

Лекция 7. Графы. Простейшие свойства графов. Пути и цепи. Циклы и связность. Удаление и добавление ребер в связных графах. Соотношение между числом вершин, числом ребер и числом компонент связности в графе. Орграфы.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте <https://mk.cs.msu.ru>

Граф

(Неориентированным) графом G называется пара (V, E) , где V — непустое конечное множество вершин; E — конечное множество ребер, причем каждому ребру $e \in E$ сопоставлена неупорядоченная пара вершин, т. е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.

Петли и кратные ребра

Ребро $e = (v, v)$, где $v \in V$, называется **петлей**.

Ребра $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, называются **кратными** ребрами.

Граф, в котором допускаются и петли, и кратные ребра иногда называется **псевдографом**.

Граф без петель, но, возможно, с кратными ребрами называется **мультиграфом**.

Граф без петель и кратных ребер называется **простым**, или **обыкновенным** графом.

Мы будем, как правило, рассматривать **простые графы**, т. е. графы без петель и кратных ребер.

Смежность

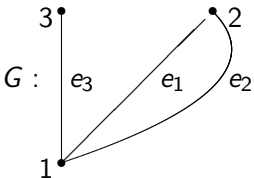
Говорят, что ребро $e = (v, w)$ **соединяет** вершины v и w , или **исходит** из вершины v (и из вершины w), или вершина v (и вершина w) и ребро e — **инцидентны**.

При этом вершины v и w называются **концами** ребра e , или **смежными** (соседними) по ребру e .

Изображения графов

Для наглядности графы можно изображать: вершинам ставятся в соответствие **точки** (разным вершинам — различные точки); ребрам сопоставляются непрерывные **кривые**, соединяющие соответствующие вершины (точки) (разным ребрам — различные кривые).

Пусть $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (1, 2)$ и $e_3 = (1, 3)$:



Изоморфизм графов

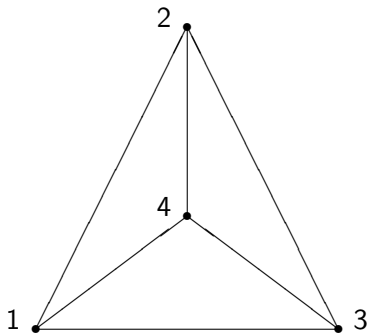
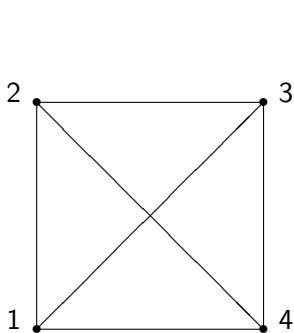
Два графа без петель и кратных ребер

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ и } G_2 = (V_2, E_2)$$

называются **изоморфными**, если найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющее ребра, т. е. для любых вершин $v, w \in V_1$ выполняется соотношение:

$$(v, w) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2.$$

Пример изоморфных графов



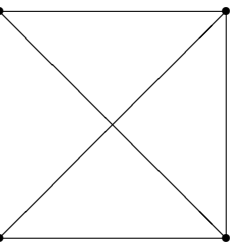
Пустые и полные графы

Пустым графом O_n называется граф с n вершинами, в котором нет ни одного ребра (т. е. с пустым множеством ребер), $n \geq 1$.

Полным графом K_n называется граф с n вершинами, в котором любые две различные вершины смежны, $n \geq 1$.

Полный граф K_3 называется также **треугольником**.

Графы K_1 , K_2 , K_3 , K_4

 K_1 K_2 K_3 K_4 

Дополнительный граф

Дополнительным графом к графу $G = (V, E)$ называется граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$, где

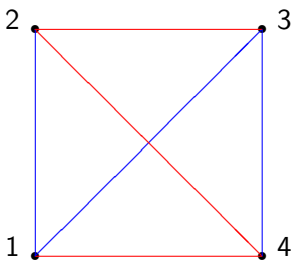
$$\bar{E} = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w, (v, w) \notin E\}.$$

Т.е. **дополнительный граф \bar{G} содержит те же вершины, что и граф G , и любые две различные вершины в нем смежны в том и только в том случае, когда эти вершины не смежны в графе G .**

Другими словами, дополнительный граф \bar{G} содержит те же вершины, что и граф G , и в точности все те ребра, которые не содержит граф G .

