Лекция 11. Раскраски графов. Раскраски вершин графов в два цвета. Критерий двудольности графа. Раскраски вершин планарных графов.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Раскраска вершин графа

Раскраска вершин графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение
$$\rho : V \to \{1, 2, \ldots, k\},$$
в котором из $(v, w) \in E$ следует $\rho(v) \neq \rho(w)$.

Т. е. любые смежные вершины обязаны получить разные цвета.

Хроматическое число $\chi(G)$ графа G — наименьшее число цветов, в которое можно раскрасить его вершины.

Для любого графа $G = (V, E)$ верно соотношение $\chi(G) \leqslant |V|$.

Раскраска вершин графа в два цвета

Теорема 11.1 (Кенига). *Вершины графа G можно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда в нем не найдется ни одного простого цикла нечетной длины.*

Доказательство. 1. Если в графе G найдется простой цикл нечетной длины, то вершины этого цикла в два цвета не раскрасить.

Раскраска вершин графа в два цвета

Доказательство. 2. Пусть теперь в графе G отсутствуют простые циклы нечетной длины.

Можно считать, что G — связный граф, иначе проведем рассуждения для каждой его компоненты связности.

Построим в графе G его остовное дерево D.

Выберем произвольную вершину $v_0 \in V$. В дереве D для пары вершин v_0, w, где $w \in V$, существует ровно одна простая (v_0, w)-цепь P_w.

Рассмотрим отображение $\rho : V \to \{1, 2\}$:
$\rho(w) = 1$, если длина цепи P_w нечетна;
$\rho(w) = 2$, если длина цепи P_w четна.

Покажем, что ρ является раскраской вершин, т. е. в графе G нет ребер, оба конца которых окрашены в один и тот же цвет.

Раскраска вершин графа в два цвета

Доказательство. Предположим обратное: пусть $(u, w) \in E$ и $\rho(u) = \rho(w)$.

Рассмотрим в графе G замкнутый путь $P = v_0 P_u u(u, w) w P_w v_0$.

Длина пути P нечетна, т. к. у длин цепей P_u, P_w в дереве D одинаковая четность.

Но из указанного замкнутого пути P можно выделить простой цикл нечетной длины — противоречие.

Значит, ρ — раскраска вершин графа G в два цвета.

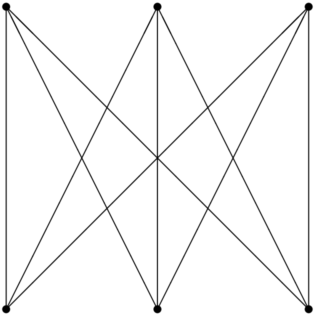
$\square$

Двудольные графы

Граф называется **двудольным**, если его вершины можно так разбить на две непустые части (доли), что смежны только вершины из разных долей.

Полным двудольным графом $K_{m,n}$ называется двудольный граф с долями из m и n вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей.

Полный двудольный граф $K_{3,3}$



Критерий двудольности графа

Следствие. *Граф G, в котором не менее двух вершин, является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит простых циклов нечетной длины.*

Действительно, граф G не содержит простых циклов нечетной длины тогда и только тогда, когда его вершины можно раскрасить в два цвета.

1. Если граф G — двудольный, то раскрасим вершины из одной доли в цвет 1, а вершины из другой доли — в цвет 2. Получим раскраску вершин графа G в два цвета.

2. Обратно, если вершины графа G раскрашены в два цвета, то все вершины одного цвета не связаны ребрами, поэтому их можно объединить в одну долю.

Раскраска вершин планарного графа

Теорема 11.2 (о раскраске вершин планарного графа). *Вершины любого планарного графа G можно раскрасить не более чем в пять цветов.*

Доказательство проведем индукцией по числу p вершин в графе G.

Базис индукции: $p = 1$ верен.

Раскраска вершин планарного графа

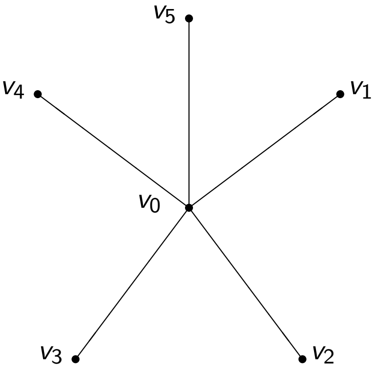
Доказательство. *Индуктивный переход*: пусть вершины любого планарного графа менее чем с p вершинами можно раскрасить в 5 цветов.

