

KUMPULAN USULAN SOAL INAMO 2010

Aljabar

Problem A1

Misalkan a, b, c bilangan real positif sehingga

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Buktikan bahwa $ab + bc + ca \geq 3$.

Problem A2

Diberikan 3 bilangan real positif a, b, c sehingga $ab + bc + ca = abc$, buktikan bahwa

$$\frac{ab}{a^2b + 1} + \frac{bc}{b^2c + 1} + \frac{ca}{c^2a + 1} \leq \frac{ab + bc + ca}{28}$$

Problem A3

Misalkan a, b, c bilangan real positif sehingga $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2c^2$. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{(2a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{1}{(2b^2 + c^2 + a^2)^2} + \frac{1}{(2c^2 + a^2 + b^2)^2} \leq \frac{1}{16}.$$

Problem A4

Diberikan n buah segitiga siku-siku dengan panjang a_i, b_i, c_i di mana c_i adalah sisi miringnya, $i = 1, \dots, n$.

Misalkan $A = a_1 + \dots + a_n$ dan $B = b_1 + \dots + b_n$.

Buktikan bahwa

$$\frac{a_1b_1}{c_1} + \dots + \frac{a_nb_n}{c_n} \leq \frac{AB}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Problem A5

Pandang polinomial $F(x) = x^2 + ax + b$ dan $G(x) = x^2 + bx + a$ di mana a dan b adalah bilangan real demikian sehingga semua penyelesaian dari $F(G(x)) = 0$ dan $G(F(x)) = 0$ adalah real. Jika $\min\{a, b\} > 0$, tunjukkan bahwa $\min\{a, b\} > 6$.

Problem A6

Misalkan $P_n(x)$ adalah barisan polinomial yang didefinisikan sebagai berikut

$$P_1(x) = 1$$

$$P_2(x) = 1$$

$$P_{n+2}(x) = (x + 2)P_{n+1}(x) - P_n(x) \forall n = 1, 2, \dots$$

Buktikan bahwa $(P_{n+1}(x))^2 + x$ habis dibagi $P_n(x)$ untuk setiap $n = 1, 2, \dots$

Problem A7

(Catatan: Problem ini adalah konvers dari Problem A6)

Misalkan $f_1(x), f_2(x), \dots$ adalah barisan fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= 1 + x \\ f_{n+2}(x) &= \frac{(f_{n+1}(x))^2 + x}{f_n(x)}, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Buktikan bahwa $f_n(x)$ adalah suatu polinomial untuk semua n .

Problem A8

Misalkan a, b, c tiga bilangan asli berbeda. Buktikan bahwa barisan

$$a + b + c, ab + bc + ca, 3abc$$

tidak mungkin membentuk suatu barisan geometrik maupun aritmetik.

Problem A9

Misalkan $f(x)$ adalah sebuah fungsi real yang didefinisikan untuk $0 \leq x \leq 1$. Buktikan bahwa pasti ada a, b, c dengan $0 \leq a, b, c \leq 1$ sedemikian sehingga:

$$|f(ab) + f(bc) + f(ca) - abc| \geq \frac{1}{6}.$$

Problem A10

Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real positif. Buktikan bahwa

$$\frac{a+b}{b+\sqrt{ca}} + \frac{b+c}{c+\sqrt{ab}} + \frac{c+a}{a+\sqrt{bc}} \geq 3.$$

Problem A11

Untuk setiap bilangan real positif a, b, c dengan $a + b + c < 3$. Buktikan bahwa

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} < \frac{1}{a + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}} + \frac{1}{b + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}} + \frac{1}{c + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}} < \frac{3}{a + b + c}.$$

Problem A12

Misalkan a_1, a_2, \dots suatu barisan bilangan asli yang memenuhi $a_1 = 1$,

$$m + a_n \mid 5(n + a_m)$$

untuk semua bilangan asli m, n . Buktikan bahwa $a_n = n$ untuk semua bilangan asli n .

Problem A13

Misalkan a, b dan c sisi-sisi segitiga. Buktikan ketaksamaan

$$2 < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \sqrt{6}$$

selalu berlaku.

Problem A14

Jika $f(1) = 4$ dan $f(x+1) = f(x)^3 + 4f(x)^2 - f(x) - 3$, berapakah x untuk $x > 1$ sehingga $f(x)$ merupakan kelipatan tiga?

Problem A15

Jika $f(1) = 4$ dan $f(x+1) = f(x)^3 + 4f(x)^2 - f(x) - 4$, berapakah x untuk $x > 1$ sehingga $f(x)$ merupakan kelipatan tiga?

