SARCINA
la lucrarea de control la disciplina Teoria sistemelor
gr. TI-201, 202, f/r

Pentru structura sistemului de reglare automată deschis dată în figura 1 cu funcţiile de transfer cu parametrii cunoscuţi de efectuat:

1. Determinaţi funcţiile de transfer pentru sistemul deschis, închis şi pentru eroare.
2. Prezentaţi ecuaţia caracteristică a sistemul automat închis.
3. Prezentaţi ecuaţiile diferenţiale ale sistemului închis şi a erorii.
4. Prezentaţi expresiile analitice şi grafice ale caracteristicilor statice ale sistemul automat deschis, închis şi a erorii sistemului.
5. Să se analizeze stabilitatea sistemului automat închis utilizând criteriile de stabilitate Routh și Hurwitz.
6. Să se construiască locul de transfer al sistemului automat închis.

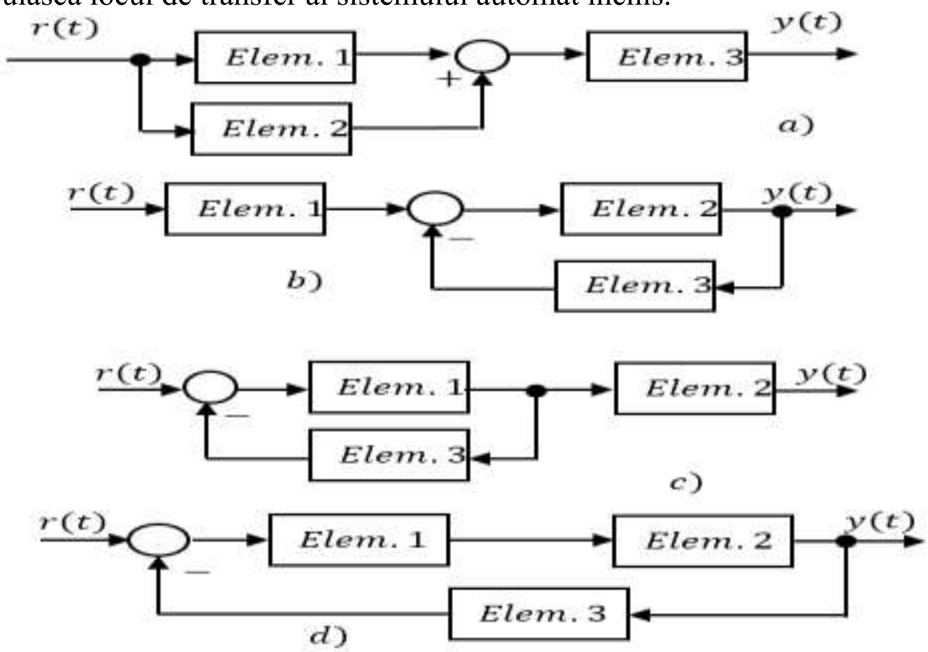


Fig. 1. Schema bloc structurală a sistemului automat deschis

NOTĂ: Elementele 1, 2, 3 din structura sistemului prezintă funcții de transfer elementare și se aleg din tabelul 1 conform variantei după lista grupei:

$H_1(s)$ este element ideal,
$H_2(s)$ este element cu inerție de ordinul unu,
$H_3(s)$ este element integrator,
$H_4(s)$ este element oscilant amortizat,
$H_5(s)$ este element cu inerție de ordinul doi.

Funcțiile de transfer ale elementelor tipice le găsiți în conspectul lecțiilor.

Parametrii elementelor (coeficienții de transfer și constantele de timp) se aleg numere reale simple din șirul 2,3,..., 9.

Numărul variantei din tabelul 1 se alege conform numărului din lista grupei academice.

Exemplu de alegere a variantei.

Din lista grupei TI-201 numărul 5 - este varianta 5 și se alege schema *a* cu funcțiile de transfer:

Elementul 1 este element ideal cu f.d.t.: $H_1(s) = k_1$.

