1. Diberikan n dan r bilangan asli yang memenuhi

$$1+2+\cdots+(n-1)=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r).$$

Buktikan bahwa n bilangan komposit.

Solusi :

Misalkan terdapat r bilangan prima sehingga terdapat bilangan asli n yang memenui persamaan, maka kita dapatkan

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n &= (n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)\\ \implies \frac{(n)(n+1)}{2} &= \frac{(r)(2n+1+r)}{2}\\ \implies n^2+(1-2r)n-r(r+1)=0\end{aligned}$$

Persamaan diatas merupakan persamaan kuadrat dalam n, sehingga agar mempunyai solusi bulat diskriminannya haruslah 0, maka kita dapatkan

$$(1-2r)^2-4(-r(r+1))=x^2 \implies 8r^2=(x-1)(x+1)$$

Perhatikan bahwa $(x+1,x-1)=(x+1,2)\leq 2$.

- Jika $r=2$, maka $x-1=2$ dan $x+1=2r^2$ atau $x-1=1$ dan $x+1=4r^2$. Jelas bahwa kedua persamaan tidak mempunyai solusi solusi.
- Jika $r\geq 3$, jelas bahwa x ganjil sehingga $(x+1,x-1)=2$. Perhatiakn pula $r\nmid 2=(x+1,x-1) \implies 2r^2 \mid x+1 \vee 2r^2 \mid x-1$.
  Jika $2r^2 \mid x+1$ maka kita dapatkan $x-1\leq 4$ dan $x+1\geq 2r^2\geq 2\cdot 3^2$, yang jelas tidak ada solusi.
  Jika $2r^2 \mid x-1$ maka kita dapatkan $x+1\leq 4$ dan $x-1\geq 2r^2\geq 2\cdot 3^2$, yang jelas tidak ada solusi.

Jadi tidak mungkin r bilanga prima, jadi haruslah r komposit.

2. Diberikan 200 kotak merah yang masing-masing berisi maksimal 19 bola dan minimal 1 bola dan 19 kotak biru yang masing-masing berisi maksimal 200 bola dan minimal 1 bola. Diketahui banyak bola pada kotak biru kurang dari banyak bola pada kotak merah. Buktikkan ada sekelompok kotak merah yang jumlah bolanya sama dengan sekelompok kotak biru.

   Solusi :

   Misalkan $a_1, a_2, \cdots, a_{200}$ dan $b_1, b_2, \cdots, b_{19}$ merupakan banyaknya bola dikotak merah dan biru. Misalkan $r_1, r_2, \cdots, r_{19}$ merupakan bilangan asli terkecil sehingga

$$a_1 + \cdots + a_{r_i} \geq b_1 + \cdots + b_i, \text{ dan } a_1 + \cdots + a_{r_i - 1} \leq b_1 + \cdots + b_i - 1$$

   Kita definisikan $S_i = a_1 + \cdots + a_i$ dan $T_i = b_1 + \cdots + b_i$, maka kita punyai

$$18 \geq a_{r_i} - 1 \geq S_{r_i} - T_i \geq 0 \ \ \forall i = 1, 2, \cdots, 19$$

   Jika terdapat i sehingga $S_{r_i} - T_i = 0$, maka kita selesai. Jika tidak, maka dari PHP terdapat $i > j$ sehingga

$$S_{r_i} - T_i = S_{r_j} - T_j \implies S_{r_i} - S_{r_j} = T_i - T_j \implies a_{r_j+1} + a_{r_j+2} + \cdots + a_{r_i} = b_{j+1} + b_{j+2} + \cdots + b_i.$$

   Terbukti.

3. Diberikan sebuah persegi panjang $ABCD$ dengan $AD > AB$. Titik E pada AD sehngga BE tegak lurus AC, BE memotong AC di M. Lingkaran luar segitiga BEA memotong AC dan BC berturut-turut di N dan F. Lingkaran luar segitiga DEN memotong CD di G . Jika garis FG memotong AB di P, buktikan bahwa $PM = PN$.

   Solusi :

   Misalkan $NE \cap CB = I$, $IG \cap AC = R$, $PG \cap AC = S$, dan T pada FN sehingga $GT \perp FN$.

