована для изучения групповых свойств таких, как промежуточность роста, невозможность задания конечным набором соотношений, колмогоровская сложность проблемы слов [74] и т.д. В дальнейшем эта топология и ее вариации подверглись более внимательному изучению (в первую очередь в [43]), и в настоящий момент она играет существенную роль во многих исследованиях. Заметим, что в гораздо более ранней работе [42] Шаботи ввел топологию на множестве замкнутых подгрупп локально компактной группы и применил ее к изучениям решеток в таких группах. Топология Шаботи широко используется в исследованиях по решеткам в группах Ли (см. [158]). С ее помощью можно проинтерпретировать и топологии в пространствах графов Кэли и графов Шрейера.

Первыми работами, в которых была осознана важность изучения графов Шрейера, возникающих как орбитальные графы действия, были работы [16, 87]. Так, например, один из простых, но важных фактов содержится в следующем утверждении, взятом из [87, предложение 6.21].

Предложение 1.1 [87]. *Пусть G — конечно порожденная группа, действующая эргодично на пространстве (X,μ) сохраняющими класс меры μ преобразованиями* (*т.е. мера μ квазиинвариантна*). *Тогда почти наверное по отношению к μ графы Шрейера действия на орбитах локально изоморфны друг другу.*

При этом два графа локально изоморфны, если для любого радиуса r и произвольной вершины любого из графов найдется вершина другого графа такая, что подграфы-окрестности радиуса r вокруг выделенных вершин в обоих графах изоморфны. Аналогичное утверждение, однако требующее привлечения понятия G-типичной точки и небольшой коррекции в формулировке приведенного выше утверждения, верно и в топологической ситуации, причем имеются примеры, когда графы, типичные в топологическом смысле, не являются типичными в метрическом смысле [2].

Графы Шрейера, связанные с действиями самоподобных групп и групп ветвящегося типа на уровнях дерева и на его границе, являются важными как для решения различных вопросов теории графов, так и для исследования асимптотических задач, связанных с графами и группами. Они моделируют разнообразные явления и отражают трудность многих задач, с ними связанных. Так, например, знаменитая проблема Ханойских башен с четырьмя или более стержнями эквивалентна вопросу о вычислении расстояния между конкретными вершинами в этих графах и нахождении алгоритмическим образом минимального пути между ними. Подробнее об этом написано в [91–93]. Разнообразен спектр вопросов, возникающих при изучении графов Шрейера, в первую очередь связанных с теорией групп и динамическими системами. Это вопросы о количестве их концов, росте, аменабельности, возможности задания конечной системой подстановочных правил, возможности восстановления системы по типичному графу Шрейера, асимптотике первого ненулевого собственного значения дискретного оператора Лапласа, спектре дискретного оператора Лапласа, построении экспандеров, асимптотике случайных блужданий, вычислении цены действий и цены групп и т.д. Многие из этих вопросов затронуты в этой статье или в цитируемых в ней работах. Одним из новых приведенных ниже результатов является построение на основе конечных автоматов (и стоящих за ними самоподобных групп) примеров асимптотических экспандеров. Являются ли эти графы настоящими экспандерами — увлекательная нерешенная задача. Еще один круг вопросов, связанных с изучением действий на корневых деревьях, — изучение бесконечных убывающих цепочек подгрупп конечного индекса в финитно аппроксимируемых группах, в частности их градиент ранга [121, 5].

Как уже отмечалось, действия на корневых деревьях и проблематика самоподобных групп таинственным образом связаны с многими вопросами теории динамических систем. Они возникают при сужении на стабильные по Ляпунову аттракторы [87, теорема 6.16]. С ними связаны подстановочные динамические системы (возникающие при нахождении заданий группы образующими и соотношениями) [129, 97, 14]. Неожиданным открытием явился новый метод решения спектральной задачи для дискретного оператора Лапласа, основанный на привлечении вопроса об описании инвариантных подмножеств многомерных рациональных отображений [16]. Теория групп итерированной монодромии благодаря в первую очередь работам В. Некрашевича внесла значительные изменения в стратегию исследований по голоморфной динамике [142].

В разд. 8 мы предлагаем конструкцию шрейеровой динамической системы, позволяющую по комбинаторной структуре (графу Шрейера) или по алгебраическим данным (паре, состоящей из группы и ее подгруппы) построить динамическую систему. Приведенные там примеры, показывают, что исходная динамическая система в ряде случаев может быть восстановлена по этой конструкции, если в качестве графа Шрейера взять орбитальный граф действия на конкретной орбите или если в качестве подгруппы действующей группы рассмотреть стабилизатор точки фазового пространства.

По сути дела все новые результаты, относящиеся к вопросу о строении класса аменабельных групп, введенного фон Нейманом и независимо Боголюбовым, а также класса групп промежуточного роста, вопрос о непустоте которого был поставлен Милнором, были получены на основе исследования групповых действий на корневых деревьях. Оригинальный метод доказательства аменабельности, получивший название “трюк Мюнхаузена”, был разработан в [23, 109]. Разнообразные операторные алгебры, ассоциированные с действиями на корневых деревьях (а также в некоторых случаях с алгебрами Кунца), были определены и изучены в [16, 141, 86]. Оказалось, что среди них имеются как простые C^*-алгебры, так и алгебры, аппроксимируемые конечномерными алгебрами, подобно финитно аппроксимируемым группам. Классический метод, известный как “дополнение Шура”, нашел неожиданное применение к ним в [86]. Ограничимся этим далеко не полным списком направлений исследований действий на корневых деревьях.

Теперь перечислим вкратце содержание статьи. Раздел 2 носит подготовительный характер, и в нем приводится много определений, используемых в дальнейшем. В первую очередь определяются основные понятия, связанные со сферически симметричными корневыми деревьями и действиями на них. По-новому (по сравнению с определением 1.1) определяются ветвящиеся группы, объясняется, как по убывающей цепочке подгрупп конечного индекса построить соответствующее ей корневое дерево. Определяются минимально бесконечные группы и наследственно минимально бесконечные группы и формулируется теорема, описывающая трихотомию строения класса минимально бесконечных групп. Приведены примеры групп и их действий.

Раздел 3 посвящен группам автоматов и самоподобным группам. Объяснено, что такое сплетающие рекурсии. Даны определения сжимающейся группы и самовоспроизводящейся группы.

Раздел 4 посвящен изучению существенно свободных действий на границе дерева. Как доказано Абертом и Вирагом [6], выбранное наугад действие на бинарном дереве группы с конечным числом образующих является свободным (и более того, сама группа является свободной). Однако явное построение существенно свободного действия является, как правило, непростой задачей. Мы приводим ряд условий алгебраического характера, гарантирующих свободу действия, а также обсуждаем взаимоотношение свободы действия в топологическом смысле и метрическом. Несмотря на то что в общем случае не существует прямой связи между топологической свободой и свободой в метрическом смысле (т.е. по мере), замечательным фактом является то обстоятельство, что для действий сильно самоподобных групп оба понятия эквивалентны — результат, обнаруженный М. Кембайтом, П. Сильвой и Б. Стайнбергом [112].

В разд. 5 приводятся конкретные примеры существенно свободных действий, как уже известные типа группы мигающих лампочек, реализованной автоматом с двумя состояниями [95], так и новые, и обсуждается подход к выяснению вопроса, при каких условиях самоподобная группа действует существенно свободно. Некоторую роль в этом обсуждении играют подгруппы Михайловой прямого произведения двух копий свободной группы.

В разд. 6 рассматриваются различные топологии на пространствах графов Шрейера и доказывается теорема Гросса о том, что любой связный регулярный граф с четной степенью вершин может быть реализован как граф Шрейера свободной группы.

В разд. 7 приводятся примеры графов Шрейера, связанные с самоподобными группами. Определяются различные типы подстановочных правил и рекурсий для бесконечных последовательностей конечных графов. Основными “фигурантами” здесь выступают графы Шрейера группы промежуточного роста $\mathcal{G}$, а также группы, получившей название “базилика”. Материал этого раздела в основном опирается на публикации [16, 142, 93, 31, 81, 48].

В разд. 8 описывается конструкция, позволяющая сопоставить динамической системе присоединенную динамическую систему в пространстве графов Шрейера или в пространстве подгрупп группы. Этот материал перекликается с некоторыми вопросами, затронутыми в [184]. Кроме того, описывается конструкция, позволяющая по бесконечному графу Шрейера группы строить действие этой группы на некотором компакте. Эта конструкция приводит к интересным действиям, если группа автоморфизмов графа мала (например, тривиальна). Показано, как эта конструкция работает на примерах группы $\mathcal{G}$ и группы Томпсона (при этом используются результаты работ Я. Воробца [188] и Д. Савчука [166]). Интересным обстоятельством, проявленным в этих примерах, является то, что на метрическом уровне динамическая система восстанавливается по графу Шрейера, а на топологическом уровне возникающее пространство и действие являются несложной пертурбацией исходного фазового пространства и действия на нем. Вообще подход к изучению динамических систем, предложенный в этой части работы, следовало бы по аналогии с методом орбит Кириллова в теории представлений назвать *методом орбит* в динамике конечно порожденных групп. Подчеркнем, что если метод орбит Кириллова в основном используется в теории представлений групп Ли, то наш подход связан с рассмотрением действий счетных групп, снабженных дискретной топологией. Также в этом разделе подчеркнуто значение слабо максимальных подгрупп для орбитального подхода к динамическим системам и приведены некоторые в основном известные факты, относящиеся к этому классу подгрупп и полученные в [16, 17]. Следует также отметить нетривиальный пример слабо максимальной подгруппы группы промежуточного роста $\mathcal{G}$, построенный Е. Первовой, который приводится в этом разделе.

В разд. 9 обсуждаются унитарные представления групп, действующих на деревьях, и C^*-алгебры, ассоциированные с ними (также слегка затронуты алгебры фон Неймана). Кроме того, на одной из этих C^*-алгебр определяется след, который назван рекуррентным (или самоподобным) следом, и описываются некоторые его свойства. При этом используются в основном результаты, полученные в работах [16, 95, 141, 86, 184]. Рекуррентный след обладает дополнительными полезными свойствами в ситуации, когда группа является сильно самоподобной. Для группы промежуточного роста $\mathcal{G}$ приводится явное описание значений следа на элементах группы. Обсуждаются некоторые свойства упомянутых C^*-алгебр. Показывается, что слабо ветвящиеся группы принадлежат классу ICC (infinite conjugacy classes) групп, обладающих бесконечными (нетривиальными) классами сопряженных элементов.

В разд. 10 рассматриваются вопросы, связанные со случайными блужданиями на группах и графах, спектральные свойства дискретного оператора Лапласа (или, что эквивалентно, марковского оператора, связанного со случайным блужданием), а также спектральная мера Кестена и так называемая KNS (Kesten–von Neumann–Serre) спектральная мера, введенная и исследованная в [16, 98]. Примеры самоподобного существенно свободного действия свободной группы ранга 3 и свободного произведения трех копий группы порядка 2 и результаты о рекуррентном следе использованы для построения асимптотических экспандеров. Обсуждаются различные вопросы асимптотики бесконечных графов и бесконечных накрывающих последовательностей конечных графов.

Наконец, в разд. 11 обсуждаются вопросы, связанные с понятием цены действий счетных групп и счетных борелевских отношений эквивалентности, а также градиент ранга бесконечных убывающих последовательностей подгрупп конечного индекса. Этот материал основан на работах Г. Левитта, Д. Габорио, М. Лакенби, М. Аберта и Н. Николова. Обсуждаются вопросы аменабельности и гиперконечности групп и отношений эквивалентности, и приводятся классические результаты, связанные с именами Х. Дая, Я. Фельдмана, К. Мура, А. Конна, Б. Вейса.

Вводятся понятия самоподобного и самовоспроизводящегося отношений эквивалентности, и показывается, что последние являются “дешевыми” в смысле цены.

Эта статья в основном является обзором, подытоживающим некоторое направление исследований, которые проводились в течение последнего десятилетия. Однако в ней сделаны и некоторые новые наблюдения. Кроме того, в статье сформулировано много открытых вопросов. Мы надеемся, что данная работа будет стимулировать дальнейшие исследования в области динамики с чисто точечным спектром, динамики действий на деревьях и в других смежных направлениях математики.

Так как статья предназначается для читателя, работающего в разных областях математики, начиная с алгебраистов и заканчивая специалистами (или новичками) в теории динамических систем, теории операторных алгебр и в дискретной математике, то я во многих местах писал текст значительно подробнее, чем следовало бы, если бы статья предназначалась только для читателя, работающего в одной области. Также я не гнушался иногда напомнить уже введенное ранее понятие или сформулированный результат. Надеюсь, читатель не будет судить меня строго за это.

2. ДЕЙСТВИЯ НА КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЯХ

Пусть $\overline{m} = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, $m_n \geq 2$, — последовательность натуральных чисел (называемая в дальнейшем индексом ветвления), а $T_{\overline{m}}$ — сферически однородное корневое дерево, определенное последовательностью $\overline{m}$. Оно имеет корневую вершину, обозначаемую $\varnothing$, m_1 вершин первого уровня, $m_1 m_2$ вершин второго уровня и вообще $m_1 m_2 \dots m_n$ вершин n-го уровня, $n = 1, 2, \dots$ Каждая вершина уровня n имеет m_{n+1} “наследников”, расположенных на следующем уровне и соединенных ребром с ней. Наглядное представление о корневом дереве дает рис. 2.1. Заметим, что согласно устоявшейся в отечественной математике традиции дерево рисуется сверху вниз.

Нормой вершины u (обозначается $|u|$) называется уровень, которому эта вершина принадлежит. В случае, когда последовательность $\overline{m}$ постоянна, т.е. $m_n = d$ для некоторого $d \geq 2$ и любого n, дерево $T_{\overline{m}}$ называется *регулярным* корневым деревом степени d или d-регулярным деревом и обозначается T_d. В дальнейшем слово *корневое* и индекс ветвления обычно будут опускаться. Автоморфизмом дерева T называется любая биекция на множестве вершин, сохраняющая отношение инцидентности вершин и переводящая корневую вершину в себя. Автоморфизмы дерева образуют группу $\mathrm{Aut}(T)$ относительно операции композиции. Произвольная подгруппа $G \leq \mathrm{Aut}(T)$ может рассматриваться как группа, действующая точно (т.е. каждый неединичный элемент действует нетривиально) на T. Можно рассматривать и конечные деревья, заданные конечной последовательностью $\overline{m}$, и их группы автоморфизмов; в частности, в некоторых рассуждениях, приведенных ниже, могут фигурировать поддеревья бесконечного дерева с вершинами до n-го уровня включительно. В дальнейшем, если не оговорено

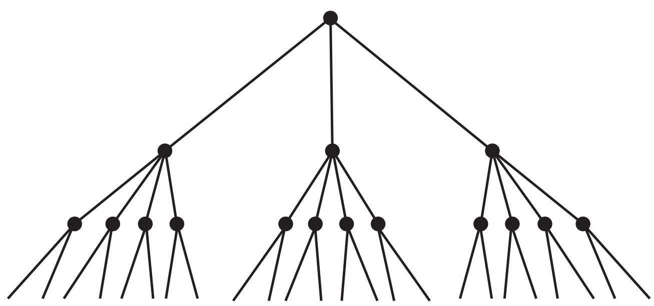

Рис. 2.1. Сферически однородное корневое дерево

противное, речь идет о бесконечных деревьях. Для таких деревьев определено понятие границы ∂T (или пространства концов), которую геометрически можно представлять себе состоящей из геодезических путей в T, соединяющих корневую вершину с бесконечностью. На ∂T вводится естественная топология, в которой два пути тем ближе, чем больше у них совместное начало. Эта топология метризуема естественным образом с помощью произвольной убывающей последовательности $\bar{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел, стремящейся к нулю. Расстояние $\operatorname{dist}_{\bar{\lambda}}(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \partial T$, равно λ_n, если последовательности α, β расходятся на уровне n. Пространство $(\partial T, \operatorname{dist}_{\bar{\lambda}})$ является ультраметрическим пространством, а $\operatorname{Aut}(T)$ служит группой его изометрий, причем описанная метрическая структура, ассоциированная со сферически однородным деревом, является общей моделью однородного ультраметрического пространства, как показано в [87, предложение 6.2]. Если $G < \operatorname{Aut}(T)$ — подгруппа, то пара $(G, \partial T)$ является компактной топологической динамической системой (т.е. группа действует гомеоморфизмами компакта ∂T), которая будет играть важную роль в дальнейшем. Эта система может быть превращена в метрическую динамическую систему добавлением инвариантной вероятностной меры, о чем пойдет речь ниже.

Альтернативно границу можно описать следующим образом. Пусть X_n, $n = 1, 2, \dots,$ — алфавиты мощности $|X_n| = m_n$ с фиксированными порядками на них, где $\overline{m} = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ — индекс ветвления. Множество вершин n-го уровня дерева $T = T_{\overline{m}}$ естественным образом отождествляется с множеством $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, на котором вводится лексикографическое упорядочение. Это упорядочение используется при геометрической реализации дерева на плоскости, а именно вершины на уровне располагаются согласно их порядку. Граница ∂T естественным образом отождествляется с тихоновским произведением $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ множеств X_n, снабженных дискретной топологией. Таким образом, границу можно представлять себе в виде пространства бесконечных последовательностей символов алфавитов X_n (n-й член последовательности принадлежит множеству X_n), снабженного топологией поточечной сходимости. Это описание упрощается в том случае, когда дерево регулярное. Тогда все алфавиты X_n можно считать совпадающими и граница есть пространство бесконечных вправо последовательностей букв этого алфавита. Как топологическое пространство граница ∂T гомеоморфна совершенному множеству Кантора. Естественно, ∂T является метризуемым компактом и, как уже упоминалось, имеется семейство метрик $d_{\bar{\lambda}}$, параметризованных убывающими последовательностями $\bar{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел, стремящихся к нулю. Любая такая метрика является ультраметрикой, инвариантна относительно действия всей группы $\operatorname{Aut}(T)$ и индуцирует тихоновскую топологию на границе.

Для исследования динамики действия на границе уместно ввести в рассмотрение равномерную вероятностную меру ν на границе. Эта мера задана на σ-алгебре борелевских множеств и определяется своими значениями на цилиндрических множествах вида C_u, где u — вершина, а C_u состоит из геодезических путей, соединяющих корневую вершину с бесконечностью и проходящих через u. При этом $\nu(C_u) = 1/(m_1 \ldots m_n)$, если $|u| = n$. Альтернативно меру ν можно определить соотношением $\nu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \nu_n$, где ν_n — равномерная мера на алфавите X_n, если граница представлена в виде $\partial T = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Мера ν инвариантна относительно всей группы автоморфизмов дерева, поэтому она инвариантна и относительно действия любой подгруппы $\operatorname{Aut}(T)$. В случае, когда действие (G, T) сферически транзитивно, других вероятностных инвариантных мер не существует, что вытекает из предложения 4.1 (см. ниже). На протяжении всей работы мы будем сохранять обозначение ν исключительно для этой меры и называть ее *равномерной* мерой на границе дерева.

Обозначим через τ сдвиг в пространстве бесконечных вправо последовательностей, служащих индексом ветвления (т.е. применение τ к последовательности означает удаление ее первого члена). Дерево $T_{\overline{m}}$ состоит из m_1 копий дерева $T_{\tau(\overline{m})}$, соединенных ребрами с корневой вершиной. Соответственно этому группа $\operatorname{Aut}(T)$ изоморфна полупрямому произведению

$$\big(\mathrm{Aut}(T_{\tau(\overline{m})}) \times \ldots \times \mathrm{Aut}(T_{\tau(\overline{m})})\big) \rtimes \mathrm{Sym}(m_1) \tag{2.1}$$

произведения m_1 копий группы автоморфизмов поддерева $T_{\tau(\overline{m})}$ и симметрической группы $\mathrm{Sym}(m_1)$, действующей на этом произведении перестановками множителей. Это полупрямое произведение часто называется подстановочным сплетением и у нас будет обозначаться $\mathrm{Aut}(T_{\tau(\overline{m})}) \wr_{\mathrm{perm}} \mathrm{Sym}(m_1)$. Произвольный автоморфизм $g \in \mathrm{Aut}(T_{\overline{m}})$ можно представить в виде

$$g = (g_1, \ldots, g_{m_1})\sigma, \tag{2.2}$$

где $\sigma \in \mathrm{Sym}(m_1)$, а $g_i \in \mathrm{Aut}(T_{\tau(\overline{m})})$, $i = 1, \ldots, m_1$. При этом элементы g_i называются сечениями (или проекциями) элемента g первого уровня. По индукции относительно уровня определяется сечение g_u элемента g в произвольной вершине u. Через T_u будем обозначать (полное) поддерево дерева T с началом в вершине u, которая служит корнем поддерева. Всюду в этой работе мы будем пользоваться следующими обозначениями: $x^y = y^{-1}xy$, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Определение 2.1. Пусть G — группа, действующая автоморфизмами на корневом дереве T, u — вершина этого дерева и T_u — поддерево с корневой вершиной u.

(а) *Стабилизатором вершины u* называется подгруппа $\mathrm{st}_G(u) = \{g \in G \colon g(u) = u\}$.

(б) *Стабилизатор n-го уровня* $\mathrm{st}_G(n)$ определяется как пересечение стабилизаторов всех вершин этого уровня (т.е. является подгруппой, состоящей из элементов, фиксирующих все вершины n-го уровня).

(в) *Жесткий стабилизатор вершины u* есть подгруппа $\mathrm{rist}_G(u)$ в G, состоящая из автоморфизмов $g \in G$, действующих тривиально на дополнении к поддереву T_u.

(г) *Жесткий стабилизатор n-го уровня* $\mathrm{rist}_G(n)$ есть подгруппа в G, порожденная жесткими стабилизаторами всех вершин n-го уровня.

Так как жесткие стабилизаторы вершин одного уровня коммутируют друг с другом, то жесткий стабилизатор n-го уровня $\mathrm{rist}_G(n)$ является (внутренним) прямым произведением жестких стабилизаторов вершин n-го уровня:

$$\mathrm{rist}_G(n) = \langle \mathrm{rist}_G(v) \colon |v| = n \rangle = \prod_{v \colon |v| = n} \mathrm{rist}_G(v). \tag{2.3}$$

Заметим, что стабилизатор вершины является подгруппой конечного индекса, стабилизатор уровня есть нормальная подгруппа конечного индекса, жесткий стабилизатор уровня является нормальной подгруппой, а жесткий стабилизатор вершины является субнормальной подгруппой степени 1 (а именно нормальной подгруппой в $\mathrm{st}_G(n)$, n — уровень вершины). Жесткие стабилизаторы вершины или уровня могут быть тривиальны в отличие от стабилизаторов вершин или уровней, которые всегда имеют конечный индекс и, следовательно, нетривиальны, если группа бесконечна и действует точно. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только действия групп автоморфизмами на корневых деревьях и индуцированные ими действия на границе дерева.

Определение 2.2. (а) Действие группы G на сферически однородном дереве T (в дальнейшем обозначаемое (G, T)) называется *сферически транзитивным*, если оно транзитивно на каждом уровне дерева.

(б) Действие (G, T) имеет *ветвящийся* тип, если оно сферически транзитивно и для произвольного $n \geq 1$ жесткий стабилизатор $\mathrm{rist}_G(n)$ имеет конечный индекс в G.

(в) Действие (G, T) имеет *слабо ветвящийся* тип, если оно сферически транзитивно и для любого n жесткий стабилизатор $\mathrm{rist}_G(n)$ бесконечен (эквивалентно, для любой вершины дерева v жесткий стабилизатор $\mathrm{rist}_G(v)$ нетривиален).

(г) Действие (G,T) имеет *слабо неветвящийся* тип, если начиная с некоторого уровня жесткие стабилизаторы тривиальны.

(д) Действие (G,T) имеет *неветвящийся* тип, если жесткие стабилизаторы всех уровней тривиальны.

(е) Действие (G,T) имеет *диагональный* тип, если для любого n и произвольного $g \in \mathrm{st}_G(n)$ из того, что хотя бы одно сечение g_v в вершине v n-го уровня равно единичному элементу, следует, что все остальные сечения в вершинах n-го уровня также равны единичному элементу (т.е. элемент g единичен).

(ж) Действие группы называется *локально тривиальным*, если существует вершина v такая, что $\mathrm{st}_G(v)$ действует тривиально на поддереве T_v с корнем в вершине v. Если такой вершины не существует, то действие называется *локально нетривиальным*.

Замечание 2.1. В случае бинарного дерева и действия самоподобной группы (самоподобные группы будут определены в следующем разделе) на нем действие локально нетривиально в том и только том случае, если жесткий стабилизатор первого уровня $\mathrm{rist}_G(1)$ тривиален.

В некоторых работах в определении ветвящегося и слабо ветвящегося действия условие сферической транзитивности опускается. Однако мы будем придерживаться нашего (оригинального) определения. Чуть ниже мы докажем эквивалентность определения ветвящегося и слабо ветвящегося действия определению 1.1.

Очевидно, уровни дерева инвариантны относительно произвольного автоморфизма, сохраняющего корневую вершину, поэтому сферическая транзитивность — это максимум того, что можно иметь в направлении транзитивности для действий на корневых деревьях. В этом случае группа, действуя на себе сопряжениями, транзитивно переставляет стабилизаторы (соответственно жесткие стабилизаторы) вершин на каждом уровне. Поэтому если действие сферически транзитивно, то в (2.3) фигурирует произведение изоморфных групп.

В разд. 4 мы обсудим топологически свободные и существенно свободные действия на границе дерева. Очевидно, что топологическая свобода или существенная свобода влекут не слабо ветвящийся тип действия. Обратное неверно, что вытекает, например, из результатов работ [12, 40].

Следующее утверждение полезно при проверке транзитивности действия на уровнях.

Предложение 2.1. *Пусть $G \le \mathrm{Aut}(T)$. Тогда G действует транзитивно на уровнях в том и только том случае, если*

а) *G действует транзитивно на первом уровне дерева и для некоторой вершины u первого уровня стабилизатор $\mathrm{st}_G(u)$ действует транзитивно на уровнях поддерева T_u;*

б) *для любого $n \ge 1$ группа G действует транзитивно на n-м уровне дерева и для некоторой вершины v, $|v| = n$, стабилизатор $\mathrm{st}_G(v)$ действует транзитивно на поддереве T_v.*

Доказательство почти очевидно. За деталями отсылаем к [80, Lemma A].

Определение 2.3. (а) Группа G называется *ветвящейся*, если она обладает точным *сферически транзитивным* действием ветвящегося типа.

(б) G называется *слабо ветвящейся*, если она обладает точным *сферически транзитивным* действием слабо ветвящегося типа.

Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(T)$ является примером ветвящейся группы, так как жесткий стабилизатор любой вершины u совпадает с $\mathrm{Aut}(T_u)$. Однако эта группа не является конечно порожденной даже как топологическая группа, так как абелианизация этой группы есть элементарная 2-группа бесконечного ранга (ниже будет обсуждаться структура проконечной группы на $\mathrm{Aut}(T)$). Вскоре мы приведем примеры конечно порожденных групп ветвящегося типа, основным из которых будет группа $\mathcal{G} = \langle a, b, c, d\rangle$, порожденная четырьмя преобразованиями отрезка $[0, 1]$, сохраняющими лебегову меру (пример 2.3). Там же будет отмечено еще одно экстремальное свойство несвободы действия, перекликающееся с определением 1.10 действия конечного типа из работы А.Е. Залесского [196].

Класс ветвящихся групп важен тем, что ветвящиеся группы составляют один из трех подклассов, на которые естественным образом распадается класс минимально бесконечных групп (т.е. бесконечных групп, всякая собственная фактор-группа которых конечна). Более подробно об этом будет написано ниже. Понятие слабо ветвящейся группы родилось на основе обобщения понятия ветвящейся группы, так как оказалось, что ряд утверждений об общих свойствах ветвящихся групп можно доказать при более общем предположении слабой ветвистости. Примерами таких утверждений являются теорема Аберта об отсутствии нетривиальных тождеств у слабо ветвящихся групп [1] и утверждение об отсутствии у них точных конечномерных представлений, установленное Дельзантом и автором (как отмечено в Абертом в работе 2006 г.).

А.М. Вершиком в [184] введено понятие *экстремально* несвободного действия, одним из вариантов определения которого есть попарное различие стабилизаторов точек подмножества полной меры пространства, на котором группа действует. Из следующего утверждения мгновенно вытекает, что слабо ветвящиеся действия являются экстремально несвободными.

Предложение 2.2. *Пусть G — группа, действующая на дереве T слабо ветвящимся образом. Тогда для любых двух различных точек ζ, η границы ∂T стабилизаторы $\mathrm{st}_G(\zeta)$, $\mathrm{st}_G(\eta)$ различны.*

Доказательство. Воспользуемся следующей леммой, впервые доказанной в [17].

Лемма 2.3. *Пусть G — группа, действующая на корневом дереве T слабо ветвящимся образом, u — некоторая вершина дерева, а ξ — точка границы, проходящая через u. Тогда орбита точки ξ под действием группы $\mathrm{rist}_G(u)$ бесконечна.*

Доказательство. Так как $\mathrm{rist}_G(u)$ — нетривиальная подгруппа, то она действует нетривиально на некоторую вершину v, расположенную под u. Пусть $g(v) = w$, $w \neq v$, $g \in \mathrm{rist}_G(u)$, и пусть u' — вершина, принадлежащая пути ξ и тому же уровню, что и вершина v. Согласно предложению 2.1 стабилизатор $\mathrm{st}_G(u)$ действует транзитивно на поддереве T_u. Пусть $h \in \mathrm{st}_G(u)$, $h(u') = v$. Тогда $g^h(u') \neq u'$ и $g^h \in \mathrm{rist}_G(u)$. Таким образом, орбита $\mathrm{rist}_G(u)(\xi)$ состоит по крайней мере из двух точек. Применяя аналогичное рассуждение к вершине u' и ее образам под воздействием $\mathrm{rist}_G(u)$, найдем под каждой из этих вершин по крайней мере пару вершин, принадлежащих $\mathrm{rist}_G(u)$-орбите точки ξ; таким образом, $\mathrm{rist}_G(u)(\xi)$ состоит по крайней мере из четырех точек. Продолжив это рассуждение по индукции, придем к желаемому заключению. $\square$

Пусть v — вершина, принадлежащая η, но не принадлежащая ζ. Тогда $\mathrm{st}_G(\eta)$ содержит $\mathrm{rist}_G(v)$. В то же время, как вытекает из леммы 2.3 и того факта, что G — слабо ветвящаяся группа, $\mathrm{rist}_G(v)$-орбита точки η бесконечна, поэтому $\mathrm{st}_G(\zeta) \neq \mathrm{st}_G(\eta)$. $\square$

В работе А.М. Вершика [184] также введено понятие *вполне несвободного* действия, под которым понимается действие (G, X, B, μ) группы G на пространстве Лебега (X, B, μ) с непрерывной мерой, у которого сигма-алгебра множеств, порожденная множествами неподвижных точек элементов группы, совпадает со всей сигма-алгеброй B. В общем случае вполне несвободные действия составляют более узкий класс действий, нежели экстремально несвободные действия (это становится очевидным, если воспользоваться определением экстремальности действия в терминах мономорфности определенного в [184] отображения Ψ_G). Однако для счетных групп эти два понятия совпадают.

Оказывается, что слабо ветвящиеся действия удовлетворяют и этому более ограничительному условию, что доказывается применением той же леммы 2.3. Было бы интересно выяснить, какие действия неветвящегося типа принадлежат классу вполне несвободных действий.

Теорема 2.4. *Пусть действие* (G, X, μ) *группы* G *принадлежит слабо ветвящемуся типу. Тогда оно вполне несвободно.*

Доказательство. В силу доказанного ниже следствия 2.7 можно считать, что действие задано на границе дерева T, т.е. речь идет о системе вида $(G, \partial T, \nu)$. Докажем, что для произвольной вершины v цилиндрическое множество C_v принадлежит сигма-алгебре множеств, порожденной множествами неподвижных точек элементов группы. Для произвольного элемента $g \in \mathrm{rist}_G(v)$ множество $\mathrm{Fix}(g)$ неподвижных точек содержит дополнение C_v^{c} к этому множеству (очевидно, этого достаточно для доказательства утверждения). Мы утверждаем, что

$$C_v = \bigcup_{g \in \mathrm{rist}_G(v)} \mathrm{Fix}^{\mathrm{c}}(g). \tag{2.4}$$

Действительно, включение $C_v \supseteq \bigcup_{g \in G} \mathrm{Fix}^{\mathrm{c}}(g)$ очевидно. Предположим, что дополнение $U_v = C_v \setminus \bigcup_{g \in \mathrm{rist}_G(v)} \mathrm{Fix}^{\mathrm{c}}(g)$ непусто, и пусть $\xi \in U_v$. Путь ξ, очевидно, проходит через вершину v и то, что $\xi \in U_v$, означает, что $\xi \in \mathrm{Fix}(g)$ для любого $g \in \mathrm{rist}_G(v)$. Однако это противоречит лемме 2.3. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть действие* $(G, \partial T)$ *счетной группы* G *на границе корневого дерева принадлежит слабо ветвящемуся типу. Тогда оно вполне несвободно (в топологическом смысле).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4, и мы его опускаем.

Слабо ветвящиеся действия по сути дела фигурируют в теореме 3 работы М. Рубина [162], в которой приведены достаточные условия, при которых топологическое пространство восстанавливается по своей группе гомеоморфизмов.

Теперь мы докажем эквивалентность двух определений ветвящейся группы.

Теорема 2.6. (а) *Определение* 1.1 *ветвящейся группы эквивалентно определению* 2.3(а).

(б) *Аналогично обстоит дело с определением слабо ветвящейся группы.*

Доказательство. Докажем более трудную часть (а) утверждения теоремы. Пусть ветвящаяся группа G действует точно и ветвящимся образом на сферически однородном дереве T. Тогда система $(G, \partial T, \nu)$ удовлетворяет условиям определения 1.1, если взять в качестве ξ_n разбиение на цилиндрические множества C_v, отвечающие вершинам n-го уровня. Действительно, так как G — ветвящаяся группа, то для любого n жесткий стабилизатор $\mathrm{rist}_G(n)$ имеет конечный индекс в G, а значит, и в $\mathrm{st}_G(n)$. Имеем цепочку вложенных подгрупп конечного индекса

$$\mathrm{rist}_G(n) < \mathrm{st}_G(n) < \mathrm{st}_G(v), \tag{2.5}$$

где v — произвольная вершина n-го уровня. Сужение $\mathrm{rist}_G(n)|_{T_v}$ на поддерево T_v совпадает с сужением $\mathrm{rist}_G(v)|_{T_v}$ (а соответствующий гомоморфизм сужения $\rho_v\colon \mathrm{rist}_G(v) \to \mathrm{rist}_G(v)|_{T_v}$, $g \to g_v$ является изоморфизмом). Отсюда следует, что действие $(G, \partial T, \nu)$ принадлежит ветвящемуся типу согласно определению 1.1.

Наоборот, если группа G задана действием (G, X, μ), удовлетворяющим условиям определения 1.1, то построим сферически однородное дерево T, вершины которого находятся в биекции с атомами разбиения ξ_n (корневой вершине отвечает тривиальное разбиение, состоящее из одного атома — всего пространства X) и две вершины $A \in \xi_n$ и $B \in \xi_{n+1}$ соединены ребром, если $B \subset A$. Действие группы на множестве атомов разбиения ξ_n индуцирует действие на множестве вершин n-го уровня, и эти действия согласованы таким образом, что получается точное сферически транзитивное действие G на построенном дереве (в силу того что последовательность разбиений ξ_n стремится к разбиению на точки). При этом имеет место изоморфизм $(G,X,\mu)\simeq(G,\partial T,\nu)$. То, что для любого атома A жесткий стабилизатор $\mathrm{rist}_G(A)$ имеет конечный индекс в $\mathrm{st}_G(A)|_{T_v}$, влечет, что в (2.5) первые две подгруппы имеют конечный индекс в $\mathrm{st}_G(v)$, а значит, и в G. Таким образом, G — ветвящаяся группа в смысле определения 2.3(a). $\square$

В ходе доказательства предыдущей теоремы мы попутно доказали

Следствие 2.7. *Произвольное действие (G,X,μ) слабо ветвящегося типа изоморфно действию вида $(G,\partial T,\nu)$ для подходящего сферически транзитивного дерева T.*

Способ задания групп рекуррентными соотношениями, который мы используем в приведенных ниже примерах групп и их действий на регулярном (а именно на бинарном) дереве, будет применяться повсеместно в этой работе. Он соответствует представлению элемента в виде (2.2), однако при этом используется свойство самоподобия регулярного дерева, позволяющее отождествлять сечения (действующие на поддеревьях) с автоморфизмами всего дерева. В следующем разделе мы дадим интерпретацию этого способа задания групп на языке автоматов и определим класс самоподобных групп. Все приведенные ниже примеры являются самоподобными группами. При их обсуждении мы иногда упоминаем свойства, которые будут определены только в следующих разделах. Читатель может пропустить соответствующие места и вернуться к ним позже или, наоборот, заглянуть в разд. 3 и 4, где эти понятия определены.

Пример 2.1 (бесконечная циклическая группа $\mathbb{Z}$, порожденная одометром, или диадическим сдвигом)**.** Определим автоморфизм α бинарного дерева рекуррентными соотношениями на множестве вершин, представленных двоичными бинарными последовательностями:

$$\alpha(0w)=1w,\qquad \alpha(1w)=0\alpha(w), \tag{2.6}$$

$w\in\{0,1\}^*$. Здесь $\{0,1\}^*$ обозначает множество конечных последовательностей (будем также употреблять термин *слов*) над алфавитом $\{0,1\}$. Заметим, что в рекуррентных соотношениях, задающих данный автоморфизм (а также другие рассмотренные ниже автоморфизмы, заданные рекуррентными соотношениями), последовательность w можно также считать пробегающей множество бесконечных вправо последовательностей алфавита $\{0,1\}$ (т.е. множество точек границы ∂T).

Группа $\mathbb{Z}$ представлена в этом примере как группа, порожденная автоморфизмом α, который в англоязычной литературе принято называть “adding machine” (а в отечественной переводить как диадический одометр или диадический сдвиг), ввиду того что при естественном отождествлении бесконечных двоичных последовательностей с соответствующими целыми 2-адическими числами преобразование α превращается в операцию прибавления единицы. Преобразование одометра определено также для произвольного конечного алфавита мощности ≥ 2. Очевидно, что приведенное действие $\mathbb{Z}$ топологически и существенно свободно.

Следующий пример будет одним из основных для иллюстрации существенно свободных действий.

Пример 2.2 (группа мигающих лампочек, или группа динамических конфигураций в терминологии А.М. Вершика и В. Каймановича, $\mathcal{L}$)**.** Это хорошо известная в теории групп двуступенно разрешимая (т.е. метабелева) группа, заданная как полупрямое произведение

$$\Bigl(\bigoplus_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_2\Bigr)\rtimes\mathbb{Z} \tag{2.7}$$

($\mathbb{Z}_2$ — группа второго порядка), в котором образующий активного множителя $\mathbb{Z}$ действует на прямой сумме сдвигом вправо на один шаг; другими словами, $\mathcal{L}$ изоморфна сплетению $\mathbb{Z}_2\wr\mathbb{Z}$.

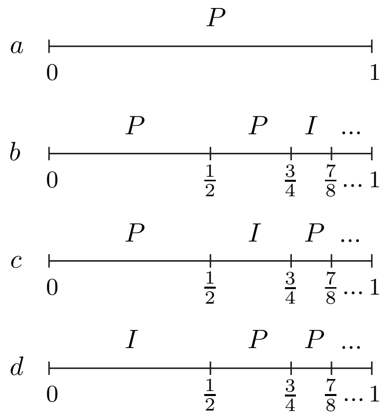

Рис. 2.2. Преобразования отрезка, порождающие группу $\mathcal{G}$

Это бесконечно представленная группа экспоненциального роста, играющая сейчас важную роль в геометрической теории групп (см., например, [100, 137]). Значение этой группы и ее многомерных аналогов для теории случайных блужданий было продемонстрировано А.М. Вершиком и В. Каймановичем в [111], которые называли эту группу группой динамических конфигураций. В западной литературе она называется *lamplighter*, поэтому в этой работе будем использовать для нее более короткое название *лэмплайтер*. В [95] лэмплайтер реализован как самоподобная группа, порожденная автоматом с двумя состояниями над алфавитом $\{0,1\}$. А именно: $\mathcal{L}$ изоморфна группе, порожденной двумя автоморфизмами a, b бинарного дерева, заданными рекуррентными соотношениями

$$a(0w) = 1a(w), \qquad a(1w) = 0a(w), \qquad b(0w) = 0a(w), \qquad b(1w) = 1b(w), \tag{2.8}$$

$w \in \{0,1\}^*$, или автоматом, определенным диаграммой Мура, приведенной на рис. 3.1, который размещен в разд. 3, где мы обсуждаем такие диаграммы.

Реализация лэмплайтера как самоподобной группы позволила в [95] вычислить спектральную меру марковского оператора на $\mathcal{L}$ (спектральные меры обсуждаются в разд. 10), что в свою очередь в [84] позволило дать ответ на вопрос Атьи из [10] о существовании компактных многообразий с нецелым l^2-числом Бетти. Для нашей работы этот пример важен тем, что действие существенно свободно (что сыграло важную роль при вычислении спектральной меры в [95]). Это по сути дела первый нетривиальный пример существенно свободного действия на корневом дереве.

Пример 2.3 (ветвящаяся периодическая группа промежуточного роста)**.** Эта группа была впервые рассмотрена в [70] как простой пример бесконечной конечно порожденной 2-группы и в дальнейшем исследовалась во многих работах, включая [78, 71, 80, 72, 90].

Определим четыре автоморфизма a, b, c, d бинарного дерева рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} &a(0w) = 1w, \qquad b(0w) = 0a(w), \qquad c(0w) = 0a(w), \qquad d(0w) = 0w, \\ &a(1w) = 0w, \qquad b(1w) = 1c(w), \qquad c(1w) = 0d(w), \qquad d(1w) = 1b(w), \end{aligned} \tag{2.9}$$

$w \in \{0,1\}^*$, и обозначим через $\mathcal{G}$ порожденную ими группу. Изначально эта группа была определена как группа, порожденная четырьмя преобразованиями a, b, c, d (мы намеренно не меняем обозначения образующих, так как новые образующие соответствуют старым при естественном изоморфизме, возникающем при отождествлении двоично иррациональных точек отрезка и соответствующих им бинарных последовательностей) отрезка $[0,1]$, из которого удалены двоично рациональные точки. Эти преобразования определены на рис. 2.2, причем

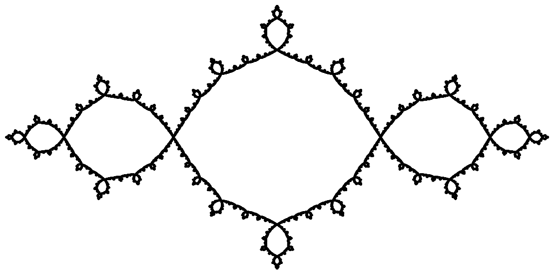

Рис. 2.3. Множество Жюлиа полинома $z^2 - 1$

буква P, написанная над интервалом, означает перекладывание двух половинок интервала, а буква I означает тождественное преобразование.

Группа $\mathcal{G}$ является ветвящейся, периодической (т.е. каждый элемент $g \in \mathcal{G}$ имеет конечный порядок, причем в данном случае порядок имеет вид 2^n, $n = n(g)$), и, кроме того, $\mathcal{G}$ имеет промежуточный рост между полиномиальным и экспоненциальным. Другими словами, если обозначить через $\gamma(n)$ функцию роста $\mathcal{G}$, т.е. число элементов, представимых произведениями не более чем n порождающих, то эта функция растет быстрее любого полинома, но медленнее любой экспоненты $(\lambda)^n$, $\lambda > 1$ [71, 72]. $\mathcal{G}$ действует на дереве ветвящимся образом и, таким образом, является ветвящейся группой [80].

Отметим еще одно экстремальное свойство несвободы действия, а именно: из определения группы $\mathcal{G}$ легко видеть, что все пространство последовательностей $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ является объединением множеств неподвижных точек порождающих b, c и d. В [196, Definition 1.10] действие группы на множестве Y названо действием конечного типа, если Y является объединением множеств неподвижных точек конечного набора неединичных элементов группы. В нашем примере множество, на котором действует группа (а именно Ω), континуально, однако легко построить действие $\mathcal{G}$ на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, которое будет моделировать действие $(\mathcal{G}, \Omega)$ и по-прежнему $\mathbb{Z}$ будет объединением множеств неподвижных точек порождающих b, c, d. Для этого надо имитировать структуру бинарного дерева путем разбиения $\mathbb{Z}$ на классы смежности по подгруппам $2^n\mathbb{Z}$, $n = 1, 2, \dots$, и построить действие $\mathcal{G}$ на $\mathbb{Z}$, имитирующее действие $\mathcal{G}$ на бинарном дереве. (Например, a действует перестановкой соседних четного и нечетного чисел $2i$ и $2i+1$, $i \in \mathbb{Z}$, b действует на четных числах, как a действует на $\mathbb{Z}$ (путем отождествления $2i$ с i), а на нечетных, как c, и т.д.)

Пример 2.4. Группа $\mathcal{B} = \langle a, b \rangle$, называемая “базиликой”, определена соотношениями

$$a(0w) = 0w, \qquad a(1w) = 1b(w), \qquad b(0w) = 1w, \qquad b(1w) = 0a(w), \tag{2.10}$$

где $w \in \{0,1\}^*$.

Действие $\mathcal{B}$ на бинарном дереве принадлежит слабо ветвящемуся типу. Группа $\mathcal{B}$ является слабо ветвящейся, но не ветвящейся, так как у нее существуют не почти абелевы факторы (а у ветвящейся группы любая истинная фактор-группа почти абелева [80]). Свое название группа получила из-за схожести граничного пространства (указанного на рис. 2.3) ассоциированных с $\mathcal{B}$ графов Шрейера с отражением в воде базилики Сан-Марко в Венеции. Это одна из наиболее известных самоподобных групп ввиду того факта, что она изоморфна группе итерированной монодромии квадратичного полинома $x^2 - 1$. Теории групп итерированной монодромии и их связи с самоподобными группами посвящена монография В. Некрашевича [142], который в основном и развил эту теорию.

Пример 2.5 (группа Баумслага–Солитера)**.** Группа Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(1,3) = \langle x, y\colon x^{-1}yx = y^3 \rangle$ — это один из представителей одной из самых популярных в комбинаторной теории групп серий групп $\mathrm{BS}(1,n) = \langle x, y\colon x^{-1}yx = y^n \rangle$. Отображение $x \to b$, $y \to b^{-1}a$

устанавливает изоморфизм между $\mathrm{BS}(1,3)$ и группой, порожденной тремя автоморфизмами бинарного дерева, заданными рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} &a(0w) = 1c(w), \qquad b(0w) = 0a(w), \qquad c(0w) = 0b(w),\\ &a(1w) = 0b(w), \qquad b(1w) = 1c(w), \qquad c(1w) = 1a(w). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Как показано в [22], разрешимые группы Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(1,n)$ представимы как самоподобные группы при любом целом n, причем $\mathrm{BS}(1,3)$ может быть задана как самоподобная группа существенно другим способом по сравнению с приведенным (более подробно об этом см. в разд. 4).

Все приведенные выше группы являются самовоспроизводящимися (см. определение в следующем разделе). Приведем пример несамовоспроизводящегося действия.

Пример 2.6 (свободная группа F_3 ранга 3)**.** Соотношения

$$\begin{aligned} &a(0w) = 0b(w), \qquad b(0w) = 1a(w), \qquad c(0w) = 1c(w),\\ &a(1w) = 1b(w), \qquad b(1w) = 0c(w), \qquad c(1w) = 0a(w) \end{aligned} \tag{2.12}$$

задают группу, изоморфную F_3, что было высказано в виде гипотезы С. Сидки, а доказано Ярославом и Марией Воробец [186]. Действие является транзитивным на уровнях и существенно свободным, что вытекает из сформулированных ниже результатов (например, предложения 4.11 или предложения 4.12 вместе со следствием 9.8). Однако оно не самовоспроизводящееся, что легко проверяется вычислением образующих стабилизатора первого уровня и проектированием их на левое поддерево T_0 бинарного дерева T.

Пример 2.7 (группа $C_2 * C_2 * C_2$)**.** Группа $C_2 * C_2 * C_2$ (C_2 — группа порядка 2) может быть реализована автоматом Беллатерра, имеющим номер 846 в атласе самоподобных групп [35]. Этот автомат получил свое название благодаря местности (в окрестностях Барселоны, Испания), где он был идентифицирован моими студентами Е. Мунтяном и Д. Савчуком как автомат, порождающий указанное свободное произведение (соответствующее доказательство можно найти, например, в [142, Theorem 1.10.3]). Порождающие связаны между собой рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} &a(0w) = 0c(w), \qquad b(0w) = 0b(w), \qquad c(0w) = 1a(w),\\ &a(1w) = 1b(w), \qquad b(1w) = 1c(w), \qquad c(1w) = 0a(w). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Класс групп, действующих точно на корневых деревьях, совпадает с классом финитно аппроксимируемых групп, т.е. групп, у которых для произвольного неединичного элемента найдется гомоморфизм в конечную группу, отделяющий образ этого элемента от единичного. Действительно, если группа G действует точно на дереве T, то она аппроксимируется последовательностью конечных групп $G/\mathrm{st}_G(n)$, $n \geq 1$. Обратная импликация вытекает из следующего утверждения.

Предложение 2.8. *Каждая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа обладает точным сферически транзитивным действием неветвящегося типа на некотором сферически однородном корневом дереве. Более точно, справедливо следующее.*

(i) *Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$, $H_1 = G$, — убывающая последовательность подгрупп конечного индекса в группе G с тривиальным ядром (т.е. единственная нормальная подгруппа, содержащаяся в пересечении $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, тривиальна). Пусть $m_n = [H_n : H_{n+1}]$ — последовательность значений индексов подгрупп. Тогда существуют корневое дерево $T_{\overline{m}}$ с индексом ветвления $\overline{m} = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ и определяемое каноническим образом точное действие группы G на нем.*

(ii) *Если* $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность нормальных подгрупп, то конструкция действия из* (i) *приводит к неветвящемуся действию. Более того, в этом случае стабилизатор любой вершины совпадает со стабилизатором уровня, которому вершина принадлежит.*

Доказательство. (i) Построим корневое дерево T, вершинами n-го уровня которого будут левые классы смежности по n-й подгруппе, причем вершины gH_n и fH_{n+1} соединены ребром, если $gH_n \supset fH_{n+1}$. Действие группы G на этом множестве умножением слева индуцирует действие на множестве вершин дерева T, причем это действие сохраняет инцидентность вершин и является точным в силу тривиальности ядра последовательности. При этом H_n является стабилизатором вершины H_n, а $\bigcap_{g\in G} H_n^g$ — стабилизатором n-го уровня. Очевидно также, что действие транзитивно на уровнях.

Теперь докажем (ii). Заметим сначала, что, заменяя каждый член последовательности на пересечение его сопряжений всеми элементами группы G (их имеется только конечное число), можно добиться, чтобы последовательность из (i) состояла из нормальных подгрупп (напомним, что финитно аппроксимируемая группа всегда обладает убывающей последовательностью нормальных подгрупп конечного индекса с тривиальным пересечением). Если H_n — нормальные подгруппы, то $H_n = \mathrm{st}_G(n)$ в предыдущей конструкции.

Построенное в (i) действие имеет неветвящийся тип. Действительно, в силу транзитивности действия на уровнях достаточно показать, что для любого $n \geq 1$ жесткий стабилизатор некоторой вершины уровня n тривиален. В качестве вершины n-го уровня выберем $v_n = 1\cdot H_n$, и пусть $g \in G$, $g \notin H_n$. Предположим, что $1 \neq f \in \mathrm{st}_G(v_n)$, т.е. $f \in H_n$. Тогда $fgH_n = gH_n$ для любого $g \in G$ и, таким образом, $f \in \mathrm{st}_G(n)$, т.е. стабилизатор вершины совпадает со стабилизатором ее уровня. Предположим, что жесткий стабилизатор $\mathrm{rist}_G(u)$ некоторой вершины $u = gH_n$ n-го уровня нетривиален, $1 \neq f \in \mathrm{rist}_G(u)$ и элемент $h \in G$ удовлетворяет $hH_n \neq gH_n$. Тогда для любого k, $k \geq n$, вершина hH_k (лежащая под hH_n) является неподвижной для f, а значит, $f \in \mathrm{st}_G(k)$, и так как это имеет место для любого $k \geq n$, а пересечение стабилизаторов тривиально, то приходим к противоречию. $\square$

Определение 2.4. Дерево, построенное при доказательстве этой теоремы, будем называть *деревом классов смежности.*

Итак, всякая финитно аппроксимируемая группа обладает неветвящимся действием. В то же время далеко не всякая финитно аппроксимируемая группа обладает ветвящимся (или даже слабо ветвящимся) действием, так как это предполагает наличие нетривиальных коммутационных соотношений.

В этой работе мы рассматриваем в основном действия абстрактных групп. Однако излагаемый круг вопросов имеет также смысл и значение для теории проконечных групп (т.е. компактных вполне несвязных топологических групп или, что то же самое, проективных пределов конечных групп) и мы иногда будем вкратце обсуждать некоторые вопросы, связанные с проконечными группами (с теорией которых можно познакомиться, например, по книгам [54, 192]).

Если дерево T бесконечно, то $\mathrm{Aut}(T)$ естественным образом является бесконечной проконечной группой, а именно проективным пределом последовательности $\{\mathrm{Aut}(T_{[n]})\}_{n=1}^{\infty}$, где $T_{[n]}$ — поддерево, определяемое вершинами до n-го уровня включительно. При этом топология задается системой окрестностей $\mathrm{st}(n)$, $n \geq 1$, состоящей из стабилизаторов уровней. Два автоморфизма близки в этой топологии, если их действия совпадают до n-го уровня включительно, n велико. Эта топология метризуема, и $\mathrm{Aut}(T)$ обладает счетной базой открытых множеств. Последовательность $\{\mathrm{st}(n)\}_{n\geq 1}$ называется *принципиальной конгруэнц-последовательностью.*

В теории действий на корневых деревьях и различных вопросах ее приложений представляет интерес изучение замкнутых подгрупп проконечной группы $\mathrm{Aut}(T)$ в связи с тем, что каждая проконечная группа со счетной базой открытых множеств вкладывается в $\mathrm{Aut}(T)$ при подходящем выборе дерева T, а также в связи с тем, что очень часто свойства абстрактной самоподобной группы связаны со свойствами ее замыкания в $\mathrm{Aut}(T)$. Для проконечных групп аналогичным образом можно ввести понятия ветвящейся группы и самоподобной группы и рассматривать типы действий, определенные выше для абстрактных групп (определение 2.2). Эти вопросы обсуждаются, в частности, в [3, 79, 80, 82, 153, 6, 1, 13] и других работах.

Одним из эффективных способов исследования абстрактной группы G являются сопоставление группе ее проконечного пополнения $\widehat{G}$ и изучение свойств этого пополнения, а также динамики действия G на $\widehat{G}$ левыми сдвигами. Это действие рассматривается как динамическая система с инвариантной мерой (мерой Хаара). В случае, когда для пары (G,T) выполнено конгруэнц-свойство относительно принципиальной последовательности подгрупп $\mathrm{st}_G(n)$, $n=1,2,\dots$, проконечное пополнение $\widehat{G}$ изоморфно замыканию $\overline{G}$ в $\mathrm{Aut}(T)$. В случае транзитивности действия на уровнях действие G на границе дерева изоморфно действию G на однородном пространстве $\overline{G}/P$, где подгруппа P является стабилизатором точки на границе (выбор точки не играет роли). Было бы интересно выяснить, какие точные действия с чисто точечным спектром финитно аппроксимируемой группы изоморфны действиям сдвигами на однородном пространстве проконечного пополнения. По крайней мере имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.9. *Пусть (G,X,μ) — динамическая система с чисто точечным спектром, причем G — счетная группа, действующая точно на X сохраняющими вероятностную меру μ преобразованиями, и система (G,X,μ) изоморфна системе $(G',K/P,\lambda)$, где K — проконечная группа, а G' — группа, изоморфная G относительно изоморфизма $\varphi\colon G\to G'$ (один из упоминавшихся во введении случаев теоремы Макки* [131]*). Тогда существуют сферически однородное корневое дерево T и вложение $\phi\colon G\to \mathrm{Aut}(T)$ такие, что имеет место изоморфизм динамических систем*

$$(G,X,\mu)\simeq(\varphi(G),K/P,\lambda)\simeq(\phi(G),\partial T,\nu),$$

где ν — равномерная мера на границе дерева.