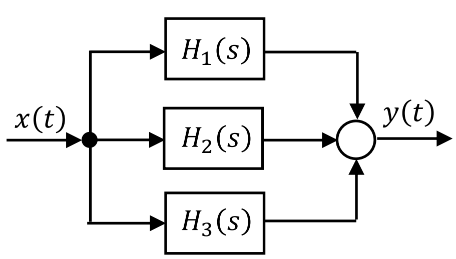
Elementul 2 este element cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s+1}$.

Elementul 3 este element cu inerție de ordinul doi cu f.d.t. $H_5(s) = \frac{k_5}{T_3 s^2 + T_4 s + 1}$.

Tabelul 1. Date inițiale la lucrare

Nr. var., grupa TI-201	Nr. sch.	Tip element 1	Tip element 2	Tip element 3	Nr. var., grupa TI-202	Nr. sch.	Tip element 1	Tip element 2	Tip element 3
1	a	H_1	H_2	H_4	1	a	H_4	H_1	H_2
2	a	H_1	H_3	H_4	2	a	H_4	H_1	H_3
3	a	H_2	H_1	H_4	3	a	H_2	H_3	H_2
4	a	H_2	H_2	H_2	4	b	H_2	H_4	H_1
5	a	H_1	H_2	H_5	5	b	H_3	H_4	H_1
6	b	H_4	H_1	H_2	6	b	H_4	H_1	H_3
7	b	H_4	H_1	H_3	7	c	H_1	H_2	H_4
8	b	H_5	H_1	H_2	8	c	H_1	H_3	H_4
9	b	H_5	H_2	H_1	9	c	H_2	H_1	H_4
10	b	H_5	H_1	H_3	10	d	H_4	H_1	H_2
11	c	H_5	H_2	H_1	11	d	H_4	H_1	H_3
12	c	H_5	H_3	H_1	12	a	H_2	H_4	H_1
13	c	H_4	H_2	H_1	13	a	H_1	H_4	H_2
14	c	H_4	H_3	H_1	14	b	H_1	H_4	H_2
15	c	H_1	H_4	H_2	15	b	H_1	H_4	H_3
16	d	H_1	H_4	H_3	16	c	H_4	H_1	H_2
17	d	H_2	H_4	H_1	17	c	H_4	H_1	H_3
18	d	H_2	H_4	H_1	18	d	H_3	H_4	H_1
19	d	H_1	H_5	H_2	19	d	H_2	H_4	H_1
20	d	H_1	H_5	H_3	20	d	H_1	H_4	H_3
21	d	H_2	H_5	H_1	21	c	H_1	H_4	H_2
22	d	H_2	H_5	H_1	22	c	H_1	H_5	H_2
23	d	H_2	H_1	H_5	23	c	H_1	H_5	H_3
24	a	H_2	H_1	H_4	24	a	H_2	H_4	H_1
25	a	H_2	H_5	H_1	25	a	H_3	H_4	H_1
26	a	H_3	H_5	H_1	26	a	H_1	H_4	H_2

Exemplul 1. Se consideră structura sistemului automat deschis dată în fig. 2 constituită din trei elemente 1, 2, 3 în conexiune paralelă cu funcțiile de transfer $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$.



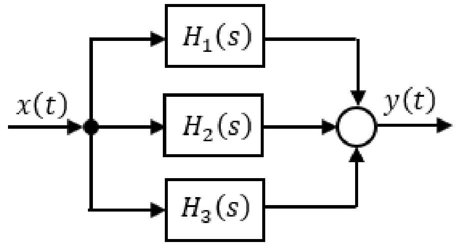


Fig. 2. Structura sistemului automat deschis

Funcțiile de transfer ale elementelor 1, 2, 3 se numesc elemente tipice – inerție de ordinul unu:

1) $H_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s+1} = \frac{3}{5s+1}$,

2) $H_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s+1} = \frac{2}{7s+1}$,

3) $H_3(s) = \frac{k_3}{T_3 s+1} = \frac{4}{9s+1}$.

Se cere: 1. Să se determine funcțiile de transfer ale sistemului deschis, închis și a erorii sistemului.
2. Să se determine ecuațiile diferențiale ale sistemului deschis, închis și a erorii sistemului.
3. Să se determine caracteristicile statice în forma analitică și grafică ale sistemului deschis, închis și a erorii sistemului.

