

Соответствия и функции.

1. Соответствия.

Определение. Соответствием между множествами A и B называется некоторое подмножество G их декартова произведения: $G \subseteq A \times B$.

Если $(a, b) \in G$, то говорят, что b соответствует a при соответствии G . При этом множество всех таких a называют областью определения соответствия $D(G)$, а множество соответствующих значений b называются областью значений соответствия $E(G)$.

В принятых обозначениях, каждый элемент $b \in B$, соответствующий данному элементу $a \in A$ называется *образом* a при соответствии G , наоборот, элемент $a \in A$ называется *прообразом* элемента $b \in B$ при данном соответствии.

Соответствие называется *полностью определённым*, если $D(G) = A$, то есть каждый элемент множества A имеет хотя бы один образ во множестве B ; в противном случае соответствие называется *частичным*.

Соответствие G называется *сюръективным*, если $E(G) = B$, то есть если каждому элементу множества B соответствует хотя бы один прообраз во множестве A .

Соответствие G называется *функциональным (однозначным)*, если любому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B .

Соответствие называется *инъективным*, если оно является функциональным, и при этом каждый элемент множества B имеет не более одного прообраза.

Соответствие G называется *взаимнооднозначным (биективным)*, если любому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B , и наоборот. Можно сказать также, что соответствие является взаимнооднозначным, если оно является полностью определённым, сюръективным, функциональным, и при этом каждый элемент множества B имеет единственный прообраз.

Пример 1.

а) Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами слов русского и английского языка. Оно не является функциональным, так как почти каждому русскому слову соответствует несколько английских переводов, оно, также, не является, как правило, полностью определённым соответствием, так как всегда существуют английские слова, не включённые в данный словарь. Таким образом, это частичное соответствие.

б) Соответствие между аргументами функции $y = x^2$ и значениями этой функции является функциональным. Однако оно не является взаимнооднозначным, так как каждому значению функции $y_0 \neq 0$ соответствуют два прообраза $x_1 = \sqrt{y_0}$ и $x_2 = -\sqrt{y_0}$.

в) Соответствие между расположенными на шахматной доске фигурами и занимаемыми ими полями является взаимно однозначным.

г) Соответствие между телефонами города Вязьмы и их пятизначными номерами обладает, на первый взгляд, всеми свойствами взаимнооднозначного соответствия. Однако оно, например, не сюръективно, поскольку существуют пятизначные числа, не соответствующие никаким телефонам.

1. Взаимнооднозначные соответствия и мощности множеств.

Если между двумя конечными множествами A и B существует взаимнооднозначное соответствие, то эти множества равномощны. Этот очевидный факт позволяет, во-первых, установить равенство мощности этих множеств, не вычисляя их. Во-вторых, часто можно вычислить мощность множества, установив его однозначное соответствие с множеством, мощность которого известна, либо легко вычисляется.

Теорема 2.1. Если мощность конечного множества A равна n , то число всех подмножеств A равно 2^n , то есть $2^{|A|} = 2^n$.

Множество всех подмножеств множества M называется *булеаном* и обозначается 2^M . Для конечных множеств выполняется: $|2^M| = 2^{|M|}$.

Определение. Множества A и B называются равномощными, если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Заметим, что для конечных множеств это утверждение легко доказать. Для бесконечных множеств оно определяет само понятие равномощности.

Определение. Множество A называется счётным, если оно равномощно множеству натуральных чисел N : $|A| = |N|$.

Очень упрощённо можно сказать, что данное бесконечное множество является счётным, если для его элементов можно установить нумерацию с помощью натуральных чисел.

Без доказательства примем ряд важных фактов:

1. Любое бесконечное подмножество множества натуральных чисел является счётным.
2. Множество $N^k, k \in N$ является счётным.
3. Множество рациональных чисел R является счётным (является следствием из предыдущего утверждения).
4. Объединение конечного числа счётных множеств является счётным.
5. Объединение счётного числа конечных множеств является счётным.
6. Объединение счётного числа счётных множеств является счётным.

Все эти утверждения, как можно видеть, позволяют достаточно успешно устанавливать факт, что данное множество является счётным. Однако сейчас будет показано, что не всякое бесконечное множества является счётным, существует множества большей мощности.

Теорема 2.2 (теорема Кантора). Множество всех действительных чисел из отрезка $[0;1]$ не является счётным.

Доказательство. Допустим, что множество $M = \{x \mid x \in [0,1], x \in R\}$ является счётным и существует его нумерация. Поскольку любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби (периодической или непериодической), то проделаем это с числами данного множества. Расположим их в порядке этой нумерации:

$$\begin{array}{l} 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\ 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\ 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\ 0, \dots \dots \dots \\ 1,000 \dots \end{array}$$

Теперь рассмотрим любую бесконечную десятичную дробь вида $0, b_{11} b_{12} b_{13} \dots$, организованную таким образом, что $b_{11} \neq a_{11}, b_{12} \neq a_{22}, b_{13} \neq a_{33}$ и так далее. Очевидно, что данная дробь не входит в рассматриваемую последовательность, поскольку от первого числа она отличается первой цифрой после запятой, от второго – второй цифрой и так далее. Следовательно, мы получили число из данного интервала, которое не пронумеровано и, таким образом, множество M не является счётным. Его мощность называется *континуум*, а множества такой мощности называются *континуальными*. Приведённый метод доказательства называется *диагональным методом Кантора*.