Доказательство. Так как группа счетна, то проконечная группа K имеет счетную базу открытых множеств и всякая замкнутая подгруппа является пересечением последовательности открытых подгрупп (см., например, [192, Proposition 0.3.3]). В частности, подгруппа P может быть представлена в виде $P=\bigcap_{n=1}^{\infty}P_n$, где $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность открытых подгрупп. Построим по этой последовательности дерево классов смежности T подобно тому, как это было сделано при доказательстве предложения 2.8 (очевидно, это дерево будет типа $T_{\overline{m}}$ для подходящего индекса ветвления $\overline{m}$). Сопоставление точке gP пространства K/P точки ξ границы ∂T, определяемой условием $\xi\in gP_n$, $n=1,2,\dots$, задает гомеоморфизм K/P на ∂T, переводящий действие G на K/P в соответствующее действие на границе, а меру μ в ν. $\square$

Если группа G является регулярно ветвящейся (см. ниже определение 3.5), то замыкание $\overline{G}$ описывается конечным числом локальных запретов на действие, как это продемонстрировано в [81, 175]. Этот факт является некоммутативным аналогом явления в эргодической теории, связанного с понятием сдвига конечного типа, когда фазовое пространство символической системы описывается конечным множеством запретов. Поэтому действия групп на регулярных деревьях, определяемые конечным множеством запретов, следует называть *действиями конечного типа*. Поясним эту идею более подробно. Любой автоморфизм корневого дерева T можно отождествить с раскраской вершин дерева элементами соответствующих симметрических групп (а именно вершина u уровня n может быть помечена произвольным элементом симметрической группы $\mathrm{Sym}(m_{n+1})$; такую раскраску принято называть портретом автоморфизма). Если дерево T регулярное степени d, то множество таких раскрасок является пространством конфигураций на множестве вершин $V = V(T)$ со значениями в $\mathrm{Sym}(d)$, т.е. пространством $\mathrm{Sym}(d)^V$, снабженным тихоновской топологией. При таком подходе элементы группы $\mathrm{Aut}(T)$ отождествляются с элементами множества $\mathrm{Sym}(d)^V$. Если ввести некоторое множество локальных запретов, т.е. для каждой вершины u объявить недопустимыми некоторые раскраски дерева T_u глубины k, где k — некоторое наперед заданное число, то при выполнении условия, что множество допустимых раскрасок (рассматриваемых как автоморфизмы дерева) замкнуто относительно операции композиции и составляет группу, получится некоторая замкнутая подгруппа группы $\mathrm{Aut}(T)$.

Простейший пример такого рода запретов — это запрет на множество элементов симметрической группы, которые могут использоваться для меток вершин. Другими словами, выбор подгруппы $H < \mathrm{Sym}(d)$ определяет подгруппу $G_H < \mathrm{Aut}(T)$, элементы которой находятся в биекции с элементами множества H^V. Например, в качестве H можно взять циклическую подгруппу порядка d (действующую циклической перестановкой на пучке ребер, исходящих из произвольной вершины). Если $d = p$ — простое число, то получаемая таким образом группа является силовской p-подгруппой в $\mathrm{Aut}(T)$. Если $H = \mathrm{Alt}(d)$ — альтернированная группа, то получается другой интересный пример группы, которую будем обозначать $\mathrm{Alt}(T)$. Проконечная группа $\mathrm{Alt}(T)$, так же как и $\mathrm{Aut}(T)$, является ветвящейся группой и изоморфна бесконечному итерированному сплетению копий группы $\mathrm{Alt}(d)$. При $d \geq 5$ она является конечно порожденной как топологическая группа (более того, является 2-порожденной, причем множество пар элементов, порождающих эту группу, имеет положительную меру, т.е. два наугад взятых элемента этой группы порождают ее с положительной вероятностью [29]). Критерий того, когда бесконечное итерированное подстановочное сплетение копий одной конечной транзитивной группы перестановок, рассматриваемое как проконечная группа, является топологически конечно порожденной группой, установлен Е. Бондаренко в [32].

Однако даже в случае запретов глубины 2 группа, заданная запретами, может не быть конечно порожденной как топологическая группа [175, 176]. Заметим, что замыкание группы промежуточного роста $\mathcal{G}$ задается запретами глубины 4 и вполне возможно, что в случае бинарного дерева (т.е. когда $d = 2$) не существует топологически конечно порожденных групп, заданных запретами глубины $k < 4$. Группа $\mathcal{G}$ собственно и подсказала автору идею введения понятия группы конечного типа.

Введем еще два понятия, относящиеся к абстрактной теории групп (одно из них уже упоминалось ранее).

Определение 2.5. (1) Группа G называется *минимально бесконечной*, если она бесконечна, а всякая ее собственная фактор-группа конечна.

(2) Группа называется *наследственно минимально бесконечной*, если она финитно аппроксимируема и всякая подгруппа конечного индекса минимально бесконечна (очевидно, что в этом определении “подгруппа конечного индекса” можно заменить на “нормальная подгруппа конечного индекса”).

Всякая бесконечная конечно порожденная группа допускает гомоморфизм на минимально бесконечную группу. Другими словами, имеет место

Предложение 2.10 [79]. *Пусть G конечно порождена и бесконечна. Тогда найдется $H \triangleleft G$ такая, что G/H — минимально бесконечная группа.*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим частично упорядоченное по включению множество $\mathcal{N}$ нормальных подгрупп бесконечного индекса группы G. Оно непусто (тривиальная подгруппа принадлежит $\mathcal{N}$). Покажем, что всякая цепь в $\mathcal{N}$ обладает максимальным элементом, принадлежащим $\mathcal{N}$. Предположим, что это не так, и пусть H_α — цепь, состоящая из нормальных в G подгрупп бесконечного индекса. Пусть $H = \bigcup_\alpha H_\alpha$. Очевидно, что H является нормальной подгруппой и максимальным элементом для цепи H_α. Предположим, что H не принадлежит $\mathcal{N}$, т.е. что H имеет конечный индекс в G. Тогда H является конечно порожденной группой и, следовательно, совпадает с H_α для некоторого α. Противоречие. $\square$

Таким образом, если стоит открытым вопрос о построении бесконечной конечно порожденной группы, обладающей некоторым свойством $\mathcal{P}$, сохраняющимся при гомоморфизмах, то естественно попытаться построить такой пример в классе минимально бесконечных групп, ибо если такой пример существует, то он существует и в этом классе.

Минимально бесконечные группы обобщают в определенном смысле класс простых групп и как бы находятся в пограничной зоне между конечными и бесконечными группами. Следующая теорема, выведенная в [80] из результатов статьи Дж.С. Уилсона [191], проясняет алгебраическое значение понятия ветвящейся группы. Роль этого понятия в вопросах теории динамических систем обсуждается в [80, 87, 81].

Теорема 2.11. *Пусть G — минимально бесконечная группа. Тогда либо G — ветвящаяся группа, либо найдется подгруппа $H \leq G$ конечного индекса, изоморфная конечной степени K^m некоторой группы K, причем K — либо наследственно минимально бесконечная, либо простая группа.*

Предупредим читателя, что используемое нами понятие наследственно минимальной группы (в английской транскрипции “hereditary just-infinite group”) отличается от того, которое использует Дж.С. Уилсон в [193] (а именно: он не предполагает у группы свойства финитной аппроксимируемости).

3. ГРУППЫ АВТОМАТОВ И САМОПОДОБНЫЕ ДЕЙСТВИЯ

Теперь мы рассмотрим более узкий класс действий на регулярных корневых деревьях, определяемых обратимыми инициальными автоматами типа Мили. Группы, определенные такими действиями, называются группами автоматов. Особо важный подкласс класса групп автоматов составляют самоподобные группы.

Пусть X — конечный алфавит, состоящий из d букв. Множество X^* всех конечных слов над X будем отождествлять с множеством вершин d-регулярного корневого дерева, которое будем обозначать T_d, или $T(X)$, или T, когда ясно, о каком алфавите идет речь (при этом пустое слово соответствует корневой вершине). Для любого слова $v \in X^*$ и произвольной буквы $x \in X$ вершины v и vx являются соседями в T_d, и этим определено множество ребер. Обычно мы будем рассматривать алфавиты вида $\{1, 2, \dots, d\}$ или $\{0, 1, \dots, d-1\}$. Важен случай, когда d — простое число, и особую роль играет бинарный алфавит $\{0, 1\}$, которому соответствует бинарное корневое дерево. d-Регулярное дерево T_d является примером сферически однородного дерева $T_{\overline{m}}$ и соответствует случаю, когда индекс ветвления $\overline{m}$ является постоянной последовательностью: $m_n = d$, $n = 1, 2, \dots$

Группа $\mathrm{Aut}(X^*)$ всех автоморфизмов дерева X^* имеет структуру бесконечного итерированного подстановочного сплетения $\wr_{\mathrm{perm}}^{i\geq 1}\mathrm{Sym}(d)$ (так как $\mathrm{Aut}(X^*) \cong \mathrm{Aut}(X^*) \wr_{\mathrm{perm}} \mathrm{Sym}(d)$, где симметрическая группа $\mathrm{Sym}(d)$ естественным образом действует перестановками на первом уровне дерева, состоящем из вершин, пронумерованных элементами из X). Это дает удобный способ представлять автоморфизмы из $\mathrm{Aut}(X^*)$ в виде

$$g = (g_0, g_1, \dots, g_{d-1})\sigma_g \tag{3.1}$$

(это соотношение аналогично соотношению (2.2)). При этом $g_0, g_1, \dots, g_{d-1}$ являются автоморфизмами поддеревьев, растущих из вершин первого уровня, индуцированными автоморфизмом g, а σ_g есть перестановка вершин первого уровня, индуцированная этим элементом (другими словами, $\sigma_g(x) = g(x)$, где x — произвольная вершина первого уровня). Автоморфизмы $g_i = g|_i$ называются сечениями (или проекциями) автоморфизма g в вершинах первого уровня.

Понятие сечения обобщается на произвольную вершину следующим образом. Для любой вершины $u \in X^*$ сечение $g|_u$ в вершине u определяется как автоморфизм поддерева T_u, начинающегося с вершины u, индуцированный элементом g. Этот автоморфизм $g|_u$ однозначно определяется соотношением $g(uw) = g(u)g|_u(w)$, выполненным для всех слов $w \in X^*$. Умножение автоморфизмов, записанных в виде (3.1), выполняется следующим образом. Если $h = (h_0, h_1, \dots, h_{d-1})\sigma_h$, то

$$gh = \bigl(g_{\sigma_h(0)}h_0, \dots, g_{\sigma_h(d-1)}h_{d-1}\bigr)\sigma_g\sigma_h.$$

Определение 3.1. Действие группы $G \leq \mathrm{Aut}(T)$ называется *самоподобным*, если каждое сечение $g|_u$ любого элемента $g \in G$ принадлежит группе G при каноническом отождествлении T_u с T.

Самоподобные действия можно также определить следующим эквивалентным образом.

Определение 3.2. Действие группы G автоморфизмами дерева T называется *самоподобным*, если для любого элемента $g \in G$ и любого $x \in X$ найдутся $h \in G$ и $y \in X$ такие, что при произвольном $w \in X^*$ выполнено

$$g(xw) = yh(w). \tag{3.2}$$

Определение 3.3. Группа называется *самоподобной*, если она обладает точным самоподобным действием. Группа называется *сильно самоподобной*, если она обладает точным самоподобным действием и конечной системой порождающих, которая замкнута относительно операции перехода от элемента к его сечению.

Удобным способом задания самоподобной группы G, порожденной автоморфизмами g_i, $i \in I$, являются *сплетающие рекурсии* (или рекуррентные соотношения). Они имеют вид

$$g_i = \bigl(w_1(g_1, \dots, g_n, \dots), \dots, w_d(g_1, \dots, g_n, \dots)\bigr)\sigma_{g_i}, \tag{3.3}$$

где w_i, $i \in I$, являются некоторыми словами в алфавите $\{g_n^{\pm 1}\}$ (другими словами, элементами соответствующей свободной группы ранга $|I|$). Если группа сильно самоподобна, то система соотношений (3.3) конечна.

Эти соотношения описывают действие каждого образующего g_i на первом уровне, а также действие его сечений, выраженное в терминах того же набора образующих. Итерируя эти соотношения и “раскручивая” их, можно извлекать обычные для комбинаторной теории групп соотношения между образующими (а именно находить слова в алфавите порождающих и элементов, обратных к ним, определяющие единичный элемент).

Имеется каноническое вложение

$$\Psi\colon\ \mathrm{st}_G(1) \hookrightarrow G \times G \times \ldots \times G \tag{3.4}$$

(d сомножителей), определенное как

$$g \overset{\Psi}{\mapsto} (g|_0, g|_1, \dots, g|_{d-1}).$$

Итерируя Ψ, получаем последовательность вложений

$$\Psi_n\colon\ \mathrm{st}_G(n) \hookrightarrow G^{d^n} \tag{3.5}$$

(в последнем выражении степень означает прямое произведение d^n копий группы G).

Определение 3.4. Пусть $K, K_0, \dots, K_{d-1}$ — подгруппы самоподобной группы G, действующей на дереве T. Будем говорить, что K *геометрически* содержит произведение $K_0 \times \ldots \times K_{d-1}$, и использовать обозначение

$$K_0 \times \ldots \times K_{d-1} \preceq K,$$

если $K_0 \times \ldots \times K_{d-1} \leq \Psi(\mathrm{st}_G(1) \cap K)$.

Определение 3.5. Самоподобная группа G автоморфизмов дерева T, действующая транзитивно на уровнях, называется *регулярно слабо ветвящейся* группой над своей нетривиальной подгруппой K, если

$$K \times \ldots \times K \preceq K.$$

Если, кроме того, индекс K в G конечен, то в этом случае будем говорить, что G является *регулярно ветвящейся* над K группой.

Смысл этого определения состоит в том, что группа K *косамоподобна*, т.е., расположив в вершинах произвольного конечного множества Y взаимно ортогональных вершин (т.е. $T_u \cap T_v = \varnothing$, $u, v \in Y$, $u \neq v$) произвольные элементы группы K и заставив их действовать на поддеревьях с корнями в этих вершинах, мы получим автоморфизм всего дерева (действующий тривиально вне объединения $\bigsqcup_{u \in Y} T_u$), принадлежащий группе K. Заметим, что косамоподобная подгруппа самоподобной группы не обязана быть самоподобной. Свойство косамоподобия подгруппы конечного индекса в самоподобной группе G полезно и позволяет решать различные задачи, связанные с группой G (для группы $\mathcal{G}$ примеры использования косамоподобных групп приведены в [81]).

Заметим, что если G — регулярно ветвящаяся группа, то G является и ветвящейся группой, так как

$$\Psi_n(\mathrm{st}_G(n)) \geq \Psi_n(\mathrm{rist}_G(n)) \geq K^{d^n}$$

— подгруппа конечного индекса в G^{d^n}, а значит, $\mathrm{rist}_G(n)$ — подгруппа конечного индекса в G.

Определение 3.6. (а) Самоподобная группа G называется *самовоспроизводящейся* (в литературе также используются термины *рекуррентная* или *фрактальная группа*), если для любой вершины $u \in X^*$ отображение $\varphi_u \colon \mathrm{st}_G(u) \to G$, определенное соотношением $\varphi_u(g) = g_u$ (напомним, что g_u — сечение элемента g в вершине u), является эпиморфизмом.

(б) Самоподобная группа G называется *сильно самовоспроизводящейся*, если проекция стабилизатора $\mathrm{st}_G(1)$ на произвольную вершину совпадает со всей группой G.

Очевидно, в первой части (а) этого определении достаточно ограничиться вершинами первого уровня, так как на остальные вершины свойство самовоспроизводимости распространяется автоматически. Если действие транзитивно на уровнях, то свойство самовоспроизводимости достаточно проверить для любой конкретной вершины первого уровня. Также ясно, что выполнение условия (б) влечет, что проекция стабилизатора $\mathrm{st}_G(n)$ любого уровня n на произвольную вершину этого уровня есть вся группа G. Примером сильно самовоспроизводящейся группы является $\mathcal{G}$.

При изучении самоподобных групп особое значение придается сжимающимся группам, определение которых сейчас последует. Эти группы обладают многими полезными свойствами. Например, для них существует ветвящийся алгоритм решения проблемы слов (решающий ее за полиномиальное время [72, 163]), а также определены так называемые *граничное пространство* и *граничный соленоид* [142] — объекты, дающие дополнительные средства для изучения группы, как это продемонстрировано в многочисленных работах В. Некрашевича и его монографии [142]. В определении используется стандартное в теории групп понятие *длины* элемента группы относительно системы ее образующих, под которой понимается минимальная длина слова, представляющего этот элемент как произведение образующих элементов группы и их обратных. Из рекуррентных соотношений для образующих самоподобной группы, очевидно, следует, что при переходе к проекциям длина элемента не возрастает. Сжимающиеся группы обладают более сильным свойством.

Определение 3.7. Сильно самоподобная группа G называется *сжимающейся*, если существуют константы λ, $0 < \lambda < 1$, C такие, что для любого элемента $g \in G$ длина (относительно системы образующих, определенной сплетающими рекурсиями типа (3.3)) сечения g_u в произвольной вершине u первого уровня дерева удовлетворяет оценке сверху

$$|g_u| < \lambda|g| + C.$$

Если

$$|g| > C/(1-\lambda),$$

то длины всех проекций первого уровня (а следовательно, и других уровней) строго меньше длины исходного элемента. Имеется только конечное множество элементов (содержащееся в шаре радиуса $C/(1-\lambda)$), для которых уменьшение длины при переходе к проекциям не выполнено. Это множество служит своего рода ядром группы, так как при расписывании действия произвольного элемента на дереве в терминах его проекций в вершинах уровня n при достаточно большом n все в конечном итоге сводится к элементам ядра. Понятие сжимающейся группы можно ввести и в более широком контексте самоподобных групп. При этом самоподобная группа G, действующая на регулярном корневом дереве, называется сжимающейся, если существует конечное множество (ядро) такое, что для любого элемента $g \in G$ найдется уровень, для которого все проекции элемента g на вершины этого уровня принадлежат ядру. Минимальное множество с этим свойством называется *нуклеусом*. Легко видеть, что для сильно самоподобных групп это определение сжимаемости эквивалентно предыдущему.

Исторически первым примером сжимающейся самоподобной группы оказалась группа $\mathcal{G}$. Для нее константы λ и C равны соответственно $1/2$ и 1, а нуклеус $\mathcal{N} = \{1, a, b, c, d\}$.

Альтернативным языком, на котором удобно работать с самоподобными группами, является язык автоматов. При этом имеются в виду автоматы типа Мили и одним из удобных способов их описания являются диаграммы Мура. Теория таких автоматов изложена, например, в [119] (мы также рекомендуем вводную часть статьи [35] для первоначального ознакомления с предметом, а также обзорную работу [87], в которой основные сведения изложены для более широкого класса автоматов-трансдюсеров, а именно асинхронных автоматов). Работа [87] содержит также подробную информацию о группах автоматов, известную к моменту ее написания.

Определение 3.8. *Автомат типа Мили* определяется как набор (Q, X, π, λ), где Q — некоторое множество, называемое множеством состояний, X — конечный алфавит, $\pi\colon Q \times X \to Q$ — отображение, называемое функцией перехода, $\lambda\colon Q \times X \to X$ — отображение, называемое функцией выхода. Если множество состояний Q конечно, то автомат называется *конечным*.

Определенный таким образом автомат называется неинициальным. Обозначим его $\mathcal{A}$. Инициальный автомат получается из неинициального выбором некоторого состояния $q \in Q$ как начального. Инициальный автомат с начальным состоянием q обозначается $\mathcal{A}_q = (Q, X, \pi, \lambda, q)$. Его можно интерпретировать как секвенциальную машину (или трансдюсер), т.е. машину по переработке информации. А именно если задано слово $w \in X^*$, то автомат действует на него следующим образом. Он прочитывает первую букву x в слове w и в зависимости от этой буквы и от состояния q дает на выход букву $\lambda(q, x) \in X$, а также меняет свое внутреннее состояние на

$\pi(q,x)$. Это новое состояние определяет действие автомата на оставшуюся часть слова w, которое осуществляется в той же манере. Другими словами, прочитав на входе очередную букву слова w, автомат мгновенно подает на выход букву, определенную входной буквой и текущим состоянием (согласно функции λ), и переходит в очередное состояние согласно команде функции перехода π. Определенный таким образом автомат принадлежит к разряду синхронных автоматов (т.е. для каждого входного символа на выход моментально отправляется выходной символ).

Функция выхода λ может быть расширена до функции $\lambda\colon Q\times X^*\to X^*$, причем при фиксированном q это отображение сохраняет длину слов, а также согласовано со взятием начал (префиксов) слов. Таким образом, каждое состояние q автомата задает отображение (которое также будет обозначаться q) из X^* в X^*, определенное соотношением $q(w)=\lambda(q,w)$. В особенно интересном для нас случае, когда для каждого $q\in Q$ отображение $\lambda(q,\cdot)$ является перестановкой на X, отображение $q\colon X^*\to X^*$ обратимо и, следовательно (ввиду свойства согласованности действия на префиксах), определяет автоморфизм дерева X^*. В этом случае автомат $\mathcal{A}_q$ называется *обратимым.* Неинициальный автомат $\mathcal{A}$ обратим, если обратимы все инициальные автоматы $\mathcal{A}_q$, $q\in Q$. В дальнейшем мы будем рассматривать только обратимые автоматы, хотя изучение полугрупп, порожденных необратимыми автоматами, также представляет интерес [21].

Два инициальных автомата Мили $\mathcal{A}_q$ и $\mathcal{B}_s$ с одинаковым алфавитом X называются эквивалентными, если они определяют одно и то же отображение на множестве слов X^* (или, что в случае обратимых автоматов то же самое, определяют один и тот же автоморфизм дерева $T(X)$). Два неинициальных автомата $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ эквивалентны, если для любого состояния q автомата $\mathcal{A}$ найдется состояние s автомата $\mathcal{B}$ такое, что автоматы $\mathcal{A}_q$ и $\mathcal{B}_s$ эквивалентны, и, наоборот, для каждого состояния автомата $\mathcal{B}$ найдется состояние автомата $\mathcal{A}$ такое, что соответствующие инициальные автоматы эквивалентны. Для каждого конечного автомата существует минимальный автомат (т.е. автомат с минимальным числом состояний), эквивалентный данному, причем минимальный автомат единствен с точностью до эквивалентности. Существует классический алгоритм минимизации конечных автоматов [119], который в [87] обобщен на асинхронные автоматы.

На множестве инициальных автоматов определена операция композиции автоматов. Она соответствует операции композиции соответствующих отображений множества X^* (или соответствующих автоморфизмов дерева), т.е. преобразование, определенное композицией двух автоматов, является композицией преобразований, определенных этими автоматами. Формальное определение таково. Композицией автоматов $\mathcal{A}_q=(Q,X,\pi,\lambda,q)$ и $\mathcal{B}_s=(S,X,\mu,\rho,s)$ является автомат $\mathcal{C}_{(q,s)}$ с множеством состояний $Q\times S$, начальным состоянием (q,s), функцией перехода γ и функцией выхода δ, определенными следующим образом:

$$\gamma((r,t),x)=(\pi(r,x),\mu(t,\lambda(r,x))),\qquad \delta((r,t),x)=\rho(t,\lambda(r,x)).$$

Композиция автоматов согласуется с эквивалентностью автоматов (т.е., заменив в композиции автоматы на эквивалентные им, получим автомат, эквивалентный композиции первоначальных автоматов). Таким образом, классы эквивалентности обратимых инициальных автоматов образуют группу относительно операции композиции (в дальнейшем слово “класс” будем опускать). Она изоморфна группе всех автоморфизмов дерева $T(X)$ и обозначается $\mathcal{GA}(X)$. Композиция конечных автоматов есть конечный автомат с числом состояний, равным произведению чисел состояний множителей (такой автомат может быть эквивалентен автомату с меньшим числом состояний, поэтому обычно после применения формального правила композиции применяется процедура минимизации).

Для каждого обратимого инициального автомата A_q существует обратный к нему инициальный автомат A_q^{-1}, который определяет преобразование последовательностей, обратное к преобразованию, определяемому автоматом A_q (таким образом, композиции $A_q \circ A_q^{-1}$ и $A_q^{-1} \circ A_q$ после минимизации являются тривиальным автоматом, задающим тождественное преобразование). При использовании варианта диаграмм Мура, когда ребра метятся парами символов алфавита (вход-выход), автомат A_q^{-1} получается из автомата A_q обращением ориентаций всех ребер (без изменения меток) и сохранением состояния q в качестве начального.

Если A — неинициальный обратимый автомат, то A^{-1} — неинициальный автомат, полученный из A указанным обращением ориентации ребер. Каждому состоянию автомата A соответствует состояние обратного автомата A^{-1} такое, что соответствующие инициальные автоматы обратны друг к другу в смысле операции композиции автоматов.

Таким образом, в группе всех обратимых инициальных автоматов содержится подгруппа $\mathcal{FGA}(X) \subset \mathcal{GA}(X)$ конечных обратимых автоматов. Она изоморфна некоторой счетной подгруппе группы $\mathrm{Aut}(T(X))$, а именно группе автоморфизмов дерева, определяемых конечными автоматами, и зависит от мощности алфавита X. Вложение алфавита в больший алфавит определяет вложение соответствующих групп автоматов. Поэтому имеется возрастающая последовательность групп автоматов, индексированная натуральными числами.

Если рассматривать и асинхронные автоматы (как, например, предложено в [87]), то тогда имеется всего лишь одна (универсальная) группа конечных обратимых асинхронных автоматов, не зависящая от мощности алфавита (если рассматривать только алфавиты мощности >1), обозначенная в [87] $\mathcal{Q}$, в которую вложены все группы $\mathcal{FGA}(X)$, $|X| = 2, 3, \ldots$ Эта группа (называемая группой рациональных гомеоморфизмов множества Кантора) в высшей степени интересна, однако пока не найдено эффективных путей ее изучения и о ней известно очень немного. В частности, неизвестно, конечно определена она или нет, и даже неизвестно, конечно порождена ли эта группа. Известно только, что группы автоморфизмов клеточных автоматов вкладываются в нее и что она содержит знаменитую группу Томпсона F (а также простые группы Томпсона и группы Томпсона–Хигмана). Отметим, что группы $\mathcal{FGA}(X)$, $\mathcal{GA}(X)$ не являются конечно порожденными, так как допускают гомоморфизм на элементарную 2-группу бесконечного ранга.

Важным свойством группы $\mathcal{Q}$ является разрешимость проблемы равенства слов. А именно для того, чтобы определить, является ли произведение конечных обратимых асинхронных автоматов единичным элементом в группе $\mathcal{Q}$, надо перемножить автоматы, используя метод вычисления композиции асинхронных автоматов, описанный в [87] (он обобщает классический способ суперпозиции автоматов в синхронном случае), а затем минимизировать его, используя алгоритм минимизации асинхронных автоматов, описанный в [87] (который опять-таки обобщает классический алгоритм минимизации синхронных автоматов). В частности, каждая из групп $\mathcal{FGA}(X)$ имеет разрешимую проблему слов и, следовательно, каждая конечно порожденная подгруппа группы конечных автоматов имеет разрешимую проблему слов. До сих пор неизвестно, разрешима ли проблема изоморфизма для групп, порожденных конечными (синхронными или асинхронными) автоматами, однако совсем недавний результат З. Шунича и Э. Вентуры показывает, что проблема сопряженности может быть неразрешимой [177]. В то же время для многих групп, порожденных автоматами, например для группы $\mathcal{G}$, проблема сопряженности разрешима иногда даже полиномиальным алгоритмом в неочевидных ситуациях [123, 161, 81, 130].

Определение 3.9. Группа автоморфизмов дерева T, порожденная всеми состояниями неинициального обратимого автомата $\mathcal{A}$ (т.е. инициальными автоматами $\mathcal{A}_q$, $q \in Q$), называется *автоматной группой*, заданной (или определенной) автоматом $\mathcal{A}$.

Класс автоматных групп совпадает с классом самоподобных групп. В самом деле, действие на X^* произвольного элемента g, принадлежащего самоподобной группе G, может быть реализовано как автоматное отображение $\mathcal{A}_q$, где состояния автомата $\mathcal{A}$ находятся в биекции с

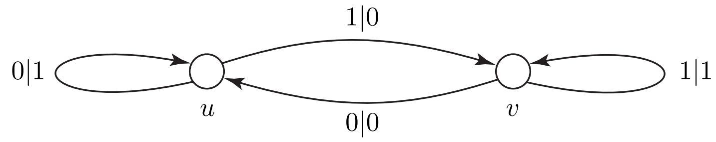

Рис. 3.1. Автомат, порождающий группу $\mathcal{L}$

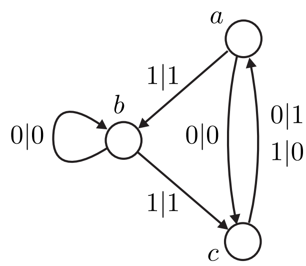

Рис. 3.2. Автомат Беллатерра

сечениями g_w, $w \in X^*$, а функции перехода и выхода определяются из соотношений (3.1), а именно $\pi(g|_u, x) = g|_{ux}$ и $\lambda(g|_u, x) = g|_u(x)$ для каждого $u \in X^*$.

Особый интерес представляют самоподобные группы, заданные конечным автоматом (т.е. порожденные всеми состояниями одного конечного неинициального автомата). Мы условились их называть сильно самоподобными группами (в некоторых работах именно такие группы называются самоподобными).

Удобным наглядным средством задания автоматов являются *диаграммы Мура*. Такая диаграмма представляет собой ориентированный граф, множество вершин которого отождествляется с множеством состояний автомата Q и для каждой вершины $q \in Q$ и буквы $x \in X$ имеется ориентированное ребро, соединяющее q с $\pi(q, x)$, помеченное парой $(x|\lambda(q, x))$ (часто скобки опускаются, а разделительная вертикальная черта заменяется запятой или другим разделительным знаком). Примерами таких диаграмм служат диаграммы, представленные на рис. 3.1 и 3.2.

Определенные этими диаграммами автоматы порождают упомянутую в предыдущем разделе группу лэмплайтер и свободное произведение трех копий группы порядка 2 соответственно (т.е. группы из примеров 2.2, 2.7).

Напомним, что для обратимого автомата и его произвольного состояния $q \in Q$ отображение $\lambda(q, \cdot)\colon X \to X$ является перестановкой алфавита. Поэтому часто бывает удобным описывать функцию выхода, помечая состояния автомата соответствующими элементами симметрической группы $\mathrm{Sym}(X)$ и сохраняя на ребрах первую часть метки (описывающую функцию перехода), как указано на рис. 3.3 и 3.4, a (при этом рис. 3.4 представляет один и тот же автомат двумя способами). Для состояний, меченых единичным элементом, иногда метка не ставится (как это имеет место для автомата, заданного рис. 3.3) или используется символ e для обозначения единичного элемента симметрической группы $\mathrm{Sym}(d)$ (как на рис. 3.4, a).

Автоматы, приведенные на рис. 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4, соответственно порождают группы лэмплайтер, Беллатерра, группу итерированной монодромии $\mathrm{IMG}(z^2 + i)$ отображения $z \to z^2 + i$ (о группах итерированной монодромии можно прочитать в [18, 142]) и группу промежуточного роста $\mathcal{G}$.

Группы, заданные конечными автоматами, являются в высшей степени интересными, однако и трудно поддающимися исследованию объектами. Одной из естественных задач при их изучении является задача классификации групп в классе (m, n), состоящем из групп, порожденных обратимыми автоматами с m состояниями над алфавитом из n букв, $m, n \geq 2$ (хотя бы для малых значений параметров m и n). Эта задача легко решается для класса $(2, 2)$ (см. [87],

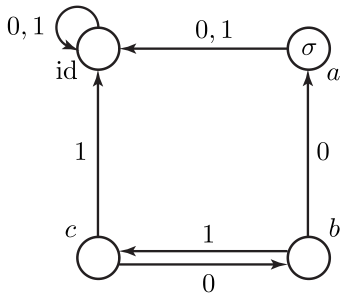

Рис. 3.3. Автомат, порождающий $\mathrm{IMG}(z^2+i)$; $\sigma = (0,1) \in \mathrm{Sym}(2)$

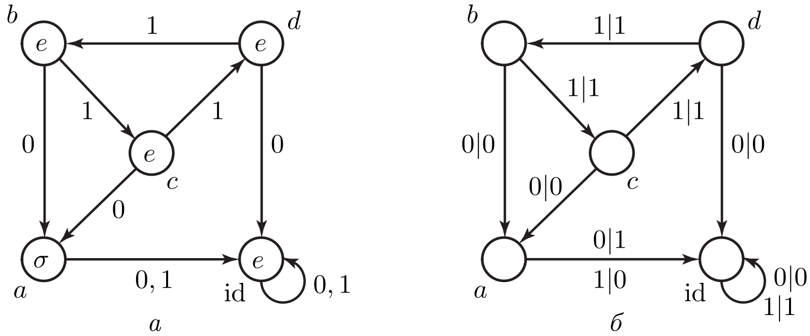

Рис. 3.4. Автомат, порождающий группу $\mathcal{G}$; $\sigma = (0,1) \in \mathrm{Sym}(2)$

где показано, что существует шесть таких групп, а именно $\{1\}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$, бесконечная диэдральная группа D_∞ и лэмплайтер). Классы $(3,2)$ и $(2,3)$ обладают уже гораздо более высокой степенью сложности и содержат не более 115 и 139 групп соответственно [35, 139]. На данный момент класс $(3,2)$ групп изучен гораздо подробнее, чем класс $(2,3)$.

4. СВОБОДНЫЕ ДЕЙСТВИЯ НА ГРАНИЦЕ

В этом разделе мы сконцентрируем наше внимание на таких действиях на корневом дереве, которые индуцируют свободные (в топологическом или метрическом смысле) действия на границе дерева ∂T.

Но прежде, чем перейти к рассмотрению свободных действий, напомним некоторые понятия, относящиеся к динамическим системам, и сформулируем одно принципиально важное для нас утверждение. Действие (G,X) (G — группа, X — топологическое пространство) минимально, если оно не имеет непустых собственных замкнутых подмножеств (другими словами, замыкание орбиты любой точки равно всему пространству X). Динамическая система $(G,\partial T)$ топологически транзитивна, если для любых двух открытых множеств $U,V\subset X$ найдется элемент $g\in G$ такой, что $gU\cap V\neq\varnothing$. Для сепарабельных метрических пространств это эквивалентно существованию точки с плотной орбитой. Наконец, строгая эргодичность означает единственность инвариантной вероятностной меры. Строгая эргодичность влечет эргодичность. Многие из приводимых ниже определений (а также некоторые из утверждений) имеют смысл для действий на общих топологических пространствах, однако в основном мы ограничимся случаем действий на границе корневого дерева.

Предложение 4.1 [87, предложение 6.5]**.** *Пусть задано действие группы на сферически однородном дереве. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(i) *Действие сферически транзитивно.*

(ii) *Динамическая система $(G,\partial T)$ минимальна.*

(iii) *Динамическая система $(G,\partial T)$ топологически транзитивна.*

(iv) *Динамическая система* $(G, \partial T, \nu)$ *эргодична.*

(v) *Мера* ν *является единственной инвариантной* σ*-аддитивной вероятностной мерой.*

Напомним, что равномерная мера ν на границе дерева была определена в разд. 2.

Ограничимся доказательством эквивалентности условий (i), (iv), отсылая читателя за всеми деталями к [87].

Доказательство. Действительно, если для некоторого уровня имеется собственное непустое инвариантное подмножество U его вершин, то объединение $\bigcup_{u\in U} C_u$ соответствующих цилиндров дает нетривиальное инвариантное подмножество границы.

Имеются по крайней мере два естественных способа доказать утверждение в обратную сторону. Можно воспользоваться теоремой плотности Лебега, использовав при этом G-инвариантную метрику вида $d_{\bar\lambda}$ на границе и тот факт, что образы при действии элементами группы шара $B_x(\delta)$ радиуса δ с центром в точке x являются также шарами того же радиуса и либо не пересекаются, либо совпадают (за деталями мы отсылаем к [87, предложение 6.5]). А можно, как предложено в [81], рассмотреть унитарное представление π группы G в гильбертовом пространстве $H = L^2(\partial T, \nu)$, определенное действием G на границе сохраняющими меру ν преобразованиями: $(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$. Эргодичность динамической системы $(G, \partial T, \nu)$ эквивалентна тому, что G-инвариантные функции из H постоянны. Обозначим через H_n подпространство размерности $m_1 \dots m_n$ пространства H, порожденное характеристическими функциями цилиндрических множеств C_w: $|w| = n$. Тогда пространства H_n, $n = 1, 2, \dots$, образуют возрастающую систему подпространств, замыкание объединения которых совпадает с H. Пространства H_n инвариантны относительно π, и сужения $\pi_n = \pi|_{H_n}$ изоморфны подстановочным представлениям для действий G на уровнях. В силу транзитивности действия на уровнях только постоянные функции являются инвариантными для представлений π_n. Предположив, что $f \in H$ есть непостоянная инвариантная функция, и разложив ее (как элемент гильбертова пространства) в сумму $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ (соответствующую разложению $H = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} H_n^{\perp}$, где $H_n^{\perp} = H_n \ominus H_{n-1}$ и первое слагаемое $H_0 = \mathbb{C}$ соответствует постоянным функциям), придем к противоречию. $\square$

Пусть задано действие счетной группы G на полном метрическом пространстве X. Через X_- будем обозначать множество точек с нетривиальным стабилизатором, а через X_+ — с тривиальным стабилизатором.

Определение 4.1. 1. Действие (G, X) называется *абсолютно* свободным, если все точки имеют тривиальный стабилизатор.

2. Действие (G, X) называется *относительно* свободным, если существует хотя бы одна точка с тривиальным стабилизатором.

3. Действие (G, X) *топологически* свободно, если X_- — множество первой категории Бэра (т.е. представимо в виде счетного объединения нигде не плотных множеств).

4. Предположим, что действие (G, X) обладает G-инвариантной борелевской мерой μ (не обязательно конечной). Система (G, X, μ) называется *существенно* свободной, если $\mu(X_-) = 0$.

Для счетных групп понятия топологической свободы и существенной свободы можно сформулировать в терминах множеств неподвижных точек индивидуальных элементов (а именно для каждого $1 \neq g \in G$ множество $\mathrm{Fix}(g)$ имеет первую категорию или меру 0 соответственно).

В дальнейшем будем применять введенную терминологию в основном для случая действия на корневых деревьях, однако заметим, что ниже местами фигурируют более общие топологические пространства. Итак, пусть задано точное действие бесконечной счетной группы G на корневом дереве T, $\xi \in \partial T$. Обозначим через $\mathrm{st}_G(\xi)$ стабилизатор точки ξ границы дерева, через $\mathrm{Fix}(g)$, как и выше, множество g-неподвижных точек границы, через $(\partial T)_+$ множество точек, обладающих тривиальным стабилизатором (условимся называть такие точки свободными), а через $(\partial T)_-$ дополнение к нему.

Следующее понятие оказывается полезным для построения примеров свободных действий.

Определение 4.2. Для вершины u дерева подгруппа $\mathrm{triv}_G(u)$, состоящая из элементов, фиксирующих u и действующих тривиально на поддереве T_u, называется *тривиализатором* вершины u.

Таким образом, действие локально нетривиально (см. определение 2.2) в том и только том случае, если тривиализаторы всех вершин тривиальны.

Предложение 4.2. *Действие счетной группы на границе дерева топологически свободно тогда и только тогда, когда оно локально нетривиально.*

Доказательство. Действительно, если действие топологически свободно и предположить, что $\mathrm{triv}_G(u) \neq 1$, то все точки части границы, принадлежащие цилиндрическому множеству C_u, имеют нетривиальный стабилизатор, а значит, $C_u \subset (\partial T)_-$, а так как C_u — открытое множество, то приходим к противоречию.

Предположим теперь, что действие не топологически свободно. Множество точек, имеющих нетривиальный стабилизатор, представляется в виде объединения $\bigcup_{1\neq g\in G} \mathrm{Fix}(g)$. Следовательно, для некоторого $g \in G$, $g \neq 1$, множество $\mathrm{Fix}(g)$ содержит открытое подмножество, а значит, содержит и некоторое цилиндрическое множество C_u. При этом $g \in \mathrm{triv}_G(u)$, что доказывает нетривиальность тривиализатора $\mathrm{triv}_G(u)$. $\square$

Следующее утверждение вытекает из доказанного утверждения и того, что равномерная мера на границе равномерно “размазана” по ней. Оно также следует из более общего утверждения (см. следствие 4.10).

Следствие 4.3. *Для сферически транзитивного действия существенная свобода действия на границе дерева влечет топологическую свободу.*

Очевидно, что абсолютная свобода действия влечет остальные типы свобод, сформулированные в определении 4.1, а те в свою очередь влекут точность действия, однако существуют точные действия, не обладающие ни одной свободной орбитой. Так, например, на каждой из своих орбит группа $\mathcal{G}$ из примера 2.3 действует несвободно. Это вытекает из того факта, что $\mathcal{G}$ является сжимающейся самоподобной группой, а для таких групп в [16, 17] показано, что каждая орбита имеет полиномиальный рост. Так как рост группы $\mathcal{G}$ промежуточный между полиномиальным и экспоненциальным, то действие на орбитах несвободно. В [87] был поставлен вопрос о построении эргодического действия на корневом дереве, для которого графы Шрейера (о которых подробно идет речь в следующих разделах), типичные в топологическом смысле, отличались бы от графов Шрейера, типичных в метрическом смысле. Такой пример может быть извлечен из работы [28], а в явном виде он построен в [2]. Более того, в [2] построено действие свободной группы на корневом дереве, которое свободно в топологическом смысле (т.е. типичный граф Шрейера является графом Кэли), но не свободно в метрическом смысле. Однако для действий сильно самоподобных групп таких примеров не существует ввиду следующего утверждения, установленного Кембайтом, Сильвой и Стайнбергом на основе анализа результатов и методов работы [95].

Теорема 4.4 [112, Theorem 4.2]. *Для действий сильно самоподобных групп (т.е. групп, заданных конечными автоматами) из топологической свободы действия следует существенная свобода.*

Доказательство. Для доказательства см. ниже следствие 9.8. $\square$

Следующее простое утверждение будет полезно нам в разд. 5 для доказательства существенной свободы некоторых действий.

Предложение 4.5. *Для сильно самоподобных групп, действующих на бинарном дереве, существенная свобода эквивалентна тривиальности жесткого стабилизатора первого уровня.*

Доказательство. Действительно, если $\mathrm{rist}_G(1) \neq 1$, то, очевидно, действие не существенно свободно. В силу предложения 4.2 существенная свобода эквивалентна локальной нетривиальности. Пусть u — вершина с наименьшим уровнем, имеющая нетривиальный тривиализатор $\mathrm{triv}_G(u)$ в G, и $1 \neq g \in \mathrm{triv}_G(u)$. Пусть вершина v предшествует вершине u в дереве. Тогда сечение g_v нетривиально (в силу минимальности $|u|$) и принадлежит $\mathrm{rist}_G(1)$. $\square$

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Предложение 4.6. *Пусть G — сильно самоподобная группа, действующая на регулярном корневом дереве T. Тогда действие $(G, \partial T, \nu)$ существенно свободно в том и только том случае, если тривиализатор всех вершин первого уровня тривиален.*

Доказательство. Если тривиализатор некоторой вершины первого уровня нетривиален, то действие, очевидно, не существенно свободно. Предположим, что, наоборот, действие не существенно свободно. В силу предложения 4.2 и теоремы 4.4 действие локально тривиально. Пусть u — вершина с наименьшим уровнем, имеющая нетривиальный тривиализатор $\mathrm{triv}_G(u)$ в G, и $1 \neq g \in \mathrm{triv}_G(u)$. Пусть вершина v предшествует вершине u в дереве. Тогда сечение g_v нетривиально (в силу минимальности $|u|$), принадлежит G и принадлежит тривиализатору некоторой вершины первого уровня. $\square$

Замечание 4.1. Без предположения о сильном самоподобии группы аналогичное утверждение имеет место, если существенную свободу заменить топологической свободой.

Для автоморфизма однородного дерева, заданного конечным инициальным автоматом $\mathcal{A}_q$, описание множества неподвижных точек границы может быть осуществлено алгоритмическим путем и имеет прозрачную структуру. Опишем ее.

Будем предполагать, что автомат $\mathcal{A}_q$, заданный над алфавитом X из d букв, минимален и задает неединичный автоморфизм дерева. Обозначим через $\mathrm{Fix}(q)$ множество неподвижных точек границы преобразования, заданного автоматом $\mathcal{A}_q$. Для того чтобы $\mathrm{Fix}(q)$ было непусто, необходимо, чтобы состояние q в диаграмме Мура автомата было мечено единичным элементом e. Предположим, что $\mathcal{A}_q$ обладает состоянием t, определяющим единичный автоморфизм дерева (т.е. состоянием t, меченым единичным элементом e симметрической группы, из которого уже нельзя выйти с помощью отображения переходов в автомате, ибо все ребра, исходящие из него в диаграмме Мура, также заканчиваются в t; очевидно, если такое состояние в минимальном автомате имеется, то оно только одно). Обозначим через $\mathcal{R}$ множество, состоящее из слов, определяющих путь в диаграмме Мура, ведущий из q в t и проходящий только через состояния, меченые единичным элементом. Обозначим через F множество состояний автомата $\mathcal{A}_q$, меченных e, но отличных от состояния t (напомним, что $q \in F$). Пусть $\mathcal{L}$ — множество слов в алфавите автомата X, которые определяют пути с началом в состоянии q и проходящие только через состояния из F. Пусть T' — поддерево d-регулярного дерева, заданного алфавитом X, состоящее из вершин, определяемых словами из $\mathcal{L}$, дополненных в T' всеми промежуточными вершинами, связывающими их с корневой вершиной, и соответствующими ребрами. Пусть $\partial T'$ — граница дерева T'. Она является замкнутым подмножеством границы ∂T и непуста в том и только том случае, если диаграмма Мура автомата $\mathcal{A}_q$ содержит хотя бы один цикл, все состояния которого лежат в множестве F. Языки $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ являются регулярными (согласно классической классификации Хомского формальных языков (см. [104])) языками, задаваемыми автоматом-акцептором, получаемым из диаграммы Мура автомата $\mathcal{A}_q$ несложной перестройкой.

Предложение 4.7. *Для множества неподвижных точек имеет место разложение в дизъюнктное объединение*

$$\mathrm{Fix}(q) = \partial T' \sqcup \bigsqcup_{w \in \mathcal{R}} C_w$$

(где, как и ранее, C_w обозначает цилиндрическое множество, определенное словом w).

Напомним, что в силу предложения 4.1 для действий на границе дерева минимальность эквивалентна топологической транзитивности.

Предложение 4.8. *Пусть действие счетной группы G на полном метрическом пространстве X минимально и для некоторой точки $x \in X$ стабилизатор $\mathrm{st}_G(x)$ тривиален. Тогда действие топологически свободно.*

Доказательство. Для доказательства нам понадобится следующее понятие.

Определение 4.3. Пусть X является топологическим G-пространством.

(α) Для элемента $g \in G$ точка $x \in X$ называется *g-типичной*, если или $gx \neq x$, или g действует тривиально в некоторой окрестности точки x.

(β) Точка $x \in X$ называется *G-типичной* (или просто типичной), если она является g-типичной для любого элемента $g \in G$.

Обозначим, как и ранее, через X_+ множество свободных точек (точек с тривиальным стабилизатором), через O_g множество g-типичных точек, а через O множество G-типичных точек, и пусть $N_g = X \setminus O_g$. Тогда, как легко видеть, O_g — открытое всюду плотное множество, а значит, $O = \bigcap_{g \in G} O_g$ является пересечением счетного числа открытых всюду плотных множеств. Мы утверждаем, что имеет место включение $O \subseteq X_+$. Действительно, предположим, что некоторая точка $y \in O$ имеет нетривиальный стабилизатор. Пусть $f \in \mathrm{st}_G(y)$, $f \neq 1$. Покажем, что произвольная окрестность U_y точки y содержит точку, перемещаемую элементом f (т.е. не являющуюся f-неподвижной), и тем самым получим противоречие, так как в этом случае $y \notin O_f$.

Пусть x — точка из условия предложения. В силу минимальности орбита точки x всюду плотна и G действует свободно на ней. Пусть z — точка орбиты Gx, принадлежащая U_y. Тогда $fz \neq z$ и так как такую точку можно найти в любой окрестности точки y, то приходим к противоречию. Таким образом, дополнение к X_+ — множество первой категории. Предложение доказано. □

По ходу доказательства предыдущего утверждения мы также доказали

Следствие 4.9 [87, предложение 6.20]. *Дополнение к множеству G-типичных точек счетной группы имеет первую категорию.*

Следствие 4.10. *Для минимальных действий счетной группы G на полных метрических пространствах из существенной свободы по отношению хотя бы к одной G-инвариантной мере μ вытекает топологическая свобода.*

Доказательство. Действительно, так как в случае существенно свободного действия множество точек с тривиальным стабилизатором имеет полную меру, то оно непусто и остается воспользоваться утверждением предложения 4.8. □

Из результатов Аберта и Вирага, полученных в [6], следует, что взятые наугад m, $m \geq 2$, автоморфизмов корневого дерева порождают свободную группу, действующую существенно свободно на границе по отношению к равномерной мере. Более того, в работе Аберта и Элека [3] для широкого класса групп, включающего свободные группы и группы с T-свойством Каждана разработан метод, позволяющий строить континуум попарно не слабо эквивалентных свободных действий. Некоторые условия алгебраического характера, гарантирующие топологическую свободу конкретных действий на границе дерева, анонсированы Абертом в ряде его докладов. Ниже мы приводим несколько обнаруженных нами условий алгебраического характера, которые в некоторых случаях могут совпадать с условиями Аберта.

Определение 4.4. 1. Будем говорить, что группа G имеет свойство *наследственной нетривиальности пересечений*, если для любой подгруппы $H \leq G$ конечного индекса пересечение $K \cap L$ любых двух нетривиальных нормальных подгрупп $K, L \trianglelefteq H$ нетривиально (это эквивалентно тому, что любая подгруппа $H \leq G$ конечного индекса не есть подпрямое произведение двух нетривиальных групп).

2. Будем говорить, что группа G *наследственно свободна от конечных нормальных подгрупп*, если любая подгруппа конечного индекса в G не содержит нетривиальных конечных нормальных подгрупп.

Предложение 4.11. *Пусть счетная группа G действует точно и сферически транзитивно на корневом дереве T, а также выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) *G свободна от кручения и обладает свойством наследственной нетривиальности пересечений*;
2) *G наследственно свободна от конечных нормальных подгрупп*;
3) *дерево T бинарное и G имеет свойство наследственной нетривиальности пересечений*;
4) *G является наследственно минимально бесконечной группой* (*см. определение* 2.5).

Тогда действие $(G, \partial T)$ топологически свободно.

Доказательство. 1. Докажем, что каждое из множеств $\mathrm{Fix}(g)$, $g \neq 1$, нигде не плотно и тем самым $(\partial T)_- = \bigcup_{g\in G,\ g\neq 1} \mathrm{Fix}(g)$ имеет первую категорию.

Предположим, что это не так, и пусть для некоторого элемента $g \in G$, $g \neq 1$, множество неподвижных точек $\mathrm{Fix}(g)$ (которое замкнуто) содержит окрестность U_x некоторой точки $x \in \partial T$. Тогда найдется вершина u такая, что цилиндрическое множество C_u содержится в U_x. В этой ситуации элемент g фиксирует вершину u и действует тривиально на поддереве T_u. Рассмотрим тривиализатор $\mathrm{triv}_G(u)$. Пересечение $K_u = \mathrm{triv}_G(u) \cap \mathrm{st}_G(n)$, $n = |u|$, нетривиально в силу бесконечности группы $\mathrm{triv}_G(u)$ ($g \in \mathrm{triv}_G(u)$ и g — элемент бесконечного порядка), в то время как $\mathrm{st}_G(n)$ — подгруппа конечного индекса в G. Как легко видеть, K_u является нормальной подгруппой в $\mathrm{st}_G(n)$.

В силу транзитивности действия группы G на уровнях для каждой вершины v уровня n аналогичным образом определена нормальная подгруппа $K_v < \mathrm{st}_G(n)$, состоящая из элементов, действующих тривиально на поддереве T_v, причем K_v сопряжена с K_u в G. Так как G имеет свойство наследственной нетривиальности пересечений, то для любых вершин v, w, $|v| = |w| = n$, пересечение $K_{v,w} = K_v \cap K_w$ нетривиально и является нормальной подгруппой в $\mathrm{st}_G(n)$. Для подмножества E множества вершин n-го уровня обозначим через K_E подгруппу в $\mathrm{st}_G(n)$, состоящую из элементов, действующих тривиально на объединении поддеревьев T_e, $e \in E$. Мы показали, что для множеств E мощности 1 или 2 подгруппа K_E является нетривиальной нормальной подгруппой в $\mathrm{st}_G(n)$. Однако пересечение любых таких групп опять-таки будет нетривиальной нормальной подгруппой в $\mathrm{st}_G(n)$ и, рассуждая по индукции относительно мощности E, приходим к заключению, что K_{L_n} — нетривиальная группа, где L_n — множество вершин n-го уровня, что противоречит точности действия G.

2. Этот случай доказывается аналогично предыдущему. Так как тривиализатор $\mathrm{triv}_G(u)$ является нормальной подгруппой в $\mathrm{st}_G(u)$, то он бесконечен, а дальше рассуждение повторяет аргументы предыдущего пункта.

3. Если дерево бинарное, то стабилизатор первого уровня совпадает со стабилизатором каждой из двух вершин первого уровня. Выберем вершину u с наименьшим уровнем n такую,

что тривиализатор $\mathrm{triv}_G(u)$ нетривиален. Так как G действует точно, то u не является корневой вершиной. Пусть вершина v предшествует вершине u в дереве, $|u| = n$, а w является соседней вершиной для v, принадлежащей тому же уровню, что и u (т.е. $|w| = n$). Заменим в наших рассуждениях пару (G,T) на (G_v, T_v), где G_v есть сужение действия $\mathrm{st}_G(v)$ на поддерево T_v (заметим, что группа G_v не обязана действовать точно на T_v, однако G_v действует транзитивно на уровнях дерева T_v в силу критерия транзитивности действия группы G, сформулированного в предложении 2.1). Тривиализаторы $\mathrm{triv}_G(u)$ и $\mathrm{triv}_G(w)$ сопряжены в G_v и являются нормальными подгруппами в подгруппе $M_v \le G_v$ индекса 2, стабилизирующей вершины u, w. Так как G_v имеет конечный индекс в G, то и M_v имеет конечный индекс в G. Поэтому пересечение $R_{u,w} = \mathrm{triv}_G(u) \cap \mathrm{triv}_G(w)$ нетривиально и содержится в тривиализаторе $\mathrm{triv}_G(v)$. Получено противоречие с предположением о минимальности уровня вершины u.

4. Пусть G наследственно бесконечно минимальна. Если для некоторой вершины u тривиализатор $\mathrm{triv}_G(u) \neq 1$, то $\mathrm{triv}_G(u)$ — нетривиальная нормальная подгруппа в $\mathrm{st}_G(u)$, а следовательно, имеет конечный индекс в $\mathrm{st}_G(u)$. Но тогда действие группы $\mathrm{st}_G(u)$ нетранзитивно на уровнях поддерева T_u, что противоречит транзитивности действия G. $\square$

Вот еще одно условие алгебраического характера, гарантирующее топологическую свободу действия.

Предложение 4.12. *Пусть p — простое число и последовательность $\overline{m} = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяющая индекс ветвления, состоит из степеней числа p. Предположим, что счетная группа G действует точно, сферически транзитивно на $T_{\overline{m}}$, причем для каждой вершины w n-го уровня действие любого элемента группы на множестве ребер, исходящих из w, осуществляется степенями циклической перестановки порядка m_{n+1}. Предположим, что все абелевы подгруппы в G циклические. Тогда действие $(G, \partial T)$ топологически свободно.*

Прежде чем доказывать предложение, заметим, что фигурирующее в теореме условие на абелевы подгруппы автоматически выполняется, если G — свободная от кручения гиперболическая по Громову группа.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $1 \neq g \in \mathrm{triv}_G(u)$ для некоторой вершины u. Очевидно, u — некорневая вершина. Выберем u с наименьшей нормой $|u|$, и пусть v является предшественником u, $G_v = \mathrm{st}_G(v)$ и $\overline{G}_v = G_v|_{T_v}$ есть сужение G_v на поддерево T_v (ядром гомоморфизма $G_v \to \overline{G}_v$ является тривиализатор $\mathrm{triv}_G(v)$). Группа G_v, равно как и ее гомоморфный образ $\overline{G}_v$, действует сферически транзитивно на поддереве T_v. Элемент g фиксирует v, а его проекция $\bar{g}$ на поддерево T_v стабилизирует все вершины первого уровня этого дерева. Пусть $L = \{w_1, \dots, w_c, \dots, w_q\}$ — множество вершин первого уровня дерева T_v, $\bar{g} = (g_{w_1}, \dots, g_{w_c}, \dots, g_{w_q})$ — разложение элемента $\bar{g}$ на проекции в вершинах первого уровня, причем индекс c соответствует вершине u, а $q = m_{k+1}$ обозначает число вершин первого уровня дерева T_v, где k — уровень вершины v в дереве T, и пусть $q = p^l$. Ввиду минимальности $|u|$ элемент $\bar{g}$ можно считать нетривиальным. Проекция g_{w_c} является единичным элементом.

