**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

**Отчет по лабораторной работе №3**

Авторы: Зюзько Роман, Пак Руслан, Иванов Дмитрий

Факультет: ФИТиП

Группы: M32341, М32351

Преподаватель:



Санкт-Петербург 2021

**Цель лабораторной работы**

1. Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения для матриц, хранящихся в профильном формате
2. Оценить влияние увеличения числа обусловленности на точность решения СЛАУ
3. Оценить влияние размерности для матриц Гильберта на точность решения СЛАУ
4. Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента. Сравнить точность решения СЛАУ для плотных матриц методом Гаусса и LU-разложения
5. Реализовать метод сопряженных градиентов для решения СЛАУ, матрица которых хранится в разреженном строчно-столбцовом формате

**1. LU-разложение**

Исследуемые матрицы для данного метода решения СЛАУ хранились в профильном формате. Также для данного задания предполагается, что все матрицы имеют симметричный профиль, т.е. i-ая строка и i-ый столбец имеют равное количество нулевых элементов до первого ненулевого.

Профильный формат матрицы состоит из 4 массивов:

1. di – массив, хранящий элементы главной диагонали
2. al – массив, хранящий элементы нижнего треугольника матрицы построчно. Из каждой строки записаны все элементы с первого ненулевого элемента до элемента, стоящего левее элемента главной диагонали
3. au – массив, хранящий элементы верхнего треугольника матрицы по столбцам. Из каждого столбца записаны все элементы с первого ненулевого элемента до элемента, стоящего выше элемента главной диагонали
4. ia – массив, хранящий индексы первых ненулевых элементов для i-ой строки(столбца)

Сам метод основывается на разложение матрицы на произведение 2 матриц, таких что 1 из них нижне-треугольная, а другая верхне-треугольная и их произведение даёт исходную матрицу. Т.е. A=L\*U, где L – нижне-треугольная матрица, а U – верхне-треугольная.

Имея данное разложение можно свести исходную задачу

к следующей паре задач:



Имея это находим сначала вектор , а потом следующим образом:

Причём ищется по , а в обратном порядке.

**Исследование метода решения СЛАУ через LU-разложение на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания**

Для данного задания использовались матрицы следующего вида:

Вектор правой части находился следующим образом: , где – матрица, построенная по описанным выше правилам,

**Таблица измерений погрешности**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| **10** | **0** | **2,3630e-15** | **1,2043e-16** |
| **10** | **1** | **1,25613-15** | **6,4015e-17** |
| **10** | **2** | **3,3233e-15** | **1,6937e-16** |
| **10** | **3** | **2,3499e-15** | **1,1976e-16** |
| **10** | **4** | **2,2315e-15** | **1,1373e-16** |
| **10** | **5** | **1,8344e-15** | **9,3489e-17** |
| **100** | **0** | **2,6317e-13** | **4,5244e-16** |
| **100** | **1** | **2,2511e-13** | **3,8699e-16** |
| **100** | **2** | **2,3087e-13** | **3,9691e-16** |
| **100** | **3** | **2,6206e-13** | **4,5053e-16** |
| **100** | **4** | **2,1063e-13** | **3,6210e-16** |
| **100** | **5** | **2,4698e-13** | **4,2459e-16** |
| **1000** | **0** | **2,5030e-11** | **1,3699e-15** |
| **1000** | **1** | **2,5171e-11** | **1,3777e-15** |
| **1000** | **2** | **2,5210e-11** | **1,3798e-15** |
| **1000** | **3** | **2,5180e-11** | **1,3781e-15** |
| **1000** | **4** | **2,5181e-11** | **1,3782e-15** |
| **1000** | **5** | **2,5181e-11** | **1,3782e-15** |

По данным таблицы можно сделать вывод, что зависимость погрешности от числа обусловленности для данного типа матриц достаточно мала, однако погрешность сильно возрастает, при увеличении размерности матрицы. Такой стремительный рост погрешности можно объяснить тем, что в данном методе происходит порядка n3 умножений и n2 операций деления. Данные операции могут приводить к округлению чисел. При росте n у нас увеличивается количество элементов в векторе, а следовательно, суммарная погрешность. Кроме того, высчитывая норму мы производим вычитание близких чисел, что также способствует накоплению погрешности.

**Исследование метода решения СЛАУ через LU-разложение на матрицах Гильберта**

Матрицы Гильберта размерности k строятся следующим образом:

**Таблица измерений погрешности**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| **1** | **0,0000** | **0,0000** |
| **11** | **0,0053** | **0,0002** |
| **21** | **1197,8851** | **20,8178** |
| **31** | **6739,8434** | **66,0388** |
| **41** | **3516,6884** | **22,7853** |
| **51** | **11651,9045** | **54,6094** |
| **61** | **13195,0670** | **47,3886** |
| **71** | **49925,0388** | **143,0311** |
| **81** | **25946,1190** | **61,0808** |
| **91** | **154929,8146** | **306,5988** |
| **101** | **132697,0961** | **224,7648** |
| **111** | **60318,0605** | **88,7360** |
| **121** | **64514,1039** | **83,4362** |
| **131** | **197141,7547** | **226,4403** |
| **141** | **214732,3414** | **220,9663** |
| **151** | **660351,2545** | **613,3651** |
| **161** | **840269,5464** | **709,1246** |
| **171** | **284335,9450** | **219,2795** |
| **181** | **756452,4688** | **535,8342** |
| **191** | **2622232,3743** | **1713,8788** |

