**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

**Отчет по лабораторной работе №2**

Авторы: Зюзько Роман, Иванов Дмитрий, Пак Руслан

Факультет: ФИТиП

Группы: M32341, М32351



Санкт-Петербург 2021

**Цель лабораторной работы**

1. Реализовать методы многомерной оптимизации:

* метод градиентного спуска
* метод наискорейшего спуска
* метод сопряжённых градиентов

1. Оценить изменение скорости сходимости метода наискорейшего спуска в зависимости от выбранного метода одномерной оптимизации
2. Проанализировать траектории методов для 2-3 различных квадратичных функций
3. Исследовать зависимость числа итераций, необходимых методам для сходимости в зависимости от числа обусловленности и размерности пространства
4. Реализовать программу отрисовки графиков с линиями уровня и траекториями методов

**Вычислительные схемы методов**

**Метод градиентного спуска** — метод нахождения локального минимума или максимума функции с помощью движения вдоль градиента

Шаг 1)

Шаг 2) Вычислить

Шаг 3) Найти

Шаг 4) , (Шаг 3)

В **методе наискорейшего спуска** в качестве направления поиска выбирается вектор, направление которого противоположно направлению вектора градиента функции

Шаг 1)

Шаг 2) Вычислить

Шаг 3) Решить задачу одномерной оптимизации для т.е. найти

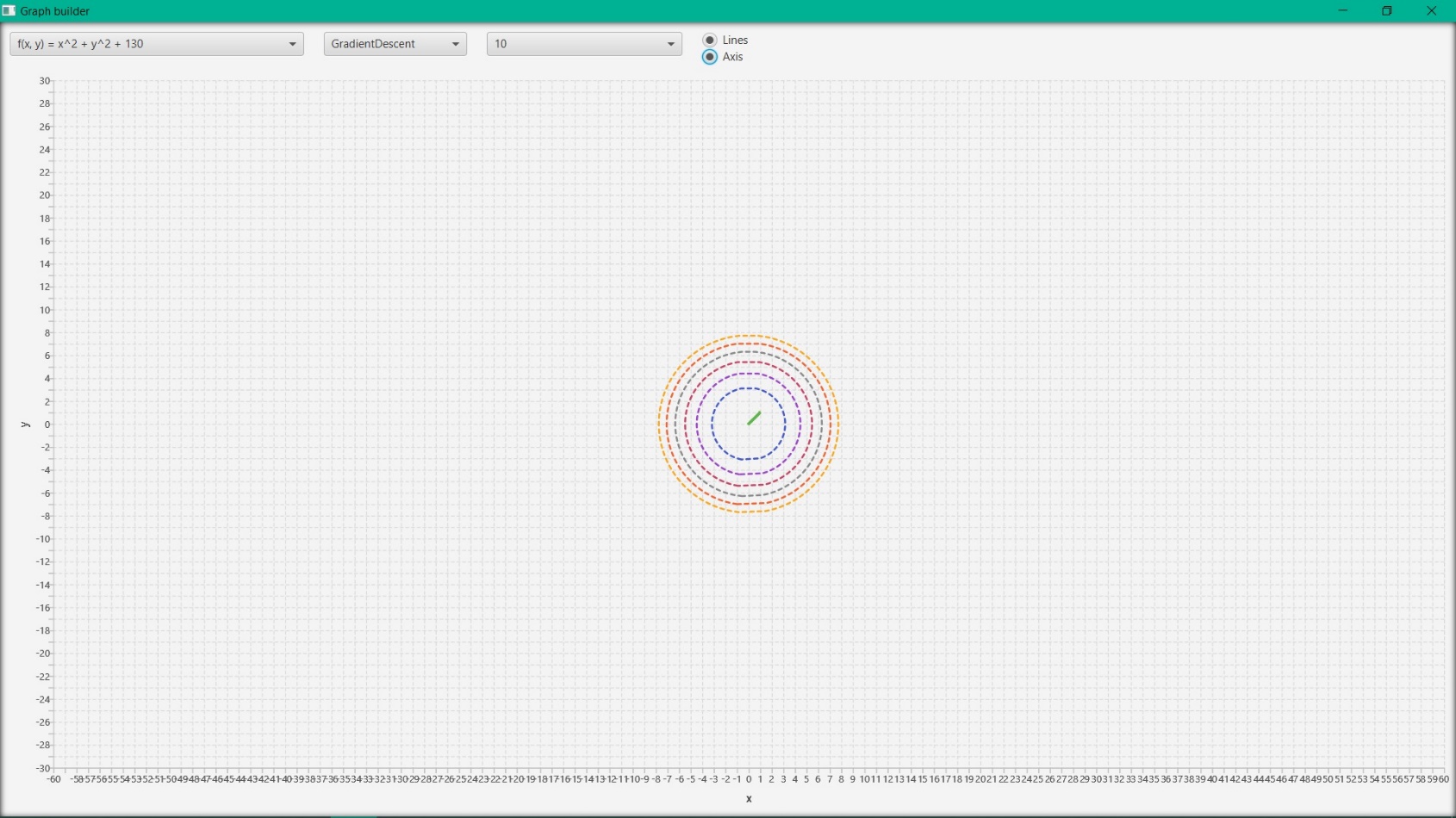
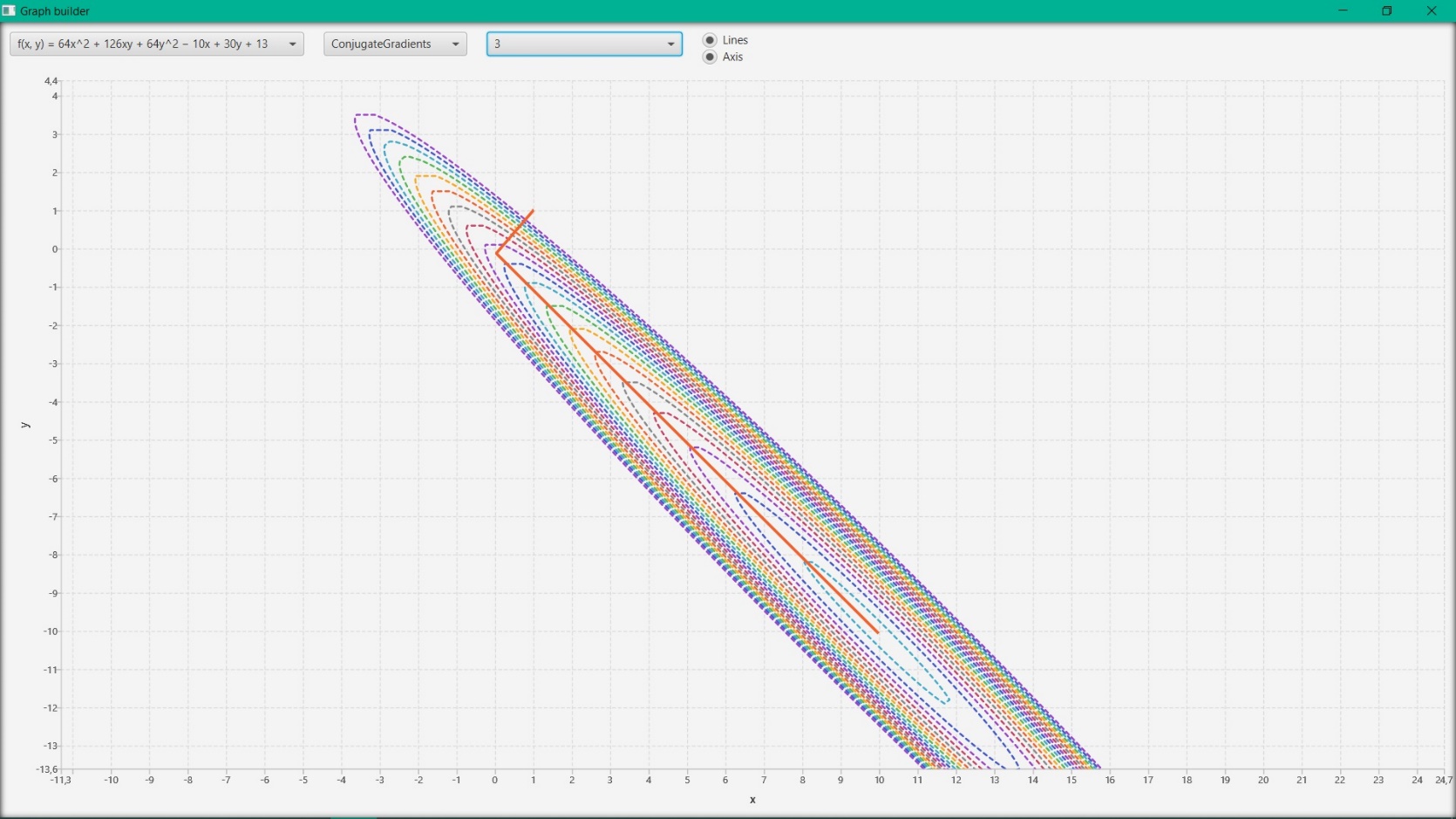
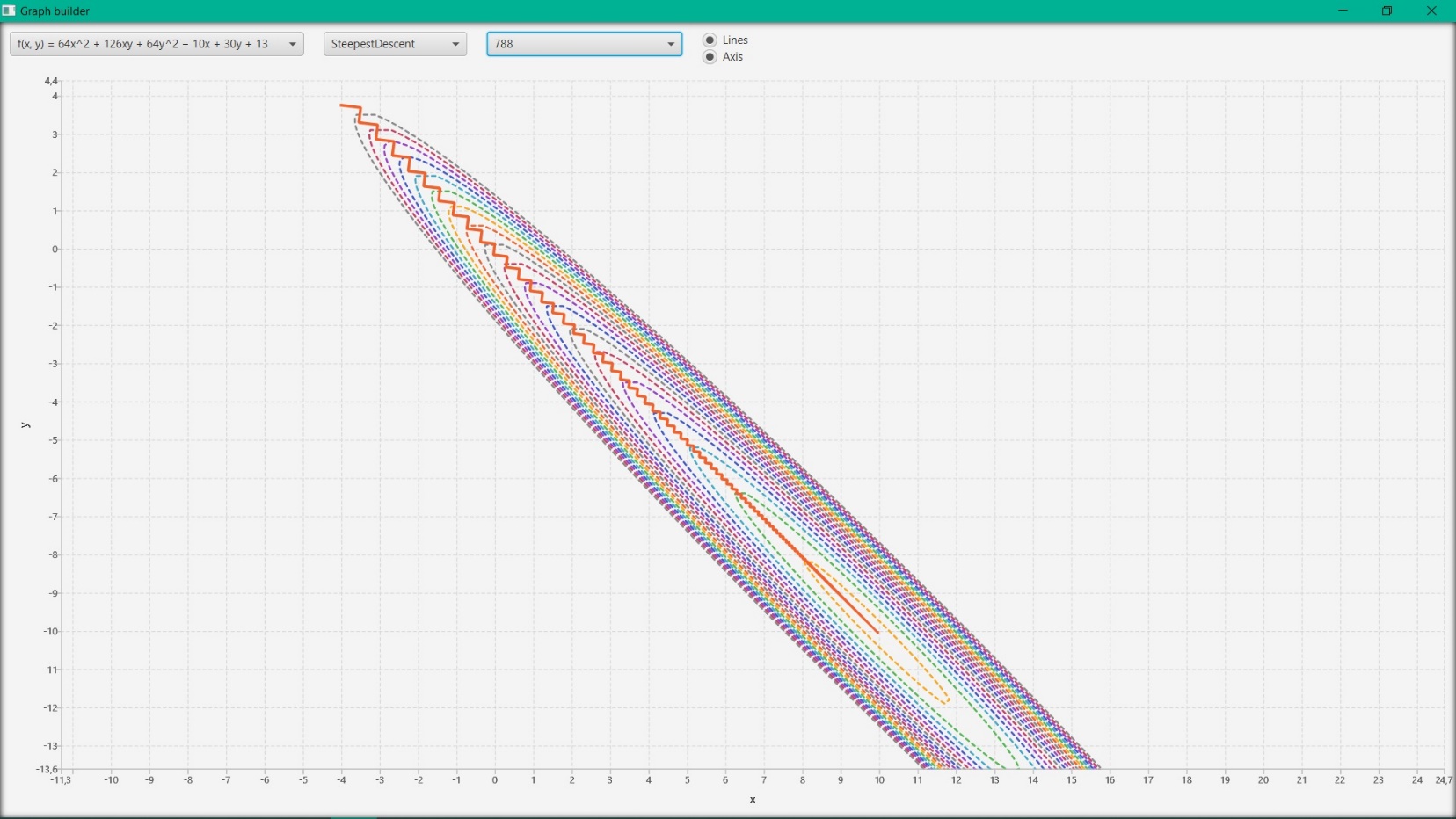
Положить