Обозначим через E непустое подмножество, состоящее из вершин x, для которых соответствующая проекция g_x тривиальна. Дополнительно к сделанному предположению о минимальности $|u|$ и неединичности $\bar{g}$ потребуем, чтобы элемент g был выбран таким образом, чтобы мощность $|E|$ была максимальна (при этом, очевидно, $E \neq L$). Пусть $a \in G_v$ действует на первом уровне поддерева T_v циклической перестановкой σ порядка $q = p^l$ (такой элемент существует ввиду сферической транзитивности действия G_v на T_v), а $\bar{a}$ является проекцией a на это поддерево. Тогда сопряженный элемент $\bar{g}^{\bar{a}}$ имеет $\sigma^{-1}(E)$ в качестве множества вершин из L с тривиальными проекциями. Рассмотрим коммутатор $f = [g, g^a]$ и его проекцию $\bar{f} = [\bar{g}, \bar{g}^{\bar{a}}] \in \overline{G}_v$. Так как f имеет по крайней мере $|E \cup \sigma^{-1}(E)| > |E|$ единичных компонент в разложении, то $f = 1$, т.е. g и g^a коммутируют. Следовательно, в силу условия предложения найдется элемент $h \in G_v$ такой, что $g, g^a \in \langle h \rangle$, причем $h \in \mathrm{st}_{G_v}(1)$, так как $h \in \langle g, g^a \rangle$.

Пусть $\bar{h}$ — проекция h на T_v. Тогда $\bar{h} \in \mathrm{st}_{\overline{G}_v}(1)$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_q)$. Пусть F — множество единичных координат этого вектора, F^{c} — дополнение к нему. Предположим, что $F^{\mathrm{c}} \cap E \neq \varnothing$. Тогда $i = p^t$ для некоторого положительного t. Аналогично если $F^{\mathrm{c}} \cap \sigma^{-1}(E) \neq \varnothing$, то $j = p^r$ для некоторого r. Если оба указанных пересечения нетривиальны, то, предположив, что $t \geq r$, получим, что элемент $\bar{g}^{\bar{a}} = \bar{h}^j$, расписанный как вектор, имеет единичные компоненты в вершинах из множества $E \cup \sigma^{-1}(E)$, которое содержит E в качестве собственного подмножества, что противоречит предположению о максимальности $|E|$.

Предположим, что $F^{\mathrm{c}} \cap E = \varnothing$. Тогда $F \supseteq E$ и в силу максимальности $|E|$ имеет место равенство $F = E$. В этом случае множество $\sigma^{-1}(E)$ единичных компонент элемента $\bar{g}^{\bar{a}} = h^j$ содержит множество E и не совпадает с ним — противоречие. Аналогично рассматривается случай $F^{\mathrm{c}} \cap \sigma^{-1}(E) = \varnothing$. $\square$

5. ПРИМЕРЫ СУЩЕСТВЕННО СВОБОДНЫХ ДЕЙСТВИЙ

Мы начнем этот раздел с нескольких конкретных примеров существенно свободных действий сильно самоподобных групп, а закончим его обсуждением стратегии классификации всех существенно свободных действий сильно самоподобных групп, действующих на бинарном дереве. Первые два примера по модулю лежащего за ними алгебраического результата, идентифицирующего группу, порожденную соответствующим автоматом, являются простыми применениями общих результатов, полученных в предыдущем разделе.

Пример 5.1. Начнем с примера свободной группы F_3 ранга 3, реализованной как группа, порожденная автоматом, изображенным на рис. 5.1.

Этот автомат, который имеет номер 2240 в классификации групп, порожденных автоматами с тремя состояниями (см. [35]), был построен С. Алешиным в [7] вместе с другим автоматом $\mathcal{B}$, имеющим пять состояний, с целью порождения свободной группы F_2 инициальными автоматами $\mathcal{A}_q$, $\mathcal{B}_s$ для подходящих состояний q и s. К сожалению, в [7] приведена только схема доказательства.

Полное доказательство, использующее новые идеи и методы по сравнению со сформулированными в [7] леммами, было опубликовано Я. Воробцом и М. Воробец [186], которые не только доказали, что действительно $\mathcal{A}_q$, $\mathcal{B}_s$ порождают группу, изоморфную F_2, но и что $G(\mathcal{A}) \simeq F_3$, т.е. состояния автомата $\mathcal{A}$ независимы относительно операции композиции автоматов. В дальнейшем ими были построены бесконечные серии автоматов, порождающих свободные группы различных рангов [187]. Заметим, что до работы [186] свободные группы некоторых (достаточно высоких рангов) были реализованы как самоподобные группы автоматов Гласнером и Мозесом [68]. Помимо различия в самой схеме доказательств утверждений в этих работах, важным отличием реализации в них свободных групп автоматами является то, что в [68] состояния автомата задают не только элементы базиса, но и обратные к ним элементы, в то время как в [186] разным состояниям отвечают разные элементы базиса.

Так как некоммутативная свободная группа, очевидно, удовлетворяет как условию наследственной нетривиальности пересечений, так и условию наследственной свободы от конечных

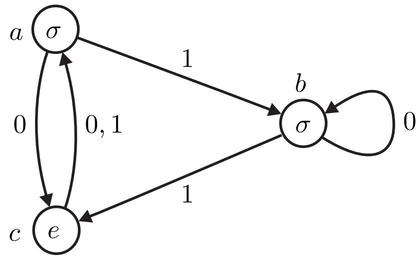

Рис. 5.1. Автомат Алешина

подгрупп, то в силу предложения 4.11 всякое ее самоподобное сферически транзитивное действие топологически свободно. Однако в данном примере действие не абсолютно свободно, так как стабилизаторы некоторых точек нетривиальны (например, как заметил Я. Воробец (устное сообщение), стабилизатор точки 1^∞ является бесконечно порожденной группой). Было бы интересно для этого и следующего примеров описать все точки границы, имеющие нетривиальный стабилизатор, а также и сами стабилизаторы этих точек. Также было бы интересно найти реализацию свободной группы ранга ≥ 2 как сильно самоподобной группы, действующей на границе соответствующего дерева абсолютно свободно (если такая реализация существует).

Пример 5.2. Второй интересный пример существенно свободного действия доставляет автомат Беллатерра, изображенный на рис. 3.2, имеющий номер 846 в классификации из [35] и порождающий свободное произведение $C_2 * C_2 * C_2$ трех копий группы порядка 2. Соответствующий результат был получен моими учениками Е. Мунтяном и Д. Савчуком, а его доказательство можно найти в [142, p. 25].

Так как эта группа, очевидно, удовлетворяет обоим условиям определения 4.4, то в силу предложения 4.11 группа $C_2 * C_2 * C_2$, реализованная автоматом на рис. 3.2, действует существенно свободно на границе бинарного дерева.

Реализации F_3 и $C_2 * C_2 * C_2$ конечными автоматами позволят нам в разд. 10 эффективно построить последовательности асимптотических экспандеров, которые будут определены ниже.

Пример 5.3. Рассмотрим теперь группу $\mathcal{L}$ из примера 2.2, реализованную автоматом из рис. 3.1 и названную лэмплайтером. Лэмплайтер действует на дереве существенно свободно, как было впервые замечено в [95], где были использованы сравнительно сложные (хотя и полезные для ряда задач) аргументы. В частности, в этой работе показано, что если стабилизатор некоторой точки границы бинарного дерева нетривиален для действия группы $\mathcal{L}$, определенного автоматом на рис. 3.1, то он является бесконечной циклической группой (предложение 4 из [95]; заметим, однако, что в утверждении этого предложения в [95] не сказано, что циклическая подгруппа бесконечна, но из приведенного там доказательства ясно, что это так).

В [87] предложен более алгебраический подход к исследованию действия $\mathcal{L}$ на дереве. Напомним, что образующие, соответствующие состояниям a и b автомата, удовлетворяют рекуррентным соотношениям $a = (a,b)\sigma$, $b = (a,b)$, откуда вытекает, что элемент $c = b^{-1}a = \sigma$ является инволюцией и простейшим финитарным (т.е. действующим нетривиально только в окрестности корневой вершины) автоморфизмом, переставляющим две вершины первого уровня и действующим тривиально на поддеревьях, из них растущих.

Обозначим буквами α и γ стандартные образующие лэмплайтера, определенного как сплетение $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$. А именно: $\alpha \in \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ определяется соотношением

$$\alpha = (0, \dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots),$$

где группа порядка 2 представлена в аддитивной записи и состоит из элементов 0, 1, причем единственная ненулевая компонента вектора, определяющего α, занимает нулевую координату, а γ — образующий бесконечной циклической группы, играющей в сплетении роль активной группы. Тогда отображение $\alpha \to c$, $\gamma \to b$ индуцирует изоморфизм между группой, представленной сплетением $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$, и группой, порожденной автоматом. Нетрудно видеть, что элементы b, c действуют на элементы границы дерева (т.е. на бесконечные бинарные последовательности) следующим образом:

$$b(x_1 x_2 x_3 \dots) = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4) \dots,$$

$$c(x_1 x_2 x_3 \dots) = (x_1 + 1) x_2 x_3 \dots$$

(сложение берется по mod 2). Рассмотрим кольцо $R = \mathbb{Z}_2[[t]]$ формальных степенных рядов над полем из двух элементов, элементы которого находятся в естественной биекции с элементами границы дерева (а именно формальному ряду сопоставляется бинарная последовательность его коэффициентов).

При таком отождествлении образующие лэмплайтера действуют преобразованиями кольца R как $\phi_\alpha\colon F(t) \to F(t)+1$, $\phi_\gamma\colon F(t) \to (1+t)F(t)$, а значит, лэмплайтер действует на кольце R преобразованиями следующего вида:

$$F(t) \to (1+t)^m F(t) + \sum_{s\in\mathbb{Z}} k_s(1+t)^s, \qquad k_s \in \mathbb{Z}_2,$$

причем это действие сопряжено действию лэмплайтера на границе дерева, определенному автоматом, представленным рис. 3.1.

Отсюда легко извлечь, что для того, чтобы для некоторого неединичного элемента g группы $\mathcal{L}$ и некоторого ряда $F(t)$ имело место соотношение $g(F(t)) = F(t)$, ряд $F(t)$ должен представлять рациональную функцию вида $\frac{U(t)}{V(t)}$, где $U(t)$, $V(t)$ — полиномы вида $U(t) = (1+t)^{n_1} + (1+t)^{n_2} + \ldots + (1+t)^{n_k}$, $V(t) = 1 + (1+t)^l$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и l — целые числа. Таким образом, для почти всех точек (точнее, для всех, кроме счетного числа) стабилизатор тривиален. Как показано в [145], стабилизатор нетривиален, если точка границы дерева строго периодична (т.е. имеет вид $www\ldots$ для некоторого бинарного слова w), а значит, является бесконечной циклической группой.

Пример 5.4. Нашим следующим примером будет группа Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(1,3) = \langle x, y \mid x^y = x^3\rangle$. Бартольди и Шунич разработали общий подход для реализации групп из всего семейства $\mathrm{BS}(1,n)$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq\pm1$, групп Баумслага–Солитера (и даже более общего класса групп, являющихся расширяющими HNN-расширениями абелевых групп) как самоподобных групп [22]. Для простоты мы рассмотрим здесь только случай $n=3$. Рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}_2$ целых 2-адических чисел и три аффинных преобразования на нем $a(x) = 3x$, $b(x) = 3x+1$, $c(x) = 3x+2$. Тогда преобразования $x = a$, $y = ab^{-1}$ удовлетворяют соотношению $x^y = x^3$ и, как показано в [22], имеет место изоморфизм групп $\langle a,b,c\rangle \simeq \langle x,y\rangle \simeq \mathrm{BS}(1,3)$. Отождествляя элементы кольца $\mathbf{Z}_2$ с бинарными последовательностями коэффициентов разложения по степеням двойки, получаем, что преобразования a, b, c действуют на бинарные последовательности самоподобным образом, а именно выполнены следующие рекуррентные соотношения:

$$a = (a,b), \qquad b = (a,c)\sigma, \qquad c = (b,c).$$

Таким образом, получается реализация группы $\mathrm{BS}(1,3)$ как группы, порожденной автоматом с тремя состояниями над бинарным алфавитом. Этот автомат в [35] имеет номер 2083. Автомат, обратный к нему (который также, очевидно, порождает ту же группу), имеет в той же работе номер 924.

Действие на границе дерева группы $\mathrm{BS}(1,3)$, заданное этими автоматами, существенно свободно, что очевидно следует из аффинности представления группы $\mathrm{BS}(1,3)$ преобразованиями кольца 2-адических чисел (каждое такое преобразование имеет не более одной неподвижной точки).

Любопытно, что в [35] группа Баумслага–Солитера представлена также автоматом 870, однако такое представление определяет действие на границе, уже, по-видимому, не сопряженное действию, задаваемому автоматами 924 и 2083. Поэтому вопрос о его существенной свободе не обосновывается приведенными выше аргументами. Однако сейчас мы покажем, что на самом деле и это действие является существенно свободным.

Пример 5.5. Рекуррентные соотношения, определяемые диаграммой Мура автомата 870 из [35], таковы:

$$a = (c, b)\sigma, \qquad b = (a, c), \qquad c = (b, a)$$

(заметим, что в отличие от [35] мы пишем элемент симметрической группы $\mathrm{Sym}(2)$ справа, а не слева). Стабилизатор первого уровня группы $G = G(\mathcal{A}_{870}) \simeq \mathrm{BS}(1,3)$ порождается следующими элементами:

$$s_1 = b = (a, c), \qquad s_2 = c = (b, a), \qquad s_3 = a^2 = (cb, bc),$$
$$s_4 = aba^{-1} = (c, bab^{-1}), \qquad s_5 = aca^{-1} = (cac^{-1}, b),$$

откуда, в частности, следует, что в данной реализации группа $\mathrm{BS}(1,3)$ является самовоспроизводящейся (так как проекции элементов s_1, s_2, s_3 дают множество $\{a, b, cb\}$ образующих группы). Применяя нильсеновские преобразования к этому множеству, преобразуем его к виду

$$t_1 = (a, c) = b = s_1,$$
$$t_2 = (b, a) = c = s_2,$$
$$t_3 = (c, ab^{-1}c) = ac^{-1}ba^{-1}b = s_5^{-1}s_4s_1,$$
$$t_4 = (1, ac^{-1}ab^{-1}) = ca^{-1}ba^{-1} = s_2s_3^{-1}s_4,$$
$$t_5 = (1, ab^{-1}cba^{-1}b^{-1}) = ac^{-1}ba^{-1}bab^{-1}a^{-1} = s_5^{-1}s_4s_1s_4^{-1}.$$

Если бы оказалось, что хотя бы один из элементов $\alpha = ac^{-1}ab^{-1}$, $\beta = ab^{-1}cba^{-1}b^{-1}$ неединичен, то это бы противоречило существенной свободе действия образующих на границе. Однако на самом деле эти элементы равны единичному элементу. Действительно, имеют место соотношения

$$\alpha = (ca^{-1}ba^{-1}, 1) = (\alpha^{ba^{-1}}, 1),$$
$$\beta = (1, ba^{-1}bab^{-1}c^{-1}) = (1, \gamma),$$
$$\gamma = (ab^{-1}cba^{-1}b^{-1}, 1) = (\beta, 1),$$

из которых вытекает, что $\alpha, \beta, \gamma = 1$.

Воспользуемся предложением 4.5 и докажем тривиальность $\mathrm{rist}_G(1)$. Пусть $\phi\colon a \to c$, $b \to a$, $c \to ab^{-1}c$ (так что ϕ отображает левые проекции элементов s_1, s_2, s_3 на правые проекции). Отображение ϕ распространяется на всю группу G до автоморфизма. Действительно, как доказано в [35], имеют место соотношения $c = ab^{-1}a$ и $\mu^b = \mu^3$, где $\mu = b^{-1}a = a^{-1}c$, показывающие, что на самом деле группа G является 2-порожденной и изоморфной группе $\mathrm{BS}(1,3)$ (то, что эта группа не имеет дополнительных соотношений, легко проверяется). С помощью преобразований Титсе (см. [128]) легко показать, что ϕ продолжается до гомоморфизма G на себя, а отсюда в силу хопфова свойства группы $\mathrm{BS}(1,3)$ (вытекающего из финитной аппроксимируемости этой группы) следует, что на самом деле ϕ продолжается до автоморфизма. А раз так, то любой элемент g стабилизатора $\mathrm{st}_G(1)$ имеет вид $g = (h, \phi(h))$, $h \in G$, что показывает тривиальность жесткого стабилизатора первого уровня, а следовательно, и существенную свободу рассматриваемого действия группы $\mathrm{BS}(1,3)$.

Метод доказательства существенной свободы действия, примененный в приведенном примере, может быть применен и в других примерах действий на бинарном дереве, для которых мы знаем изоморфный тип группы (а следовательно, можем определить, продолжается ли отображение, заданное на множестве образующих, до автоморфизма всей группы). А именно если G — сильно самоподобная группа, действующая на бинарном дереве, с множеством образующих $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, то метод состоит в следующем. Вначале вычисляем образующие s_j, $j \in J$ (где J — конечное множество индексов), стабилизатора первого уровня, используя, скажем, метод Радеймейстера–Шрейера (см. [128]). Расписываем их как пары $s_j = (s_j^{(0)}, s_j^{(1)})$, используя рекурсии, индуцированные диаграммами Мура автомата, задающего группу. Рассматриваем s_j и эти пары как элементы свободной группы F_A и прямого произведения $F_A \times F_A$ соответственно, где A — алфавит, находящийся в биекции с состояниями автомата (т.е. с порождающими группы G). Применяя нильсеновские преобразования над этими образующими, переводим их в множество образующих $\{t_j,\ j \in J\}$, у которого проекция на первую координату приведена по Нильсену (см. [128]), т.е. начинается с нильсеновского множества образующих b_k, $k \in K$, некоторой подгруппы $H \le F_A$, продолженного последовательностью единичных элементов. Если группа G самовоспроизводящаяся, то $H = F_A$ и (возможно, после применения дополнительных нильсеновских преобразований) множество $\{t_j,\ j \in J\}$ принимает вид

$$t_1 = (a_1, w_1), \quad \dots, \quad t_m = (a_m, w_m), \quad t_{m+1} = (1, r_1), \quad \dots, \quad t_{m+l} = (1, r_l),$$

где $m + l = |J|$.

Предположим, что элементы $w_1, \dots, w_m$ порождают всю свободную группу F_A (это условие выполнено во многих примерах из атласа самоподобных групп, разработка которого начата в [35]). Тогда отображение $\phi\colon a_i \to w_i$, $i = 1, \dots, m$, определяет автоморфизм свободной группы $F_m = F_A$. Если ϕ — тождественный автоморфизм, то подгруппа прямого произведения $F_m \times F_m$, порожденная элементами указанного вида, является подгруппой, имеющий вид, который был использован Михайловой [138] для доказательства того, что проблема вхождения в прямые произведения свободных групп алгоритмически неразрешима. Даже если $\phi \ne 1$, будем называть подгруппы, порожденные элементами указанного вида, михайловскими (очевидно, это фактически тот же класс подгрупп, что и в случае $\phi = 1$). Если хотя бы один из элементов r_i отличен от единичного, то $\mathrm{rist}_G(1) \ne 1$ и действие не является существенно свободным. Предположим, что все r_i равны единице. Будем говорить, что в этом случае задание группы G с помощью конечного автомата принадлежит диагональному типу (это согласуется с определением 2.2(e)). Это условие не зависит от того, каким образом нильсеновскими преобразованиями приводились пары элементов к михайловской форме.

Предложение 5.1. *Пусть G — сильно самоподобная группа, действующая на бинарном дереве и имеющая стабилизатор первого уровня, приводящийся нильсеновскими преобразованиями к диагональному типу. Пусть ϕ — автоморфизм свободной группы F_A, построенный выше. Тогда действие существенно свободно тогда и только тогда, когда ϕ индуцирует автоморфизм группы G.*

Доказательство. Если ϕ не индуцирует автоморфизм, то это означает, что $\mathrm{st}_G(1)$ содержит элемент вида $(g, \phi(g))$, $g = 1$, $\phi(g) \ne 1$, и, таким образом, действие не существенно свободно. Если же ϕ индуцирует автоморфизм G, то любой элемент $\mathrm{st}_G(1)$ имеет вид $(g, \phi(g))$ и из равенства $g = 1$ вытекает равенство $\phi(g) = 1$. Таким образом, $\mathrm{rist}_G(1) = 1$ и, применяя предложение 4.5, получаем утверждение. $\square$

Проверка того, что ϕ индуцирует автоморфизм G, очевидно, эквивалентна проверке того, переводит ли ϕ определяющие соотношения группы G в определяющие соотношения. Действительно, в этом случае ϕ индуцирует гомоморфизм группы G на себя, а в силу свойства хопфовости (т.е. всякая истинная фактор-группа неизоморфна самой группе) конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп ϕ будет на самом деле изоморфизмом. Если задание группы образующими и соотношениями известно, то обычно такая проверка не представляет труда. Если же задание неизвестно и, более того, неизвестен изоморфный тип группы, то могут возникнуть серьезные осложнения проверки существенной свободы действия.

Хотелось бы иметь классификацию всех групп в классах $(2,3)$, $(3,2)$ и $(2,4)$ групп, действующих существенно свободно на границе бинарного дерева. Для классов $(2,3)$ и $(3,2)$ это должна быть сравнительно несложная задача, однако для класса $(2,4)$ задача может оказаться на порядок более трудной.

6. ГРАФЫ ШРЕЙЕРА

Одно из первых использований графов Шрейера (или орбитальных графов Шрейера) при исследовании свойств динамических систем относится к работам [106, 87, 16, 40]. Недавняя работа [83] дает еще один пример полезности графов Шрейера в эргодической теории и смежных вопросах. Существуют некоторые нюансы в подходе к определению графа и в методах изучения его свойств, поэтому вначале изложим основную терминологию и соглашения, которых будем придерживаться.

Будем рассматривать только локально конечные графы, обозначая их большими греческими буквами, в основном буквой Г. Такой граф состоит из пары (V,E), где V — это множество вершин, а E — множество ребер, визуально представленных в виде дуг (кривых, гомеоморфных отрезку) на плоскости или в пространстве, причем задано отображение $\delta\colon E\to(V\times V)/\asymp$, где $\asymp$ есть отношение эквивалентности, отождествляющее пары (u,v) и (v,u) (т.е. ребру ставится в соответствие неупорядоченная пара вершин — его концов). При этом u и v считаются смежными вершинами (обозначается это $u\sim v$), а ребро e — их соединяющим. Также будем говорить, что ребро e инцидентно вершинам u, v, а вершины u и v инцидентны ребру e. Мы допускаем петли (т.е. ребра, у которых концы совпадают) и кратные ребра (т.е. число ребер, соединяющих две вершины, может быть больше 1). В литературе по теории графов такие графы обычно называются мультиграфами, но префикс “мульти” мы будем опускать. Наглядное представление о графах дают диаграммы, являющиеся геометрическими реализациями графа. Путь в графе — это последовательность ребер, у которой начало следующего ребра совпадает с концом предыдущего. Комбинаторная длина пути — это число ребер в нем, т.е. длина одного ребра предполагается равной 1. Можно вводить и более сложные метрики на графе, однако мы здесь этого делать не будем.

Граф называется связным, если любые две вершины в нем соединены путем. Для каждой вершины $v\in V$ определено понятие степени $\deg(v)$. Под этим понимается число ребер, инцидентных v. При этом будем считать, что петля, исходящая из вершины v, вносит число 2 в кратность. В некоторых случаях (например, когда граф является графом Шрейера группы, порожденной элементами порядка 2) удобно считать, что петли дают вклад 1 в степень (как, например, в рассмотренном ниже примере 7.1 графов Шрейера, ассоциированных с группой $\mathcal{G}$, которая порождена четырьмя инволюциями). Ниже при определении графов Шрейера мы уточним, какой вклад в степень дают петли.

До сих пор речь шла о неориентированных графах. Однако наряду с неориентированными графами мы временами будем иметь дело с ориентированными графами. Под ориентированным графом понимается граф, у которого произвольное ребро $e\in E$ определяется упорядоченной парой вершин $(\alpha(e),\beta(e))$, первая из которых играет роль начала, а вторая конца ребра. Таким образом, каждое ребро имеет начало и конец (которые совпадают в случае, когда ребро является петлей). Визуально ориентация описывается выбором направления на каждом ребре, представленном дугой в геометрической реализации графа.

В ориентированном случае каждая петля вносит единичный вклад в степень вершины. Для нас наиболее интересным (как в ориентированном, так и в неориентированном случае) является класс регулярных графов, т.е. когда степень всех вершин одинакова и равна числу

$d \geq 3$. Очевидно, случаи регулярных графов степени 1 и 2 довольно просты для изучения, исследование же регулярных графов степени 3 фактически имеет тот же порядок сложности, что и исследование графов более высокой степени.

Следующий тип графов, которые мы намерены обсудить, — это крашеные графы. Под *крашеным* графом мы понимаем ориентированный или неориентированный граф, ребра которого помечены буквами конечного алфавита. Графически это изображается в виде меток ребер соответствующими буквами. Если буквы олицетворяют цвета, то можно представлять себе, что ребра крашены соответствующим цветом, и использовать цветные диаграммы при геометрической реализации графа.

Важным примером крашеного ориентированного графа является граф Кэли $\Gamma(G, A)$ конечно порожденной группы G, порожденной множеством $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Множество его вершин отождествляется с множеством элементов группы, ребрами служат упорядоченные пары (g, ag), $g \in G$, $a \in A$ (порядок пары вершин (g, ag) определяет, какая вершина соответствующего ребра является начальной, а какая конечной). Таким образом, метками ребер служат образующие, а соответствующим алфавитом, формально описывающим множество меток, является алфавит A. Описанный граф Кэли является левым графом Кэли (так как при его построении использовано умножение слева на образующие). Аналогичным образом определяется правый граф Кэли. Группа G действует умножениями справа на множествах вершин и ребер левого графа Кэли, при этом правое умножение на произвольный элемент $g \in G$ определяет автоморфизм графа $\Gamma(G, A)$. Таким образом, граф Кэли является вершинно транзитивным (т.е. группа его автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин). Граф Кэли является однородным степени $2m$, где m — число порождающих, если рассматривать его как неориентированный граф, и однородным степени m, если рассматривать его как ориентированный граф. Он зависит и от группы, и от системы порождающих, однако его *грубые* свойства такие, как количество концов, аменабельность, рост и т.д., не зависят от выбора порождающих. Формально говоря, к обозначению $\Gamma(G, A)$ надо еще добавить символ, указывающий, о каком (левом или правом) графе Кэли идет речь, но обычно это не делается (а оговаривается с самого начала). Нередко при изучении графов Кэли ориентация и раскраска образующими удаляются. Асимптотические свойства группы при этом продолжают быть отраженными в асимптотических свойствах графа, однако память об алгебраических свойствах в значительной степени теряется. Может оказаться, что неизоморфные группы обладают изоморфными (неориентированными и некрашенными) графами Кэли [36, 100]. Изучением групп с использованием языка графов Кэли и других геометрических средств (диаграммы ван Кампена, границы и т.д.) занимается геометрическая теория групп, с основами которой можно познакомиться по книгам [128, 100, 137].

Обобщением понятия графа Кэли является граф Шрейера, к определению которого мы и переходим. Пусть, помимо группы G с системой образующих A, задана еще и подгруппа $H \leq G$. Множество вершин графа Шрейера (G, H, A) состоит из левых классов смежности gH, а ребрами служат упорядоченные пары (gH, agH), $a \in A$, дополненные меткой a. Определенный таким образом граф является левым графом Шрейера. Аналогичным образом определяется правый граф Шрейера. Заметим, что в том случае, когда порождающий $a \in A$ является инволюцией (т.е. $a^2 = 1$), каждое ребро, меченое этим порождающим, следует считать неориентированным и при графической реализации графа стрелка, указывающая на ориентацию ребра, должна опускаться. Таким образом, мы определили ориентированные графы Шрейера (которые на самом деле являются частично ориентированными в том случае, когда среди образующих имеются элементы порядка 2). Если в графе Шрейера удалить ориентацию ребер, то получится неориентированный граф Шрейера. При этом следует помнить, что в неориентированном варианте графа Шрейера петли, которые помечены неинволюцией, дают вклад 2 в степень соответствующей вершины, а те, которые помечены инволюцией, дают вклад 1.

В отличие от графов Кэли для графов Шрейера уже не существует естественного действия базовой группы G автоморфизмами и даже имеются примеры графов Шрейера с тривиальной группой автоморфизмов. Однако имеется естественное действие базовой группы на множестве вершин (левым умножением в случае левого графа Шрейера), которое будет использовано в разд. 8 для построения по графу динамической системы. Очевидно, графы Шрейера (как и графы Кэли) являются связными и однородными степени $2m$, где m — число образующих, если среди них нет инволюций и забыть об ориентации ребер. Если же есть инволюции и следовать принятым выше соглашениям о вкладе петель в степень вершин, то степень вершин равна $i + 2j$, где i — число инволюций, а j — число неинволюций среди порождающих. Заметим, что иное (но по существу эквивалентное) определение графов Шрейера, которое опирается на подход Серра к определению графов, можно найти в [87]. Во многих вопросах, связанных с изучением асимптотики графов и групп, целесообразно иметь дело с *мечеными* графами, т.е. с графами (Γ, o), одна из вершин которых (мы будем обозначать ее o) выделена как начальная вершина. Выбрав начальную точку o, можно отсчитывать расстояние от o до других точек и тем самым определить последовательность шаров в графе с центром в o, функцию роста графа $\gamma_\Gamma(n)$, считающую число вершин, удаленных от o на расстояние $\leq n$, и т.д. Можно инициировать случайное блуждание на графе, начальным положением которого является o, а переходы из текущего положения в соседние происходят вдоль ребер, выходящих из текущего положения, с равными вероятностями (определенное таким образом случайное блуждание называется простым случайным блужданием), и исследовать его асимптотические свойства.

Графы Шрейера тесным образом связаны с орбитальными графами (или графами действия). А именно пусть конечно порожденная группа G с системой порождающих A действует на множестве X. Орбитальным графом действия $\Gamma = \Gamma(G, X, A)$ называется граф, вершинами которого служат элементы X и две вершины $x, y \in X$ соединены ориентированным ребром, помеченным буквой $a \in A$, если $y = a(x)$. Очевидно, граф действия связен в том и только том случае, если действие транзитивно. Орбитальным графом Γ_x, $x \in X$, называется подграф графа действия, вершинами которого являются точки орбиты $G(x)$. Орбитальный граф связен.

Нередко при исследовании асимптотических свойств графов приходится использовать естественную топологию в пространстве связных регулярных меченых графов, которая впервые была использована в [72] при исследовании алгебраических свойств групп промежуточного роста, а в [94] при исследовании случайных блужданий. Базой открытых множеств в этой топологии служат множества $B_{(\Gamma,o)}(n)$, состоящие из меченых графов таких, что подграф с множеством вершин, расположенных на расстоянии $\leq n$ от выделенной вершины, и индуцированным множеством ребер изоморфен аналогичному подграфу в (Γ, o). Пространство d-регулярных меченых графов с указанной топологией будем обозначать $\mathcal{X}_d$. Аналогичным образом будут обозначаться пространства $2m$-регулярных меченых неориентированных графов Кэли $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Cay}}$ и $2m$-регулярных меченых неориентированных графов Шрейера $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G)$ m-порожденной группы G (среди образующих которой нет инволюций) соответственно. Можно рассматривать аналогичные пространства графов Кэли и графов Шрейера и в ситуации, когда среди образующих есть инволюции (только надо вводить специальные обозначения). Если аргумент G в $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G)$ отсутствует, то подразумевается свободная группа F_m ранга m (являющаяся универсальным объектом в категории m-порожденных групп).

Все введенные в рассмотрение пространства являются метризуемыми вполне несвязными топологическими пространствами. Расстояние может, например, быть определено соотношением $d((\Gamma_1, o_1), (\Gamma_2, o_2)) = 2^{-n}$, где n является наибольшим натуральным числом таким, что окрестности точек o_1 и o_2 (подграфы) радиуса n в графах (Γ_1, o_1), (Γ_2, o_2) изоморфны. Вместо последовательности $\{2^{-n}\}$ можно взять любую другую убывающую последовательность положительных чисел, стремящуюся к нулю. Можно также рассматривать пространства $\mathcal{X}_{\leq d}$ меченых графов степени $\leq d$ и аналогичные пространства для случая ориентированных графов или графов с раскраской символами конечного алфавита. Все введенные в рассмотрение пространства являются компактными вполне несвязными сепарабельными пространствами. Напомним, что для полных сепарабельных метрических пространств (называемых также польскими пространствами) определено понятие ранга Кантора–Бендиксона.

Проблема 6.1. Каким рангом Кантора–Бендиксона обладает каждое из указанных пространств?

Особенно этот вопрос интересен для пространства графов Кэли.

Каждое из рассмотренных пространств графов можно снабдить вероятностной мерой и изучать типичные свойства графов по отношению к этой мере. Выбор меры может быть подсказан кругом вопросов, которые подлежат рассмотрению, однако, как нам кажется, наиболее естественным выбором являются меры, полученные как предельные точки в слабой топологии последовательности мер μ_n, где μ_n — любая дискретная мера, для которой все цилиндрические множества, определяемые подграфом-окрестностью радиуса n вокруг выделенной точки, имеют одну и ту же меру $1/l_n$, где l_n — число таких окрестностей для данного типа графов.

Интересный подход к построению мер в пространствах графов предложен И. Бенжамини и О. Шраммом [27]. А именно, имея последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечных графов, они предложили рассмотреть ассоциированную с этой последовательностью последовательность мер μ_n, где мера μ_n — равномерная вероятностная мера, сосредоточенная на меченых графах (Γ_n, v), где v пробегает множество вершин графа Γ_n. Хотя в [27] это и не отмечено, но целесообразно отождествлять (Γ_n, v) и (Γ_n, w), если они изоморфны как меченые графы. Любая предельная (в слабой топологии) точка последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет мерой в пространстве графов, которая инвариантна относительно операции замены начальной (т.е. отмеченной) вершины графа на любую другую вершину. Эта операция аналогична той, которая применяется в разд. 8 для построения шрейеровой динамической системы.

Когда мера определена, можно говорить о случайных графах. Хотя случайные графы изучаются достаточно интенсивно, кажется, что предложенная модель случайных регулярных графов еще никем не была рассмотрена подробно. Впрочем равномерная мера на множестве конечных регулярных графов исследуется уже давно [194, 136]. Представляется правдоподобным, что вероятностную модель для бесконечных регулярных графов можно получить предельным переходом из модели для конечных графов (что, впрочем, вполне может натолкнуться на проблемы в случае графов Кэли). Краткое обсуждение вопросов, связанных с вероятностной моделью в пространстве $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Cay}}$, можно найти в [81].

Как было отмечено Каймановичем [107, 108, 110], пространство меченых графов снабжено естественным отношением эквивалентности, возникающим при перемещении отмеченной вершины графа, поэтому можно рассматривать меры, инвариантные относительно этого отношения эквивалентности. Возникающие при этом случайные графы были им названы стохастически однородными. Для графов Шрейера стохастическая однородность равносильна инвариантности соответствующей меры относительно группового действия. Условие стохастической однородности также допускает интерпретацию в терминах стационарных мер для соответствующего простого случайного блуждания по классам отношения эквивалентности (ср. разд. 8 и 11).

Для пространств $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Cay}}$ и $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$ имеется еще один естественный (и эквивалентный предыдущему) способ введения топологии. А именно: задать граф Кэли $\Gamma \in \mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Cay}}$ — это то же самое, что задать пару (G, A), где A есть упорядоченная система образующих группы G, а это в свою очередь эквивалентно заданию тройки (F_m, N, A'), где F_m есть свободная группа с упорядоченным базисом A', находящимся в биекции с множеством A, а N является нормальной подгруппой в F_m такой, что G изоморфна фактор-группе F_m/N при изоморфизме, переводящем базис A' в A с сохранением порядка образующих.

Рассмотрим двухточечное множество $\{0,1\}$ с дискретной топологией и возведем его в степень F_m (т.е. рассмотрим декартово произведение $\mathcal{Y} = \prod_{F_m}\{0,1\}$ с тихоновской топологией). Произвольному подмножеству E в F_m соответствует точка в пространстве $\mathcal{Y}$, являющаяся характеристической функцией E. Пусть $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ — подмножество, состоящее из точек, соответствующих нормальным подгруппам. Тогда подмножество $\mathcal{Z}$ с индуцированной с $\mathcal{Y}$ топологией гомеоморфно пространству $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Cay}}$. Аналогичным образом подмножество $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$, состоящее из точек, соответствующих подгруппам в F_m, с индуцированной топологией гомеоморфно пространству $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$. Это вытекает из того факта, что граф Шрейера $\Gamma(G,H,A)$ группы G с m образующими изоморфен графу Шрейера свободной группы ранга m. Действительно, реализовав G как фактор-группу свободной группы F_m и взяв прообраз $\overline{H}$ подгруппы H при каноническом гомоморфизме, получим, что графы $\Gamma(G,H,A)$ и $\Gamma(F_m,\overline{H},A')$ изоморфны (A' — система порождающих свободной группы, проектирующихся в A при каноническом гомоморфизме).

Аналогичным образом для произвольной счетной группы G определяется пространство $\mathcal{Y}(G)$ подгрупп группы G. В разд. 8 мы рассмотрим действия групп сопряжениями на пространствах подобного вида и дуальные к ним действия (в случае конечно порожденных групп) на пространствах меченых графов Шрейера.

Пространство $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Cay}}$, впервые определенное в [72], а затем изучавшееся в [43] и [44], исследовано достаточно подробно, хотя и имеется много нерешенных вопросов. Известно, что оно обладает замкнутым подмножеством без изолированных точек (т.е. гомеоморфным канторову совершенному множеству), состоящим (за исключением счетного подмножества) из групп промежуточного роста, а также обладающим всюду плотным подмножеством типа G_δ, состоящим из периодических групп. Группы с T-свойством Каждана образуют в нем открытое подмножество [170]. Так называемые предельные группы (в английской транскрипции *limit groups*, также называемые в отечественной литературе вполне свободно аппроксимируемыми группами), которые впервые были определены Г. Баумслагом, а затем исследовались В.Н. Ремесленником, О. Харлампович, А. Мясниковым, З. Селой и другими, являются пределами свободных групп в пространстве $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Cay}}$, как доказано в [44]. О пространстве $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$ пока практически ничего неизвестно. Свойства пространства $\mathcal{X}_d$, по крайней мере для четных значений d, в значительной мере связаны со свойствами пространства $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$ ввиду того обстоятельства, что каждый неориентированный $2m$-регулярный граф может быть превращен (добавлением ориентации и меток ребер) в граф Шрейера свободной группы. Ниже будет доказано соответствующее утверждение (теорема 6.1).

Отметим, что подобно тому, как это сделано в [94], можно также рассматривать пространства $\mathcal{Y}_n$, $n = 2,3,\dots$, неоднородных графов, степени вершин которых ограничены сверху числом $n \geq 2$, а также индуктивный предел этих пространств $\mathcal{Y}$. В частности, сходимость в пространствах $\mathcal{Y}_n$ использована в [94] для доказательства некоторых утверждений о спектрах предельных графов и спектральных мерах.

Теорема о реализации регулярного графа как графа Шрейера свободной группы, которую мы сейчас докажем, в случае конечных графов доказана Гроссом (ее доказательство приведено в работе А. Любоцкого [126]). То, что ее доказательство может быть адаптировано к бесконечному случаю, отмечено в книге П. де ля Арпа [100, p. 83].

Теорема 6.1. *Пусть Γ является связным неориентированным $2m$-регулярным графом. Тогда существует подгруппа $H \leq F_m$ свободной группы F_m с базисом A такая, что граф Шрейера $\Gamma(F_m,H,A)$ после удаления меток и ориентации становится изоморфным графу Γ.*

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 6.2. *Каждый конечный неориентированный $2m$-регулярный граф Δ обладает 2-фактором* (*т.е.* 2*-регулярным подграфом с тем же множеством вершин, что и* Δ).

Доказательство. Докажем, что Δ обладает подграфом, являющимся объединением попарно не пересекающихся циклов. Доказательство будем вести совместной индукцией по параметрам m, $m \geq 1$, и n — числу вершин в графе. Случаи, когда $m = 1$ или число вершин графа равно 1, тривиальны. Если граф несвязен, то можно воспользоваться индуктивным предположением. Поэтому будем считать Δ связным. Так как степень каждой вершины является четным числом, то существует эйлеров цикл — замкнутый путь γ в графе, проходящий через каждое ребро в точности один раз. Заметим, что обычно теорема об эйлеровом цикле доказывается для графов без кратных ребер и петель. Однако она верна и для мультиграфов, если придерживаться соглашения, что петли вносят кратность 2 в степень вершины. Действительно, во-первых, петли можно удалить (если есть эйлеров цикл для графа с удаленными петлями, то очевидно, как его построить в графе с петлями). Далее, если имеются кратные ребра, то каждое из них можно “удвоить” добавлением вершины, разбивающей это ребро пополам. В результате такой процедуры получим граф без кратных ребер (и без петель), причем степень каждой вершины будет четной. У этого графа имеется эйлеров цикл, который индуцирует очевидным образом эйлеров цикл на исходном графе.

Превратим γ в ориентированный путь, выбрав произвольным образом направление его обхода. Это задаст ориентацию ребер графа Δ, причем в каждую вершину будет входить m ребер и столько же будет выходить. Построим новый граф $\widetilde{\Delta}$, совершив в каждой вершине $v \in V(\Delta)$ перестройку, состоящую в раздвоении вершины v на две компоненты v^- и v^+. При этом ребра, входившие в v, становятся входящими в v^-, а ребра, выходившие из v, становятся выходящими из v^+. Множество вершин графа $\widetilde{\Delta}$ распадается на два непересекающихся подмножества V^-, V^+, состоящих из “стоков” и “источников” соответственно, причем ребра соединяют только пары вершин, расположенные в разных частях этого разбиения (направление стрелок идет от источника к стоку). Граф $\widetilde{\Delta}$ является двудольным (т.е. множество вершин разбито на два непересекающихся подмножества, причем никакая пара вершин из одного подмножества не соединена ребром) и по теореме Холла обладает совершенным спариванием, т.е. множеством ребер таким, что каждая вершина графа инцидентна одному и только одному ребру. Выбрав одно из таких спариваний, построим 2-фактор на Δ. Для этого начнем построение с произвольной вершины $u \in \Delta$ и выберем ребро, исходящее из этой вершины, которое соответствует ребру из совершенного спаривания графа $\widetilde{\Delta}$. Пусть u_1 — конец этого ребра. Выберем ребро, исходящее из u_1 и принадлежащее построенному уже 1-фактору, и т.д. Так как граф конечен, то через конечное число шагов мы вернемся в одну из ранее пройденных точек. Если бы оказалось, что это не начальная точка, то это бы привело к противоречию со свойствами совершенного спаривания. Таким образом, мы построили в Δ замкнутый цикл δ_1, не проходящий ни через одну вершину более одного раза. Если имеется вершина, не принадлежащая δ_1, то проделаем с ней ту же процедуру, что и для u. Получим цикл δ_2, не имеющий общих вершин с δ_1 и опять-таки проходящий через каждую вершину не более одного раза. Продолжая действовать аналогичным образом, разобьем множество вершин графа на попарно не пересекающиеся подмножества, являющиеся множествами вершин дизъюнктных циклов, проходящих каждую из своих вершин в точности один раз. Это разбиение и определит 2-фактор. Заметим, что дополнительно мы получили ориентированный 2-фактор. $\square$

Доказательство теоремы 6.1. Если граф Шрейера конечный, то воспользуемся доказанной леммой и построим для него 2-фактор δ_1, который по нашему построению является ориентированным (неориентированный фактор всегда можно превратить в ориентированный путем произвольного выбора ориентации на каждом цикле фактора). Пусть $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Раскрасим ребра фактора δ_1 буквой a_1 и удалим их из нашего графа Γ (который для применения индукции обозначим $\Delta = \Delta_1$). Получим $(2m-2)$-регулярный граф Δ_2, для которого найдется ориентированный 2-фактор δ_2, ребра которого раскрасим буквой a_2. Продолжая действовать аналогичным образом, получим цепочку подграфов Δ_i, $i = 1, 2, \dots, m$, и 2-факторов δ_i, объединение ребер которых даст множество всех ребер графа Δ, причем ребра δ_i раскрашены символом a_i. Полученная раскраска и определяет на Δ структуру графа Шрейера свободной группы (так как для того, чтобы раскрашенный элементами базиса A свободной группы граф был графом Шрейера этой группы, необходимо и достаточно, чтобы в каждую вершину входило и выходило в точности одно ребро, раскрашенное символом $a \in A$, и так для каждого порождающего $a \in A$).

Случай бесконечного графа требует дополнительных аргументов. Идея состоит в том, чтобы аппроксимировать такой граф конечными графами, вводя на них соответствующие раскраски, а затем применить диагональный процесс. Формально это воплощается в доказательство следующим образом.

Будем называть ориентированный раскрашенный символами множества порождающих A граф Γ предграфом Шрейера степени $m = |A|$, если для каждого символа $a \in A$ и каждой вершины v графа имеется не более одного входящего в v ребра, раскрашенного символом a, и имеется не более одного выходящего из v ребра, раскрашенного символом a. Такие раскраски назовем допустимыми. Каждый конечный граф, степени вершин которого не превосходят $2m$, может быть дополнен до конечного $2m$-регулярного графа. Действительно, если имеются две различные вершины u и v, степени которых меньше $2m$, то, соединив их ребром, мы увеличим степени этих вершин на 1. Проделаем эту операцию до тех пор, пока такой пары вершин не окажется. Если имеется только одна такая вершина, то ее степень должна быть четным числом. Добавив к этой вершине нужное число петель (каждая из которых добавит кратность 2), получим $2m$-регулярный граф.

Пусть $\Gamma = \Delta$ — бесконечный $2m$-регулярный граф, и пусть $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечных подграфов, где Δ_n состоит из вершин, расположенных на расстоянии не более n от начальной вершины (которую можно изначально выбрать произвольным образом), и тех ребер из Δ, обе вершины которых вошли в Δ_n. На каждом из графов Δ_n вводим ориентацию и раскрашиваем ребра элементами множества A, превращая граф в предграф Шрейера степени m. Строим бесконечное корневое дерево $\mathcal{M}$, элементами которого являются пары (Δ_n, R), где R — допустимая раскраска графа Δ_n, в котором корневая вершина соответствует графу Δ_0, состоящему из одной вершины, а две пары (Δ_n, R) и (Δ_{n+1}, Q) соединены ребром, если ограничение Q на Δ_n дает раскраску R. Так как каждый конечный граф имеет только конечное число допустимых раскрасок, то дерево $\mathcal{M}$ локально конечно, а так как каждый из графов Δ_n обладает хотя бы одной подходящей раскраской, то дерево бесконечно. По теореме Кенига в $\mathcal{M}$ существует бесконечный путь, связывающий корневую вершину с бесконечностью. Этот путь и определяет раскраску на всем графе Δ, которая согласуется с раскрасками на всех графах Δ_n одновременно, тем самым превращая его в граф Шрейера. Теорема доказана. $\square$

Несмотря на то что граф Шрейера обычно не является вершинно транзитивным и, более того, нередко имеет весьма небольшую группу автоморфизмов, реализация регулярного графа как графа Шрейера некоторой группы нередко привносит некое подобие (в некотором смысле скрытой) симметрии в структуру графа, что позволяет применять алгебраические методы или даже методы теории операторных алгебр к его изучению, как это имеет место в [16, 86].

7. ПОДСТАНОВОЧНЫЕ ПРАВИЛА ДЛЯ ГРАФОВ И ПРИМЕРЫ ГРАФОВ ШРЕЙЕРА

В этом разделе мы рассмотрим ряд примеров графов Шрейера, построенных с помощью групп автоматов (т.е. самоподобных групп). Как уже неоднократно обсуждалось выше, такие группы действуют автоморфизмами на d-регулярном корневом дереве. Поэтому для каждого $n = 1, 2, \dots$ можно построить граф Γ_n, определенный действием на соответствующем уровне n, получив таким образом последовательность графов $\{\Gamma_n\}$. Она является накрывающей последовательностью, а именно Γ_{n+1} накрывает Γ_n в смысле теории графов (что соответствует накрытию в топологическом смысле, если иметь дело с неориентированными некрашенными графами). Действительно, легко видеть, что отображение проекции, сопоставляющее вершине $(n+1)$-го уровня ее предшественника на n-м уровне, индуцирует накрытие графа (ребра проектируются в ребра, метки — в метки). Эта конструкция применима к произвольной конечно порожденной группе, действующей на любом корневом сферически однородном дереве. В случае, когда действие транзитивно на уровнях, граф Γ_n изоморфен графу Шрейера $\Gamma(G, \mathrm{st}_G(u), A)$, где u — точка n-го уровня. Кроме последовательности конечных графов $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, с действием группы на бесконечном корневом дереве T естественно ассоциировать граф действия на границе ∂T дерева. Если группа конечна или счетна, то этот граф распадается в несчетное объединение компонент связности Γ_ξ, $\xi \in \partial T$, где Γ_ξ — орбитальный граф для действия на орбите точки ξ, который изоморфен графу Шрейера $\Gamma(G, \mathrm{st}_G(\xi), A)$. Назовем граф $\Gamma(G, \mathrm{st}_G(\xi), A)$ граничным графом Шрейера.

В случае, когда действие транзитивно на уровнях, существует тесная связь между последовательностью $\{\Gamma_n\}$ и граничными графами Шрейера. Пусть $\xi \in \partial T$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вершин пути ξ, $P = \mathrm{st}_G(\xi)$, $P_n = \mathrm{st}_G(u_n)$. Тогда последовательность $\{P_n\}$ является убывающей и очевидным образом выполнено соотношение

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n. \tag{7.1}$$

Предложение 7.1. *Имеет место соотношение*

$$(\Gamma(G, P, A), P) = \lim_{n\to\infty} (\Gamma(G, P_n, A), P_n) \tag{7.2}$$

в смысле топологии пространства $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$.

Доказательство. Заметим, что окрестность графа Шрейера $\Gamma(G, P, A)$ радиуса n с центром в произвольной вершине определяется этой вершиной и множеством слов над алфавитом A длины $\le 2n$, определяющих элементы подгруппы P. В силу соотношения (7.1) для любого k найдется такое N, что при $n \ge N$ множества слов длины $\le 2k$, определяющих элементы из подгрупп P и P_n, совпадают. Тем самым графы $\Gamma(G, P, A)$ и $\Gamma(G, P_n, A)$, $n \ge N$, имеют изоморфные окрестности радиуса k с центрами в выделенных вершинах, представленных классами смежности P и P_n единичного элемента, что и требовалось доказать. $\square$

Соотношение (7.2) будем записывать в сокращенном виде $\Gamma_\xi = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n$, опуская указание выделенных точек. Вопросы о структуре графов Γ_n и Γ_ξ, асимптотических свойствах накрывающей последовательности $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ и бесконечных графов Γ_ξ, в частности спектральных свойствах, представляют интерес для решения многих задач.

Последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, ассоциированная с конечным автоматом (т.е. определенная действием сильно самоподобной группы с множеством образующих, соответствующим множеству состояний конечного автомата), является рекуррентно заданной последовательностью, т.е. определяется первым графом Γ_1 и подстановочным правилом, которое описывает, как получить граф Γ_{n+1} из графа Γ_n. Дадим формальное определение.

Определение 7.1. Пусть $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечных графов Шрейера, ассоциированная с группой G, порожденной множеством A и действующей на регулярном корневом дереве, определенном алфавитом $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ является *рекуррентной*, если существует правило, определяющее по каждому ребру (u, v, a), $u, v \in X^n$, $v = a(u)$, $a \in A$, графа Γ_n и каждому символу $x \in X$ ребро (ux, wy, a) при некотором $y \in X$

и некотором $w \in X^n$ графа Γ_{n+1} таким образом, что граф, полученный из Γ_n указанной подстановкой, осуществленной для всех ребер, изоморфен графу Γ_{n+1} и это верно при каждом n.

В этом определении мы слегка слукавили, так как не определили, что понимается под *правилом.* Однако, приняв это определение на веру, докажем

Предложение 7.2. *Для любого конечного автомата последовательность* $\{\Gamma_n\}$ *является рекуррентной.*

Доказательство этого утверждения очевидно. Соотношения самоподобия $a(xu) = ya'(u)$, $x, y \in X$, $a, a' \in A$, $u \in X^*$, вида (3.2), определяемые автоматом, показывают, что если $w = a'(u)$, то $yw = a(xu)$. $\square$

На самом деле приведенное определение рекуррентности последовательности $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ фактически эквивалентно определению того, что последовательность графов порождена конечным автоматом, и тогда под правилом понимается правило действия на последовательности, заложенное в определение автомата Мили. Определение рекуррентной последовательности графов можно расширить за счет привлечения частично определенных автоматов Мили, т.е. таких автоматов, что некоторые из состояний могут не воспринимать на входе некоторые из символов (или цепочки символов, т.е. здесь речь идет об асинхронных автоматах, алгебраическая и алгоритмическая теория которых обсуждается в [87]). Определение последовательности $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ ориентированных графов в этом случае корректируется следующим образом. Множеством вершин, служащих началами ребер, является множество слов W длины n над алфавитом автомата, которые воспринимаются хотя бы одним состоянием q, а множество вершин U, служащих концами ребер, состоит из слов, являющихся образами слов W из первого множества под действием состояний, которые воспринимают W. При этом соответствующие ребра (W, U) раскрашиваются состоянием, которое переводит W в U.

На наш взгляд, задание последовательностей $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ регулярных графов с помощью конечного обратимого автомата Мили является наиболее эффективным методом описания сложно устроенных графов. Уже довольно простые автоматы с небольшим числом состояний способны порождать очень сложные последовательности конечных графов и бесконечные графы, являющиеся их пределами. В то же время важно отметить, что программная реализация таких графов на компьютерах не требует никаких ухищрений и что компьютеры в зависимости от объема памяти и скоростных качеств способны по заданному конечному автомату и числу n строить соответствующий граф Γ_n и записывать его в свою память. В частности, таким образом могут строиться асимптотические экспандеры, о которых пойдет речь в разд. 10, и, возможно, даже настоящие экспандеры, если ответ на проблему 10.1 окажется положительным.

Сейчас мы хотим обсудить другой более традиционный способ получения последовательностей конечных графов с помощью итерационных процедур, а именно с помощью итерирования *графовой подстановки.* Этот подход используется уже давно, начиная со времени построения графов, ассоциированных с фракталами, известными под именем *треугольника Серпинского* или *алмазного фрактала*, и заканчивая сравнительно недавними “изобретениями” типа *пентагоновских* графов [156]. Идея состоит в следующем.

Если задан граф Γ, то можно построить новый граф $\mathcal{R}(\Gamma)$, заменив некоторые подграфы в Γ на более сложные графы, используя при этом некоторое правило подстановки $\mathcal{R}$. При этом возможны различные вариации на эту тему. Наиболее простой тип подстановок, рассмотренный, например, Превайтом в [155, 156], относится к числу *вершинных* подстановочных правил. Например, подстановку $\mathcal{R}$ можно задать конечным набором $(H_1, \partial H_1), \ldots, (H_m, \partial H_m)$ конечных графов H_i с выделенными в них подмножествами ∂H_i вершин, называемых граничными. При этом предполагается, что выполнены два условия:

(1) H_i симметричен относительно ∂H_i в том смысле, что каждая перестановка множества ∂H_i может быть реализована автоморфизмом графа H_i;

(2) $|\partial H_i| \neq |\partial H_j|$ при $i \neq j$, где $|\cdot|$ обозначает мощность множества.

