Лекция 19. Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Сложность схем для сложения и для вычитания n-разрядных двоичных чисел.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

СФЭ

Рассмотрим *схемы из функциональных элементов*.

Они определяются над некоторым **базисом** (*функциональных элементов*).

В качестве базиса можно выбрать любое множество функций алгебры логики.

Мы рассмотрим базис $B_0 = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$.

СФЭ

Схемой из функциональных элементов (СФЭ)

$$S(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$$

в базисе $B_0 = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$ называется

1) ориентированный граф $G = (V, E)$ без ориентированных циклов, причем в графе G полустепень захода любой его вершины не превосходит двух;

2) любая вершина графа G с полустепенью захода, равной нулю, называется входной (или входом) и ей приписывается какая-то входная переменная x_i;

3) любая вершина графа G с полустепенью захода, не равной нулю, называется внутренней;

СФЭ с задержками

4) любой вершине графа G с полустепенью захода, равной единице, приписывается отрицание $\bar{\ }$;

5) любой вершине графа G с полустепью захода, равной двум, приписывается либо конъюнкция $\&$, либо дизъюнкция $\vee$;

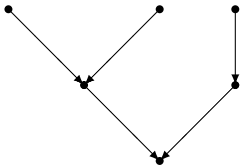
6) некоторые (входные или внутренние) вершины графа G называются выходными (или выходами) и им приписываются (различные) выходные переменные $y_1, \ldots, y_m$.

СФЭ

Пример. Рассмотрим пример СФЭ:

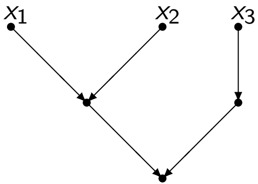
СФЭ

Пример. Рассмотрим пример СФЭ:



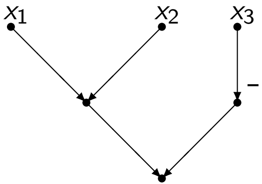
СФЭ

Пример. Рассмотрим пример СФЭ:



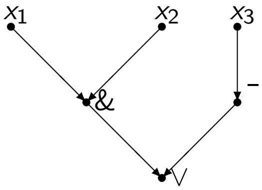
СФЭ

Пример. Рассмотрим пример СФЭ:



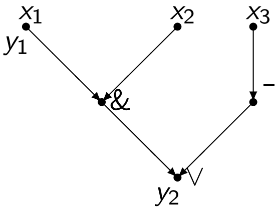
СФЭ

Пример. Рассмотрим пример СФЭ:



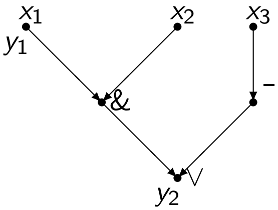
СФЭ

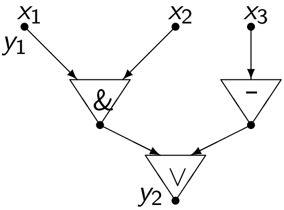
Пример. Рассмотрим пример СФЭ:



СФЭ

Пример. Рассмотрим пример СФЭ:





Сложность СФЭ

Сложностью $L(S)$ СФЭ S называется число ее внутренних вершин.

Например, сложность СФЭ S из предыдущего примера равна 3, т. е. $L(S) = 3$.

Функции, вычисляемые СФЭ

Рассмотрим СФЭ

$$S(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$$

в базисе $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$.

Пусть она построена по орграфу $G = (V, E)$.

Тогда в любой ее вершине $v \in V$ **вычисляется** некоторая **функция** $f_v(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, по индукции однозначно определяемая по СФЭ.

Функции, вычисляемые СФЭ

Базис индукции. Если v — входная вершина СФЭ и ей приписана входная переменная x_i, то

$$f_v = x_i,$$

т. е. в вершине v вычисляется функция, тождественно равная переменной x_i.

Функции, вычисляемые СФЭ

Индуктивный переход. 1. Если v — внутренняя вершина СФЭ и ей приписано отрицание $^{-}$, причем $(w, v) \in E$, то

$$f_v = \bar{f}_w,$$

т. е. в вершине v вычисляется функция, равная отрицанию той функции, которая вычисляется в вершине w, из которой ведет дуга в вершину v.

Функции, вычисляемые СФЭ

Индуктивный переход. 2. Если v — внутренняя вершина СФЭ и ей приписана конъюнкция & (соответственно, дизъюнкция $\vee$), причем $(w_1, v) \in E$, $(w_2, v) \in E$, где $w_1 \neq w_2$, то

$$f_v = f_{w_1} \cdot f_{w_2} \quad (f_v = f_{w_1} \vee f_{w_2}),$$

т. е. в вершине v вычисляется функция, равная конъюнкции (соответственно, дизъюнкции) тех функций, которые вычисляются в вершинах w_1 и w_2, из которых ведут дуги в вершину v.

Функции, вычисляемые СФЭ

Итак, в любой вершине СФЭ

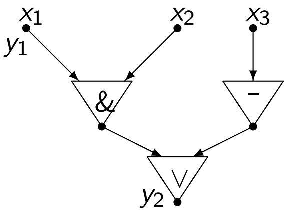
$$S(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$$

вычисляется некоторая функция алгебры логики.

Обычно считают, что СФЭ $S(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ вычисляет систему функций $F(S) = \{f_1, \dots, f_m\}$, которые вычисляются в выходных вершинах $y_1, \dots, y_m$.

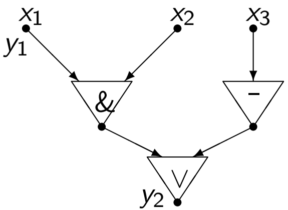
Функции, вычисляемые СФЭ

Пример. Найдем систему функций $F(S)$, которые вычисляются СФЭ $S(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2)$ из предыдущего примера:



Функции, вычисляемые СФЭ

Пример. Найдем систему функций $F(S)$, которые вычисляются СФЭ $S(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2)$ из предыдущего примера:



Получаем $F(S) = \{f_1, f_2\}$, где:

$$f_1 = x_1, \quad f_2 = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_3.$$

СФЭ для произвольной функции

Любую ли функцию $f \in P_2$ можно вычислить некоторой СФЭ в базисе $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$?

СФЭ для произвольной функции

Любую ли функцию $f \in P_2$ можно вычислить некоторой СФЭ в базисе $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$?

Да, т. к. множество

$$B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\} \subseteq P_2$$

является полной системой.

Значит, функцию f можно записать некоторой формулой над множеством B_0.

А затем по этой формуле построить соответствующую СФЭ, вычисляющую функцию f.

Арифметические операции

Мы рассмотрим, с какой сложностью можно построить схемы для *сложения*, *вычитания* и *умножения* n-разрядных чисел.

Числа в двоичной системе счисления

Пусть $n \in \mathbb{N}$.

Если $(x_1, \dots, x_n) \in E_2^n$, где $E_2 = \{0, 1\}$, то положим

$$(x_1, \dots, x_n)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 2^{n-i}.$$

Т. е. $(x_1, \dots, x_n)_2$ обозначает число, которое в двоичной системе счисления записывается как $x_1 x_2 \dots x_n$.

Отметим, что

$$0 \leqslant (x_1, \dots, x_n)_2 \leqslant 2^n - 1.$$

Сумматор

Сумматором S_n порядка n, $n \geqslant 1$, называется такая СФЭ с $2n$ входами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и $n+1$ выходами $z_0, z_1, \ldots, z_n$, что

$$(z_0, z_1, \ldots, z_n)_2 = (x_1, \ldots, x_n)_2 + (y_1, \ldots, y_n)_2.$$

Т. е. сумматор S_n на своих выходах вычисляет сумму двух n-разрядных чисел, которые подаются на его входы.

Сумматор S_n также называется n-разрядным сумматором.

Сумматор S_1

Пример. Построим одноразрядный сумматор $S_1(x, y; z_0, z_1)$.

Сумматор S_1

Пример. Построим одноразрядный сумматор $S_1(x, y; z_0, z_1)$.

Найдем функции $z_0(x, y)$ и $z_1(x, y)$:

x	y	z_0	z_1
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Сумматор S_1

Пример. Построим одноразрядный сумматор $S_1(x, y; z_0, z_1)$.

Найдем функции $z_0(x, y)$ и $z_1(x, y)$:

x	y	z_0	z_1
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Поэтому

$$z_0 = x \cdot y, \quad z_1 = (x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee y) \cdot (\overline{x \cdot y}).$$

Сумматор S_1

Пример. Построим одноразрядный сумматор $S_1(x, y; z_0, z_1)$.

Найдем функции $z_0(x, y)$ и $z_1(x, y)$:

x	y	z_0	z_1
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Поэтому

$$z_0 = x \cdot y, \quad z_1 = (x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee y) \cdot (\overline{x \cdot y}).$$

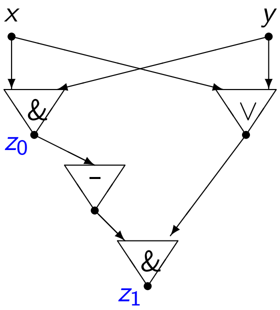
Значит, в базисе B_0 можно построить сумматор S_1 со сложностью 4.

Сумматор S_1

Одноразрядный сумматор $S_1(x, y; z_0, z_1)$:

$$z_0 = x \cdot y, \quad z_1 = (x \vee y) \cdot (\overline{x \cdot y}).$$

S_1 :



Сложность сумматора

С какой сложностью можно построить сумматор S_n, $n \geqslant 1$?

Сложность сумматора

С какой сложностью можно построить сумматор S_n, $n \geqslant 1$?

Вспомним алгоритм сложения n-разрядных чисел «в столбик».

При сложении каждого разряда i (кроме младшего) складывают x_i, y_i и разряд переноса p_i.

При этом получается двухразрядное число $q_i z_i$, где q_i — старший, а z_i — младший разряды.

Теперь z_i является разрядом i суммы этих n-разрядных чисел, а q_i — разрядом переноса в следующем, более старшем разряде.

Ячейка сумматора

Назовем **ячейкой сумматора** S СФЭ с тремя входами x, y, p и двумя выходами q, z, которая вычисляет описанное выше преобразование входов в выходы, а именно,

$$q = x \cdot y \vee x \cdot p \vee y \cdot p, \quad z = x \oplus y \oplus p.$$

Отметим, что

$$q = x \cdot y \vee x \cdot p \vee y \cdot p = x \cdot y \vee p(x \oplus y), \quad z = (x \oplus y) \oplus p.$$

Ячейка сумматора

Назовем **ячейкой сумматора** S СФЭ с тремя входами x, y, p и двумя выходами q, z, которая вычисляет описанное выше преобразование входов в выходы, а именно,

$$q = x \cdot y \vee x \cdot p \vee y \cdot p, \quad z = x \oplus y \oplus p.$$

Отметим, что

$$q = x \cdot y \vee x \cdot p \vee y \cdot p = x \cdot y \vee p(x \oplus y), \quad z = (x \oplus y) \oplus p.$$

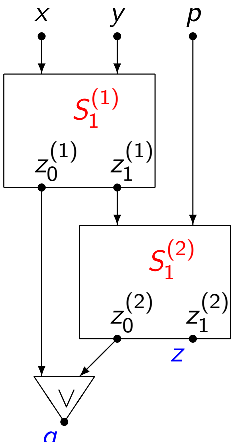
Значит, что в базисе B_0 можно построить ячейку сумматора S со сложностью 9.

Ячейка сумматора

Ячейка сумматора $S(x, y, p; q, z)$:

$$q = x \cdot y \vee p(x \oplus y), \quad z = (x \oplus y) \oplus p.$$

S :



Сложность сумматора S_n

Теорема 19.1. *В базисе* $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ *можно построить сумматор* S_n *со сложностью* $9n - 5$.

Доказательство. Применим алгоритм сложения n-разрядных чисел $(x_1, \ldots, x_n)_2$ и $(y_1, \ldots, y_n)_2$ «в столбик».

Сложность сумматора S_n

Доказательство. Сначала возьмем одноразрядный сумматор S_1 и припишем его входам x_n и y_n.

Младший разряд выхода этого одноразрядного сумматора S_1 назовем выходом z_n, а старший разряд его выхода обозначим p_{n-1}.

Сложность сумматора S_n

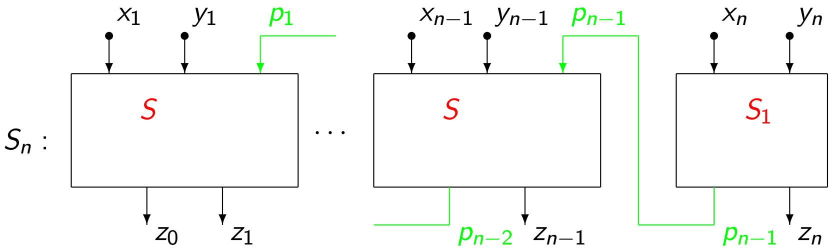
Доказательство. Далее для каждого $i = n-1, \ldots, 1$ повторим следующие рассуждения.

Возьмем новую ячейку сумматора S, придадим ей номер i и двум ее входам припишем x_i, y_i, а на третий вход направим p_i.

Младший разряд выхода этой ячейки сумматора S с номером i назовем выходом z_i, а старший разряд ее выхода обозначим p_{i-1} при $i \geqslant 2$ и назовем выходом z_0 при $i = 1$.

Сложность сумматора S_n

Сумматор $S_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; z_0, z_1, \ldots, z_n)$:



Сложность сумматора S_n

Доказательство. Полученная в итоге СФЭ является n-разрядным сумматором S_n.

Оценим его сложность:

$$L(S_n) \leqslant (n-1)L(S) + L(S_1) \leqslant 9(n-1) + 4 = 9n - 5.$$

$\square$

Вычитатель

Вычитателем W_n порядка n, $n \geqslant 1$, называется такая СФЭ с $2n$ входами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и n выходами $u_1, \ldots, u_n$, что

$$(u_1, \ldots, u_n)_2 = (x_1, \ldots, x_n)_2 - (y_1, \ldots, y_n)_2,$$

если

$$(x_1, \ldots, x_n)_2 \geqslant (y_1, \ldots, y_n)_2.$$

Т. е. вычитатель W_n на своих выходах вычисляет разность двух n-разрядных чисел, которые подаются на его входы, при условии, что первое из этих чисел не меньше второго.

Если первое из этих чисел меньше второго, то входы неправильные, и не важно, что вычисляется на выходах.

Вычитатель W_n также называется n-разрядным вычитателем.

Вычитатель W_1

Пример. Построим одноразрядный вычитатель $W_1(x, y; u)$.

Вычитатель W_1

Пример. Построим одноразрядный вычитатель $W_1(x, y; u)$.

Найдем функцию $u(x, y)$:

x	y	u
0	0	0
0	1	—
1	0	1
1	1	0

Вычитатель W_1

Пример. Построим одноразрядный вычитатель $W_1(x, y; u)$.

Найдем функцию $u(x, y)$:

x	y	u
0	0	0
0	1	—
1	0	1
1	1	0

Поэтому, например,

$$u = x \cdot \bar{y}.$$

Вычитатель W_1

Пример. Построим одноразрядный вычитатель $W_1(x, y; u)$.

Найдем функцию $u(x, y)$:

x	y	u
0	0	0
0	1	—
1	0	1
1	1	0

Поэтому, например,

$$u = x \cdot \bar{y}.$$

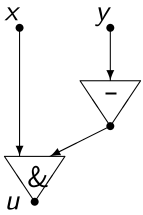
Значит, в базисе B_0 можно построить вычитатель W_1 со сложностью 2.

Вычитатель W_1

Одноразрядный вычитатель $W_1(x, y; u)$:

$$u = x \cdot \bar{y}.$$

W_1 :



Сложность вычитателя

С какой сложностью можно построить вычитатель W_n, $n \geqslant 1$?

Сложность вычитателя

С какой сложностью можно построить вычитатель W_n, $n \geqslant 1$?

Сначала рассмотрим вспомогательную лемму.

А затем сведем вычитание чисел к сложению некоторых других чисел.

Вспомогательная лемма

Лемма 19.1. *Если* $x_1, \ldots, x_n \in E_2$, *то*

$$(x_1, \ldots, x_n)_2 + (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)_2 = 2^n - 1.$$

Вспомогательная лемма

Лемма 19.1. *Если* $x_1, \ldots, x_n \in E_2$, *то*

$$(x_1, \ldots, x_n)_2 + (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)_2 = 2^n - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим сумму:

$$\begin{array}{r|cccc} & x_1 & \ldots & x_{n-1} & x_n \\ + & \bar{x}_1 & \ldots & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_n \\ \hline & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{array}$$

Далее заметим, что

$$(1, \ldots, 1)_2 = 2^n - 1.$$

$\square$

Сложность вычитателя W_n

Теорема 19.2. *В базисе* $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ *можно построить вычитатель* W_n *со сложностью* $11n - 5$.

Сложность вычитателя W_n

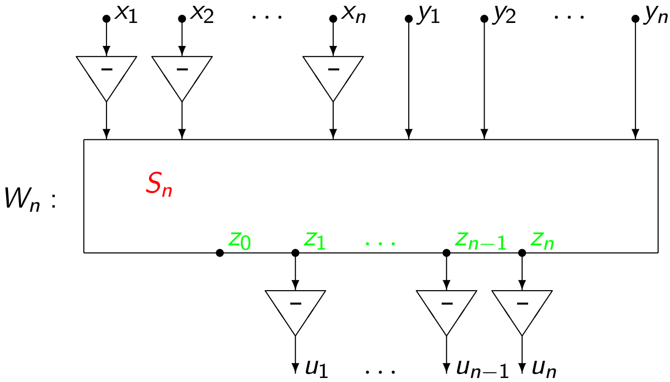
Доказательство. Построим вычитатель W_n в соответствии с тождеством:

$$(u_1, \ldots, u_n)_2 = 2^n - 1 - ((y_1, \ldots, y_n)_2 + (2^n - 1 - (x_1, \ldots, x_n)_2)).$$

При построении применим вспомогательную лемму.

Сложность вычитателя W_n

Вычитатель $W_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; u_1, \ldots, u_n)$:



Сложность вычитателя W_n

Доказательство. Оценим сложность полученного вычитателя W_n:

$$L(W_n) \leqslant 2n + L(S_n) \leqslant 2n + 9n - 5 = 11n - 5.$$

$\square$

Задачи для самостоятельного решения

1^*. Покажите, что в базисе $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ сложность любого одноразрядного сумматора S_1 не меньше 4.

2^*. Покажите, что в базисе $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ сложность любого одноразрядного вычитателя W_1 не меньше 2.

3. Покажите, что в базисе $B_0 = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ можно построить вычитатель W_n со сложностью $10n - 5$.

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 61–66.

2. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. X 1.1.