Лекция 10. Геометрическое представление графов. Планарные графы. Формула Эйлера для планарных графов. Критерий планарности Понтрягина-Куратовского.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Геометрическое представление графа в $\mathbb{R}^n$

Геометрическим представлением графа $G = (V, E)$ **в пространстве** $\mathbb{R}^n$ называется такое его отображение в $\mathbb{R}^n$, при котором:

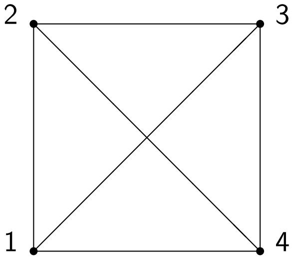
1) каждой *вершине* $v \in V$ сопоставлена *точка* в $\mathbb{R}^n$, причем разным вершинам — разные точки;

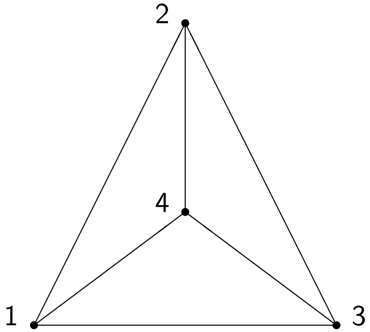
2) каждому *ребру* $(v, w) \in E$ сопоставлена непрерывная *кривая*, соединяющая точки, соответствующие вершинам v и w, и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам;

3) кроме того, кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются за исключением своих концов.

Геометрическое представление графа

Слева — изображение K_4, не являющееся его геометрическим представлением на плоскости.
Справа — геометрическое представление K_4 на плоскости.





Геометрическое представление графов в $\mathbb{R}^3$

Теорема 10.1. *Любой граф G допускает геометрическое представление в* $\mathbb{R}^3$.

Геометрическое представление графов в $\mathbb{R}^3$

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, \dots, v_p\}$, $E = \{e_1, \dots, e_q\}$.

Возьмем в $\mathbb{R}^3$ произвольную прямую l и отметим на ней p различных точек, которые обозначим $v_1, \dots, v_p$. Сопоставим их вершинам графа G.

Возьмем q различных плоскостей $\pi_1, \dots, \pi_q$, содержащих прямую l. Ребру $e_i = (v_{i_1}, v_{i_2})$ графа G сопоставим кривую, соединяющую точки v_{i_1} и v_{i_2}, которую проведем в плоскости π_i, $i = 1, \dots, q$.

По построению кривые, сопоставленные ребрам, могут пересекаться только в концевых точках. Значит, получили геометрическое представление G в $\mathbb{R}^3$.

$\square$

Планарный граф

Граф G называется **планарным**, если найдется его геометрическое представление на плоскости (т. е. в $\mathbb{R}^2$).

В обратном случае граф G называется **непланарным**.

Грани

Геометрическое представление планарного графа в $\mathbb{R}^2$ назовем его **укладкой на плоскости**.

Связные области плоскости, ограниченные ребрами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область называется также **внешней гранью**.

Грани

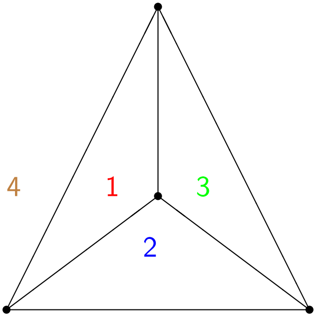
Пусть G — планарный граф и $\Phi(G)$ — какая-то его укладка на плоскости.

Рассмотрим двуместное отношение R на $\mathbb{R}^2 \setminus \Phi(G)$: если $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \Phi(G)$, то $a\ R\ b$ в том и только в том случае, когда точки a и b можно соединить непрерывной кривой, не имеющей общих точек с $\Phi(G)$.

Отношение R — рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. R — отношение эквивалентности на $\mathbb{R}^2 \setminus \Phi(G)$.

Каждый класс эквивалентности по отношению R является **гранью** в укладке $\Phi(G)$.