Вершина v графа Γ называется заменяемой, если ее степень равна $|\partial H_i|$ для некоторого i. Правило $\mathcal{R}$ действует на Γ следующим образом. Граф $\mathcal{R}(\Gamma)$ получается из Γ заменой каждой заменяемой вершины v на граф H_i, для которого $|\partial H_i| = \deg(v)$. При этом вершина v удаляется, а инцидентные ей ребра соединяются (неважно каким образом ввиду симметрии) с граничными вершинами копии графа H_i, которая таким способом “приклеивается” к Γ, и это проделывается с каждой заменяемой вершиной. Если подстановочное правило $\mathcal{R}$ задано, то, начав с любого графа $H = H_0$ (аксиомы), можно построить последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $H_{n+1} = \mathcal{R}(H_n)$, $n = 0, 1, \dots$, которая может оказаться конечной при неудачном выборе правила и начального графа, однако в типичном случае это будет бесконечная последовательность графов, обладающая интересными асимптотическими и комбинаторными свойствами [155, 156]. Можно рассматривать и более сложные локальные подстановочные правила, в которых при подстановке используются не только вершины, но и ребра, и даже более сложные подграфы.

Опишем более общую схему локальных рекуррентных правил. Пусть заданы два конечных дизъюнктных алфавита A и B. Будем рассматривать графы, ребра которых раскрашены буквами из алфавита A, а вершины — словами из множества B^* слов над алфавитом B. При этом разные ребра могут иметь одинаковые метки, в то время как вершины должны иметь разные метки. Категорию таких графов обозначим через $\mathcal{W}_{\mathcal{R}}$.

Локальное правило $\mathcal{R}$ состоит из конечного набора пар (Δ, Ξ) графов, ребра которых раскрашены буквами алфавита A (однако вершины меток не имеют), пары отображений φ, ψ, о которых более подробно будет сказано ниже, и локального правила перестройки (или хирургии). Под ним подразумевается произвольное правило, позволяющее в заданном графе $\Gamma \in \mathcal{W}_{\mathcal{R}}$ однозначно заменить любое вхождение Δ в Γ на Ξ, произведя локальную хирургию согласно этому правилу. Графы Δ будем называть шаблонами, а Ξ — дубликатами. Отображение φ сопоставляет каждой вершине $v \in V(\Delta)$ подмножество вершин $\varphi(v) \subset V(\Xi)$, причем каждая вершина u из $\varphi(v)$ снабжается еще и буквой x_u из алфавита B. При этом $\varphi(v) \cap \varphi(u) = \varnothing$, если $v \neq u$, и $\bigcup_{v \in V(\Delta)} \varphi(v) = V(\Xi)$. Если метка вершины v в графе Γ была $w \in B^*$, то после перестройки каждая из вершин u образа $\varphi(v)$ снабдится меткой xw, где $x = x_u \in B$ — символ, соответствующий этой вершине при правиле перестройки. Отображение ψ сопоставляет каждому ребру $e \in E(\Delta)$ подмножество множества ребер $E(\Xi)$. При этом $\psi(e) \cap \psi(e') = \varnothing$, если $e \neq e'$, $\bigcup_{e \in E(\Delta)} \psi(e) = E(\Xi)$ и каждое ребро из $\psi(e)$ снабжается меткой из A, которая становится меткой этого ребра после хирургии. Перестройка осуществляется одновременной заменой всех вхождений шаблонов в Γ на соответствующие дубликаты. Граф, полученный из Γ с помощью локального правила, обозначается $\mathcal{R}(\Gamma)$. Правило подстановки должно удовлетворять условию, что если вхождения двух шаблонов в граф имеют непустое пересечение, то правило перестройки согласовано на общей части. Можно усложнить процедуру, введя в рассмотрение еще один алфавит C (дизъюнктный с A и B) для дополнительных меток некоторых вершин графов. Вершины, меченые метками из C, будем называть ключевыми (или граничными). Если граф Γ имеет ключевые метки, то ключевые метки могут фигурировать и в шаблонах, и в их дубликатах. После перестройки граф также будет иметь ключевые вершины, в которых надо произвести локальную перестройку согласно дополнительной инструкции (например, добавить петли в этих вершинах).

Начав с графа Γ_0 (аксиомы), с помощью локального правила $\mathcal{R}$ можно построить последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, \dots$, где $\Gamma_{n+1} = \mathcal{R}(\Gamma_n)$, которая в интересных случаях должна быть бесконечной последовательностью с растущим (обычно экспоненциальным образом) размером графов. После того как последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, \dots$, построена, в зависимости от ситуации и целей можно про метки (или часть их) забыть, стерев их и получив таким образом обычную последовательность графов. Очевидно, что приведенная выше схема Превайта построения графов вкладывается в эту более общую схему. При этом мы избегаем довольно обременительного условия симметрии шаблонов. Указанная нами схема хорошо работает для графов Шрейера, порожденных ограниченными автоматами (см. ниже определение 7.2), что будет продемонстрировано на примерах ниже. Ее можно дополнительно усложнить, сделав описание подстановки периодическим с некоторым периодом k. Таким образом, фактически речь идет о том, чтобы, имея k подстановочных правил $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_k$, применять их по очереди в циклическом порядке. Наиболее простой тип подстановочных правил — это когда шаблонами являются только вершины и ребра графов. Приведенные ниже примеры относятся именно к этому типу подстановок.

Второй подход к построению последовательности графов $\{\Gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ состоит в использовании *глобальных* подстановочных правил, которые будем обозначать $\mathcal{S}$. При этом, как и выше, используются три дизъюнктных алфавита A, B и C, причем, как и в случае локальных правил, A используется для меток ребер, слова из B^* используются для меток вершин, а буквы из C используются для того, чтобы метить ключевые (граничные) вершины. Пусть d — число букв в алфавите B. Граф Γ_0 (аксиома) предполагается заданным, и с него начинается построение всей последовательности. Кроме того, для каждой пары (x,y), $x,y \in C$, задан граф $\Theta_{x,y}$, который может быть пустым графом или состоять из одной или двух вершин и некоторого множества (мощности $\le |B|$) ребер, раскрашенных буквами алфавита A. Графы $\Theta_{x,y}$ будем называть мостами ввиду той роли, которую они играют при построении. При $n \ge 0$ граф Γ_{n+1} получается из графа Γ_n следующим образом. Берется дизъюнктное объединение d копий $\Gamma_{n,x}$, $x \in B$, графа Γ_n, которое временно обозначаем $\overline{\Gamma}_{n+1}$, причем вершины этих копий получают метки вида vx, $x \in B$, если метка соответствующей вершины в Γ_n была $v \in B^*$. После этого по указанной правилом $\mathcal{S}$ инструкции в окрестностях ключевых вершин производится локальная перестройка, определяемая C-цветом этой вершины (например, удаляется петля). Затем к $\overline{\Gamma}_{n+1}$ опять-таки согласно инструкции, определяемой $\mathcal{S}$, для каждой пары u,v ключевых вершин, имеющих соответственно метки x и y из C и принадлежащих разным копиям Γ_n, приклеивается граф $\Theta_{x,y}$. Те ключевые вершины, по которым произошла приклейка графов $\Theta_{x,y}$ более чем с одной вершиной, перестают быть ключевыми. Остальные ключевые вершины остаются таковыми, однако в них происходит перемена C-цветов согласно заданной инструкции. Этим и завершается построение графа Γ_{n+1}. Таким образом, формально $\Gamma_{n+1} = \mathcal{S}(\Gamma_n) = \mathcal{S}^n(\Gamma_0)$. После того как последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ построена, в зависимости от ситуации и стоящих задач все метки (или только их часть) можно стереть. Если не заботиться о том, чтобы вершины графа Γ_n находились во взаимно однозначном соответствии со словами длины n над алфавитом B, то можно не заботиться о раскрашивании вершин словами из B^*, а графы-мосты $\Theta_{x,y}$ выбирать устроенными более сложным образом (т.е. содержащими и более двух вершин), только тогда надо отметить в каждом из них пару ключевых (граничных) вершин, снабдив их метками из алфавита C, и при приклеивании $\Theta_{x,y}$ к $\overline{\Gamma}_{n+1}$ придерживаться соглашения, что отождествляемые ключевые вершины должны иметь одинаковые метки. Опять-таки, как и в локальном правиле, процедуру можно усложнить, допуская периодичность правила построения с некоторым периодом k.

Заметим, что одним из наиболее существенных различий в описании локального и глобального правил построения графов является то, что в локальном случае мы приписываем символ $x \in B$ слева к метке вершины, в то время как в глобальном правиле мы приписываем тот же символ справа.

Указанный подход к построению графов на основе глобальных подстановочных правил так же, как и локальный подход, восходит к исследованиям по теории фракталов. С классическими фракталами, как то, например, треугольник Серпинского, фрактал Коха или алмазный фрак-

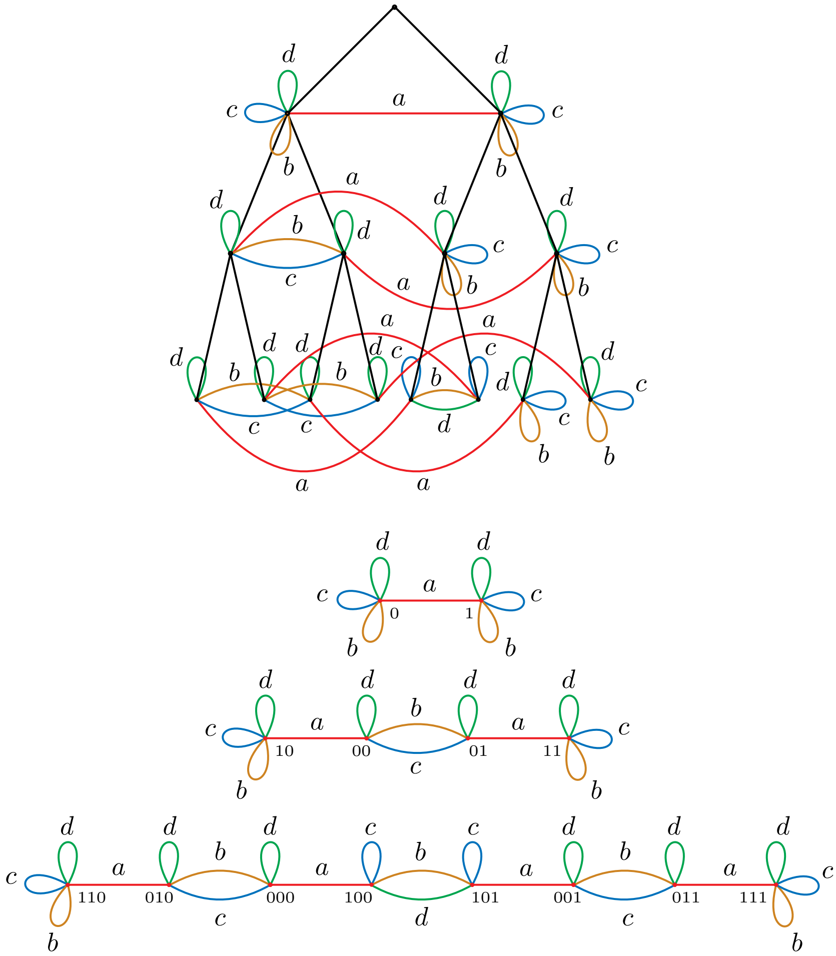

Рис. 7.1. Орбитальные графы действия на уровнях 1, 2, 3 дерева и их “линейчатая” развертка

тал [65], обычно связывается последовательность графов, аппроксимирующая эти фракталы. Для обобщения этих и других примеров были введены понятия конечно разветвленного самоподобного фрактала и последовательности конечных графов, ассоциированных с ним, как это присутствует в работах Кигами, Барлоу, Стрихартца, Некрашевича, Тепляева и других исследователей [117, 12, 174, 182, 146]. То обстоятельство, что многие фрактальные множества могут быть представлены как границы естественно возникающих гиперболических по Громову графов, что дает новые средства для их анализа, было впервые отмечено Каймановичем [108].

Новый поворот теория фракталов и ассоциированных с ними самоподобных графов получила в результате привлечения идей и методов теории самоподобных групп, инициированных работами автора, Гупты и Сидки, Сущанского, Некрашевича, Бартольди и других математиков, а также связанных с ней теории групп итерированной монодромии, развитой в основном в работах Некрашевича [142, 18], и теории граничных пространств, ассоциированных с сжимающимися самоподобными группами [142]. Это позволило по-новому взглянуть на такие классические объекты, как множества Жюлиа, и определить новый подход к аппроксимации их дискретными объектами типа графов и даже клеточных комплексов [144].

Как мы уже не раз обсуждали, важную роль при изучении динамических систем играют результаты, которые описывают типичные свойства графа. Одним из результатов такого рода является недавний результат Д. Д’Анжели, Е. Бондаренко и Т. Нагнибеды о том, что число концов в типичном графе Шрейера для действия самоподобной группы на границе дерева фиксировано (и, таким образом, является инвариантом динамической системы) [34].

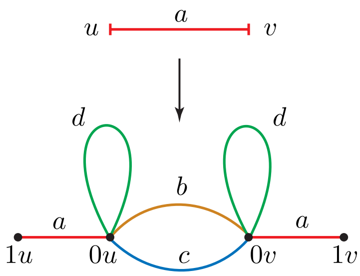

Рис. 7.2. Первое правило подстановки

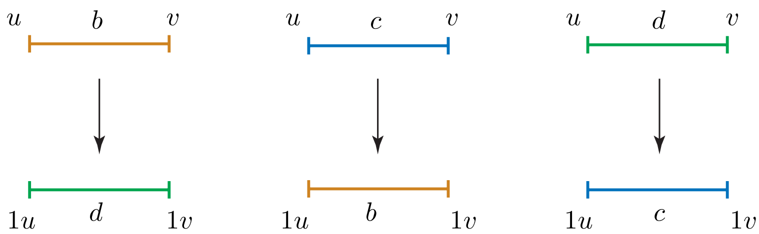

Рис. 7.3. Второе правило подстановки

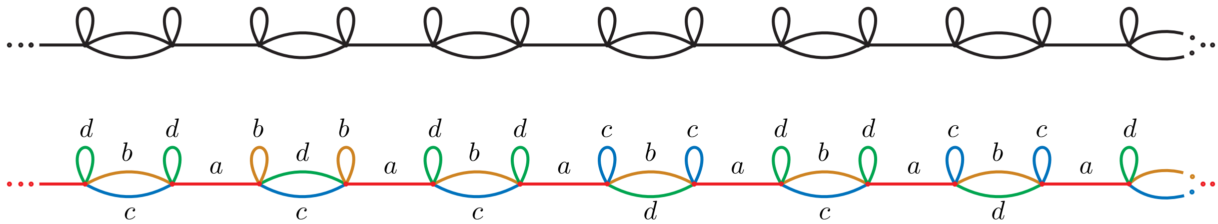

Рис. 7.4. Бесконечный граф Шрейера с двумя концами

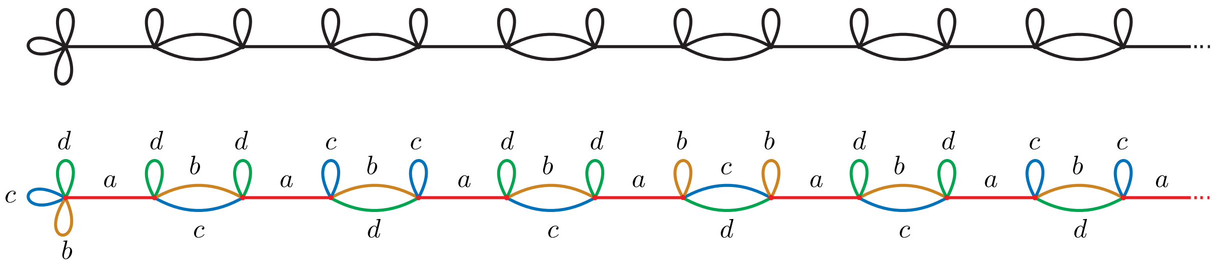

Рис. 7.5. Бесконечный граф Шрейера с одним концом

После всех этих обсуждений наступило время привести конкретные примеры.

Пример 7.1. Начнем с группы промежуточного роста $\mathcal{G}$, порождающие a, b, c, d которой имеют порядок 2 (и, таким образом, вносят вклад 1 в степень вершины графа Шрейера, если эта вершина переходит в себя под действием образующего). Графы Шрейера Γ_1, Γ_2, Γ_3, ассоциированные с первыми тремя уровнями дерева, указаны на рис. 7.1, а локальные подстановочные правила продемонстрированы диаграммами рис. 7.2, 7.3. Бесконечные графы Шрейера изображены на рис. 7.4, 7.5, причем в двух вариантах — без меток и с метками ребер. Ниже мы более подробно остановимся на свойствах этих графов, а пока опишем глобальное правило подстановки для этого случая.

Для построения Γ_{n+1} из Γ_n строим две копии $\Gamma_{n,0}$, $\Gamma_{n,1}$ графа Γ_n, добавляя справа к метке каждой вершины символ 0 или 1. Если $n = 3m+1$, удаляем петли, помеченные символами b и c, в вершинах $1^{n-1}00$ и $1^{n-1}01$ в $\Gamma_{n,0}$ и $\Gamma_{n,1}$ соответственно и заменяем их ребрами с метками b и c, соединяющими вершины $1^{n-1}00$ и $1^{n-1}01$. Аналогичным образом, если $n = 3m + 2$, заменяем петли с метками b и d в вершинах $1^{n-1}00$ и $1^{n-1}01$ двумя ребрами, имеющими те же метки и соединяющими те же вершины. И наконец, если $n = 3m$, проделываем аналогичную процедуру для пары символов c, d. Описанная процедура является периодической с периодом 3. Алфавитом A в этом примере выступает множество образующих $\{a, b, c, d\}$, $B = \{0, 1\}$. Мы не использовали третьего алфавита C, однако можно было бы ввести в рассмотрение и его, скажем, положив $C = \{R, W\}$ и приписав левой вершине 0 графа Γ_1 (будем считать, что аксиома соответствует значению $n = 1$) метку R, а правой — метку W. Тогда правило предписывает в копиях $\Gamma_{n,0}$, $\Gamma_{n,1}$ в ключевых вершинах с меткой R удалить петли и соединить их парой ребер, снабдив их метками согласно приведенному выше описанию (причем с учетом периодичности). В то же время ключевые вершины, меченые символом W, остаются ключевыми, но первая из них (а именно $1^{n-1}0$) меняет свою метку на R.

Этот пример, равно как и примеры, связанные с группой $\widetilde{\mathcal{G}}$, обертывающей группу $\mathcal{G}$, и 3-группой Гупты–Сидки [99], впервые был рассмотрен в [16].

Теорема 7.3. (а) *Две точки $\xi = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\zeta = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n, v_n \in \{0, 1\}$, границы бинарного дерева находятся в одной орбите группы $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда найдется такое n_0, что $u_n = v_n$ для всех $n \ge n_0$.*

(б) *Последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечных графов Шрейера группы $\mathcal{G}$ с системой образующих a, b, c, d является подстановочной и описывается приведенными выше локальными и глобальными подстановочными правилами. В графе Γ_n, развернутом на плоскости в виде линейчатого графа, как указано на рис. 7.1, крайние вершины 0^n и 1^n занимают позиции с номерами p_n и 2^n соответственно, где $p_n = \frac{1}{3}(2^n - 1)$, если n четно, и $p_n = \frac{1}{3}(2^n + 2)$, если n нечетно.*

(в) *Существует только два типа бесконечных неориентированных и без раскраски графов Шрейера для группы $\mathcal{G}$ с системой образующих a, b, c, d. Они указаны на рис. 7.4 и 7.5 и имеют один и два конца соответственно. Граф Γ_ξ имеет один конец в том и только том случае, если точка ξ принадлежит орбите точки 1^∞.*

(г) *Графы Γ_ξ, $\xi \in \partial T$, попарно неизоморфны (как ориентированные крашеные графы).*

Доказательство. (а) Согласно рекуррентным соотношениям (2.9) действие любого образующего на произвольную последовательность символов меняет максимум один символ. Поэтому очевидно, что если две бесконечные последовательности лежат в одной орбите, то начиная с некоторого места они должны совпадать. Предположим, наоборот, что n есть место, начиная с которого последовательности ζ, η совпадают, а u, v, $u \ne v$, — их начала длины n (которые различны). Индукцией по n докажем, что последовательности лежат в одной орбите. Пусть $u = u_1, \dots, u_n$, $v = v_1, \dots, v_n$, $u_n \ne v_n$. Если $u_1 \ne v_1$, то, подействовав на ζ порождающим a, можно добиться совпадения первых символов. Пусть теперь $u_1 = v_1$. По индуктивному предположению найдется элемент g, переводящий $\{u_n\}_{n=2}^{\infty}$ в $\{v_n\}_{n=2}^{\infty}$. В силу того что $\mathcal{G}$ является самовоспроизводящейся группой (определение 3.6), сечение $\mathcal{G}_{u_1}$ стабилизатора вершины u_1 равно копии группы $\mathcal{G}$, действующей на поддереве T_{u_1}. Другими словами, для любого элемента $g \in \mathcal{G}$ найдется элемент $h \in \mathcal{G}$ такой, что соотношение $h(u_1 w) = u_1 g(w)$ выполнено для любой последовательности $w \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \partial T$. Следовательно, существует и элемент h, переводящий ζ в η.

(б) Пусть u и v — вершины n-го уровня дерева и $a(u) = v$. Напомним, что a меняет первый символ любой непустой последовательности на противоположный, элементы b, c действуют на последовательности вида $0w$ согласно соотношениям $b(0w) = 0a(w)$, $c(0w) = 0a(w)$, а на последовательности вида $1w$ согласно соотношениям $b(1w) = 1c(w)$, $c(1w) = 1d(w)$ и, наконец, действие элемента d определяется соотношениями $d(0w) = 0w$, $d(1w) = 1b(w)$. Отсюда вытекает, что граф, состоящий из четырех вершин $0u$, $1u$, $0v$, $1v$, фигурирующий в правиле подстановки, представленном на рис. 7.2, является подграфом графа Γ_{n+1} и эта часть графа соответствует ребру в Γ_n, соединяющему вершины u и v и помеченному порождающим a. Точно так же рекуррентные соотношения между образующими определяют соответствие между ребрами, помеченными порождающими b, c, d в графах Γ_n и Γ_{n+1}, указанное на рис. 7.3. Таким образом, обосновано локальное правило подстановки.

Характер локальных подстановочных соотношений показывает, что графы Γ_n имеют структуру линейной цепочки длины 2^n (точнее, изоморфны такой структуре), а также что на n-м шаге итераций вершина дерева 1^n занимает крайнее правое положение, т.е. имеет номер 2^n. Для нахождения местоположения вершины 0^n в линейчатой структуре назовем местоположение вершин графа Γ_n, развернутого в виде линейки, нестандартным порядком. Если вершины $(n-1)$-го уровня расположены в нестандартном порядке $v_1,\dots,v_{2^{n-1}}$, то ввиду подстановочных правил нестандартный порядок на множестве V_n вершин n-го уровня определяется последовательностью $1v_1,0v_1,0v_2,1v_2,\dots,1v_{2^{n-1}-1},0v_{2^{n-1}-1},0v_{2^{n-1}},1v_{2^{n-1}}$. Таким образом, $p_n=2p_{n-1}$, если n четно, и $p_n=2p_{n-1}-1$, если n нечетно, что приводит к приведенным в формулировке теоремы формулам. Также становится очевидным глобальное правило подстановки.

(в) Точке границы ξ, представленной путем, состоящим из вершин u_n, $n\ge 1$, соответствует последовательность $\{(\Gamma_n,u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ конечных меченых графов Шрейера. Если местоположение текущей точки u_n (начала отсчета) в развертке графа Γ_n в линейную цепочку отстоит от левого и правого краев на расстояние, которое стремится к бесконечности при $n\to\infty$, то в пределе получается линейчатый граф с двумя концами, в противном случае получается линейчатый граф с одним концом. Если последовательность, представляющая точку границы, содержит бесконечно много символов 0, то согласно подстановочному правилу каждый очередной символ 0 отодвигает вершины по крайней мере на единицу от краев (но не более чем в 2 раза) при каждом применении подстановки. Таким образом, приходим к заключению, что отмеченная вершина в пределе оказывается на бесконечном расстоянии от обоих концов графа. Если же символ 0 встречается в последовательности ξ конечное число раз, то начиная с некоторого номера k все ее символы равны 1. Тогда местоположение вершины u_n в графе Γ_n при любом n удалено от правого конца на расстояние не больше чем 2^k, т.е. в пределе получается граф с одним концом, причем начало отсчета ξ удалено от крайней правой вершины, соответствующей точке 1^∞, на расстояние $\le 2^k$. На самом деле местоположение отмеченной точки в графе Γ_ξ с одним концом может быть точно вычислено по префиксу U_k, состоящему из первых k символов последовательности ξ.

(г) Эта часть утверждения теоремы является следствием предложения 2.2. $\square$

Замечание 7.1. Утверждение (а) доказанной теоремы показывает, что разбиение на орбиты действия группы $\mathcal{G}$ является *конфинальным* отношением эквивалентности, которое играет важную роль в теории счетных борелевских отношений эквивалентности [113]. Мы слегка коснемся темы счетных разбиений в разд. 11.

Граф Γ, изображенный на рис. 7.4, после удаления меток ребер становится графом, который ассоциируется с одномерной решеткой (по крайней мере $\mathbb{Z}$ действует на нем автоморфизмами и кокомпактно). Однако, будучи снабженным метками, это уже достаточно сложный граф, позволяющий полностью восстановить группу $\mathcal{G}$, которая сама по себе является весьма сложной по своей структуре и свойствам. Действительно, для того чтобы выяснить, определяет ли слово $W=W(a,b,c,d)$ единичный элемент в группе $\mathcal{G}$ или нет, надо проверить, является ли замкнутым всякий путь, определенный словом W с началом в произвольной вершине графа. Это вытекает из того, что для любой точки $\xi\in\partial T$ и ее стабилизатора $P=P_\xi$ пересечение $\bigcap_{g\in G}P^g$ тривиально. Действительно, каждая нетривиальная нормальная подгруппа в $\mathcal{G}$ имеет конечный индекс (свойство максимальной минимальности), а действие на уровнях бинарного дерева транзитивно.

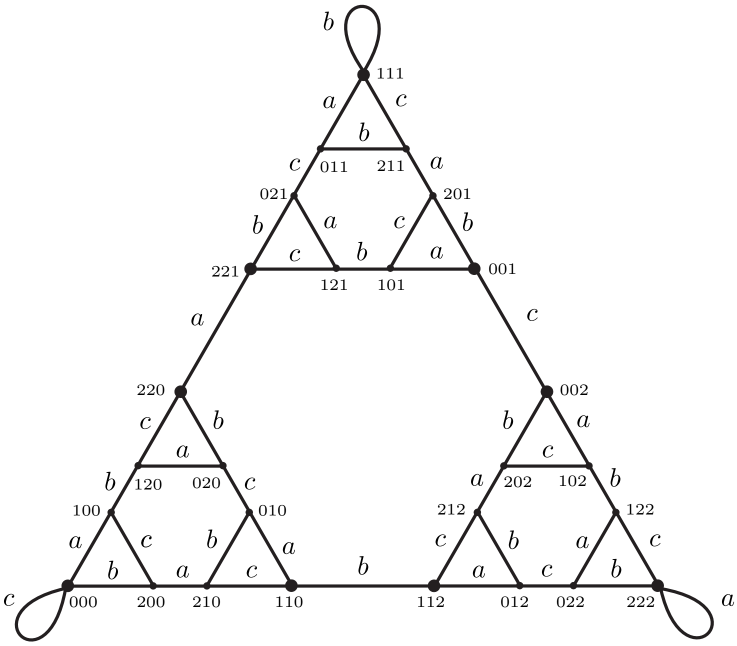

Рис. 7.6. Граф Паскаля как граф Шрейера уровня 3

Рассмотрим еще несколько примеров подстановочных правил для графов Шрейера.

Пример 7.2. Следующий пример интересен по ряду причин. С одной стороны, он связан с треугольником Серпинского и соответствующая последовательность графов $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ может служить в качестве дискретной аппроксимации этого классического фрактала. Однако она отличается от стандартной аппроксимационной последовательности, обычно используемой для изучения фрактала Серпинского аппроксимационными средствами. Графы Γ_n (наглядное представление о которых дает рис. 7.6) принято называть графами Паскаля, так как их можно комбинаторно описать с помощью рекурсивной процедуры, напоминающей процедуру построения треугольника Паскаля.

С другой стороны, эта последовательность графов связана с комбинаторной задачей, известной под названием игры *Ханойские башни*. Суть этой игры состоит в том, что к подставке (дощечке) в перпендикулярном к ней направлении прикреплены три стержня одинаковой длины, на один из которых нанизаны в порядке убывания размера $n \geq 1$ дисков различных диаметров. Задача состоит в том, чтобы переместить их на другой стержень, соблюдая правила игры, причем сделать это надо за наименьшее число шагов (разрешается перекладывать только один диск за один шаг). Основное правило игры состоит в том, что нельзя ставить больший диск на меньший. При значениях n от 5 до 8 эта игра продается в магазинах в виде игрушки и в нее способны играть дети начиная с трехлетнего возраста. Если к задаче добавить условие, что решение должно быть алгоритмическим, то в таком виде задача предлагается студентам младших курсов университетов как упражнение на предмет рекурсии. Легко сообразить, что задача решается за $2^n - 1$ шагов.

Существуют различные модификации и усложнения игры. Основным из них является увеличение числа стержней. Ясно, что чем больше стержней, тем больше имеется возможностей для перемещения дисков и тем самым путь к решению короче. Несмотря на многочисленные попытки, задача нахождения минимального и алгоритмического решения в случае четырех и большего числа стержней к настоящему моменту не получила окончательного решения. Об этой знаменитой комбинаторной задаче, истории ее возникновения, обобщениях и вариациях, неудачных попытках решения и некоторых продвижениях см. [102, 91] и приведенную там

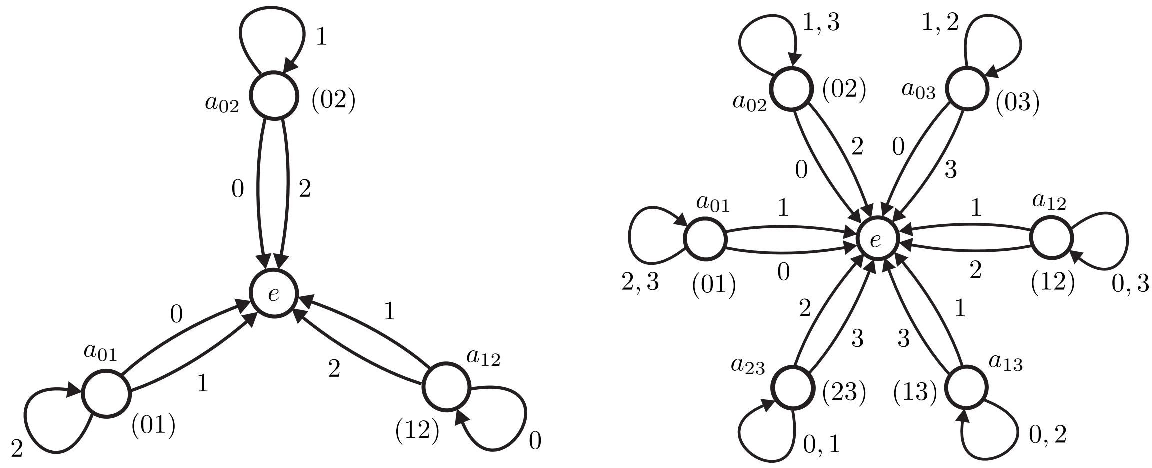

Рис. 7.7. Автоматы, порождающие Ханойские группы $\mathcal{H}^3$ и $\mathcal{H}^4$

литературу. Отметим только, что задача получила асимптотическое (т.е. приближенное) решение в работе М. Сегеди [178], где показано, что для числа $k \geq 3$ стержней она решается за $\sim 2^{n^{1/(k-2)}}$ шагов. Таким образом, при $k > 3$ число движений, необходимых для перемещения n дисков с одного стержня на другой, растет (как функция n) промежуточным образом между степенным и экспоненциальным ростом. Заметим, что работа Сегеди не обсуждает вопроса, как найти асимптотически минимальный путь алгоритмически, хотя, по-видимому, из приведенного в ней доказательства можно извлечь рекурсивный способ асимптотического решения задачи.

Удивительным образом задача Ханойских башен имеет непосредственное отношение к теории самоподобных групп, как впервые было замечено З. Шуничем и описано в [89, 88, 93, 91], где введены группы $\mathcal{H}^k$, $k \geq 3$, названные Ханойскими, и приведены некоторые результаты, относящиеся к алгебраическим свойствам введенных групп и асимптотической теории графов Шрейера. Часть этих результатов получена на основе известной информации об асимптотических свойствах игры.

Группа Ханойских башен $\mathcal{H}^3$ задается автоматом, приведенным на рис. 7.7. Эта группа действует на тернарном дереве и порождается образующими a, b, c, соответствующими состояниям автомата a_{01}, a_{02}, a_{12}. Рекуррентные соотношения между образующими таковы:

$$a = (1, 1, a)(01), \qquad b = (1, b, 1)(02), \qquad c = (c, 1, 1)(12).$$

Действуя на тернарном дереве, $\mathcal{H}^3$ определяет последовательность конечных графов Шрейера $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ (называемых графами Паскаля, как уже было сказано; наглядное представление о них дает рис. 7.6), а также континуальное семейство бесконечных графов Шрейера, связанных с действием на границе дерева (компоненты связности орбитального графа). Глобальное правило, описывающее последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, таково. Для построения Γ_{n+1} из Γ_n берутся три копии графа Γ_n, обозначаемые $\Gamma_{n,0}$, $\Gamma_{n,1}$, $\Gamma_{n,2}$, отличающиеся от Γ_n только тем, что метка u, $u \in X^* = \{0, 1, 2\}^*$, вершины в Γ_n заменяется в $\Gamma_{n,x}$, $x \in \{0, 1, 2\}$, на ux. Для получения Γ_{n+1} для каждой пары $x, y \in X$, $x \neq y$, удаляются петли в вершинах $z^n x$ и $z^n y$ (z — буква, отличная от x и y) в графах $\Gamma_{n,x}$ и $\Gamma_{n,y}$ соответственно и добавляется одно ребро, соединяющее эти вершины, раскрашенное символом a_{xy}. Можно описать эту процедуру и более формально, введя третий алфавит и ключевые вершины, но мы этого делать не будем.

После стирания меток ребер и петель в граничных вершинах графы Γ_n становятся идентичными графам, которые рассматривались в связи с разными аспектами игры Ханойские башни с тремя стержнями. Спектральные свойства этих графов изучены в [157, 93].

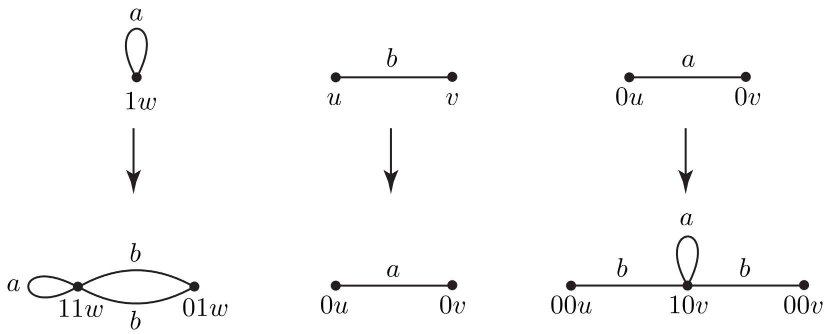

Рис. 7.8. Подстановочные правила для графов Шрейера базилики

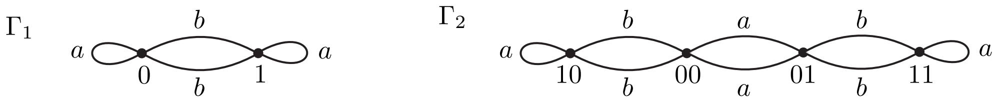

Рис. 7.9. Графы Шрейера базилики уровней 1 и 2

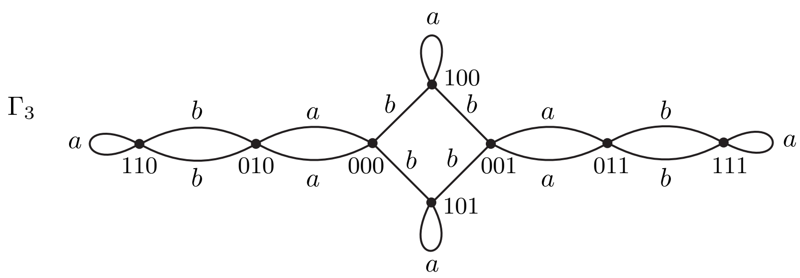

Рис. 7.10. Граф Шрейера базилики уровня 3

Как уже отмечалось, игре Ханойские башни с $k \geq 4$ стержнями соответствует группа $\mathcal{H}^k$, которая является самоподобной и задается автоматом над алфавитом из k букв с $\frac{k(k-1)}{2}$ состояниями. Графы Шрейера Γ_n, ассоциированные с этой игрой, становятся уже значительно более сложными, о чем говорит то, что задача вычисления расстояния между вершинами 0^n и 1^n в этих графах эквивалентна задаче нахождения минимального числа перекладываний, позволяющих переместить башню из n дисков с одного стержня на другой (которая не решена до сих пор). Также для них не решена задача вычисления диаметров этих графов (которые в этом случае больше расстояния между вершинами 0^n и 1^n, когда число дисков велико), как и не решена спектральная задача.

Пример 7.3. Следующая последовательность графов связана с самоподобной группой, именуемой “*базилика*” и рассмотренной в примере 2.4. Эта группа сыграла важную роль в решении одной задачи об аменабельных группах (а именно послужила первым примером аменабельной, но не субэкспоненциально аменабельной группы) [96, 23], а также послужила первым нетривиальным примером, на основе которого начала развиваться теория групп итерированной монодромии [142, 18].

Локальные подстановочные правила для этого случая представлены рис. 7.8, а наглядное представление о том, как выглядят графы Шрейера, дают рисунки 7.9–7.12. Несложно заметить, что графы Γ_n сходятся к множеству, похожему на множество Жюлиа отображения $z \to z^2 - 1$. То, что это на самом деле так при разумном определении сходимости, доказано в [142]. Очевидно, что структура графов, ассоциированных с базиликой, гораздо сложнее, чем в предыдущих двух примерах. В [48] доказано, что бесконечные графы Шрейера действия

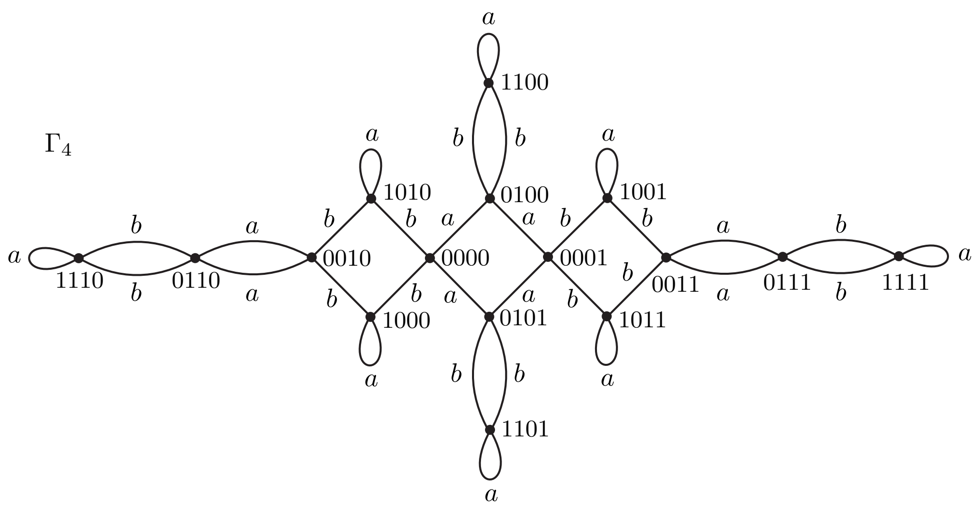

Рис. 7.11. Граф Шрейера базилики уровня 4

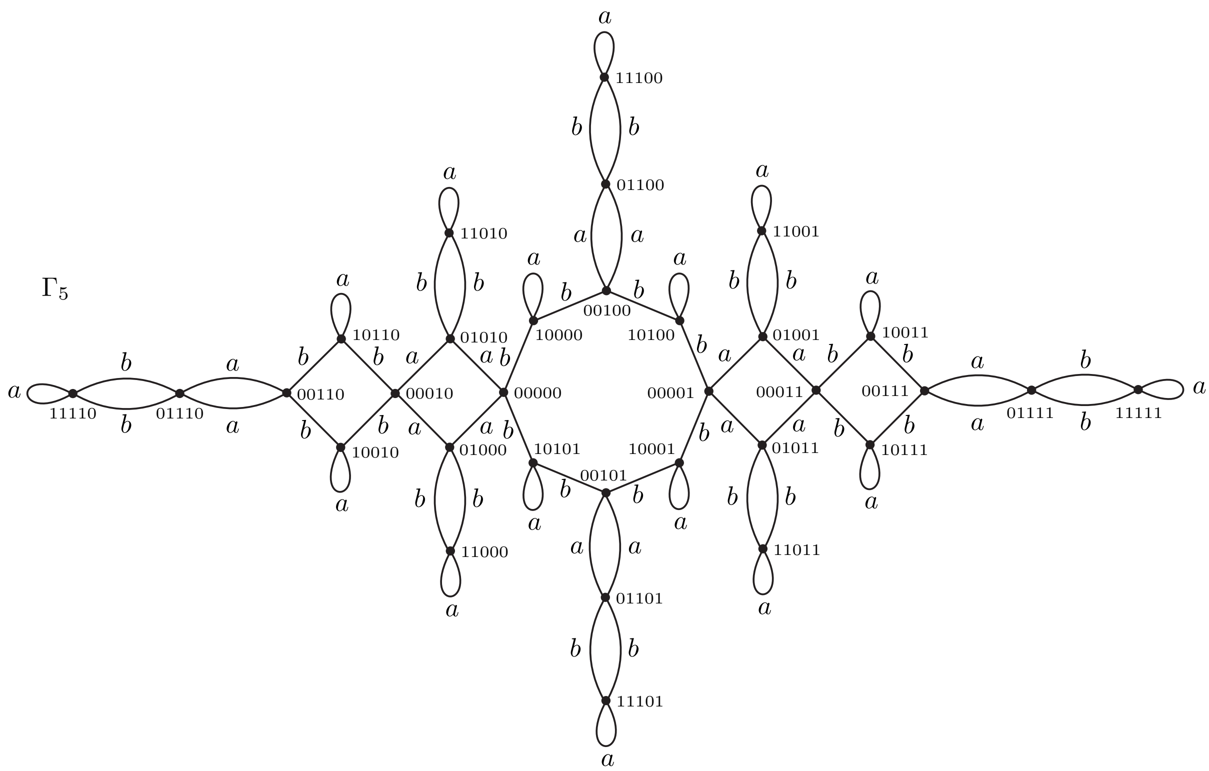

Рис. 7.12. Граф Шрейера базилики уровня 5

на границе имеют один, два или четыре конца, причем дано полное описание этих графов с точностью до изоморфизма (при этом графы рассматриваются без меток). Имеется несчетно много таких графов, и в [48] найдены инварианты, позволяющие эти графы различать.

Интересные классы автоматов и соответствующие им классы групп были введены С. Сидки [172] — это классы полиномиально растущих автоматов и группы, ими порожденные. Важной характеристикой автоморфизма g дерева степени d является его активность, под которой понимается рост при $n \to \infty$ числа $a(n)$ неединичных элементов из $\mathrm{Sym}(d)$ в портрете элемента g на n-м уровне (напомним, что портрет автоморфизма дерева представляет собой раскрашивание вершин дерева элементами симметрической группы, описывающими локально действие автоморфизма). Это понятие уже фигурировало в обсуждении понятия действия конечного типа (ниже теоремы 2.9).

Определение 7.2. (а) Если рост последовательности $a(n)$, ассоциированной с автоморфизмом дерева, заданным конечным инициальным автоматом, полиномиальный степени k, то и соответствующий инициальный автомат называется полиномиально (в смысле Сидки) растущим степени k.

(б) Неинициальный автомат $\mathcal{A}$ называется полиномиально растущим степени k, если для любого его состояния q соответствующий инициальный автомат является полиномиально растущим степени не выше чем k и существует состояние, для которого рост является полиномиальным степени k.

Таким образом, выделяются классы ограниченных, линейных, квадратичных и т.д. автоматов и соответствующие им классы групп.

Заметим, что эта терминология не согласуется с понятием роста, введенным в [75] (см. также [87]), однако сейчас мы будем придерживаться именно ее. Существует простой алгоритм, как различать, имеет ли данный автомат полиномиальный рост в смысле Сидки или нет, и вычислять степень полиномиальности роста [172, 142]. Будем предполагать автомат минимальным, что, напомним, означает, что разные состояния индуцируют разные автоморфизмы дерева. Во-первых, для того чтобы автомат был полиномиально растущим, он должен обладать единичным состоянием id, т.е. состоянием, индуцирующим тривиальный автоморфизм дерева. Тогда автомат полиномиален в том и только том случае, если в его диаграмме Мура любые два цикла, не проходящие через единичное состояние, дизъюнктны. Более того, автомат ограничен в том и только том случае, если в его диаграмме Мура любые два цикла, не проходящие через единичное состояние, дизъюнктны и не существует ориентированного пути, ведущего из одного из них в другое. Альтернативным способом проверки полиномиальности роста является выяснение того, равен ли 1 спектральный радиус (число Перрона–Фробениуса в данном случае) матрицы смежности диаграммы Мура автомата (рассматриваемой как ориентированный граф), из которой удалено единичное состояние, причем степень полиномиального (в смысле Сидки) роста автомата в этом случае равна $n-1$, где n — кратность собственного значения 1.

Графы Шрейера, ассоциированные с ограниченными автоматами, изучались достаточно интенсивно [16, 142, 31]. Они имеют полиномиальный рост (возможно, с нецелым и даже иррациональным показателем), что вытекает из того, что группа, порожденная таким автоматом, является сжимающейся [16, 142]. Среди недавних результатов в этом направлении отметим результаты Д. Д'Анжели, А. Донно и Т. Нагнибеды касательно структуры графов Шрейера, ассоциированных с базиликой [48].

Для полиномиально растущих, но неограниченных автоматов графы Шрейера устроены значительно сложнее. Например, недавний результат Е. Бондаренко [33] показывает, что рост бесконечных графов Шрейера, ассоциированных с полиномиально растущими (но неограниченными) автоматами, субэкспоненциальный с оценкой сверху вида $n^{(\log n)^m}$, где m — положительная константа, и для многих из них он на самом деле промежуточный между полиномиальным и экспоненциальным. Для экспоненциально растущих автоматов уровень сложности конечных графов Шрейера может быть еще выше, даже если группа, порожденная таким автоматом, изоморфна хорошо известной группе такой, например, как свободная группа. Правда, надо различать сложность графов в цепочках $\{\Gamma_n\}$ конечных графов и сложность бесконечных графов Шрейера Γ_ξ, $\xi \in \partial T$. Например, в случае свободной группы бесконечные графы Шрейера типично будут графами Кэли (т.е. регулярными деревьями), в то время как их конечные "сородичи" Γ_n будут иметь довольно сложную структуру, не поддающуюся

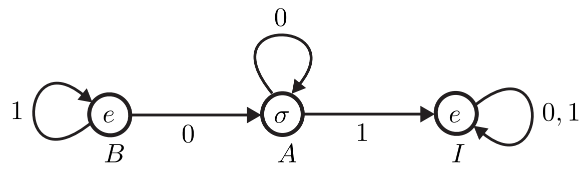

Рис. 7.13. Автомат линейного роста

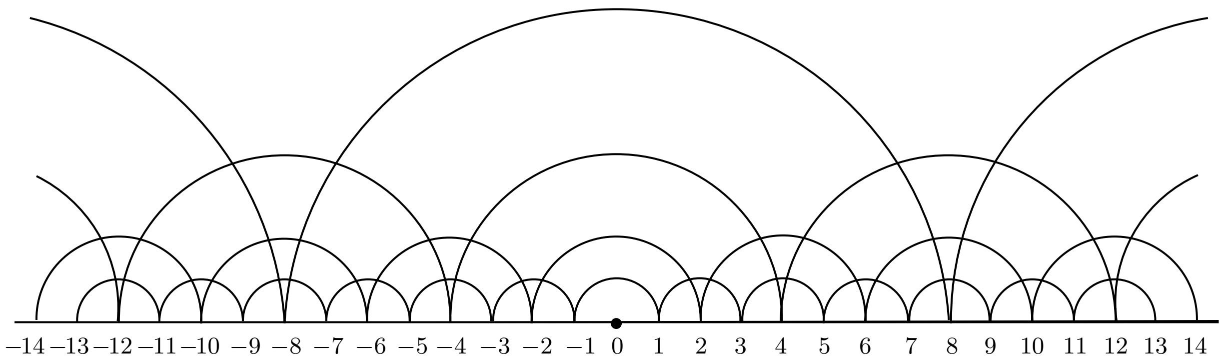

Рис. 7.14. Граф Шрейера промежуточного роста

рекурсивному описанию в духе подстановочных правил. Но об этом более подробно будет сказано в разд. 10.

Пример 7.4. Закончим серию примеров графов Шрейера графом, порожденным одним из простейших автоматов линейного роста, изображенным на рис. 7.13.

Этот граф изучался Бенжамини и Хофманом [26], а также Бондаренко, Некрашевичем и Чекерини-Сильберстайном. Представление о том, как выглядит бесконечный граф Шрейера Γ, соответствующий последовательности 0^∞, дает рис. 7.14.

Формальное описание реализации графа Γ на плоскости таково. В качестве множества вершин используются целые числа. Определим множество ребер соотношением $E=\bigcup_{k\ge 0}E_k$, где

$$E_0=\{(i,i+1)\colon i\in\mathbb{Z}\}\qquad\text{и}\qquad E_k=\bigl\{\bigl(2^k(n-1/2),2^k(n+1/2)\bigr)\bigr\}$$

для всех $n\in\mathbb{Z}$ и $k>0$. Основной особенностью графа является то, что он имеет промежуточный рост между степенным и экспоненциальным (речь идет о росте числа вершин графа, удаленных на расстояние n от некоторой выделенной вершины, скажем вершины, представленной числом 0 в нашем случае). Более того, как показано в [26], рост графа асимптотически равен $n^{\log_4 n}$. Еще интересной особенностью этого графа является то, что согласно терминологии, взятой из [26], он является ω-периодическим, т.е. индуктивным пределом последовательности периодических графов с множеством вершин в $\mathbb{Z}$.

Имеются и другие экзотические типы поведения роста бесконечных графов Шрейера, ассоциированных с самоподобными группами. Например, как отмечено в [91], бесконечные графы Шрейера, ассоциированные с группой $\mathcal{H}^k$ Ханойских башен, $k\ge 4$, имеют промежуточный рост порядка $2^{(\log n)^{k-2}}$.

Напомним в этой связи, что, как показано в [72], существуют графы Кэли конечно порожденных групп промежуточного роста. Несмотря на обширные результаты о классе групп промежуточного роста, до недавнего времени не существовало ни одного примера вычисления точной асимптотики роста для графа Кэли промежуточного роста. Например, даже для $\mathcal{G}$ до сих пор неизвестно, может ли рост быть асимптотически равным 2^{n^α} для некоторого $0<\alpha<1$.

Однако при помощи группы $\mathcal{G}$ Л. Бартольди и А. Эршлер построили бесконечную последовательность групп с ростом указанного вида 2^{n^α}, причем показатель α для этой последовательности накапливается к 1 (оставаясь при этом меньше 1) [15].

Вопрос о том, для каких автоматов последовательность конечных графов $\{\Gamma_n\}$ является подстановочной в том или ином смысле, пока далек от разрешения. Все имеющиеся на этот счет примеры связаны со сжимающимися самоподобными группами. Для графов и граничных пространств, определяемых ограниченными автоматами, рекурсии подстановочного типа изучались В. Некрашевичем [142, 144] и Е. Бондаренко [31]. Возможно, что факт наличия подстановочного правила зависит от того, имеет ли группа конечное L-задание образующими и соотношениями (т.е. может ли множество определяющих слов группы быть получено из конечного множества слов итерацией с помощью подстановки) [19, 81].

Закончим этот раздел еще одним определением варианта рекуррентной последовательности графов. Для этого нам понадобится широко используемое в информатике понятие автомата-акцептора (распознавателя языка). Опуская формальное определение (для деталей см. [104]), отметим только, что такой автомат (обозначим его $\mathcal{A}_{\mathrm{acc}}$) может быть описан конечным ориентированным графом, вершины которого называются состояниями автомата, а ребра раскрашены символами конечного алфавита X. Из каждого состояния выходит $|X|$ ребер, раскрашенных символами алфавита, причем каждый символ встречается один раз как метка среди ребер, исходящих из данной вершины. Имеется начальное состояние q_0, и имеется непустое множество F финальных состояний. Автомат $\mathcal{A}_{\mathrm{acc}}$ определяет (распознает) язык $\mathcal{L}$ (т.е. подмножество множества слов над конечным алфавитом X), состоящий из слов, которые читаются вдоль путей в графе автомата, начинающихся в начальном состоянии q_0 и заканчивающихся в состоянии, принадлежащем множеству F. Язык называется *регулярным*, если он распознается конечным автоматом указанного выше вида. Существуют различные обобщения понятия регулярного языка. Например, классическая иерархия формальных языков Хомского состоит из классов регулярных, контекстно свободных, контекстно зависимых языков и языков, определяемых грамматиками без ограничений. Альтернативно эти языки определяются с помощью конечных, стековых, линейных ограниченных автоматов и машин Тьюринга соответственно [104].

Определение 7.3. Пусть имеется последовательность $\{\Gamma_n\}$ конечных графов. Будем называть ее рекуррентной в широком смысле слова, если найдутся конечные алфавиты X и Y и автоматы $\mathcal{A}_{\mathrm{acc}}$ и $\mathcal{B}_{\mathrm{acc}}$ над X и Y соответственно такие, что имеются биекции между множествами вершин и ребер графа Γ_n и множествами слов длины n, распознаваемых автоматами $\mathcal{A}_{\mathrm{acc}}$ и $\mathcal{B}_{\mathrm{acc}}$ соответственно.

Спецификация того, какой тип автоматов рассматривается: конечные, стековые и т.д., определяет соответствующий класс графов. Такой подход к определению рекурсивно заданной последовательности графов, кажется, еще не рассматривался. Приведенное определение аналогично в некотором смысле определению *автоматной группы*, или группы с автоматной структурой, широко используемому в геометрической теории групп.

8. ДЕЙСТВИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПОДГРУПП И ШРЕЙЕРОВЫ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

С каждой топологической динамической системой (G, X) или метрической динамической системой (G, X, μ), где G — конечно порожденная группа с системой порождающих $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, можно связать подмножество $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G)$ (будем называть его пучком графов Шрейера), состоящее из пар (Γ_x, x), $x \in X$, где Γ_x — орбитальный граф, построенный на орбите точки x с помощью системы порождающих A, и пытаться определить свойства динамической системы исходя из информации об $\mathcal{S}$ или, наоборот, изучать свойства пучка графов $\mathcal{S}$ исходя из информации о свойствах динамической системы. Как мы продемонстрируем ниже на примере, может оказаться, что динамическая система восстанавливается только по одному представителю пучка. Также, сопоставляя каждой точке $x \in X$ ее стабилизатор, получаем отображение из X в пространство $\mathcal{Y}(G)$ подгрупп группы G, при этом действию G на X соответствует действие G сопряжениями на $\mathcal{Y}(G)$ (присоединенное действие). Для действий, далеких от свободных (в том или ином смысле), информация об изначальном действии может быть закодирована в новых действиях (точнее, динамических системах с фазовыми пространствами, лежащими в $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G)$ или $\mathcal{Y}(G)$). Поясним эту идею более подробно.

Топология на пространстве $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G)$ уже была определена. Топология на $\mathcal{Y}(G)$ индуцируется тихоновской топологией пространства $\{0,1\}^G$ (мы, как и прежде, предполагаем, что G счетна), если отождествить каждую подгруппу $H \le G$ с ее характеристической функцией ω_H: $\omega_H(g) = 1 \Leftrightarrow g \in H$. Для данного конечного подмножества $F \subset G$ окрестностью U_F^H подгруппы H в данной топологии является множество подгрупп $L \le G$ таких, что $H \cap F = L \cap F$, и окрестности такого вида (когда F пробегает множество конечных подмножеств G, а H пробегает множество подгрупп группы G) порождают топологию на $\mathcal{Y}(G)$. Заметим, что множества U_F^H являются в то же время замкнутыми. Эта топология является частным случаем топологии Шаботи, определенной на пространстве замкнутых подгрупп локально компактной топологической группы [42]. Для счетной группы эта топология метризуема и пространство $\mathcal{Y}(G)$ является компактным вполне несвязным. Такие пространства, как хорошо известно и уже отмечалось, характеризуются рангом Кантора–Бендиксона. Для свободной группы F_n, $n \ge 2$, как легко видеть, ранг равен нулю и пространство $\mathcal{Y}(G)$ гомеоморфно канторову совершенному множеству. В то же время для монстров Тарского $\mathcal{Y}(G)$, построенных А.Ю. Ольшанским [148] и являющихся простыми p-группами (p — большое простое число), пространство $\mathcal{Y}(G)$ состоит из счетного числа изолированных точек, накапливающихся к одной точке, которая соответствует тривиальной подгруппе. Это вытекает из того, что всякая собственная подгруппа в $\mathcal{Y}(G)$ циклическая порядка p.

