Shortlist Soal OSN Matematika 2014

Olimpiade Sains Nasional ke-13
Mataram, Nusa Tenggara Barat, 2014

p

Kontributor

Komite Pemilihan Soal OSN Matematika 2014 menyampaikan rasa terima kasihnya kepada para penyumbang soal berikut.

Fajar Yuliawan, Nanang Susyanto, Soewono, Ivan Wangsa, Aleams Barra, Rudi Prihandoko, Al Haji Akbar, Purwanto, Reza Wahyu Kumara

Aljabar

A1. Misalkan a, b merupakan bilangan real positif sedemikian sehingga terdapat takberhingga banyaknya bilangan asli k yang memenuhi

$$\lfloor a^k \rfloor + \lfloor b^k \rfloor = \lfloor a \rfloor^k + \lfloor b \rfloor^k.$$

Buktikan bahwa

$$\lfloor a^{2014} \rfloor + \lfloor b^{2014} \rfloor = \lfloor a \rfloor^{2014} + \lfloor b \rfloor^{2014}.$$

A2. Suatu barisan bilangan asli $a_1, a_2, a_3, \ldots$ memenuhi

$$a_k + a_l = a_m + a_n$$

untuk setiap bilangan asli k, l, m, n dengan $kl = mn$. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli m, n dengan $m \mid n$ berlaku $a_m \leq a_n$.

A3. Buktikan untuk setiap bilangan real positif x, y, z, ketaksamaan berikut berlaku

$$\frac{x^2y}{x+2y} + \frac{y^2z}{y+2z} + \frac{z^2x}{z+2x} < \frac{(x+y+z)^2}{8}.$$

A4. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif a, b, c dengan $1 \leq a, b, c \leq 8$ berlaku ketaksamaan

$$\frac{a+b+c}{5} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

A5. Tentukan bilangan asli terbesar m sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real tak negatif $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2014} \geq 0$ berlaku

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2014}^2}{2014}}.$$

A6. Tentukan semua polinom $P(x)$ dengan koefisien bulat sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli a, b, c yang merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku berlaku $P(a), P(b), P(c)$ juga merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku.

Kombinatorika

C1. Apakah mungkin menempatkan angka-angka 1,2,..., 9 ke dalam papan catur berukuran 3×3 sehingga setiap dua persegi yang bertetangga baik secara vertikal ataupun horizontal jumlah dari dua bilangan yang ada di dalamnya selalu prima?

C2. Tunjukkan bahwa banyaknya warna terkecil yang diperlukan untuk mewarnai bilangan-bilangan $1, 2, \cdots, 2013$ sehingga untuk setiap dua bilangan a, b yang berwarna sama, ab *bukan* kelipatan 2014, adalah 3 warna.

C3. Misalkan n adalah suatu bilangan asli. Diberikan papan catur berukuran $m \times n$. Sisi-sisi dari persegi kecil papan catur ini yang bukan pada keliling papan catur akan diwarnai sedemikian sehingga setiap persegi kecil memiliki tepat dua sisi yang diwarnai. Buktikan bahwa pewarnaan seperti itu mungkin jika dan hanya jika $m \cdot n$ genap.

C4. Misalkan m, M, K merupakan bilangan asli dengan $m \leq M$. Buktikan bahwa

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{m\binom{M}{m}\binom{K}{k}}{(m+k)\binom{M+K}{m+k}} = 1.$$

C5. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (m, r) dengan $2014 \geq m \geq r \geq 1$ yang memenuhi

$$\binom{2014}{m} + \binom{m}{r} = \binom{2014}{r} + \binom{2014-r}{m-r}.$$

C6. Tentukan semua bilangan asli n sehingga bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, n$ dapat ditempatkan pada keliling suatu lingkaran demikian sehingga untuk setiap bilangan asli s dengan $1 \leq s \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, terdapat suatu busur lingkaran yang hasil jumlah seluruh bilangan pada busur tersebut adalah s.

Geometri

G1. Lingkaran dalam dari segitiga ABC berpusat di I dan menyinggung BC di X. Misalkan garis AI dan BC berpotongan di L, dan D adalah hasil pencerminan dari L terhadap X. Titik E dan F berturut turut merupakan hasil pencerminan dari D terhadap garis CI dan garis BI. Tunjukkan bahwa $BCEF$ merupakan segiempat tali busur.

G2. Diberikan segitiga ABC dengan AD sebagai garis bagi dalam sudut A. Misalkan titik M dan N berturut-turut pada AB dan AC sehingga $\angle MDA = \angle ABC$ dan $\angle NDA = \angle C$. Jika $AD \cap MN = P$, buktikan bahwa $AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$.

G3. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan $AB \parallel CD$ dan $AB < CD$. Misalkan diagonal AC dan BD bertemu di E dan misalkan garis AD dan BC bertemu di titik F. Bangun jajar genjang $AEDK$ dan $BECL$. Buktikan bahwa garis EF melalui titik tengah segmen KL.

G4. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB < AC$. Titik P dan Q terletak pada garis bagi $\angle BAC$ sehingga BP dan CQ tegak lurus dengan garis bagi tersebut. Misalkan titik E, F berturut-turut pada sisi AB dan AC sedemikian sehingga $AEPF$ layang-layang. Buktikan bahwa garis BC, PF, dan QE berpotongan di satu titik.

G5. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$. Misalkan E, F, G, H berturut-turut titik tengah sisi AB, BC, CD, DA. Garis melalui G tegak lurus AB berpotongan dengan garis melalui H tegak lurus BC di titik K. Buktikan bahwa $\angle EKF = \angle ABC$.

G6. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O. Misalkan Γ adalah lingkaran yang menyinggung garis AO di titik A dan juga menyinggung garis BC. Buktikan bahwa Γ menyinggung lingkaran luar segitiga BOC.