Kombinatorika**Problem C1**

Diberikan 2010 buah lampu dengan sakelar ON/OFF. Setiap lampu diberi nomor unik dari 1 sampai 2010. Pada kondisi awal, beberapa lampu menyala dan beberapa lainnya dalam kondisi padam. Pada setiap langkah, anda diijinkan untuk memilih k suatu bilangan asli, kemudian menekan sakelar untuk semua lampu yang nomornya habis dibagi k .

Benarkah bahwa dari kondisi awal apapun, melalui serangkaian langkah, anda selalu dapat mencapai kondisi akhir di mana semua lampu padam?

Problem C2

Berapa langkah minimal yang dibutuhkan kuda (knight) di sebuah papan catur dari sudut kiri bawah ke sudut kanan atas? Buktikan!

Problem C3

Suatu kompetisi matematika diikuti oleh 120 peserta dari beberapa kontingen. Pada acara penutupan, setiap peserta memberikan 1 souvenir pada setiap peserta dari kontingen yang sama dan 1 souvenir pada salah seorang peserta dari tiap kontingen lainnya. Di akhir acara, diketahui terdapat 3840 souvenir yang dipertukarkan. Berapa banyak kontingen maksimal sehingga kondisi di atas dapat terpenuhi?

Problem C4

Diberikan 2 buah cakram yang identik, masing-masing dibagi menjadi 2010 juring yang sama luasnya. Setiap juring dicat dengan warna merah atau biru sedemikian sehingga dari kedua cakram tersebut, jumlah juring yang diberi warna merah adalah 2010 dan jumlah juring yang diberi warna biru juga 2010.

Sekarang, kedua cakram tersebut akan dikatupkan sehingga setiap juring dari cakram pertama berimpit dengan sebuah juring dari cakram kedua. Sisi yang di cat menghadap satu sama lain.

Sepasang juring yang berimpit kita katakan "cocok" jika mereka memiliki warna yang berbeda. Buktikan bahwa ada cara mengatupkan sehingga terdapat paling sedikit 1005 pasangan yang cocok.

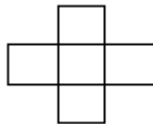
Problem C5

Terdapat suatu pertandingan suit, namun pertandingan akan diulang jika hasil seri, sehingga tidak ada hasil seri, hanya menang dan kalah.

Jika Anda mengatur pertandingan ini, dan terdapat 8 peserta, adakah cara pertandingan yang memastikan salah satu dari ke-8 orang ini akan menang 7 kali berturut-turut?

Problem C6

Diberikan papan catur 8×8 . Paling banyak berapa pentamino seperti diagramkah dapat kita gunakan untuk menutupi kotak-kotak pada papan catur tersebut (sebanyak mungkin) sehingga tidak ada dua pentamino yang tumpang tindih?



Problem C7

Sebanyak m orang anak laki-laki dan n orang anak perempuan ($m > n$) duduk mengelilingi meja bundar diawasi oleh seorang guru, dan mereka melakukan sebuah permainan sebagai berikut. Mula-mula sang guru menunjuk seorang anak laki-laki untuk memulai permainan. Anak laki-laki tersebut meletakkan sekeping uang logam di atas meja. Kemudian bergiliran searah jarum jam, setiap anak melakukan gilirannya masing-masing. Jika anak tersebut laki-laki, ia menambahkan sekeping uang logam ke tumpukan di atas meja, dan jika anak tersebut perempuan, ia mengambil sekeping uang logam dari tumpukan tersebut. Jika tumpukan di atas meja habis, maka permainan berakhir saat itu juga. Perhatikan bahwa tergantung siapa yang ditunjuk oleh sang guru untuk memulai langkah pertama, maka permainan tersebut bisa cepat berakhir, atau bisa saja berlangsung paling sedikit 1 putaran penuh. Jika sang guru menginginkan agar permainan tersebut berlangsung paling sedikit 1 putaran penuh, ada berapa pilihan anak laki-laki yang dapat beliau tunjuk untuk memulai? (Alternatif: buktikan ada tepat $m - n$ pilihan anak laki-laki yang dapat beliau tunjuk).

Problem C8

Suatu hari di suatu lapangan berbentuk lingkaran diadakan upacara bendera. Upacara ini dihadiri oleh n orang. Ketika upacara berlangsung, tiba-tiba hujan turun. Serentak semua orang yang hadir berlarian ke arah acak dengan kecepatan yang sama. Ketika dua orang bertabrakan, sebut saja A dan B , keduanya tetap berlari dengan kecepatan yang sama namun bertukar arah, A berlari ke arah yang tadinya dituju B , begitu pula sebaliknya. Jika diameter lapangan adalah 21 m dan semua orang berlari dengan kecepatan 3 m/s, tentukan berapa paling lama waktu yang dibutuhkan agar setiap orang sudah tidak berada di lapangan.