Рассмотрим планарный граф $G = (V, E)$, где $|V| = p$. Пусть задана его укладка на плоскости $\Phi(G)$.

По доказанному свойству в графе G найдется такая вершина $v_0 \in V$, что $d_G(v_0) \leqslant 5$.

Пусть $v_1, \ldots, v_m \in V$ — все смежные с v_0 вершины в графе G, $m \leqslant 5$, и пусть в укладке $\Phi(G)$ ребра $(v_0, v_1), \ldots, (v_0, v_m)$ расположены по часовой стрелке в этом порядке.

Укладка графа G на плоскости



Раскраска вершин планарного графа

Доказательство. Рассмотрим планарный граф $G' = G - v_0$. Для него верно предположение индукции, поэтому найдется раскраска ρ его вершин в 5 цветов.

Перенесем эту раскраску ρ на вершины графа G, при этом вершина v_0 останется неокрашенной.

Покажем, что вершину v_0 можно покрасить, не добавляя новый цвет.

Раскраска вершин планарного графа

Доказательство. 1. Если $m \leqslant 4$ или $m = 5$, но среди цветов вершин $v_1, \ldots, v_m$ не встречается какой-то цвет, то припишем вершине v_0 цвет, отсутствующий в вершинах $v_1, \ldots, v_m$.

Раскраска вершин планарного графа

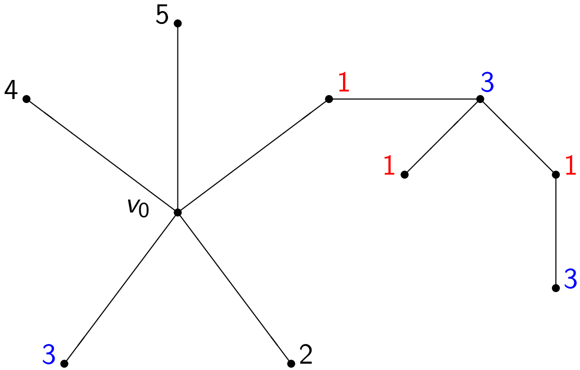
Доказательство. 2. Пусть теперь $m = 5$ и среди цветов вершин $v_1, \ldots, v_5$ встречаются все 5 цветов, причем вершина v_i окрашена в цвет i, $i = 1, \ldots, 5$.

Пусть $A_{1,3}(v_1)$ — множество всех тех вершин графа G, в которые найдутся пути из вершины v_1 по вершинам только цветов 1 и 3.

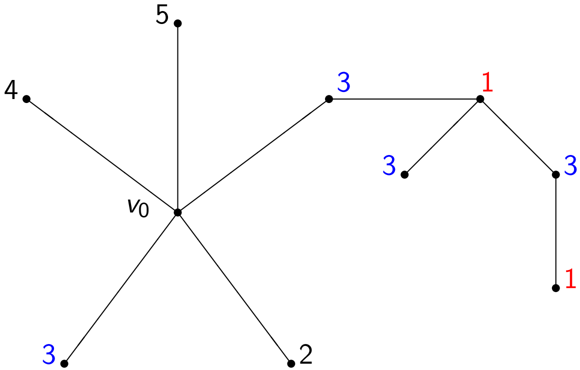
2.1. Если $v_3 \notin A_{1,3}(v_1)$, то все вершины из $A_{1,3}(v_1)$ перекрасим: если вершина окрашена в цвет 1, то ее покрасим в цвет 3; если вершина окрашена в цвет 3, то ее покрасим в цвет 1.

Тогда вершина v_1 приобретет цвет 3. А значит, вершине v_0 можно приписать цвет 1.

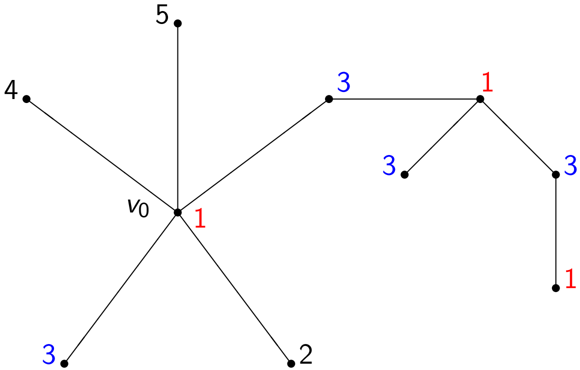
Перекрашивание вершин графа G



Перекрашивание вершин графа G



Перекрашивание вершин графа G



Раскраска вершин планарного графа

Доказательство. 2.2. Пусть $v_3 \in A_{1,3}(v_1)$. Это означает, что в графе G найдется цикл C, содержащий вершину v_0, и все другие вершины цикла C окрашены только в цвета 1 или 3, причем вершины v_2 и v_4 лежат по разные стороны от этого цикла.