Teori Bilangan

N1. (a) Misalkan k adalah bilangan asli sehingga persamaan

$$ab + (a+1)(b+1) = 2^k$$

tidak memiliki solusi bulat positif (a, b). Tunjukkan bahwa $k+1$ merupakan bilangan prima.

(b) Tunjukkan bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $k+1$ merupakan bilangan prima dan persamaan

$$ab + (a+1)(b+1) = 2^k$$

memiliki solusi bulat positif (a, b).

N2. Misalkan a, b, c, k merupakan bilangan asli dengan $a, b, c \geq 3$ yang memenuhi persamaan

$$abc = k^2 + 1.$$

Tunjukkan bahwa paling sedikit satu diantara $a-1, b-1, c-1$ merupakan bilangan komposit.

N3. Carilah semua pasang bilangan asli (a, b) yang memenuhi

$$a^b = (a+b)^a.$$

N4. Misalkan m, n bilangan *asli* sehingga sistem persamaan

$$\begin{aligned} x + y^2 &= m \\ x^2 + y &= n \end{aligned}$$

memiliki *tepat satu* solusi *bulat* (x, y). Tentukan semua nilai yang mungkin bagi $m - n$.

N5. Buktikan bahwa bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, 2013$ dapat diwarnai dengan tujuh warna berbeda (semua warna digunakan) sedemikian sehingga jika a, b, c berwarna sama, maka $2014 \nmid abc$ dan sisa pembagian abc oleh 2014 berwarna sama dengan a, b, c.

N6. Suatu bilangan asli disebut *cantik* jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}$$

untuk suatu bilangan asli x dan y yang *berbeda*.

(a) Tunjukkan bahwa 2014 dapat dituliskan sebagai perkalian bilangan cantik dan bilangan tidak cantik.

(b) Buktikan bahwa hasil perkalian dua bilangan tidak cantik tetap tidak cantik .

Aljabar

A1. Misalkan a, b merupakan bilangan real positif sedemikian sehingga terdapat takberhingga banyaknya bilangan asli k yang memenuhi

$$\lfloor a^k \rfloor + \lfloor b^k \rfloor = \lfloor a \rfloor^k + \lfloor b \rfloor^k.$$

Buktikan bahwa

$$\lfloor a^{2014} \rfloor + \lfloor b^{2014} \rfloor = \lfloor a \rfloor^{2014} + \lfloor b \rfloor^{2014}.$$

Solusi. Karena $\lfloor x \rfloor \leq x$ maka $\lfloor x \rfloor^k \leq x^k$. Akibatnya, dari definisi $\lfloor x^k \rfloor$ kita peroleh $\lfloor x \rfloor^k \leq \lfloor x^k \rfloor$. Dengan demikian

$$\lfloor a^k \rfloor + \lfloor b^k \rfloor = \lfloor a \rfloor^k + \lfloor b \rfloor^k$$

jika dan hanya jika $\lfloor a^k \rfloor = \lfloor a \rfloor^k$ dan $\lfloor b^k \rfloor = \lfloor b \rfloor^k$

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa jika x bilangan real positif, dan terdapat takberhingga banyaknya bilangan asli k yang memenuhi $\lfloor x^k \rfloor = \lfloor x \rfloor^k$ maka $0 < x < 1$ atau x bilangan asli. Pertama tulis $x = \lfloor x \rfloor + \theta$ untuk suatu $0 \leq \theta < 1$. Sekarang dengan ekspansi binomial kita peroleh

$$x^k = (\lfloor x \rfloor + \theta)^k \geq \lfloor x \rfloor^k + k\theta \lfloor x \rfloor^{k-1}.$$

Akibatnya

$$\lfloor x \rfloor^k = \lfloor x^k \rfloor \geq \lfloor \lfloor x \rfloor^k + k\theta \lfloor x \rfloor^{k-1} \rfloor = \lfloor x \rfloor^k + \lfloor k\theta \lfloor x \rfloor^{k-1} \rfloor.$$

Dari sini diperoleh $0 \geq \lfloor k\theta \lfloor x \rfloor^{k-1} \rfloor \geq \lfloor k\theta \rfloor \lfloor x \rfloor^{k-1} \geq 0$ dan ini mengakibatkan $\lfloor k\theta \rfloor = 0$ atau $\lfloor x \rfloor = 0$. Misalkan $\lfloor k\theta \rfloor = 0$. Jika $\theta \neq 0$, pilih k cukup besar sehingga $k\theta \geq 1$. Ini mengakibatkan $\lfloor k\theta \rfloor \geq 1$ (kontradiksi). Jadi $\theta = 0$ (yakni x bilangan asli) atau $\lfloor x \rfloor = 0$ (yakni $0 < x < 1$).

Karena $a, b \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ maka jelas

$$\lfloor a^{2014} \rfloor + \lfloor b^{2014} \rfloor = \lfloor a \rfloor^{2014} + \lfloor b \rfloor^{2014}.$$

A2. Suatu barisan bilangan asli $a_1, a_2, a_3, \ldots$ memenuhi

$$a_k + a_l = a_m + a_n$$

untuk setiap bilangan asli k, l, m, n dengan $kl = mn$. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli m, n dengan $m \mid n$ berlaku $a_m \leq a_n$.

Solusi. Andaikan terdapat bilangan asli p, q dengan $p \mid q$ namun $a_p > a_q$. Tulis $q = pr$ diperoleh $a_q + a_1 = a_p + a_r$. Karena $a_p > a_q$ maka $a_1 - a_r > 0$. Tinjau $a_r, a_{r^2}, a_{r^3}, \ldots$

$$\begin{aligned} a_{r^2} &= a_r + a_r - a_1 = a_r - (a_1 - a_r) \\ a_{r^3} &= a_{r^2} + a_r - a_1 = a_r - 2(a_1 - a_r) \\ &\vdots \\ a_{r^{s+1}} &= a_{r^s} + a_r - a_1 = a_r - s(a_1 - a_r). \end{aligned}$$

Padahal kalau diambil s cukup besar sehingga $s > a_r$, maka

$$a_{r^{s+1}} = a_r - s(a_1 - a_r) \leq a_r - s < 0$$

suatu kontradiksi karena suku di barisan adalah bilangan asli.