Следствие 1. Множество действительных чисел R континуально.

Следствие 2. Множество всех подмножеств счётного множества континуально.

Как показывается в теории множеств (с помощью метода, аналогичного приведённому выше), для множества любой мощности множество всех его подмножеств (булеан) имеет более высокую мощность. Поэтому не существует множества максимальной мощности. Например, множество-универсум U , описанное Кантором должно содержать все мыслимые множества, однако оно само содержится в множестве своих подмножеств в качестве элемента (парадокс Кантора). Получается, что множество U не является множеством максимальной мощности.

1. Отображения и функции.

Функцией называется любое функциональное соответствие между двумя множествами. Если функция f устанавливает соответствие между множествами A и B , то говорят, что функция f имеет вид $A \rightarrow B$ (обозначение $f: A \rightarrow B$). Каждому элементу a из своей области определения функция ставит в соответствие единственный элемент b из области значений. Это записывается в традиционной форме $f(a) = b$. Элемент a называется *аргументом* функции, элемент b – её *значением*.

Полностью определённая функция $f: A \rightarrow B$ называется *отображением* A в B ; образ множества A при отображении обозначается $f(A)$. Если при этом $f(A) = B$, то есть соответствие сюръективно, говорят, что имеет отображение A на B .

Если $f(A)$ состоит из единственного элемента, то f называется функцией-константой.

Отображение типа $A \rightarrow A$ называется преобразованием множества A .

Пример 2.

а) Функция $f(x) = 2$, $x \in N$ является отображением множества натуральных чисел в себя (инъективная функция). Эта же функция при всех $x \in Z$ является отображением множества целых чисел в множество рациональных чисел.

б) Функция $f(x) = |x|$, $x \in Z_{\neq 0}$ является отображением множества целых чисел (кроме числа 0) на множество натуральных чисел. Причём в данном случае соответствие не является взаимно однозначным.

в) Функция $f(x) = x^3$, $x \in R$ является взаимнооднозначным отображением множества действительных чисел на себя.

г) Функция $f(x) = \sqrt{x}$ не полностью определена, если её тип $N \rightarrow N$, но полностью определена, если её тип $N \rightarrow R$ или $R_+ \rightarrow R$.

Определение. Функция типа $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ называется n -местной функцией. В этом случае принято считать, что функция имеет n аргументов: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n, b \in B$.

Например, сложение, умножение, вычитание и деление являются двухместными функциями на R , то есть функциями типа $R^2 \rightarrow R$.

Определение. Пусть дано соответствие $G \subseteq A \times B$. Если соответствие $H \subseteq B \times A$ таково, что $(b, a) \in H$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in G$, то соответствие H называют обратным к G и обозначают G^{-1} .

Определение. Если соответствие, обратное к функции $f: A \rightarrow B$ является функциональным, то оно называется функцией, обратной к f .

Очевидно, что в обратном соответствии образы и прообразы меняются местами, поэтому для существования обратной функции f^{-1} требуется, чтобы каждый элемент из области значения f имел бы единственный прообраз. Это означает, что для функции $f: A \rightarrow B$ обратная функция f^{-1} существует тогда и только тогда, когда f является биективным соответствием между своей областью определения и областью значений.

Пример 3. Функция $\sin x$ имеет тип $R \rightarrow R$. Отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ она взаимно однозначно отображает на отрезок $[-1; 1]$. Поэтому для неё на отрезке $[-1; 1]$ существует обратная функция. Как известно, это $\arcsin x$.

Определение. Пусть даны функции $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$. Функция $h: A \rightarrow C$ называется композицией функций f и g (обозначается $f \circ g$), если имеет место равенство: $h(x) = g(f(x))$, где $x \in A$.

Композиция функций f и g представляет собой последовательное применение этих функций; g применяется к результату f . Часто говорят, что функция h получена *подстановкой* f в g .

Для n -местных функций $f: A^n \rightarrow B, g: B^n \rightarrow C$ возможны различные варианты подстановок f в g , дающие функции различных типов. Особый интерес представляет случай, когда задано множество функций типа: $f_1: A^n \rightarrow A, \dots, f_m: A^n \rightarrow A$. В этом случае возможны, во-первых, любые подстановки функций друг в друга, а во-вторых, любые переименования аргументов. Функция, полученная из данных функций f_1, \dots, f_m некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов, называется их *суперпозицией*.

Например, в математическом анализе вводится понятие элементарной функции, являющейся суперпозицией фиксированного (не зависящего от значения аргумента) числа арифметических операций, а также элементарных функций ($x^n, \sin x, e^x$ и т. п.).

А.Н. Колмогоровым и В.И. Арнольдом доказано, что всякая непрерывная функция n переменных представима в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных.

Замечание. Понятие функции широко используется в математическом анализе, более того, является в нём базовым понятием. В целом, подход к пониманию термина “функция” в математическом анализе несколько уже, чем в дискретной математике. Как правило, в нём рассматриваются так называемые *вычислимые* функции. Функция называется *вычислимой*, если задана процедура, позволяющая по любому заданному значению аргумента найти значение функции.