   Perhatikan bahwa $\angle BNE + \angle EBA = 180^\circ \implies \angle BNE = 90^\circ$. Karena $BE \perp AN$ maka $BNEA$ layang-layang, maka $\triangle ANE$ sama kaki.

   Perhatikan bahwa $\angle GNE = \angle GDE = 90^\circ \implies \angle GNI = 90^\circ$. Karena $\angle ICG = \angle GNI = 90^\circ$ dan $IG \perp CN$, maka $ICGN$ layang-layang, maka $\triangle ICN$ sama kaki.

   Misalkan panjang $BM = b$, $NM = bk$, $IR = a$. Perhatikan bahwa $\triangle BNM \sim \triangle CIR \sim \triangle GCR$, sehingga kita peroleh $GT = RN = CN = \frac{a}{k}$, $NT = RG = \frac{a}{k^2}$.

   Perhatikan bahwa $\angle FNA + \angle FBA = 180^\circ \implies \angle FNA = 90^\circ$, maka $\triangle FNC \sim \triangle IRC$ sehingga kita peroleh $FN = 2a$.

   Perhatikan bahwa $\triangle FNS \sim \triangle FTG$, maka kita peroleh

$$\frac{SN}{GT} = \frac{FN}{FT} \implies SN = \frac{2ak}{2k^2+1}.$$

   Perhatikan pula $\triangle BMC \sim \triangle IRC$, maka kita peroleh

$$\frac{BM}{CM} = \frac{IR}{CR} \implies \frac{b}{2\frac{a}{k} + bk} = \frac{a}{\frac{a}{k}} \implies b = \frac{2a}{1-k^2} \quad (*)$$

   Dari *manelaos* pada segitiga ABN dan garis PSG kita peroleh

$$\frac{PB}{PA}\frac{SA}{SN}\frac{GN}{GB} = 1 \implies \frac{PB}{PA} = \frac{SN}{SA}\frac{GB}{GN} = \frac{1}{1+\frac{SA}{SN}}\frac{GB}{GN}$$

   Perhatikan bahwa $\triangle BNM \sim \triangle GNR$, maka diperoleh

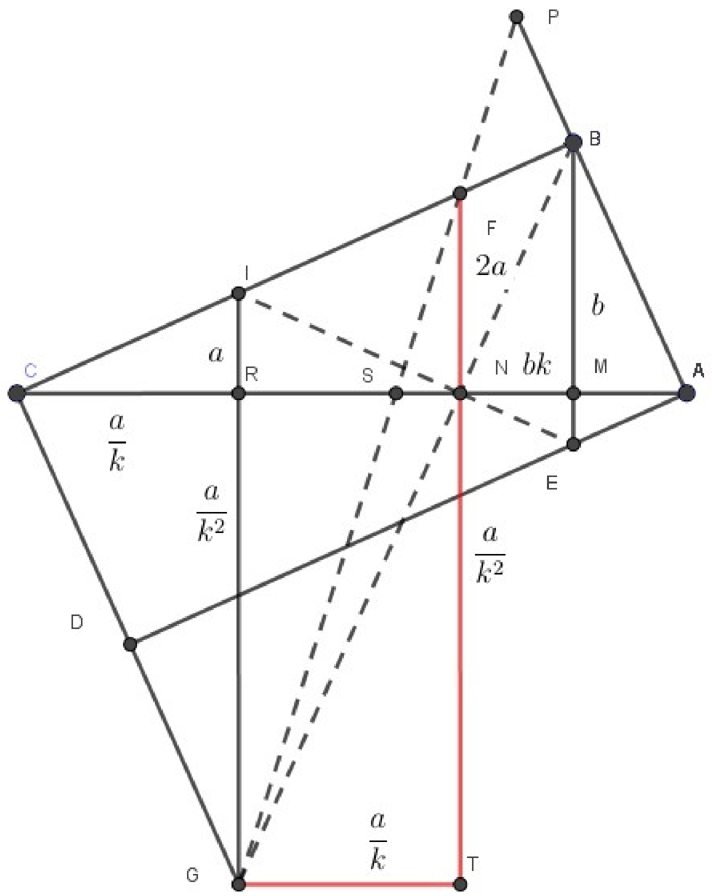
$$\frac{GN}{NB} = \frac{RG}{MB} = \frac{\frac{a}{k^2}}{b} = \frac{a}{bk^2} \implies \frac{GB}{GN} = \frac{a+bk^2}{a}.$$