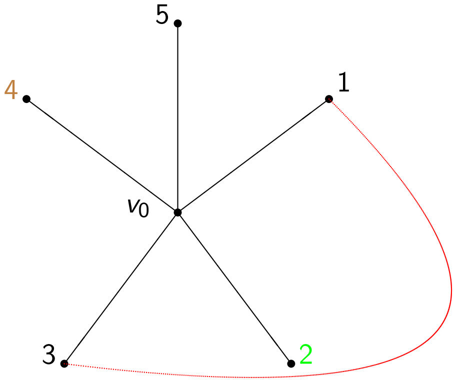
Пусть $A_{2,4}(v_2)$ — множество всех тех вершин графа G, в которые найдутся пути из вершины v_2 по вершинам только цветов 2 и 4.

Теперь $v_4 \notin A_{2,4}(v_2)$, и все вершины из $A_{2,4}(v_2)$ перекрасим: если вершина окрашена в цвет 2, то ее покрасим в цвет 4; если вершина окрашена в цвет 4, то ее покрасим в цвет 2.

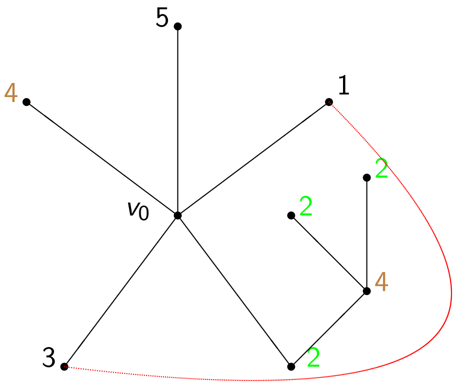
Тогда вершина v_2 приобретет цвет 4. А значит, вершине v_0 можно приписать цвет 2.

$\square$

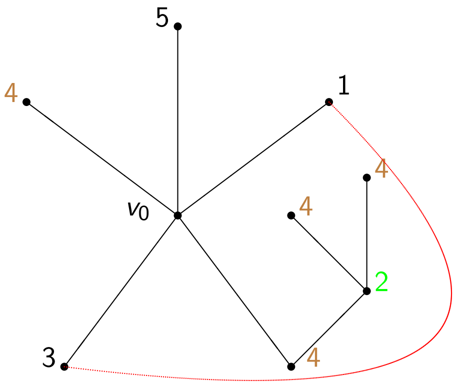
Перекрашивание вершин графа G



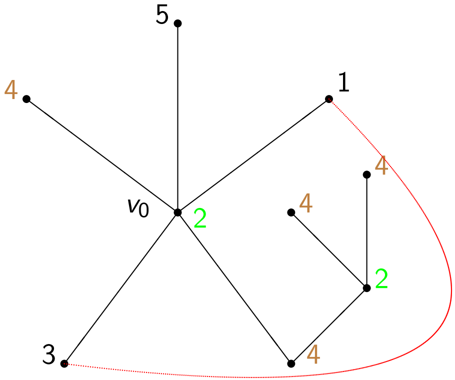
Перекрашивание вершин графа G



Перекрашивание вершин графа G



Перекрашивание вершин графа G



Раскраска ребер графа

Раскраска ребер графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение

$$\rho : E \to \{1, 2, \ldots, k\},$$

в котором из $e_1 = (v, w) \in E$, $e_2 = (v, u) \in E$ следует $\rho(e_1) \neq \rho(e_2)$.

Т. е. любые ребра с общей вершиной обязаны получить разные цвета.

Хроматический индекс $\chi'(G)$ графа G — наименьшее число цветов, в которое можно раскрасить его ребра.

Для любого графа G верно соотношение $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите хроматическое число и хроматический индекс полного графа K_n для каждого $n \geqslant 1$.

2. Найдите хроматическое число и хроматический индекс полного двудольного графа $K_{m,n}$ для каждых $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$.

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.

2. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009.