Лекция 6 (продолжение). Базис в P_2. Теореме о числе функций в базисе P_2. Предполные классы. Теорема о предполных классах в P_2.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Базис P_2

Пусть $B \subseteq P_2$.

Множество B называется **базисом** P_2, если

1) $[B] = P_2$, т. е. система B — **полна**;

2) для любой функции $f \in B$ верно $[B \setminus \{f\}] \neq P_2$, т. е. система B — **неизбыточна**.

Теорема о числе функций в базисе P_2

Теорема 6.2 (о числе функций в базисе P_2**).**

1. *Любой базис* P_2 *содержит не больше четырех функций.*

2. *Для любого числа* k, $1 \leqslant k \leqslant 4$, *в* P_2 *найдется базис, содержащий ровно* k *функций.*

Теорема о числе функций в базисе P_2

Доказательство. 1. Пусть B, $B \subseteq P_2$, — базис P_2. Тогда B — полная система. Значит, по теореме Поста в B найдутся следующие (не обязательно различные) функции

$$f_0 \notin T_0, \ f_1 \notin T_1, \ f_l \notin L, \ f_s \notin S, \ f_m \notin M.$$

Система $\{f_0, f_1, f_l, f_s, f_m\}$ — полна, а B — неизбыточная система, поэтому

$$B = \{f_0, f_1, f_l, f_s, f_m\}.$$

Значит, $|B| \leqslant 5$.

Теорема о числе функций в базисе P_2

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_0 \in B$, $f_0 \notin T_0$:

x_1	$\ldots$	x_n	f_0
0	$\ldots$	0	1
	$\ldots$		
1	$\ldots$	1	a

,

где $a \in E_2$.

Теперь

1) если $a = 0$, то $f_0 \notin T_1, M$, а значит, $f_1 = f_m = f_0$, и $|B| \leqslant 3$;

2) если $a = 1$, то $f_0 \notin S$, а значит, $f_s = f_0$, и $|B| \leqslant 4$.

Следовательно, $|B| \leqslant 4$.

Теорема о числе функций в базисе P_2

Доказательство. 2. Для каждого числа k, $1 \leqslant k \leqslant 4$, приведем примеры базисов B из k функций:

1) если $k = 1$, то, например, $B = \{x/y\}$ или $B = \{x \downarrow y\}$;

2) если $k = 2$, то, например, $B = \{\bar{x}, x \cdot y\}$ или $B = \{\bar{x}, x \vee y\}$;

3) если $k = 3$, то, например, $B = \{1, x \oplus y, x \cdot y\}$.

Теорема о числе функций в базисе P_2

Доказательство. Если же $k = 4$, то рассмотрим

$$B = \{0, 1, x \oplus y \oplus z, x \cdot y\}.$$

Построим таблицу для этого множества B:

	T_0	T_1	L	S	M
0	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
1	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x \oplus y \oplus z$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x \cdot y$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

Кроме того,

$$B \setminus \{0\} \subseteq T_1, \qquad B \setminus \{1\} \subseteq T_0,$$
$$B \setminus \{x \oplus y \oplus z\} \subseteq M, \qquad B \setminus \{x \cdot y\} \subseteq L.$$

Значит, система B — полна и неизбыточна, т. е. является базисом.

Предполный класс

Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется **предполным классом**, если

1) $[A] \neq P_2$, т. е. система A — не полна;

2) для любой функции $f \in P_2 \setminus A$ верно $[A \cup \{f\}] = P_2$, т. е. при добавлении к A любой новой функции получается полная система.

Замкнутость предполного класса

Предложение 6.2. *Любой предполный класс является замкнутым классом.*

Доказательство проведем от обратного: пусть $A \subseteq P_2$ — предполный класс, но $[A] \neq A$.

Значит, найдется функция $f \in [A] \setminus A$. Получаем:

$$[A \cup \{f\}] = [A].$$

По п. 1 определения предполного класса $[A] \neq P_2$, но по п. 2 определения предполного класса $[A \cup \{f\}] = [A] = P_2$. Приходим к противоречию.

Значит, A — замкнутый класс.

$\square$

Теорема о предполных классах

Теорема 6.3. *В P_2 найдется всего пять предполных классов:* T_0, T_1, L, S, M.

Теорема о предполных классах

Доказательство. 1. Сначала покажем, что каждый из классов T_0, T_1, L, S, M не содержится ни в каком другом из этих классов.

Для этого построим таблицу, в которой строки и столбцы соответствуют этим классам, а на пересечении строки и столбца указана функция, принадлежащая классу, которым обозначена эта строка, и не принадлежащая классу, которым обозначен этот столбец:

	T_0	T_1	L	S	M
T_0	—	0	$x \cdot y$	0	$x \oplus y$
T_1	1	—	$x \cdot y$	1	$x \sim y$
L	$\bar{x}$	$\bar{x}$	—	0	$\bar{x}$
S	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$m(x, y, z)$	—	$\bar{x}$
M	1	0	$x \cdot y$	0	—

,

где $m(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz$.

Теорема о предполных классах

Доказательство. 2. Теперь покажем, что каждый из классов T_0, T_1, L, S, M является предполным.

Например, рассмотрим класс T_0. Тогда:

1) $[T_0] = T_0 \neq P_2$;

2) если $f \notin T_0$, то по теореме Поста

$$[T_0 \cup \{f\}] = P_2,$$

т. к. $0, x \cdot y, x \oplus y \in T_0$ и $0 \notin T_1, S$, $x \cdot y \notin L$, $x \oplus y \notin M$ (см. первую строку таблицы из п. 1).

Значит, T_0 — предполный класс.

Аналогично проводятся рассуждения для остальных классов.

Теорема о предполных классах

Доказательство. 3. Наконец, покажем от обратного, что других предполных классов нет.

Пусть $A \subseteq P_2$ — предполный класс, причем $A \neq T_0, T_1, L, S, M$.

Значит либо A не содержится ни в одном из этих классов, либо строго содержится в каком-то из них.

Если A не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M, то по теореме Поста $[A] = P_2$. Получаем противоречие с п. 1 определения предполного класса.

Пусть A строго содержится в каком-то из этих классов, например, пусть $A \subseteq T_0$, $A \neq T_0$. Тогда найдется функция $f \in T_0 \setminus A$, откуда $[A \cup \{f\}] \subseteq T_0 \neq P_2$. Получаем противоречие с п. 2 определения предполного класса.

Значит, других предполных классов нет, т. е. T_0, T_1, L, S, M — все предполные классы в P_2.

Сведения о результатах Э. Поста

Э. Пост описал все замкнутые классы в P_2.

Он показал, что

1) в P_2 найдется всего счетное число замкнутых классов;

2) каждый замкнутый класс в P_2 содержит конечный базис (т. е. конечное множество функций, замыкание которых равно этому классу).

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $B \subseteq P_2$ — базис P_2 и $x \oplus y \oplus z \in B$. Определить, сколько функций может содержаться в множестве B.
2. Какие функции принадлежат всем замкнутым классам?

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.

2. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 2014.

3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. II 6.1–6.5, 6.8, 6.10, 6.11–6.17.