Грани K_4 при его укладке на плоскости



Формула Эйлера

Теорема 10.2 (формула Эйлера для планарных графов). *Если $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами, то для каждой его укладки на плоскости верно равенство $p - q + r = 2$, где r — число граней в этой укладке.*

Доказательство проведем индукцией по q при заданном p.

Базис индукции: если $q = p - 1$, то G — дерево.
Каждое дерево — планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна.

Формула Эйлера

Доказательство. *Индуктивный переход*: рассмотрим связный планарный граф G с p вершинами и $q \geqslant p$ ребрами. Пусть задана его укладка на плоскости, в которой r граней.

В графе G найдется хотя бы один цикл, и пусть e — любое ребро из какого-то его цикла.

Тогда граф $G' = G - e$ — связный и планарный с p вершинами и $q - 1$ ребрами, и его укладка на плоскости содержит $r - 1$ граней, т. к. при удалении ребра e из укладки графа G две грани соединяются в одну.

Для графа G' верно предположение индукции, т. е. $p - (q - 1) + (r - 1) = 2$, откуда $p - q + r = 2$.

$\square$

Наибольшее число ребер в планарных графах

Теорема 10.3. *Наибольшее число ребер в планарном графе (без петель и кратных ребер) с p, $p \geqslant 3$, вершинами равно $3p - 6$.*

Наибольшее число ребер в планарных графах

Доказательство. Можно рассматривать связные графы.

1. *Верхняя оценка*. Пусть $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами.

Рассмотрим укладку графа G на плоскости, и пусть q_i — число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке, $i = 1, \ldots, r$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро:

1) либо разделяет две грани, а значит, считается при обходе границ этих двух граней;

2) либо лежит в одной грани, а значит, при обходе ее границы считается два раза.

Наибольшее число ребер в планарных графах

Доказательство. Из связности графа и $p \geqslant 3$ получаем $q_i \geqslant 3$, откуда $3r \leqslant 2q$, или $r \leqslant \frac{2}{3} \cdot q$.

По формуле Эйлера $r = q - p + 2$, поэтому

$$q - p + 2 \leqslant \frac{2}{3} \cdot q,$$

а значит,

$$q \leqslant 3p - 6.$$

Число ребер в планарных графах

Доказательство. 2. *Достижимость верхней оценки*. Построим графы, на которых достигается эта оценка. Это связные планарные графы, в которых любая грань (включая внешнюю) ограничена циклом длины три. Такие графы называются **триангуляциями**.

Если $p = 3$, то $G_p = K_3$.

Пусть уже построен связный планарный граф G_p с p вершинами и $3p - 6$ ребрами, каждая грань которого ограничена треугольником.

Тогда граф G_{p+1} получается из G_p добавлением новой вершины внутри какой-то грани и ребер, соединяющих эту вершину с тремя вершинами границы этой грани.

$\square$

Число граней в планарных графах

Следствие. *Наибольшее число граней в укладке планарного графа (без петель и кратных ребер) с p, $p \geqslant 3$, вершинами равно $2p - 4$.*

Свойство планарных графов

Предложение 10.1. *Любой планарный граф (без петель и кратных ребер) содержит вершину степени, не большей пяти.*

Доказательство. Можно рассматривать связные графы.

Докажем от обратного: пусть $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами, в котором любая вершина имеет степень не менее шести, т. е. для любой вершины $v \in V$ верно $d_G(v) \geqslant 6$.

Тогда по формуле Эйлера для степеней вершин получаем:

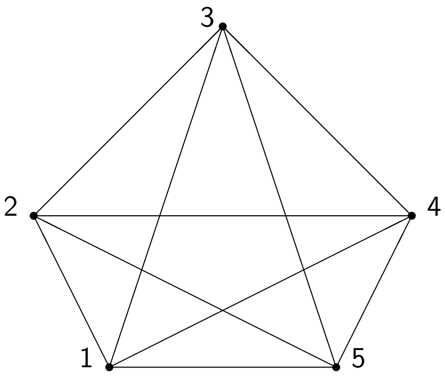
$$2q = \sum_{v \in V} d_G(v) \geqslant 6p,$$

а значит, $q \geqslant 3p$.

Но по предыдущей теореме верно $q \leqslant 3p - 6$ — противоречие.

Значит, в G найдется вершина степени, не более пяти.

Граф K_5



Непланарность K_5

Теорема 10.4. *Граф K_5 не является планарным.*

Доказательство проведем от обратного: пусть граф K_5 планарен.

Тогда для произвольной его укладки на плоскости верно равенство:

$$p - q + r = 2,$$

где $p = 5$ — число вершин и $q = 10$ число ребер в графе, а r — число граней в этой укладке. Поэтому $r = 7$.

Непланарность K_5

Доказательство. Пусть q_i — число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке, $i = 1, \ldots, r$.

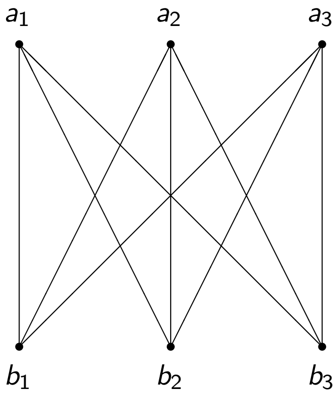
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро считаем дважды.

Но $q_i \geqslant 3$, поэтому $3r \leqslant 2q$, или $r \leqslant \frac{2}{3} \cdot q$.

Получаем: $7 \leqslant \frac{2}{3} \cdot 10$ — противоречие.

Значит, граф K_5 не является планарным. $\square$

Граф $K_{3,3}$



Непланарность $K_{3,3}$

Теорема 10.5. *Граф $K_{3,3}$ не является планарным.*

Доказательство проведем от обратного: пусть граф $K_{3,3}$ планарен.

Тогда для произвольной его укладки на плоскости верно равенство:

$$p - q + r = 2,$$

где $p = 6$ — число вершин и $q = 9$ число ребер в графе, а r — число граней в этой укладке. Поэтому $r = 5$.

Непланарность $K_{3,3}$

Доказательство. Пусть q_i — число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке, $i = 1, \dots, r$.

Тогда $\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро считаем дважды.

Но $q_i \geqslant 4$, т. к. в $K_{3,3}$ наименьшая длина цикла равна четырем, поэтому $4r \leqslant 2q$, или $r \leqslant \frac{q}{2}$.

Получаем: $5 \leqslant \frac{9}{2}$ — противоречие.

Значит, граф $K_{3,3}$ не является планарным.

$\square$

Гомеоморфизм графов

Говорят, что граф $G' = (V', E')$ получен из графа $G = (V, E)$ **подразбиением ребра** $e = (v, w) \in E$, если

$$
\begin{aligned}
V' &= V \cup \{u\}, \text{ где } u \notin V; \\
E' &= E \setminus \{(v, w)\} \cup \{(v, u), (u, w)\}.
\end{aligned}
$$

Граф G' называется **подразбиением** графа G, если G' может быть получен из G конечным числом подразбиений ребер.

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **гомеоморфными**, если найдутся изоморфные их подразбиения G_1' и G_2' соответственно.

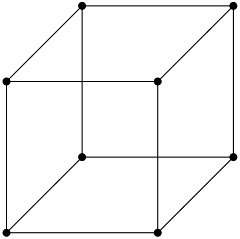
Критерий планарности

Теорема 10.6 (критерий Понтрягина-Куратовского).
Граф $G = (V, E)$ *планарен тогда и только тогда, когда в нем не найдется ни одного подграфа, гомеоморфного либо графу* K_5*, либо графу* $K_{3,3}$.

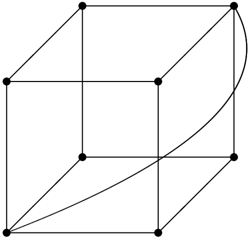
Пример

Пример. Проверим, являются ли планарными следующие графы:

G_1 :



G_2 :

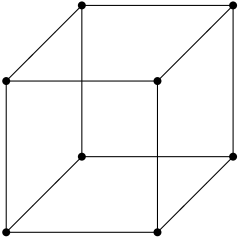


Пример

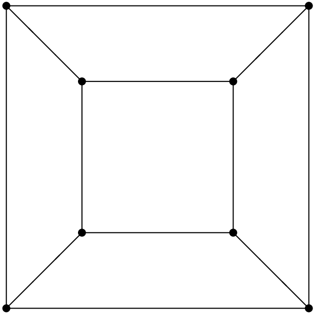
1. Граф G_1 допускает укладку $\Phi(G_1)$ на плоскости.

Значит, G_1 — планарный граф.

G_1 :



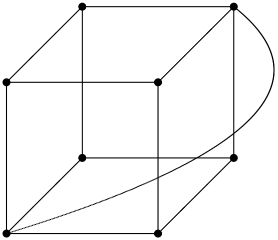
$\Phi(G_1)$:



Пример

2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

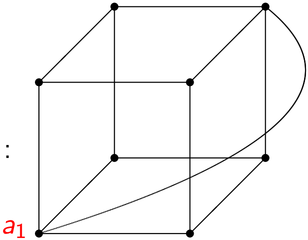
G_2 :



Пример

2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

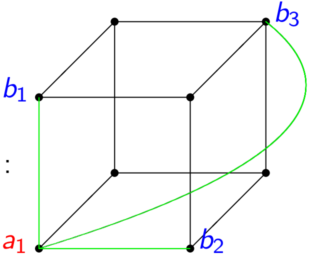
G_2 :



Пример

2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

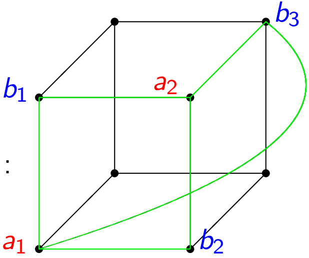
G_2 :



Пример

2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

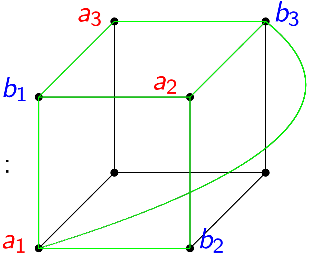
G_2 :



Пример

2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

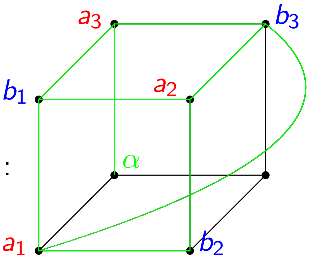
G_2 :



Пример

2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

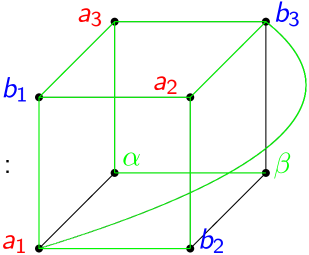
G_2 :



Пример

2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

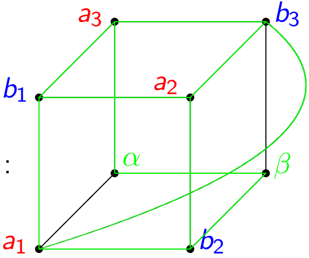
G_2 :



Пример

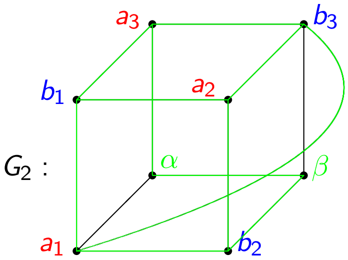
2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

G_2 :



Пример

2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



Значит, G_2 — непланарный граф.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что наибольшее число ребер среди планарных графов (без петель и кратных ребер) содержат только триангуляции.

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.