**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

**Отчет по лабораторной работе №3**

Авторы: Зюзько Роман, Пак Руслан, Иванов Дмитрий

Факультет: ФИТиП

Группы: M32341, М32351

Преподаватель:



Санкт-Петербург 2021

**Цель лабораторной работы**

1. Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения для матриц, хранящихся в профильном формате
2. Оценить влияние увеличения числа обусловленности на точность решения СЛАУ
3. Оценить влияние размерности для матриц Гильберта на точность решения СЛАУ
4. Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента. Сравнить точность решения СЛАУ для плотных матриц методом Гаусса и LU-разложения
5. Реализовать метод сопряженных градиентов для решения СЛАУ, матрица которых хранится в разреженном строчно-столбцовом формате

**1. LU-разложение**

Исследуемые матрицы для данного метода решения СЛАУ хранились в профильном формате. Также для данного задания предполагается, что все матрицы имеют симметричный профиль, т.е. i-ая строка и i-ый столбец имеют равное количество нулевых элементов до первого ненулевого.

Профильный формат матрицы состоит из 4 массивов:

1. di – массив, хранящий элементы главной диагонали
2. al – массив, хранящий элементы нижнего треугольника матрицы построчно. Из каждой строки записаны все элементы с первого ненулевого элемента до элемента, стоящего левее элемента главной диагонали
3. au – массив, хранящий элементы верхнего треугольника матрицы по столбцам. Из каждого столбца записаны все элементы с первого ненулевого элемента до элемента, стоящего выше элемента главной диагонали
4. ia – массив, хранящий индексы первых ненулевых элементов для i-ой строки(столбца)

Сам метод основывается на разложение матрицы на произведение 2 матриц, таких что 1 из них нижне-треугольная, а другая верхне-треугольная и их произведение даёт исходную матрицу. Т.е. A=L\*U, где L – нижне-треугольная матрица, а U – верхне-треугольная.

Имея данное разложение можно свести исходную задачу

к следующей паре задач:



Имея это находим сначала вектор , а потом следующим образом:

Причём ищется по , а в обратном порядке.

**Исследование метода решения СЛАУ через LU-разложение на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания**

Для данного задания использовались матрицы следующего вида:

Вектор правой части находился следующим образом: , где – матрица, построенная по описанным выше правилам,

**Таблица измерений погрешности**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| **10** | **0** | **2,3630e-15** | **1,2043e-16** |
| **10** | **1** | **1,25613-15** | **6,4015e-17** |
| **10** | **2** | **3,3233e-15** | **1,6937e-16** |
| **10** | **3** | **2,3499e-15** | **1,1976e-16** |
| **10** | **4** | **2,2315e-15** | **1,1373e-16** |
| **10** | **5** | **1,8344e-15** | **9,3489e-17** |
| **100** | **0** | **2,6317e-13** | **4,5244e-16** |
| **100** | **1** | **2,2511e-13** | **3,8699e-16** |
| **100** | **2** | **2,3087e-13** | **3,9691e-16** |
| **100** | **3** | **2,6206e-13** | **4,5053e-16** |
| **100** | **4** | **2,1063e-13** | **3,6210e-16** |
| **100** | **5** | **2,4698e-13** | **4,2459e-16** |
| **1000** | **0** | **2,5030e-11** | **1,3699e-15** |
| **1000** | **1** | **2,5171e-11** | **1,3777e-15** |
| **1000** | **2** | **2,5210e-11** | **1,3798e-15** |
| **1000** | **3** | **2,5180e-11** | **1,3781e-15** |
| **1000** | **4** | **2,5181e-11** | **1,3782e-15** |
| **1000** | **5** | **2,5181e-11** | **1,3782e-15** |

По данным таблицы можно сделать вывод, что зависимость погрешности от числа обусловленности достаточно мала, однако погрешность сильно возрастает при увеличении размерности матрицы. Такой стремительный рост погрешности в первую очередь связан с тем, что для нахождения нормы приходится вычитать близкие числа, что является операцией с достаточно большой погрешности, а так как с ростом n растёт количество таких операций, то и суммарная погрешность стремительно растёт.

**Исследование метода решения СЛАУ через LU-разложение на матрицах Гильберта**

Матрицы Гильберта размерности k строятся следующим образом:

**Таблица измерений погрешности**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| **1** | **0,0000** | **0,0000** |
| **11** | **0,0053** | **0,0002** |
| **21** | **1197,8851** | **20,8178** |
| **31** | **6739,8434** | **66,0388** |
| **41** | **3516,6884** | **22,7853** |
| **51** | **11651,9045** | **54,6094** |
| **61** | **13195,0670** | **47,3886** |
| **71** | **49925,0388** | **143,0311** |
| **81** | **25946,1190** | **61,0808** |
| **91** | **154929,8146** | **306,5988** |
| **101** | **132697,0961** | **224,7648** |
| **111** | **60318,0605** | **88,7360** |
| **121** | **64514,1039** | **83,4362** |
| **131** | **197141,7547** | **226,4403** |
| **141** | **214732,3414** | **220,9663** |
| **151** | **660351,2545** | **613,3651** |
| **161** | **840269,5464** | **709,1246** |
| **171** | **284335,9450** | **219,2795** |
| **181** | **756452,4688** | **535,8342** |
| **191** | **2622232,3743** | **1713,8788** |

**Метод Гаусса**

Для задания 4 требовалось реализовать метод Гаусса с выбором главного элемента. Суть метода заключается в том, что сначала производится прямой ход с n итерациями следующим образом:

1. Выбирается главный элемент, т.е. такой элемент, что , где k – номер итерации
2. Если главный элемент равен 0, то однозначного решения нет. Иначе меняются местами строчки матрицы с номерами I и k. А также элементы вектора с теми же номерами.
3. Находим , для всех I = k+1…n
4. , где f – вектор правой части
5. Для каждого I с предыдущего шага , для всех j = k…n

Обратный ход (выполняется в обратном порядке):

**Сравнительная таблица**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Количество операций LU-разложения** | **Количество операций метода Гаусса** | **Погрешность LU-разложения** | **Погрешность метода Гаусса** |
| **1** | **0** | **0** | **7** | **3** |
| **101** | **1,2668e-09** | **4,5546e-11** | **2101507** | **363937** |
| **201** | **8,1170e-09** | **5,8553e-10** | **16403007** | **2787870** |
| **301** | **2,5716e-07** | **1,0837e-08** | **54904507** | **9271803** |
| **401** | **1,5560e-06** | **1,2703e-08** | **129606007** | **21815737** |
| **501** | **1,8512e-07** | **1,5412e-08** | **252507507** | **42419670** |
| **601** | **1,6602e-07** | **6,0986e-09** | **435609007** | **73083603** |
| **701** | **4,2728e-06** | **7,1195e-08** | **690910507** | **115807537** |
| **801** | **2,7820e-05** | **1,6403e-07** | **1030412007** | **172591470** |
| **901** | **9,8867e-07** | **5,3625e-08** | **1466113507** | **245435403** |
| **1001** | **9,1849e-06** | **7,3954e-08** | **2010015007** | **336339337** |

**Метод сопряженных градиентов**

Для исследования метода использовалась матрица с диагональным преобладанием, построенная следующим образом:

Правая часть находился умножением матрицы на вектор

**Таблица измерений погрешности**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Количество итераций** |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Исследования метода на матрице с обратным знаком внедиагональных элементов:

**Таблица измерений погрешности**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Количество итераций** |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Исследования метода на плотной матрице Гилберта:

**Таблица измерений погрешности**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **Количество итераций** |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |