Задача 1

$$p(x|y=-1) = Cauchy(0,1) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$p(x|y=1) = Exp(2) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Функция потерь: $L(a(x), y) = \lambda_y [a(x) \neq y]$,

где $\lambda_{y=1} = 2$, $\lambda_{y=-1} = 1$

$$P(y=-1) = 0{,}4 \Rightarrow P(y=1) = 0{,}6$$

Найдем оптимальный байесовский классификатор.

$a(x) = \arg\max_y \lambda_y \, p(y|x)$ – ?

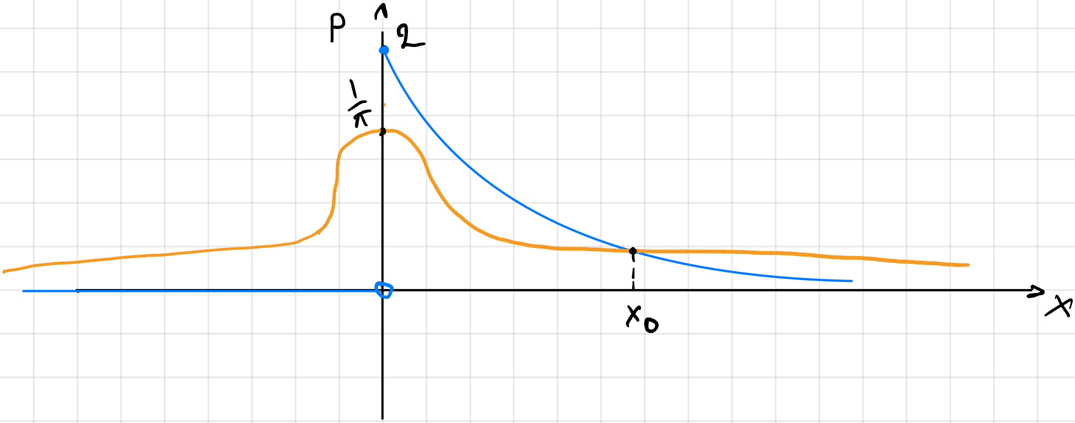
$$p(y|x) = \frac{P(y)\,p(x|y)}{P(x)}$$ – по ф. Байеса $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a(x) = \arg\max_y \lambda_y \frac{P(y)\,p(x|y)}{p(x)} =$$

$$= \arg\max_y \lambda_y P(y)\,p(x|y) =$$

$$= \arg\max_y \begin{Bmatrix} \lambda_{y=1} \cdot P(y=1)\, p(x \mid y=1) \\ \lambda_{y=-1} \cdot P(y=-1)\, p(x \mid y=-1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \arg\max_y \begin{Bmatrix} 2 \cdot 0{,}6 \cdot \mathrm{Exp}(2) \\ 1 \cdot 0{,}4 \cdot \mathrm{Cauchy}(0,1) \end{Bmatrix}$$



По графику видно, что:

$p(x \mid y=1) > p(x \mid y=-1)$ при $x \in [0, x_0]$

$p(x \mid y=-1) > p(x \mid y=1)$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (x_0; +\infty)$

Найдем x_0: $\quad 2 \cdot 0{,}6 \cdot 2 e^{-2x} = 0{,}4 \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$

$x_0 \approx 2{,}436.$

Ответ:

$$a(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 2{,}436] \\ -1, & x \in (-\infty; 0) \cup (2{,}436; +\infty) \end{cases}$$

Задача 2.

Найти R – средний риск.

Решение:

$$R(a) = \iint\limits_{X\,Y} \lambda_y L(a(x), y)\, p(x,y)\, dx\,dy =$$

$$= \int\limits_X \sum_y \lambda_y [a(x) \neq y]\, p(x|y)\, P(y)\, dx =$$

$$= \int\limits_X \sum_y \lambda_y (1 - [a(x)=y])\, p(x|y)\, P(y)\, dx =$$

$$= \int\limits_X \sum_y \lambda_y \underbrace{p(x|y) P(y)}_{p(x,y)}\, dx - \int\limits_X \sum_y \lambda_y [a(x)=y]\, p(x|y) P(y)\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$= \sum_y \lambda_y - \sum_y \int\limits_X \lambda_y [a(x)=y]\, p(x|y)\, P(y)\, dx =$$

мат. ожидание от константы

$$= 3 - \int\limits_X 2\, [a(x)=1]\, p(x|y=1)\, P(y=1)\, dx -$$

$$- \int\limits_X [a(x)=-1]\, p(x|y=-1)\, P(y=-1)\, dx =$$

$$= 3 - \int_0^{x_0} 2 \cdot \mathrm{Exp}(2) \cdot 0{,}6\, dx - \int\limits_{x \in (-\infty; 0) \cup (x_0; +\infty)} \mathrm{Cauchy}(0,1) \cdot 0{,}4\, dx =$$

$$= 3 - 2{,}4 \int_0^{x_0} e^{-2x}\,dx - \frac{0{,}4}{\pi} \int_x \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 3 + \frac{2{,}4}{2} \Big|_0^{x_0} e^{-2x} - \frac{0{,}4}{\pi} \Big|_x \operatorname{arctg} x =$$

$$= 3 + 1{,}2\,(e^{-2x_0} - 1) - \frac{0{,}4}{\pi} \Big(\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(-\infty) +$$

$$+ \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}(x_0) \Big) =$$

$$= 3 + 1{,}2\,(e^{-2x_0} - 1) - \frac{0{,}4}{\pi} \left(0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x_0) \right) =$$

$$3 + 1{,}2\,(e^{-2x_0} - 1) - \frac{0{,}4}{\pi} \left(\pi - \operatorname{arctg}(x_0) \right)$$

Ответ:

$$R = 3 + 1{,}2\,(e^{-2x_0} - 1) - \frac{0{,}4}{\pi} \left(\pi - \operatorname{arctg}(x_0) \right)$$

при $x_0 \approx 2{,}436$