Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Mei 2020

22 – 25 Mei 2020

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
11. Notasi $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terkecil dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_k$. Sebagai contoh, $\min\{4, 1.5, 5\} = 1.5$, $\min\{3.5, \pi, 3, 4\} = 3$, $\min\{-5, 3\} = -5$, dan $\min\{1\} = 1$.
12. Notasi $\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terbesar dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_k$. Sebagai contoh, $\max\{4, 1.5, 5\} = 5$, $\max\{3.5, \pi, 3, 4\} = 4$, $\max\{-5, 3\} = 3$, dan $\max\{1\} = 1$.
13. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
14. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
15. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
16. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
17. Notasi $\dbinom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
18. Pada $\triangle ABC$:

(a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.

(b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.

(c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.

(d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

(e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

19. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

20. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

21. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

22. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

23. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

24. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Jessen membuat sebuah soal KTOM. Jawaban dari soal yang dia tulis merupakan pecahan campuran $a\frac{b}{c}$ dengan a, b, dan c adalah bilangan asli serta $a, b \leq 9$ (asumsikan $b < c$). Namun, Rizky salah menginput jawaban sehingga dia menulis $\frac{\overline{ab}}{c}$ sebagai jawaban soal tersebut ($\overline{ab}$ disini merupakan bilangan desimal dua digit, **bukan** $a \times b$). Ajaibnya, soal tersebut tetap memiliki jawaban yang benar. Tentukan nilai terkecil yang mungkin dari c.

2. Definisikan barisan $a_1, a_2, \ldots$ dengan
$$a_1 = 20, \quad \text{dan} \quad a_{n+1} = 100a_n + 20 \text{ untuk setiap } n \geq 1.$$
Gambaran sederhana, suku-suku pada barisan tersebut adalah $20, 2020, 202020, \ldots$. Tentukan bilangan asli k terkecil sehingga 55 habis membagi a_k.

3. Diberikan segitiga sama sisi CFK. Ke arah luar segitiga CFK, konstruksi segilima beraturan $ABCKL$, persegi $CDEF$, dan segienam beraturan $FGHIJK$. Jika keliling CFK sama dengan 33, tentukan keliling dari segiduabelas $ABCDEFGHIJKL$.
Catatan: Segi-n beraturan adalah sebuah segi-n yang semua sisinya sama panjang dan semua sudutnya sama besar.

4. Misalkan S adalah suatu himpunan berhingga yang beranggotakan sebanyak n bilangan bulat. Misalkan S memenuhi sifat berikut : Untuk sembarang bilangan asli $k \leq n$ dan anggota berbeda x_1, x_2, $\ldots$, x_k dari S, $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ merupakan bilangan ganjil. Tentukan nilai terbesar yang mungkin dari n.

5. Diberikan sebuah persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 1. Titik M adalah titik tengah CD, sedangkan titik N adalah titik tengah MA. Jika panjang segmen garis NC dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{\sqrt{a}}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan asli serta a tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat selain 1, tentukan nilai dari $a + b$.

6. Eddy mengambil beberapa bilangan dari 2020 bilangan asli pertama. Tentukan banyak minimum bilangan yang perlu Eddy ambil agar dia pasti mengambil setidaknya sebuah bilangan yang relatif prima dengan 2020.

7. Suatu fungsi $f(m, n)$ didefiniskan untuk setiap pasangan bilangan asli (m, n) dengan aturan-aturan yang berlaku sebagai berikut (semua aturan ini berlaku untuk semua pasangan bilangan asli (m, n)) :

   - $f(m, n)$ merupakan bilangan asli,
   - $f(m, n) + f(n, m) = 2mn$, dan
   - $f(m + 1, n) = f(m, n) + n + 1$.

   Hitunglah nilai dari $f(4, 672)$.

8. Misalkan $a_0, a_1, \ldots$ merupakan barisan bilangan asli dengan $a_0 = 1$, $a_1 = 11$, dan $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ untuk setiap $n \geq 0$. Tentukan banyaknya bilangan cacah n yang kurang dari 2020 sehingga a_n habis dibagi 13.

9. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (a, b) dengan $b \leq 100$ sehingga $9, a, b$ membentuk barisan geometri tak konstan.