Замечание 8.1. Если рассмотреть решетку подгрупп дискретной группы с операциями $\wedge$ и $\vee$, определенными как пересечение двух подгрупп и их групповое объединение (т.е. $H \vee K = \langle H, K\rangle$ — подгруппа, порожденная H и K) соответственно, то первая операция, как легко видеть, является непрерывной, в то время как вторая, вообще говоря, не является непрерывной, как показывает следующий простой пример, предложенный Я. Воробцом.

В группе $\mathbb{Z}$ обе последовательности $n\mathbb{Z}$, $(n+1)\mathbb{Z}$, $n = 1, 2, \dots$, сходятся к тривиальной подгруппе, но $n\mathbb{Z} \vee (n+1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Таким образом, введенная топология является топологией на множестве подгрупп группы G, а не на решетке подгрупп G (когда говорят о топологии на решетке, то подразумевают, что обе операции непрерывны).

Проблема 8.1. (а) Какова область значений ранга Кантора–Бендиксона пространства $\mathcal{Y}(G)$ (G пробегает множество счетных групп)?

(б) Тот же вопрос, что и выше, но для конечно порожденных групп или даже для 2-порожденных групп.

Пусть (G, X) — топологическая динамическая система, а $\alpha\colon X \to \mathcal{Y}(G)$ — отображение, сопоставляющее каждой точке x ее стабилизатор $\mathrm{st}_G(x)$. Это отображение измеримо (относительно борелевских структур пространств X и $\mathcal{Y}(G)$). Действительно,

$$\alpha^{-1}(U_F^H) = \bigl\{x \in X\colon f(x) = x\ \forall f \in F_0,\ g(x) \ne x\ \forall g \in F \setminus F_0,\ F_0 = F \cap H\bigr\},$$

а это множество, очевидно, измеримо. Однако непрерывным отображение α быть не обязано, как показывает рассмотренный ниже в теореме 8.1 пример группы $\mathcal{G}$.

Пусть дополнительно группа G конечно порождена и $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ — упорядоченное множество ее порождающих. Определим отображение $\beta\colon X \to \mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G)$, сопоставляя точке

$x \in X$ меченый граф (Γ, v_x), где $\Gamma = \Gamma(G, \mathrm{st}_G(x), A)$ — соответствующий граф Шрейера, а вершина $v_x = \mathrm{st}_G(x)$ играет роль начала отсчета.

Построим также отображение $\gamma\colon \mathcal{Y}(G) \to \mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G)$, сопоставляющее подгруппе $H \le G$ соответствующий меченый граф Шрейера $(\Gamma(G,H,A),H)$. Легко видеть, что это отображение непрерывно и обладает обратным $\delta\colon \mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G) \to \mathcal{Y}(G)$, строящим по меченому графу $(\Gamma(G,H,A),H)$ подгруппу в G, состоящую из элементов, задаваемых словами в алфавите образующих A и их обратных A^{-1}, прочитываемых вдоль замкнутых путей в графе $\Gamma(G,H,A)$ с началом и концом в точке отсчета (представленной классом смежности H единичного элемента), причем δ также непрерывно. Подчеркнем, что γ и δ зависят от системы порождающих.

Действие G на X естественным образом переносится на пространства $\mathcal{Y}(G)$ и $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G)$. Действительно, переходу от точки x к точке gx соответствует переход от стабилизатора $\mathrm{st}_G(x)$ к стабилизатору $\mathrm{st}_G(gx)$, который, очевидно, равен сопряженной подгруппе $g^{-1}\mathrm{st}_G(x)g$. Поэтому имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \mathcal{Y}(G) \arrow[d, "\gamma"] \\ & \mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G) \end{tikzcd}$$

в которой все отображения эквивариантны (по отношению к действиям группы), все действия группы G топологичны (т.е. посредством гомеоморфизмов) и вертикальная стрелка определяет изоморфизм топологических динамических систем.

Теперь предположим, что задана метрическая динамическая система (G,X,μ) с конечной или бесконечной, инвариантной или квазиинвариантной мерой μ. Тогда предыдущую коммутативную диаграмму можно конвертировать в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} (G,X,\mu) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & (G,\mathcal{Y}(G),\zeta) \arrow[d, "\gamma"] \\ & (G,\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G),\eta) \end{tikzcd}$$

в которой меры определены соотношениями $\zeta = \alpha_*\mu$, $\eta = \beta_*\mu$. Если отображение α (соответственно β) инъективно по модулю множества нулевой меры, то и β (соответственно α) инъективно по модулю множества нулевой меры, поэтому возникает изоморфизм между динамической системой (G,X,μ) и ее образом при отображении α или β в силу теоремы Лузина–Суслина о борелевских мономорфизмах. Таким образом, вполне несвободные динамические системы счетной группы G можно моделировать динамическими системами с фазовыми пространствами, являющимися подпространствами пространства $\mathcal{Y}(G)$, а в случае, когда группа порождена набором из m элементов, и подпространствами пространства $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G)$. При этом действие присоединенное (т.е. сопряжениями). Меры ζ и η инвариантны или квазиинвариантны соответственно тому, инвариантна или квазиинвариантна мера μ.

Если система (G,X) топологически транзитивна, то топологически транзитивной соответственно будет и система-образ. Доказанные ниже следствие 8.9 и предложение 8.11 показывают, что для минимальных действий траектория типичного графа Шрейера в образе $\beta(X) \subset \mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}(G)$ всюду плотна, поэтому β-образ системы (G,X) по крайней мере будет топологически транзитивным.

Если система (G,X,μ) эргодична, то и ее образ будет эргодическим. Поэтому для присоединенных действий возникает вопрос, поднятый А.М. Вершиком в [184], об описании множества эргодических непрерывных инвариантных мер для присоединенного действия, которое непусто

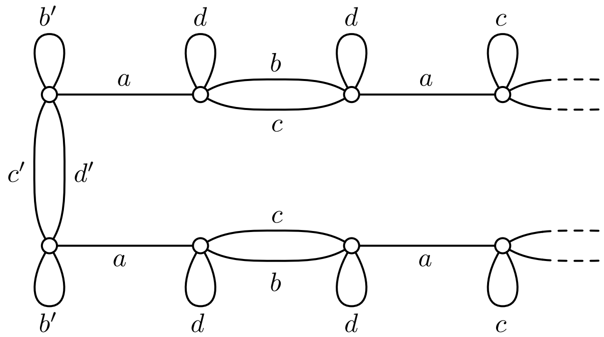

Рис. 8.1. Граф, используемый для определения графов Δ_1, Δ_2, Δ_3

по крайней мере для действий *аменабельных* групп в силу теоремы Боголюбова–Дэя [30, 52] (обобщение теоремы Боголюбова–Крылова). Аменабельные группы и аменабельные действия немного обсуждаются в конце этого раздела, и они также фигурируют в ряде вопросов, обсуждаемых в следующих разделах.

Нам представляется также интересной задача описания инвариантных мер на замыкании орбиты одной подгруппы H группы G для интересных примеров пар (G,H). А именно вопрос ставится следующим образом. Пусть $H \leq G$, $C(H) = \{g^{-1}Hg\colon g \in G\}$ — класс сопряженности подгруппы H, $\overline{C(H)}$ — его замыкание в $\mathcal{Y}(G)$.

Проблема 8.2. При каких условиях на систему (G,X,μ) для типичной точки $x \in X$ система (G,X,μ) изоморфна системе $(G,\overline{\mathrm{st}_G(x)},\overline{\zeta})$ для некоторой меры $\overline{\zeta}$, сосредоточенной на замыкании $\overline{\mathrm{st}_G(x)}$.

По сути дела речь идет о том, в каких случаях множество $\overline{\mathrm{st}_G(x)}$ служит носителем меры ζ, и поставленный вопрос ориентирован на то, чтобы выяснить, в каких случаях действие восстанавливается по действию на одной типичной орбите.

Так как согласно следствию 4.9 для топологической системы (G,X) дополнение к множеству G-типичных точек имеет первую категорию, то представляется вероятным, что для экстремально несвободных действий действие $(G,\overline{C(\mathrm{st}_G(x))})$ на замыкании орбиты стабилизатора G-типичной точки должно "почти" полностью восстанавливать систему (G,X). Пока не существует общего утверждения на эту тему, но сейчас мы приведем один пример, рассмотренный детально по нашей просьбе Я. Воробцом, который подтверждает высказанный выше тезис о том, что во многих интересных случаях действие полностью (в метрической ситуации) или почти полностью (в топологической ситуации) восстанавливается по действию на одной орбите.

Пример 8.1. Пусть $\mathcal{G} = \langle a,b,c,d\rangle$ — группа промежуточного роста из примера 2.3, действующая на границе ∂T бинарного дерева, а $\beta\colon \partial T \to \mathcal{X}_4^{\mathrm{Sch}}(\mathcal{G})$ — отображение, которое было определено выше. Напомним, что так как порождающие группы $\mathcal{G}$ — инволюции, то рассматриваемые графы Шрейера, описание которых приведено в предыдущем разделе, являются 4-регулярными, а не 8-регулярными. Пусть Δ_i, $i = 1,2,3$, — три графа, определенные рис. 8.1 путем подстановок вместо b', c', d' меток c, b, d, меток d, b, c и меток b, c, d соответственно.

Теорема 8.1 [188]. *Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Отображение β инъективно по отношению к равномерной мере на ∂T.*

(ii) *Отображение β непрерывно везде, кроме счетного множества точек, принадлежащих орбите точки $\xi = 1^\infty$.*

(iii) *Изолированные точки образа $\beta(\partial T)$ состоят из меченых графов $(\Gamma_\xi, g\xi)\colon g \in \mathcal{G}$ (т.е. из маркировок графа Шрейера, отвечающего стабилизатору точки ξ, получаемых выбором произвольной вершины в качестве начальной).*

(iv) *Замыкание множества $\beta(\partial T)$ в пространстве меченых графов Шрейера строится добавлением счетного множества точек, получающихся из графов Δ_i, $i=1,2,3$, превращением их в меченый граф путем выбора произвольной вершины в качестве начальной.*

Из этой теоремы можно легко вывести, что образ ζ равномерной меры ν на границе ∂T сосредоточен на замыкании орбиты произвольного графа (Γ_x, x), где $x \in \partial T$ — произвольная точка, не принадлежащая орбите точки ξ.

Проблема 8.3. (а) При каких условиях на пару (G,H) существует инвариантная мера для действия G на $\overline{C(H)}$?

(б) При каких условиях система $(G, \overline{C(H)})$ строго эргодична (т.е. инвариантная мера существует и единственна)?

Заметим, что в западной литературе обычно используется термин "uniquely ergodic", в то время как в отечественной "строго эргодичный". В конце разд. 10 мы вкратце обсудим понятие, которое в западной литературе называется "strongly ergodic", а мы будем называть его "сильно эргодическим". Также заметим, что ответ на первую часть сформулированной выше проблемы положительный, если для действия левым умножением группы G на пространстве левых классов смежности G/H существует инвариантное среднее (т.е. действие аменабельно в смысле фон Неймана, см. конец этого раздела).

Кроме поставленных вопросов, можно также интересоваться различными вопросами, связанными с топологией множеств типа $\overline{C(H)}$, их подмножеств $C(H)$ и относительной топологией вложения $C(H) \hookrightarrow \overline{C(H)}$, но эти вопросы более свойственны теории решеток в локально компактных группах (в частности, в группах Ли) (см., например, [158]).

Очевидным условием несвободы действия (G, X, μ) является условие, при котором почти наверное стабилизаторы точек попарно различны. Как уже отмечалось в разд. 2, А.М. Вершик предложил называть такие действия экстремально несвободными. Эту терминологию также можно перенести на топологическую ситуацию, считая систему (G, X) экстремально несвободной, если для множества, являющегося дополнением к множеству первой категории, стабилизаторы точек попарно различны. Более узкий (для случая топологических групп) класс действий составляют вполне несвободные действия, определенные, как было уже сказано, для действий с инвариантной мерой как такие, у которых сигма-алгебра множеств, порожденная множествами неподвижных точек элементов группы, совпадает с сигма-алгеброй всех измеримых множеств [184] (однако для счетных групп классы экстремально несвободных и вполне несвободных действий совпадают). Важность этого понятия продемонстрирована теоремой 10 из [184]. В топологической ситуации вполне несвободное действие можно определить как такое, у которого алгебра борелевских множеств совпадает с алгеброй, порожденной (замкнутыми) множествами неподвижных точек элементов.

Возвращаясь к теме воспроизводства динамической системы по действию на одной орбите, повторим более детально конструкцию, которую мы уже фактически описали. Она позволяет по произвольному графу Шрейера построить ассоциированную с ним динамическую систему. Пусть $\Gamma = \Gamma(G, H, A)$ — граф Шрейера группы G с системой образующих $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Рассмотрим подмножество $\mathcal{Z}$ пространства $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$, состоящее из точек вида (Γ, v), где v пробегает множество вершин графа Γ. Другими словами, мы не меняем граф, но меняем начальную точку (точку отсчета). Группа G действует на этом множестве по второй координате пары (Γ, v), не меняя графа, но меняя начальную точку. Визуально это действие выглядит как перемещение в графе Γ из вершины v в соседнюю вершину под действием соответствующего образующего. Очевидно, что если две пары (Γ, v) и (Δ, w) близки в пространстве $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$, то близки и пары (Γ, v') и (Δ, w'), где v', w' — соседи вершин v, w соответственно, причем соединяющие эти пары вершин ребра помечены символом a, $a \in A$. Таким образом, описанное действие непрерывно. Поэтому действие G на $\mathcal{Z}$ по непрерывности распространяется на замыкание $\overline{\mathcal{Z}}$ (которое также будет состоять из графов Шрейера группы G). Топологическую динамическую систему $(G, \overline{\mathcal{Z}})$ назовем шрейеровой (или присоединенной) динамической системой, ассоциированной с графом Шрейера $\Gamma(G, H, A)$.

Если применить эту конструкцию к графу Кэли, то ничего интересного не получится, так как пространство $\overline{\mathcal{Z}}$ будет состоять из единственной точки (ввиду того что изменение точки отсчета в графе Кэли приводит к графу, изоморфному исходному). Ясно также, что случай, когда подгруппа $H \le G$ имеет конечный индекс, также малоинтересен, так как в этом случае получится динамическая система с конечным фазовым пространством. Поэтому наша конструкция представляет интерес для бесконечных графов Шрейера, обладающих небольшими (лучше тривиальными) группами автоморфизмов. Следующее утверждение, которое аналогично соответствующему утверждению из теории накрытий [134], дает ключ к вычислению группы автоморфизмов графа Шрейера.

Предложение 8.2. *Группа автоморфизмов графа Шрейера* $\Gamma(G, H, A)$ *изоморфна фактор-группе* $N_G(H)/H$, *где* $N_G(H)$ *— нормализатор* H *в* G.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству следствия 7.3 из [134], и мы его опускаем. $\square$

Приведенная конструкция представляет интерес прежде всего для случая, когда берется максимальная (или слабо максимальная) подгруппа группы G. В то время как понятие максимальной подгруппы (т.е. собственной подгруппы, между которой и всей группой нет промежуточных подгрупп) хорошо известно в теории групп, понятие слабо максимальной подгруппы известно гораздо менее. Впервые оно, кажется, появилось в работе А. Шалева [169].

Определение 8.1. Пусть G — бесконечная группа. Подгруппа $H \le G$ называется *слабо максимальной*, если она имеет бесконечный индекс и является максимальной по отношению к этому свойству (т.е. всякая промежуточная подгруппа $H \le K \le G$ либо совпадает с H, либо имеет конечный индекс в G).

Следующее утверждение (первая часть которого хорошо известна) показывает, что максимальные и слабо максимальные подгруппы всегда существуют в бесконечной конечно порожденной группе. Но если слабо максимальных групп много (по крайней мере каждая подгруппа бесконечного индекса содержится в слабо максимальной подгруппе), то максимальных подгрупп в бесконечной группе может быть мало, даже конечное число. Так, например, любая максимальная подгруппа группы $\mathcal{G}$ имеет индекс 2 [152] и имеется всего семь таких подгрупп.

Теорема 8.3. *В бесконечной конечно порожденной группе всякая собственная подгруппа содержится в максимальной подгруппе, а всякая подгруппа бесконечного индекса содержится в слабо максимальной подгруппе.*

Доказательство. Пусть $H < G$, а группа G бесконечна и конечно порождена. Рассмотрим частично упорядоченное по включению множество $\mathcal{S}$, состоящее из собственных подгрупп G, содержащих H. Любая цепь $\{H_n\}$ в $\mathcal{S}$ обладает максимальным элементом M, принадлежащим $\mathcal{S}$. Действительно, определим максимальный элемент M соотношением $M = \bigcup_n H_n$. Если $M = G$, то в силу конечной порожденности G все образующие группы G принадлежат H_n при некотором n и, таким образом, $M = H_n$, что является противоречием. По лемме Цорна множество $\mathcal{S}$ имеет максимальный элемент, который и является максимальной подгруппой в G.

Аналогично если H имеет бесконечный индекс, то частично упорядоченное множество $\mathcal{U}$, состоящее из подгрупп G бесконечного индекса, содержащих H, обладает свойством, что каждая цепь $\{H_n\}$ имеет максимальный элемент $M = \bigcup_n H_n$. Действительно, если предположить, что M имеет конечный индекс в G, то M будет конечно порожденной подгруппой (в силу конечной порожденности G), а значит, будет совпадать с H_n для некоторого n — опять противоречие. $\square$

Особый интерес представляют максимальные и слабо максимальные подгруппы $H < G$, имеющие тривиальное ядро $\mathcal{K} = \bigcap_{g\in G} H^g$. Максимальные подгруппы с тривиальным ядром имеют непосредственное отношение к примитивным действиям группы, т.е. действиям, не имеющим инвариантных отношений эквивалентности, отличных от тривиальных (другими словами, когда все множество есть один класс эквивалентности или когда каждая точка множества есть класс эквивалентности). Вопрос о примитивности группы (т.е. наличии у нее точного примитивного действия) является одним из краеугольных в теории групп, и ему посвящено много литературы. К примитивным группам относятся конечно порожденные некоммутативные свободные группы, неэлементарные гиперболические (в смысле Громова) группы и их обобщения — так называемые сходящиеся (convergence) группы, неразрешимые линейные группы, большинство групп классов отображений [66]. В то же время, как доказала Е. Первова [154, 152], группа $\mathcal{G}$, ее обобщения $\mathcal{G}_\omega$ и p-группы Гупты–Сидки обладают только максимальными подгруппами конечного индекса. Поэтому они и многие другие самоподобные группы ветвящегося типа не являются примитивными.

Кажется правдоподобным, что слабо максимальные подгруппы должны также играть важную роль в теории групп подстановок. Ведь если группа G действует транзитивно на множестве X и стабилизатор H некоторой точки есть слабо максимальная подгруппа, то всякая собственная фактор-система (G,Y) системы (G,X) (т.е. Y — фактор-множество множества X, причем проекция коммутирует с действием группы) является конечной (т.е. $|Y| < \infty$). Таким образом, транзитивные действия со слабо максимальными стабилизаторами играют роль, аналогичную той, которую играют минимально бесконечные группы в теории групп, и поэтому по аналогии с групповым случаем их следует называть минимально бесконечными действиями. Доказанная ниже теорема 8.4 показывает, что ветвящиеся группы действуют минимально бесконечным образом на орбитах точек границы дерева. Назовем действие (G,X) финитно аппроксимируемым, если для любой пары элементов $x, y \in X$ найдется конечная фактор-система, в которой образы элементов x, y различны. Тогда для транзитивных действий счетных групп условие финитной аппроксимируемости эквивалентно тому, что стабилизатор H может быть представлен в виде пересечения $\bigcap_{n=1}^\infty H_n$ подгрупп конечного индекса, а это в свою очередь эквивалентно тому, что H замкнута в проконечной топологии.

Некоторое время оставался открытым вопрос, во всякой ли конечно порожденной ветвящейся группе любая максимальная подгруппа имеет конечный индекс? Например, этот вопрос сформулирован в [19]. Однако Е. Бондаренко построил контрпример [32]. Тем не менее, учитывая особенности этого примера (а именно то, что в нем группа локально действует элементами конечной группы, совпадающей со своим коммутантом), мы формулируем следующий вопрос.

Проблема 8.4. Верно ли, что любая конечно порожденная ветвящаяся p-группа (p — простое число) обладает максимальными подгруппами только конечного индекса?

В отличие от максимальных подгрупп группа $\mathcal{G}$ обладает обширным множеством слабо максимальных подгрупп, среди которых в первую очередь выделяются стабилизаторы точек границы. Более того, имеет место следующий общий факт.

Теорема 8.4 [16, 17]. *Пусть G — ветвящаяся группа, действующая на корневом дереве T. Для любой точки границы $\xi \in \partial T$ стабилизатор $P = \mathrm{st}_G(\xi)$ является слабо максимальной подгруппой.*

Доказательство. Пусть P — собственная подгруппа подгруппы $H \le G$, вершина v принадлежит пути $\xi \in \partial T$ и не является неподвижной вершиной для H, $h(v) = w \ne v$ для некоторого $h \in H$. Очевидно, жесткие стабилизаторы всех вершин уровня n, где $n = |v|$, кроме вершины v, являются подгруппами P. Так как $hPh^{-1}(w) = w$, то hPh^{-1} содержит жесткие стабилизаторы всех вершин n-го уровня, кроме жесткого стабилизатора вершины w.

Таким образом, H содержит жесткие стабилизаторы всех вершин n-го уровня, а следовательно, содержит и $\mathrm{rist}_G(n)$, который имеет конечный индекс в G. $\square$

Следующий пример (предложение 8.7), принадлежащий Е. Первовой, показывает, что для группы $\mathcal{G}$ группами вида $\mathrm{st}_G(\xi)$, $\xi \in \partial T$, список слабо максимальных подгрупп не исчерпывается. Однако прежде докажем утверждение, которое нам понадобится при рассмотрении этого примера и которое полезно само по себе.

Лемма 8.5. *Пусть G — ветвящаяся минимально бесконечная группа, действующая точно на корневом дереве T. Предположим, что $H < G$ — подгруппа конечного индекса, действующая сферически транзитивно на T. Тогда H минимально бесконечна.*

Доказательство. Пусть $x \in H$ — отличный от единицы элемент и $N = \langle x \rangle^H$ — его нормальное замыкание. Для доказательства леммы достаточно доказать, что N имеет конечный индекс в G. В [80, Theorem 4] доказано, что каждая нетривиальная нормальная подгруппа ветвящейся группы содержит $(\mathrm{rist}_G(n))'$ при некотором n. Найдется вершина v, фиксируемая элементом x, но такая, что x действует нетривиально на множестве вершин, расположенных под v. Можно считать, что уровень k, которому принадлежит v, больше чем n. Действительно, если это не так, то применим рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 4 в [80]. А именно заменим элемент x на подходящий (см. [80]) элемент из коммутатора $[N, \mathrm{rist}_G(w)]$, где w — вершина, расположенная ниже v на один уровень, на которую x действует нетривиально, получив таким образом новый неединичный элемент N, принадлежащий более низкому уровню дерева, нежели v. Повторив эту процедуру несколько раз, получим неединичный элемент из N, принадлежащий уровню $> n$.

Затем, опять-таки применив процедуру взятия коммутанта N с $\mathrm{rist}_G(w)$ подобно тому, как это сделано в заключительной части доказательства теоремы 4 из [80], получим, что N содержит коммутант $(\mathrm{rist}_G(u))'$ (являющийся нетривиальной группой), где u — вершина, расположенная непосредственно под w (т.е. на один уровень ниже), на которую действует нетривиально хотя бы один элемент N. Так как N действует транзитивно на уровнях, то, сопрягая $(\mathrm{rist}_G(u))'$ элементами N, получим, что N содержит $L = (\mathrm{rist}_G(|w|+1))'$. Группа L нормальна в G, а следовательно, и в H. Из [80, Theorem 4] вытекает, что фактор-группа ветвящейся группы по нетривиальной нормальной подгруппе почти абелева, а значит, конечна в нашем случае ввиду минимальной бесконечности. Следовательно, N имеет конечный индекс в H. $\square$

Пример 8.2. Пусть L — нормальное замыкание элемента b в $\mathcal{G}$, K — нормальное замыкание элемента $(ab)^2$, а $\widehat{L} = \langle (ad)^2, L \rangle$. Заметим, что $L \le \mathrm{st}_{\mathcal{G}}(1)$ и что $\mathcal{G}$ является регулярно ветвящейся группой над K (в смысле определения 3.5) [80]. Для любой подгруппы X в $\mathcal{G}$ и для произвольной вершины u определим X_u как $\mathrm{st}_X(u)|_u$. Так как группа $\langle ad, L \rangle$ действует сферически транзитивно на дереве и так как $\mathcal{G}$ — ветвящаяся минимально бесконечная группа, то в силу приведенной выше леммы она минимально бесконечна.

Лемма 8.6. *Пусть $x \in \widehat{L}$. Тогда нормальное замыкание $x^{\widehat{L}}$ имеет бесконечный индекс в $\widehat{L}$ в том и только том случае, если $x \in \mathrm{rist}_{\widehat{L}}(u)$ для некоторой вершины u первого уровня.*

Доказательство. Так как $\widehat{L} \le \mathrm{st}_{\mathcal{G}}(1)$, в одну сторону утверждение очевидно. Предположим, что x не принадлежит $\mathrm{rist}_{\widehat{L}}(u)$ ни для какой вершины первого уровня, т.е. в $x = (x_0, x_1)$ обе проекции x_0, x_1 неединичны. Тогда можно найти элементы $y_0, y_1 \in K$ такие, что $[x_i, y_i] \ne 1$ для $i = 0, 1$. Пусть Y_i есть нормальное замыкание элемента $[x_i, y_i]$ в $\mathcal{G}$. Тогда $x^{\widehat{L}} \ge (Y_0 \times Y_1)_1$,[3] а последняя группа имеет конечный индекс в $\widehat{L}$, что и требовалось доказать. $\square$

[3] Здесь и ниже индекс 1 (или 2) обозначает уровень дерева, вдоль вершин которого рассматриваемая подгруппа представлена в виде произведения ее проекций (это соответствует соотношениям (2.1) и (2.2)). Заметим, что в приводимых ниже рассуждениях при рассмотрении групповых включений, определяемых знаком $\le$, мы будем опускать написание знаков вложений Ψ и Ψ_2, определенных в (3.4) и (3.5).

Предложение 8.7. *Пусть* $W = \langle a, \operatorname{diag}(\widehat{L} \times \widehat{L})_1, (1 \times K \times 1 \times K)_2 \rangle$. *Тогда* W *является слабо ветвящейся группой в* $\mathcal{G}$.

Доказательство. Очевидно, что W имеет конечный индекс в $\mathcal{G}$ (заметим, что все элементы из $(K\times1\times1\times1)_2$ принадлежат различным классам смежности в $\mathcal{G}/W$). Пусть $x \in \mathcal{G}\backslash W$; нам предстоит доказать, что $\widehat{W} = \langle x, W\rangle$ имеет конечный индекс в $\mathcal{G}$. Очевидно, можно предположить, что $x \in \mathrm{st}_{\mathcal{G}}(1)$, так что $x = (x_0, x_1)$. Более того, можно предположить, что $x_0 \in \{1, a, ad\}$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Предположим $x_0 = 1$. Тогда $x_1 \in L \setminus \{1\}$ и

$$\mathrm{rist}_{\widehat{W}}(1) \geq (x_1^{\widehat{L}} \times x_1^{\widehat{L}})_1.$$

Пусть $u_0 = (0)$ и $u_1 = (1)$ — две вершины первого уровня. Заметим, что x_1 не принадлежит $\mathrm{rist}_{\mathcal{G}}(u_1)$ ввиду условий на группу W и элемент x. Если элемент x_1 не принадлежит $\mathrm{rist}_{\mathcal{G}}(u_0)$, то $\widehat{W}$ имеет конечный индекс ввиду леммы 8.6. Предположим обратное. Тогда имеет место разложение $x = (1, 1, y, 1)$ для некоторого нетривиального $y \in K$. Заметим, что $\widehat{L}_u = \mathcal{G}$ для произвольной некорневой вершины u. Пусть Y — нормальное замыкание элемента y в $\mathcal{G}$. Тогда $\widehat{W} \geq (Y \times K \times Y \times K)_2$ и, следовательно, $\widehat{W}$ имеет конечный индекс в $\mathcal{G}$.

Случай 2. Предположим, что $x_0 = a$. Тогда $x_1 \in dL$ и для произвольной некорневой вершины u выполнено $\widehat{W}_u = \mathcal{G}$. Пусть $u = (0)$ — вершина первого уровня, и пусть $X = \mathrm{rist}_{\widehat{W}}(1)|_u$. Тогда X нормальна в $\mathcal{G}$, а поэтому либо тривиальна, либо имеет конечный индекс в $\mathcal{G}$. Во втором случае $\widehat{W}$ также имеет конечный индекс в $\mathcal{G}$. Но так как $\widehat{W} \geq (1 \times K \times 1 \times 1)_2$, то первый случай невозможен, откуда и следует заключение для этого случая.

Случай 3. Пусть $x_0 = ad$. Тогда $x_1 \in daL$ и для произвольной вершины u первого уровня имеем $\widehat{W}_u = \langle ad, L\rangle$. Как и ранее, пусть $u = (0)$ обозначает вершину первого уровня, а $X = \mathrm{rist}_{\widehat{W}}(1)|_u$. Тогда X нормальна в $\langle ad, L\rangle$. Так как $\langle ad, L\rangle$ минимально бесконечна, то X либо тривиальна, либо имеет конечный индекс в $\mathcal{G}$. Во втором случае заключение следует немедленно. Но так как $\widehat{W} \geq (1 \times K \times 1 \times 1)_2$, то первый случай невозможен, что завершает доказательство предложения. $\square$

Несмотря на обширность множества слабо максимальных подгрупп в $\mathcal{G}$, нам представляется небезнадежной следующая задача.

Проблема 8.5. Описать все слабо максимальные подгруппы в $\mathcal{G}$.

Если это будет сделано, то будут описаны все минимально бесконечные действия группы $\mathcal{G}$ и это будет первый нетривиальный пример такого рода. На повестке дня также стоит задача описания слабо максимальных подгрупп и в других самоподобных ветвящихся группах.

Определение 8.2. Два крашеных графа Γ_1 и Γ_2 называются *локально изоморфными*, если для произвольного $r \in \mathbb{N}$ и произвольной вершины u одного графа найдется вершина v другого графа такая, что подграфы в Γ_1 и Γ_2, представляющие собой окрестности радиуса r с центрами в точках u и v (будем называть их графами-окрестностями), изоморфны как крашеные меченые графы.

Напомним, что через Γ_ξ мы обозначаем граф Шрейера, ассоциированный с точкой ξ, множеством вершин которого служит орбита ξ. Следующие два утверждения являются очевидными обобщениями утверждений, сформулированных в [87, предложения 6.21, 6.22].

Предложение 8.8. *Пусть группа* G *действует минимально на топологическом пространстве* X. *Тогда для каждого натурального* r, *любой* G*-типичной точки* $\omega \in X$ *и произвольной точки* $\eta \in X$ *найдется вершина* v *графа* Γ_η *такая, что графы-окрестности радиуса* r *в графах* Γ_ω *и* Γ_η *с центрами в вершинах* ω *и* v *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $B_\omega(r)$ — подграф, являющийся окрестностью радиуса r в графе Γ_ω с выделенной вершиной ω (подграф $B_\omega(r)$ включает в себя все вершины графа Γ_ω, расположенные на комбинаторном расстоянии $\le r$ от вершины ω, и все ребра, инцидентные им в Γ_ω, включая петли). Предположим, что u есть вершина подграфа $B_\omega(r)$ такая, что $a(u) \ne u$, $a \in A$ и $a(u)$ также принадлежит $B_\omega(r)$. Таким образом, в $B_\omega(r)$ имеется ребро, помеченное символом a, соединяющее вершины u и $a(u)$. Выделим в X окрестность U_u точки u такую, что $a(w) \ne w$ для всех точек $w \in U_u$ (такая окрестность существует в силу непрерывности действия). Построим окрестности указанного вида для всех вершин графа $B_\omega(r)$, сдвигаемых образующим a, причем выберем их настолько малыми, чтобы они попарно не пересекались. Пусть теперь η — произвольная точка границы. В силу минимальности действия ее орбита плотна в X. Найдем точку v из орбиты точки η, настолько близкую к ω, чтобы для произвольного слова W над алфавитом A длины $\le r$ из соотношения $\theta = W(\omega)$ следовало $W(v) \in U_\theta$. Таким образом, W-образы точки v будут близкими к соответствующим W-образам точки ω (будем называть такие пары партнерами). Соединив a-соседние (но различные) W-образы (для слов W длины $\le r$) точки v ребрами, пометив их буквой a и проделав это для каждого символа $a \in A$, получим граф $\Delta_v(r)$ с тем же числом вершин, что и $B_\omega(r)$, отличающийся от графа $B_\omega(r)$, возможно, только отсутствием петель, которые могли присутствовать в $B_\omega(r)$. Заметим, что до сих пор мы не пользовались тем, что ω — G-типичная точка.

Теперь предположим, что вершина u графа $B_\omega(r)$ неподвижна при действии образующего a. Тогда в X найдется окрестность V_u точки u такая, что элемент a действует тривиально в этой окрестности. Выбрав точку v достаточно близкой к ω, ввиду того что ω — G-типичная точка, можно добиться того, что каждая вершина графа $\Delta_v(r)$, для которой ее вершина-партнер в графе $B_\omega(r)$ является a-неподвижным для некоторого $a \in A$, также будет a-неподвижным. Дополнив граф $\Delta_v(r)$ соответствующими петлями, получим граф, изоморфный $B_\omega(r)$. □

Следствие 8.9. *При предположении о минимальности действия графы Шрейера G-типичных точек локально изоморфны. В частности, это верно для сферически транзитивных действий на корневых деревьях. Если X — метрический компакт, то графы Шрейера Γ_ω попарно локально изоморфны для значений параметра ω, пробегающего множество, являющееся дополнением к множеству первой категории.*

Подчеркнем, что в этом следствии, равно как и в приведенном выше определении локального изоморфизма графов, речь идет о крашеных графах. Понятие локального изоморфизма определено в произвольной категории графов (крашеных или нет, ориентированных или нет и т.д.). Ясно, что локальный изоморфизм крашеных графов влечет локальный изоморфизм графов, полученных в результате стирания раскраски, но не наоборот.

Следствие 8.10. *Пусть $(G, \overline{\mathcal{Z}})$ — шрейерова динамическая система,*[4] *определенная минимальным действием группы G на топологическом пространстве X. Тогда эта система топологически транзитивна и орбита каждой точки (Γ_ω, ω), где ω — G-типичная точка для системы (G, X), плотна в $(G, \overline{\mathcal{Z}})$.*

Теперь мы докажем метрический вариант предложения 8.8. При этом доказательство будет следовать той же стратегии, что и доказательство предложения 8.8.

Предложение 8.11. *Пусть (G, X, μ) — эргодическая динамическая система с инвариантной (не обязательно конечной) мерой μ и конечно порожденной группой G. Тогда для почти всех $x \in X$ графы Γ_x попарно локально изоморфны.*

Доказательство. Требуется доказать существование измеримого подмножества $X_* \subset X$ такого, что $\mu(X \setminus X_*) = 0$, и такого, что для любых $\alpha, \beta \in X_*$ графы $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ локально изоморфны. Будем говорить, что подмножество $X' \subset X$ имеет полную меру, если дополнение к нему

[4] Мы сохраняем обозначения, использованные при определении шрейеровой динамической системы на с. 137.

имеет меру нуль. Обозначим через $B_\omega(r)$ часть графа Γ_ω, $\omega \in X$, являющуюся окрестностью радиуса r точки ω в графе Γ_ω (т.е. в $B_\omega(r)$ входят вершины, расположенные в графе Γ_ω на расстоянии не больше чем r от ω, и пара таких точек соединяется ребром, если она соединена ребром в Γ_ω). Будем называть граф Δ с выделенной вершиной допустимым радиуса r, если он изоморфен графу $B_\omega(r)$ для некоторой точки ω. Для допустимого графа Δ обозначим через $X_\Delta(r)$ множество точек $\omega \in X$ таких, что $B_\omega(r)$ изоморфен Δ (как меченый граф). Множество $X_\Delta(r)$ измеримо, так как состоит из множества точек $x \in X$, для которых выполнены неравенства $gx \neq hx$, а также равенства $sx = tx$, где пары (g,h) и (s,t) пробегают некоторые конечные множества R_Δ и S_Δ, определенные структурой графа Δ и состоящие из элементов, удовлетворяющих неравенствам $|g|, |h|, |s|, |t| \le r$. Пространство X покрывается множествами $X_\Delta(r)$, и так как их число конечно, то среди них найдется хотя бы одно положительной меры. Граф Δ, для которого мера множества $X_\Delta(r)$ положительна, назовем положительно допустимым. Пусть D_r — множество положительно допустимых графов радиуса r. Для $\Delta \in D_r$ определим

$$\overline{X}_\Delta = \bigcup_{g\in G} g(X_\Delta(r)).$$

Тогда $\overline{X}_\Delta$ — инвариантное подмножество положительной меры и в силу эргодичности действия имеет полную меру. Наконец, введем в рассмотрение множество

$$X_* = \bigcap_{r\ge 1} \bigcap_{\Delta\in D_r} \overline{X}_\Delta,$$

которое также инвариантно и имеет полную меру. Утверждается что для любой пары $\omega, \eta \in X_*$ графы Γ_ω, Γ_η локально изоморфны. Действительно, пусть $\xi \in G(\omega)$, $B_\xi(r) \simeq \Delta \in D_r$. Так как $\eta \in \overline{X}_\Delta(r)$, то существует точка $\zeta \in G(\eta)$ такая, что $B_\zeta(r) \simeq \Delta$. $\square$

Рассмотрим еще один пример шрейеровой динамической системы, разобранный в деталях моим учеником Д. Савчуком. Этот пример, связанный со знаменитой группой Томпсона, показывает, что и в ситуации действия с квазиинвариантной мерой шрейерова динамическая система может воспроизводить исходное действие.

Определение 8.3. Группой Ричарда Томпсона F называется группа, состоящая из всех возрастающих кусочно линейных гомеоморфизмов замкнутого отрезка $[0,1]$, дифференцируемых во всех точках интервала, кроме конечного множества двоично рациональных точек, причем на интервалах дифференцируемости производные отображений равны целым степеням двойки (т.е. имеют вид 2^n, $n \in \mathbb{Z}$). При этом групповой операцией является суперпозиция.

Кроме группы F, Томпсоном в середине 60-х годов прошлого столетия были определены и исследованы группы V и T, являющиеся бесконечными конечно определенными простыми группами (это были первые примеры такого рода). Основные сведения об этих группах и их

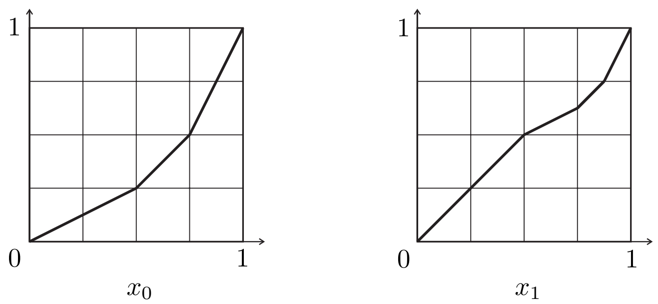

Рис. 8.2. Порождающие x_0 и x_1 группы Томпсона F

обобщениях, построенных Хигманом [101], можно найти в обзорной работе [38]. Хотя F и не простая группа (заметим, что тем не менее она близка к простой, а именно любой гомоморфизм с нетривиальным ядром пропускается через абелианизацию F, которая равна $\mathbb{Z}^2$), группа F обладает другим важным свойством — у нее нет подгрупп, изоморфных свободной группе ранга 2. При этом F является конечно представленной группой с двумя порождающими и двумя соотношениями и в ней не выполнено никаких нетривиальных тождеств [37, 1]. Порождающие группу F гомеоморфизмы x_0 и x_1 определяются следующим образом:

$$x_0(t)=\begin{cases} \dfrac{t}{2}, & 0\le t\le \dfrac12,\\[2mm] t-\dfrac14, & \dfrac12\le t\le\dfrac34,\\[2mm] 2t-1, & \dfrac34\le t\le 1,\end{cases}\qquad x_1(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le\dfrac12,\\[2mm] \dfrac{t}{2}+\dfrac14, & \dfrac12\le t\le\dfrac34,\\[2mm] t-\dfrac18, & \dfrac34\le t\le\dfrac78,\\[2mm] 2t-1, & \dfrac78\le t\le 1.\end{cases}$$

Их графики изображены на рис. 8.2.

Каждая двоично иррациональная точка интервала $[0,1]$ может быть задана своей двоичной записью. Это позволяет расширить действие группы F естественным образом на множества $\{0,1\}^*$ конечных и $\{0,1\}^\omega$ бесконечных слов (или, точнее говоря, последовательностей) над алфавитом $\{0,1\}$. Последнее множество гомеоморфно множеству Кантора, и F действует на нем гомеоморфизмами. Это действие будем называть *стандартным действием F на множестве Кантора.* При этом порождающие x_0 и x_1 действуют на последовательности следующим образом:

$$x_0\colon \begin{cases} 0w\mapsto 00w,\\ 10w\mapsto 01w,\\ 11w\mapsto 1w,\end{cases}\qquad x_1\colon\begin{cases} 0w\mapsto 0w,\\ 10w\mapsto 100w,\\ 110w\mapsto 101w,\\ 111w\mapsto 11w,\end{cases}$$

где w представляет произвольную последовательность из $\{0,1\}^\omega$.

В [165] был полностью описан граф Шрейера действия группы F на орбите точки $\frac12\in[0,1]$, состоящей из всех двоично рациональных точек интервала $(0,1)$. При действии на множестве $\{0,1\}^\omega$ это соответствует орбите точки $1000\ldots$, состоящей из всех последовательностей с конечным ненулевым числом единиц. Этот граф Шрейера отображен на рис. 8.3, и, как видно, он имеет древовидную структуру, т.е. довольно прост в плане его геометрии и комбинаторного описания. Заметим, что стабилизатор $\mathrm{st}_F\bigl(\frac12\bigr)$ является максимальной подгруппой F, что подтверждает наш тезис, что именно графы Шрейера, ассоциированные с максимальными и слабо максимальными подгруппами, представляют особый интерес. Так как ядро $\mathrm{st}_F\bigl(\frac12\bigr)$ тривиально (т.е. не содержит нетривиальной нормальной подгруппы), то по этому графу можно полностью восстановить F (с аналогичной ситуацией мы уже встречались в случае группы $\mathcal{G}$).

Применим конструкцию ассоциированной с графом Шрейера динамической системы. Тогда получим следующее утверждение, доказанное в [166].

Теорема 8.12. *Пусть $(F,\overline{\mathcal{Z}})$ — динамическая система, ассоциированная с графом Шрейера группы Томпсона F.*

(а) *Ранг Кантора–Бендиксона множества $\overline{\mathcal{Z}}$ равен 1. При этом совершенное ядро $\mathcal{D}$ множества $\overline{\mathcal{Z}}$ гомеоморфно множеству Кантора.*

(б) *Действие группы F на множестве $\mathcal{D}$ сопряжено со стандартным действием F на множестве Кантора $\{0,1\}^\omega$.*

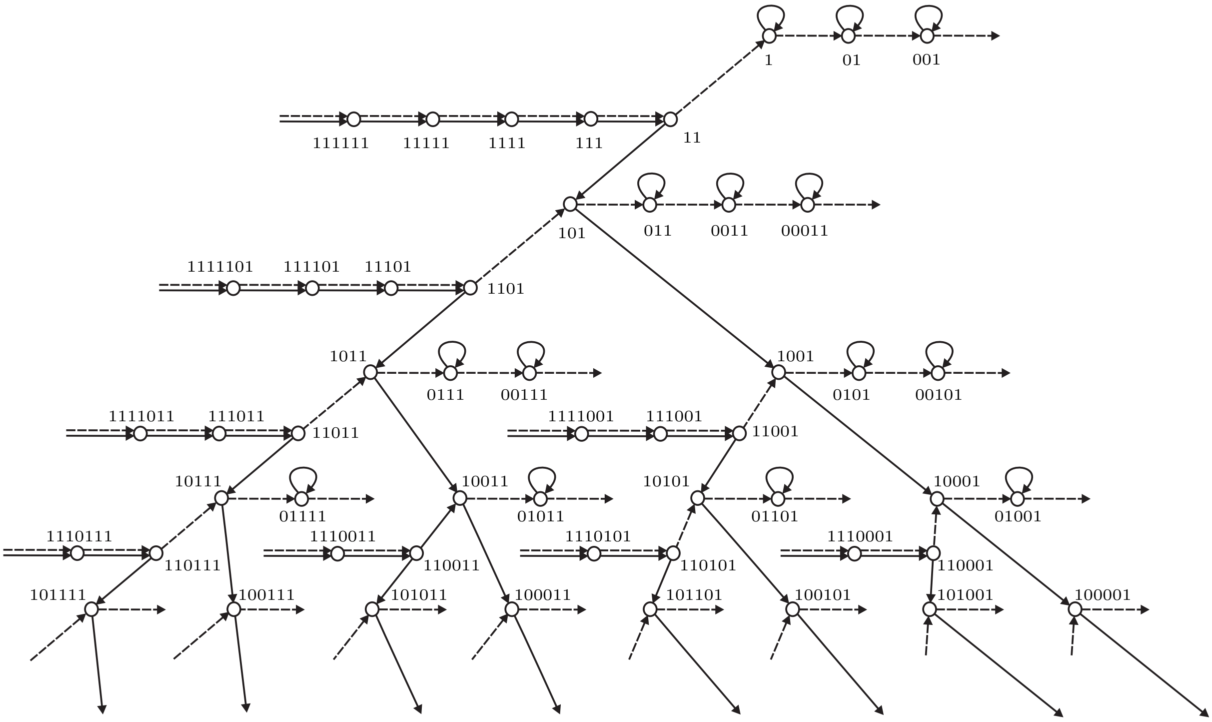

Рис. 8.3. Граф Шрейера действия группы F на орбите точки $1000\dots$ Пунктирные ребра обозначают действие порождающего x_0, а сплошные — действие x_1

Другими словами, после удаления из $\overline{\mathcal{Z}}$ счетного множества изолированных точек и сужения действия на оставшуюся часть мы воспроизводим исходное действие.

Завершим этот раздел определением некоторых важных понятий, которые будут использоваться в следующих разделах, а в данном разделе уже были использованы ранее (при обсуждении вопроса о существовании инвариантной меры на замыкании класса сопряженности подгруппы).

Одними из важнейших понятий асимптотической теории групп, связанными с многими прикладными аспектами теории групп, являются понятия аменабельной группы и аменабельного действия, введенные фон Нейманом в 1929 г. [147]. Независимо (и в большей общности топологических, не обязательно локально компактных групп) к этому понятию пришел Н.Н. Боголюбов [30].

Определение 8.4. Группа G называется *аменабельной*, если существует конечно аддитивная левоинвариантная мера ν со значениями в интервале $[0,1]$, определенная на сигма-алгебре всех подмножеств G и такая, что $\nu(G)=1$.

Определение 8.5. Действие (G,X) группы G на множестве X называется аменабельным, если существует конечно аддитивная G-инвариантная мера со значениями в $[0,1]$, определенная на сигма-алгебре всех подмножеств X, нормированная условием $\nu(X)=1$.

Хорошими источниками для первоначального ознакомления с теорией аменабельных групп являются книги [69, 189, 39].

Очевидно, аменабельность группы эквивалентна аменабельности ее действия на себе левыми (или правыми) сдвигами. Существует огромное количество эквивалентных переформулировок понятия аменабельности группы (пожалуй, не существует никакого другого понятия в математике, которое бы имело их столь много). Ограничимся здесь только формулировкой критерия Фелнера (называемого также условием Фелнера), а в разд. 10 будет упомянут еще и вероятностный критерий Кестена.

Теорема 8.13 [60, 41]. *Действие (G,X) аменабельно в том и только том случае, если для произвольного $\epsilon > 0$ и произвольного конечного подмножества $S \subset G$ найдется конечное подмножество $F \subset X$ такое, что*

$$|F \bigtriangleup gF| \le \epsilon |F| \tag{8.1}$$

для всех $g \in S$, где $\bigtriangleup$ обозначает симметрическую разность множеств.

Множество, фигурирующие в формулировке этой теоремы, принято называть множеством Фелнера. Нетрудно сообразить, что для счетной группы G условие Фелнера, характеризующее аменабельность, может быть переформулировано как условие о существовании возрастающей последовательности множеств Фелнера $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, исчерпывающей G и такой, что для всякого элемента $g \in G$

$$\frac{|F_n \bigtriangleup gF_n|}{|F_n|} \to 0.$$

На языке графов Кэли, ассоциированных с группой, или графов Шрейера, ассоциированных с действием группы, условие Фелнера означает существование бóльших по размеру подмножеств множества вершин с небольшой границей в сравнении с мощностью самого подмножества (при этом неважно, как определяется граница подмножества графа, любой разумный способ годится [41]). Класс AG аменабельных групп замкнут относительно операций взятия подгруппы, фактор-группы, группового расширения и индуктивных пределов [69]. Конечные группы аменабельны (что очевидно), а также аменабельны все коммутативные группы (это доказывается с применением аксиомы выбора) [69]. Таким образом, разрешимые (и, в частности, нильпотентные) группы аменабельны и, более того, аменабельными являются группы, принадлежащие классу элементарных аменабельных групп EG — наименьшему классу групп, содержащему конечные и коммутативные группы и замкнутому относительно указанных выше операций.

Наиболее простой пример неаменабельной группы — это свободная группа F_2 ранга 2. Таким образом, неаменабельна любая группа, содержащая подгруппу, изоморфную F_2. Пусть NF — класс групп, не содержащих свободной подгруппы с двумя порождающими. Имеют место включения $\mathrm{EG} \subset \mathrm{AG} \subset \mathrm{NF}$. В [52] был поставлен вопрос о совпадении этих классов. То, что $\mathrm{AG} \ne \mathrm{NF}$, доказано в [149]. То, что $\mathrm{EG} \ne \mathrm{AG}$, доказано в [72]. Последний результат вытекает из того факта, что группы промежуточного роста аменабельны, но не элементарно аменабельны [45]. В частности, $\mathcal{G} \in \mathrm{AG} \setminus \mathrm{EG}$. Так как существует несчетное множество групп промежуточного роста (даже с различными порядками роста, что, кстати, влечет существование несчетного множества попарно неквазиизометричных конечно порожденных групп) [72], то и имеется несчетно много существенно различных групп, принадлежащих дополнению $\mathrm{AG} \setminus \mathrm{EG}$. В [77] был определен класс SG субэкспоненциально аменабельных групп, т.е. наименьший класс групп, содержащий группы субэкспоненциального роста (они все аменабельны) и замкнутый относительно перечисленных выше четырех групповых операций, сохраняющих аменабельность. В [77] был поставлен вопрос о совпадении классов SG и AG. В [23] с привлечением результатов из [94] доказано, что группа “базилика”, определенная в примере 2.4, принадлежит дополнению $\mathrm{AG} \setminus \mathrm{SG}$ и, таким образом, является не только не элементарно аменабельной, но и группой, аменабельность которой никак не связана с субэкспоненциальностью роста.

В работах [20] и [9] доказано, что группы, порожденные ограниченными и линейно растущими автоматами соответственно, являются аменабельными. В то же время С. Сидки в [172] и В. Некрашевичем в [143] доказано, что группы, порожденные полиномиально растущими автоматами, не содержат свободной подгруппы с двумя образующими (т.е. принадлежат классу NF). Вопрос об их аменабельности остается открытым.

В настоящий момент все известные примеры и конструкции аменабельных, но не элементарно аменабельных групп тем или иным образом связаны с самоподобными группами ветвящегося типа или их модификациями и надстройками. Было бы интересно найти другие конструктивные типы аменабельных групп. Однако при завершении работы над этим текстом автору совместно с К. Мединцом, используя минимальные гомеоморфизмы множества Кантора, удалось построить бесконечные конечно порожденные простые аменабельные группы [85], причем доказано, что имеется несчетное число попарно неизоморфных групп такого вида. Все эти группы являются неэлементарными аменабельными, и построены они на совершенно новой основе, ранее не применявшейся в теории групп. После этой работы центральным вопросом в плане построения новых примеров аменабельных групп является следующий.

Проблема 8.6. Существуют ли конечно порожденные наследственно минимально бесконечные неэлементарные аменабельные группы?

Заметим, что конечно порожденные элементарные наследственно минимально бесконечные группы исчерпываются бесконечными циклической и диэдральной группами.

В завершение приведем формулировку известной проблемы.

Проблема 8.7. Является ли группа Томпсона F аменабельной?

Эта проблема была поставлена Р. Гайгеном еще в 70-е годы прошлого столетия. Несмотря на большое число попыток многих математиков ее решить, вопрос остается открытым. Заметим, что опубликованная недавно работа [171], в которой утверждается, что F аменабельна, ошибочна.

9. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, C^*-АЛГЕБРЫ И САМОПОДОБНЫЙ СЛЕД

В этом разделе дается определение некоторой C^*-алгебры, ассоциированной с группой, действующей на корневом дереве, и на ней строится самоподобный (или рекуррентный) след в случае, когда группа является сильно самоподобной. Этот след и его свойства понадобятся нам в разд. 10, в частности, для построения асимптотических экспандеров. Эта и другие C^*-алгебры и рекуррентный след на них исследовались в работах [16, 95, 141, 86]. Ниже мы приводим некоторую дополнительную информацию о них.

Как уже упоминалось во введении, с действием счетной группы G на пространстве с мерой (X,μ) сохраняющими меру преобразованиями можно ассоциировать ряд унитарных представлений. Во-первых, можно изучать представление π в гильбертовом пространстве $L^2(X,\mu)$, определенное соотношением $\pi_g(f) = f(g^{-1}x)$, $f \in L^2(X,\mu)$ (купмановское представление). Можно также изучать пучок представлений ρ_x, действующих в пространствах $l^2(Gx)$ и нумерованных точками $x \in X$, где Gx — орбита точки x. Представление ρ_x задается левыми сдвигами $\rho_x(g)f(y) = f(g^{-1}y)$ на функциях на орбите и изоморфно квазирегулярному представлению $\rho_{G/H}$ в пространстве $l^2(G/H)$, заданному действием $\rho_g(F)(fH) = F(g^{-1}fH)$, $F \in l^2(G/H)$, где $H = \mathrm{st}_G(x)$ — стабилизатор точки x. На самом деле представление π можно определить и в случае, когда мера μ лишь квазиинвариантна, а для определения представлений ρ_x достаточно иметь действие группы на пространстве X. Унитарное представление группы определяет C^*-алгебру, порожденную операторами представления группы.

Действию группы можно сопоставить несколько C^*-алгебр. В первую очередь это алгебра C_π, порожденная унитарным представлением π. А именно: представление π распространяется по линейности до представления групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$, после чего эта алгебра замыкается по операторной норме. Второй подход состоит в том, чтобы, распространив квазирегулярное представление ρ_x на групповую алгебру, замкнуть его по норме, получив таким образом C^*-алгебру C^*_x. Можно также рассмотреть интеграл гильбертовых пространств $\int_{x\in X} l^2(Gx)$, где Gx есть G-орбита точки x, а в каждом слое $l^2(Gx)$ группа действует сдвигами, и замкнуть это представление по норме (опять-таки распространив его на групповую алгебру).

Если пространство X является топологическим пространством, то дополнительно можно еще рассмотреть скрещенное представление представления π на коммутативную C^*-алгебру $C(X)$ непрерывных функций на X (за деталями этой и других конструкций мы отсылаем читателя к [181]). Изучение групп на основе анализа их действий на пространствах с мерой, а также ассоциированных C^*-алгебр (и алгебр фон Неймана) относится к направлению, называемому измеримой теорией групп, некоторое представление о которой можно получить из [181, 62, 113] и других монографий и статей.