Soluționare. 1.1. Se determină f.d.t. echivalentă a sistemului deschis ca conexiune paralelă și se utilizează formula (regula 2) care prezintă f.d.t a sistemului deschis și după unele transformări se obține:

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H_d(s) = H_e(s) = H_1(s)+H_2(s) + H_3(s) = \frac{k_1}{T_1 s+1} + \frac{k_2}{T_2 s+1} + \frac{k_3}{T_3 s+1} =$$

$$= \frac{k_1(T_2 s+1)(T_3 s+1)+k_2(T_1 s+1)(T_3 s+1)+k_3(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)} =$$

$$= \frac{k_1 T_2 T_3 s^2+sk_1(T_2+T_3)+k_1+k_2 T_1 T_3 s^2+sk_2(T_1+T_3)+k_2+k_3 T_1 T_2 s^2+sk_3(T_1+T_2)+k_3}{T_1 T_2 T_3 s^3+s^2(T_1 T_2+T_1 T_3+T_2 T_3)+(T_1+T_2+T_3)s+1} =$$

$$= \frac{s^2(k_1 T_2 T_3+k_2 T_1 T_3+k_3 T_1 T_2)+s(k_1(T_2+T_3)+k_2(T_1+T_3)+k_3(T_1+T_2))+k_1+k_2+k_3}{T_1 T_2 T_3 s^3+s^2(T_1 T_2+T_1 T_3+T_2 T_3)+(T_1+T_2+T_3)s+1} = \frac{c_0 s^2+c_1 s+c_2}{d_0 s^3+d_1 s^2+d_2 s+d_3} = \frac{C(s)}{D(s)},$$

unde coeficienții sunt exprimați prin parametrii elementelor dinamice și se calculează prin valorile numerice:

$$c_0 = k_1 T_2 T_3 + k_2 T_1 T_3 + k_3 T_1 T_2 = 3 \cdot 7 \cdot 9 + 2 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 5 \cdot 7 = 419,$$

$$c_1 = k_1(T_2 + T_3)+k_2(T_1 + T_3)+k_3(T_1 + T_2) = 3(7 + 9) + 2(5 + 9) + 4(5 + 7) = 124,$$

$$c_2 = k_1 + k_2 + k_3 = 3 + 2 + 4 = 9,$$

$$d_0 = T_1 T_2 T_3 = 5 \cdot 7 \cdot 9 = 315,$$

$$d_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 143,$$

$$d_2 = T_1 + T_2+T_3 = 21,$$

$d_3 = 1$.

Funcția de transfer a sistemului deschis cu coeficienții calculați are forma:

$$H_d(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{c_0 s^2 + c_1 s + c_2}{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3} = \frac{419 s^2 + 124 s + 9}{315 s^3 + 143 s^2 + 21 s + 1} = \frac{C(s)}{D(s)}.$$

1.2. Se închide sistemul deschis cu reacția unitară și structura sistemului se dă în fig. 3.

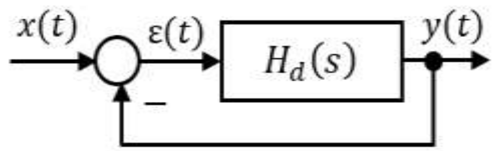


Fig. 3. Structura sistemului automat închis

Se determină f.d.t. a sistemului închis ca conexiune cu reacție inversă utilizând formula (regula 3) pentru această conexiune și după unele transformări se obține:

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s)} = \frac{\frac{c_0 s^2 + c_1 s + c_2}{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3}}{1 + \frac{c_0 s^2 + c_1 s + c_2}{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3}} = \frac{c_0 s^2 + c_1 s + c_2}{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3 + c_0 s^2 + c_1 s + c_2} = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{B(s)}{A(s)},$$

unde coeficienții sunt exprimați:

$b_0 = c_0 = 419$, $b_1 = c_1 = 124$, $b_2 = c_2 = 9$,

$a_0 = d_0 = 315$, $a_1 = d_1 + c_0 = 21 + 124 = 145$,

$a_2 = d_2 + c_1 = 21 + 419 = 440$, $a_3 = d_3 + c_2 = 1 + 9 = 10$.

