

Лекция 5. Полнота. Некоторые полные системы. Замыкание. Замкнутые классы. Замкнутость классов T_0 , T_1 , L , S , M .

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Полная система

Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется **полной системой**, если **формулами над A можно выразить любую функцию алгебры логики**.

Полнота системы $\{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$

Предложение 5.1. Система $A = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ является полной.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.

1. Если $f = 0$, то $f = \bar{x} \cdot x$.
2. Если $f \neq 0$, то представим f ее совершенной ДНФ.



Полнота системы $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$

Предложение 5.2. Система $A = \{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$ является полной.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.

1. Если $f = 0$, то $f = x \oplus x$.
2. Если $f \neq 0$, то представим f ее полиномом Жегалкина.



Лемма о двух системах

Покажем полноту некоторых других систем.

Для доказательства полноты нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.1. Пусть $A, B \subseteq P_2$. Если B — полная система и каждая функция из B выражается формулой над множеством A , то A — также полная система.

Лемма о двух системах

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.

Система B — полна, поэтому найдется некоторая формула F над множеством B , которая выражает функцию f .

Пусть в формуле F встречаются только функции $g_1, \dots, g_t \in B$, т. е. $F = F[g_1, \dots, g_t]$.

По условию утверждения каждая функция $g_i \in B$ может быть выражена некоторой формулой G_i над множеством A , $i = 1, \dots, t$.

Тогда, подставив в формулу F вместо каждой функции g_i формулу G_i , получим формулу $F[G_1, \dots, G_t]$ над множеством A , которая выражает функцию f .



Некоторые полные системы

Теорема 5.1. *Следующие множества являются полными системами:*

1. $A = \{\bar{x}, x \cdot y\},$
2. $A = \{\bar{x}, x \vee y\},$
3. $A = \{x/y\},$
4. $A = \{x \downarrow y\}.$

Некоторые полные системы

Доказательство. Применим лемму о двух системах.

1. Выразим все функции из полной системы $\{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ формулами над A : $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$.

2. Выразим все функции из полной системы $\{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ формулами над A : $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$.

3. Выразим все функции из полной системы $\{x \cdot y, \bar{x}\}$ формулами над A : $\bar{x} = x/y$, $x \cdot y = \overline{x/y} = (x/y)/(x/y)$.

4. Выразим все функции из полной системы $\{x \vee y, \bar{x}\}$ формулами над A : $\bar{x} = x \downarrow y$, $x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$.



Полная система

Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется **полной системой**, если формулами над A можно выразить любую функцию алгебры логики.

А как проверить полноту заданной системы A ?

Оказывается, что можно рассматривать замкнутые классы.

Замыкание множества

Пусть $A \subseteq P_2$. **Замыканием** $[A]$ множества A называется множество всех функций, которые могут быть выражены формулами над A .

Замыкание множества

Замыкание множества A можно определить по-другому.

Замыканием $[A]$ называется множество всех функций из P_2 , которые можно получить из функций множества A применением следующих операций:

- 1) добавлением или удалением несущественных переменных;
- 2) подстановкой в функции из A вместо переменных других переменных (не обязательно различных);
- 3) подстановкой в функции из A вместо переменных функций из A или функций, которые уже получены.

Суперпозиция

Операции 1–3 называем операциями **суперпозиции**.

Поэтому замыкание $[A]$ — множество всех функций из P_2 , которые можно получить из функций из A **суперпозициями**.

Предложение 5.3. *Два приведенных определения замыкания множества A , $A \subseteq P_2$, равносильны, т. е. они определяют одно и то же понятие.*

Свойства замыкания множества

Для произвольных множеств $A, B \subseteq P_2$ верны следующие свойства:

1. $[P_2] = P_2$,
2. $A \subseteq [A]$,
3. если $A \subseteq B$, то $[A] \subseteq [B]$,
4. $[[A]] = [A]$.

Замкнутый класс

Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется **замкнутым классом**, если $[A] = A$.

Из свойств замыкания множества следует, что если $A = [B]$ для некоторого множества B , $B \subseteq P_2$, то A — замкнутый класс.

В частности, P_2 — замкнутый класс.

Замкнутые классы и полнота

Предложение 5.4. Пусть $A \subseteq P_2$, A — замкнутый класс и $A \neq P_2$. Тогда для любого множества B , $B \subseteq P_2$, верно: если $B \subseteq A$, то B — не полная система.

Доказательство. Итак,

$$B \subseteq A.$$

По свойствам замыкания и из условия получаем:

$$[B] \subseteq [A] = A \neq P_2.$$

Значит, $[B] \neq P_2$, т. е. B — не полная система.