Граф и его дополнение

Граф G и его дополнение \bar{G} :



Степень вершины

Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе $G = (V, E)$ называется **число исходящих из нее ребер** (причем петля вносит двойной вклад в степень вершины).

Степень $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе без петель и кратных ребер $G = (V, E)$ совпадает **с числом смежных с ней вершин**.

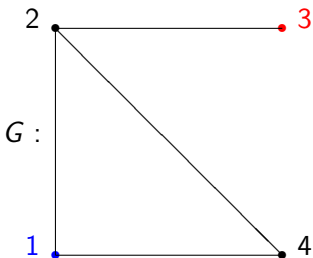
Если $d_G(v) = 0$, то вершина v называется **изолированной** в графе G ; если $d_G(v) = 1$, то вершина v называется **висячей**, или **концевой** в графе G .

Обозначения: $\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$ и $\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$ —

соответственно, **наименьшая** и **наибольшая** степени вершин в графе G .

Степени вершин

$$d_G(1) = 2; d_G(3) = 1:$$



Формула Эйлера для степеней вершин

Предложение 7.1. Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер. Тогда

$$1) \sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E|;$$

2) в графе G число вершин, имеющих нечетную степень, четно.

Доказательство.

1. Рассмотрим сумму в левой части равенства. Т.к. любое ребро графа имеет ровно два конца, каждое ребро в этой сумме будет подсчитано ровно два раза. Получаем выражение в правой части равенства.

2. Свойство непосредственно следует из равенства п. 1.



Отметим, что формула Эйлера для степеней вершин верна и для псевдографов.

Пути в графах

Путем (или **маршрутом**) в графе $G = (V, E)$ из вершины v_0 в вершину v_m (или (v_0, v_m) -**путем**) называется последовательность вершин и ребер графа G

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{m-1}, e_m, v_m,$$

в которой $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ для каждого $i = 1, \dots, m$, $m \geq 0$.

При этом вершина v_0 называется **началом** пути, вершина v_m называется **концом** пути. Число m ребер пути называется его **длиной**.

Для графов без петель и кратных ребер **путь** однозначно определяется последовательностью вершин

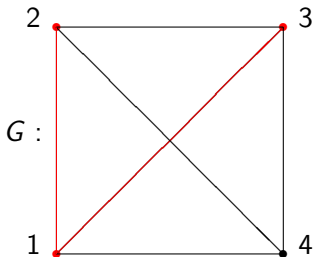
$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m.$$

Цепь — путь без повторений ребер.

Простая цепь — цепь без повторений вершин.

Пути в графах

Путь $P = 1, (1, 2), 2, (1, 2), 1, (1, 3), 3$ из вершины 1 в вершину 3 в графе G :



Свойства путей и цепей

Предложение 7.2. Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер. Тогда в графе G из любого пути можно выделить простую цепь, соединяющую те же вершины, что и этот путь.

Доказательство. Пусть P — (v, w) -путь в G , где $v, w \in V$. Покажем, что из пути P можно выделить простую (v, w) -цепь.

Свойства путей и цепей

Доказательство. Если в P никакая вершина, не повторяется, то он — искомая простая (v, w) -цепь.

Пусть некоторая вершина $u \in V$ в нем повторяется, т. е.

$$P = vP_1uP_2uP_3w,$$

где vP_1u , uP_2u , uP_3w — пути, на которые разбивается путь P двумя повторами вершины u . При этом первый или третий из них может быть пустым (если $u = v$ или $u = w$), но **второй из них всегда содержит хотя бы одно ребро.**

Тогда повторим эти рассуждения для (v, w) -пути $P' = vP_1uP_3w$, имеющего меньшую длину.

Через конечное число шагов получим искомую простую (v, w) -цепь.



Циклы в графах

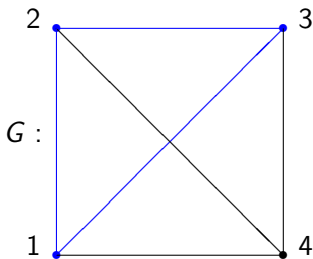
Замкнутый путь — путь, в котором первая и последняя вершины совпадают.

Цикл — замкнутый путь без повторений ребер.

Простой цикл — цикл, в котором все вершины, кроме последней, различны.