A3. Buktikan untuk setiap bilangan real positif x, y, z, ketaksamaan berikut berlaku

$$\frac{x^2y}{x+2y} + \frac{y^2z}{y+2z} + \frac{z^2x}{z+2x} < \frac{(x+y+z)^2}{8}.$$

Solusi. Menurut ketaksamaan Cauchy-Schwarz, kita dapatkan

$$\begin{aligned} &(x+y+z)^2 \left(\frac{x^3}{x+2y} + \frac{y^3}{y+2z} + \frac{z^3}{z+2x} \right) \\ &= (x(x+2y) + y(y+2z) + z(z+2x)) \left(\frac{x^3}{x+2y} + \frac{y^3}{y+2z} + \frac{z^3}{z+2x} \right) \\ &\geq (x^2+y^2+z^2)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^3}{x+2y} + \frac{y^3}{y+2z} + \frac{z^3}{z+2x} \geq \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} \right)^2 \end{aligned}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa $\dfrac{x^3}{x+2y} = x^2 - 2\dfrac{x^2y}{x+2y}$. Dengan operasi yang sama untuk dua suku lainnya, kita dapatkan

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2) - 2\left(\frac{x^2y}{x+2y} + \frac{y^2z}{y+2z} + \frac{z^2x}{z+2x}\right) \geq \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x^2y}{x+2y} + \frac{y^2z}{y+2z} + \frac{z^2x}{z+2x}\right) \leq (x^2+y^2+z^2) - \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x^2y}{x+2y} + \frac{y^2z}{y+2z} + \frac{z^2x}{z+2x}\right) \leq (x^2+y^2+z^2)\left(1 - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x^2y}{x+2y} + \frac{y^2z}{y+2z} + \frac{z^2x}{z+2x}\right) \leq \frac{(x^2+y^2+z^2)(2xy+2yz+2zx)}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx} \leq \frac{1}{4}$$

Di mana ketaksamaan terakhir didapat dari AM-GM. Maka didapat

$$\Leftrightarrow \frac{x^2y}{x+2y} + \frac{y^2z}{y+2z} + \frac{z^2x}{z+2x} \leq \frac{(x+y+z)^2}{8}.$$

Selanjutnya akan dibuktikan kesamaan tidak akan terjadi.

Asumsikan bahwa kesamaan terjadi, maka syarat-syarat berikut harus dipenuhi:

a) Dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz, kesamaan berlaku apabila

$$\frac{x(x+2y)}{x^3/(x+2y)} = \frac{y(y+2z)}{y^3/(y+2z)} = \frac{z(z+2x)}{z^3/(z+2x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2y}{x} = \frac{y+2z}{y} = \frac{z+2x}{z} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{x}{z} \Leftrightarrow x = y = z$$

Maka kesamaan terjadi apabila $x = y = z$.

b) Dari ketaksamaan AM-GM, kesamaan berlaku apabila $x^2+y^2+z^2 = 2xy+2yz+2zx$.

Apabila kesamaan terjadi, dua syarat ini berlaku. Akibatnya, dari syarat (a), syarat (b) ekivalen dengan: $x^2+x^2+x^2 = 2x^2+2x^2+2x^2 \Leftrightarrow$

$x = y = z = 0$. Ini tidak mungkin terjadi, karena $x, y, z > 0$. Maka terbukti bahwa

$$\frac{x^2y}{x+2y} + \frac{y^2z}{y+2z} + \frac{z^2x}{z+2x} < \frac{(x+y+z)^2}{8}.$$

A4. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif a, b, c dengan $1 \leq a, b, c \leq 8$ berlaku ketaksamaan

$$\frac{a+b+c}{5} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

Solusi. Misalkan $a = x^3$, $b = y^3$ dan $c = z^3$, sehingga $1 \leq x, y, z \leq 2$ dan ketaksamaan yang diinginkan adalah

$$x^3 + y^3 + z^3 \leq 5xyz.$$

Tanpa mengurangi keberlakuan secara umum, asumsikan bahwa $1 \leq x \leq y \leq z \leq 2$. Tuliskan $z = x + p$ dan $y = x + q$ dengan $q \leq p$. Perhatikan $1 \leq x$ dan $0 \leq q \leq p \leq 1$. Sekarang ketaksamaan yang diinginkan di atas ekivalen dengan

$$x^3 + (x+q)^3 + (x+p)^3 \leq 5x(x+q)(x+p).$$

Dengan menjabarkan dan menyederhanakan, kita harus membuktikan ketaksamaan berikut

$$p^3 + q^3 + 3(p^2+q^2)x \leq 5pqx + 2(p+q)x^2 + 2x^3.$$

Dari sini mudah, karena $x \geq 1 \geq p$ diperoleh $p^3 \leq p^2x \leq px^2 \leq x^3$, berakibat

$$p^3 + 3p^2x \leq 4p^2x \leq 2x^3 + 2px^2.$$

Karena $0 \leq q \leq p \leq 1 \leq x$ diperoleh juga $q^3 \leq q^2x \leq pqx$ dan $q^2x \leq qx^2$ sehingga

$$q^3 + 3q^2x \leq 4q^2x \leq 2pqx + 2qx^2 \leq 5pqx + 2qx^2.$$

Jumlahkan dua ketaksamaan terakhir, kita selesai.

