# Лекция 6. Леммы о несамодвойственной, немонотонной и нелинейной функциях. Полнота. Теорема Поста о полноте.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

# Самодвойственные функции

Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ — **самодвойственна**, если

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)},$$

т. е. когда на всех парах противоположных наборов она принимает противоположные значения.

# Лемма о несамодвойственной функции

**Лемма 6.1 (о несамодвойственной функции).** *Если $f \notin S$, то, подставляя вместо ее переменных функции $x$, $\bar{x}$, можно получить функцию, равную константе.*

# Лемма о несамодвойственной функции

**Доказательство**. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin S$, то найдется такая пара противоположных наборов $\alpha, \bar{\alpha} \in E_2^n$, что

$$f(\alpha) = f(\bar{\alpha}) = c \in E_2.$$

Положим:

$$\varphi(x) = f(x \oplus \alpha_1, \ldots, x \oplus \alpha_n).$$

Отметим, что вместо переменной $x_i$ подставили $x$ при $\alpha_i = 0$ и подставили $\bar{x}$ при $\alpha_i = 1$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f(0 \oplus \alpha_1, \ldots, 0 \oplus \alpha_n) = f(\alpha) = c, \\ \varphi(1) &= f(1 \oplus \alpha_1, \ldots, 1 \oplus \alpha_n) = f(\bar{\alpha}) = c. \end{aligned}$$

Значит, $\varphi(x) = c$.

$\square$

# Лемма о несамодвойственной функции

**Пример**. Рассмотрим несамодвойственную функцию $f(x_1, x_2, x_3)$:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Т. к. $f(0,1,0) = f(1,0,1) = 1$, получаем $\varphi(x) = f(x, \bar{x}, x)$.

Теперь $\varphi(0) = f(0,1,0) = 1$, $\varphi(1) = f(1,0,1) = 1$, т. е. $\varphi(x) = 1$.

# Монотонные функции

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ — **монотонна**, если для любых наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$ из $\alpha \leqslant \beta$ следует $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

# Лемма о немонотонной функции

**Лемма 6.2 (о немонотонной функции).** *Если $f \notin M$, то, подставляя вместо ее переменных функции* 0, 1, $x$ *можно получить функцию* $\bar{x}$.

# Лемма о немонотонной функции

**Доказательство**. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$, то найдется такая пара наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$, что $\alpha \leqslant \beta$, но $f(\alpha) > f(\beta)$.

Значит, $f(\alpha) = 1$ и $f(\beta) = 0$.

Не ограничивая общности рассуждений, пусть $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$ и $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i = k+1, \ldots, n$, где $1 \leqslant k \leqslant n$.

# Лемма о немонотонной функции

**Доказательство.** Положим:

$$\varphi(x) = f(\underbrace{x, \dots, x}_{k}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Отметим, что вместо переменной $x_i$ подставили $x$ при $i = 1, \dots, k$ и подставили 0 или 1 при $i = k+1, \dots, n$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha) = 1, \\ \varphi(1) &= f(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $\varphi(x) = \bar{x}$. $\square$

# Лемма о немонотонной функции

**Пример**. Рассмотрим немонотонную функцию $f(x_1, x_2, x_3)$:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Т. к. $f(0,0,1) = 1$, $f(1,1,1) = 0$, получаем $\varphi(x) = f(x,x,1)$.

Теперь $\varphi(0) = f(0,0,1) = 1$, $\varphi(1) = f(1,1,1) = 0$, т. е. $\varphi(x) = \bar{x}$.

# Свойство немонотонной функции

Напомним, что наборы $\alpha, \beta \in E_2^n$ называются **соседними**, если они отличаются только в одном разряде.

**Предложение 6.1**. *Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$, то найдутся два таких* **соседних** *набора $\alpha, \beta \in E_2^n$, что $\alpha \leqslant \beta$, но $f(\alpha) > f(\beta)$.*

**Доказательство** проведите самостоятельно.

Значит, функция $f$ — монотонна тогда и только тогда, когда на всех парах соседних наборов она принимает значения, не нарушающие монотонность.

# Линейные функции

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ — **линейна**, если она может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$, т. е. если в ее полиноме Жегалкина нет слагаемых хотя бы с двумя переменными.

# Лемма о нелинейной функции

**Лемма 6.3 (о нелинейной функции).** *Если* $f \notin L$, *то, подставляя вместо ее переменных функции* $0$, $1$, $x$, $\bar{x}$, $y$, $\bar{y}$ *можно получить функцию* $x \cdot y$ *или функцию* $\overline{x \cdot y}$.

