Лекция 8. Деревья. Теорема о равносильных определениях дерева. Корневые деревья. Упорядоченные корневые деревья. Оценка числа деревьев с q ребрами.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Дерево

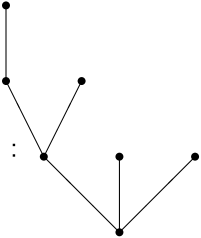
Деревом называется связный граф без циклов.

Граф без циклов (без условия связности) называется **лесом**.

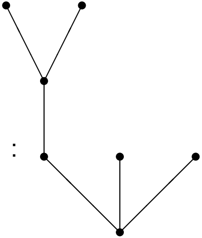
Отметим, что любая компонента связности леса является деревом.

Деревья

D_1 :



D_2 :



Деревья

Теорема 8.1 (о равносильных определениях дерева). *Пусть $G = (V, E)$ — граф с p вершинами и q ребрами. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *G — дерево, т. е. связный граф без циклов;*

2) *G — связный граф и $q = p - 1$;*

3) *G — граф без циклов и $q = p - 1$;*

4) *G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл;*

5) *G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.*

Деревья

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

Дано: G — связный граф без циклов.
Доказать: G — связный граф и $q = p - 1$.

Обоснование. По условию G связный.

По условию G без циклов, поэтому по соотношению для G между числом вершин p, числом ребер q и числом компонент связности $s = 1$ получаем: $1 = s = p - q$.

Значит, $q = p - 1$.

Деревья

Доказательство. $2 \Rightarrow 3$.

Дано: G — связный граф и $q = p - 1$.
Доказать: G — граф без циклов и $q = p - 1$.

Обоснование. По условию $q = p - 1$.

Если в связном графе G найдется цикл, то удалим из G некоторое ребро e из цикла. Останется связный граф G'. По соотношению для G' между числом вершин p, числом ребер $q - 1$ и числом компонент связности $s' = 1$ получаем: $s' \geqslant p - (q - 1) = (p - q) + 1 = 2$ — противоречие.

Значит, G без циклов.

Деревья

Доказательство. $3 \Rightarrow 4$.

Дано: G — граф без циклов и $q = p - 1$.
Доказать: G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл.

Обоснование. По условию G без циклов.

По соотношению для G между числом вершин p, числом ребер q и числом компонент связности s получаем:
$s = p - q = 1$, т. е. G связный.

Значит, при соединении в G любой пары несмежных вершин ребром появится цикл.

Деревья

Доказательство. $4 \Rightarrow 5$.

Дано: G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл.
Доказать: G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.

Обоснование. Если G не связный, то при соединении двух вершин из разных компонент связности цикл не появится. Значит, G связный.

Пусть при удалении из G некоторого ребра e остался связный граф G'. Тогда G получается из связного графа G' добавлением нового ребра e. Поэтому в G найдется цикл — противоречие.

Значит, при удалении из G любого ребра останется несвязный граф.

Деревья

Доказательство. $5 \Rightarrow 1$.

Дано: G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.
Доказать: G — связный граф без циклов.

Обоснование. По условию G связный.

Если в G найдется цикл, то удалим из G любое ребро из цикла. Останется связный граф —противоречие.

Значит, G без циклов.

$\square$

Свойства деревьев

Предложение 8.1.
1. *В любом дереве любые две различные вершины соединены ровно одной простой цепью.*

2. *Если к дереву добавить ребро, соединяющее его несмежные вершины, то получится граф с одним простым циклом.*

3. *Если из дерева удалить любое ребро, то останется граф с двумя компонентами связности.*

Доказательство проведите самостоятельно.

Висячие вершины в деревьях

Предложение 8.2. *В любом дереве хотя бы с двумя вершинами найдется не менее двух висячих вершин.*

Доказательство. Пусть граф $G = (V, E)$ — дерево, причем $|V| \geqslant 2$.