Циклы в графах

Простой цикл $C = 1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (1, 3), 1$ в графе G :



Свойства цепей и циклов

Предложение 7.3. Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер. Тогда

- 1) в графе G из любого замкнутого пути нечетной длины m , $m \geq 3$, можно выделить простой цикл нечетной длины;
- 2) в графе G найдутся
 - а) простая цепь с длиной, не меньшей $\delta(G)$,
 - б) при $\delta(G) \geq 2$ простой цикл с длиной, не меньшей $\delta(G) + 1$.

Свойства цепей и циклов

Доказательство.

1. Рассмотрим замкнутый путь P нечетной длины m , $m \geq 3$.

Если в нем никакая вершина, кроме последней, не повторяется, то он — искомый простой цикл нечетной длины. Пусть некоторая вершина $v \in V$ в нем повторяется, т. е.

$$P = vP_1vP_2v,$$

где vP_1v , vP_2v — непустые замкнутые пути, на которые вершина v разбивает путь P . Пусть m_1, m_2 — длины замкнутых путей P_1, P_2 , причем $m_1 < m$ и $m_2 < m$. Из того, что $m = m_1 + m_2$ и m — нечетное число, заключаем, что либо m_1 — нечетное число, либо m_2 — нечетное число. Повторим рассуждения для нового замкнутого пути $P' = vP_i v$ с меньшей нечетной длиной m_i . Через конечное число шагов получим искомый простой цикл нечетной длины.

Свойства цепей и циклов

Доказательство.

2. а) Рассмотрим произвольную вершину $v_0 \in V$. Положим $P_0 = v_0$ — простая цепь длины 0. Пусть мы уже построили простую цепь $P_i = v_0 v_1 \dots v_i$ длины i .

Если $i = \delta(G)$, то P_i — искомая простая цепь.

Пусть $i < \delta(G)$. Т. к. $d_G(v_i) \geq \delta(G)$, **найдется такая вершина $v_{i+1} \in V$, не совпадающая ни с одной из вершин v_0, v_1, \dots, v_{i-1} , что $(v_i, v_{i+1}) \in E$.** Добавим эту вершину v_{i+1} к цепи P_i , т. е. построим простую цепь $P_{i+1} = v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}$ длины $(i + 1)$.

Через $\delta(G)$ шагов мы получим искомую простую цепь.

Свойства цепей и циклов

Доказательство.

2. б) Пусть мы построили простую цепь $P_m = v_0, v_1, \dots, v_m$ длины $m = \delta(G)$. Если найдется такая вершина v_{m+1} , не совпадающая с вершинами v_0, v_1, \dots, v_m , что $(v_m, v_{m+1}) \in E$, то добавим эту вершину v_{m+1} к цепи P_m , т. е. построим простую цепь $P_{m+1} = v_0, v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ длины $(m + 1)$.

Так будем действовать до тех пор, пока не получим **такую простую цепь** $P_{m'} = v_0, v_1, \dots, v_m, \dots, v_{m'}$ длины m' , $m' \geq m$, **что все вершины, с которыми связана вершина $v_{m'}$, лежат на цепи $P_{m'}$.**

Пусть v_{i_0} , $i_0 < m'$, — вершина с наименьшим номером на цепи $P_{m'}$, с которой связана вершина $v_{m'}$. Тогда искомым простым циклом $C = v_{i_0}, \dots, v_{m'}, v_{i_0}$.



Подграф

Граф $H = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Подграф $H = (V, E')$ графа $G = (V, E)$, т. е. **подграф, содержащий все вершины графа G** , называется его **остовным подграфом**.

Операции над графами

Операции над графами.

Граф $G - e$, где $e \in E$: $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Граф $G - v$, где $v \in V$, — граф с множеством вершин $V \setminus \{v\}$ и с множеством ребер E без всех ребер с концами в вершине v .

Граф $G + e$, где $e = (v, w)$, $e \notin E$:

$G + e = (V \cup \{v, w\}, E \cup \{e\})$.

Связность

Граф $G = (V, E)$ называется **связным**, если для каждой пары вершин графа G найдется путь, соединяющий эти вершины (а значит, и простая цепь, соединяющая эти вершины).

Максимальный (по включению) связный подграф графа G называется его **компонентой связности**.