Конгруэнтные функции

Функции $f \in P_2$ и $g \in P_2$ назовем **конгруэнтными**, если переменные одной из них можно так переименовать, что получится функция, равная другой.

Т. к. в при построении формулы можно подставлять любые переменные (из X) в функции, любой замкнутый класс вместе с каждой функцией содержит все функции, конгруэнтные ей.

Конгруэнтные функции

1. Функции $f_1 = x_1$ и $f_2 = x_2$ — конгруэнтны (считаем, что разные переменные обозначаются по-разному).

Их можно рассматривать как функции переменных x_1, x_2 :

$$f_1(x_1, x_2) = x_1, \quad f_2(x_1, x_2) = x_2.$$

2. Функции $f_1 = x_1, f_2 = x_2, \dots, f_n = x_n, \dots$ — также конгруэнтны.

Это функции, конгруэнтные тождественной функции $f(x) = x$, их счетное число.

Функции, конгруэнтные тождественной функции

Пусть $e_i^n \in P_2^{(n)}$ и $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 1$.

Функции e_i^n назовем *функциями выбора* (i -й переменной из n переменных), $i = 1, \dots, n$, $n \geq 1$.

Положим:

$$I = \{e_i^n \mid i = 1, \dots, n, n \geq 1\} -$$

множество всех функций выбора.

Т.е. I — множество всех функций (переменных из X), конгруэнтных тождественной функции.

Лемма о замкнутом классе

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.2. Пусть $A \subseteq P_2$ и $I \subseteq A$. Если для любых функций $f_0(y_1, \dots, y_m) \in A$, $f_i(x_1, \dots, x_n) \in A$, $i = 1, \dots, t$, причем функции f_i могут зависеть несущественно от некоторых своих переменных, верно

$$f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \in A,$$

то множество A является замкнутым классом.

Лемма о замкнутом классе

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in [A]$
Она **выражается некоторой формулой F над множеством A .**

Докажем индукцией по числу d вхождений в формулу F
обозначений функций из $A \setminus I$, что $f \in A$.

1. *Базис индукции:* $d = 0$. Если $F = x_i$, то $f \in A$ по условию утверждения.

Лемма о замкнутом классе

2. *Индуктивный переход.* Пусть любая функция, которая может быть выражена формулой не более чем с d_0 вхождениями обозначений функций из $A \setminus I$, содержится в A .

Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in [A]$, которая выражается формулой F с $d_0 + 1$ вхождениями обозначений функций из $A \setminus I$.

Тогда $F = f_0(F_1, \dots, F_m)$, где $f_0 \in A \setminus I$, а F_i — формулы не более чем с d_0 вхождениями обозначений функций из $A \setminus I$, $i = 1, \dots, m$.

По предположению индукции $f_{F_i} \in A$, $i = 1, \dots, m$. Значит,

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_{F_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{F_m}(x_1, \dots, x_n)).$$

Далее по условию утверждения $f \in A$.



Функции, сохраняющие константу 0

Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ сохраняет 0, если

$$f(0, \dots, 0) = 0.$$

Множество всех функций, сохраняющих 0, обозначим T_0 .

Отметим, что $I \subseteq T_0$.

Заметим, что $T_0 \neq \emptyset$, т. к., например, $0, x \oplus y, x \cdot y \in T_0$, и $T_0 \neq P_2$, т. к., например, $1, \bar{x}, x \sim y \notin T_0$.

Замкнутость T_0

Теорема 5.2. Множество T_0 является замкнутым классом.

Доказательство. Применим лемму о замкнутом классе. Пусть $f_0(y_1, \dots, y_m) \in T_0$ и $f_i(x_1, \dots, x_n) \in T_0$, $i = 1, \dots, m$, причем функции f_i , $i = 1, \dots, m$, могут зависеть несущественно от некоторых своих переменных.

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Получаем:

$$\begin{aligned} f(0, \dots, 0) &= f_0(f_1(0, \dots, 0), \dots, f_m(0, \dots, 0)) = \\ &= f_0(0, \dots, 0) = 0, \end{aligned}$$

т. к. $f_i \in T_0$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $f_0 \in T_0$.

Значит, $f \in T_0$.

Функции, сохраняющие константу 1

Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ сохраняет 1, если

$$f(1, \dots, 1) = 1.$$

Множество всех функций, сохраняющих 1, обозначим T_1 .

Отметим, что $I \subseteq T_1$.

Заметим, что $T_1 \neq \emptyset$, т. к., например, $1, x \sim y, x \cdot y \in T_1$, и $T_1 \neq P_2$, т. к., например, $0, \bar{x}, x \oplus y \notin T_1$.