   Kita gabungkan kedua persamaan terakhir didapatkan

$$\frac{PB}{PA} = \frac{1}{1+\frac{SA}{SN}}\frac{GB}{GN} = \frac{1}{1+\frac{2bk}{\frac{2ak}{2k^2+1}}}\frac{a+bk^2}{a} = \frac{a+bk^2}{a+b+2bk^2}$$

   Kita subtitusi nilai b dengan $(*)$ didapatkan $\frac{PB}{PA} = \frac{1}{3}$.

   Misalkan T titik tengah NM, maka $TM = \frac{1}{2}NM = \frac{1}{2}AM$ sehingga $NM = \frac{1}{3}TA$ yang mengakibatkan $\triangle PAT \sim \triangle BAM$ sehingga $PT \parallel BM$ yang mengakibatkan $PT \perp AC$. Karena T titik tengah NM, maka $\triangle PNM$ sama kaki yang mengakibatkan $PN = PM$.


P
B
F
$2a$
I
b
a
C
R
S
N
bk
M
A
$\frac{a}{k}$
E
$\frac{a}{k^2}$
$\frac{a}{k^2}$
D
$\frac{a}{k}$
G
T

4. katakan sebuah susunan kesatuan sebagai susunan *kesatuan segitiga* apabila dapat dibuat :

$$a+b=c$$

$$d+e+f=g+h$$
$$i+j+k+l=m+n+o$$

Dimana ruas kiri baris ke-j terdiri dari $j+1$ suku dan ruas kanan baris ke-j terdiri dari j suku.

Diberikan bilangan dari $1,2,\cdots,N^2$ dengan sebarang satu bilangan yang paritas sama dengan N dihapus. Buktikan bilangan yang tersisa dapat dibentuk suatu *kesatuan segitiga*.

Solusi :

Soal akan dibuktikan dengan induksi kuat. Misalkan bilangan yang diambil adalah d.

- Untuk $N=2$, konfigurasi yang mungkin adalah

$$d=2 \implies 1+3=4,\ \ d=4 \implies 1+2=3.$$

- Untuk $N=3$ perhatikan kasus berikut.
  $d=1$, contoh konfigurasi yang mungkin adalah

$$2+3=5$$

$$4+6+7=8+9$$

  $d=3$, contoh konfigurasi yang mungkin adalah

$$1+4=5$$

$$2+6+8=7+9$$

  $d=5$, contoh konfigurasi yang mungkin adalah

$$1+2=3$$

$$4+6+7=8+9$$

  $d=7$, contoh konfigurasi yang mungkin adalah

$$1+4=5$$

$$2+3+9=6+8$$

  $d=9$, contoh konfigurasi yang mungkin adalah

$$1+2=3$$

$$4+5+6=7+8$$

- Asumsikan benar untuk $N=k+1\geq 3$ $(k\geq 2)$, akan dibuktikan benar untuk $N=k+2$. Perhatikan dua persamaan berikut

$$\underbrace{(k^2+1)+(k^2+2)+\cdots+(k^2+k+1)}_{k+1}=\underbrace{(k^2+k+2)+(k^2+k+3)+\cdots+(k^2+2k)+\Big((k+1)^2+1\Big)}_{k} \quad (*)$$

$$\underbrace{(k+1)^2+\Big((k+1)^2+2\Big)+\Big((k+1)^2+3\Big)+\cdots+\Big((k+1)^2+k+2\Big)}_{k+2}=\underbrace{\Big((k+1)^2+k+3\Big)+\Big((k+1)^2+k+4\Big)+\cdots+(k+2)^2}_{k+1} \quad (**)$$

  Jika $1\leq d\leq k^2$, maka dari induksi himpunan $\{1,2,\cdots,k^2\}-\{d\}$ dapat kita susun pada k baris pertama, dan pada baris ke-$(k+1)$ dan baris ke-$(k+2)$ dapat kita isi dengan $(*)$ dan $(**)$.

