Лекция 3. Импликанта функции. Сокращенная ДНФ. Построение сокращенной ДНФ по КНФ.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Уменьшение ЭК

Если K_1, K — ЭК, то K_1 называется **уменьшением** K, если каждый литерал ЭК K_1 входит в ЭК K.

Например, ЭК $K_1 = x_1 \cdot \bar{x}_2$ является уменьшением ЭК $K = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$.

Уменьшение называется *собственным*, если ЭК при этом не совпадают.

Уменьшение ЭК

Отметим, что ЭК K_1 является уменьшением ЭК K тогда и только тогда, когда

1) для любого $\alpha \in E_2^n$ из $K(\alpha) = 1$ следует $K_1(\alpha) = 1$;

2) $K_1 \vee K = K_1$ (выполняется **правило поглощения**).

Правило поглощения

Правилом поглощения назовем тождество

$$K_1 \vee K_1 \cdot K_2 = K_1.$$

Пример применения правила поглощения:

$$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_3 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 = \bar{x}_1 \cdot x_3 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3.$$

Импликанта функции

Импликантой функции $f \in P_2^{(n)}$ называется такая ЭК K, что для любого набора $\alpha \in E_2^n$ из $K(\alpha) = 1$ следует $f(\alpha) = 1$.

Если никакое собственное уменьшение импликанты K не является импликантой функции f, то ЭК K называется **простой импликантой** функции f.

Отметим, что ЭК K является импликантой функции $f \in P_2$ тогда и только тогда, когда верно тождество $K \vee f = f$.

Импликанты функции

Пример. Проверим, какие из ЭК $K_1 = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$, $K_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2$ и $K_3 = x_1 \cdot x_3$ являются импликантами или простыми импликантами функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f	K_1	K_2	K_3
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1

Получаем, что K_1 — импликанта f, но не простая импликанта; K_2 — не импликанта f, т. к. $K_2(1,0,0) = 1$, но $f(1,0,0) = 0$; и K_3 — простая импликанта f.

Свойство импликант

Предложение 3.1. *Если ЭК K содержится в некоторой ДНФ функции $f \in P_2$, то K — импликанта функции f.*

Доказательство. Пусть ЭК K содержится в ДНФ D функции $f \in P_2^{(n)}$.

Если $\alpha \in E_2^n$ и $K(\alpha) = 1$, то $D(\alpha) = 1$, т. е. $f(\alpha) = 1$.

Значит, K — импликанта f.

$\square$

Следствие. *Если ЭК K не является импликантой функции $f \in P_2$, то K не содержится ни в одной ДНФ функции f.*

Дизъюнкция всех простых импликант функции

Предложение 3.2. *Дизъюнкция D_f всех простых импликант функции $f \in P_2$ является ДНФ, которая представляет эту функцию f.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in E_2^n$.
1. Если $D_f(\alpha) = 1$, то найдется такая ЭК K в ДНФ D_f, что $K(\alpha) = 1$.

Но K — импликанта f, значит $f(\alpha) = 1$.

2. Если $f(\alpha) = 1$, то ЭК $x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ является импликантой f.

Значит, эта импликанта может быть уменьшена до некоторой простой импликанты K, при этом $K(\alpha) = 1$.

Но ЭК K содержится в ДНФ D_f, значит $D_f(\alpha) = 1$.

$\square$

Сокращенная ДНФ

Дизъюнкция D_f всех простых импликант функции $f \in P_2$ называется ее **сокращенной** ДНФ.

По определению для каждой функции ее сокращенная ДНФ единственна.

А как находить сокращенную ДНФ для заданной функции?

Правила упрощения конъюнкций литералов и констант

Назовем *правилами упрощения конъюнкций литералов и констант* тождества о коммутативности и ассоциативности конъюнкции и тождества

$$x \cdot x = x, \quad x \cdot \bar{x} = 0, \quad x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot 1 = x.$$

При помощи этих правил любую конъюнкцию литералов и констант можно привести либо некоторой ЭК, либо к константе 0.

Например,

$$x_1 \cdot x_3 \cdot x_3 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 = 0, \quad x_2 \cdot 1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{x}_1 \cdot x_2.$$

Правила упрощения дизъюнкций ЭК и констант

Назовем *правилами упрощения дизъюнкций ЭК и констант* тождества о коммутативности и ассоциативности дизъюнкции и тождества

$$K \vee 0 = K, \quad K \vee 1 = 1,$$

а также правило поглощения:

$$K_1 \vee K_1 \cdot K_2 = K_1.$$

При помощи этих правил любую дизъюнкцию ЭК и констант можно привести некоторой ДНФ, в которой никакая ЭК не является уменьшением никакой другой ЭК.