**Метод сопряжённых градиентов** — метод нахождения локального экстремума функции на основе информации о её значениях и её градиенте. В случае квадратичной функции минимум находится не более чем за шагов.

Для квадратичных функций:

**Результаты работы методов на квадратичных функциях**

Выбранные функции и их линии уровня

1. , x0=(1.0,1.0), ℰ = 0.0001
2. , x0 = (1.0,1.0), ℰ = 0.0001
3. , x0 = (-4.0, 3.75), ℰ = 0.0001 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Исследование | Число итераций метода градиентного спуска | Число итераций метода наискорейшего спуска | Число итераций метода сопряженных градиентов |
| 1 | 9 | 1 | 1 |
| 2 | 836 | 31 | 2 |
| 3 | 702 | 787 | 1 |

В первом исследовании использовалась функция, для которой число обусловленности равно 1 и линии уровня являются окружностями, поэтому все 3 метода завершили свою работу за несколько шагов.

Во втором исследовании была выбрана функция с большим числом обусловленности. Линии уровня для данной функции являются эллипсами. Из-за этого число итераций необходимых методам градиентного спуска и наискорейшего спуска серьезно выросло по сравнению с прошлым исследованием. При этом метод сопряженных градиентов нашел результат за 2 шага, что является ожидаемым для пространства размерности 2.

В 3-ем исследование бралась также функция, что и в предыдущем, но поменялось начальное приближение. Такой выбор начального приближения привел к тому, что метод наискорейшего спуска серьезно замедлился, так как изменилась траектория спуска. При этом метод сопряженных градиентов отработал за 1 шаг, что также является ожидаемым для данного пространства.

**Количество итераций метода наискорейшего спуска в зависимости от используемого метода одномерной оптимизации**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | f­1 | f2 | f3 |
| Метод дихотомии | 2 | 49 | 638 |
| Метод золотого сечения | 1 | 19 | 732 |
| Метод Фибоначчи | 1 | 17 | 772 |
| Метод парабол | 1 | 31 | 789 |
| Метод Брента | 1 | 31 | 787 |