Solusi alternatif. Tinjau $f(a)=\frac{a+b+c}{5}-\sqrt[3]{abc}$. Turunan pertamanya ialah $f'(a)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{bc}a^{\frac{-2}{3}}$. Misalkan $S=bc$, sehingga $f'(a)=-\frac{\sqrt[3]{S}}{3}a^{\frac{-2}{3}}+\frac{1}{5}$.
Ketika $f'(a)=0$, dipunyai $a=\pm\sqrt{\frac{125}{27}bc}$. Karena a,b,c ketiganya di interval $[1,8]$, pastilah $a=\sqrt{\frac{125}{27}bc}$.
Sekarang, ketika $a<\sqrt{\frac{125}{27}S}, -a^{-\frac{2}{3}}<-\frac{5}{3}\sqrt[3]{S}$ sehingga $f'(a)<\frac{1}{5}-\frac{\sqrt[3]{S}}{3\cdot\frac{5}{3}\sqrt[3]{S}}=0$. Begitu pula ketika $a>\sqrt{\frac{125}{27}S}, f'(a)>0$. Akibatnya, $f(a)$ minimum di $a=\sqrt{\frac{125}{27}S}$. Karena $f(a)$ kontinu, di interval $[1,8], f(a)$ maksimum di $a=1$ atau $a=8$. Begitu pula bila $f(b)=\frac{a+b+c}{5}-\sqrt[3]{abc}$ atau $f(c)$, maksimumnya di 1 atau 8.
Karena a,b,c simetris, tanpa mengurangi keumuman misalkan $a\geq b\geq$. Jika $f(a,b,c)=\frac{a+b+c}{5}-\sqrt[3]{abc}$, nilai maksimumnya ada di $f(8,8,8)$, $f(8,8,1)$, $f(8,1,1)$, atau $f(1,1,1)$. Cukup dihitung:
$f(8,8,8)=-3.2<0, f(8,8,1)=-1.6<0, f(8,1,1)=0, f(1,1,1)=-0.4<0$.
Maka maksimum $f(a,b,c)$ adalah 0, sehingga $f(a,b,c)\leq 0$. Maka memang benar $\frac{a+b+c}{5}\leq\sqrt[3]{abc}$, terbukti.

A5. Tentukan bilangan asli terbesar m sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real tak negatif $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_{2014}\geq 0$ berlaku

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\geq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2014}^2}{2014}}.$$

Solusi. Pertama, kita buktikan bahwa $m=\left\lfloor\sqrt{2014}\right\rfloor=44$ memang memenuhi ketaksamaan di atas. Perhatikan $44^2=1936$.

Misalkan $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_{2014}\geq 0$ dan notasikan

$$Q_i=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_i^2}{i}},\quad i=1,2,\ldots,2014.$$

Perhatikan untuk $1\leq i\leq 2013$ berlaku

$$a_{i+1}=\sqrt{\frac{a_{i+1}^2+a_{i+1}^2+\cdots+a_{i+1}^2}{i}}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_i^2}{i}}=Q_i,$$

sehingga berlaku juga

$$Q_{i+1} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_i^2 + a_{i+1}^2}{i+1}} = \sqrt{\frac{iQ_i^2 + a_{i+1}^2}{i+1}} \leq \sqrt{\frac{iQ_i^2 + Q_i^2}{i+1}} = Q_i.$$

Secara khusus, $Q_{1936} \geq Q_{1937} \geq \cdots \geq Q_{2014}$.

Berikutnya, untuk $1 \leq i, j \leq 44$ diperoleh $a_i a_j \geq a_{44}^2$, sehingga

$$\begin{aligned}
(44 \cdot Q_{1936})^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{1936}^2 \\
&\leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{44}^2 + (1936 - 44) \cdot a_{44}^2 \\
&\leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{44}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 44} a_i a_j \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{44})^2.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{44}}{44} \geq Q_{1936} \geq Q_{2014}.$$

Berikutnya, jika $m \geq 45$, dengan mengambil $a_1 = 1$ dan $a_2 = a_3 = \cdots = a_{2014} = 0$, diperoleh

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{45} < \frac{1}{\sqrt{2014}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2014}^2}{2014}}.$$

Jadi, m seperti itu tidak memenuhi syarat pada soal.

Kita simpulkan bahwa $m = 44$ memang adalah bilangan yang diinginkan.

A6. Tentukan semua polinom $P(x)$ dengan koefisien bulat sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli a, b, c yang merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku berlaku $P(a), P(b), P(c)$ juga merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku.

Solusi. Pertama, trivial bahwa $P(x) = mx$ dengan m konstanta bilangan asli memang memenuhi syarat yang disebutkan.

Misalkan polinom $P(x)$ memenuhi kondisi pada soal. Polinom $P(x)$ jelas tidak konstan karena segitiga sama sisi tidak pernah siku-siku.

Tuliskan $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ dengan $n \geq 1$ dan $a_n \neq 0$.

Perhatikan untuk setiap bilangan asli k berlaku $3k$, $4k$ dan $5k$ adalah sisi-sisi segitiga siku-siku. Dengan demikian, $P(3k)$, $P(4k)$ dan $P(5k)$ juga adalah sisi-sisi segitiga siku-siku, namakan segitiga ini Δ_k. Andaikan terdapat tak berhingga bilangan asli k sehingga $P(3k)$ sisi miring dari Δ_k. Jadi, $P(3k)^2 = P(4k)^2 + P(5k)^2$ untuk tak berhingga banyaknya bilangan asli k. Karena itu, polinom $Q(x) = P(3k)^2 - P(4k)^2 - P(5k)^2$ memiliki tak berhingga banyak akar (bilangan asli), sehingga haruslah $Q(x) = 0$ atau $P(3x)^2 = P(4x)^2 + P(5x)^2$. Kita jabarkan ini dari bentuk polinom $P(x)$ diperoleh

$$(a_n(3x)^n + a_{n-1}(3x)^n + \cdots + a_0)^2 = (a_n(4x)^n + \cdots + a_0)^2 + (a_n(5x)^n + a_{n-1}(5x)^n.$$