Из результатов, записанных в таблице, можно сделать вывод, что погрешность метода LU-разложения быстро растет с увеличением размерности матрицы Гильберта. Связано это с тем, что погрешность напрямую зависит от числа обусловленности матрицы. У матриц Гильберта число обусловленности зависит от k следующим образом:

**Метод Гаусса**

Для задания 4 требовалось реализовать метод Гаусса с выбором главного элемента. Суть метода заключается в том, что сначала производится прямой ход с n итерациями следующим образом:

1. Выбирается главный элемент, т.е. такой элемент, что , где k – номер итерации
2. Если главный элемент равен 0, то однозначного решения нет. Иначе меняются местами строчки матрицы с номерами I и k. А также элементы вектора с теми же номерами.
3. Находим , для всех I = k+1…n
4. , где f – вектор правой части
5. Для каждого I с предыдущего шага , для всех j = k…n

Обратный ход (выполняется в обратном порядке):

**Сравнительная таблица**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Погрешность LU-разложения** | **Погрешность метода Гаусса** | **Количество операций LU-разложения** | **Количество операций метода Гаусса** |
| **1** | **0** | **0** | **7** | **3** |
| **101** | **1,2668e-09** | **4,5546e-11** | **2101507** | **363937** |
| **201** | **8,1170e-09** | **5,8553e-10** | **16403007** | **2787870** |
| **301** | **2,5716e-07** | **1,0837e-08** | **54904507** | **9271803** |
| **401** | **1,5560e-06** | **1,2703e-08** | **129606007** | **21815737** |
| **501** | **1,8512e-07** | **1,5412e-08** | **252507507** | **42419670** |
| **601** | **1,6602e-07** | **6,0986e-09** | **435609007** | **73083603** |
| **701** | **4,2728e-06** | **7,1195e-08** | **690910507** | **115807537** |
| **801** | **2,7820e-05** | **1,6403e-07** | **1030412007** | **172591470** |
| **901** | **9,8867e-07** | **5,3625e-08** | **1466113507** | **245435403** |
| **1001** | **9,1849e-06** | **7,3954e-08** | **2010015007** | **336339337** |

Таким образом метод Гаусса требует на порядок меньше действий, чем метод LU-разложения, при этом давая более точный результат на плотных матрицах.

**Метод сопряжённых градиентов**

**Для первичного тестирования метода были использованы следующие два примера:**

Для исследования метода использовалась матрица с диагональным преобладанием, построенная следующим образом:

Правая часть находился умножением матрицы на вектор , точность была выбрана за 10-12

**Таблица измерений погрешности**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Количество итераций** |  |  |  |
| **2** | **3** | **9.93014e-16** | **4.44089e-16** | **0.412311** |
| **3** | **4** | **6.28037e-16** | **1.67850e-16** | **0.769972** |
| **4** | **5** | **9.74217e-16** | **1.77867e-16** | **0.728554** |
| **5** | **6** | **3.10862e-15** | **4.19167e-16** | **1.11993** |
| **6** | **7** | **4.36248e-15** | **4.57313e-16** | **0.724794** |
| **7** | **8** | **4.21300e-15** | **3.56064e-16** | **2.48694** |
| **8** | **9** | **1.40433e-15** | **9.83230e-17** | **0.585046** |
| **9** | **10** | **1.72052e-14** | **1.01915e-15** | **3.94909** |
| **10** | **11** | **4.24216e-15** | **2.16200e-16** | **0.566137** |
| **15** | **17** | **1.77982e-14** | **5.05436e-16** | **0.797809** |
| **20** | **20** | **1.64425e-11** | **3.06921e-13** | **0.576511** |
| **25** | **19** | **7.86205e-12** | **1.05772e-13** | **0.476377** |
| **50** | **19** | **4.91523e-11** | **2.37240e-13** | **0.510683** |
| **100** | **17** | **9.62704e-11** | **1.65504e-13** | **0.508835** |
| **250** | **15** | **1.05608e-09** | **4.61366e-13** | **0.507746** |
| **500** | **13** | **2.80452e-09** | **4.33824e-13** | **0.510542** |
| **1000** | **13** | **1.00424e-08** | **5.49632e-13** | **0.587581** |
| **2500** | **11** | **4.85135e-08** | **6.72022e-13** | **0.980875** |
| **5000** | **11** | **5.17865e-07** | **2.53663e-12** | **32.5045** |
| **10000** | **10** | **9.19106e-06** | **1.59182e-11** | **32.6590** |

Исследования метода на матрице с обратным знаком внедиагональных элементов:

**Таблица измерений погрешности**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Количество итераций** |  |  |  |
| **2** | **3** | **4,44089e-16** | **1,98603e-16** | **0,632076** |
| **3** | **4** | **6,28037e-16** | **1,67850e-16** | **0,672062** |
| **4** | **5** | **1,17180e-14** | **2,13940e-15** | **0,330900** |
| **5** | **6** | **5,33369e-15** | **7,19195e-16** | **0,297984** |
| **6** | **7** | **9,15513e-16** | **9,59719e-17** | **1,21374** |
| **7** | **8** | **1,35064e-15** | **1,14150e-16** | **0,395937** |
| **8** | **9** | **1,84123e-14** | **1,28912e-15** | **3,56059** |
| **9** | **10** | **1,47304e-14** | **8,72556e-16** | **1,99736** |
| **10** | **11** | **8,96535e-15** | **4,56917e-16** | **0,866213** |
| **15** | **17** | **8,34770e-14** | **2,37059e-15** | **3,58344** |
| **20** | **21** | **2,40449e-12** | **4,48830e-14** | **0,268379** |
| **25** | **23** | **9,89324e-12** | **1,33098e-13** | **0,168127** |
| **50** | **30** | **2,74390e-12** | **1,32438e-14** | **0,0767542** |
| **100** | **37** | **1,31699e-11** | **2,26412e-14** | **0,0498228** |
| **250** | **56** | **1,81865e-11** | **7,94508e-15** | **0,0309929** |
| **500** | **83** | **2,01026e-10** | **3,10962e-14** | **0,0425130** |
| **1000** | **99** | **2,78120e-09** | **1,52218e-13** | **0,199731** |
| **2500** | **101** | **1,77264e-08** | **2,45551e-13** | **0,249571** |
| **5000** | **99** | **4,12177e-08** | **2,01894e-13** | **0,258483** |
| **10000** | **95** | **1,13072e-07** | **1,95831e-13** | **0,246926** |
| **25000** | **90** | **5,15103e-07** | **2,25700e-13** | **0,252333** |
| **50000** | **87** | **1,46669e-06** | **2,27215e-13** | **0,243020** |
| **100000** | **84** | **4,28873e-06** | **2,34902e-13** | **0,245937** |

Исследования метода на плотной матрице Гилберта:

**Таблица измерений погрешности**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Количество итераций** |  |  |  |
| **2** | **3** | **6,39319e-15** | **2,85912e-15** | **1,23371** |
| **3** | **4** | **7,84641e-13** | **2,09704e-13** | **0,729763** |
| **4** | **6** | **2,45390e-11** | **4,48020e-12** | **6,00042** |
| **5** | **8** | **9,27316e-11** | **1,25039e-11** | **661,300** |
| **6** | **11** | **5,19394e-10** | **5,44473e-11** | **110546** |
| **7** | **14** | **5,52819e-08** | **4,67217e-09** | **5,67113e+06** |
| **8** | **14** | **0,00204409** | **0,000143115** | **8,61373e+09** |
| **9** | **14** | **0,00543457** | **0,000321916** | **1,50964e+09** |
| **10** | **19** | **0,00136710** | **6,96740e-05** | **3,91686e+10** |
| **15** | **21** | **0,00334281** | **9,49293e-05** | **1,75815e+08** |
| **20** | **23** | **0,0157595** | **0,000294171** | **1,59713e+09** |
| **25** | **25** | **0,0112051** | **0,000150747** | **2,86272e+08** |
| **30** | **25** | **0,0259429** | **0,000266802** | **6,61678e+08** |
| **35** | **23** | **0,0497683** | **0,000407581** | **6,48326e+08** |
| **40** | **30** | **0,0261696** | **0,000175877** | **1,73751e+09** |
| **45** | **30** | **0,0427951** | **0,000241526** | **2,00997e+09** |
| **50** | **29** | **0,0651385** | **0,000314400** | **4,77411e+08** |
| **100** | **41** | **0,114113** | **0,000196180** | **3,42877e+08** |
| **200** | **48** | **0,508023** | **0,000309937** | **4,91763e+08** |
| **300** | **53** | **0,836914** | **0,000278276** | **2,88505e+08** |
| **400** | **66** | **0,969961** | **0,000209610** | **1,69737e+09** |
| **500** | **61** | **1,91233** | **0,000295813** | **6,78603e+08** |
| **600** | **58** | **3,26194** | **0,000383943** | **3,98762e+08** |
| **700** | **73** | **2,60394** | **0,000243265** | **4,65755e+08** |
| **800** | **72** | **3,83489** | **0,000293273** | **6,05946e+08** |
| **900** | **69** | **5,35921** | **0,000343507** | **4,58340e+08** |
| **1000** | **87** | **3,81897** | **0,000209017** | **5,68989e+08** |

#### Таким образом, метод сопряжённых градиентов превосходит по точности методы LU-разложения и Гаусса. Это связано с тем, что выход из итерационного процесса происходит по достижении заданной точности решения. На матрицах Гильберта экспоненциальный рост оценки числа обусловленности матрицы с увеличением размерности не приводит к замедлению сходимости метода.

[**Ссылка на Github проекта**](https://github.com/RuslanPark/ITMO-optimization-methods-course/tree/main/lab3)