Висячие вершины в деревьях

Доказательство. 1. Сначала обоснуем от обратного, что в G найдется хотя бы одна висячая вершина. Предположим, что для любой вершины $v \in V$ верно $d_G(v) \geqslant 2$, т. е. $\delta(G) \geqslant 2$.

Но тогда в G существует цикл длины, не менее $\delta(G) + 1 \geqslant 3$ — противоречие.

Значит, хотя бы одна висячая вершина $v_0 \in V$ в G найдется.

Висячие вершины в деревьях

Доказательство. 2. Теперь обоснуем от обратного, что в G найдется не менее двух висячих вершин. Предположим, что для любой вершины $v \in V$, $v \neq v_0$, верно $d_G(v) \geqslant 2$.

Висячие вершины в деревьях

Доказательство. Покажем, что в этом случае для любого i, $i \geqslant 1$, в G найдется простая цепь P_i длины i.

Положим $P_1 = v_0, v_1$, где $(v_0, v_1) \in E$.

Пусть простая цепь $P_i = v_0, v_1, \ldots, v_i$ длины i в G уже построена, $i \geqslant 1$.

Но $d_G(v_i) \geqslant 2$, поэтому найдется такая вершина $v_{i+1} \in V$, $v_{i+1} \neq v_{i-1}$, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Если v_{i+1} совпадает с какой-то из вершин $v_1, \ldots, v_{i-2}$, то получаем цикл — противоречие.

Поэтому v_{i+1} обязана быть новой вершиной. Далее положим $P_{i+1} = v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}$ — простая цепь длины $i + 1$ в G.

Висячие вершины в деревьях

Доказательство. Но в G только конечное число вершин. Поэтому G не может содержать бесконечную простую цепь — противоречие.

Значит, в G найдется не менее двух висячих вершин.

$\square$

Корневое дерево

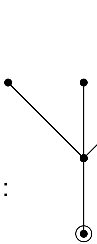
Корневым деревом называется пара $(D; v_0)$, где $D = (V, E)$ — дерево, $v_0 \in V$ — выделенная вершина, называемая **корнем**.

При изоморфизме корневых деревьев корень обязан переходить в корень.

Висячая вершина корневого дерева, не являющаяся корнем, называется **листом**.

Корневые деревья

D :



Поддеревья в корневом дереве

Пусть $(D; v_0)$ — корневое дерево, и $(v_0, v_1), \dots, (v_0, v_m)$ — все ребра, исходящие из вершины v_0 в дереве D.

Тогда каждая компонента связности графа $G - v_0$ является деревом, и пусть $D_1, \dots, D_m$ — все эти деревья.

Каждое из корневых деревьев $(D_i; v_i)$ называется **поддеревом** корневого дерева D, $i = 1, \dots, m$.

Обход в глубину в корневом дереве

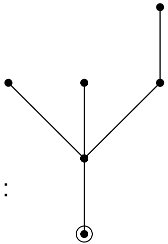
Пусть $(D; v_0)$ — корневое дерево. **Обходом в глубину** из вершины v_0 назовем следующий обход дерева D:

1) перейти в непройденное поддерево D_i, обойти его в глубину из вершины v_i и вернуться в вершину v_0;

2) если пройдены все поддеревья, то закончить обход.

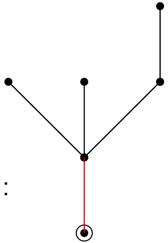
Обход в глубину корневого дерева

D :



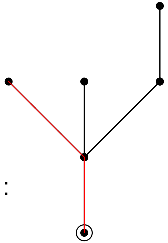
Обход в глубину корневого дерева

D :



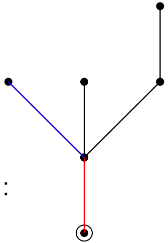
Обход в глубину корневого дерева

D :



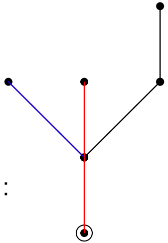
Обход в глубину корневого дерева

D :