Если G — связный граф, то у графа G ровно одна компонента связности.

Связность

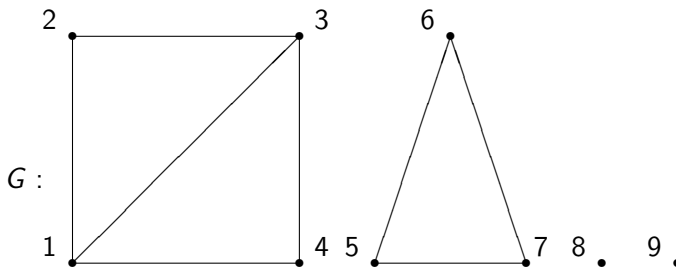
Пусть $G = (V, E)$ — граф. На множестве его вершин V рассмотрим двуместное отношение R : vRw , где $v, w \in V$, если в G найдется (v, w) -путь.

Тогда R — рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. R — отношение эквивалентности на множестве V .

Пусть $V_1, \dots, V_s \subseteq V$ — все классы эквивалентности по отношению R .

Тогда G_1, \dots, G_s , где $G_i = (V_i, E_i)$, где $E_i \subseteq E$ — все ребра, оба конца которых принадлежат множеству V_i , $i = 1, \dots, s$, — все компоненты связности графа G .

Компоненты связности графа



Свойства связных графов

Предложение 7.4.

1. Если к связному графу добавить ребро, соединяющее его несмежные верны, то в полученном графе найдется цикл.
2. Если из связного графа удалить ребро, принадлежащее некоторому циклу, то останется связный граф.

Свойства связных графов

Доказательство. 1. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $e = (v, w)$, где $v, w \in V$, $e \notin E$.

Граф G — связный, поэтому в нем найдется (v, w) -путь, а значит, и простая (v, w) -цепь P . В графе $G + e$ простая цепь P также содержится. Тогда $C = vPw(w, v)v$ — искомый цикл в графе $G + e$.

Свойства связных графов

Доказательство. 2. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и ребро e принадлежит циклу C графа G .

Рассмотрим две произвольные вершины u_1, u_2 графа $G - e$. Эти же вершины принадлежат графу G . Граф G — связный, поэтому в графе G найдется (u_1, u_2) -путь P . Если путь P не проходит через ребро e , то он содержится и в графе $G - e$. Если же путь P проходит через ребро e , то заменим в нем это ребро ребрами, принадлежащими оставшейся части цикла C . Получим (u_1, u_2) -путь в графе $G - e$.



Число компонент связности

Теорема 7.1. Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер с p вершинами, q ребрами и s компонентами связности. Тогда

- 1) $s \geq p - q$;
- 2) если в графе G отсутствуют циклы, то $s = p - q$.

Число компонент связности

Доказательство.

1. Рассмотрим переход от графа $G_i = (V, E_i)$ к графу $G_{i+1} = G_i + e$, где $E_i \subseteq E$, $e \in E \setminus E_i$. Пусть в графах G_i, G_{i+1} соответственно s_i, s_{i+1} компонент связности. Тогда если ребро e соединяет вершины из одной компоненты связности графа G_i , то $s_{i+1} = s_i$; и если ребро e соединяет вершины из разных компонент связности графа G_i , то $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому

$$s_{i+1} \geq s_i - 1.$$

Граф G можно получить из графа $G_0 = (V, \emptyset)$ с p компонентами связности последовательным добавлением всех ребер множества E . Поэтому $s \geq p - q$.

2. Если же в графе G нет циклов, то в предыдущих рассуждениях верно $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому $s = p - q$.



k -связность

Пусть $k \geq 1$.

Граф $G = (V, E)$ называется **k -связным**, если он содержит не менее k вершин и при удалении из него не более $(k - 1)$ любых вершин остается связный граф.

Двусвязный граф называется также **неразделимым** графом, или **блоком**.

Граф $G = (V, E)$ называется **реберно k -связным**, если при удалении из него не более $(k - 1)$ любых ребер остается связный граф.

Оргграф

Ориентированным графом (орграфом) G называется пара (V, E) , где V — непустое конечное множество вершин; E — конечное множество дуг (направленных ребер), причем каждой дуге $e \in E$ сопоставлена **упорядоченная** пара вершин, т. е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.

Орграфы

По-прежнему, дуга $e = (v, v)$, где $v \in V$, называется **петлей**; дуги $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, называются **кратными**.

По-прежнему, орграф, в котором допускаются и петли, и кратные дуги, называется **псевдографом**; орграф, в котором не допускаются петли, но могут быть кратные дуги, называется **мультиграфом**.

Орграф без петель и кратных дуг называется **простым орграфом**.

Направления дуг

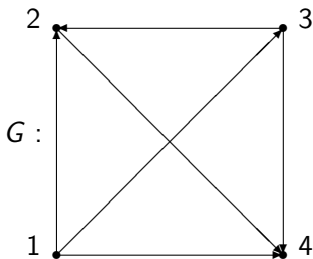
Говорят, что дуга $e = (v, w)$ **исходит** из вершины v и **входит** в вершину w .

При этом вершина v называется **началом**, а вершина w — **концом** дуги e .

Дуги $e_1 = (v, w) \in E$ и $e_2 = (w, v) \in E$, где $v, w \in V$, — различны в орграфе $G = (V, E)$, т. к. **у них разные направления**.

При изображении орграфов направления дуг указывают стрелочками.

Пример орграфа



Изоморфизм орграфов

Два орграфа без петель и кратных дуг

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ и } G_2 = (V_2, E_2)$$

называются **изоморфными**, если найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющее дуги, т. е. для любых вершин $v, w \in V_1$ выполняется соотношение:

$$(v, w) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2.$$

Полустепени исхода и захода вершины

Полустепенью захода $d_G^-(v)$ вершины $v \in V$ в орграфе $G = (V, E)$ называется **число входящих в нее дуг**. Если $d_G^-(v) = 0$, то вершина v называется **источником** в орграфе G .

Полустепенью исхода $d_G^+(v)$ вершины $v \in V$ в орграфе $G = (V, E)$ называется **число исходящих из нее дуг**. Если $d_G^+(v) = 0$, то вершина v называется **стоком** в орграфе G .

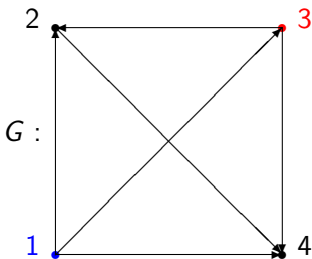
Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в орграфе $G = (V, E)$ называется величина

$$d_G(v) = d_G^-(v) + d_G^+(v).$$

Если $d_G(v) = 0$, то вершина v называется **изолированной** в орграфе G .

Полустепени исхода и захода вершины

$$d_G^-(1) = 0, d_G^+(1) = 3; d_G^-(3) = 1, d_G^+(3) = 2:$$



Пути и циклы в орграфах

(Неориентированным) путем в орграфе $G = (V, E)$ из вершины v_0 в вершину v_m (или (v_0, v_m) -путем) называется последовательность вершин и ребер графа G

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{m-1}, e_m, v_m,$$

в которой либо $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$, либо $e_i = (v_i, v_{i-1}) \in E$ для каждого $i = 1, \dots, m$, $m \geq 0$.

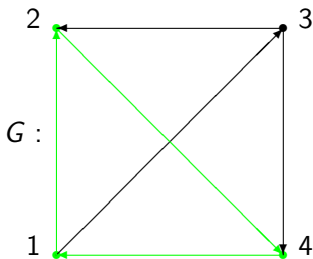
Путь называется **ориентированным** (или **направленным**), если $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ для каждого $i = 1, \dots, m$.

Понятия цепи, простой цепи, замкнутого пути, цикла и простого цикла в орграфах вводятся аналогично.

Направленный простой цикл в орграфе называется также **контуром**.

Пути и циклы в орграфах

Контур $C = 1, (1, 2), 2, (2, 4), 4, (4, 1), 1$ в орграфе G :



Задачи для самостоятельного решения

1. Определите понятие изоморфизма для псевдографов.
2. Проверьте, верны ли предложения 1–4
 - 1) для мультиграфов;
 - 2) для псевдографов?

Если верны, то обоснуйте их; если не верны, то укажите, как нужно изменить формулировки, чтобы они стали верными.

Литература к лекции

1. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра М, 2012. С. 26–29.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 9–11, 17, 22–25, 26–27.