Problem C9

Diberikan pasangan bilangan asli (M, N) . Dua pemain A dan B melakukan suatu permainan dengan aturan sebagai berikut :

- Pemain pertama memilih suatu bilangan asli a_1 dimana $1 \leq a_1 \leq M$ lalu menuliskannya di papan
- Pemain kedua memilih bilangan asli a_2 , dimana $1 \leq a_2 \leq M$, lalu menghapus bilangan di papan dan menggantinya dengan $S_2 = a_1 + a_2$
- Pemain pertama memilih bilangan asli a_3 dimana $1 \leq a_3 \leq M$ lalu menghapus bilangan di papan dan menggantinya dengan $S_3 = S_2 + a_3$

Proses ini dilakukan terus menerus hingga ada seorang pemain yang menulis N di papan. Buktikan bahwa untuk sebarang pasangan bilangan asli (M, N) , maka selalu ada pemain yang dapat memastikan kemenangannya.

Problem C10

Ali dan Baba, memainkan permainan sebagai berikut: Pertama dipilih sebuah bilangan asli $n > 1$ secara acak yang dituliskan di papan. Ali dan Baba bergantian melakukan salah satu dari 2 langkah berikut:

- (i) Menghapus bilangan m yang ada di papan dan menggantinya dengan m/p , dimana p merupakan salah satu faktor prima dari m .
- (ii) Menghapus bilangan m yang ada di papan dan menggantinya dengan $m + 1$.

Diketahui Ali selalu memulai permainan, dan permainan selesai bila terdapat angka 1 di papan. Pemain dari permainan ini adalah pemain yang menuliskan angka 1. Seorang pemain dikatakan mempunyai strategi menang bila apapun yang dilakukan lawannya, pemain tersebut akan selalu dapat memenangkan permainan. Diketahui bahwa untuk setiap bilangan asli $n > 1$, tepat salah satu dari Ali dan Baba yang mempunyai strategi menang. Buktikan bahwa ada tak hingga banyaknya n sehingga Baba mempunyai strategi menang.

Geometri

Problem G1

Pada segitiga ABC , misalkan D adalah titik tengah BC , dan BE, CF adalah garis tinggi. Buktikan bahwa DE dan DF keduanya adalah garis singgung lingkaran luar $\triangle AEF$.

Problem G2

Diberikan segitiga lancip ABC . Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung AB dan AC di X dan Y . Misalkan CH adalah garis tinggi. Garis sumbu segmen \overline{CH} memotong garis XY di Z . Tunjukkan bahwa $\angle BZC = 90^\circ$.

Problem G3

Misalkan L_1 adalah lingkaran yang berpusat di O , dan L_2 adalah lingkaran yang berpusat di O' . Kedua lingkaran tersebut berpotongan di A dan B sedemikian sehingga $\angle OAO' = 90^\circ$.

Misalkan titik X terletak pada lingkaran luar OAB , namun terletak di dalam L_2 .

Misalkan OX dan perpanjangannya memotong L_1 di Y dan Z . Misalkan $O'X$ dan perpanjangannya memotong L_2 di W dan V .

Buktikan bahwa $\triangle XWZ$ sebangun dengan $\triangle XYV$.

Problem G4

Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O dan titik tinggi H . Titik K dipilih sebarang di dalam segitiga dan misalkan titik L dan M demikian sehingga $AKCL$ dan $AKBM$ merupakan jajaran genjang. Misalkan BL dan CM berpotongan di titik N . Misalkan J merupakan titik tengah HK , tunjukkan bahwa $KONJ$ merupakan jajaran genjang.

Problem G5

Diberikan sebuah segitiga sebarang $\triangle ABC$, dengan $\angle A = 60^\circ$ dan $AC < AB$. Dibuat sebuah lingkaran dengan diameter BC , memotong AB dan AC masing-masing di F dan E . Garis BE dan CF memotong di D .

Misalkan Γ adalah lingkaran luar BCD , di mana pusat Γ adalah O . Γ memotong garis AB dan perpanjangan AC masing-masing di M dan N . MN memotong BC di P . Buktikan A, P, O terletak pada satu garis yang sama.

Problem G6

Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AC > BC$ dan titik pusat lingkaran luar O . Garis tinggi segitiga ABC dari C memotong AB dan lingkaran luar segitiga ABC lagi berturut-turut di titik D dan E . Garis melalui O sejajar AB memotong garis AC di titik F . Buktikan bahwa garis CO , garis melalui F tegak lurus AC dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik.