С точки зрения измеримой теории групп, теории представлений и теории операторных алгебр естественными являются вопросы о неприводимости указанных представлений, об их свойствах и свойствах соответствующих алгебр и их связи с асимптотическими и геометрическими свойствами группы (например, аменабельностью, T-свойством Каждана, свойством А Г. Юу [195] и т.д.). В частности, важно знать, какие свойства ассоциированных C^*-алгебр являются инвариантами динамической системы. Как мы увидим ниже (а именно в разд. 10), в некоторых интересующих нас ситуациях алгебры C^*_x, $x \in X$, не зависят от точки x и, более того, изоморфны алгебре C_π. Также при некоторых дополнительных предположениях эти алгебры являются изоморфными редуцированной $C^*_{\mathrm{r}}(G)$-алгебре группы G (которая является замыканием по норме левого регулярного представления λ_G, являющегося частным случаем квазирегулярного представления $\lambda_{G/\{1\}}$).

Параллельно можно рассмотреть алгебры фон Неймана, ассоциированные с действием, только в этом случае вместо замыкания по норме следует использовать слабое замыкание соответствующих алгебр операторов. Конструкция, связанная с рассмотрением интеграла гильбертовых пространств в контексте алгебр фон Неймана, называется конструкцией Кригера (см. [181]).

В случае действия группы на корневом дереве существуют еще несколько заслуживающих внимания конструкций операторных алгебр, рассмотренных в [141, 86] и основанных на использовании самоподобий гильбертова пространства (т.е. изоморфизмов между бесконечномерным гильбертовым пространством и прямой суммой нескольких его копий). Эти алгебры определяются с использованием важной для операторных алгебр алгебры Кунца (см. [51]) и ее обобщений.

Удивительно, но похоже, что алгебра C_π до недавнего времени не пользовалась особой популярностью в исследованиях по динамике. Среди работ, в которых эта алгебра играет важную роль, отметим работу Л. Бартольди и автора [16], с которой началось рассмотрение многих вопросов, затронутых в этой статье, и В. Некрашевича и автора [86]. Конечно, купмановское представление фигурирует во многих работах и монографиях, однако, как правило, без привлечения C^*-алгебры, с ним ассоциированной. Например, ему уделено внимание в книге Э. Гласнера [67] и статье Кехриса и Цанкова [114]. Заметим, что вопрос (который, как пишет Гласнер, возник в ходе его дискуссий с П. де ля Арпом) о неприводимости купмановского представления (суженного на ортогональное дополнение к пространству постоянных функций; будем говорить, что в этом случае купмановское представление *почти* неприводимо) для эргодических действий на пространствах с конечной мерой обсуждается в процитированной книге Гласнера (гл. 5, разд. 4), где доказана почти неприводимость купмановского представления для всей группы $\mathrm{Aut}([0,1],m)$ автоморфизмов пространства Лебега (эта группа имеет естественную топологию, превращающую ее в топологическую группу). Там же отмечается, что сужение представления этой группы на любую счетную подгруппу группы $\mathrm{Aut}([0,1],m)$, плотную в ней, также будет почти неприводимым. Таким образом, можно получить примеры локально конечных групп (например, $S(\infty)$) с неприводимым купмановским представлением.

Для нас алгебра C^*_π будет играть важную роль, и первое, что мы намерены доказать, это то, что для групп, действующих на корневых деревьях, она аппроксимируется конечномерными алгебрами. Это свойство, которое мы будем обозначать RFD (residually finite dimentional), эквивалентно тому, что алгебра вкладывается в прямое произведение конечномерных матричных алгебр (рассматриваемых как C^*-алгебры). Оно является аналогом свойства финитной аппроксимируемости для групп, которым обладают все группы, действующие точно на корневых деревьях, как уже обсуждалось выше и обсуждается в работе [25], где вместо “прямое произведение” ошибочно использован термин “прямая сумма”. Кроме того, для наших дальнейших рассмотрений будет важно наличие на C^*_π специального следа, который удобен для применения к исследованию самоподобных действий и который мы будем называть самоподобным следом.

Напомним, что нормированный след на унитальной C^*-алгебре A — это линейный функционал $\tau\colon A\to\mathbb{C}$, обладающий свойством положительности (т.е. $\tau(x^*x)\geq 0$ для всех $x\in A$) и удовлетворяющий соотношениям $\tau(xy)=\tau(yx)$ для произвольных $x,y\in A$ и $\tau(1)=1$. След называется точным, если $\tau(x^*x)\neq 0$ для любого $x\in A$, $x\neq 0$. Например, редуцированная C^*-алгебра $C^*_{\mathrm r}(G)$ группы G обладает каноническим следом $\tau(a)=\langle a\delta_e,\delta_e\rangle$, где $a\in C^*_{\mathrm r}(G)$, а δ_e есть дельта-функция с ненулевым значением в единичном элементе e. При этом $\tau(g)=0$, если $g\in G$ — неединичный элемент, и $\tau(e)=1$.

C^*-алгебра, аппроксимируемая конечномерными алгебрами, всегда обладает точным следом. А именно если

$$i\colon\ A\to\prod_{n\geq 1}M_n(\mathbb{C})$$

— вложение, то след

$$\tau\colon\ \prod_{n\geq 1}M_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C},$$

определенный соотношением

$$\tau(a_1,a_2,\dots)=\sum_{n\geq 1}2^{-n}\tau_n(a_n), \tag{9.1}$$

где τ_n обозначает обычный нормированный след на матрицах размера n, является точным следом на прямом произведении матричных алгебр, а его сужение на A дает точный след на этой подалгебре. Беря вместо коэффициентов 2^{-n} в (9.1) другую убывающую последовательность положительных коэффициентов с суммируемым рядом и деля (9.1) на его сумму, получим другой точный след. Таким образом, получаем бесконечное семейство точных следов.

След, который мы намерены определить, по всей видимости, никогда не является точным и определен только на алгебрах, ассоциированных с группами, действующими на корневых деревьях, однако он обладает свойством самоподобия, что выражено в том, что он согласуется с матричными рекурсиями, которые используются ниже (более подробно о них написано в [86]).

Докажем выполнение свойства RFD.

Предложение 9.1. *Пусть счетная группа G действует точно на корневом дереве $T=T_{\overline{m}}$ и ν — равномерная мера на границе ∂T дерева. Тогда алгебра C^*_π, ассоциированная с динамической системой $(G,\partial T,\nu)$, принадлежит классу* RFD.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}=L^2(\partial T,\nu)$ и $\mathcal{H}_n$, $n\geq 1$, — подпространство, порожденное характеристическими функциями χ_{C_u} атомов разбиения ξ_n границы ∂T на цилиндрические множества C_u, $|u|=n$ (напомним, C_u состоит из геодезических путей, соединяющих корневую вершину с бесконечностью и проходящих через вершину u). Очевидно, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_n)=|V_n|=m_1m_2\dots m_n$, $\mathcal{H}_0\simeq\mathbb{C}$. Так как каждый атом ранга n разбиения (т.е. атом вида C_u, $|u|=n$) является объединением m_{n+1} атомов ранга $n+1$ и, следовательно, каждая характеристическая функция ранга n является суммой m_{n+1} характеристических функций ранга $n+1$, то имеется естественное вложение $j\colon \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1}$. Пусть $\mathcal{H}_n^\perp$ — ортогональное дополнение к $\mathcal{H}_{n-1}$ в $\mathcal{H}_n$. Тогда $\dim_\mathbb{C} \mathcal{H}_n^\perp = m_1 \dots m_{n-1}(m_n - 1) := q_n$ и

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^\perp.$$

Так как каждое из разбиений ξ_n является G-инвариантным, то инвариантны и пространства $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}_n^\perp$. Это показывает, что представление π является прямой суммой конечномерных представлений и что алгебра C^*_π вкладывается в

$$\mathbb{C} \times \prod_{n=1}^{\infty} M_{q_n}(\mathbb{C}),$$

что и доказывает утверждение. □

В случае действия группы на d-регулярном дереве числа q_n, появившиеся в ходе доказательства предыдущего утверждения, равны $d^{n-1}(d-1)$. Считая C^*_π вложенной в прямое произведение матричных алгебр, будем записывать элемент $x \in C^*_\pi$ в виде $x = (x_0, x_1, \dots)$, $x_0 \in \mathbb{C}$, $x_n \in M_{q_n}(\mathbb{C})$, $n \ge 1$.

Теперь для групп, действующих на корневых деревьях, мы намерены определить специальный след на алгебре C^*_π, который в дальнейшем будет называться рекуррентным следом, а в случае, когда группа самоподобна, также нередко будем употреблять термин самоподобный след.

Теорема 9.2. *Предел, фигурирующий в правой части соотношения*

$$\tau(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_n} \operatorname{Tr}[x]_n, \tag{9.2}$$

где $N_n = m_1 \dots m_n$ — число вершин на n-м уровне, $[x]_n = (x_1, \dots, x_n)$, а Tr — обычный матричный след, существует и определяет нормированный след τ на C^*_π.

Доказательство. Обозначим через π_n сужение представления π на $\mathcal{H}_n$, а через $\pi_n^\perp$ сужение π_n на $\mathcal{H}_n^\perp$. Тогда π является суммой представлений $\pi_n^\perp$: $\pi = \bigoplus_{n=0}^\infty \pi_n^\perp$. Представление π_n изоморфно подстановочному представлению ρ_n в пространстве $l^2(V_n)$ функций на множестве V_n вершин n-го уровня, индуцированному действием группы на этом уровне.

Вначале мы намерены доказать существование предела (9.2) для элементов групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$, а затем докажем, что функционал τ, определенный на этой алгебре, удовлетворяет свойствам следа и что, кроме того, он непрерывен относительно нормы, после чего останется доопределить его на всю алгебру C^*_π по непрерывности.

Так как каждый элемент групповой алгебры является конечной линейной комбинацией элементов группы, то существование предела (9.2) будем доказывать в предположении, что $x = g \in G$. Пусть $[g]_n$ обозначает матрицу размера N_n, соответствующую оператору $\pi_n(g)$ и базису в $l^2(V_n)$, состоящему из дельта-функций в вершинах n-го уровня дерева. Другими словами, $[g]_n$ — матрица перестановочного вида (с матричными элементами, принадлежащими множеству $\{0,1\}$), описывающая перестановку вершин n-го уровня, индуцированную действием элемента g. В рассуждении, примененном ниже, мы представляем матрицу $[g]_n$ в виде блочной матрицы размера N_{n-1} с блоками по диагонали g_{ii}, $1 \le i \le N_{n-1}$, размера m_n. Обозначим диагональные элементы матрицы $[g]_{n-1}$ через $\bar g_{ii}$, $1 \le i \le N_{n-1}$. Тогда

$$\bar g_{ii} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ g_{ii} = 0, \\ 1, & \text{если } \ g_{ii} \ne 0, \end{cases}$$

и поэтому

$$\frac{1}{N_n}\operatorname{Tr}[g]_n = \frac{1}{N_{n-1}}\sum_{i=1}^{N_{n-1}} \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{m_n} g_{ii}\right) \le \frac{1}{N_{n-1}}\operatorname{Tr}[g]_{n-1},$$

так как переход от матрицы $[g]_{n-1}$ к матрице $[g]_n$ состоит в замене нулевых матричных элементов нулевыми матрицами размера m_n и в замене матричных элементов, равных 1, соответствующими подстановочными матрицами размера m_n, нормированный след которых, очевидно, не превышает 1. Это доказывает существование предела (9.2) для элементов $x \in G$, а следовательно, и для элементов $x \in \mathbb{C}[G]$.

Обозначим значение предела (9.2) на элементах группового кольца через $\tau(x)$ и начиная с этого момента до теоремы 9.11 закрепим за τ обозначение именно этого функционала.

Лемма 9.3. *Функционал $\tau(x)$ на $\mathbb{C}[G]$, определенный пределом (9.2), положителен и удовлетворяет коммутационному соотношению $\tau(xy) = \tau(yx)$, $x, y \in \mathbb{C}[G]$.*

Эта лемма очевидным образом следует из аналогичных свойств обычного следа конечномерных матриц.

Лемма 9.4. *Пусть G — группа, действующая на корневом дереве, x — самосопряженный элемент групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$. Тогда выполнено неравенство*

$$|\tau(x)| \le 2\|x\|_\pi, \tag{9.3}$$

где $\|x\|_\pi$ обозначает норму оператора $\pi(x)$.

Доказательство. Пусть $x = (x_0, x_1, \dots)$ — разложение элемента x. Тогда $\|x\|_\pi = \sup_n \|x_n\|$, где $\|\cdot\|$ обозначает обычную норму матрицы (т.е. норму оператора, определяемого этой матрицей). Таким образом, используя обозначение $[x]_n = (x_0, \dots, x_n)$ и то, что

$$q_n = m_1 \dots m_{n-1}(m_n - 1),$$

получаем оценки

$$\begin{aligned}
&\tau(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_n}\operatorname{Tr}[x]_n = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{m_1\dots m_n}\operatorname{Tr}(x_0) + \frac{m_1-1}{m_1\dots m_n}\frac{\operatorname{Tr}(x_1)}{q_1} + \dots + \frac{m_i-1}{m_i\dots m_n}\frac{\operatorname{Tr}(x_i)}{q_i} + \dots + \frac{m_n-1}{m_n}\frac{\operatorname{Tr}(x_n)}{q_n}\right] \le \\
&\le \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_{n-1}m_n} + \dots\right)\sup_{1\le i\le n}\frac{\operatorname{Tr}(x_i)}{q_i}\right] \le \\
&\le \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_{n-1}m_n} + \dots\right)\sup_{1\le i\le n}\|x_i\|\right],
\end{aligned}$$

так как $\operatorname{Tr} B \le r\|B\|$ для произвольной самосопряженной матрицы размера r. □

Доказанная лемма показывает, что функционал τ можно доопределить по непрерывности на конус всех самосопряженных элементов алгебры C^*_π. Так как всякий элемент C^*-алгебры является линейной комбинацией (с коэффициентами 1 и $i = \sqrt{-1}$) двух самосопряженных элементов, то отсюда следует, что τ можно доопределить на всю алгебру C^*_π. Теорема 9.2 доказана. □

Как уже отмечалось, этот след мы будем называть *рекуррентным* или *самоподобным* следом. Такое название выбрано для него ввиду того, что в случае групп, заданных конечными автоматами, он полностью определяется рекуррентными соотношениями между порождающими элементами, определяемыми диаграммой Мура автомата.

Теперь мы намерены исследовать область значений следа τ на элементах группы (т.е. на элементах операторов представления группы). Вначале мы докажем, что в случае существенно свободных действий значения следа такие же, как в случае редуцированной C^*-алгебры C^*_{r} (т.е. 0 или 1), что является одним из его достоинств, которое мы намерены использовать ниже. Затем мы приведем пример, показывающий, что ситуация драматически меняется при переходе к действиям ветвящегося типа. Но и в этом случае будет извлечена из него польза.

Следующее утверждение инспирировано предложением 9 из [95].

Предложение 9.5. *Пусть $G = G(\mathcal{A})$ — самоподобная группа, заданная конечным автоматом $\mathcal{A}$ над алфавитом из d букв, и предположим, что действие G на соответствующем d-регулярном дереве существенно свободно. Пусть C^*_π — определенная этим действием C^*-алгебра, а τ — самоподобный след на ней. Тогда*

$$\tau(g) = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ g = 1, \\ 0, & \text{если} \ \ g \neq 1. \end{cases} \tag{9.4}$$

Доказательство. Равенство $\tau(1) = 1$ очевидно. Для неединичного элемента g докажем, что $\tau(g) = 0$. Пусть A — множество состояний автомата $\mathcal{A}$, которое мы, как обычно, используем как множество образующих группы G. Предположим, что длина g относительно системы образующих A равна n, $n \geq 1$. Это означает, что g определяется одним из состояний s автомата $\mathcal{B}$, являющегося минимизацией n-й степени (при применении операции композиции) автомата $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ ($\mathcal{A}^{-1}$ — это автомат, обратный к автомату $\mathcal{A}$, а под объединением двух автоматов понимается автомат, полученный дизъюнктным объединением диаграмм Мура этих автоматов). Пусть $\mathcal{B}_*$ — автомат, задаваемый компонентой связности диаграммы Мура автомата $\mathcal{B}$, содержащей s. Сечение преобразования, определяемого состоянием s, в любой вершине дерева T_d является преобразованием, соответствующим некоторому состоянию автомата $\mathcal{B}_*$. Для каждого состояния q автомата $\mathcal{B}_*$ найдется $k(q) \in \mathbb{N}$ такое, что q действует нетривиально на множестве слов длины $k(q)$ (или, что то же самое, действует нетривиально на уровне $k(q)$ дерева T_q). Отсюда приходим к заключению, что для числа $k = \prod_{q\in Q} k(q)$ каждое из состояний автомата $\mathcal{B}_*$ действует нетривиально на множестве слов длины k.

Рассмотрим матрицы $[g]_{kn}$, описывающие действие элемента g на множестве слов длины kn, $n = 1, 2, \dots$ (аналогичные обозначения использовались при доказательстве теоремы 9.2). Разобьем эту матрицу на блоки размера $d^{k(n-1)}$, получив таким образом блочную матрицу размера d^k, строки и столбцы которой занумерованы словами длины k, являющимися префиксами слов длины kn, нумерующих строки и столбцы матрицы $[g]_{kn}$. Обозначим диагональные блоки через a_{ii}, $1 \leq i \leq d^k$. Они являются или нулевыми матрицами, или перестановочными матрицами, представляющими некоторые элементы g_{ii}, $1 \leq i \leq d^k$, группы G, причем эти элементы соответствуют состояниям автомата $\mathcal{B}_*$ и имеют место соотношения $a_{jj} = [g_{jj}]_{k(n-1)}$. Обозначим через J множество значений индекса j, $1 \leq j \leq d^k$, для которых соответствующие диагональные элементы ненулевые (множество таких элементов соответствует множеству состояний, в которые можно попасть из состояния s, соответствующего элементу g, двигаясь в диаграмме Мура автомата $\mathcal{B}_*$ вдоль путей, определяемых словами длины k, причем метки проходимых при этом состояний должны быть тривиальным элементом симметрической группы $\mathrm{Sym}(d)$). В силу нетривиальности действия на множестве слов длины k по крайней мере одна из матриц a_{ii}, $1 \leq i \leq d^k$, нулевая. Таким образом, приходим к неравенству

$$\frac{1}{d^{kn}} \operatorname{Tr}[\pi_{kn}(g)] \leq \frac{d^k - 1}{d^k} \frac{1}{d^{k(n-1)}} \max_{i\in J} \operatorname{Tr}[\pi_{k(n-1)}(g_{ii})] \leq \frac{d^k - 1}{d^k}. \tag{9.5}$$

В левой части неравенств (9.5) элемент g можно заменить произвольным элементом g_{jj}, $j \in J$. Итерируя первое из неравенств (9.5), приходим к неравенству

$$\frac{1}{d^{kn}} \operatorname{Tr}([g]_{kn}) \le \left(1 - \frac{1}{d^k}\right)^n,$$

откуда переходом к пределу при $n \to \infty$ получаем $\tau(g) = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Вернемся к общей ситуации и предположим, что G — группа, действующая на корневом дереве $T = T_{\overline{m}}$ общего вида, $N_n = m_1 m_2 \dots m_n$, ν — равномерная мера на границе дерева, C^*_π — соответствующая C^*-алгебра, а τ — рекуррентный след на ней, $g \in G$, $\operatorname{Fix}(g)$, как и ранее, обозначает множество g-неподвижных точек на границе, а $\operatorname{Fix}_n(g)$ обозначает множество g-неподвижных вершин, принадлежащих уровню n. Тогда имеют место соотношения

$$\nu(\operatorname{Fix}(g)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_n} |\operatorname{Fix}_n(g)| = \tau(g). \tag{9.6}$$

Действительно, первое соотношение — это простое следствие общих свойств меры, а второе вытекает из того, что количество единиц на диагонали в матричном представлении $\pi_n(g)$ элемента g равно $|\operatorname{Fix}_n(g)|$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Предложение 9.6. *При сделанных выше предположениях*

(a) *значение следа $\tau(g)$ равно нулю в том и только том случае, если g действует существенно свободно на границе дерева*;

(б) *рекуррентный след равен нулю на всех неединичных элементах счетной группы $G \le \le \operatorname{Aut}(T_{\overline{m}})$ в том и только том случае, если действие существенно свободно.*

Как замечено в [112, Theorem 4.3], имеет место следующий важный факт, приведенное доказательство которого фактически копирует доказательство теоремы 4.3 из [112], но в то же время оно близко к доказательству предложения 9 из [95], на котором основывалось и доказательство предложения 9.5.

Теорема 9.7. *Пусть группа G является сильно самоподобной* (*т.е. заданной конечным автоматом*), *$g \in G$ — произвольный элемент. Тогда*

(a) *значение следа $\tau(g)$ равно нулю в том и только том случае, если множество* $\operatorname{Fix}(g)$ *нигде не плотно на границе дерева*;

(б) *рекуррентный след равен нулю на всех неединичных элементах G в том и только том случае, если действие существенно свободно.*

Доказательство. Докажем вначале (а). В силу предыдущего предложения достаточно доказать, что равенство $\nu(\operatorname{Fix}(g)) = 0$ эквивалентно тому, что множество $\operatorname{Fix}(g)$ нигде не плотно. Преобразование границы, заданное инициальным автоматом, непрерывно (на самом деле оно является изометрией по отношению к произвольной ультраметрике $\operatorname{dist}_{\bar\lambda}$, упоминавшейся в разд. 1). Поэтому множество $\operatorname{Fix}(g)$ замкнуто и в силу равенства $\tau(g) = \nu(\operatorname{Fix}(g)) = 0$ не может содержать открытых подмножеств, следовательно, является нигде не плотным.

Докажем утверждение в противоположную сторону. Пусть $\mathcal{B}_*$ — минимальный инициальный автомат, описанный в доказательстве предложения 9.5 и определяющий одним из своих состояний s данный элемент g, $g \in G$, Q — множество его состояний. Так как Q конечно и $\operatorname{Fix}(g)$ нигде не плотно, то найдется $k > 0$ такое, что для каждого состояния $t \in Q$ автомат $\mathcal{B}_{*t}$ действует нетривиально хотя бы на одном слове длины k. Докажем индукцией по n, что

$$|\operatorname{Fix}_{kn}(g)| \le (d^k - 1)^n \tag{9.7}$$

при $n \geq 0$. Неравенство (9.7) очевидно для $n = 0$. Предположим, что оно верно для $n-1$, $n \geq 1$, и рассмотрим d^{kn} слов длины kn. По индуктивному предположению не более чем $(d^k-1)^{n-1}$ начал длины $k(n-1)$ таких слов, рассматриваемых как вершины дерева, фиксируются элементом g. Пусть слово u длины $k(n-1)$ неподвижно при действии g и t — состояние, в которое переходит состояние s под воздействием слова u. Тогда t принадлежит Q и в силу выбора k существует не более $(r^k-1)n-1$ слов, фиксируемых элементом, соответствующим состоянию t. Таким образом, имеется максимум $(d^k-1)^n$ слов длины kn, оставляемых неподвижными элементом g, что доказывает (9.7). Итак,

$$\frac{1}{d^{kn}}|\mathrm{Fix}_{kn}(g)| \leq \left(1 - \frac{1}{d^k}\right)^n.$$

Так как правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, то применение (9.6) завершает доказательство.

Утверждение (б) следует из (а). $\square$

Из доказанного утверждения и соотношения (9.6) вытекает следующее важное свойство действий групп, порожденных конечными автоматами, которое использовалось в разд. 5 для построения примеров существенно свободных действий.

Следствие 9.8. *Для самоподобных групп, заданных конечными автоматами, локальная нетривиальность, топологическая свобода и существенная свобода действия на границе дерева являются эквивалентными понятиями.*

В отличие от существенно свободных действий на границе дерева в случае слабо ветвящихся действий рекуррентный след, по-видимому, всегда принимает ненулевое значение хотя бы на одном элементе группы (точнее, на операторе $\pi(g)$). Для того чтобы аргументировать это предположение, напомним некоторые понятия, связанные с представлениями, и воспользуемся некоторыми наблюдениями и результатами, почерпнутыми из недавней публикации А.М. Вершика [184].

Комплекснозначная функция ϕ на группе G называется положительно определенной, если для любого конечного набора элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, $g_i \in G$, $i = 1, \dots, n$, имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} \phi(g_i g_j^{-1}) \geq 0.$$

Если дополнительно функция ϕ постоянна на классах сопряженности и нормирована условием $\phi(1) = 1$, то она называется центральным характером. Заметим, что слово "характер" часто применяется и в других смыслах, например как гомоморфизм из группы в группу единичной окружности, однако здесь мы будем использовать именно это определение, следуя терминологии заметки [184], которая, впрочем, в значительной степени привязана к классической терминологии (см., например, [53]). Характеры такого вида возникают как ограничения на операторы $\pi(g)$ следа фактор-представлений группы типа II_1, т.е. представлений, порождающих алгебру фон Неймана, являющуюся фактором типа II_1. Для произвольного действия счетной группы на пространстве X с вероятностной инвариантной мерой μ функция

$$\phi(g) = \mu(\mathrm{Fix}(g))$$

является характером ввиду соотношения $\mu(\mathrm{Fix}(g)) = \langle \pi(g) 1_\Delta, 1_\Delta \rangle$, где 1_Δ — характеристическая функция диагонали $\Delta = \{(x,x)\colon x \in X\}$, а скалярное произведение берется в пространстве $L^2(\mathcal{R}, \rho)$, где $\mathcal{R}$ — борелевское подмножество в $X \times X$, состоящее из пар (x, gx): $x \in X$, $g \in G$, мера ρ с носителем в $\mathcal{R}$ определена условием, что ее проекция на каждый из сомножителей в $X \times X$ равна μ, а на каждом слое над точкой $x \in X$ соответствующая мере ρ послойная мера является считающей мерой (т.е. мера каждой точки равна 1). Заметим, что $\mathcal{R}$ является счетным борелевским отношением эквивалентности, ассоциированным с действием группы на X, и некоторые вопросы, относящиеся к таким отношениям, будут рассмотрены в последнем разд. 11.

На $\mathcal{R}$ определены два коммутирующих действия группы G сохраняющими меру ρ преобразованиями, а именно действие сдвигами по первому и второму аргументам. Это определяет два представления π_0, π_1 в пространстве $L^2(\mathcal{R}, \rho)$ и две коммутирующие друг с другом алгебры фон Неймана W_0, W_1, порожденные операторами указанных представлений и операторами умножения на функции из $L^\infty(\mathcal{R}, \rho)$. В случае конечной меры μ и эргодичности действия эти алгебры являются факторами типа II_1 (за деталями, связанными с этой конструкцией, мы отсылаем читателя к фундаментальным монографиям Такесаки [179–181]). В дальнейшем для определенности пусть $W = W_0$ является первой из двух алгебр и пусть V — подалгебра W, порожденная операторами представления группы (т.е. операторами $\pi_0(g)$, $g \in G$, при этом, как это принято в теории алгебр фон Неймана, замыкание берется в сильной или, эквивалентно, слабой операторной топологии). В общем случае алгебра V является собственной подалгеброй W. Однако замечательное наблюдение, сделанное А.М. Вершиком, заключается в справедливости следующего утверждения.

Теорема 9.9 [184, Theorem 10]. *Для эргодического действия (G, Z, μ) с инвариантной вероятностной мерой совпадение $V = W$ имеет место в том и только том случае, если действие вполне несвободно.*

Таким образом, для каждого вполне несвободного действия группы описанное представление порождает фактор типа II_1. Каждому характеру ϕ соответствует представление π_ϕ, определяемое с точностью до квазиэквивалентности представлений, и факторность этого представления эквивалентна неразложимости ϕ (т.е. тому, что ϕ является крайней точкой в пространстве центральных характеров на группе, снабженном топологией поточечной сходимости) [53].

В [184, Theorem 9] показано, что для эргодических действий с инвариантной мерой функция $\phi(g) = \mu(\mathrm{Fix}(g))$ является неразложимым характером в том и только том случае, если V является фактором. Заметим также, что в случае, когда группа действует на границе дерева, в силу (9.6) этот характер является сужением рекуррентного следа на группу ввиду соотношений

$$\phi(g) = \mu(\mathrm{Fix}(g)) = \tau(g).$$

Теорема 9.10. *Пусть G — слабо ветвящаяся группа и ϕ — характер, определяемый ее действием на дереве. Тогда соответствующее ему представление π_ϕ факторно.*

Доказательство. В силу теоремы 2.4 действие группы G на границе дерева вполне несвободно, и оно эргодично в силу предложения 4.1 и того факта, что по определению слабо ветвящаяся группа действует транзитивно на уровнях. Остается воспользоваться утверждением теоремы 9 из [184]. $\square$

Интересной является задача явного вычисления следа на самоподобных группах и более детального исследования его свойств. Нам кажется правдоподобной следующая

Гипотеза 9.1. *Пусть G — слабо ветвящаяся группа, τ — самоподобный след на ней. Тогда существует элемент $g \in G$ такой, что $\tau(g) \neq 0$.*

Рекуррентный след может принимать значения, которые плотным образом заполняют интервал $[0, 1]$. Продемонстрируем это на примере группы промежуточного роста $\mathcal{G}$, определенной в примере 2.3. Соответствующие вычисления были проведены моим учеником Р. Кравченко.

Пример 9.1. Для группы $\mathcal{G} = \langle a, b, c, d\rangle$ множество значений рекуррентного следа на операторах $\pi(g)$, $g \in \mathcal{G}$, равно множеству

$$\tau(G) = \frac{1}{7}\mathbb{Q}_2 \cap [0,1], \tag{9.8}$$

где $\mathbb{Q}_2$ обозначает множество двоично рациональных чисел.

Для простоты будем писать $\tau(g)$ вместо $\tau(\pi(g))$. Если $g = (g_0, g_1) \in \mathrm{st}_G(1)$, то $\tau(g) = \frac{1}{2}(\tau(g_0) + \tau(g_1))$. Если же $g = (g_0, g_1)\sigma$, то $\tau(g) = 0$, так как соответствующая операторная матрица имеет нулевые значения по диагонали. Учитывая рекуррентные соотношения между образующими a, b, c, d и то, что $\tau(a)$, очевидно, равен нулю, приходим к соотношениям $\tau(b) = \tau(c)/2$, $\tau(c) = \tau(d)/2$, $\tau(d) = (1 + \tau(b))/2$, откуда получаем $\tau(b) = 1/7$, $\tau(c) = 2/7$, $\tau(d) = 4/7$. Отсюда с учетом того, что $\mathcal{G}$ — сжимающаяся группа с параметрами $1/2$ и 1 (т.е. сечения любого элемента длины ≥ 1 короче самого элемента) и, следовательно, при матричном расписывании любого ее элемента g дли́ны ненулевых элементов этой матрицы не превышают длину самого элемента, следует, что для любого $g \in \mathcal{G}$ значение следа $\tau(g)$ принадлежит множеству $\frac{1}{7}\mathbb{Q}_2 \cap [0,1]$.

Для доказательства противоположного включения воспользуемся тем фактом, что $\mathcal{G}$ является регулярно ветвящейся группой относительно подгруппы $K = \langle [a,b]\rangle^{\mathcal{G}}$ — нормального замыкания элемента $[a,b] = (ab)^2$ [80]. Так как $\psi(K) > K \times K$, то отсюда следует, что $(T+T)/2 \subset T$, где $T = \tau(K)$, т.е. $(x+y)/2 \in T$, если $x, y \in T$. После этого индукцией по $n \in \mathbb{N}$ легко доказывается, что

$$\frac{m}{2^n}x + \frac{2^n - m}{2^n}y \in T$$

при произвольном m, $1 \leq m \leq 2^n$.

Остается заметить, что так как элемент

$$(ab)^8 = (b, b, b, b, b, b, b, b)$$

из $\mathrm{st}_{\mathcal{G}}(3)$ принадлежит K и так как его след равен $\tau(b) = 1/7$, то $7T$ содержит 0 и 1 и удовлетворяет $(7T + 7T)/2 \subset 7T$, откуда немедленно следует (9.8).

Возможность подобных вычислений значений рекуррентного следа на элементах сильно самоподобных сжимающихся групп была отмечена в [81]. Подобное приведенному выше вычисление в принципе можно провести для других самоподобных сжимающихся групп, регулярно ветвящихся над своей подгруппой. Действительно, если группа G является сжимающейся, то для любого элемента $g \in G$ начиная с некоторого уровня N все его сечения g_u принадлежат нуклеусу $\mathcal{N}$, если $|u| > N$. Таким образом, задача вычисления $\tau(g)$ для любого элемента g сводится к задаче вычисления следа на множестве элементов нуклеуса, которая легко решается составлением замкнутой системы линейных соотношений, связывающих значения следа элементов нуклеуса со значениями их проекций (которые также будут элементами нуклеуса). Эта система обязана быть совместной. Маловероятно, что она может оказаться неопределенной, однако это еще предстоит проверить. Если же группа регулярно ветвится над свой подгруппой, то примерно такие же вычисления, какие только что были проведены, должны приводить к полному вычислению области значений следа на элементах группы. По крайней мере если G регулярно ветвится относительно P, то $\tau(P) \supseteq (\tau(P) + \ldots + \tau(P))/d$ (сумма содержит d слагаемых, d — мощность алфавита). Впрочем пока нет общего утверждения, которое бы описывало область значений следа обсуждаемого класса групп, да и непонятно, как знание о ее структуре может быть использовано для исследования свойств группы (однако из приведенных выше результатов очевидна несомненная полезность рекуррентного следа для вопросов теории представлений). Любопытно отметить, что в случае группы $\mathcal{G}$ значения рекуррентного следа совпадают со значениями размерностей централизаторов элементов группы $\mathcal{G}$, определенных и вычисленных в [160], что, возможно, указывает на связь между ними.

В случае нерегулярного дерева $T = T_{\overline{m}}$, но при условии, что последовательность $\overline{m} = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяющая индекс ветвления, ограничена, утверждение, аналогичное предложению 9.5, также имеет место для счетных групп $G \le \mathrm{Aut}(T)$, действующих существенно свободно. Было бы интересно найти условия, гарантирующие соотношение (9.4) в случае деревьев с неограниченной степенью ветвления.

Следующее утверждение, безусловно, является известным, однако, не располагая соответствующей ссылкой, мы сопровождаем его доказательством.

Теорема 9.11. *Пусть C — унитальная C^*-алгебра (т.е. алгебра с единицей), имеющая точный след τ, $\tau(1) = 1$, и пусть G — счетная подгруппа группы унитарных элементов алгебры C (т.е. элементов $x \in C$, удовлетворяющих соотношению $x^*x = xx^* = 1$), порождающая C как C^*-алгебру. Предположим, что $\tau(g) = 0$ для любого неединичного элемента $g \in G$. Тогда C изоморфна редуцированной C^*-алгебре $C^*_{\mathrm{r}}(G)$ группы G.*

Доказательство. С помощью следа τ построим представление Гельфанда–Наймарка–Сигала алгебры C. А именно рассмотрим скалярное произведение на C, заданное соотношением $\langle x,y\rangle = \tau(y^*x)$, и пусть H — гильбертово пространство, являющееся пополнением C по норме, определенной этим скалярным произведением. Пусть $\rho\colon C \to B(H)$ — представление алгебры C ограниченными операторами в пространстве H, заданное левым умножением $\rho(c)(x) = cx$, $c, x \in C$, и распространенное на все пространство H по непрерывности. Представление ρ является точным, так как

$$\langle \rho(x)1, x\rangle = \langle x, x\rangle = \tau(x^*x) > 0,$$

если $x \ne 0$, $x \in C$. Занумеруем элементы группы G произвольным образом, $G = \{g_1, \dots, g_n, \dots\}$. По условию $\tau(g_i^* g_j) = \tau(g_i^{-1} g_j) = 0$, если $i \ne j$.

Пусть K — группа, изоморфная G посредством изоморфизма φ, и $k_i = \varphi(g_i) \in K$. Определим оператор $U\colon H \to l^2(K)$, являющийся изометрическим изоморфизмом, соотношением $U\big(\sum_i \alpha_i g_i\big) = \sum_i \alpha_i k_i$. Тогда

$$(U\rho(g_i)U^*)(\delta_{k_j}) = U\rho(g_i)(g_j) = U(g_i g_j) = \delta_{k_i k_j} = \lambda(k_i)\delta_{k_j},$$

где δ_k — дельта-функция с ненулевым значением на элементе $k \in K$, а $\lambda\colon K \to \mathcal{U}(l^2(K))$ обозначает левое регулярное представление группы K. Нами установлено, что U сплетает (точные) представления алгебр C и C^*_{r}, а следовательно, и устанавливает изоморфизм между ними. $\square$

Следствие 9.12. *Пусть действие $(G, \partial T, \mu)$ сильно самоподобной группы существенно свободно. Тогда существует естественный $*$-гомоморфизм $C^*_\pi \to C^*_{\mathrm{r}}(G)$.*

Доказательство. Действительно, если рекуррентный след τ на C^*_π точен, то алгебры C_π и $C^*_{\mathrm{r}}(G)$ изоморфны посредством изоморфизма, описанного при доказательстве теоремы. Если же след неточен, то множество элементов $x \in C_\pi$, удовлетворяющих соотношению $\tau(x^*x) = 0$, образует замкнутый идеал I, причем на фактор-алгебре C_π/I след τ индуцирует точный след $\bar{\tau}$, который удовлетворяет условиям теоремы, а следовательно, $C_\pi/I \simeq C^*_{\mathrm{r}}(G)$. $\square$

Для действий на корневых деревьях вопрос о том, когда алгебры C_π и $C^*_{\mathrm{r}}(G)$ изоморфны, является интересным. Ниже мы приведем достаточное условие для изоморфизма, основанное на аменабельности. Для сильно самоподобных групп, действующих существенно свободно, вопрос о том, когда алгебры C_π и $C^*_{\mathrm{r}}(G)$ изоморфны, решается просто (см. предложение 9.14). Изоморфизм заведомо невозможен, если $C^*_{\mathrm{r}}(G)$ не аппроксимируется конечномерными алгебрами. Например, редуцированная C^*-алгебра свободной группы F_m ранга $m \ge 2$ проста, а следовательно, не принадлежит классу RFD. Более того, имеет место следующее утверждение.

Теорема 9.13 [25]. *Для группы G следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $C^*_{\mathrm{r}}(G)$ *аппроксимируется конечномерными алгебрами*;

(ii) *группа G аменабельна и принадлежит классу* MAP (*максимально почти периодична*), *т.е. ее конечномерные представления разделяют элементы группы* (*для конечно порожденных групп это условие эквивалентно условию финитной аппроксимируемости*).

Предложение 9.14 [16]. *Для самоподобной группы G, действующей существенно свободно, изоморфизм $C_\pi(G) \simeq C^*_{\mathrm{r}}(G)$ имеет место в том и только том случае, когда группа аменабельна.*

Напомним, что полная $C^*_{\mathrm{f}}(G)$-алгебра определяется как C^*-алгебра, порожденная представлением, являющимся суммой всех неприводимых унитарных представлений группы. Редуцированная C^*-алгебра группы изоморфна полной C^*-алгебре в том и только том случае, если группа аменабельна [53, 24].

Отметим несколько других фактов, связанных с представлениями и алгебрами, ассоциированными с группами, действующими на корневых деревьях. Начнем с результата о неприводимости одного класса квазирегулярных представлений слабо ветвящихся групп. Напомним следующее

Определение 9.1. Пусть $H \le G$. *Комменшурейтором* $\mathrm{comm}_G(H)$ называется подгруппа G, определенная соотношением

$$\mathrm{comm}_G(H) = \bigl\{g \in G \mid H \cap H^g \text{ имеет конечный индекс в } H \text{ и в } H^g\bigr\}.$$

Комменшурейтор также может быть определен соотношением

$$\mathrm{comm}_G(H) = \bigl\{g \in G \mid H\text{-орбиты } H(gH) \text{ и } H(g^{-1}H) \text{ являются конечными}\bigr\}.$$

Проверка эквивалентности этих определений является полезным упражнением и основана на следующих двух фактах.

1. Если обозначить через $\mathcal{T}$ трансверсаль (множество представителей классов смежности) H по $H \cap H^g$, то для двойного класса смежности HgH имеет место разбиение в дизъюнктное объединение левых классов смежности по подгруппе H

$$HgH = \bigsqcup_{t\in\mathcal{T}} tgH.$$

2. И наоборот, предыдущее соотношение влечет, что $\mathcal{T}$ является трансверсалью, а именно имеет место разложение

$$H = \bigsqcup_{t\in\mathcal{T}} t(H \cap H^g).$$

Для доказательства неприводимости квазирегулярных представлений нам понадобится следующий критерий Макки.

Теорема 9.15 [132]. *Пусть H — подгруппа бесконечной дискретной счетной группы G. Тогда квазирегулярное представление $\rho_{G/H}$ неприводимо в том и только том случае, если $\mathrm{comm}_G(H) = H$.*

Предложение 9.16 [16; 17, Proposition 9.2]. *Пусть G — слабо ветвящаяся группа, действующая на корневом дереве T, и P — параболическая подгруппа* (*т.е. стабилизатор некоторой точки границы дерева*). *Тогда представление $\rho_{G/P}$ неприводимо.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся леммой 2.3. Пусть $P = \mathrm{st}_G(\xi)$, $g \in G \setminus P$. Покажем, что пересечение $P \cap P^g$ имеет бесконечный индекс в P^g. Пусть u — первая вершина, принадлежащая ξ, такая, что $g^{-1}(u) \neq u$. Тогда $\mathrm{rist}_G(u) = \mathrm{rist}_{P^g}(u)$, так как P^g стабилизирует вершину $g^{-1}(u) \neq u$, и $\mathrm{rist}_{P\cap P^g}(u) = \mathrm{rist}_P(u)$ по аналогичной причине. Так как $\mathrm{rist}_P(u)$ оставляет точку ξ неподвижной, а по лемме 2.3 орбита $\mathrm{rist}_G(u)(\xi)$ бесконечна, то тем самым можно применить критерий Макки и утверждение доказано. □

Итак, слабо ветвящиеся группы обладают континуальным семейством неприводимых квазирегулярных представлений, параметризованных точками границы. Эти представления разделяют элементы группы, так как в силу сферической транзитивности действий ветвящихся групп пересечение всех параболических групп тривиально. Все они попарно неизоморфны, так как имеют попарно различные ядра представлений (т.е. подгруппы элементов, действующих посредством единичного оператора).

Теперь мы покажем, что класс слабо ветвящихся групп обладает еще одним хорошим с точки зрения представлений и операторных алгебр свойством, а именно слабо ветвящиеся группы принадлежат классу ICC групп, обладающих бесконечными классами сопряженных элементов (т.е. для любого нееденичного элемента $g \in G$ класс $C(g)$ сопряженности элемента g бесконечен). Хорошо известно [181], что алгебра фон Неймана, порожденная левым регулярным представлением, для группы из этого класса является фактором типа II_1.

Теорема 9.17. *Пусть G — слабо ветвящаяся группа. Тогда G принадлежит классу* ICC.

Доказательство. Рассмотрим действие G на себе сопряжениями, и пусть $\mathrm{Stab}_G(g)$ — стабилизатор элемента $g \in G$, $g \neq 1$ (мы намеренно изменили обозначение для стабилизатора, так как сейчас рассматривается другой тип действия, а именно присоединенное действие). Класс сопряженности $C(g)$ бесконечен тогда и только тогда, когда $[G : \mathrm{Stab}_G(g)] = \infty$. Найдется вершина u некоторого уровня n, не являющаяся неподвижной относительно g. Будем предполагать, что уровень n выбран минимальным среди тех, на которых действие элемента g нетривиально. Тогда предшественник w вершины u является g-инвариантным. Пусть $v = g(u)$, $v \neq u$, и $1 \neq h \in \mathrm{rist}_G(u)$. Предположим, что сечения элементов g и h в вершине w имеют вид

$$g|_w = (g_1, \dots, g_{m_{n-1}})\sigma, \qquad h|_w = (1, \dots, 1, \xi, 1, \dots, 1),$$

где $1 \neq \sigma \in \mathrm{Sym}(m_n)$, $\xi \neq 1$ и местоположение компоненты ξ соответствует местоположению вершины u под вершиной w. Тогда

$$[h, g] = (1, \dots, 1, \xi^{-1}, 1, \dots, 1, \xi^{g_j}, 1, \dots, 1),$$

где нееденичные компоненты последнего разложения соответствуют местоположению вершин v и u, причем ξ^{g_j} — компонента разложения элемента $g|_w$, соответствующая местоположению вершины u. Таким образом, получаем, что для любого нееденичного элемента $h \in \mathrm{rist}_G(u)$ имеет место неравенство $g^h \neq g$. Отсюда вытекает, что $\mathrm{rist}_G(u) \cap \mathrm{Stab}_G(g) = 1$ и так как $\mathrm{rist}_G(u)$ — бесконечная подгруппа, то $\mathrm{Stab}_G(g)$ имеет бесконечный индекс в G. Теорема доказана. □

Следующее утверждение, дающее достаточное условие для изоморфизма C^*-алгебры, порожденной купмановским представлением, и C^*-алгебр, порожденных квазирегулярными представлениями, связанными с действиями на орбитах, мы докажем в следующем разделе.

Теорема 9.18 [16]. *Пусть G действует сферически транзитивно на дереве T.*

(i) *Существует канонический $*$-гомоморфизм $C^*_\pi \to C^*_{G/P_\xi}$.*

(ii) *Пусть действие группы G на орбите $G(\xi)$ некоторой точки $\xi \in \partial T$ аменабельно. Тогда $C^*_\pi \simeq C^*_{G/P_\xi}$, где $P_\xi = \mathrm{st}_G(\xi)$.*

10. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ, СПЕКТРЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЭКСПАНДЕРЫ

В этом разделе мы коснемся некоторых вопросов, связанных со случайными блужданиями на графах Шрейера, вопросов спектральной теории графов, рассмотрим некоторые спектральные меры, ассоциированные с графами, а также продолжим обсуждение понятия аменабельности, затронутое в предыдущем разделе. Заметим, что спектральная теория графов, некоторые вопросы которой мы обсуждаем ниже, успешно развивается для различных обобщений класса графов, например для *квантовых* графов (см. [118] и литературу, там приведенную), однако мы не будем касаться этих обобщений. Начнем с определения марковского оператора.

Матрицей смежности A неориентированного графа Γ называется матрица, строки и столбцы которой занумерованы вершинами, а на пересечении столбца и строки с метками u и v стоит число $a_{u,v}$ ребер, соединяющих вершины u, v. Матрица смежности симметрична и задает оператор $\bar{A}$ в (комплексном) гильбертовом пространстве $l^2(V)$ (которое обычно будем обозначать $l^2(\Gamma)$) суммируемых в квадрате функций, определенных на множестве вершин V, действующий по формуле

$$(\bar{A}f)(v) = \sum_{w\sim v} f(w).$$

Мы будем предпочитать иметь дело с нормированным оператором

$$(Mf)(v) = \frac{1}{\deg(v)}\sum_{w\sim v} f(w),$$

который называется марковским оператором. Так как сумма матричных элементов марковского оператора по строке равна 1, то его норма не превосходит 1, а в случае конечного графа равна 1 (при этом кратность собственного значения 1 равна числу связных компонент графа). Отметим также, что в случае конечного связного графа постоянные функции являются собственными функциями, отвечающими собственному значению 1. Вопрос о том, когда норма оператора M равна единице, в случае бесконечного графа является деликатным. В случае графов с равномерно ограниченной степенью вершин имеется характеризация аменабельности в терминах спектрального радиуса оператора M (а именно: аменабельность эквивалентна равенству единице спектрального радиуса). Об этом еще пойдет речь ниже.

В ориентированном случае марковский оператор определяется формулой

$$(Mf)(v) = \frac{1}{\deg(v)}\sum_{e\in E:\ \alpha(e)=v} f(\beta(e)),$$

однако в дальнейшем мы будем обсуждать только спектральные свойства неориентированных графов.

Матрица марковского оператора является матрицей переходных вероятностей простого случайного блуждания на графе, при котором блуждающая точка делает переход из текущей вершины в соседние с равными вероятностями. Если ребра графа помечены символами алфавита $X = \{x_1,\dots,x_k\}$, элементам которого сопоставлены вероятности $\{p_1,\dots,p_k\}$, $p_i \ge 0$, $\sum p_i = 1$, то блужданию, в котором переход вдоль ребра, помеченного символом x_i, происходит с вероятностью p_i, соответствует марковский оператор, заданный матрицей, элементы которой принадлежат множеству $0\cup\{p_1,\dots,p_k\}$.

Если задан элемент $a = \sum \alpha_g g \in \mathbb{R}[G]$ групповой алгебры, коэффициенты которого вещественны, положительны и в сумме дают единицу, а носитель (т.е. множество элементов g, у которых коэффициент α_g ненулевой) порождает группу (без использования операции обращения, т.е. речь идет о порождении в полугрупповом смысле), то с таким элементом можно связать случайное блуждание на любом графе Шрейера группы G, построенном с использованием системы образующих $\mathrm{supp}(a)$. Если $\mathrm{supp}(a) = \{g_1, \dots, g_k\}$, то переход вдоль ребра, помеченного в графе Шрейера образующим g_i, происходит с вероятностью α_{g_i}. Если элемент a самосопряжен (или симметричен) в том смысле, что его носитель инвариантен относительно инверсии (обращения элементов) и для каждого элемента носителя g выполнено соотношение $\alpha_g = \alpha_{g^{-1}}$, то в этом случае марковский оператор является самосопряженным, а случайное блуждание называется симметрическим. Такие блуждания на некоммутативных группах впервые начали изучаться Г. Кестеном [116], который с их помощью пытался решить проблему Бернсайда о периодических группах.

При изучении случайных блужданий на бесконечных графах основными вопросами, которыми в первую очередь интересуются, являются возвратность случайного блуждания, лиувиллевость графа (отсутствие непостоянных ограниченных гармонических функций, т.е. функций $f(g)$ на группе, удовлетворяющих соотношению $Mf = f$), асимптотика переходных вероятностей, когда время стремится к бесконечности (в частности, скорость стремления к нулю вероятностей возвращения в начальную точку), поведение удельной энтропии случайного блуждания и т.д.

Имеет место следующая дихотомия: вероятности убывают либо экспоненциальным образом, либо субэкспоненциальным. Для симметрических случайных блужданий асимптотика экспоненциальна в том и только том случае, когда норма (или, что то же самое, спектральный радиус) марковского оператора меньше 1, а это эквивалентно неаменабельности графа или конечно порожденной группы, представленной графом Кэли (теорема Кестена [115]). Аменабельность группы была уже определена выше, а аменабельные графы мы сейчас определим. Однако прежде договоримся, что мы понимаем под границей подмножества вершин графа.

Границей подмножества $F \subset V$ называется множество вершин ∂F в F, у которых имеется сосед, не принадлежащий F. Как отмечено в [41], имеются четыре естественных подхода к определению границы множества вершин графа. С точки зрения асимптотической теории графов все они эквивалентны друг другу. В частности, любое из четырех определений границы может быть использовано в приведенном ниже определении аменабельности графа.

Определение 10.1. Пусть граф Γ имеет равномерно ограниченную степень вершин, т.е. существует константа C такая, что $\deg(v) \le C$, $v \in V$. Граф Γ называется аменабельным, если существует последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечных подмножеств множества вершин такая, что $\frac{|\partial F_n|}{|F_n|} \to 0$.

Условие, использованное в этом определении, часто также называют условием Фелнера, оно родственно условию, фигурирующему в теореме 8.13 (при этом еще обычно добавляют условие возрастания последовательности, т.е. $F_n \subset F_{n+1}$, $n \ge 1$, которого всегда можно добиться при условии существования последовательности без наложения условия монотонности). Это определение согласуется с определением аменабельности, приведенным выше. Помимо классического определения аменабельности группы или аменабельности ее действия на множестве, можно альтернативно определить конечно порожденную группу аменабельной, если аменабелен ее граф Кэли (напомним, что группа аменабельна в том и только том случае, если аменабельна каждая ее конечно порожденная подгруппа). Точно так же действие конечно порожденной группы аменабельно, если аменабелен граф действия (т.е. граф Шрейера, ассоциированный с действием).

Теорема Кестена [115] о том, что группа аменабельна в том и только том случае, если норма марковского оператора (или, что то же самое, спектральный радиус) равна 1, обобщалась многими способами, и одно из таких обобщений можно найти в [41, Theorem 5.1], из которого, в частности, можно извлечь следующее утверждение.

Теорема 10.1. *Граф Γ с равномерно ограниченной степенью вершин аменабелен в том и только том случае, если норма марковского оператора M, ассоциированного с простым случайным блужданием, равна* 1.

В сформулированном утверждении простое случайное блуждание можно заменить произвольным невырожденным симметрическим случайным блужданием. Как показал В. Кайманович [106], в случае графов с неравномерно ограниченными степенями вершин вопрос о связи аменабельности с другими асимптотическими характеристиками является достаточно деликатным и требует аккуратного подхода.

Сформулированная теорема является только одним из многих примеров, показывающих важность задачи вычисления или оценок нормы марковского оператора, а также задачи вычисления его спектра и спектральных характеристик. Аналогичная задача состоит в решении спектральной проблемы для элементов групповой алгебры группы, представленных как элементы C^*-алгебры, порожденной квазирегулярным представлением $\rho_{G/H}$. Другими словами, речь идет о спектре соответствующего оператора, действующего в пространстве $l^2(\Gamma)$, где $\Gamma=\Gamma(G,H,A)$. При этом, когда говорится о спектре графа, обычно подразумевается спектр марковского оператора простого случайного блуждания на нем. Однако представляет также значительный интерес изучение спектров операторов вида $\rho_{G/H}(c)$, $c\in\mathbb{C}[G]$. С такими операторами можно ассоциировать крашеный граф Шрейера $\Gamma(G,H,A)$, где A — носитель элемента c (предполагается, что носитель порождает группу), причем ребро, крашенное элементом $a\in A$, дополнительно помечается также соответствующим коэффициентом α_a, если $c=\sum_{a\in A}\alpha_a$. Такой граф будем обозначать $\Gamma(G,H,c)$, причем будем считать его меченым графом с начальной вершиной, представленной классом смежности $1H$ тривиального элемента.

Теперь займемся рассмотрением спектральных мер. Если M — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то его спектр $\mathrm{sp}(M)$ является замкнутым ограниченным подмножеством вещественной оси и в силу спектральной теоремы имеет место разложение

$$M=\int\limits_{\mathrm{sp}(M)}\lambda\,dE(\lambda),$$

где $E(\lambda)$ — система ортогональных проекторов (также часто называемая спектральной функцией или проекторозначной мерой). Каждому вектору $\phi\in\mathcal{H}$ ставится в соответствие мера μ_ϕ на $\mathrm{sp}(M)$, определенная соотношением

$$\mu_\phi(B)=\langle e(B)\phi,\phi\rangle,$$

где B обозначает борелевское подмножество вещественной оси, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение, а $e(B)$ является плотностью спектральной функции: $e([a,b])=E(b)-E(a)$. Выбор вектора ϕ зависит от конкретной задачи, а свойства меры μ_ϕ обычно зависят от выбора ϕ. Для марковских операторов в качестве ϕ естественно использовать дельта-функцию с ненулевым значением в отмеченной точке графа (служащей началом случайного блуждания). Таким образом, для графа Γ можно определить меры μ_v^Γ, где v пробегает множество вершин графа. Эти меры принято называть спектральными мерами Кестена, так как именно Кестен впервые начал систематически изучать случайные блуждания на некоммутативных группах и их графах Кэли, в частности, вычислил спектральную меру случайного блуждания на свободных группах и получил вероятностный критерий аменабельности (теорема 10.1).

Вернемся к рассмотрению марковского оператора M. Если обозначить через $p_v^{(n)}$ вероятность возвращения в вершину v за n шагов при случайном блуждании на графе, с которым ассоциирован этот оператор, то нетрудно видеть, что эта вероятность равна $\langle M^n\delta_v,\delta_v\rangle=$ $=\int_{\mathrm{sp}(M)}\lambda^n\,d\mu(\lambda)$. Фигурирующий в этом соотношении интеграл представляет n-й момент меры μ_v. Хорошо известно, что ограниченная мера однозначно определяется своими моментами с помощью формулы обращения Стилтьеса.

В случае конечных графов естественной мерой, связанной с графом, является *считающая* (также называемая *эмпирической* мерой) мера ν, значение которой на подмножестве $B \subset \mathbb{R}$ равно числу точек спектра марковского оператора с учетом их кратностей, попавших в множество B, деленному на число вершин графа. Как мы увидим ниже, такая мера является средним мер μ_v. Считающие меры широко используются в теории вероятностей, математической физике и других областях естествознания. При этом для них используются различные названия; например, в физике широко используется термин *плотность состояний.*

Считающая мера отвечает считающей проекторозначной спектральной мере

$$e(B) = \sum_{\lambda\colon\, \lambda\in B\cap \mathrm{sp}(M)} E_\lambda,$$

где E_λ — ортогональный проектор на пространство собственных функций, отвечающих собственному значению λ. Отсюда получаем следующие соотношения:

$$\mu = \sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(M)} \frac{\mathrm{Tr}(E_\lambda)}{|V|}\delta_\lambda = \sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(M)} \frac{\#(\lambda)}{|V|}\delta_\lambda, \tag{10.1}$$

где V — множество вершин графа, Tr, как и ранее, обозначает обычный матричный след, а $\#$ обозначает кратность собственного значения.