Lihat koefisien depan kedua ruas diperoleh $(a_n \cdot 3^n)^2 = (a_n \cdot 4^n)^2 + (a_n \cdot 5^n)^2$ atau ekivalen dengan $9^n = 16^n + 25^n$ yang jelas tidak mungkin. Dengan argumen yang sama, tidak mungkin juga berlaku $P(4x)^2 = P(3x)^2 + P(5x)^2$. Yang berlaku adalah $P(5x)^2 = P(3x)^2 + P(4x)^2$ dan dengan argumen yang sama juga diperoleh $25^n = 9^n + 16^n$. Ini juga berakibat $n = 1$ karena jika $n \geq 2$, maka $25^n = (9+16)^n > 9^n + 16^n$. Dengan demikian, $P(x) = mx + t$. Sekarang dari persamaan

$$(m(5x) + t)^2 = (m(3x) + t)^2 + (m(4x) + t)^2$$

diperoleh $t^2 = t^2 + t^2$ sebagai koefisien belakang (konstanta) dari polinom di kedua ruas. Jadi, $t = 0$ dan disimpulkan bahwa $P(x) = mx$. Terakhir, m tidak mungkin negatif atau nol sehingga $P(x)$ memang memiliki bentuk seperti klaim di awal.

Solusi Alternatif Solusi ini adalah solusi lain bahwa $P(x)$ haruslah linier. Andaikan $P(x) = ax^n + Q(x)$ dengan $n \geq 2$ dan deg $Q(x) < n$. Tanpa mengurangi keumuman kita bisa anggap $a > 0$. Misalkan $s < t$. Perhatikan bahwa

$$sP(tx) - tP(sx) = (sat^n - tas^n)x^n + sQ(tx) - tQ(sx)$$

merupakan polinom berderajat $n \geq 2$ dengan koefisien pembuka yang positif. Akibatnya untuk x yang cukup besar $sP(tx) > tP(sx)$. Khususnya $3P(5x) > 5P(3x)$ dan $4P(5x) > 5P(4x)$. Dengan mengkuadratkan masing-masing ketaksamaan di atas dan kemudian menjumlahkannya kita peroleh

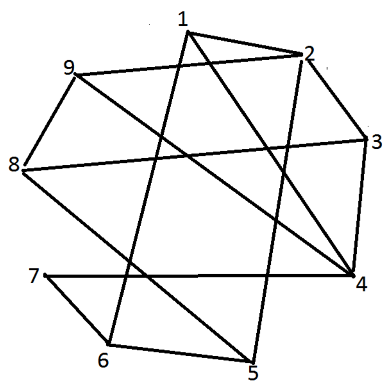
$$P(5x)^2 > P(3x)^2 + P(4x)^2.$$

Jadi untuk suatu k yang cukup besar, $P(3k), P(4k), P(5k)$ bukan merupakan sisi-sisi segitiga siku-siku meskipun $3k, 4k, 5k$ merupakan sisi-sisi segitiga siku-siku.

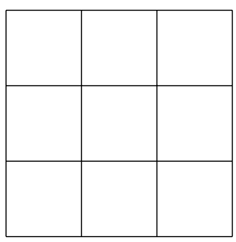
Kombinatorika

C1. Apakah mungkin menempatkan angka-angka 1,2,. . . , 9 ke dalam papan catur berukuran 3×3 sehingga setiap dua persegi yang bertetangga baik secara vertikal ataupun horizontal jumlah dari dua bilangan yang ada di dalamnya selalu prima?

Solusi. Pandang graf berikut dimana dua bilangan dihubungkan dengan suatu sisi jika hasil jumlah keduanya merupakan bilangan prima.



Perhatikan papan catur berukuran 3×3 berikut



Karena persegi di pusat bertetangga dengan 4 persegi lainnya, maka bilangan yang dapat ditempatkan dipusat adalah bilangan pada graf di atas yang berorde 4 atau lebih. Bilangan yang memenuhi adalah 4 atau 2. Sekarang bilangan pada persegi yang bukan terletak di sudut ataupun dipusat haruslah minimal berorde 3. Karena 7 berorde 2, maka ia harus ditempatkan di sudut. Akan tetapi ini mengakibatkan 4 barus bertetangga dengan 7. Jadi 2 haruslah di persegi pusat. Tapi ini mengakibatkan 2 dan 4 bertetangga dan $2+4$ tidak prima. Jadi penempatan yang ingin dilakukan tidak mungkin.

C2. Tunjukkan bahwa banyaknya warna terkecil yang diperlukan untuk mewarnai bilangan-bilangan $1, 2, \cdots, 2013$ sehingga untuk setiap dua bilangan a, b yang berwarna sama, ab *bukan* kelipatan 2014, adalah 3 warna.

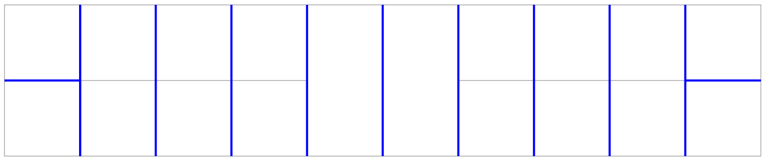
Solusi. Perhatikan bahwa $2014 = 2 \times 19 \times 53$. Sekarang pandang bilangan $2 \times 19, 2 \times 53, 19 \times 53$. Jika pewarnaan yang diinginkan bisa dilakukan dengan dua warna atau kurang maka diantara ketiga bilangan tersebut ada yang berwarna sama. Akan tetapi perkalian setiap dua bilangan tersebut akan merupakan kelipatan 2014. Dengan demikian paling sedikit diperlukan 3 warna.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa 3 warna mencukupi. Pertama warnai semua bilangan yang bukan kelipatan $2, 19$ atau 53 dengan merah. Sekarang untuk bilangan yang paling sedikit memiliki salah satu faktor prima diantara $2, 19, 53$ kita warnai sebagai berikut. Warnai setiap bilangan yang berbentuk $2^\alpha 19^\beta m$ dengan $53 \nmid m$ dengan merah, bilangan yang berbentuk $2^\alpha 53^\gamma n$ dengan $19 \nmid n$ dengan warna biru dan warnai bilangan yang berbentuk $19^\beta 53^\gamma k$ dengan k ganjil dengan kuning. Pewarnaan ini menjamin bahwa bilangan yang berwarna sama paling banyak memiliki 2 faktor prima diantara 2,19 dan 53. Jadi pewarnaan ini memenuhi.