# Лемма о нелинейной функции

**Доказательство**. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$, то в ее полиноме Жегалкина найдется слагаемое ранга, не меньшего двух.

Не ограничивая общности рассуждений, пусть в полиноме Жегалкина функции $f$ содержится слагаемое $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$, где $k \geqslant 2$.

Представим полином Жегалкина функции $f$ в виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) \quad = \quad & x_1 x_2 \cdot g_1(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_1 \cdot g_2(x_3, \ldots, x_n) \oplus \\ & \oplus x_2 \cdot g_3(x_3, \ldots, x_n) \oplus g_4(x_3, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

где $g_1, g_2, g_3, g_4 \in P_2$, причем $g_1 \neq 0$.

Значит, найдется такой набор $\alpha \in E_2^{n-2}$, что $g_1(\alpha) = 1$.

# Лемма о нелинейной функции

**Доказательство**. Пусть $g_2(\alpha) = a$, $g_3(\alpha) = b$, $g_4(\alpha) = c$, где $a, b, c \in E_2$.
Тогда

$$f(x_1, x_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}) = x_1 x_2 \oplus a x_1 \oplus b x_2 \oplus c.$$

Положим:

$$\psi(x, y) = f(x \oplus b, y \oplus a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}).$$

Отметим, что вместо переменной $x_1$ подставили $x$ или $\bar{x}$, вместо переменной $x_2$ подставили $y$ или $\bar{y}$ и вместо переменных $x_i$ при $i = 3, \ldots, n$ подставили 0 или 1.

# Лемма о нелинейной функции

**Доказательство.** Получаем:

$$\begin{aligned}\psi(x,y) &= (x\oplus b)(y\oplus a)\oplus a(x\oplus b)\oplus b(y\oplus a)\oplus c = \\ &= (xy\oplus ax\oplus by\oplus ab)\oplus(ax\oplus ab)\oplus(by\oplus ab)\oplus c = \\ &= xy\oplus(ab\oplus c) = xy\oplus d,\end{aligned}$$

где $d = ab\oplus c$.

Значит,

$$\psi(x,y) = \begin{cases} x\cdot y, & d=0,\\ \overline{x\cdot y}, & d=1.\end{cases}$$

$\square$

# Лемма о нелинейной функции

**Пример**. Рассмотрим нелинейную функцию $f(x_1, x_2, x_3)$:

$$f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2 \oplus x_3.$$

Перепишем $f$ в виде:

$$f = x_1x_2 \cdot (x_3 \oplus 1) \oplus x_1 \cdot (0) \oplus x_2 \cdot (1) \oplus x_3.$$

Значит, $g_1(x_3) = x_3 \oplus 1$, $g_2(x_3) = 0$, $g_3(x_3) = 1$, $g_4(x_3) = x_3$.

Заметим, что $g_1(0) = 1$. Тогда:

$$a = g_2(0) = 0,\ b = g_3(0) = 1,\ c = g_4(0) = 0.$$

Получаем:

$$\psi(x, y) = f(\bar{x}, y, 0) = (x \oplus 1)y \oplus y = x \cdot y.$$

# Теорема Поста

Напомним, что множество $A$, $A \subseteq P_2$, называется **полной системой**, если формулами над $A$ можно выразить любую функцию алгебры логики.

**Теорема 6.1 (Поста).** *Пусть $A \subseteq P_2$. Множество $A$ является полной системой тогда и только тогда, когда $A$ не содержится ни в одном из классов $T_0$, $T_1$, $L$, $S$, $M$, т. е.*

$$A \not\subseteq T_0, \quad A \not\subseteq T_1, \quad A \not\subseteq L, \quad A \not\subseteq S, \quad A \not\subseteq M.$$

# Теорема Поста

**Доказательство**. 1. *Необходимость* обоснуем от обратного: пусть $A$ является полной системой, но содержится в одном из классов $T_0$, $T_1$, $L$, $S$, $M$, например, пусть $A \subseteq T_0$.

Тогда получаем:

$$[A] \subseteq [T_0] = T_0 \neq P_2.$$

Приходим к противоречию.

Значит, $A$ не может содержаться ни в одном из классов $T_0$, $T_1$, $L$, $S$, $M$.

# Теорема Поста

**Доказательство**. 2. *Достаточность*. Пусть $A$ не содержится в одном из классов $T_0$, $T_1$, $L$, $S$, $M$. Докажем, что в этом случае $A$ — полная система.