Предложение 10.2. *Пусть Γ — конечный граф с множеством вершин V, M — марковский оператор произвольного симметрического случайного блуждания на Γ. Тогда считающая мера μ, ассоциированная с этим оператором, равна усреднению мер Кестена μ_v по множеству всех вершин, т.е.*

$$\mu = \frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}\mu_v.$$

Доказательство. Пусть $|V| = m$, P_{ij}^n — вероятность перехода из вершины i в вершину j через n шагов в случайном блуждании, заданном матрицей M (будем считать вершины пронумерованными натуральными числами от 1 до m). Так как случайное блуждание симметрично (т.е. матрица M симметрична), то M подобна диагональной матрице D с собственными значениями λ_k матрицы M, расположенными по диагонали. Пусть $M = \Phi^{-1}D\Phi$, где столбцами матрицы $\Phi = (\phi_{ij})$ являются нормированные собственные функции матрицы M, и $\Phi^{-1} = (\psi_{ij})$ — обратная матрица. Тогда переходные вероятности случайного блуждания, заданного матрицей M, определяются соотношениями

$$P_{ij}^n = \langle M^n\delta_i, \delta_j\rangle = \sum_{k=1}^m \phi_{ik}\lambda_k^n\psi_{kj}.$$

Пусть

$$\mu' = \frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}\mu_v.$$

Введем в рассмотрение числа

$$\widetilde{P}^n = \int \lambda^n\,d\mu'(\lambda) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m P_{ii}^n = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m\lambda_k^n\sum_{i=1}^m\phi_{ik}\psi_{ki} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m\lambda_k^n = \int\lambda^n\,d\mu(\lambda).$$

Так как конечная мера однозначно определяется своими моментами (роль которых в данном случае играют вероятности возвращения) и так как усреднение мер соответствует усреднению моментов, то утверждение доказано. □

В качестве бонуса мы получили, что моменты считающей меры равны усреднению по множеству вершин моментов мер Кестена.

Большой интерес представляют изучение вопросов аппроксимации бесконечных графов конечными и выявление условий, при которых асимптотические характеристики бесконечных графов в том или ином смысле аппроксимируются соответствующими характеристиками конечных графов. Одним из самым простых фактов в этом направлении является следующее утверждение.

Теорема 10.3. *Спектральная мера Кестена зависит непрерывно в слабой топологии пространства мер от точки пространства* $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$.

Другими словами, если последовательность $(\Gamma_n, v_n)_{n=1}^{\infty}$ меченых графов сходится в пространстве $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$ к графу (Γ, v), то последовательность мер Кестена μ_{v_n} слабо сходится к мере Кестена μ_v.

Доказательство. Действительно, ограниченная мера однозначно определяется своими моментами, которые совпадают с вероятностями возвращения в отмеченную точку графа (являющуюся началом случайного блуждания). Так как для любого радиуса r при достаточно большом n окрестности радиуса r в графах (Γ_n, v_n) и (Γ, v) изоморфны как графы, а из сходимости моментов следует слабая сходимость мер, то утверждение доказано. □

На самом деле нет необходимости рассматривать только простые случайные блуждания. Рассуждение проходит и в том случае, когда блуждания заданы симметричным распределением вероятностей на множестве $2m$ образующих и их обратных. Более того, можно определить меру Кестена и для произвольного симметричного элемента $a \in \mathbb{C}[F_m]$ (F_m — свободная группа ранга m, накрывающая естественным образом все графы Шрейера из пространства $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$), и тогда теорема 10.3 по-прежнему будет верна.

Можно пойти еще дальше и даже не предполагать положительности всех коэффициентов разложения симметричного элемента c групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$ по базису, состоящему из элементов группы. Только в этом случае μ может оказаться *знакопеременной мерой* (нередко также называемой в отечественной литературе *зарядом*). Только теперь надо говорить не о совпадении вероятностей возвращения, а о совпадении сумм весов замкнутых путей длины n, начинающихся и заканчивающихся в выделенной точке графа. При этом вес пути — это произведение меток его ребер, которыми в этом случае должны выступать ненулевые коэффициенты элемента c, а ассоциированный граф, на котором происходит "случайное блуждание", — это граф $\Gamma(G, P, c)$, служащий обобщением графа Шрейера, о котором шла речь выше.

Теорема 10.3, например, может быть применена в следующей ситуации. Вернемся к случаю, когда имеется бесконечная накрывающая последовательность конечных графов Шрейера $\{(\Gamma_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к бесконечному графу Шрейера (Γ, v). Такая последовательность соответствует убывающей последовательности $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ подгрупп конечного индекса в группе G, имеющей пересечение $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$. При этом графы Γ_n — это графы Шрейера, построенные с помощью подгрупп P_n, а Γ является графом Шрейера, построенным с помощью подгруппы P. Для того чтобы подгруппа $P < G$ могла быть представлена в виде пересечения подгрупп конечного индекса, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнутой в проконечной топологии.

Предположим, как обычно, что группа G действует точно и сферически транзитивно на сферически однородном дереве T. Тогда графы Γ_n действия на n-м, $n \geq 1$, уровне (они же графы Шрейера $\Gamma(G, P_n, A)$, где $P_n = \mathrm{st}_G(u_n)$, а u_n — вершина n-го уровня, принадлежащая фиксированному пути $\xi \in \partial T$) являются связными. Пусть $a \in \mathbb{C}[G]$ — симметрический элемент.

Пусть π, π_n, $\pi_n^{\perp}$ обозначают те же представления, что и в разд. 9, а $\rho_n = \rho_{G/P_n}$, $\rho_{G/P}$ — соответствующие квазирегулярные представления, $P = \mathrm{st}_G(\xi)$. Напомним, что π_n изоморфно ρ_n.

При доказательстве следующего утверждения нам понадобится понятие слабого включения представлений (для случая дискретных групп).

Определение 10.2. Пусть ρ, ξ — два унитарных представления группы G, действующие в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_\rho$ и $\mathcal{H}_\xi$. Тогда *ρ слабо содержится* в ξ, если для любого $\varepsilon > 0$, конечного подмножества $S \subset G$ и каждого ортонормального набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ в $\mathcal{H}_\rho$ найдется ортонормальный набор векторов $w_1, w_2, \dots, w_n$ в $\mathcal{H}_\xi$ такой, что следующее неравенство выполнено при любом $s \in S$:

$$\sup_{s\in S}\bigl|\langle v_i, \rho(s)v_j\rangle - \langle v_i, \xi(s)w_j\rangle\bigr| < \varepsilon, \qquad 1 \le i, j \le n.$$

Другими словами, матричные коэффициенты одного представления аппроксимируются матричными коэффициентами другого. На топологическом языке слабое включение ρ в ξ эквивалентно тому, что ξ принадлежит замыканию одноточечного множества $\{\rho\}$ в топологии Фелла на дуальном пространстве унитарных представлений группы (см. [183]). На языке C^*-алгебр это означает существование сюръективного гомоморфизма $C_\xi \to C_\rho$, постоянного на элементах группы.

Предложение 10.4 [16]. 1. *Имеют место соотношения*

$$\mathrm{sp}(\pi(a)) = \overline{\bigcup_{n\ge 0}\mathrm{sp}(\pi_n(a))} = \overline{\bigcup_{n\ge 0}\mathrm{sp}(\pi_n^{\perp})}. \tag{10.2}$$

2. *Спектр оператора* $\rho_{G/P}(a)$ *содержится в* $\mathrm{sp}(\pi(a))$, *и если граф* Γ *аменабелен* (*или, что то же самое, аменабельно действие* $(G, G/P)$), *то* $\mathrm{sp}(\rho_{G/P}(a)) = \mathrm{sp}(\pi(a))$.

3. *Если подгруппа* P *аменабельна, то* $\mathrm{sp}(\rho_{G/P}(a)) \subset \mathrm{sp}(\rho_G(a))$, *где* ρ_G *— левое регулярное представление.*

Доказательство. Соотношения (10.2) являются очевидным следствием того, что представление π разлагается в прямую сумму представлений $\pi_n^{\perp}$, и того факта, что спектр симметрической матрицы, имеющий блочно диагональный вид с конечными блоками, равен замыканию объединения спектров блоков.

Перейдем к доказательству утверждения 2. Включение $\mathrm{sp}(\rho(a)) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{sp}(\rho_n(a))}$ почти очевидно (см. [16]). Для доказательства противоположного включения (предполагая аменабельность действия на орбите) предположим, что $\lambda \in \mathrm{sp}(\rho_n(a))$ и что f — соответствующая собственная функция (которую можно считать определенной на множестве вершин n-го уровня дерева), $\rho_n(a)f = \lambda f$. Отождествим элементы орбиты $G(\xi)$ с соответствующими классами смежности по подгруппе P. Так как действие G на орбите $G(\xi)$ аменабельно, то в силу критерия Фелнера (теорема 8.13) существует фелнеровская последовательность $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ конечных подмножеств орбиты. Зафиксировав n, определим функцию $f_{n,k}$ на $G(\xi)$ соотношением

$$f_{n,k}(gP) = \begin{cases} f(gP_n), & \text{если} \;\; gP \in F_k,\\ 0, & \text{если} \;\; gP \notin F_k.\end{cases} \tag{10.3}$$

Граф $\Gamma = \Gamma(G, P, a)$ естественным образом накрывает граф $\Gamma_n = \Gamma(G, P_n, a)$. Забыв о метках ребер, воспользуемся известной теоремой о поднятии путей для накрытий топологических пространств [134]. Обозначим через $D = D_n$ диаметр графа Γ_n, который не превосходит числа $N_n = m_1 m_2 \dots m_n$ вершин n-го уровня дерева. Для любых двух вершин u, v, принадлежащих уровню n, и для любой точки $\zeta \in G(\xi)$, накрывающей вершину u (т.е. для которой соответствующий ей путь проходит через вершину u), найдется точка $\eta \in G(\xi)$, накрывающая v

и расположенная от ζ на расстоянии, не превосходящем D_n в метрике графа Γ. Пусть $\partial_D F$ обозначает D-границу произвольного подмножества F множества вершин графа Γ, т.е. множество точек, удаленных от дополнения к множеству F на расстояние не больше чем D, а N — верхняя граница мощности множеств вершин в шарах радиуса D_n в графе Γ (в качестве N можно взять m^{n+1}, где m — степень вершин графа Γ). Тогда выполнены неравенства

$$\|\rho(a)f_{n,k} - \lambda f_{n,k}\| \le (1+\lambda)|\partial F_k| \cdot \|f\|,$$

$$N\|f_{n,k}\| \ge \sum_{\zeta\in G(\xi)} \sum_{\eta\in G(\xi),\ d(\zeta,\eta)\le D_n} f_{n,k}^2(\eta) \ge (|F_k| - |\partial_{D_n} F_k|)\|f\|.$$

Действительно, первое неравенство во втором соотношении очевидно, так как каждый член под знаком суммы повторяется не более чем n раз. Для доказательства второго неравенства заметим, что каждую вершину ζ графа Γ можно окружить множеством O_ζ, содержащимся в окрестности радиуса D_n с центром в этой точке, которое биективно проектируется на вершины графа Γ_n. Если эта вершина принадлежит множеству F_k и находится на расстоянии от границы ∂F_k, большем чем D_n, то сумма, фигурирующая в неравенствах и соответствующая этой вершине, будет не меньше чем $\|f\|$, откуда и следует второе неравенство. Таким образом,

$$\left\| \rho(a)\frac{f_{n,k}}{\|f_{n,k}\|} - \lambda\frac{f_{n,k}}{\|f_{n,k}\|} \right\| \le \frac{2N|\partial F_k|}{|F_k| - |\partial_{D_n} F_k|} \to 0,$$

когда $k\to\infty$. Отсюда следует, что $\lambda \in \mathrm{sp}(\rho(a))$.

Наконец, для доказательства утверждения 3 воспользуемся понятием слабого включения представлений (основные факты, касающиеся этого понятия, подробно изложены в [53]). Известно (см., например, [16, Proposition 3.5]), что квазирегулярное представление $\rho_{G/P}$ слабо содержится в регулярном представлении ρ_G тогда и только тогда, когда P — аменабельная группа. С другой стороны, рассматриваемое слабое включение эквивалентно наличию сюръективного гомоморфизма $C^*_{\mathrm{r}} \to C^*_{\rho_{G/P}}$ из редуцированной C^*-алгебры группы G в C^*-алгебру, порожденную представлением $\rho_{G/P}$. Таким образом, если элемент $a-\lambda I$, представленный оператором в C^*_{r}, обратим в этой алгебре, то обратим и оператор, представляющий его в $C^*_{\rho_{G/P}}$. Отсюда и следует включение спектров. $\square$

Теперь мы готовы доказать сформулированную ранее теорему 9.18.

Доказательство теоремы 9.18. (i) Обе алгебры являются замыканиями групповой алгебры по нормам, определяемым операторами соответствующих представлений. Нам надо доказать, что для любого $x \in \mathbb{C}[G]$ выполнено неравенство

$$\|x\|_\pi \ge \|x\|_{\rho_{G/P}}. \tag{10.4}$$

В силу соотношения $\|x\|^2 = \|x^*x\|$, имеющего место в произвольной C^*-алгебре, можно считать x симметричным элементом, и тогда норма элемента x совпадает с верхней гранью точек спектра. Так как в силу утверждения 2 предложения 10.4 спектр элемента x как элемента алгебры C^*_π содержит спектр этого же элемента, рассматриваемого как элемент алгебры $C^*_{G/P}$, получаем неравенство (10.4).

(ii) Повторяя аргументы доказательства утверждения (i), но теперь с учетом второй части утверждения 2 предложения 10.4 (использующей предположение об аменабельности действия на орбите), приходим к заключению о совпадении спектров, а значит, и к равенству норм для любого элемента групповой алгебры, рассматриваемого как элемент каждой из двух C^*-алгебр. Это и дает доказательство изоморфизма алгебр. $\square$

Отметим также следующий факт, который немедленно следует из рассуждения, использованного в ходе доказательства предложения 10.4.

Следствие 10.5. *Существование сюръективного $*$-гомоморфизма $C^*_{\mathrm{r}}(G) \to C^*_{G/P}$, постоянного на элементах групповой алгебры $\mathbb{Z}[G]$, эквивалентно аменабельности группы P.*

Доказательство. Утверждение является очевидным следствием того факта, что слабое включение квазирегулярного представления в регулярное эквивалентно наличию сюръективного гомоморфизма, постоянного на элементах групповой алгебры, а также того факта, что аменабельность подгруппы $P \leq G$ эквивалентна слабому включению квазирегулярного представления $\rho_{G/P}$ в регулярное. $\square$

Замечание 10.1. Последнее утверждение имеет отношение к теореме Кестена из [116], утверждающей, что норма симметрического элемента x групповой алгебры, носитель которого порождает группу, возрастает при факторизации $G \to G/P$ по неаменабельной подгруппе. Кестен рассматривал случай, когда $P \trianglelefteq G$ — нормальная подгруппа. Но доказательство его утверждения не зависит от свойства подгруппы P быть нормальной.

Справедливость следующего утверждения, основанного на использовании одного результата Серра [167], впервые была отмечена в [16]. Более подробно об этом написано в [98].

Теорема 10.6. *Пусть накрывающая последовательность $\{(\Gamma_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ конечных отмеченных графов сходится к графу (Γ, v) в смысле топологии пространства $\mathcal{X}_{2m}^{\mathrm{Sch}}$. Тогда последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ считающих мер на конечных графах, связанных с марковским оператором простого случайного блуждания, слабо сходится к некоторой мере μ_*.*

В [98, 95] мера μ_* получила название KNS-спектральной меры в связи с именами Кестена, фон Неймана и Серра. Интуитивно очевидно, что мера ν является в определенном смысле усреднением мер Кестена μ_v по всем вершинам предельного графа. То, что это действительно так, подтверждает приведенное ниже соображение, которое я впервые услышал в личной беседе от Б. Стайнберга и М. Аберта (на самом деле в неявном виде оно фигурирует в [95], а именно в рассуждениях, предшествующих доказательству соотношения (4.7)). По-видимому, аналог KNS-спектральной меры существует не только для марковского оператора, связанного с простым случайным блужданием, но и в случае произвольных симметрических распределений на множестве образующих группы, однако это еще предстоит доказать.

Следующее утверждение позволяет в некоторых случаях (как, например, для лэмплайтера) вычислить спектральную меру Кестена. В неявном виде оно присутствует в [95], а в явном виде приведено в [112].

Теорема 10.7. *Пусть самоподобная группа G, заданная конечным автоматом с множеством состояний A, служащих системой образующих G, действует на дереве T сферически транзитивно и существенно свободно. Тогда* KNS*-спектральная мера совпадает с мерой Кестена простого случайного блуждания на группе G.*

Доказательство. Пусть θ — мера Кестена простого случайного блуждания на группе,

$$m = \frac{1}{2|A|} \sum_{a \in A \cup A^{-1}} a$$

— элемент групповой алгебры, определяющий марковский оператор простого случайного блуждания на G и действующий слева с помощью свертки (т.е. левым регулярным представлением) на элементы из $l^2(G)$. Моменты $\theta^{(n)}$ меры θ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\theta^{(n)} = \langle m^n \delta_1, \delta_1 \rangle = P_{1,1}^{(n)} = \operatorname{trace}\left(\sum_{a_{i_j} \in A \cup A^{-1}} a_{i_1} \dots a_{i_n} \right) = \sum_{a_{i_j} \in A \cup A^{-1}} \tau(a_{i_1} \dots a_{i_n}), \qquad (10.5)$$

где trace — след фон Неймана, определенный на элементах слабого замыкания левого регулярного представления соотношением $\mathrm{trace}(a) = \langle a\delta_1, \delta_1\rangle$, а τ — рекуррентный след, определенный в разд. 9. Последнее равенство в (10.5) справедливо в силу того, что в случае существенно свободного действия рекуррентный след ведет себя на элементах группы точно так же, как след фон Неймана (а именно: он равен 0 на неединичных элементах и равен 1 на единичном элементе).

Пусть $\mu_k^{(n)}$ обозначает n-й момент считающей меры μ_k графа Γ_k. Тогда

$$\mu_k^{(n)} = \int \lambda^n \, d\mu_k(\lambda) = \langle m^n \delta_{v_k}, \delta_{v_k}\rangle = \frac{1}{d^k}\sum_{k=1}^{d^k} \lambda_k^n = \mathrm{Tr}[m^n]_k = \sum_{a_{i_j}\in A\cup A^{-1}} \mathrm{tr}[a_{i_1}\dots a_{i_n}]_k, \qquad (10.6)$$

где d^k — мощность множества вершин k-го уровня дерева (мы предполагаем, что дерево имеет кратность ветвления d), $[m]_k$, $[g]_k$ — представления элементов $m \in \mathbb{C}[G]$, $g \in G$ матрицами размера d^k, Tr — обычный матричный след, а tr — нормированный след на алгебре матриц. Так как $\mathrm{tr}[g]_k \to \tau[g]_k$ в силу построения рекуррентного следа, то получаем, что при каждом n моменты $\mu_k^{(n)}$ сходятся к $\theta^{(n)}$. Таким образом, последовательность считающих мер сходится к мере Кестена, а значит, последняя совпадает с KNS-спектральной мерой. Теорема доказана. $\square$

Пусть (G, X, χ) — динамическая система с инвариантной мерой, где G — конечно порожденная группа с системой порождающих A. Для каждой точки $x \in X$ определен орбитальный граф Γ_x, изоморфный графу Шрейера (Γ, P_x, A), где P_x — стабилизатор точки x. Пусть $P_x^{(n)}$ — вероятность возвращения в точку x за n шагов при простом случайном блуждании на графе Γ_x. Напомним, что она совпадает с n-м моментом меры Кестена μ_x графа Γ_x с выделенной (отмеченной) точкой x. Определим числа $\widetilde{P}^{(n)}$ соотношением

$$\widetilde{P}^{(n)} = \int_X P_x^{(n)} \, d\chi(x),$$

а также определим меру χ_* условием, что ее моменты совпадают с числами $\widetilde{P}^{(n)}$. Альтернативно мера χ_* может быть определена как интеграл $\int_X \mu_x \, d\chi(x)$.

Мера χ_* и ее характеристики (носитель, моменты и т.д.) являются инвариантами динамической системы. Ее мы также будем называть KNS-спектральной мерой. Основанием к такому названию служит следующий факт, неявно содержащийся в [112] и независимо замеченный Абертом (устное сообщение).

Теорема 10.8. *Мера ν_*, ассоциированная с динамической системой $(G, \partial T, \nu)$, где T — сферически однородное дерево, а $G \le \mathrm{Aut}(T)$ — конечно порожденная группа, совпадает с* KNS-*спектральной мерой μ_*.*

Доказательство. Пусть Γ_k — граф действия на k-м уровне дерева (он не обязан быть связным, так как мы не предполагаем транзитивности действия на уровнях дерева), $\mu_v^{\Gamma_k}$ — мера Кестена, ассоциированная с вершиной v графа Γ_k, а $P_k^{(n)}$ обозначает n-й момент меры μ_k. Имеют место следующие соотношения:

$$P_k^{(n)} = \int \lambda^n \, d\mu_k(\lambda) = \frac{1}{|V_k|}\sum_{v\in V_k} \int \lambda^n \, d\mu_v^{\Gamma_k}(\lambda) = \int_{V_k}\int \lambda^n \, d\mu_v^{\Gamma_k}(\lambda)\, d\nu_k(v), \qquad (10.7)$$

где V_k — множество вершин графа Γ_k (т.е. множество вершин k-го уровня дерева), а ν_k — равномерная мера на V_k (при этом использовано соотношение из предложения 10.2). Интеграл

$\int \lambda^n \, d\mu_v^{\Gamma_k}$ определяет вероятность $P_{v,k}^{(n)}$ возвращения в вершину $v \in V_k$ через n шагов при простом случайном блуждании на графе Γ_k. Если $x \in \partial T$ — точка границы и n зафиксировано, а x_k обозначает вершину k-го уровня, принадлежащую пути x, то начиная с некоторого уровня k_x выполнены соотношения $P_{v,k}^{(n)} = P_x^{(n)}$, $k \geq k_x$. На самом деле при фиксированном n можно найти K, не зависящее от x, такое, что $P_{v,k}^{(n)} = P_x^{(n)}$ при любых $k \geq K$, $x \in X$. Действительно, для каждого $x \in \partial T$ найдется окрестность U_x такая, что для всех ее точек вероятности возвращения за n шагов при блуждании на графе Γ_x равны. Выбрав из открытого покрытия $\{U_x\}_{x\in X}$ границы ∂T конечное подпокрытие $\{U_{x_i}\}_{i\in I}$, для каждого $i \in I$ зафиксировав подходящее k_i и положив $K = \max_{i\in I} k_i$, получим значение, для которого выполнены соотношения $P_{v,k}^{(n)} = P_x^{(n)}$ при $k \geq K$. Учитывая то, что $\lim_{k\to\infty} \mu_k = \mu_*$, $\lim_{k\to\infty} \nu_k = \nu$ (напомним, ν обозначает равномерную меру), и переходя к пределу под знаком интеграла в соотношениях (10.7), приходим к соотношениям

$$\int \lambda^n \, d\mu_*(\lambda) = \int\limits_{\partial T} P_x^{(n)} \, d\nu(x) = \widetilde{P}^{(n)}, \tag{10.8}$$

которые показывают совпадение моментов мер μ_* и ν_*, что и требовалось доказать. $\square$

Теперь мы применим описанные результаты для построения асимптотических экспандеров. Напомним, что последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящая из m-регулярных графов, $m \geq 3$, называется экспандером, если существует $\epsilon > 0$ такое, что, за исключением собственного значения 1, спектры марковских операторов M_n графов Γ_n содержатся в интервале $[-1+\epsilon, 1-\epsilon]$. Первые примеры экспандеров построены Г. Маргулисом [133] с использованием групп с Т-свойством Каждана [24]. Несмотря на высокую активность исследований, проводимых вокруг этого понятия (имеющих как теоретический, так и практический интерес; дело в том, что экспандеры имеют прикладное значение [125]), к настоящему моменту имеется считанное число конструкций экспандеров и новые конструктивные методы их построения представляют несомненный интерес.

Следующее эвристическое рассуждение показывает, как можно пытаться строить новые примеры экспандеров. А именно, стартовав с конечного автомата $\mathcal{A}$, порождающего неаменабельную группу $G = G(\mathcal{A})$, рассмотреть накрывающую последовательность графов Шрейера $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, ассоциированных с действиями группы на уровнях дерева, как это описывалось выше. Так как в силу критерия Кестена неаменабельность группы эквивалентна тому, что норма марковского оператора на ней меньше единицы, то это должно влечь выполнение условия на спектры, заложенного в основание определения экспандера. Однако в этом рассуждении имеется элемент наивности, так как не существует (по крайней мере до сих пор) рассуждения, которое бы показывало, что неаменабельность G в указанной нами конструкции действительно влечет свойство последовательности $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ быть экспандером. Ясно только, что с аменабельными группами конструкция точно не проходит.

Надежда получить экспандеры становится большей, если предположить дополнительно, что действие неаменабельной группы G существенно свободно. Хотя у нас нет доказательства свойства последовательности $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ быть экспандером и при этом дополнительном условии, тем не менее полученные выше результаты позволяют доказать более слабое, но все же, на наш взгляд, полезное свойство, а именно свойство быть асимптотическим экспандером.

Определение 10.3. Накрывающая последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ графов называется *асимптотическим экспандером*, если носитель ассоциированной с ней KNS-спектральной меры μ_* при некотором положительном ϵ содержится в интервале $[-1+\epsilon, 1-\epsilon]$.

Смысл этого определения состоит в том, что если у последовательности $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ и есть "плохие" (т.е. накапливающиеся к ± 1) собственные значения марковского оператора, то их плотность стремится к нулю при росте n и, таким образом, для больших значений n они становятся практически невидимыми, а значит, соответствующие графы Γ_n ведут себя почти как экспандеры. Как сообщил мне П. Кучмент, в математических моделях физики кристаллов явления подобного рода наблюдаются. Кажется вполне вероятным, что асимптотические экспандеры могут почти с тем же успехом применяться на практике, что и настоящие экспандеры, так как влияние на телекоммуникационные системы "плохих" (т.е. близких к ± 1) собственных значений становится ничтожным при $n \to \infty$.

Теорема 10.9. *Пусть сильно самоподобная группа $G = G(\mathcal{A})$ неаменабельна и действует существенно свободно на границе соответствующего дерева. Тогда последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ является асимптотическим экспандером.*

Доказательство. Эта теорема является очевидным следствием теоремы 10.7, так как носитель меры Кестена неаменабельной подгруппы не содержит точек -1, 1. $\square$

Теперь мы приведем "простейшие" примеры асимптотических экспандеров.

Пример 10.1. Пусть $\mathcal{A}$ — автомат Алешина, представленный диаграммой Мура на рис. 5.1. Он порождает свободную группу F_3 ранга 3, которая неаменабельна. Мера Кестена простого случайного блуждания на F_3 сосредоточена на интервале $\left[-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right]$. Как уже отмечалось выше в разд. 5, действие F_3, заданное автоматом $\mathcal{A}$, существенно свободно. Поэтому соответствующая последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ является асимптотическим экспандером.

Пример 10.2. Пусть $\mathcal{B}$ — автомат Беллатерра, представленный диаграммой на рис. 3.2, порождающий свободное произведение $C_2 * C_2 * C_2$ трех копий группы порядка 2. Эта группа неаменабельна (она содержит некоммутативную свободную подгруппу конечного индекса) и действует существенно свободно на границе бинарного дерева. Таким образом, последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ и в этом примере является асимптотическим экспандером. Более того, спектр марковского оператора простого случайного блуждания группы $C_2 * C_2 * C_2$ заполняет интервал $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ и, таким образом, асимптотический спектр последовательности $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержится в этом интервале.

Напомним, что конечный m-регулярный граф Γ, $m \geq 3$, называется графом Рамануджана, если его спектр после удаления точек -1, 1 содержится в интервале Кестена $\left[-2\frac{\sqrt{m-1}}{m}, 2\frac{\sqrt{m-1}}{m}\right]$, т.е. в интервале, являющемся носителем спектра марковского оператора на однородном (не корневом) дереве со степенью ветвления m. Нахождение бесконечных последовательностей m-регулярных конечных графов Рамануджана — трудная и увлекательная задача [127, 50]. Такие последовательности обладают самыми сильными растягивающими свойствами и в этом смысле являются наиболее эффективными экспандерами. Может сложиться впечатление, что приведенные два примера являются примерами последовательностей графов Рамануджана, так как их асимптотический спектр как раз и является интервалом Кестена. Тем не менее компьютерная проверка показывает, что это не так и начиная с не очень больших значений n графы Γ_n перестают быть рамануджановскими. Те же компьютерные эксперименты показывают, что, вероятно, последовательности $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ в обоих примерах являются экспандерами. В связи с этим мы ставим следующие два вопроса.

Проблема 10.1. Верно ли, что последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ в каждом из двух приведенных выше примеров (связанных с автоматами Алешина и Беллатерра) является экспандером?

Проблема 10.2. Верно ли, что последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, построенная по конечному автомату, никогда не является последовательностью графов Рамануджана?

Нам кажется, что ответ на второй вопрос скорее положительный, чем отрицательный, и это связано с тем, что для того, чтобы последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ была последовательностью графов Рамануджана, необходимо, чтобы группа G, порожденная автоматом, была или свободной группой ранга, равного числу состояний автомата, или свободным произведением групп порядка 2 с количеством множителей, равным числу состояний автомата, или свободным произведением таких групп. При этом действие на границе должно быть существенно свободно. Однако, скорее всего, ядро гомоморфизма C^*-алгебр, о котором идет речь в следствии 9.12, всегда нетривиально, что указывает на то, что норма марковского оператора в $L^2(\partial T,\nu)$ больше кестеновского порога $2\frac{\sqrt{m-1}}{m}$. Однако приведенные соображения еще предстоит обосновать.

Расстояние от носителя KNS-спектральной меры асимптотического экспандера до множества $\{-1,1\}$ назовем асимптотической константой Каждана (по аналогии с определением для обычных экспандеров). Таким образом, в приведенных выше примерах 10.1 и 10.2 асимптотические константы Каждана равны $1-\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $1-\frac{\sqrt{2}}{3}$ соответственно.

Последовательности графов $\{\Gamma_n\}_{n=1}^\infty$, построенные по конечному автомату, на наш взгляд, являются наиболее конструктивно заданными, и их практическая реализация должна быть значительно более простой, чем реализация уже существующих последовательностей графов, являющихся экспандерами или обладающих другими интересными свойствами. Поэтому мы прочим им хорошее будущее в теоретических изысканиях и практической реализации.

Отметим еще некоторый круг вопросов, которыми обычно интересуются при исследовании накрывающих последовательностей $\{\Gamma_n\}_{n=1}^\infty$ графов Шрейера. Будем предполагать их связными (что соответствует транзитивности на уровнях действия группы, порожденной соответствующим автоматом). Обозначим через $\delta(n)$ разницу $1-\lambda_1$ между собственным значением 1 и следующим за ним в порядке убывания собственным значением λ_1 марковского оператора M_n на графе Γ_n. Величина $\delta(n)$ (которую часто называют *спектральной дырой*) альтернативно может быть определена как первое ненулевое собственное значение лапласиана $\Delta_n=I-M_n$, где I — тождественный оператор. Если последовательность $\{\delta(n)\}_{n=1}^\infty$ отделена от нуля положительной константой, то $\{\Gamma_n\}_{n=1}^\infty$ — экспандер. В противном случае она стремится к нулю, но тогда возникает вопрос: с какой скоростью? Убывание может быть степенным, экспоненциальным, а также, возможно, промежуточным между полиномиальным и экспоненциальным, однако, кажется, в настоящий момент нет примеров такого рода поведения. Для лэмплайтера $\delta(n)\sim 1/n^2$ [95], а для группы Ханойских башен $\mathcal{H}^3$ последовательность $\delta(n)$ убывает экспоненциальным образом, причем в этом случае $\delta(n)\sim(1/5)^n$ [93]. Из асимптотического решения проблемы Ханойских башен для k стержней, показывающего, что расстояние между вершинами 0^n, 1^n в $\Gamma_n^{(k)}$ растет как $e^{n^{1/(k-2)}}$, полученного Сегеди [178], легко извлечь, что диаметр графов $\Gamma_n^{(k)}$ с ростом n растет как $e^{n^{1/(k-2)}}$. Применяя неравенство Чунг

$$d(n)\le\frac{\log|\Gamma_n|-1}{-\log\delta(n)},$$

связывающее $\delta(n)$ и диаметр $d(n)$ графа Γ_n, нетрудно получить следующую оценку сверху:

$$\delta(n)\preceq ne^{-n^{\frac{1}{k-2}}},$$

которая, возможно, указывает на то, что в случае, когда $k\ge 4$, убывание спектральной дыры имеет промежуточный характер между степенным и экспоненциальным. Однако это еще предстоит подтвердить соответствующей оценкой снизу.

Другая важная асимптотическая характеристика последовательности $\{\Gamma_n\}_{n=1}^\infty$ — это рост диаметров $d(n)=\operatorname{diam}(\Gamma_n)$. Для экспандера он линейный, что вытекает из неравенства Чунг. Несложная проверка показывает, что рост диаметров графов Шрейера, ассоциированных с реализацией лэмплайтера автоматом на рис. 3.1, линейный. Так как лэмплайтер, будучи разрешимой группой, аменабелен, то ясно, что из линейности роста диаметров не следует свойство быть экспандером. Как видно их приведенных выше примеров, для многих самоподобных групп, порожденных автоматами, рост диаметров графов Γ_n экспоненциален. На самом деле он экспоненциален для сжимающихся самоподобных групп.

Предложение 10.10. *Пусть G — самоподобная сжимающаяся группа, $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ассоциированная с ней последовательность графов Шрейера. Тогда* $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{d(n)} = \chi > 1$.

Доказательство. В [16] доказано, что для сжимающихся групп рост бесконечных графов Шрейера Γ_ξ полиномиален, т.е. функция роста $\gamma_\xi(r)$ графа Γ_ξ, определяющая число вершин, удаленных от ξ не более чем на расстояние r, ограничена сверху функцией вида Cr^α, где C и α — некоторые константы, $C > 0$, $\alpha > 0$. Таким образом, если обозначить через u_n вершину уровня n дерева, принадлежащую пути ξ, то при любом n функция роста $\gamma_n(r)$ графа Γ_n, считающая число вершин в графе Γ_n, удаленных от вершины u_n на расстояние $\le r$, ограничена сверху степенной функцией Cr^α. Так как число вершин в графе Γ_n равно d^n, где d — регулярность дерева, то очевидным образом это влечет экспоненциальный рост $d(n)$. $\square$

Напомним, что в определении 7.2 были введены классы Сидки полиномиально растущих автоматов и соответствующие классы групп. Так как группы, порожденные ограниченными автоматами, сжимающиеся, то для них рост диаметров всегда экспоненциален. В [31] разработан метод вычисления порядка экспоненциального роста χ для этого случая.

Группы, порожденные полиномиально растущими, но неограниченными автоматами, уже не обязательно являются сжимающимися, и для них диаметры могут иметь промежуточный рост, как показывает приведенный выше пример 7.2. Графы, порожденные экспоненциально растущими автоматами, могут иметь все три типа роста диаметров. Так, например, автомат, изображенный на рис. 7.7, представляющий группу Ханойских башен $\mathcal{H}^4$, имеет экспоненциальный рост в смысле Сидки, в то же время диаметры соответствующих графов Шрейера $\Gamma_n^{(4)}$ растут промежуточным образом. Точно так же автоматы, задающие Ханойские группы высших рангов $\mathcal{H}^k$, $k \ge 4$, имеют экспоненциальный рост, а в то же время диаметры графов $\Gamma_n^{(k)}$, ассоциированных с ними, растут промежуточным образом, точнее, как $e^{n^{1/(k-2)}}$, что следует из уже упомянутого результата Сегеди.

По-видимому, автоматы Беллатерра и Алешина, которые имеют экспоненциальный рост, также дают серии графов $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ с линейным ростом диаметров, однако это еще предстоит подтвердить (это будет так, если подтвердится наша гипотеза, что эти автоматы порождают экспандеры).

Следует изучать и другие асимптотические характеристики последовательностей конечных графов $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, связанные со случайными блужданиями [140], моделями статистической физики, как то модель Изинга или модель димеров [49], асимптотически вычислять количество остовных поддеревьев, эйлерову характеристику, хроматическое число, якобиан графов [11], модель *песочного пирога* [135] и т.д.

С другой стороны, можно исследовать асимптотические свойства бесконечных графов Шрейера Γ_ξ, $\xi \in \partial T$: рост, аменабельность, спектральные свойства, асимптотические свойства случайных блужданий, модели статистической физики, модель "песочного пирога" [135] и т.д. Так, например, уже отмечалось, что бесконечный граф, ассоциированный с линейным автоматом, представленным на рис. 7.13, имеет рост порядка $n^{\log_4 n}$. С другой стороны, в [91] показано, что рост бесконечных графов $\Gamma^{(k)}$ Ханойских групп $\mathcal{H}^k$ допускает следующие оценки:

$$a^{(\log n)^{k-2}} \prec \gamma^{(k)}(n) \prec b^{(\log n)^{k-2}}$$

для некоторых положительных констант a, b, $a \le b$. Таким образом, при $k \ge 4$ рост промежуточный между полиномиальным и экспоненциальным. Заметим, что порядок роста типа $c^{(\log n)^d}$ является весьма редким в комбинаторных задачах и, по-видимому, невозможен для графов Кэли групп, так как противоречит следующей гипотезе, поднимавшейся автором во многих его работах (и формулируемой в основном в виде вопроса, а не гипотезы, однако сейчас мы ставим акцент именно на гипотезе).

Гипотеза 10.1. *Если рост конечно порожденной группы меньше роста функции $e^{\sqrt{n}}$, то он полиномиален, а, следовательно, группа почти нильпотентна.*

Эта гипотеза доказана для групп, аппроксимируемых конечными p-группами [76], и верна также для более общего класса групп, аппроксимируемых нильпотентными группами, с тем же по сути дела доказательством. Хотя задача описания всех возможных порядков роста групп является, по-видимому, безнадежной, тем не менее нам представляется, что эта задача, равно как и другие задачи асимптотического характера, имеет шанс быть решенной для групп, графов и других объектов, связанных с конечными автоматами.

Совсем недавно Е. Бондаренко было доказано, что рост бесконечных графов Шрейера, ассоциированных с полиномиально растущими автоматами, субэкспоненциальный, причем имеет место верхняя оценка на рост типа $n^{(\log n)^m}$ для некоторой положительной константы m [33].

Проблема 10.3. (а) Какие возможны порядки роста диаметра $d(n)$ в последовательностях $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, ассоциированных с конечными автоматами?

(б) Тот же вопрос для последовательности $\delta(n)$ значений первого ненулевого значения лапласиана.

(в) Тот же вопрос для порядков роста бесконечных графов Шрейера Γ_ξ, $\xi \in \partial T$.

(г) Все предыдущие вопросы, но сформулированные для графов Шрейера, ассоциированных с полиномиально растущими автоматами.

Проблема 10.4. Существует ли алгоритм, который бы по заданному автомату позволял определить, к какому типу роста принадлежит тот или иной класс объектов (например, упомянутых в вопросах (а), (б), (в)). Аналогичный вопрос для свойства аменабельности графов Γ_ξ, $\xi \in \partial T$.

Закончим этот раздел обсуждением еще одного интересного круга вопросов, связанного с графами Шрейера. Речь идет об аналоге проблемы Ружевича для действий на корневых деревьях. Пусть группа G действует сферически транзитивно на корневом дереве (не обязательно регулярном) T. Тогда на ∂T действие минимально, эргодично и строго эргодично, т.е. обладает единственной вероятностной инвариантной мерой (а именно равномерной мерой ν). Назовем обобщенной проблемой Ружевича вопрос о единственности конечно аддитивной G-инвариантной меры μ, определенной на σ-алгебре $\mathcal{B}$ измеримых по Лебегу множеств на границе дерева, принимающей значения в интервале $[0,1]$ и такой, что $\mu(\partial T) = 1$. Такие меры находятся во взаимно однозначном соответствии с G-инвариантными средними в $L^\infty(\partial T, \mathcal{B}, \nu)$. Вопрос о единственности такой меры в случае группы вращений сферы $\mathbb{S}^n$ размерности $n \geq 1$ был поставлен Ружевичем в начале 20-х годов прошлого столетия и изучался Банахом, который показал, что в размерности 1 имеется много таких мер. Для размерности $n \geq 2$ вопрос Ружевича положительно был решен только в начале 80-х годов в работах Сулливана, Маргулиса и Дринфельда, использовавших для этой цели T-свойство Каждана, которое уже упоминалось. Напомним, что оно состоит в том, что любое унитарное представление группы, обладающее почти инвариантным вектором, на самом деле содержит ненулевой инвариантный вектор (т.е. что из слабого включения тривиального представления в данное следует, что тривиальное представление является подпредставлением; на языке топологии Фелла это означает, что тривиальное представление является изолированной точкой в дуальном пространстве). При этом представление ρ группы G в гильбертовом пространстве H обладает почти инвариантным вектором, если для любого $\epsilon > 0$ и конечного подмножества $F \subset G$ найдется единичный вектор $v \in H$ такой, что

$$\|\rho(s)v - v\| < \epsilon$$

при любом $s \in F$.

Розенблатт показал, что неединственность такой меры эквивалентна существованию асимптотически инвариантной нетривиальной сети подмножеств $E_\alpha \subset \partial T$, т.е. сети измеримых подмножеств границы, меры которых отделены от 1 (т.е. $\nu(E_\alpha) \le c < 1$), такой, что

$$\lim_\alpha \frac{\nu(gE_\alpha \triangle E_\alpha)}{\nu(E_\alpha)} = 0$$

при любом $g \in G$.

Действие с инвариантной вероятностной мерой называется *сильно* эргодическим, если не существует нетривиальных асимптотически инвариантных последовательностей. Такие действия изучались также К. Шмидтом, А. Конном и Б. Вейсом, которые дали характеризацию свойству Каждана в терминах этого понятия: группа G обладает свойством Каждана тогда и только тогда, когда произвольное ее действие с инвариантной вероятностной мерой является сильно эргодическим [24, Theorem 6.3.4]. В неопубликованном препринте[5] мы с Ф. Поленом, следуя идеям В. Каймановича, высказанным им в [106], определили *послойно* аменабельные действия (G, X, μ) конечно порожденной группы как такие, что для произвольного $\epsilon > 0$ существует измеримое отображение из X в множество конечных подмножеств вершин графа Шрейера Γ_x, $x \in X$, $x \to A_x$, удовлетворяющее условию

$$\frac{|\partial A_x|}{|A_x|} < \epsilon$$

почти наверное по x относительно меры μ.

Следующая теорема доказана в том же препринте, и бóльшую часть ее доказательства можно найти в разд. 6.3 и 6.4 книги Б. Бекки, П. де ля Арпа и А. Валетта [24], где обсуждается и ряд других вопросов вокруг проблемы Ружевича.

Теорема 10.11. *Пусть G — конечно порожденная группа с множеством порождающих A. Обобщенная проблема Ружевича имеет отрицательное решение* (*т.е. инвариантная мера неединственна*) *в том и только том случае, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий*:

(i) *оператор типа Гекке $\mathcal{M}$, ассоциированный с представлением π в $L^2(\partial T, \nu)$, суженный на ортогональное дополнение $L^2_0(\partial T, \nu)$ к постоянным функциям, содержит* 1 *в своем спектре*;

(ii) *представление π, суженное на $L^2_0(\partial T, \nu)$, содержит почти инвариантный вектор*;

(iii) *действие G на ∂T обладает нетривиальной асимптотически инвариантной последовательностью*;

(iv) *действие G на ∂T послойно аменабельно.*

11. ЦЕНА ДЕЙСТВИЙ И ГРАДИЕНТ РАНГА

Понятие цены действия группы сохраняющими меру преобразованиями было введено Г. Левиттом [124]. В дальнейшем оно получило значительное развитие в первую очередь благодаря блестящим работам Д. Габорио [63, 64]. Понятие градиента ранга было введено в работе М. Лакенби [121] в связи с исследованиями по трехмерной топологии [121, 122]. Новый импульс исследованиям вокруг этого понятия придала работа М. Аберта и Н. Николова [5] и последовавшие за ней работы Д. Осина [151]. В настоящее время оба понятия, между которыми, как мы вскоре увидим, существует тесная связь, играют существенную роль в асимптотической теории групп.

[5] *Grigorchuk R., Paulin F.* Spectral characterization of amenable group actions: Preprint, 1999.

Начнем с градиента ранга. Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа (мы будем сохранять это условие на группу до того момента, пока не начнем обсуждение цены действий) и $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность подгрупп конечного индекса. Ее верхним градиентом ранга называется величина

$$\mathrm{RG}(G,\{H_n\}) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{d(H_n)-1}{|G:H_n|} \tag{11.1}$$

($d(H)$ обозначает минимальное число образующих группы H, т.е. ее ранг). Аналогично определяются нижний градиент ранга, а также градиент ранга, если предел существует. Изучение скорости роста рангов подгрупп в убывающих цепочках подгрупп конечного индекса представляет интерес как для самой теории групп, так и в прикладных вопросах. При этом целесообразно рассматривать только цепочки $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ с тривиальным ядром, т.е. такие, для которых пересечение $H=\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ не содержит нетривиальной нормальной подгруппы. Важный частный случай — когда это пересечение тривиально. Также особым образом выделяется случай, когда H_n — нормальные подгруппы.

Абсолютный градиент ранга группы G определяется как

$$\mathrm{RG}(G) = \inf_{H\le G,\ |G:H|<\infty} \frac{d(H)-1}{|G:H|}. \tag{11.2}$$

Как уже упоминалось, это понятие было введено Лакенби в [121, 122] и мотивировано исследованиями в области теории экспандеров, а также трехмерных многообразий, в частности, вопросов, связанных с гипотезой о взаимоотношении ранга Хегора и ранга фундаментальной подгруппы трехмерного многообразия.

Пример группы с положительным градиентом ранга доставляет свободная группа F_m с $m\ge 2$ образующими. В силу классической теоремы Шрейера (см. [128]), связывающей индекс $|F_m:H|$ подгруппы H свободной группы F_m и число $d(H)$ ее образующих соотношением

$$d(H)-1 = |F_m:H|(m-1),$$

для любой убывающей цепочки подгрупп конечного индекса ее градиент ранга равен $m-1$, а значит, и $\mathrm{RG}(F_m)=m-1$.

Ниже мы приведем условия, основанные на понятии аменабельности, гарантирующие равенство нулю градиента ранга последовательности подгрупп или даже всей группы.

В разд. 2 мы связали с убывающей последовательностью подгрупп конечного индекса произвольной группы корневое дерево (дерево классов смежности) $T=T(G,\{H_n\})$, вершинами которого являются левые классы смежности по подгруппам, а действие определяется левым умножением. Тривиальность ядра цепочки влечет точность действия группы на этом дереве. Будем говорить, что убывающая цепь подгрупп конечного индекса $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ является существенно свободной, если действие на границе ассоциированного дерева существенно свободно по отношению к равномерной мере. Иногда это условие называют условием Фарбера, который его использовал для доказательства аппроксимационных результатов для L^2-инвариантов групп [57].

Следующая гипотеза высказывалась М. Абертом и Н. Николовым.

Гипотеза 11.1. *Если цепь $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ существенно свободна, то ее градиент ранга совпадает с абсолютным градиентом ранга группы G*

$$\mathrm{RG}(G,\{H_n\}) = \mathrm{RG}(G). \tag{11.3}$$

Для последовательностей $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$, у которых градиент ранга равен нулю, можно рассмотреть функцию $\mathrm{gr}(n)$, заданную соотношением

$$\mathrm{gr}(n) = \frac{d(H_n)}{|G:H_n|}.$$

Ее мы будем называть функцией относительного убывания градиента ранга последовательности $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ (или кратко "относительным рангом") и интересоваться скоростью ее убывания при $n \to \infty$. Если $\mathrm{gr}(n) \to 0$, то, удаляя из данной последовательности ряд ее членов, можно делать скорость убывания сколь угодно большой, поэтому особого внимания заслуживают *неуплотняемые* последовательности. Например, ограничившись рассмотрением групп, аппроксимируемых конечными p-группами (p — простое число), можно рассматривать только цепочки подгрупп с условием $|H_{n+1}:H_n| = p$ для любого n. Убывание ранга в таких цепочках — будем называть их *уплотненными p-цепочками* — представляет особый интерес.

Проблема 11.1. 1. Какие могут быть порядки убывания функции $\mathrm{gr}(n)$ у уплотненных p-цепочек с тривиальным ядром в конечно порожденных группах, аппроксимируемых конечными p-группами?

2. Тот же вопрос для нормальных цепочек.

3. Тот же вопрос для цепочек с тривиальным пересечением.

Помимо сформулированных вопросов, представляет интерес изучение вопроса, в каких пределах может изменяться относительное убывание градиента ранга в пределах одной группы. Какие условия на группу гарантируют независимость асимптотики относительного убывания от выбора того или иного типа убывающей цепочки подгрупп?

Если группа G действует на корневом дереве T, то, как мы уже неоднократно отмечали, в качестве убывающей последовательности подгрупп конечного индекса естественно рассмотреть последовательность стабилизаторов $P_n = \mathrm{st}_G(u_n)$, где $\{u_n\}$ — последовательность вершин (индекс n обозначает уровень, которому принадлежит вершина), принадлежащих некоторому геодезическому пути, соединяющему корень дерева с бесконечностью (т.е. точке границы дерева). Если дерево T является p-регулярным, а действие сферически транзитивно, то $|G{:}P_n| = p^n$ и такая цепочка подгрупп является p-уплотненной.

Рассмотрим в качестве примера группу $\mathcal{G} = \langle a,b,c,d\rangle$ промежуточного роста из примера 2.3, которая действует сферически транзитивно на бинарном дереве, и пусть $P_n = \mathrm{st}_{\mathcal{G}}(1^n)$, $n = 1,2,\dots$ Эта последовательность убывает, ее пересечение равно стабилизатору $\mathrm{st}_{\mathcal{G}}(1^{\infty})$, а ядро тривиально (так как $\mathcal{G}$ минимально бесконечна). Приведенное в [17] рекуррентное описание стабилизаторов P_n позволяет заключить, что последовательность $d(P_n)$ растет не быстрее чем $10n$ (константу 10 можно заменить меньшей, возможно 3). Таким образом, в данном случае относительный ранг убывает не медленнее чем $\frac{10n}{2^n}$. По-видимому, относительное убывание градиента ранга в этом случае асимптотически порядка $\frac{n}{2^n}$, однако это еще необходимо проверить. Похожее асимптотическое поведение относительного ранга имеет место для последовательности $\{\mathrm{st}_{\mathcal{G}}(n)\}$ стабилизаторов уровней (которая хотя и не является 2-уплотненной, но может быть уплотнена), что следует из явного описания этих стабилизаторов, полученного в [160], а также и из вычисления индексов стабилизаторов уровней [81]. Действительно, начиная с четвертого уровня

$$\mathrm{st}_{\mathcal{G}}(n) \simeq \mathrm{st}_{\mathcal{G}}(3) \times \ldots \times \mathrm{st}_{\mathcal{G}}(3)$$

(2^{n-3} сомножителей), т.е. число порождающих с ростом n растет экспоненциально, а индекс

$$[\mathcal{G} : \mathrm{st}_{\mathcal{G}}(n)] = 2^{5\cdot 2^{n-3}+2}$$

растет как двойная экспонента.

Приведем еще один пример. Используя представление лэмплайтера $\mathcal{L}$ автоматом из рис. 3.1 и беря любую точку границы, соответствующую не двоично рациональному числу, получим последовательность стабилизаторов с тривиальным пересечением, причем эти стабилизаторы изоморфны $\mathcal{L}$ (если отказаться от условия иррациональности, то пересечение может оказаться бесконечной циклической группой, однако ядро последовательности все равно будет тривиальным). Это следует из результатов работы [95], а в явном виде упомянуто в [145], где приведены многочисленные примеры и даже конструкции серий групп, обладающих убывающими цепочками подгрупп конечного индекса с тривиальным пересечением и состоящих из групп, изоморфных самой группе. Вопрос о существовании таких групп (которые в [145] названы калибровочно инвариантными) был поставлен Бенжамини. Для таких последовательностей относительный градиент ранга равен $\mathrm{gr}(n) = \frac{C}{d^n}$ для некоторых констант C, d. В то же время в $\mathcal{L}$ существуют последовательности подгрупп конечного примарного индекса степени двойки (т.е. имеющего вид 2^n), для которых убывание относительного градиента ранга может варьироваться в пределах от экспоненциального убывания до постоянной функции (т.е. градиент ранга может оказаться положительным, что выглядит любопытным в свете формулируемых ниже теорем). Это вытекает из следующего утверждения, доказанного в [8] (более подробно структура подгрупп лэмплайтера исследована в нашем препринте[6] с Р. Кравченко, причем там же доказано, что точное действие лэмплайтера на границе дерева, полученного из убывающей цепи подгрупп конечного индекса, всегда топологически свободно).

Предложение 11.1. *Пусть $\mathcal{L}_n$ обозначает группу $(\mathbb{Z}_2^n) \wr \mathbb{Z}$. Тогда подгруппы индекса 2 группы $\mathcal{L}_n$ исчерпываются группами, изоморфными $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_{2n}$.*

При исследовании градиента ранга (равно как и цены действий) важную роль играет свойство аменабельности.

Теорема 11.2. (1) [5]. *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа, содержащая аменабельную нормальную подгруппу, и пусть цепь $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ существенно свободна. Тогда ее градиент ранга равен нулю.*

(2) [4]. *Пусть G — конечно представленная аменабельная финитно аппроксимируемая группа. Тогда градиент ранга равен нулю для произвольной убывающей цепочки подгрупп конечного индекса с тривиальным пересечением.*

(3) [4]. *Пусть G содержит бесконечную разрешимую нормальную подгруппу. Тогда градиент ранга равен нулю для произвольной убывающей цепочки подгрупп конечного индекса с тривиальным пересечением.*

Приведенная выше информация о типах убывания относительного градиента ранга лэмплайтера показывает, что даже для метабелевых (т.е. двуступенно разрешимых) групп (например, для лэмплайтера) утверждение (1) теоремы 11.2 неверно, если не предполагать существенную свободу ассоциированного с цепочкой действия. Также неверны утверждения (2) и (3) этой теоремы, если не предполагать тривиальность пересечения.

Теперь перейдем к рассмотрению цены действия группы (и к понятию цены отношения эквивалентности). Пусть (G, X, μ) — динамическая система, для которой X является стандартным борелевским пространством [67], G — счетная группа, а мера μ инвариантна. Действие порождает отношение эквивалентности E, $E \subset X \times X$, на X (разбиение на орбиты), для которого x и y находятся в одном классе, если найдется $g \in G$ такое, что $y = g(x)$ (записывается это в виде xEy или $(x, y) \in E$). Очевидно, каждый класс эквивалентности конечен или счетен (такие отношения будем называть счетными). E является борелевским подмножеством $X \times X$ (рассматриваются только измеримые действия). Можно также интересоваться произвольными

[6] *Grigorchuk R., Kravchenko R.* The lattice of subgroups of the lamplighter group and topological freeness of boundary actions: Preprint, 2011.

борелевскими отношениями эквивалентности с не более чем счетными классами (опять-таки определяемыми борелевскими подмножествами $E \subset X \times X$), однако не существует разницы — рассматривать счетные отношения эквивалентности или разбиения на орбиты действий счетных групп ввиду следующей теоремы Фельдмана–Мура из [58].

Теорема 11.3. *Пусть E — счетное борелевское отношение эквивалентности на стандартном борелевском пространстве X. Тогда найдутся счетная группа G и борелевское действие G на X, для которых разбиение на орбиты совпадает с E. Более того, группа G и действие могут быть выбраны таким образом, что*

$$xEy \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Существует } g \in G \textit{ такое, что } g^2 = 1 \textit{ и } g(x) = y.$$

Вопрос, поставленный Фельдманом и Муром, о том, можно ли любое отношение эквивалентности породить существенно свободным действием группы в случае, когда разбиение обладает квазиинвариантной мерой, получил отрицательное решение (см. [61] и п. 4.3.1 работы А. Фурмана [62]).

Мера μ, заданная на X, является E-(квази)инвариантной в том случае, если она является G-(квази)инвариантной для некоторой (любой) группы, действующей борелевски на X, для которой разбиение на орбиты совпадает с отношением E (предложения 2.1 и 16.1 в [113]). При этом эргодичность отношения эквивалентности по отношению к квазиинвариантной конечной мере — это то же, что эргодичность соответствующего действия группы, порождающего это отношение эквивалентности, а именно отсутствие нетривиальных (т.е. имеющих меру не 0 и 1) инвариантных подмножеств.