F.d.t. a sistemului închis cu coeficienții calculați este:

$$H_0(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{419 s^2 + 124 s + 9}{315 s^3 + 145 s^2 + 440 s + 10} = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

1.3. Se determină f.d.t. a erorii sistemului închis utilizând formula și după unele transformări se obține:

$$H_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon(s)}{x(s)} = \frac{1}{1 + H_d(s)} = \frac{1}{1 + \frac{c_0 s^2 + c_1 s + c_2}{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3}} = \frac{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3}{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3 + c_0 s^2 + c_1 s + c_2} =$$

$$= \frac{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{315 s^3 + 143 s^2 + 21 s + 1}{315 s^3 + 145 s^2 + 440 s + 10} = \frac{D(s)}{A(s)}.$$

1.4. Ecuația caracteristică a sistemului închis este numitorul funcției de transfer a sistemului și se prezintă:

$$A(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 315 s^3 + 145 s^2 + 440 s + 1 = 0.$$

2. Se determină ecuațiile diferențiale ale sistemului deschis, închis și a erorii sistemului.

2.1. Funcția de transfer a sistemului deschis se prezintă în formă operațională și după unele transformări se obține expresia:

$$y(s)(d_0s^3 + d_1s^2 + d_2s + d_3) = x(s)(c_0s^2 + c_1s + c_2),$$

$$d_0s^3y(s) + d_1s^2y(s) + d_2sy(s) + d_3y(s) = c_0s^2x(s) + c_1sx(s) + c_2x(s).$$

Pentru a determina ecuația diferențială a sistemului deschis în expresie se substituie variabila complexă s cu operatorul de derivare $p = \frac{d}{dt} = s$ și variabilele $y(s)$ și $x(s)$ sunt funcții de timp $y(t)$ și $x(t)$ și se obține ecuația diferențială în forma:

$$d_0\frac{d^3y(t)}{dt^3} + d_1\frac{d^2y(t)}{dt^2} + d_2\frac{dy(t)}{dt} + d_3y(t) = c_0\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c_1\frac{dx(t)}{dt} + c_2x(t).$$

3.2. Funcția de transfer a sistemului închis se prezintă în formă operațională și după unele transformări se obține expresia:

$$y(s)(a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3) = x(s)(b_0s^2 + b_1s + b_2),$$

$$a_0s^3y(s) + a_1s^2y(s) + a_2sy(s) + a_3y(s) = b_0s^2x(s) + b_1sx(s) + b_2x(s).$$

Pentru a determina ecuația diferențială a sistemului închis în expresie se substituie variabila complexă s cu operatorul de derivare $p = \frac{d}{dt} = s$ și variabilele $y(s)$ și $x(s)$ sunt funcții de timp $y(t)$ și $x(t)$ și se obține ecuația diferențială în forma:

$$a_0\frac{d^3y(t)}{dt^3} + a_1\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_2\frac{dy(t)}{dt} + a_3y(t) = b_0\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_2x(t).$$

2.3. Funcția de transfer a erorii sistemului închis se prezintă în formă operațională și după unele transformări se obține expresia:

$$\varepsilon(s)(a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3) = x(s)(d_0s^3 + d_1s^2 + d_2s + d_3),$$

$$a_0s^3\varepsilon(s) + a_1s^2\varepsilon(s) + a_2s\varepsilon(s) + a_3\varepsilon(s) =$$

$$= d_0s^3x(s) + d_1s^2x(s) + d_2sx(s) + d_3x(s).$$

Pentru a determina ecuația diferențială a erorii sistemului închis în expresie se substituie variabila complexă s cu operatorul de derivare $p = \frac{d}{dt} = s$ și variabilele $y(s)$ și $x(s)$ sunt funcții de timp $\varepsilon(t)$ și $x(t)$ și se obține ecuația diferențială în forma:

$$a_0\frac{d^3\varepsilon(t)}{dt^3} + a_1\frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2} + a_2\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + a_3\varepsilon(t) = d_0\frac{d^3x(t)}{dt^3} + d_1\frac{d^2x(t)}{dt^2} + d_2\frac{dx(t)}{dt} + d_3x(t).$$

3. Se determină forma analitică și grafică a caracteristicilor statice ale sistemului deschis, închis și a erorii sistemului. Caracteristica statică descrie regimul staționar de funcționare al sistemului. În regim staționar al sistemului acțiunea derivatelor este nulă (este egală cu zero).

3.1. Pentru a determina caracteristica statică a sistemului deschis în ecuația diferențială se egalează cu zero toate derivatele din stânga și dreapta și variabilele nu depind de timp și se exprimă mărimea de ieșire ca funcție de mărimea de intrare:

$$d_3 y_d = c_2 x,\ y_d = \frac{c_2}{d_3} x,\ y_d = k_d x,$$

unde $k_d = \frac{c_2}{d_3} = \frac{k_1+k_2+k_3}{1} = k_1 + k_2 + k_3 = 3 + 2 + 4 = 9$ este coeficientul de transfer al sistemului deschis.

3.2. Pentru a determina caracteristica statică a sistemului închis în ecuația diferențială se egalează cu zero toate derivatele din stânga și dreapta și variabilele nu depind de timp și se exprimă mărimea de ieșire ca funcție de mărimea de intrare:

$$a_3 y_0 = b_2 x,\ y_0 = \frac{b_2}{a_3} x,\ y_0 = k_0 x,$$

unde $k_0 = \frac{b_2}{a_3} = \frac{k_1+k_2+k_3}{1+d_3} = \frac{k_1+k_2+k_3}{1+k_1+k_2+k_3} = \frac{3+2+4}{1+3+2+4} = \frac{9}{10}$ este coeficientul de transfer al sistemului închis.

3.3. Pentru a determina caracteristica statică a erorii sistemului închis în ecuația diferențială se egalează cu zero toate derivatele din stânga și dreapta și variabilele nu depind de timp și se exprimă mărimea de ieșire ca funcție de mărimea de intrare:

$$a_3 \varepsilon = d_3 x,\ \varepsilon = \frac{d_3}{a_3} x,\ \varepsilon = k_\varepsilon x,$$

unde $k_\varepsilon = \frac{d_3}{a_3} = \frac{1}{d_3+c_2} = \frac{1}{1+k_1+k_2+k_3} = \frac{1}{1+3+2+4} = \frac{1}{10}$ este coeficientul de transfer al erorii sistemului închis.

Se variază semnalul de intrare $x = 0 \cdots 10$ cu pasul unu și se calculează (tabelul 2) și se construiesc în scară caracteristicile statice (fig. 4) ale sistemului deschis $a)$, închis $b)$ și a erorii sistemului $c)$.

Tabelul 2. Date numerice calculate pentru caracteristicile statice

Variabila	**Datele numerice**										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_d	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
y_0	0	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	5.4	6.3	7.2	8.1	9
ε	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

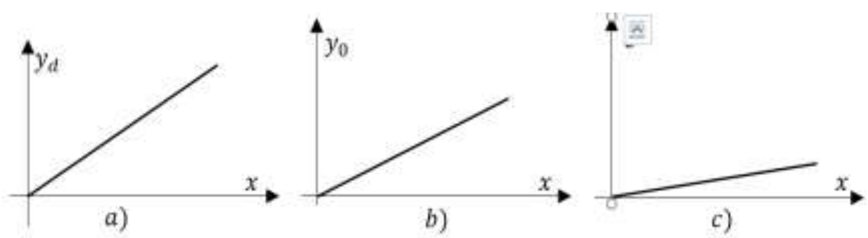


Fig. 4. Caracteristicile statice ale sistemului automat

Exemplul 2. Se dă funcția de transfer a sistemului închis:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{5s+7}{3s^3+8s^2+9s+2}.$$

Se cere să se determine forma analitică și grafică a locului de transfer al sistemului automat închis.

Soluționare. Pentru a obține locul de transfer al sistemului închis în f.d.t. dată se utilizează substituția variabilei $s = j\omega$ și se calculează ca funcție complexă, evidențiind partea reală și imaginară ca funcții de frecvența ω, folosind proprietățile pentru unitatea imaginară $j = \sqrt{-1},\ j^2, j^3$:

$$H(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{b_0\, j\omega + b_1}{a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2 j\omega + a_3} = \frac{jb_0\omega + b_1}{-ja_0\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + a_3} =$$

$$= \frac{b_1 + jb_0\omega}{(a_3 - a_1\omega^2) + j(a_2\omega - a_0\omega^3)} \frac{(a_3 - a_1\omega^2) - j(a_2\omega - a_0\omega^3)}{(a_3 - a_1\omega^2) - j(a_2\omega - a_0\omega^3)} =$$

$$= \frac{b_1[(a_3 - a_1\omega^2) - j(a_2\omega - a_0\omega^3)] + jb_0\omega[(a_3 - a_1\omega^2) - j(a_2\omega - a_0\omega^3)]}{(a_3 - a_1\omega^2)^2 + (a_2\omega - a_0\omega^3)^2} =$$

$$= \frac{b_1(a_3 - a_1\omega^2) - jb_1(a_2\omega - a_0\omega^3) + jb_0\omega(a_3 - a_1\omega^2) + b_0\omega(a_2\omega - a_0\omega^3)}{(a_3 - a_1\omega^2)^2 + (a_2\omega - a_0\omega^3)^2} =$$

$$= \frac{b_1(a_3 - a_1\omega^2) + b_0\omega(a_2\omega - a_0\omega^3)}{(a_3 - a_1\omega^2)^2 + (a_2\omega - a_0\omega^3)^2} + j\frac{-b_1(a_2\omega - a_0\omega^3) + b_0\omega(a_3 - a_1\omega^2)}{(a_3 - a_1\omega^2)^2 + (a_2\omega - a_0\omega^3)^2} = P_d(\omega) + jQ_d(\omega),$$

unde partea reală și imaginară sunt:

$$P(\omega) = \frac{7(2 - 8\omega^2) + 5\omega(9\omega - 3\omega^3)}{(2 - 8\omega^2)^2 + (9\omega - 3\omega^3)^2},\ Q(\omega) = \frac{-7(9\omega - 3\omega^3) + 5\omega(2 - 8\omega^2)}{(2 - 8\omega^2)^2 + (9\omega - 3\omega^3)^2}.$$

În continuare se variază $\omega = 0 \ldots \infty$ și se calculează funcțiile $P(\omega)$, $Q(\omega)$, care se prezintă în tabelul 3

Tabelul 3. Calculul locului de transfer $H(j\omega)$

ω	**0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.5**	**1.0**	**2.0**	**5.0**	**10.0**	**ω → ∞**
$P(\omega)$	3.5	3.1994	...	...	...				- 0	- 0
$Q(\omega)$	0	-1.184	...	...	...				- 0	- 0

După datele din tabelul 3 în scară se construiește locul de transfer $H(j\omega)$ dat în fig. 5.

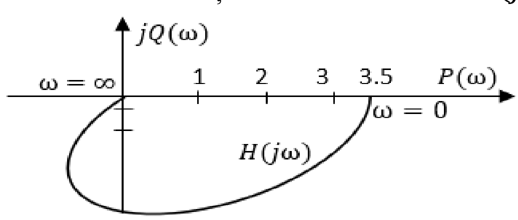


Fig. 5. Locul de transfer $H(j\omega)$ al sistemului automat închis

Exemplul 3. Se dă ecuația caracteristică de gradul 4 a sistemului automat închis:

$$A(p) = a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = 5p^4 + 6p^3 + 7p^2 + 3p + 4 = 0.$$

Se cere să se analizeze stabilitatea sistemului utilizând criteriile de stabilitate Routh și Hurwitz.

Soluționare. Se verifică condițiile necesare de stabilitate: toți coeficienții sunt pozitivi și sunt toate cele patru rădăcini ale polinomului.

Se verifică condițiile suficiente de stabilitate, utilizând criteriul Routh.

Din coeficienții polinomului se construiește tabelul Routh și calculele se dau în tabelul 4.