  Jika $k^2+1\leq d\leq (k+2)^2$, maka d bisa berada pada persamaan $(*)$ atau $(**)$.

  - Jika d ada pada $(**)$.
    Karena k dan d berparitas sama, maka d dapat kita nyatakan $d=(k+1)^2+2l+1$. Perhatikan bahwa $k+2\leq k^2$, sehingga $k+2\in\{1,2,\cdots,k^2\}$. Konfigurasi yang dapat dibuat adalah sebagai berikut
    * Pada baris pertama hingga ke-k kita isi dengan himpunan $\{1,2,\cdots,k^2\}-\{k+2\}$, yang menurut hipotesis induksi dapat dilakukan.
    * Pada baris ke-$(k+1)$ kita isi dengan $(*)$.
    * Pada baris ke-$(k+2)$ kita isi dengan

$$(k+2)+(k+1)^2+\underbrace{\Big((k+1)^2+3\Big)+\Big((k+1)^2+5\Big)+\cdots+\Big((k+1)^2+2l-1\Big)}_{\text{lompat 2}}+\underbrace{\Big((k+1)^2+2l+2\Big)+\Big((k+1)^2+2l+4\Big)+\cdots+\Big((k+2)^2-1\Big)}_{\text{lompat 2}}$$

$$=\Big((k+1)^2+2\Big)+\underbrace{\Big((k+1)^2+4\Big)+\Big((k+1)^2+6\Big)\cdots+\Big((k+1)^2+2l\Big)}_{\text{lompat 2}}+\underbrace{\Big((k+1)^2+2l+3\Big)+\Big((k+1)^2+2l+5\Big)+\cdots+(k+2)^2}_{\text{lompat 2}}$$

    Mudah dicek pada baris ke-$(k+2)$ bahwa jumlahan ruas kiri dan kanan sama, dan banyak suku diruas kiri $k+2$ dan banyak suku diruas kanan $k+1$. Mudah dicek pula ruas kiri dan kanan mengandung semua elemen dari $(**)$ selain $(k+1)^2+2l+1$ ditambah dengan $(2+k)$, sehingga konfigurasi ini mengandung semua element dari $\{1,2,\cdots,(k+2)^2\}$ selaian $d=(k+1)^2+2l+1$.
  - Jika d ada pada $(*)$.
    Karena k dan d berparitas sama, maka d dapat kita nyatakan $d=(k)^2+2l$. Perhatikan bahwa $k+2\leq k^2$, sehingga $k+2\in\{1,2,\cdots,k^2\}$. Konfigurasi yang dapat dibuat adalah sebagai berikut
    * Pada baris pertama hingga ke-k kita isi dengan himpunan $\{1,2,\cdots,k^2\}-\{k+2\}$, yang menurut hipotesis induksi dapat dilakukan.
    * Jika $k>l$ Pada baris ke-$(k+1)$ kita isi dengan

$$(k+2)+\underbrace{(k^2+1)+(k^2+3)+\cdots+(k^2+2l-3)}_{\text{lompat 2}}+(k^2+2l-1)+\underbrace{(k^2+2l+2)+(k^2+2l+4)+\cdots+(k^2+2k-2)}_{\text{lompat 2}}+(k^2+2k)$$

$$=\underbrace{(k^2+2)+(k^2+4)+\cdots+(k^2+2l-2)}_{\text{lompat 2}}+(k^2+2l+1)+\underbrace{(k^2+2l+3)+(k^2+2l+5)+\cdots+(k^2+2k-1)}_{\text{lompat 2}}+\Big((k+1)^2+1\Big)$$

      Jika $k=l$ Pada baris ke-$(k+1)$ kita isi dengan

$$(k+2)+\underbrace{(k^2+1)+(k^2+3)+\cdots+(k^2+2k-3)}_{\text{lompat 2}}+(k^2+2k-1)=\underbrace{(k^2+2)+(k^2+4)+\cdots+(k^2+2k-2)}_{\text{lompat 2}}+\Big((k+1)^2+1\Big)$$

- $*$ Pada baris ke-$(k+2)$ kita isi dengan $(**)$.