C3. Misalkan n adalah suatu bilangan asli. Diberikan papan catur berukuran $m \times n$. Sisi-sisi dari persegi kecil papan catur ini yang bukan pada tepi keliling papan catur akan diwarnai demikian sehingga setiap persegi kecil memiliki tepat dua sisi yang diwarnai. Buktikan bahwa pewarnaan seperti itu mungkin jika dan hanya jika $m \cdot n$ genap.

Solusi.

Syarat cukup: Tanpa mengurangi keumuman misalkan $m = 2k$ genap. Dalam kasus ini tinjau papan berukuran $2 \times n$. Warnai sisi-sisi persegi dari papan sebagai berikut



Jelas pewarnaaan ini memenuhi syarat. Lakukan hal ini untuk k buah duplikak dari persegi $2 \times n$ yang lainnya.

Syarat perlu: Misalkan kita berhasil mewarnai sisi-sisi persegi kecil dari papan catur seperti yang diminta. Pada masing-masing persegi kecil gambar titik pusatnya. Sekarang hubungkan titik pusat setiap dua persegi bertetangga yang berbagi sisi yang berwarna dengan suatu segmen garis. Maka dihasilkan suatu graf dimana setiap titik berorde 2. Graf yang dihasilkan adalah gabungan lepas dari beberapa cycle. Untuk setiap cycle, kita beri orientasi searah jarum jam dan kita beri titik awal. Karena titik awal adalah titik akhir maka banyaknya sisi horizontal yang mengarah ke kanan sama dengan sisi horizontal yang mengarah ke kiri demikian juga dengan sisi vertikal yang mengarah ke bawah sama dengan sisi vertikal yang mengarah ke atas. Dengan demikian setiap cycle mempunyai banyak sisi yang genap. Graf dari papan catur sendiri memiliki $m{\cdot}n$ buah sisi. Dengan demikian haruslah $m \cdot n$ genap.

C4. Misalkan m, M, K merupakan bilangan asli dengan $m \leq M$. Buktikan bahwa
$$\sum_{k=0}^{K} \frac{m\binom{M}{m}\binom{K}{k}}{(m+k)\binom{M+K}{m+k}} = 1.$$

Solusi. Pandang suatu permainan mendapatkan m buah kartu merah dari sekumpulan kartu yang terdiri dari M kartu merah dan K kartu kuning dengan cara mengambilnya satu persatu tanpa pengembalian. Karena $m \leq M$, maka pasti m kartu merah akan terambil dengan peluang 1. Di sisi lain, kita akan menghitung peluang terambilnya m

kartu merah untuk pertama kalinya dengan terlebih dahulu mendapatkan k kartu kuning diantara $m+k$ kartu yang terambil. Banyaknya cara mengambil m kartu merah dari M kartu merah yang tersedia dan k kartu kuning dari K kartu kuning yang tersedia adalah $\binom{M}{m} \cdot \binom{K}{k}$. Sedangkan banyaknya cara untuk mengambil $m+k$ kartu dari $M+K$ kartu yang tersedia adalah $\binom{M+K}{m+k}$. Jadi peluang terambilnya m kartu merah dan k kartu kuning dari $M+K$ kartu yang mengandung M kartu merah dan K kartu kuning adalah $\frac{\binom{M}{m}\binom{K}{k}}{\binom{M+K}{m+k}}$. Sekarang agar kartu yang terakhir terambil adalah kartu merah, peluangnya menjadi $\frac{m}{m+k} \cdot \frac{\binom{M}{m}\binom{K}{k}}{\binom{M+K}{m+k}}$. Dengan menjumlahkan semua peluang ini untuk $0 \le k \le K$ kita peroleh identitas yang diinginkan.

C5. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (m, r) dengan $2014 \ge m \ge r \ge 1$ yang memenuhi

$$\binom{2014}{m} + \binom{m}{r} = \binom{2014}{r} + \binom{2014-r}{m-r}.$$

Solusi. Untuk kenyamanan, notasikan $n = 2014$. Misalkan $n \ge m \ge r \ge 1$. Tinjau masalah pemilihan r unsur dan m unsur dari suatu himpunan dengan kardinalitas n sedemikian sehingga r unsur yang dipilih termuat di m unsur yang dipilih. Kalau m unsur dipilih dulu dan r unsur dipilih kemudian (dari m unsur tersebut), banyak cara ini adalah $\binom{n}{m}\binom{m}{r}$. Bisa juga r unsur dipilih dulu, kemudian $m-r$ unsur dipilih dari $n-r$ unsur yang belum terpilih. Banyak cara melakukan ini adalah $\binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$. Kita peroleh identitas $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$. Sekarang tinjau lema sederhana berikut.

Lema. Misalkan a, b, c, d bilangan asli dengan $a+b = c+d$ dan $ab = cd$, maka $\{a, b\} = \{c, d\}$.

Bukti. Kita mempunyai $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = (c-d)^2$.

Bila $a-b = c-d$, maka $a = (a+b+a-b)/2 = c$ dan $b = d$.

Bila $a-b = d-c$, maka $a = d$ dan $b = c$. $\square$

Sekarang kembali lagi ke soal, berdasarkan lema dan identitas sebelumnya, pasangan (m,r) dengan $n \geq m \geq r \geq 1$ memenuhi persamaan yang diberikan jika dan hanya jika ia memenuhi salah satu dari dua kemungkinan berikut.