Из условия непринадлежности $A$ к каждому из перечисленных классов следует, что в $A$ найдутся такие функции

$$f_0, f_1, f_l, f_s, f_m,$$

что

$$f_0 \notin T_0, \quad f_1 \notin T_1, \quad f_l \notin L, \quad f_s \notin S, \quad f_m \notin M.$$

Отметим, что функции $f_0, f_1, f_l, f_s, f_m$ не обязательно все различны.

# Теорема Поста

**Доказательство**. Покажем, что формулами над $A$ можно выразить все функции из полной системы $\{0, 1, \bar{x}, x \cdot y\}$.

# Теорема Поста

**Доказательство**. 2.1. Построение констант 0 и 1.

Рассмотрим функции $f_0 \notin T_0$ и $f_1 \notin T_1$. Положим:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0(x) & = & f_0(x,\ldots,x), \\ \varphi_1(x) & = & f_1(x,\ldots,x). \end{array}$$

Тогда:

| $x$ | $\varphi_0$ | $\varphi_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $b$ |
| 1 | $a$ | 0 |

Теперь если $a = 1$ и $b = 0$, то $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = 0$.

Если же $a = 0$ или $b = 1$, то получена функция $\bar{x}$. Тогда по лемме о несамодвойственной функции из $f_s \notin S$, подставляя вместо ее переменных функции $x$, $\bar{x}$, получаем некоторую константу $c \in E_2$, а затем $\bar{c} \in E_2$.

Константы 0 и 1 построены.

# Теорема Поста

**Доказательство**. 2.2. Построение отрицания $\bar{x}$.

По лемме о немонотонной функции из $f_m \notin M$, подставляя вместо ее переменных функции 0, 1, $x$, получаем отрицание $\bar{x}$.

Отрицание $\bar{x}$ построено.

# Теорема Поста

**Доказательство**. 2.3. Построение конъюнкции $x \cdot y$.

По лемме о нелинейной функции из $f_l \notin L$, подставляя вместо ее переменных функции 0, 1, $x$, $\bar{x}$, $y$, $\bar{y}$ и, возможно, навешивая отрицание над функцией, получаем конъюнкцию $x \cdot y$.

Конъюнкция $x \cdot y$ построена.

# Теорема Поста

**Доказательство**. Значит, формулами над $A$ можно выразить все функции из полной системы $\{0, 1, \bar{x}, x \cdot y\}$.

Следовательно, система $A$ — полна.

$\square$

# Теорема Поста

По теореме Поста можно проверять полноту систем функций из $P_2$.

Если задано конечное множество $A = \{f_1, \ldots, f_t\} \subseteq P_2$, то можно построить таблицу со строками, соответствующими функциям $f_1, \ldots, f_t$, и со столбцами, соответствующими классам $T_0, T_1, L, S, M$.

На пересечении строки и столбца можно записывать «+» или «−» в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит функция, которой обозначена эта строка, к классу, которым обозначен этот столбец.

По теореме Поста система $A$ — полна, если в этой таблице в любом столбце найдется хотя бы один «минус», и не полна, если в этой таблице найдется столбец, состоящий только из «плюсов».

# Теорема Поста

**Пример**. Проверить, является ли полной система

$$A = \{\bar{x}, x \to y\}.$$

Применим теорему Поста:

| | $T_0$ | $T_1$ | $L$ | $S$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $x \to y$ | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ |

Значит, система $A$ — полна.

# Теорема Поста

**Пример**. Проверить, является ли полной система

$$A = \{\bar{x}, x \sim y\}.$$

Применим теорему Поста:

| | $T_0$ | $T_1$ | $L$ | $S$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $x \sim y$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |

Значит, система $A$ — не полна, т. к. $A \subseteq L$.

# Теорема Поста

Поразительно, но теорему Поста можно применять для проверки полноты и бесконечных множеств функций из $P_2$.

# Теорема Поста

**Пример**. Проверить, является ли полной системой бесконечное множество

$$A = (S \cap M) \cup (L \setminus M).$$

Предположим, что $A$ — полная система. Тогда по теореме Поста в $A$ обязаны содержаться функции, не принадлежащие каждому из классов $T_0, T_1, L, S, M$.

Попытаемся их подобрать. Находим:

$$\begin{array}{ll} \bar{x} \in L \setminus M, & \bar{x} \notin T_0, T_1, M, \\ x \oplus y \in L \setminus M, & x \oplus y \notin S, \\ xy \oplus xz \oplus yz \in S \cap M, & xy \oplus xz \oplus yz \notin L. \end{array}$$

Значит, система $A$ — полна.