Например,

$$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee 0 \vee \bar{x}_1 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 = \bar{x}_1 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2.$$

Упрощение дизъюнктивных форм

Назовем *дизъюнктивной формой* выражение, являющееся дизъюнкцией конъюнкций литералов и констант.

Как показано выше, применением перечисленных правил любая дизъюнктивная форма может быть приведена к ДНФ, в которой никакая ЭК не является уменьшением никакой другой ЭК.

Назовем это приведение *упрощением дизъюнктивных форм с выполнением поглощений*.

Конъюнкция сокращенных ДНФ

Теорема 3.1. *Если* $D_i = \bigvee\limits_{j_i=1}^{l_i} K_{i,j_i}$ *— сокращенные ДНФ функций* $f_i \in P_2$ *при* $i = 1, \ldots, m$, *где* $m \geqslant 1$, *то ДНФ* D, *полученная упрощением с выполнением поглощений дизъюнктивной формы*

$$F = \bigvee_{j_1=1}^{l_1} \ldots \bigvee_{j_m=1}^{l_m} K_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot K_{m,j_m},$$

является сокращенной ДНФ функции $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_m \in P_2$.

Конъюнкция сокращенных ДНФ

Доказательство. Отметим, что $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_m$, значит, функция f задается формулой $D_1 \cdot \ldots \cdot D_m$.

Кроме того,

$$D_1 \cdot \ldots \cdot D_m = (K_{1,1} \vee \ldots \vee K_{1,l_1}) \cdot \ldots \cdot (K_{m,1} \vee \ldots \vee K_{m,l_m}).$$

Заметим, что дизъюнктивная форма F получена из формулы $D_1 \cdot \ldots \cdot D_m$ применением тождества о дистрибутивности

$$(x \vee y) \cdot z = x \cdot z \vee y \cdot z.$$

Значит, дизъюнктивная форма F задает функцию f.

Конъюнкция сокращенных ДНФ

Пусть D — ДНФ, полученная упрощением с выполнением поглощений дизъюнктивной формы F.

Значит, ДНФ D задает функцию f, в частности, может содержать только импликанты функции f.

Покажем, что ДНФ D содержит любую простую импликанту функции f.

Конъюнкция сокращенных ДНФ

Пусть K — простая импликанта функции $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_m$.

Значит, для любого набора $\alpha \in E_2^n$ из $K(\alpha) = 1$ следует

$$f(\alpha) = f_1(\alpha) \cdot \ldots \cdot f_m(\alpha) = 1.$$

Следовательно,

$$f_1(\alpha) = 1, \ldots, f_m(\alpha) = 1,$$

т.е. K является импликантой функции f_i для всех $i = 1, \ldots, m$.

Конъюнкция сокращенных ДНФ

Т.к. D_i — сокращенная ДНФ функции f_i, в D_i содержится некоторая простая импликанта K_i функции f_i, являющаяся уменьшением импликанты K, $i = 1, \ldots, m$.

Следовательно, выражение $K_1 \cdot \ldots \cdot K_m$ содержится в дизъюнктивной форме F.

Но выражение $K_1 \cdot \ldots \cdot K_m$ состоит только из литералов, содержащихся в ЭК K, поэтому либо совпадает с K, либо является собственным уменьшением K.

Но ЭК K является простой импликантой функции f, поэтому уменьшена быть не может, откуда $K = K_1 \cdot \ldots \cdot K_m$.

Значит, ЭК K содержится в ДНФ D.

Конъюнкция сокращенных ДНФ

Если какая-то не простая импликанта функции f содержится в F, то она поглотится соответствующей ей простой импликантой функции f при упрощении F с выполнением поглощений.

Следовательно, D — сокращенная ДНФ функции f.

$\square$

ЭД — сокращенная ДНФ

Предложение 3.3. *Любая ЭД является сокращенной ДНФ функции, которую она задает*.

Построение сокращенной ДНФ по КНФ

Алгоритм: *построение сокращенной ДНФ по КНФ.*

Вход: произвольная КНФ K функции $f \in P_2$.

Выход: сокращеннная ДНФ D_f функции f.

Описание алгоритма.

1. Преобразовать КНФ K в дизъюнктивную форму F, применяя правило дистрибутивности (перемножить скобки):

$$(x \vee y) \cdot z = x \cdot z \vee y \cdot z.$$

2. Преобразовать дизъюнктивную форму F в ДНФ D, применяя упрощение с выполнением поглощений.

3. Выдать D — сокращенную ДНФ функции f.

Окончание описания алгоритма

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Дискретная математика. М.: Инфра-М, 2021.

2. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. С. 297. Гл. IX 2.1, 2.3.