(i) $\binom{m}{r} = \binom{n}{r}$ dan $\binom{n}{m} = \binom{n-r}{m-r}$

(ii) $\binom{n}{m} = \binom{n}{r}$ dan $\binom{m}{r} = \binom{n-r}{m-r}$

Kemungkinan (i) terjadi jika dan hanya jika $m = n$. Di sini kita peroleh $n = 2014$ kemungkinan banyak pasangan, yakni $(m,r) = (2014, t)$ dengan $1 \leq t \leq 2014$.

Kemungkinan (ii) terjadi jika dan hanya jika $m = r$ atau $m + r = n$. Ada $n = 2014$ pasangan (m,r) dengan $m = r$, yakni $(m,r) = (t,t)$ dengan $1 \leq t \leq 2014$. Terakhir, karena $m \geq r$, ada 1007 pasangan (m,r) dengan $m + r = n$, yakni $(m,r) = (2014 - t, t)$ dengan $1 \leq t \leq 1007$.

Sekarang tinjau perhitungan ganda yang terjadi. Pasangan $(2014, 2014)$ terhitung dua kali di bentuk $(2014, t)$ dan (t,t). Pasangan $(1007, 1007)$ juga terhitung dua kali di bentuk (t,t) dan $(2014 - t, t)$. Tidak ada perhitungan ganda yang lain. Jadi, total pasangan yang yang dicari adalah $2014 + 2014 + 1007 - 2 = 5033$.

C6. Tentukan semua bilangan asli n sehingga bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, n$ dapat ditempatkan pada keliling suatu lingkaran demikian sehingga untuk setiap bilangan asli s dengan $1 \leq s \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, terdapat suatu busur lingkaran yang hasil jumlah seluruh bilangan pada busur tersebut adalah s.

Solusi. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli n selalu terdapat penempatan semarak. Ambil sebarang $s \in \{1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n(n+1)\}$. Sekarang kita tinjau dua kasus:

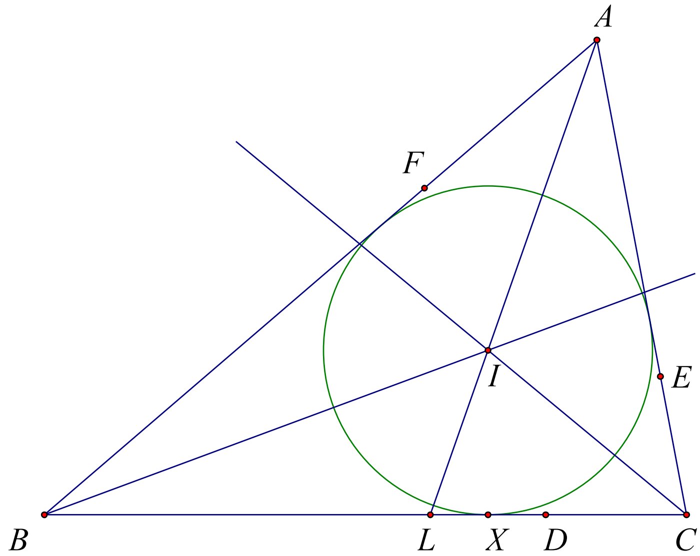
(a) (n genap) Dengan pembagian Euclid, tuliskan $s = q(n+1) + r$ dengan $0 \leq r < n+1$. Perhatikan bahwa jelas $1 \leq q \leq \frac{n}{2}$. Sekarang tempatkan bilangan pada lingkaran searah jarum jam sebagai berikut $n, 1, n-1, 2, \ldots, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}$. Jika $r = 0$ maka ambil busur yang memuat $2q$ bilangan yang dimulai dari n, maka total bilangan pada busur ini berjumlah $q(n+1) = s$. Jika $r = n$, ambil busur lingkaran berlawanan arah jarum jam yang terdiri dari $2q+1$ bilangandan berawal di n. Karena $2q$ bilangan pertama pada busur terdiri dari q pasang bilangan yang berjumlah $n+1$, maka jumlah total bilangan pada busur tersebut adalah $q(n+1)+n = s$. Jika $1 \leq r \leq n$, maka busur (searah atau berlawaban arah jarum jam) yang memuat $2q+1$ bilangan-bilangan dan diawali oleh r berjumlah total $r + q(n+1) = s$.

(b) (n ganjil) Tulis $s = qn + r$ dengan $0 \leq r < n$. Atur pada lingkaran bilangan-bilangan $n, 1, n-1, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$ searah jarum jam. Jika $r = 0$ dan $q = \frac{1}{2}(n+1)$ jelas kita ambil seluruh lingkaran sebagai busur. Jika $r = 0$ dan $q < \frac{1}{2}(n+1)$ ambil busur yang memuat $2q$ bilangan yang diawali oleh 1. Semua bilangan pada busur ini berjumlah total $qn = s$. Sekarang jika $1 \leq r \leq n-1$ ambil busur lingkaran (searah atau berlawanan arah jarum jam) yang memuat r diawalnya dan $2q$ bilangan lainnya terdiri dari q pasang bilangan yang masing-masing berjumlah n. Total bilangan pada busur ini adalah $qn + r = s$.

Geometri

G1. Lingkaran dalam dari segitiga ABC berpusat di I dan menyinggung BC di X. Misalkan garis AI dan BC berpotongan di L, dan D adalah hasil pencerminan dari L terhadap X. Titik E dan F berturut turut merupakan hasil pencerminan dari D terhadap garis CI dan garis BI. Tunjukkan bahwa $BCEF$ merupakan segiempat tali busur.

Solusi. Tanpa mengurangi keberlakuan secara umum, asumsikan bahwa $AB \geq AC$. Ini adalah solusi untuk kasus dimana titik D terletak pada sisi BC.