Mudah dicek pada baris ke-$(k+1)$ bahwa jumlahan ruas kiri dan kanan sama, dan banyak suku diruas kiri $k+1$ dan banyak suku diruas kanan k. Mudah dicek pula ruas kiri dan kanan mengandung semua elemen dari $(*)$ selain k^2+2l ditambah dengan $(2+k)$, sehingga konfigurasi ini mengandung semua element dari $\{1,2,\cdots,(k+2)^2\}$ selaian $d=k^2+2l$.

Dari induksi, maka terbukti untuk setiap n dapat dibentuk *susunan kesamaan segitiga*.

5. Diberikan bilangan real a dan b sehingga ada tak terhingga banyak bilangan asli m dan n yang memenuhi

$$\lfloor am+b \rfloor \le \lfloor a+bm \rfloor \text{ dan } \lfloor an+b \rfloor \ge \lfloor a+bn \rfloor.$$

Buktikan bahwa $a = b$.

Solusi :

Misalkan terdapat bilangan real $a \neq b$ yang memenuhi soal, tanpa mengurangi keumuman kita misalkan $a > b$.

Dari soal kita peroleh ada takhingga m yang memenuhi

$$\lfloor am+b \rfloor \le \lfloor a+bm \rfloor$$

$$\Longrightarrow am+b-1 < \lfloor am+b \rfloor \le \lfloor a+bm \rfloor \le a+bm$$

$$0 < 1+(m-1)(b-a) \quad (1)$$

Karena $a > b$, maka kita dapat memisalkan $(b-a) = -c$ dimana c bilangan real positif. Karena ada takhingga bilangan asli m yang memenuhi (1), maka kita mengambil $m > 1 + \frac{1}{a-b}$ yang mengakibatkan

$$(m-1)(a-b) > 1 \Longrightarrow 0 > 1+(m-1)(b-a),$$

kontradiksi dengan (1), maka haruslah $a = b$.

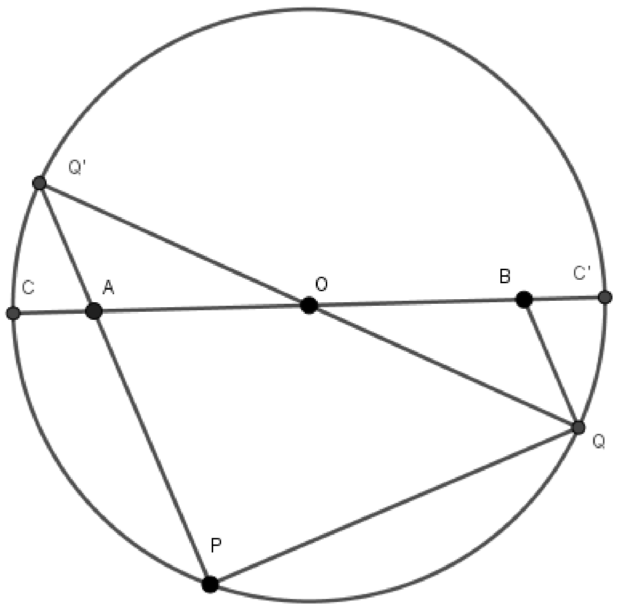
6. Diberikan lingkaran dengan pusat O. Titik A didalam lingkaran namun tidak pada keliling lingkaran. Titik B merupakan refleksi A terhadap O. Sebarang titik P terletak pada keliling lingkaran. Garis yang tegak lurus AP dan melewati P memotong lingkaran di Q. Buktikan $AP \times BQ$ konstan selama P bergerak di lingkaran.

   Solusi :

   Misalkan perpanjangan AB memotong lingkaran di C dan C' seperti digambar. Jelas bahwa $CA = C'B$.

   Misalkan pula PA memotong lingkaran kedua kalinya pada Q'. Karena $\angle Q'PQ = 90^\circ$, maka QQ' diameter sehingga O merupakan titik tengah QQ'. Karena $\angle Q'OA = \angle AOB$, $AO = BO$, dan $QO = Q'O$, maka $\triangle AQ'O$ kongruen $\triangle BQO$ yang mengakibatkan $BQ = Q'A$.