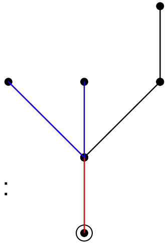
Обход в глубину корневого дерева

$D:$

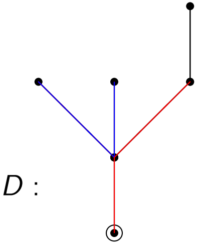


Обход в глубину корневого дерева

D :

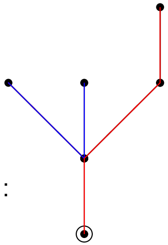


Обход в глубину корневого дерева



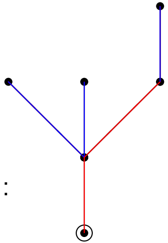
Обход в глубину корневого дерева

D :



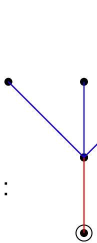
Обход в глубину корневого дерева

$D:$



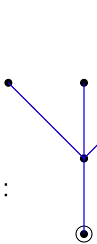
Обход в глубину корневого дерева

D :



Обход в глубину корневого дерева

$D:$



Упорядоченные корневые деревья

Пусть $(D; v_0)$ — корневое дерево и $D_1, \ldots, D_m$ — все его поддеревья.

Корневое дерево D называется **упорядоченным**, если задан порядок его поддеревьев, а каждое его поддерево D_i, $i = 1, \ldots, m$, также является упорядоченным корневым деревом.

При изоморфизме упорядоченных корневых деревьев корень обязан переходить в корень, и порядок поддеревьев обязан сохраняться.

Число упорядоченных корневых деревьев

Теорема 8.2. *Для числа $\delta''(q)$ неизоморфных упорядоченных корневых деревьев с q ребрами справедлива оценка:*

$$\delta''(q) \leqslant 4^q.$$

Доказательство. Пусть $(D; v_0)$ — упорядоченное корневое дерево с q ребрами. Обойдем дерево D в глубину из вершины $v_0 \in V$ по порядку его поддеревьев. При таком обходе по каждому ребру пройдем два раза: первый раз при переходе в соответствующее поддерево, второй раз при возвращении из него.

Число упорядоченных корневых деревьев

Доказательство. По этому обходу построим код дерева D — набор $k(D)$ из нулей и единиц длины $2q$. Сначала этот код не заполнен. При проходе по очередному ребру заполняем в коде $k(D)$ первый незаполненный разряд по следующим правилам:

1) если по ребру переходим в поддерево, то в код $k(D)$ пишем ноль;

2) если по ребру возвращаемся из поддерева, то в код $k(D)$ пишем единицу.

Тогда различным упорядоченным корневым деревьям соответствуют разные коды.

Поэтому $\delta''(q)$ не превосходит числа наборов из нулей и единиц длины $2q$, т. е.

$$\delta''(q) \leqslant 2^{2q} = 4^q.$$

$\square$

Оценка числа деревьев

Следствие 8.2.1. *Для числа $\delta'(q)$ неизоморфных корневых деревьев с q ребрами справедлива оценка:*

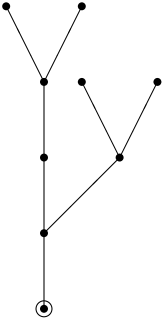
$$\delta'(q) \leqslant 4^q.$$

Следствие 8.2.2. *Для числа $\delta(q)$ неизоморфных деревьев с q ребрами справедлива оценка:*

$$\delta(q) \leqslant 4^q.$$

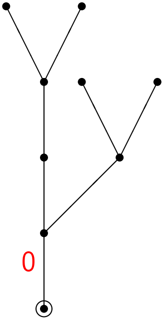
Код корневого дерева

D :