# Теорема Поста

**Пример**. Проверить, является ли полной системой бесконечное множество

$$A = (L \cap T_0 \cap T_1) \cup (S \setminus (T_0 \cup T_1)).$$

Предположим, что $A$ — полная система. Тогда по теореме Поста в $A$ обязаны содержаться функции, не принадлежащие каждому из классов $T_0, T_1, L, S, M$.

Попытаемся их подобрать. Находим:

$$\begin{array}{ll} \bar{x} \in S \setminus (T_0 \cup T_1), & \bar{x} \notin T_0, T_1, M, \\ xy \oplus xz \oplus yz \oplus 1 \in S \setminus (T_0 \cup T_1), & xy \oplus xz \oplus yz \oplus 1 \notin L. \end{array}$$

Осталось найти несамодвойственную функцию в $A$. Т. к. в множестве $S \setminus (T_0 \cup T_1)$ все функции — самодвойственные, искать ее нужно в множестве $L \cap T_0 \cap T_1$.

# Теорема Поста

**Пример** (продолжение). Посмотрим, какие функции входят в множество $L \cap T_0 \cap T_1$.

Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in L \cap T_0 \cap T_1$, то $f \in L$, т. е.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$.

Кроме того, $f \in T_0$ и $f \in T_1$, т. е.

$$\begin{aligned} f(0, \ldots, 0) &= 0, \quad c_0 = 0, \\ f(1, \ldots, 1) &= 1, \quad c_1 \oplus \ldots \oplus c_n = 1. \end{aligned}$$

Итак, если $f \in L \cap T_0 \cap T_1$, то

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где $c_1, \ldots, c_n \in E_2$ и

$$c_1 \oplus \ldots \oplus c_n = 1.$$

# Теорема Поста

**Пример** (продолжение). Найдем двойственную функцию к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned} f^*(x_1, \ldots, x_n) &= \overline{c_1\bar{x}_1 \oplus \ldots \oplus c_n\bar{x}_n} = \\ &= c_1(x_1 \oplus 1) \oplus \ldots \oplus c_n(x_n \oplus 1) \oplus 1 = \\ &= (c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n) \oplus (c_1 \oplus \ldots \oplus c_n \oplus 1) = \\ &= c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n = f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Следовательно, $f^* = f$, т. е. $f \in S$ и

$$L \cap T_0 \cap T_1 \subseteq S.$$

Значит, система $A$ — не полна, т. к. $A \subseteq S$.

# Теорема Поста

Теорему Поста можно применять для проверки полноты множеств функций из $P_2$, в которых функции не явно заданы, а описаны своими свойствами.

# Теорема Поста

**Пример**. Пусть $f \in P_2$ и формулами над $A = \{f\}$ можно выразить константы 0 и 1. Доказать, что система $A = \{f\}$ — полна.

Докажем, что $f \notin T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M$.

# Теорема Поста

**Пример** (продолжение). Итак,

1) если $f \in T_0$, то $A \subseteq T_0$, значит,

$$[A] \subseteq [T_0] = T_0,$$

но $1 \in [A]$, $1 \notin T_0$ — противоречие, поэтому $f \notin T_0$;

2) если $f \in T_1$, то $A \subseteq T_1$, значит,

$$[A] \subseteq [T_1] = T_1,$$

но $0 \in [A]$, $0 \notin T_1$ — противоречие, поэтому $f \notin T_1$;

3) если $f \in S$, то $A \subseteq S$, значит,

$$[A] \subseteq [S] = S,$$

но $1 \in [A]$, $1 \notin S$ — противоречие, поэтому $f \notin S$.

# Теорема Поста

**Пример** (продолжение). Далее,

4) $f \notin T_0$, $f \notin T_1$, поэтому $f \notin M$;

5) $f \notin T_0$, $f \notin T_1$, если предположить, что $f \in L$, т. е. если $f \in L \setminus (T_0 \cup T_1)$, то аналогично предыдущему примеру показываем $f \in S$ — противоречие, поэтому $f \notin L$.

# Теорема Поста

**Пример** (продолжение). Следовательно, получаем:

| | $T_0$ | $T_1$ | $L$ | $S$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | — | — | — | — | — |

Значит, система $A = \{f\}$ — полна.

## Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите предложение 6.1.

2. Проверьте, является ли множество $A$ полной системой, если

1) $A = (M \cap T_0 \cap T_1) \cup (M \setminus (T_0 \cup T_1)) \cup \{x \oplus y \oplus z\}$;

2) $A = ((M \cap T_0) \setminus T_1) \cup ((M \cap T_1) \setminus T_0)) \cup \{x \oplus y \oplus z\}$.

# Литература к лекции


1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.
2. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 2014.
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.