Problem G7

Pada segitiga ABC , tentukan nilai terkecil yang mungkin dari

$$|(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A)|.$$

Problem G8

Diberikan segitiga lancip ABC dan titik D, E, F berturut-turut pada sisi BC, CA dan AB . Jika garis DA, EB dan FC adalah garis-garis bagi segitiga DEF , buktikan bahwa ketiga garis tersebut adalah garis-garis tinggi segitiga ABC .

Problem G9

Diberikan dua lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang berpotongan di titik A dan B . Suatu garis melalui A memotong Γ_1 dan Γ_2 berturut-turut di titik C dan D . Misalkan M adalah titik tengah busur BC yang tidak memuat A di Γ_1 dan N adalah titik tengah busur BD yang tidak memuat A di Γ_2 . Jika K adalah titik tengah CD , buktikan bahwa $\angle MKN = 90^\circ$.

Problem G10

Diberikan dua lingkaran dengan salah satu pusat lingkaran berada pada lingkaran yang lain. Dua lingkaran tersebut berpotongan di dua titik C dan D . Garis melalui D memotong kedua lingkaran lagi di A dan B . Misalkan H adalah titik tengah busur AC yang tidak memuat D dan segmen HD memotong lingkaran yang tidak memuat H di titik E . Tunjukkan bahwa E adalah pusat lingkaran dalam segitiga ACD .

Problem G11

Diberikan segitiga ABC dan titik P pada lingkaran luar segitiga ABC . Misalkan garis CP memotong garis AB di titik E dan garis BP memotong garis AC di titik F . Misalkan juga garis sumbu dari AB memotong AC di titik K dan garis sumbu dari AC memotong AB di titik J . Buktikan bahwa

$$\left(\frac{CE}{BF}\right)^2 = \frac{AJ \cdot JE}{AK \cdot KF}.$$

Teori Bilangan**Problem N1**

Diketahui m dan n adalah bilangan-bilangan asli dengan sifat $mn \mid m^{2010} + n^{2010} + n$. Buktikan bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $n = k^{2010}$.

Problem N2

Cari semua bilangan asli $n > 1$ demikian sehingga

$$\tau(n) + \varphi(n) = n + 1.$$

Dalam hal ini, $\tau(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang habis membagi n dan $\varphi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang kurang dari n dan relatif prima terhadap n .

Problem N3

Carilah semua fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$\text{KPK}(f(a), b) = \text{KPK}(f(b), a)$$

untuk semua $a, b \in \mathbb{N}$.

Problem N4

Tentukan semua pasangan bilangan asli (x, y) dengan $\gcd(x, y)$ merupakan bilangan prima dan memenuhi persamaan

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 2010.$$

Problem N5

Diberikan bilangan asli k dan n dengan $k + 1 \geq n$. Diberikan $k + n$ bilangan real positif berbeda, tunjukkan bahwa terdapat n dari mereka, sebut saja s_1, s_2, \dots, s_n yang memenuhi

$$k + s_1 s_2 \dots s_n \geq s_1 + s_2 + \dots + s_n.$$

Problem N6

Cari semua bilangan asli $n \geq 20$ sedemikian sehingga terdapat bilangan asli $a > b > c$ dengan $a + b = n$ dan $a + b$ membagi $(a - c)(b - c)$.

Problem N7

Sebuah trapesium siku-siku mempunyai alas $12 - n$, tinggi $2n - 11$, atap $8 - n$, dan sisi miring $n - 2$. Semua sisi adalah bilangan bulat dan keliling kurang dari 15. Berapakah n ?

Problem N8

Cari semua bilangan asli n sehingga untuk setiap bilangan asli a dan b dengan sifat $a + b = n$ berlaku $a^2 + b^2$ merupakan bilangan prima.

Problem N9

Jika suatu segitiga siku-siku semua sisinya adalah bilangan bulat, dan sisi miringnya tidak habis dibagi 3, maka pasti salah satu sisinya habis dibagi tiga (soal ini sama dengan: Buktikan bahwa semua triple pythagoras memiliki setidaknya satu bilangan yang habis dibagi tiga, tapi soal di dalam kurung bisa jadi justru lebih mudah).

Problem N10

Katakan suatu bilangan asli "representatif" apabila dapat dinyatakan sebagai

$$\left(a - \frac{1}{a}\right) \left(b - \frac{1}{b}\right) \left(c - \frac{1}{c}\right)$$

dimana $a, b, c \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa ada tak hingga banyaknya bilangan "representatif" yang merupakan kelipatan 2010.

Problem N11

Jika suatu segitiga siku-siku semua sisinya adalah bilangan bulat, dan sisi miringnya tidak habis dibagi 3, maka pasti selisih tinggi dan lebarnya tidak habis dibagi tiga.