10. Diketahui tiga bilangan kompleks taknol a, b, dan c memenuhi persamaan $a+b+c = 0$ dan
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}.$$
Tentukan nilai dari
$$\left\lceil \frac{a^4 + b^4}{c^4} \right\rceil.$$

11. Misalkan $a, b, c \in \mathbb{N}$ dengan $b \geq 2$ sehingga $\sqrt{ab^2 - 6} + \sqrt{b - c^2} \in \mathbb{N}$. Tentukan nilai terkecil yang mungkin dari $a + b + c$.

12. Diberikan segitiga ABC dengan $AC = 12$. Terdapat lingkaran ω yang menyinggung garis AC di titik C serta melewati titik B. Diketahui bahwa garis bagi dalam $\angle BAC$ memotong BC di titik D serta ω di titik E dan F dengan $AE < AF$. Jika $AC = AD$, $AE = ED$, $CD = 8$, dan x adalah panjang segmen garis AB, tentukan nilai dari $2x$.

13. Tentukan bilangan asli n terkecil sehingga terdapat polinomial $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dengan koefisien bilangan bulat $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ yang memenuhi bahwa untuk setiap bilangan asli k, berlaku $15 \mid P(k)$.

14. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle BAC = 60^\circ$ serta titik tinggi H. Diketahui bahwa titik H berada di lingkaran dalam segitiga ABC dan panjang jari-jari lingkaran dalam ABC adalah 2020. Jika panjang jari-jari lingkaran luar $\triangle ABC$ dapat dinyatakan dalam bentuk $a + b\sqrt{c}$ dengan a, b, dan c adalah bilangan asli serta c tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat selain 1, tentukan nilai dari $a + b + c$.

15. Afif diminta menggambar segitiga yang ketiga sudutnya a, b, c derajat, dengan a, b, dan c adalah bilangan asli. Namun, Afif justru menggambar segitiga yang ketiga sisinya memiliki panjang a, b, c satuan. Tentukan banyak triplet (a, b, c) sehingga Afif mungkin melakukan hal ini.

16. Diberikan a, b bilangan rill positif yang memenuhi
$$(6 - 2\sqrt{6})a + (3 - 2\sqrt{3})b \geq 12\sqrt{3} + 3\sqrt{6} - 18\sqrt{2}.$$
Diketahui bahwa nilai minimum dari
$$a^3 + b^3 - 3\sqrt{2}(a^2 + b^2)$$
adalah X, dimana nilai ini tercapai ketika $(a, b) = (Y, Z)$. Jika diketahui
$$X + Y + Z + 1 = \sqrt{K} + \sqrt{T} - \sqrt{O} + M$$
untuk suatu bilangan bulat nonnegatif K, T, O, dan M, tentukan nilai dari $K + T + O + M$.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Misalkan f adalah suatu fungsi yang memetakan $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap bilangan bulat m dan n,

$$f(m^2 + m + 2n) = f(m)f(m+1) - 2n.$$

   (a) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat k, jika k genap, maka $f(k) = f(0) - k$.

   (b) Buktikan bahwa $f(0) = 0$.
   Hint: Masukkan $m = -1$ dan $n = 0$.

   (c) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat k, jika k ganjil, maka $f(k) = k$.

   (d) Tentukan seluruh fungsi f yang memenuhi.

2. Diberikan sebuah papan berukuran $k \times k$ dengan k ganjil. Pada setiap petaknya, terdapat sebuah lampu dan sebuah tombol. Semua lampu dalam kondisi mati. Jika kita menekan tombol pada suatu petak, maka semua lampu yang sebaris dan sekolom dengannya akan berubah statusnya. Sebagai contoh, jika ada lampu yang menyala dan kita menekan tombol yang sebaris atau sekolom dengannya, maka lampu itu mati, begitupun sebaliknya. Jika S_n menyatakan banyaknya lampu yang menyala setelah menekan sembarang tombol n kali (tombol yang sama boleh ditekan berulang kali), buktikan bahwa $|S_n - n|$ merupakan bilangan genap.

3. Tentukan, dengan bukti, semua pasangan bilangan asli (k, n) yang memenuhi persamaan

$$(2n+1)^n = 8n^k + 2n^2 + 1.$$

4. Diberikan segitiga ABC dengan median (garis berat) dari titik A memotong lingkaran luar ABC di titik D. Di dalam segitiga ABC, terdapat titik P pada median A. Diketahui BP dan CP memotong AC dan AB berturut-turut di titik E dan F. Selanjutnya, diketahui DE dan DF memotong lingkaran luar ABC lagi di titik X dan Y. Buktikan bahwa untuk setiap titik P yang ada, garis XY akan konkuren di suatu titik.