   Dari *Power of Point* dari titik A kita dapatkan $CA \times C'A = PA \times Q'A = PA \times BQ$. Karena $CA \times C'A$ konstan, maka $PA \times BQ$ juga konstan.



7. Tentukan semua solusi dari x, y, m, n bilangan asli dan p prima yang memenuhi

$$x + y^2 = p^m$$

$$x^2 + y = p^n$$

Solusi :

Jika $n = m$, maka diperoleh

$$a^2 + b = a + b^2 \implies (a-b)(a+b-1) = 0 \implies a = b \vee a+b = 1$$

Karena a, b merupakan bilangan asli, maka $a+b=1$ tidak mungkin. Jadi haruslah $a = b$, dari soal diperoleh

$$p^n = a^2 + b = a^2 + a = a(a+1)$$

Karena $(a, a+1) = 1$ maka $a = 1$ sehingga diperoleh $p = 2$ dan $n = 1$. Jadi solusi yang memenuhi adalah $(a, b, p, n, m) = (1, 1, 2, 1, 1)$.

Jika $n \neq m$, tanpa mengurangi keumuman $m > n$, maka dari soal diperoleh

$$p^n(p^{m-n} - 1) = p^m - p^n = a + b^2 - (a^2 + b) = (b-a)(b+a-1) \implies p^n \mid (b-a)(b+a-1).$$

Perhatikan bahwa

$$p^n = a^2 + b > a + b - 1 > b - a,$$

sehingga diperoleh

$$p \mid b - a, \quad p \mid a + b - 1, \text{ dan } n \geq 2 \qquad (1)$$

- Perhatikan bahwa $a + b - 1 = (a - b) + (2b - 1)$, maka dapat disimpulkan $b - a$ dan $a + b - 1$ berbeda paritas. Dari (1) diperoleh p haruslah ganjil. Misalkan $a \equiv k \pmod{p}$, dimana $0 \leq k < p$. Dari (1) diperoleh

  $$b \equiv a \equiv k \pmod{p}, \text{ dan } a + b - 1 \equiv 0 \pmod{p} \implies 2k - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

  Karena $2k - 1 < 2p - 1 < 2p$, dan $2k - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, maka haruslah $p = 2k - 1$.
  Dari soal kita punyai $a^2 + b = p^n$, maka

  $$a^2 + b \equiv 0 \pmod{p} \implies k^2 + k = k(k+1) \equiv 0 \pmod{2k-1}$$

  Karena $(k, 2k-1) = 1$, maka

  $$k + 1 \equiv 0 \pmod{2k-1} \implies 2k + 2 \equiv 0 \pmod{2k-1} \implies 3 \equiv 0 \pmod{2k-1}.$$

  Karena $p = 2k - 1$ prima, maka $p = 2k - 1 = 3 \implies k = 2$.
- Perhatikan pula

  $$p^n(p^{m-n} - 1) = (b-a)(b+a-1) = (b-a)(p^n - a^2 + a - 1)$$

  Karena $a \equiv 2 \pmod{3}$, mudah dibuktikan $-a^2 + a - 1 \equiv 3 \pmod{9}$. Karena $n \geq 2$ maka $p^n - a^2 + a - 1 \equiv 3 \pmod{9}$.
  Sehingga diperoleh $(p^n - a^2 + a - 1) = 3c$ dan $b - a = d \cdot 3^{n-1}$, dimana $3 \nmid c \cdot d$.