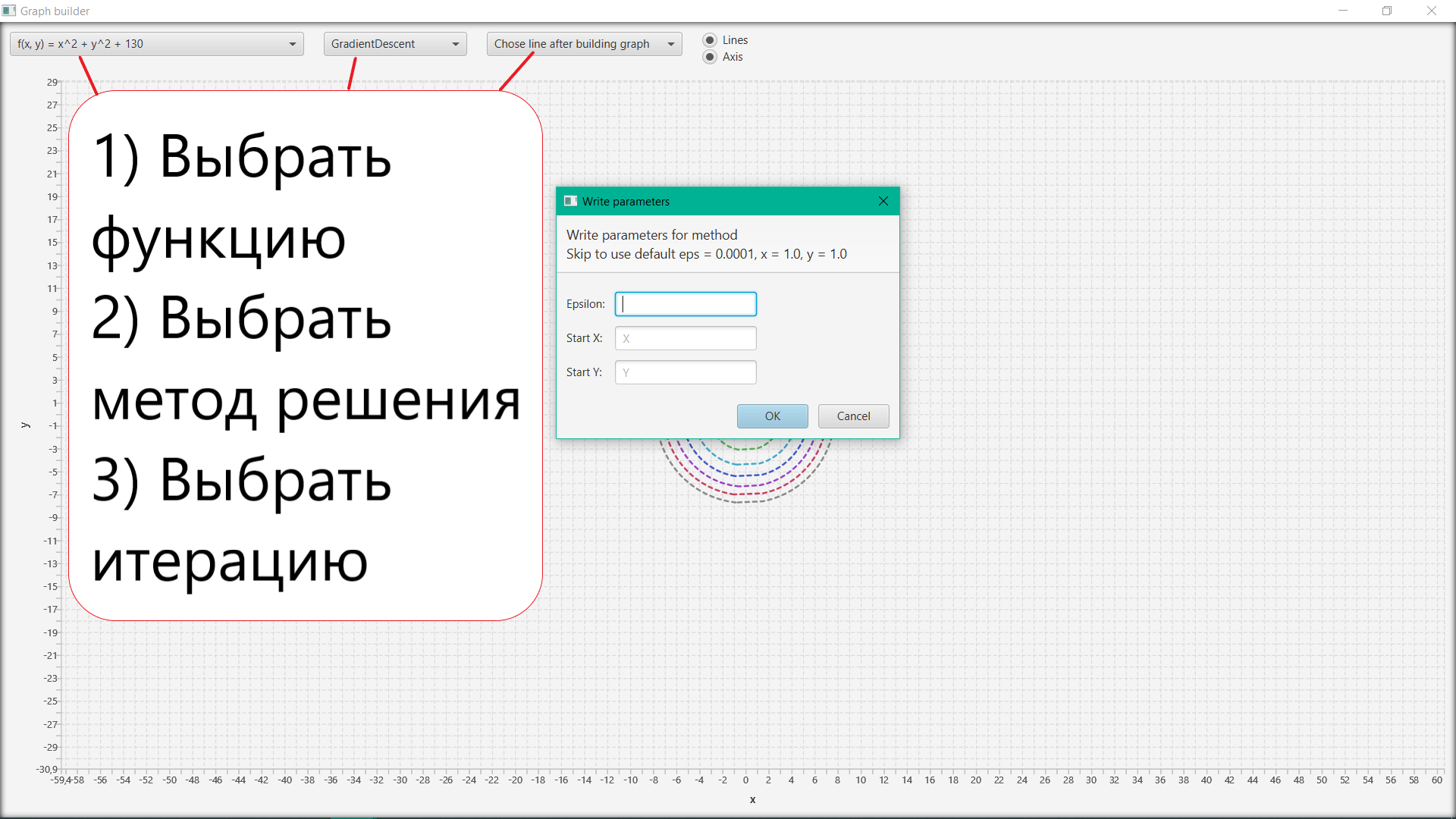
По результатам данного исследования можно сделать вывод, что выбор метода одномерного поиска не сильно влияет на скорость сходимости метода. Это также следует из того, что одномерный метод влияет только на поиск величины шага, а так как все методы находят приблизительно одинаковое значение, то и метод наискорейшего спуска будет сходиться за близкое количество итераций.