Отношения эквивалентности (X,E) и (Y,F) изоморфны, если существует борелевская биекция $\phi\colon X \to Y$, переводящая E в F. Отношения E и F эквивалентны по мере (точнее, по отношению к квазиинвариантным мерам μ и ν), если борелевский изоморфизм устанавливается удалением из X и Y инвариантных подмножеств меры нуль. Это соответствует определению орбитальной эквивалентности действий групп на пространствах с мерой.

Отношение эквивалентности можно рассматривать как множество ребер ориентированного графа (с множеством вершин в X). Борелевским графом называется симметрическое (т.е. из $(x,y) \in E$ следует $(y,x) \in E$) борелевское подмножество $E \subset X$. Пары (x,y) служат ребрами с начальной вершиной x и концом y. При этом множество вершин V графа, являющееся проекцией множества E на первую координату, также является борелевским множеством в силу теоремы Куратовского [120] (при доказательстве этого утверждения существенным образом используется не более чем счетная мощность классов эквивалентности). Для борелевского графа S, как и для обыкновенного графа, естественным образом определяется понятие пути, соединяющего две вершины, его комбинаторная длина, окрестность $D(n)$ радиуса n диагонали, состоящая из таких пар (x,y), что существует путь длины $\le n$, соединяющий x и y (при этом $D(n)$ — борелевское множество), и степень $\deg(x)$ вершины x, под которой понимается число точек y таких, что $(x,y) \in S$. Граф локально конечен, если степени всех его вершин конечны. Подграф $S \subset E$ порождает E, если для любой пары $(x,y) \in E$ с $x \neq y$ найдется путь из x в y, полностью лежащий в S, другими словами, если $\bigcup_n D_S(n) = E$.

Для подмножества $Y \subset X \times X$ через Y_x обозначим $\{y\colon (x,y) \in Y\}$. Определим меру на борелевских подмножествах множества E соотношением

$$\kappa(Y) = \int |Y_x|\, d\mu(x). \tag{11.4}$$

Заметим, что этот интеграл может принимать и бесконечные значения.

Определение 11.1. (a) *Ценой* $\operatorname{cost}(E)$ *отношения эквивалентности* E называется величина $\inf \kappa(S)$, где инфимум берется по всем борелевским подграфам $S \subset E$, которые порождают E.

(б) Ценой $\mathrm{cost}(G,X,\mu)$ действия (G,X,μ) с инвариантной мерой называется величина $\mathrm{cost}(E)$, где E — разбиение на орбиты.

(в) *Ценой группы* называется величина

$$\mathrm{cost}(G) = \inf \mathrm{cost}(G,X,\mu), \tag{11.5}$$

где инфимум берется по всем эргодическим существенно свободным действиям (G,X,μ) группы G сохраняющими вероятностную меру μ преобразованиями.

(г) Группа G имеет *фиксированную цену*, если цена всех ее существенно свободных действий с инвариантной мерой на вероятностном пространстве одна и та же.

(д) Отношение эквивалентности E на X, обладающее инвариантной вероятностной мерой, называется *дешевым*, если $\mathrm{cost}(E) = 1$.

(е) Группа G называется *дешевой*, если $\mathrm{cost}(G) = 1$.

Для действий на вероятностных пространствах, у которых почти все орбиты бесконечны, цена не меньше 1. Для действий аменабельных групп на вероятностных пространствах цена равна 1, так что такие действия и группы с точки зрения цены являются наиболее "дешевыми" [63]. Однако имеется и много неаменабельных дешевых групп; например, произведение двух бесконечных групп есть дешевая группа согласно одному из результатов Д. Габорио [64, 63]. Неизвестно ни одной группы, которая бы не обладала фиксированной ценой.

Цена отношения эквивалентности зависит от меры μ. Например, умножение меры на положительный скаляр пропорционально увеличивает цену. В тех случаях, когда важно подчеркнуть, о какой мере идет речь, будем писать $\mathrm{cost}_\mu(E)$ или $c_\mu(E)$.

До недавнего времени цена изучалась только для почти свободных действий. Однако представляет интерес ее изучение и для не почти свободных (но точных) действий. Первый шаг в этом направлении сделан в [5]. Следующая теорема показывает связь между градиентом ранга и ценой действий.

Теорема 11.4 (Аберт, Николов [5]). *Пусть последовательность $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ подгрупп группы G существенно свободна. Тогда*

$$\mathrm{RG}(G,\{H_n\}) = \mathrm{cost}_\nu(E) - 1, \tag{11.6}$$

где E — разбиение на орбиты действия G на границе дерева, ассоциированного с $\{H_n\}_{n=1}^\infty$.

Нас интересует информация о возможных значениях цены самоподобных и сильно самоподобных групп и цены отношений эквивалентности, возникающих из действий таких групп на границе дерева, определенных заданием группы с помощью конечного автомата. Первым наблюдением в этом направлении является

Теорема 11.5. *Пусть группа G, действующая на дереве T, является самовоспроизводящейся и действует существенно свободно на границе дерева. Тогда $c_\nu(E) = 1$, где E — разбиение на орбиты действия группы G на границе дерева T, а ν — равномерная мера на границе.*

Первое доказательство. Рассмотрим разбиение $X = \bigsqcup_{i=1}^d X_i$ границы дерева $X = \partial T$, где X_i — цилиндрические множества, соответствующие вершинам первого уровня. Пусть $E_i = E|X_i$ — сужение на подмножество X_i. Заметим, что естественное отождествление X_i с X, основанное на самоподобии регулярного корневого дерева, переводит отношение E_i в подотношение отношения E. Это верно для действия любой самоподобной группы. Однако в случае, когда группа является самовоспроизводящейся, E_i переходит при таком отождествлении в E. Из результата Габорио (см. [113, Theorem 21]) следует, что выполнены соотношения

$$c_\nu(E) = c_{\nu|X_1}(E|X_1) + \nu(\partial T \setminus X_1) = c_{\nu|X_1}(E|X_1) + \frac{d-1}{d}, \tag{11.7}$$

где d — кратность ветвления дерева. Используя подобие отношений E и E_1 и очевидное гомотетическое свойство равномерной меры на границе, получаем, что $c_{\nu|X_1}(E_1) = \frac{1}{d}c_\nu(E)$. Отсюда и из (11.7) приходим к соотношению

$$c_\nu(E)\left(1 - \frac{1}{d}\right) = \frac{d-1}{d},$$

влекущему $c_\nu(E) = 1$. $\square$

Второе доказательство. Пусть $\xi \in \partial T$ — произвольная точка границы, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность вершин пути ξ и $P_n = \mathrm{st}_G(u_n)$. Тогда $|G : P_n| = d^n$. В силу того что G — самовоспроизводящаяся группа, сужение $G_n = P_n|T_{u_n}$ на поддерево T_{u_n} является группой, изоморфной группе G. Ядро гомоморфизма сужения $P_n \to P_n|T_{u_n}$ тривиально (иначе действие не было бы существенно свободным). Поэтому $P_n \simeq G$, $n = 1, 2, \dots$, а значит, градиент ранга последовательности $\{P_n\}$ равен нулю. Осталось воспользоваться теоремой 11.4 Аберта–Николова. $\square$

Доказывая эту теорему вторым способом, мы одновременно доказали следующее утверждение.

Предложение 11.6. *Самовоспроизводящаяся группа, действующая свободно на границе дерева, принадлежит классу калибровочно инвариантных групп, т.е. групп, обладающих убывающей цепочкой подгрупп конечного индекса, изоморфных самой группе, имеющей тривиальное ядро.*

На самом деле для почти всех точек границы дерева пересечение членов соответствующей последовательности тривиально. Как уже отмечалось выше, нетривиальные примеры калибровочно инвариантных групп построены в [145].

Следует подчеркнуть, что самовоспроизводящиеся группы представляют интересный класс групп, про который известно очень немного, хотя они достаточно часто встречаются среди самоподобных групп. Например, среди 115 групп, порожденных автоматами с тремя состояниями над алфавитом из двух букв, (неполная) классификация которых приведена в [164, 139, 35], большинство являются самовоспроизводящимися группами. Многие среди них являются группами ветвящегося типа. Однако есть и такие, которые к этому типу не принадлежат, и некоторые из них, как уже отмечалось (например, лэмплайтер и группа Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(1,3)$), действуют почти свободно на границе соответствующего дерева.

Некоторые понятия и методы теории самоподобных групп можно распространить на теорию борелевских отношений эквивалентности. Приведем пример такого сорта. Пусть $X = [0,1]$, μ — мера Лебега, $d \geq 2$ — натуральное число, $X = \bigsqcup_{i=1}^d X_i$ — разбиение отрезка на d кусков равной длины. Хорошо известно, что пара (X,μ) служит универсальной моделью пространства с мерой (пространства Лебега, см. [159]). Поэтому вся теория измеримых отношений эквивалентности может излагаться на примере этого пространства. Для нас важно, что отрезок обладает естественной системой самоподобий: каждый подынтервал X_i отображается изоморфно на весь отрезок X с помощью соответствующего аффинного преобразования φ_i (сохраняющего ориентацию). Это самоподобие отрезка и лежит в основе следующего определения.

Определение 11.2. Пусть E — борелевское отношение эквивалентности на X.

(a) Отношение E называется самоподобным, если существует $d \geq 2$ такое, что отношение $E|X_i$ переходит в подотношение $E_i \subset E$ при аффинном преобразовании φ_i, переводящем X_i в X, $i = 1, \dots, d$.

(б) Отношение E называется самовоспроизводящимся, если существует $d \geq 2$ такое, что отношение $E|X_i$ переходит в отношение E при аффинном преобразовании φ_i, переводящем X_i в X, $i = 1, \dots, d$.

В приведенном определении можно вместо отрезка $[0,1]$ использовать границу ∂T d-регулярного дерева и ее естественное разбиение $\partial T = \bigsqcup_{i=1}^{d} \partial T_i$ на цилиндрические множества, соответствующие вершинам первого уровня (при этом аффинные преобразования φ_i заменяются на естественные изоморфизмы между поддеревьями T_{u_i} и деревом T, u_i, $i = 1, \dots, d$, — вершины первого уровня, пронумерованные в естественном порядке). Еще одна естественная модель — это множество Кантора, реализованное в виде пространства последовательностей над d-буквенным алфавитом, оснащенным тихоновской топологией.

Разбиение на орбиты действия самоподобной группы на границе дерева является самоподобным, а разбиение на орбиты существенно свободного действия самовоспроизводящейся группы является самовоспроизводящимся. Возможно, каждое самоподобное или самовоспроизводящееся разбиение можно реализовать с помощью действия самоподобной или соответственно самовоспроизводящейся группы, однако это еще предстоит доказать или опровергнуть.

Проблема 11.2. Верен ли аналог теоремы Фельдмана–Мура для самоподобных и самовоспроизводящихся отношений эквивалентности? Другими словами, верно ли, что для любого самоподобного борелевского отношения эквивалентности на пространстве X найдется группа, действующая самоподобным образом на X, разбиение на орбиты которой совпадает с данным отношением эквивалентности? Аналогичный вопрос для самовоспроизводящихся отношений эквивалентности.

Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 11.5.

Теорема 11.7. *Цена любого самовоспроизводящегося борелевского отношения эквивалентности, сохраняющего инвариантную меру, равна* 1 *по отношению к этой мере.*

Проблема 11.3. (i) Сколько существует попарно неизоморфных борелевских самоподобных отношений эквивалентности?

(ii) Тот же вопрос для самовоспроизводящихся отношений эквивалентности.

Среди отношений эквивалентности особое место занимают гиперконечные отношения.

Определение 11.3. (a) Счетное отношение эквивалентности E называется *гиперконечным*, если существует возрастающая последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечных (т.е. с конечными классами эквивалентности) борелевских подотношений эквивалентности $F_n \subset E$, исчерпывающих E, т.е. $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ и $\bigcup_n F_n = E$.

(б) Отношение E, обладающее инвариантной мерой μ, *гиперконечно почти всюду*, если существует борелевское подмножество $B \subset X$, $\mu(X \setminus B) = 0$, такое, что сужение $E|B$ является гиперконечным.

Понятие гиперконечности можно рассматривать как аналог понятия аменабельности ввиду следующих классических теорем.

Теорема 11.8. (i) (Дай [55]) *Любые две эргодические системы* $(\mathbb{Z}, X, \mu)$ *и* $(\mathbb{Z}, Y, \nu)$ *с инвариантными вероятностными мерами и неатомическими пространствами* X *и* Y *орбитально эквивалентны.*

(ii) (Орнстейн–Вейс [150]) *Любое эргодическое действие аменабельной группы сохраняющими вероятностную меру преобразованиями орбитально эквивалентно эргодическому действию группы* $\mathbb{Z}$ *сохраняющими вероятностную меру преобразованиями.*

Существует определение, восходящее к Р. Зиммеру, аменабельного (точнее, μ-аменабельного) отношения эквивалентности, обладающего квазиинвариантной вероятностной мерой μ. Мы это определение опустим, отсылая читателя, скажем, к книге Зиммера [197], публикации [106] или к разд. 9 книги [113]. Приведем еще одно утверждение, указывающее на связь аменабельности и гиперконечности, которое обобщает предыдущее утверждение.

Теорема 11.9 (Конн–Фельдман–Вейс [47]). *Пусть E — счетное отношение эквивалентности на X и μ — E-квазиинвариантная вероятностная мера. Если E является μ-аменабельным, то тогда E является гиперконечным μ-почти всюду.*

Итак, два любых неатомических сохраняющих вероятностную меру эргодических действия аменабельных групп орбитально эквивалентны и соответствующие разбиения на орбиты эквивалентны (по отношению к соответствующим мерам) гиперконечному отношению эквивалентности. Кроме того, два любых сохраняющих вероятностную меру эргодических гиперконечных отношения эквивалентности изоморфны. Как показал Г. Хьерз [103], свойство группы иметь с точностью до орбитальной эквивалентности только одно эргодическое сохраняющее вероятностную меру действие на самом деле эквивалентно свойству быть аменабельной.

Примеры, приведенные в заметке В. Каймановича [106], показывают, что для действия группы на вероятностном пространстве с инвариантной мерой все орбитальные графы Шрейера могут быть аменабельными, в то время как действие не будет аменабельным в смысле Зиммера (т.е. соответствующее отношение эквивалентности не будет гиперконечным). В работе Т. Чекерини-Сильберстайна и Г. Элека [40] построено действие группы, являющейся свободным произведением четырех копий группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (которая почти свободна, а следовательно, неаменабельна), на компактном метрическом пространстве такое, что все орбитальные графы Шрейера аменабельны. Для этого действия ими построены две меры μ_1, μ_2 такие, что по отношению к первой мере разбиение на орбиты действия является гиперконечным, а по отношению к другой нет, при этом доказательство негиперконечности использует нижнюю оценку на цену действия.

Замечание 11.1. Описанная ситуация с гиперконечностью отношений эквивалентности аналогична ситуации с гиперконечностью в алгебрах фон Неймана, где доказывается, что существует только один гиперконечный фактор типа II_1, и где гиперконечность алгебр также ассоциируется с их аменабельностью.

В последнее десятилетие благодаря в первую очередь работам Р. Зиммера, М. Громова, А. Вершика, В. Каймановича, Д. Габорио, А. Фурмана, Н. Моно и Е. Шалома (см. [62]) активно развивается направление, которое условно называется "измеримая теория групп". Одно из центральных понятий этой теории — понятие измеримой эквивалентности групп. Сформулированный выше результат об орбитальной эквивалентности действий аменабельных групп на этом языке означает, что аменабельные группы составляют класс измеримой эквивалентности.

Отношение E называется апериодическим, если все его классы эквивалентности бесконечные. Для таких отношений имеет место следующая теорема Левитта [124], которая исторически была первым утверждением, продемонстрировавшим важность понятия цены.

Теорема 11.10. *Пусть E — счетное апериодическое борелевское отношение эквивалентности на X, а мера μ является вероятностной и E-инвариантной. Тогда отношение E гиперконечно μ-почти наверное в том и только том случае, если $\mathrm{cost}_\mu(E) = 1$ достижим (т.е. достигает своего значения 1 на некотором порождающем это отношение эквивалентности борелевском подграфе).*

Отметим еще один важный факт из теории отношений эквивалентности, перекликающийся с некоторыми сформулированными выше утверждениями.

Теорема 11.11. *Пусть G — аменабельная группа, действующая на пространстве X сохраняющими меру μ преобразованиями.*

(а) (Орнстейн–Вейс [150]) *Тогда разбиение на орбиты гиперконечно μ-почти всюду.*

(б) (Зиммер [197]) *Если действие существенно свободно, сохраняет меру и разбиение на орбиты E гиперконечно μ-почти всюду, то группа G аменабельна.*

Одним из многочисленных следствий этих результатов является следующее утверждение.

Предложение 11.12. *Пусть G — самовоспроизводящаяся группа, действующая существенно свободно на границе дерева. Тогда G аменабельна в том и только том случае, если цена разбиения E на орбиты по отношению к равномерной мере* (*которая, напомним, в силу теоремы* 11.5 *равна* 1) *достигается на некотором борелевском графе, порождающем разбиение E.*

Доказательство. Действительно, так как равномерная мера ν инвариантна, то аменабельность G эквивалентна гиперконечности разбиения на орбиты. Поэтому из теоремы Левитта 11.10 следует, что значение $\mathrm{cost}_\nu(E)=1$ достигается. □

Отношения эквивалентности, порожденные конечными автоматами, до сих пор фактически не изучались, и наша цель — привлечь читателя к этому, на наш взгляд, очень интересному направлению. Следующая проблема — одна из многих, которые могут быть поставлены в этой связи (в ней подразумевается, что группа $G(\mathcal{A})$, порожденная автоматом $\mathcal{A}$, действует на границе соответствующего дерева ∂T сохраняющими равномерную меру ν преобразованиями).

Проблема 11.4. Существует ли алгоритм, который бы по конечному обратимому автомату Мили $\mathcal{A}$ определял

(i) эргодична ли динамическая система $(G(\mathcal{A}),\partial T,\nu)$?

(ii) почти свободно ли действие группы $G(\mathcal{A})$ на границе ∂T по отношению к равномерной мере ν?

(iii) гиперконечно ли разбиение на орбиты динамической системы $(G(\mathcal{A}),\partial T,\nu)$?

Борелевские действия группы $\mathbb{Z}$, свободных абелевых групп $\mathbb{Z}^n$ (неопубликованный результат Б. Вейса) и даже конечно порожденных нильпотентных групп [113, Theorem 11.1] обладают гиперконечными разбиениями на орбиты в чистом виде (т.е. безотносительно к той или иной мере, другими словами, в смысле части (a) приведенного выше определения 11.3).

По теоремам Сламана и Стила [173] и Вейса [190] чистая гиперконечность отношения эквивалентности равносильна тому, что оно порождается действием группы $\mathbb{Z}$ (безотносительно к какой-либо мере). Как только что упоминалось, разбиение на орбиты борелевского действия группы полиномиального роста (т.е. конечно порожденной почти нильпотентной группы) является гиперконечным (Джексон–Кехрис–Лоувэ [105]). Неизвестно, распространяется ли этот результат на группы субэкспоненциального роста или, может быть, даже на аменабельные группы.

Б. Вейс [190] поставил следующий вопрос.

Проблема 11.5. Верно ли, что произвольное действие аменабельной счетной группы борелевскими автоморфизмами всегда обладает гиперконечным разбиением на орбиты?

Неясно, всякое ли ν-гиперконечное отношение эквивалентности, порожденное конечным автоматом, является гиперконечным в чистом виде.

В частности, было бы любопытно проверить гиперконечность разбиений на орбиты действий лэмплайтера и группы Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(1,3)$, описанных в примерах 2.2 и 5.4. Может быть, какое-нибудь из них негиперконечно?

Имеется ряд утверждений, в основном принадлежащих Габорио [63, 64], о поведении цены при групповых конструкциях, в частности, для свободных произведений с объединением и HNN-расширений. С обзором этой информации можно ознакомиться по последним разделам книги [113], где также приведен обширный список проблем (в основном опять-таки принадлежащих Габорио). В качестве интересного примера вычисления цены отметим, что цена наследственно минимально бесконечной группы $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ равна нулю, так как эта группа обладает системой образующих, в которой каждый следующий член коммутирует с предыдущим и порядки всех образующих бесконечны [63]. Заметим, что фактор-группа G/N может иметь бо́льшую цену, чем G, как показывает следующий пример:

$$F_4 \to F_2 \times F_2 \to F_2,$$

состоящий из групп и сюръективных гомоморфизмов, причем цена групп F_4 и F_2 равна соответственно 4 и 2, в то время как цена прямого произведения двух копий группы F_2 равна нулю. Как бы то ни было, цена минимально бесконечных групп заслуживает весьма пристального внимания. Однако для ветвящихся групп ответ известен, поэтому остается разобраться с ценой простых групп и наследственно минимально бесконечных групп.

Теорема 11.13. *Пусть G — ветвящаяся группа. Тогда* $\operatorname{cost}(G) = 1$.

Доказательство. Действительно, произведение двух бесконечных групп является дешевой группой и свойство группы быть дешевой сохраняется при переходе к подгруппам конечного индекса или, наоборот, при расширении конечного индекса [113, Proposition 35.1]. Применяя это утверждение к $\operatorname{rist}_G(1)$, получаем сформулированное утверждение. □

Проблема 11.6. Верно ли, что каждая минимально бесконечная группа имеет фиксированную цену 1 и эта цена достигается?

К сожалению, пока не развито никаких методов, которые бы позволяли по самоподобному разбиению (заданному, например, с помощью конечного автомата) определять, является оно гиперконечным или нет (напомним, что ранее была сформулирована проблема на эту тему). Было бы интересно доказать аменабельность некоторых самовоспроизводящихся групп (для которых аменабельность не удается доказать другим способом) с помощью установления тем или иным путем гиперконечности (по отношению к равномерной мере) разбиения на орбиты их действия на границе дерева и существенной свободы этих действий. Напомним, что мы уже знаем, что цена этих действий равна 1, что, возможно, указывает на их гиперконечность.

Также хорошо было бы развить методы, позволяющие по конечному автомату вычислять L^2-числа Бетти порожденного этим автоматом отношения эквивалентности. L^2-числа Бетти введены Габорио в [64], показавшим, что для многих групп и действий (в частности, для аменабельных групп) они равны нулю. Таким образом, отличие от нуля хотя бы одного L^2-числа Бетти влечет, что отношение эквивалентности негиперконечно (и соответственно неаменабельна группа, его порождающая). L^2-числа Бетти являются инвариантами орбитальной эквивалентности, равно как и различные операторные алгебры (в первую очередь алгебры фон Неймана), которые сопоставляются действию или отношению эквивалентности. Это в первую очередь классическая конструкция фон Неймана для случая существенно свободных действий и ее обобщение, полученное Кригером, в случае несвободных действий. Кроме оригинальных работ, об этом можно прочитать в книгах Такесаки [181], Конна [46] и многих других источниках. Одним из актуальных вопросов является вопрос классификации алгебр фон Неймана, ассоциированных с действиями самоподобных групп, порожденных конечными автоматами (речь идет об алгебрах, упомянутых в разд. 9 в связи с результатом А.М. Вершика). Кроме того, было бы хорошо найти условия на автомат, при выполнении которых эти алгебры являлись бы гиперфинитным фактором типа II_1. Существует ли алгоритм, который бы позволял это делать? Любопытно, что конечные автоматы типа Мили возникают при исследовании некоторых операторных алгебр, в частности алгебры Кунца, как это продемонстрировано в [86].

Благодарности. В заключение автор хотел бы выразить глубокую благодарность своим коллегам и ученикам за многолетнюю продуктивную совместную работу, за ценные обсуждения, которые велись на протяжении двух лет написания этой статьи и за многочисленные ценные замечания, высказанные ими по поводу предварительных версий этого текста. Вот их имена: М. Аберт, П. де ля Арп, Л. Бартольди, А.М. Вершик, М. Воробец, Д. Д'Анжели, А. Донно, В. Кайманович, Д. Керр, Ю. Леонов, Е. Мунтян, Е. Первова, С. Сидки, Р. Смит, Б. Стайнберг, В.И. Сущанский, Т. Чекерини-Сильберстайн, З. Шунич, А. Эршлер, и, возможно, я о ком-то забыл. И особую благодарность я хотел бы выразить Д.В. Аносову, Е. Бондаренко, Я. Воробцу, Р. Кравченко, Т. Нагнибеде, В. Некрашевичу, Д. Савчуку и моему научному руководителю в студенческие годы А.М. Степину, поставленные которым в свое время задачи привели в итоге к появлению многих вещей, представленных в этом обзоре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abért M.* Group laws and free subgroups in topological groups // Bull. London Math. Soc. 2005. V. 37, N 4. P. 525–534.
2. *Abért M., Elek G.* Non-abelian free groups admit non-essentially free actions on rooted trees: E-print, 2007. arXiv: 0707.0970 [math.GR].
3. *Abért M., Elek G.* Dynamical properties of profinite actions: E-print, 2010. arXiv: 1005.3188 [math.GR].
4. *Abért M., Jaikin-Zapirain A., Nikolov N.* The rank gradient from a combinatorial viewpoint // Groups, Geom., and Dyn. 2011. V. 5, N 2. P. 213–230; arXiv: math/0701925 [math.GR].
5. *Abért M., Nikolov N.* Rank gradient, cost of groups and the rank versus Heegaard genus problem // J. Eur. Math. Soc. To appear; arXiv: math/0701361 [math.GR].
6. *Abért M., Virág B.* Dimension and randomness in groups acting on rooted trees // J. Amer. Math. Soc. 2005. V. 18, N 1. P. 157–192.
7. *Алешин С.В.* Свободная группа конечных автоматов // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1983. №4. С. 12–14.
8. *Allums D.J., Grigorchuk R.I.* The rank gradient and the lamplighter group: Preprint, 2011. http://www.math.tamu.edu/~grigorch/publications/lamplighter.pdf
9. *Amir G., Angel O., Virág B.* Amenability of linear-activity automaton groups: E-print, 2009. arXiv: 0905.2007 [math.GR].
10. *Atiyah M.F.* Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras // Analyse et topologie: Colloque en l'honneur de Henri Cartan, Orsay, 1974. Paris: Soc. math. France, 1976. P. 43–72. (Astérisque; V. 32–33).
11. *Bacher R., de la Harpe P., Nagnibeda T.* The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph // Bull. Soc. math. France. 1997. V. 125, N 2. P. 167–198.
12. *Barlow M.T.* Diffusions on fractals // Lectures on probability theory and statistics, Saint-Flour, 1995. Berlin: Springer, 1998. P. 1–121. (Lect. Notes Math.; V. 1690).
13. *Barnea Y., Ershov M., Weigel T.* Abstract commensurators of profinite groups: E-print, 2008. arXiv: 0810.2060 [math.GR].
14. *Bartholdi L.* Endomorphic presentations of branch groups // J. Algebra. 2003. V. 268, N 2. P. 419–443.
15. *Bartholdi L., Erschler A.G.* Growth of permutational extensions: E-print, 2010. arXiv: 1011.5266 [math.GR].
16. *Bartholdi L., Grigorchuk R.I.* On the spectrum of Hecke type operators related to some fractal groups // Тр. МИАН. 2000. Т. 231. С. 5–45.
17. *Bartholdi L., Grigorchuk R.I.* On parabolic subgroups and Hecke algebras of some fractal groups // Serdica Math. J. 2002. V. 28, N 1. P. 47–90.
18. *Bartholdi L., Grigorchuk R., Nekrashevych V.* From fractal groups to fractal sets // Fractals in Graz 2001: Analysis, dynamics, geometry, stochastics. Basel: Birkhäuser, 2003. P. 25–118. (Trends Math.).
19. *Bartholdi L., Grigorchuk R.I., Šunić Z.* Branch groups // Handbook of algebra. Amsterdam: North-Holland, 2003. V. 3. P. 989–1112.
20. *Bartholdi L., Kaimanovich V.A., Nekrashevych V.V.* On amenability of automata groups // Duke Math. J. 2010. V. 154, N 3. P. 575–598; arXiv: 0802.2837 [math.GR].
21. *Bartholdi L., Reznykov I.I., Sushchansky V.I.* The smallest Mealy automaton of intermediate growth // J. Algebra. 2006. V. 295, N 2. P. 387–414.
22. *Bartholdi L., Šunić Z.* Some solvable automaton groups // Topological and asymptotic aspects of group theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. P. 11–29. (Contemp. Math.; V. 394).
23. *Bartholdi L., Virág B.* Amenability via random walks // Duke Math. J. 2005. V. 130, N 1. P. 39–56; arXiv: math/0305262 [math.GR].
24. *Bekka B., de la Harpe P., Valette A.* Kazhdan's property (T). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. (New Math. Monogr.; V. 11).
25. *Bekka M.B., Louvet N.* Some properties of C^*-algebras associated to discrete linear groups // C^*-algebras: Proc. SFB Workshop, Münster (Germany), 1999. Berlin: Springer, 2000. P. 1–22.
26. *Benjamini I., Hoffman C.* ω-Periodic graphs // Electron. J. Comb. 2005. V. 12. Pap. 46.

27. *Benjamini I., Schramm O.* Recurrence of distributional limits of finite planar graphs // Electron. J. Probab. 2001. V. 6. Pap. 23; arXiv: math/0011019 [math.PR].
28. *Bergeron N., Gaboriau D.* Asymptotique des nombres de Betti, invariants l^2 et laminations // Comment. Math. Helv. 2004. V. 79, N 2. P. 362–395.
29. *Bhattacharjee M.* The probability of generating certain profinite groups by two elements // Isr. J. Math. 1994. V. 86, N 1–3. P. 311–329.
30. *Боголюбов М.М.* Про деякі ергодичні властивості суцільних груп перетворень // Наук. зап. Київ. держ. унів. ім. Т.Г. Шевченка. Фіз.-мат. зб. 1939. Т. 4, №5. С. 45–52. Рус. пер.: *Боголюбов Н.Н.* О некоторых эргодических свойствах непрерывных групп преобразований // Избр. тр. Киев: Наук. думка, 1969. Т. 1. С. 561–569.
31. *Bondarenko I.* Groups generated by bounded automata and their Schreier graphs: PhD Dissertation. College Station, TX: Texas A&M Univ., 2007.
32. *Bondarenko I.V.* Finite generation of iterated wreath products // Arch. Math. 2010. V. 95, N 4. P. 301–308.
33. *Bondarenko I.V.* Growth of Schreier graphs of automaton groups: E-print, 2011. arXiv: 1101.3200 [math.GR].
34. *Bondarenko I., D'Angeli D., Nagnibeda T.* Ends of Schreier graphs of self-similar groups: Preprint, 2011. http://www.unige.ch/~tatiana/Publ/EndsSchreier_www.pdf
35. *Bondarenko I., Grigorchuk R., Kravchenko R., Muntyan Y., Nekrashevych V., Savchuk D., Šunić Z.* On classification of groups generated by 3-state automata over a 2-letter alphabet // Algebra and Discrete Math. 2008. N 1. P. 1–163; arXiv: 0803.3555 [math.GR].
36. *Bożejko M., Dykema K., Lehner F.* Isomorphisms of Cayley graphs of surface groups // Algebra and Discrete Math. 2006. N 1. P. 18–37.
37. *Brin M.G., Squier C.C.* Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line // Invent. math. 1985. V. 79, N 3. P. 485–498.
38. *Cannon J.W., Floyd W.J., Parry W.R.* Introductory notes on Richard Thompson's groups // Enseign. Math. Sér. 2. 1996. V. 42, N 3–4. P. 215–256.
39. *Ceccherini-Silberstein T., Coornaert M.* Cellular automata and groups. Berlin: Springer, 2010. (Springer Monogr. Math.).
40. *Ceccherini-Silberstein T., Elek G.* Minimal topological actions do not determine the measurable orbit equivalence class // Groups, Geom., and Dyn. 2008. V. 2, N 2. P. 139–163.
41. *Ceccherini-Silberstein T., Grigorchuk R., de la Harpe P.* Amenability and paradoxical decompositions for pseudogroups and discrete metric spaces // Proc. Steklov Inst. Math. 1999. V. 224. P. 57–97. Рус. пер.: *де ля Арп П., Григорчук Р.И., Чекерини-Сильберстайн Т.* Аменабельность и парадоксальные разбиения для псевдогрупп и дискретных метрических пространств // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 68–111.
42. *Chabauty C.* Limite d'ensembles et géométrie des nombres // Bull. Soc. math. France. 1950. V. 78. P. 143–151.
43. *Champetier C.* L'espace des groupes de type fini // Topology. 2000. V. 39, N 4. P. 657–680.
44. *Champetier C., Guirardel V.* Limit groups as limits of free groups // Isr. J. Math. 2005. V. 146. P. 1–75.
45. *Chou C.* Elementary amenable groups // Ill. J. Math. 1980. V. 24, N 3. P. 396–407.
46. *Connes A.* Noncommutative geometry. San Diego, CA: Acad. Press, 1994.
47. *Connes A., Feldman J., Weiss B.* An amenable equivalence relation is generated by a single transformation // Ergodic Theory and Dyn. Syst. 1981. V. 1, N 4. P. 431–450.
48. *D'Angeli D., Donno A., Matter M., Nagnibeda T.* Schreier graphs of the Basilica group // J. Mod. Dyn. 2010. V. 4, N 1. P. 167–205; arXiv: 0911.2915 [math.GR].
49. *D'Angeli D., Donno A., Nagnibeda T.* Partition functions of the Ising model on some self-similar Schreier graphs: E-print, 2010. arXiv: 1003.0611 [math.GR].
50. *Davidoff G., Sarnak P., Valette A.* Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. (LMS Stud. Texts; V. 55).
51. *Davidson K.R.* C^*-algebras by example. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Fields Inst. Monogr.; V. 6).
52. *Day M.M.* Amenable semigroups // Ill. J. Math. 1957. V. 1. P. 509–544.
53. *Dixmier J.* Les C^*-algèbres et leurs représentations. Paris: J. Gabay, 1996. (Grands Classiq. Gauthier-Villars).
54. *Dixon J.D., du Sautoy M.P.F., Mann A., Segal D.* Analytic pro-p groups. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. (Cambridge Stud. Adv. Math.; V. 61).
55. *Dye H.A.* On groups of measure preserving transformations. I, II // Amer. J. Math. 1959. V. 81. P. 119–159; 1963. V. 85. P. 551–576.
56. *Eilenberg S.* Automata, languages, and machines. New York: Acad. Press, 1974. V. A. (Pure and Appl. Math.; V. 58).
57. *Farber M.* Geometry of growth: approximation theorems for L^2 invariants // Math. Ann. 1998. Bd. 311, N 2. S. 335–375.

58. *Feldman J., Moore C.C.* Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 234, N 2. P. 289–324.
59. *Figà-Talamanca A.* Diffusion on compact ultrametric spaces // Noncompact Lie groups and some of their applications: Proc. NATO Adv. Res. Workshop, San Antonio, TX, 1993. Dordrecht: Kluwer, 1994. P. 157–167. (NATO Adv. Sci. Inst. C: Math. and Phys. Sci.; V. 429).
60. *Følner E.* Note on groups with and without full Banach mean value // Math. scand. 1957. V. 5. P. 5–11.
61. *Furman A.* Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices // Ann. Math. Ser. 2. 1999. V. 150, N 3. P. 1059–1081.
62. *Furman A.* A survey of measured group theory: E-print, 2009. arXiv: 0901.0678 [math.DS].
63. *Gaboriau D.* Coût des relations d'équivalence et des groupes // Invent. math. 2000. V. 139, N 1. P. 41–98.
64. *Gaboriau D.* Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes // Publ. Math. IHES. 2002. V. 95. P. 93–150.
65. *Gefen Y., Aharony A., Mandelbrot B.B.* Phase transitions on fractals. I: Quasi-linear lattices // J. Phys. A. 1983. V. 16, N 6. P. 1267–1278.
66. *Gelander T., Glasner Y.* Countable primitive groups // Geom. and Funct. Anal. 2008. V. 17, N 5. P. 1479–1523.
67. *Glasner E.* Ergodic theory via joinings. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003. (Math. Surv. and Monogr.; V. 101).
68. *Glasner Y., Mozes S.* Automata and square complexes // Geom. Dedicata. 2005. V. 111. P. 43–64.
69. *Greenleaf F.P.* Invariant means on topological groups and their applications. New York: Van Nostrand Reinhold Co., 1969. (Van Nostrand Math. Stud.; N 16).
70. *Григорчук Р.И.* К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, №1. С. 53–54.
71. *Григорчук Р.И.* К проблеме Милнора о групповом росте // ДАН СССР. 1983. Т. 271, №1. С. 30–33.
72. *Григорчук Р.И.* Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, №5. С. 939–985.
73. *Григорчук Р.И.* О степенях роста p-групп и групп без кручения // Мат. сб. 1985. Т. 126, №2. С. 194–214.
74. *Григорчук Р.И.* Связь между алгоритмическими проблемами и энтропийными характеристиками групп // ДАН СССР. 1985. Т. 284, №1. С. 24–29.
75. *Григорчук Р.И.* О полугруппах с сокращениями степенного роста // Мат. заметки. 1988. Т. 43, №3. С. 305–319.
76. *Григорчук Р.И.* О ряде Гильберта–Пуанкаре градуированных алгебр, ассоциированных с группами // Мат. сб. 1989. Т. 180, №2. С. 207–225.
77. *Григорчук Р.И.* Пример конечно определенной аменабельной группы, не принадлежащей классу EG // Мат. сб. 1998. Т. 189, №1. С. 79–100.
78. *Grigorchuk R.I.* On the system of defining relations and the Schur multiplier of periodic groups generated by finite automata // Groups St. Andrews 1997 in Bath. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. V. 1. P. 290–317. (LMS Lect. Note Ser.; V. 260).
79. *Григорчук Р.И.* Ветвящиеся группы // Мат. заметки. 2000. Т. 67, №6. С. 852–858.
80. *Grigorchuk R.I.* Just infinite branch groups // New horizons in pro-p groups. Boston, MA: Birkhäuser, 2000. P. 121–179. (Prog. Math.; V. 184).
81. *Grigorchuk R.* Solved and unsolved problems around one group // Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects. Basel: Birkhäuser, 2005. P. 117–218. (Prog. Math.; V. 248).
82. *Grigorchuk R.I., Herfort W.N., Zalesskii P.A.* The profinite completion of certain torsion p-groups // Algebra: Proc. Intern. Conf., Moscow, 1998. Berlin: W. de Gruyter, 2000. P. 113–123.
83. *Grigorchuk R., Kaimanovich V.A., Nagnibeda T.* Ergodic properties of boundary actions and Nielsen–Schreier theory: E-print, 2009. arXiv: 0901.4734 [math.GR].
84. *Grigorchuk R.I., Linnell P., Schick T., Żuk A.* On a question of Atiyah // C. r. Acad. sci. Paris. Sér. 1: Math. 2000. V. 331, N 9. P. 663–668.
85. *Grigorchuk R., Medynets K.* On simple finitely generated amenable groups: E-print, 2011. arXiv: 1105.0719 [math.GR].
86. *Grigorhuk R., Nekrashevych V.* Self-similar groups, operator algebras and Schur complement // J. Mod. Dyn. 2007. V. 1, N 3. P. 323–370.
87. *Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Сущанский В.И.* Автоматы, динамические системы и группы // Тр. МИАН. 2000. Т. 231. С. 134–214.
88. *Grigorchuk R., Nekrashevych V., Šunić Z.* Hanoi Towers groups // Oberwolfach Rep. 2006. V. 3, N 2. P. 1179–1182. (Rep. 19: Topological and geometric methods in group theory).
89. *Grigorchuk R.I., Nekrashevych V., Šunić Z.* Hanoi Towers group on 3 pegs and its pro-finite closure // Oberwolfach Rep. 2006. V. 3, N 2. P. 1477–1479. (Rep. 25: Pro-p extensions of global fields and pro-p groups).

90. *Grigorchuk R., Pak I.* Groups of intermediate growth: an introduction // Enseign. Math. Sér. 2. 2008. V. 54, N 3–4. P. 251–272.
91. *Grigorchuk R., Šuniḱ Z.* Asymptotic aspects of Schreier graphs and Hanoi Towers groups // C. r. Math. Acad. sci. Paris. 2006. V. 342, N 8. P. 545–550.
92. *Grigorchuk R., Šunić Z.* Self-similarity and branching in group theory // Groups St. Andrews 2005. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. V. 1. P. 36–95. (LMS Lect. Note Ser.; V. 339).
93. *Grigorchuk R., Šunić Z.* Schreier spectrum of the Hanoi Towers group on three pegs // Analysis on graphs and its applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. P. 183–198. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 77).
94. *Grigorchuk R.I., Żuk A.* On the asymptotic spectrum of random walks on infinite families of graphs // Random walks and discrete potential theory: Proc. Conf., Cortona, 1997. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. P. 188–204. (Symp. Math.; V. 39).
95. *Grigorchuk R.I., Żuk A.* The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton, and its spectrum // Geom. Dedicata. 2001. V. 87, N 1–3. P. 209–244.
96. *Grigorchuk R.I., Żuk A.* On a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton // Intern. J. Algebra and Comput. 2002. V. 12, N 1–2. P. 223–246.
97. *Grigorchuk R.I., Żuk A.* Spectral properties of a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton // Computational and statistical group theory: Proc. AMS Spec. Session, Las Vegas, NV/Hoboken, NJ, 2001. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. P. 57–82. (Contemp. Math.; V. 298).
98. *Grigorchuk R.I., Żuk A.* The Ihara zeta function of infinite graphs, the KNS spectral measure and integrable maps // Random walks and geometry. Berlin: W. de Gruyter, 2004. P. 141–180.
99. *Gupta N., Sidki S.* On the Burnside problem for periodic groups // Math. Ztschr. 1983. Bd. 182, N 3. S. 385–388.
100. *de la Harpe P.* Topics in geometric group theory. Chicago: Univ. Chicago Press, 2000. (Chicago Lect. Math.).
101. *Higman G.* Finitely presented infinite simple groups. Canberra: Dept. Pure Math., Dept. Math., I.A.S., Australian National Univ., 1974. (Notes Pure Math.; N 8).
102. *Hinz A.M.* The tower of Hanoi // Enseign. Math. Sér. 2. 1989. V. 35, N 3–4. P. 289–321.
103. *Hjorth G.* A converse to Dye's theorem // Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357, N 8. P. 3083–3103.
104. *Hopcroft J.E., Ullman J.D.* Introduction to automata theory, languages, and computation. Reading, MA: Addison–Wesley, 1979. (Addison–Wesley Ser. Comput. Sci.).
105. *Jackson S., Kechris A.S., Louveau A.* Countable Borel equivalence relations // J. Math. Log. 2002. V. 2, N 1. P. 1–80.
106. *Kaimanovich V.A.* Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities // C. r. Acad. sci. Paris. Sér. 1: Math. 1997. V. 325, N 9. P. 999–1004.
107. *Kaimanovich V.A.* Hausdorff dimension of the harmonic measure on trees // Ergodic Theory and Dyn. Syst. 1998. V. 18. P. 631–660.
108. *Kaimanovich V.A.* Random walks on Sierpinski graphs: Hyperbolicity and stochastic homogenization // Fractals in Graz 2001: Analysis, dynamics, geometry, stochastics. Basel: Birkhäuser, 2003. P. 145–183. (Trends Math.).
109. *Kaimanovich V.A.* "Münchhausen trick" and amenability of self-similar groups // Intern. J. Algebra and Comput. 2005. V. 15, N 5–6. P. 907–937.
110. *Kaimanovich V.A., Sobieczky F.* Stochastic homogenization of horospheric tree products // Probabilistic approach to geometry. Tokyo: Math. Soc. Japan, 2010. P. 199–229. (Adv. Stud. Pure Math.; V. 57).
111. *Kaimanovich V.A., Vershik A.M.* Random walks on discrete groups: Boundary and entropy // Ann. Probab. 1983. V. 11, N 3. P. 457–490.
112. *Kambites M., Silva P.V., Steinberg B.* The spectra of lamplighter groups and Cayley machines // Geom. Dedicata. 2006. V. 120. P. 193–227.
113. *Kechris A.S., Miller B.D.* Topics in orbit equivalence. Berlin: Springer, 2004. (Lect. Notes Math.; V. 1852).
114. *Kechris A.S., Tsankov T.* Amenable actions and almost invariant sets // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. V. 136, N 2. P. 687–697.
115. *Kesten H.* Full Banach mean values on countable groups // Math. scand. 1959. V. 7. P. 146–156.
116. *Kesten H.* Symmetric random walks on groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 92. P. 336–354.
117. *Kigami J.* Analysis on fractals. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. (Cambridge Tracts Math.; V. 143).
118. *Kuchment P.* Quantum graphs: an introduction and a brief survey // Analysis on graphs and its applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. P. 291–312. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 77).
119. *Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С.* Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
120. *Kuratowski K.* Topology. New York: Acad. Press, 1966. V. 1.
121. *Lackenby M.* Expanders, rank and graphs of groups // Isr. J. Math. 2005. V. 146. P. 357–370.

122. *Lackenby M.* Heegaard splittings, the virtually Haken conjecture and property (τ) // Invent. math. 2006. V. 164, N 2. P. 317–359.
123. *Леонов Ю.Г.* Проблема сопряженности в одном классе 2-групп // Мат. заметки. 1998. Т. 64, №4. С. 573–583.
124. *Levitt G.* On the cost of generating an equivalence relation // Ergodic Theory and Dyn. Syst. 1995. V. 15, N 6. P. 1173–1181.
125. *Lubotzky A.* Discrete groups, expanding graphs and invariant measures / With an appendix by J.D. Rogawski. Basel: Birkhäuser, 1994. (Prog. Math.; V. 125).
126. *Lubotzky A.* Cayley graphs: eigenvalues, expanders and random walks // Surveys in combinatorics, 1995: Proc. Conf., Stirling (UK), 1995. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. P. 155–189. (LMS Lect. Note Ser.; V. 218).
127. *Lubotzky A., Phillips R., Sarnak P.* Ramanujan graphs // Combinatorica. 1988. V. 8, N 3. P. 261–277.
128. *Lyndon R.C., Schupp P.E.* Combinatorial group theory. Berlin: Springer, 1977. (Ergebn. Math. und ihrer Grenzgeb.; Bd. 89).
129. *Лысёнок И.Г.* Система определяющих соотношений для группы Григорчука // Мат. заметки. 1985. Т. 38, №4. С. 503–516.
130. *Lysenok I., Myasnikov A., Ushakov A.* The conjugacy problem in the Grigorchuk group is polynomial time decidable // Groups, Geom., and Dyn. 2010. V. 4, N 4. P. 813–833.
131. *Mackey G.W.* Ergodic transformation groups with a pure point spectrum // Ill. J. Math. 1964. V. 8. P. 593–600.
132. *Mackey G.W.* The theory of unitary group representations. Chicago: Univ. Chicago Press, 1976. (Chicago Lect. Math.).
133. *Маргулис Г.А.* Явные конструкции расширителей // Пробл. передачи информ. 1973. Т. 9, №4. С. 71–80.
134. *Massey W.S.* Algebraic topology: An introduction. New York: Springer, 1977. (Grad. Texts Math.; V. 56).
135. *Matter M., Nagnibeda T.* Abelian sandpile model on randomly rooted graphs and self-similar groups: E-print, 2011. arXiv: 1105.4036 [math.PR].
136. *McKay B.D.* The expected eigenvalue distribution of a large regular graph // Linear Algebra and Appl. 1981. V. 40. P. 203–216.
137. *Meier J.* Groups, graphs and trees: An introduction to the geometry of infinite groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. (LMS Stud. Texts; V. 73).
138. *Михайлова К.А.* Проблема вхождения для прямых произведений групп // ДАН СССР. 1958. Т. 119, №6. С. 1103–1105.
139. *Muntyan Y.* Automata groups: PhD Dissertation. College Station, TX: Texas A&M Univ., 2009.
140. *Nagnibeda T.* Random walks, spectral radii, and Ramanujan graphs // Random walks and geometry. Berlin: W. de Gruyter, 2004. P. 487–500.
141. *Nekrashevych V.V.* Cuntz–Pimsner algebras of group actions // J. Oper. Theory. 2004. V. 52, N 2. P. 223–249.
142. *Nekrashevych V.* Self-similar groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. (Math. Surv. and Monogr.; V. 117).
143. *Nekrashevych V.V.* Free subgroups in groups acting on rooted trees // Groups, Geom., and Dyn. 2010. V. 4, N 4. P. 847–862; arXiv: 0802.2554 [math.GR].
144. *Nekrashevych V.* Combinatorial models of expanding dynamical systems: E-print, 2008. arXiv: 0810.4936 [math.DS].
145. *Nekrashevych V.V., Pete G.* Scale-invariant groups // Groups, Geom., and Dyn. 2011. V. 5, N 1. P. 139–167; arXiv: 0811.0220 [math.GR].
146. *Nekrashevych V., Teplyaev A.* Groups and analysis on fractals // Analysis on graphs and its applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. P. 143–180. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 77).
147. *von Neumann J.* Zur allgemeinen Theorie des Masses // Fund. math. 1929. V. 13. P. 73–116.
148. *Ольшанский А.Ю.* Бесконечная простая нётерова группа без кручения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43, №6. С. 1328–1393.
149. *Ольшанский А.Ю.* К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе // УМН. 1980. Т. 35, №4. С. 199–200.
150. *Ornstein D.S., Weiss B.* Ergodic theory of amenable group actions. I: The Rohlin lemma // Bull. Amer. Math. Soc. 1980. V. 2, N 1. P. 161–164.
151. *Osin D.* Rank gradient and torsion groups // Bull. London Math. Soc. 2011. V. 43. P. 10–16; arXiv: 0905.1322 [math.GR].
152. *Первова Е.Л.* Всюду плотные подгруппы одной группы автоморфизмов дерева // Тр. МИАН. 2000. Т. 231. С. 356–367.
153. *Первова Е.Л.* Конгруэнц-свойство AT-групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, №5. С. 553–567.
154. *Pervova E.* Profinite completions of some groups acting on trees // J. Algebra. 2007. V. 310, N 2. P. 858–879.
155. *Previte J.P.* Graph substitutions // Ergodic Theory and Dyn. Syst. 1998. V. 18, N 3. P. 661–685.

156. *Previte M., Yang S.* A novel way to generate fractals // Amer. Math. Mon. 2008. V. 115, N 1. P. 13–32.
157. *Quint J.-F.* Harmonic analysis on the Pascal graph // J. Funct. Anal. 2009. V. 256, N 10. P. 3409–3460.
158. *Raghunathan M.S.* Discrete subgroups of Lie groups. Berlin: Springer, 1972. (Ergebn. Math. und ihrer Grenzgeb.; Bd. 68).
159. *Рохлин В.А.* Об основных понятиях теории меры // Мат. сб. 1949. Т. 25, №1. С. 107–150. Engl. transl.: *Rohlin V.A.* On the fundamental ideas of measure theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1952. (AMS Transl.; N 71).
160. *Рожков А.В.* Централизаторы элементов в одной группе автоморфизмов деревьев // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, №6. С. 82–105.
161. *Рожков А.В.* Проблема сопряженности в одной группе автоморфизмов бесконечного дерева // Мат. заметки. 1998. Т. 64, №4. С. 592–597.
162. *Rubin M.* On the reconstruction of topological spaces from their groups of homeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 312, N 2. P. 487–538.
163. *Savchuk D.M.* On word problem in contracting automorphism groups of rooted trees // Вісн. Київ. унів. Сер.: Фіз.-мат. науки. 2003. №1. С. 51–56.
164. *Savchuk D.* Asymptotic, algorithmic and geometric aspects of groups generated by automata: PhD Dissertation. College Station, TX: Texas A&M Univ., 2009.
165. *Savchuk D.* Some graphs related to Thompson's group F // Combinatorial and geometric group theory. Basel: Birkhäuser, 2010. P. 279–296. (Trends Math.).
166. *Savchuk D.* Schreier graphs of actions of Thompson's group F on the unit interval and on the Cantor set: E-print, 2011. arXiv: 1105.4017 [math.GR].
167. *Serre J.-P.* Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p // J. Amer. Math. Soc. 1997. V. 10, N 1. P. 75–102.
168. *Serre J.-P.* Trees. Berlin: Springer, 2003. (Springer Monogr. Math.).
169. *Shalev A.* Subgroup structure, fractal dimension, and Kac–Moody algebras // Groups and geometries: Proc. Conf., Siena, 1996. Basel: Birkhäuser, 1998. P. 163–176. (Trends Math.).
170. *Shalom Y.* Rigidity of commensurators and irreducible lattices // Invent. math. 2000. V. 141, N 1. P. 1–54.
171. *Shavgulidze E.T.* The Thompson group F is amenable // Infin. Dimens. Anal., Quantum Probab. and Relat. Top. 2009. V. 12, N 2. P. 173–191.
172. *Sidki S.* Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure, and acyclicity // J. Math. Sci. 2000. V. 100, N 1. P. 1925–1943.
173. *Slaman T.A., Steel J.R.* Definable functions on degrees // Cabal Seminar 81–85. Berlin: Springer, 1988. P. 37–55. (Lect. Notes Math.; V. 1333).
174. *Strichartz R.S.* Analysis on fractals // Notices Amer. Math. Soc. 1999. V. 46, N 10. P. 1199–1208.
175. *Šunić Z.* Hausdorff dimension in a family of self-similar groups // Geom. Dedicata. 2007. V. 124. P. 213–236.
176. *Šunić Z.* Pattern closure of groups of tree automorphisms: E-print, 2010. arXiv: 1012.1688 [math.GR].
177. *Šunić Z., Ventura E.* The conjugacy problem is not solvable in automaton groups: E-print, 2010. arXiv: 1010.1993 [math.GR].
178. *Szegedy M.* In how many steps the k peg version of the Towers of Hanoi game can be solved? // STACS 99: Proc. Symp., Trier (Germany), 1999. Berlin: Springer, 1999. P. 356–361. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 1563).
179. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. Berlin: Springer, 2002. (Encycl. Math. Sci.; V. 124: Operator Algebras and Non-commutative Geometry. V).
180. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. II. Berlin: Springer, 2003. (Encycl. Math. Sci.; V. 125: Operator Algebras and Non-commutative Geometry. VI).
181. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. III. Berlin: Springer, 2003. (Encycl. Math. Sci.; V. 127: Operator Algebras and Non-commutative Geometry. VIII).
182. *Teplyaev A.* Harmonic coordinates on fractals with finitely ramified cell structure // Can. J. Math. 2008. V. 60, N 2. P. 457–480.
183. Topics in representation theory / Ed. by A.A. Kirillov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. (Adv. Sov. Math.; V. 2).
184. *Vershik A.M.* Nonfree actions of countable groups and their characters: E-print, 2010. arXiv: 1012.4604 [math.DS].
185. *Вершик А.М., Керов С.В.* Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы // ДАН СССР. 1981. Т. 257, №5. С. 1037–1040.
186. *Vorobets M., Vorobets Ya.* On a free group of transformations defined by an automaton // Geom. Dedicata. 2007. V. 124. P. 237–249.

187. *Vorobets M., Vorobets Ya.* On a series of finite automata defining free transformation groups // Groups, Geom., and Dyn. 2010. V. 4, N 2. P. 377–405.
188. *Vorobets Ya.* Notes on the Schreier graphs of the Grigorchuk group: Preprint, 2011. http://www.math.tamu.edu/~yvorobet/Research/Schreier.pdf
189. *Wagon S.* The Banach–Tarski paradox. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
190. *Weiss B.* Measurable dynamics // Conference in modern analysis and probability, New Haven, CT, 1982. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1984. P. 395–421. (Contemp. Math.; V. 26).
191. *Wilson J.S.* Groups with every proper quotient finite // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1971. V. 69. P. 373–391.
192. *Wilson J.S.* Profinite groups. Oxford: Clarendon Press, 1998. (LMS Monogr. New Ser.; V. 19).
193. *Wilson J.S.* On just infinite abstract and profinite groups // New horizons in pro-p groups. Boston, MA: Birkhäuser, 2000. P. 181–203. (Prog. Math.; V. 184).
194. *Wormald N.C.* Models of random regular graphs // Surveys in combinatorics, 1999: Proc. Conf., Canterbury, 1999. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. P. 239–298. (LMS Lect. Note Ser.; V. 267).
195. *Yu G.* The coarse Baum–Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space // Invent. math. 2000. V. 139, N 1. P. 201–240.
196. *Zalesskiĭ A.E.* Group rings of simple locally finite groups // Finite and locally finite groups: Proc. NATO Adv. Sci. Inst., Istanbul, 1994. Dordrecht: Kluwer, 1995. P. 219–246. (NATO Adv. Sci. Inst. C: Math. and Phys. Sci.; V. 471).
197. *Zimmer R.J.* Ergodic theory and semisimple groups. Basel: Birkhäuser, 1984. (Monogr. Math.; V. 81).