- Karena $a^2+b=3^n$, maka a,b mempunyai paritas yang berbeda sehingga $b-a$ ganjil.

$$a^2+b=3^n \implies b<3^n, \text{ karena } b-a=d\cdot 3^{n-1} \implies b-a=3^{n-1} \implies b=a+3^{n-1}.$$

  Perhatikan bahwa

$$a^2+b=3^n \implies a^2+a+3^{n-1}=3^n \implies a(a+1)=2\cdot 3^{n-1}.$$

  Karena $(a,a+1)=1$, maka $a=3^{n-1}, a+1=2$ atau $a=2, a+1=3^{n-1}$.
  Jika $a=3^{n-1}, a+1=2 \implies a=1, n=1$ kontradiksi dengan asumsi $n\geq 2$.
  Jika $a=2, a+1=3^{n-1} \implies n=2 \implies b=5 \implies m=3$.
  Jadi solusi yang memenuhi adalah $(a,b,p,n,m)=(2,5,3,2,3)$, $(5,2,3,3,2)$.

Jadi semua solusi yang memenuhi adalah $(a,b,p,n,m)=(1,1,2,1,1)$, $(2,5,3,2,3)$, $(5,2,3,3,2)$.

8. Diberikan $n > 1$ dan a_i bilangan bulat pada rentang $[-n, n]$. Apabila $a_1 + aa_2 + \cdots + a_{2n} = n+1$, buktikan ada sekelompok a_i yg jumlahnya 0.

   Solusi :

   Misalkan $m = maks(a_1, a_2, \cdots, a_{2n})$, jelas $m > 0$ maka kita dapatkan

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} - m = n + 1 - m \leq n.$$

   Jika $m = 1$.

   Karena $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = n+1$ maka terdapat $(n+1+c)$ nilai i yang mengakibatkan $a_i = 1$. Tanpa mengurangi keumuman $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1+c} = 1$, maka kita dapatkan

$$a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n} = n + 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n+1} = 0.$$

   Jika $m > 1$.

   Misalkan $S_k = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ dimana $\{c_1, c_2, \cdots c_{2n-1}\}$ permutasi dari $\{a_1, a_2, \cdots, a_{2n}\} - \{m\}$ sehingga mempunyai sifat

   (a) $c_1 > 0$. Karena kita punyai $\sum c_i = -m + \sum a_i = -m + n + 1 \geq 1$, maka kita dapat milih c_1 yang bernilai positif.

   (b) Jika $c_1 + c_2 + \cdots + c_k \leq 0$ maka $c_{k+1} > 0$.
   Hal ini mungkin terjadi karena $c_1 + c_2 + \cdots + c_k + c_{k+1} + \cdots c_{2n-1} = n + 1 - m \geq 1 \implies c_{k+1} + \cdots + c_{2n-1} \geq 1$. Jadi kita dapat memilih c_{k+1} positif.

   (c) Jika $c_1 + c_2 + \cdots + c_k \geq 1$ dimana $k < 2n-1$ maka pilih $c_{k+1} \leq 0$.
   Jika tidak ada $c_i \leq 0$, maka kita punyai $n + 1 - m = S_{2n-1} > S_{2n-2} > \cdots > S_i > 0$, sehingga $n+1-m \geq S_k$ untuk setiap $k \geq i$.

   Dari (b) dan (c) kita peroleh $-n+1 \leq S_k \leq maks(m, n+1-m)$ untuk setiap $1 \leq k \leq 2n-1$.

   - Jika $2 \leq m \leq n-1$.
     Maka kita dapatkan $-n+1 \leq S_k \leq maks(m, n+1-m) \leq n-1$ untuk setiap $1 \leq k \leq 2n-1$. Jika terdapat $S_k = 0$ maka kita selesai, jika tidak maka dari *PHP* terdapat $i > j$ sehingga $S_i = S_j$ yang mengakibatkan
     $$a_i + a_{i-1} + \cdots + a_{j+1} = S_i - S_j = 0.$$
   - Jika $m = n$.
     Jika terdapat $a_i = -n$ maka kita selesai, kita ambil a_i dan m yang mengakibatikan $a_i + m = 0$. Jika $a_i > -n$, maka dari (b) dan (c) didapatkan $-n+2 \leq S_k \leq maks(b, n+1-b) = n$. Jika terdapat $S_k = 0$ maka kita selesai, jika tidak maka dari *PHP* terdapat $i > j$ sehingga $S_i = S_j$ yang mengakibatkan
     $$a_i + a_{i-1} + \cdots + a_{j+1} = S_i - S_j = 0.$$

   Jadi soal terbukti.