Tabelul 4. Calculul coeficienților criteriului Routh

Nr. rând	Coeficientul α_i	Coloane		
		1	2	3
1		$c_{11} = a_0 = 5$	$c_{12} = a_2 = 7$	$c_{13} = a_4 = 4$
2		$c_{21} = a_1 = 6$	$c_{22} = a_3 = 3$	$c_{23} = 0$
3	$\alpha_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{5}{6}$	$c_{31} = 27/6$	$c_{32} = 4$	$c_{32} = 0$
4	$\alpha_2 = \frac{a_1}{c_{31}} = \frac{36}{27}$	$c_{41} = -\frac{63}{27}$	$c_{42} = 0$	$c_{43} = 0$
5	$\alpha_3 = \frac{c_{31}}{c_{41}} = = -1.9286$	$c_{51} = 4$	$c_{52} = 0$	$c_{53} = 0$

Primele două rânduri se completează cu coeficienții pari și impari ai polinomului caracteristic.
Se calculează coeficienții din rândul trei pornind de la coloana zero:

$$\alpha_1 = c_{11}/c_{21} = a_0/a_1 = 5/6,$$

$$c_{31} = c_{12} - \alpha_1 c_{22} = a_2 - \alpha_1 a_3 = 7 - (5/6)3 = 27/6,$$

$$c_{32} = c_{13} - \alpha_1 c_{23} = 4 - \left(\frac{5}{6}\right) \cdot 0 = 4.$$

Se calculează coeficienții din rândul patru pornind de la coloana zero:

$$\alpha_2 = c_{21}/c_{31} = a_1/c_{31} = 6/(27/6) = 36/27,$$

$$c_{41} = c_{22} - \alpha_2 c_{32} = a_3 - \alpha_2 c_{32} = 3 - (36/27)4 = -63/27,$$

$$c_{42} = c_{23} - \alpha_2 c_{32} = 0 - \alpha_2 \cdot 0 = 0.$$

Se calculează coeficienții din rândul cinci pornind de la coloana zero:

$$\alpha_3 = c_{31}/c_{41} = \frac{27/6}{-63/27} = -\frac{729}{378} = -1.9286,$$

$$c_{51} = c_{32} - \alpha_3 c_{42} = 4 - \alpha_3 \cdot 0 = 4.$$

Se analizează coeficienții coloanei unu și se constată coeficientul negativ $c_{14} = -63/27$ și, rezultă că la valorile date ale coeficienților polinomului sistemul automat este instabil.

În coloana unu există două schimburi de semne între rândurile 3 și 4 de la „+” la „-” și, invers, între rândurile 4 și 5 de la „-” la „+” care indică două rădăcini pozitive din 4 rădăcini ale polinomului.

Exemplul 4. Se dă ecuația caracteristică de gradul 4 a sistemului automat închis cu coeficienții cunoscuți:

$$A(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 5p^4 + 6p^3 + 7p^2 + 3p + 4 = 0.$$

Se cere de analizat stabilitatea sistemului utilizând criteriul Hurwitz.

Soluționare. Se verifică condițiile necesare de stabilitate: toți coeficienții sunt pozitivi și sunt toate cele patru rădăcini ale polinomului.

Se verifică condițiile suficiente de stabilitate utilizând criteriul Hurwitz.

Din coeficienții a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 polinomului caracteristic se construiește determinantul de ordinul patru și calculăm determinații particulari:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = a_1 = 7 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = 27 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 7 \cdot 3 + 0 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \cdot 6 - 0 \cdot 7 \cdot 0 - 6 \cdot 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 \cdot 3 = -63 < 0.$$

La valorile date ale coeficienților polinomului caracteristic determinantul $\Delta_3 = -63 < 0$ este negativ și, conform criteriului Hurwitz, sistemul automat este instabil.

Analizând stabilitatea sistemului caracterizat de polinomul dat aplicând criteriile Routh și Hurwitz, ambele criterii au dat același rezultat – sistemul este instabil la valorile date ale coeficienților polinomului caracteristic.

Utilizând criteriul Hurwitz se poate calcula coeficientul critic de transfer al sistemului deschis când sistemul automat închis este la limită de stabilitate (regimul critic) din condiția când determinantul superior se egalează cu zero:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n = 0.$$

Coeficientul de transfer k al sistemului deschis se conține în termenul liber a_n.