Линейные функции

Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется **линейной**, если она может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_n \in E_2$.

Другими словами, функция f — линейна, если **в ее полиноме Жегалкина нет слагаемых с хотя бы двумя переменными** (т. е. ранга, большего единицы).

Множество всех линейных функций обозначим L .

Отметим, что $I \subseteq L$.

Заметим, что $L \neq \emptyset$, т. к., например, $0, \bar{x}, x \oplus y \in L$, и $L \neq P_2$, т. к., например, $x \cdot y, x \vee y = xy \oplus x \oplus y \notin L$.

Замкнутость L

Теорема 5.4. Множество L является замкнутым классом.

Доказательство. Достаточно заметить, что при подстановке вместо переменных линейной функции каких-то других линейных функций не могут появиться конъюнкции переменных в слагаемых. Поэтому при такой подстановке получается линейная функция.



Замкнутость S

Теорема 5.5. *Множество S является замкнутым классом.*

Доказательство. Применим лемму о замкнутом классе. Пусть $f_0(y_1, \dots, y_m) \in S$ и $f_i(x_1, \dots, x_n) \in S$, $i = 1, \dots, m$, причем функции f_i , $i = 1, \dots, m$, могут зависеть несущественно от некоторых своих переменных.

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} &= \overline{f_0(f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \dots, f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n))} = \\ &= \overline{f_0(\overline{f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}, \dots, \overline{f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)})} = \\ &= \overline{f_0(\overline{f_1(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \overline{f_m(x_1, \dots, x_n)})} = \\ &= \overline{f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))} = \overline{f(x_1, \dots, x_n)},\end{aligned}$$

т. к. $f_i \in S$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $f_0 \in S$.

Свойство немонотонной функции

Наборы $\alpha, \beta \in E_2^n$ назовем **соседними**, если они отличаются только в одном разряде.

Предложение 5.5. Если $f(x_1, \dots, x_n) \notin M$, то найдутся два таких соседних набора $\alpha, \beta \in E_2^n$, что $\alpha \leq \beta$, но $f(\alpha) > f(\beta)$.

Доказательство проведите самостоятельно.

Значит, функция f — монотонна тогда и только тогда, когда на всех парах соседних наборов она принимает значения, не нарушающие монотонность.

Замкнутость M

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Пусть $\alpha, \beta \in E_2^n$ и $\alpha \leq \beta$. Тогда:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f_0(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = f_0(\gamma), \\ f(\beta) &= f_0(f_1(\beta), \dots, f_m(\beta)) = f_0(\delta), \end{aligned}$$

где $\gamma, \delta \in E_2^m$, $f_i(\alpha) = \gamma_i$, $f_i(\beta) = \delta_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Но $f_1, \dots, f_m \in M$, поэтому $\gamma_i \leq \delta_i$ для всех $i = 1, \dots, m$, а значит, $\gamma \leq \delta$.

Но $f_0 \in M$, поэтому $f_0(\gamma) \leq f_0(\delta)$, а значит, $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

Следовательно, $f \in M$.



Проверка принадлежности функции к T_0 , T_1 , L , S , M

Отметим, что для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ алгоритмы проверки ее принадлежности к каждому из классов

T_0 , T_1 , L , S , M

можно построить на основе условий, определяющих наличие у функции каждого из этих свойств.

1. **Сохранения константы**: нужно проверить, что $f(0, \dots, 0) = 0$ или, соответственно, $f(1, \dots, 1) = 1$.
2. **Линейность**: можно найти коэффициенты полинома Жегалкина функции f и проверить, что $c_f(\alpha) = 0$ для всех таких $\alpha \in E_2^n$, что $|\alpha| \geq 2$.

Проверка принадлежности функции к T_0 , T_1 , L , S , M

3. **Самодвойственность**: можно проверить, что на всех парах противоположных наборов f принимает противоположные значения.
4. **Монотонность**: можно проверить, что на всех парах соседних наборов f принимает значения, не нарушающие монотонность.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите теорему 5.3 и предложение 5.5.
2. Покажите, что если таблицу наборов из E_2^n , $n \geq 1$, разделить линией пополам, то все пары противоположных наборов будут находиться симметрично относительно этой линии. На основе этого наблюдения опишите алгоритм проверки принадлежности функции $f \in P_2^{(n)}$, $n \geq 1$, к классу S по ее вектору значений $\alpha_f \in E_2^{2^n}$.

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 13–20.
2. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 2014. С. 33–38.
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. С. 30–39.
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.