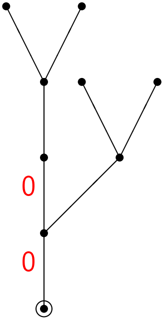
Код корневого дерева

$D:$



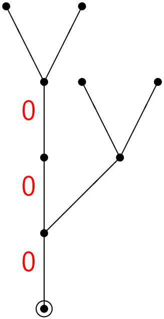
Код корневого дерева

$D:$

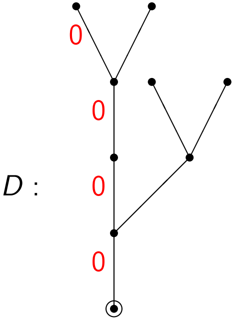


Код корневого дерева

D :

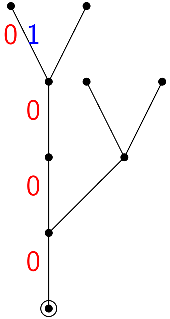


Код корневого дерева



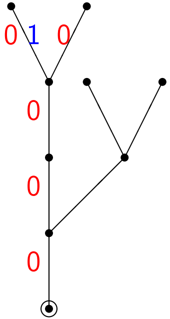
Код корневого дерева

D :



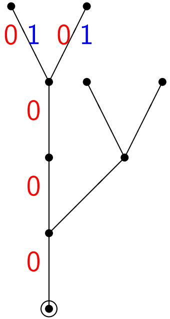
Код корневого дерева

D :



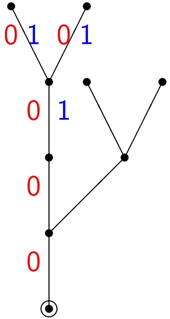
Код корневого дерева

D :



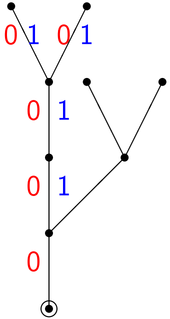
Код корневого дерева

D :



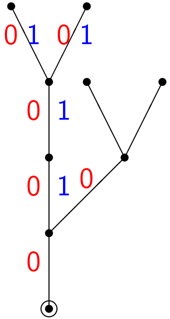
Код корневого дерева

D :



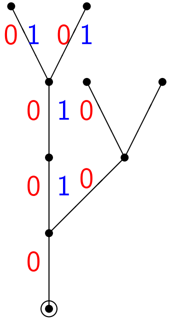
Код корневого дерева

D :



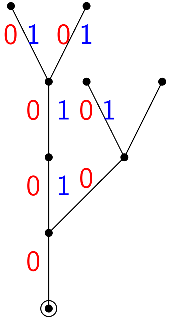
Код корневого дерева

D :



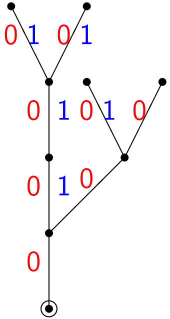
Код корневого дерева

$D:$



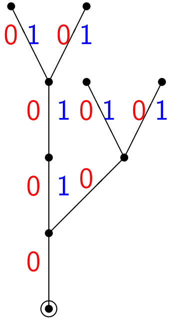
Код корневого дерева

D :



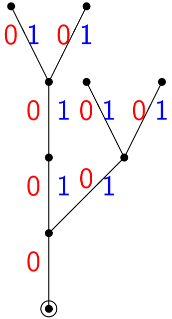
Код корневого дерева

D :



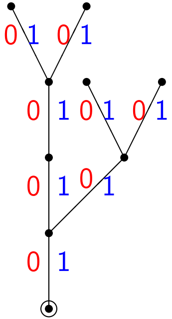
Код корневого дерева

$D:$



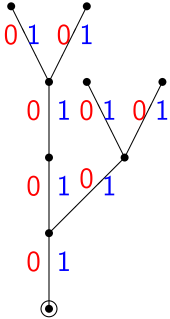
Код корневого дерева

D :



Код корневого дерева

D :



$$k(D) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите предложение 8.1.

2. Найдите верхние оценки числа неизоморфных псевдографов и числа неизоморфных простых графов (без изолированных вершин) с q ребрами.

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра М, 2012.