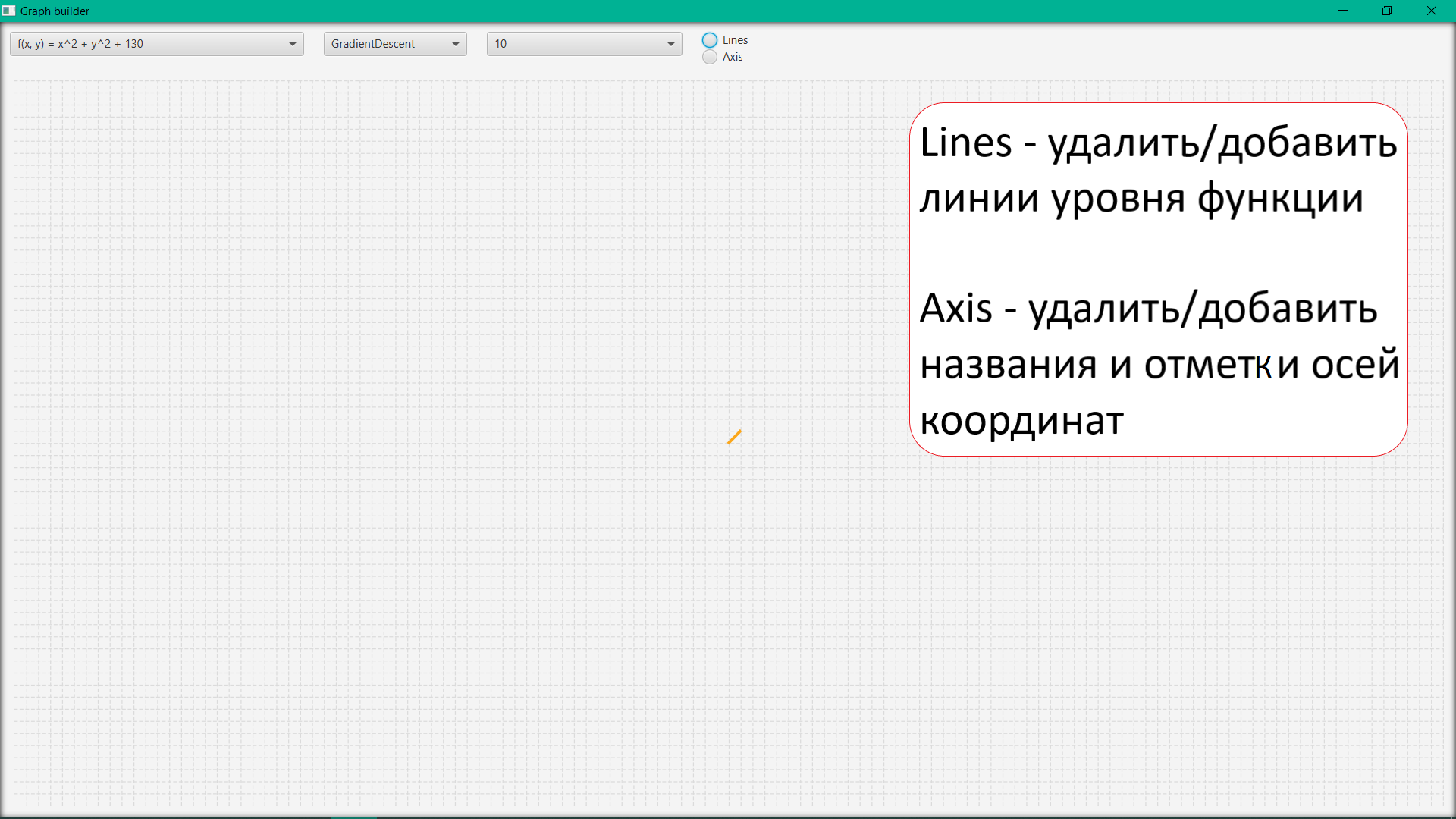
**Результаты исследования зависимости числа итераций от размерности пространства и числа обусловленности**

Во всех исследованиях данного раздела все координаты начального приближения были равны 1.

По результатам данного исследования можно сделать вывод, что метод сопряженных градиентов зависит от числа обусловленности и размерности пространства, метод градиентного спуска имеет небольшую зависимость от размерности, а метод наискорейшего спуска зависит только от числа обусловленности. При этом для метода сопряженных градиентов зависимость от числа обусловленности сильно ниже, чем у других методов.

**Основные инструменты для работы с интерфейсом**



****

[**Ссылка на GitHub проекта**](https://github.com/RuslanPark/ITMO-optimization-methods-course/tree/main/lab2)