Misalkan a, b, c, s berturut-turut menyatakan panjang sisi BC, CA, AB dan setengah keliling segitiga ABC. Kita mempunyai $BX = s - b$ dan $BL = ac/(b+c)$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} BD &= BX + XD = BX + LX = BX + BX - BL \\ &= 2(s-b) + \frac{ac}{b+c} = a + c - b - \frac{ac}{b+c}. \end{aligned}$$

Karena F adalah hasil pencerminan titik D yang terletak pada sisi BC terhadap garis bagi $\angle ABC$, maka titik F terletak pada sisi AB dan berlaku $BF = BD$. Kita selanjutnya mempunyai

$$AF = AB - BF = c - \left(a + c - b - \frac{ac}{b+c}\right) = \frac{b(b+c-a)}{b+c}.$$

Dengan cara sama, diperoleh

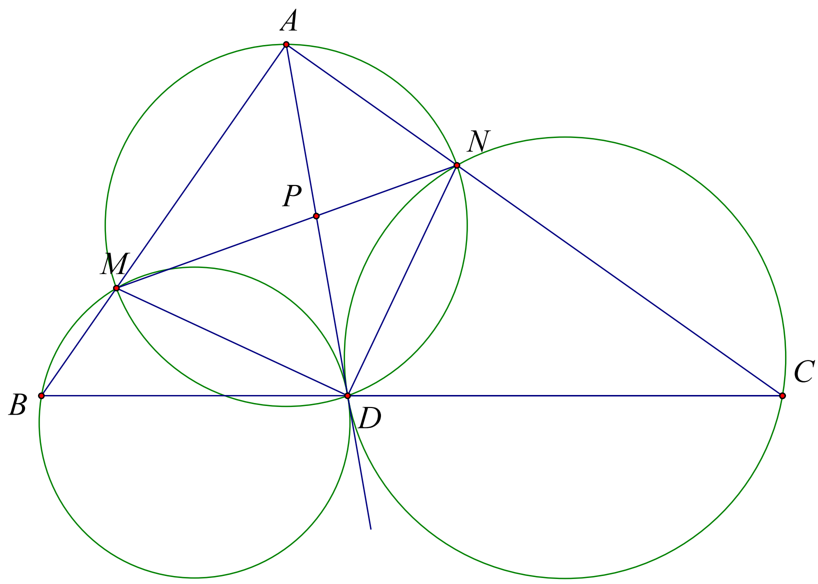
$$AE = \frac{c(b+c-a)}{b+c}.$$

Jadi, $AE/AF = c/b = AB/AC$ atau ekivalen dengan $AE \times AC = AF \times AB$, yakni $BCEF$ segiempat talibusur.

Komentar. Rudi punya solusi lain yang sederhana.

G2. Diberikan segitiga ABC dengan AD sebagai garis bagi dalam sudut A. Misalkan titik M dan N berturut-turut pada AB dan AC sehingga $\angle MDA = \angle ABC$ dan $\angle NDA = \angle C$. Jika $AD \cap MN = P$, buktikan bahwa $AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$.

Solusi.



Karena $\angle ADM = \angle ABC$ maka AD menyinggung lingkaran luar segitiga BMD dan karena $\angle ADN = \angle ACB$, maka AD menyinggung lingkaran luar segitiga CND. Dari sini diperoleh $AD^2 = AM \cdot AB$ dan $AD^2 = AN \cdot AC$.

Karena

$$\angle MDN = \angle ADM + \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC,$$

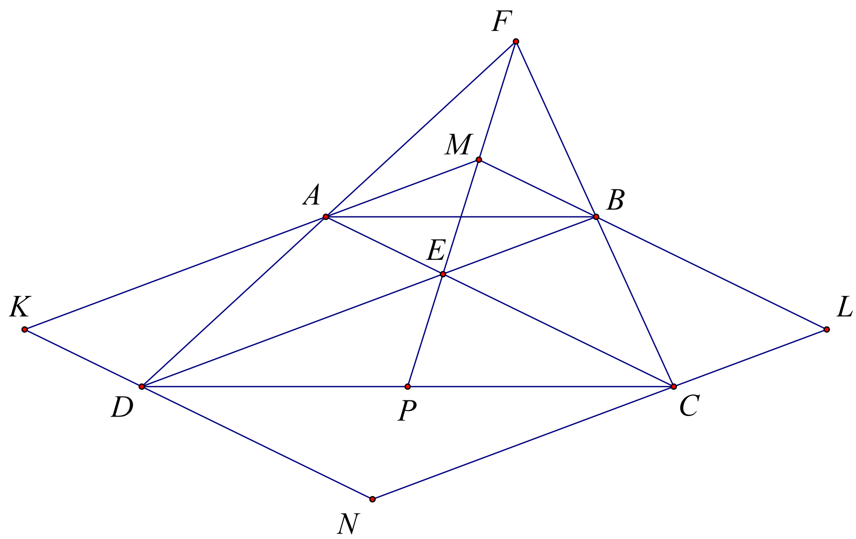
maka $AMDN$ siklis dan kita mendapatkan $\angle AMP = \angle ADN = \angle ACB$. Karena AD garis bagi segitiga ABC, maka $\angle MAP = \angle DAN$. Jadi, $AMP \sim ADN$ dan diperoleh $AM/AP = AD/AN$, yakni $AM \cdot AN = AP \cdot AD$.

Jadi,

$$AD^3 = \frac{AM \cdot AB \cdot AN \cdot AC}{AD} = \frac{AP \cdot AD \cdot AB \cdot AC}{AD} = AB \cdot AC \cdot AP.$$

G3. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan $AB \parallel CD$ dan $AB < CD$. Misalkan diagonal AC dan BD bertemu di E dan misalkan garis AD dan BC bertemu di titik F. Bangun jajar genjang $AEDK$ dan $BECL$. Buktikan bahwa garis EF melalui titik tengah segmen KL.

Solusi.



Pertama, kita buktikan bahwa garis EF melalui titik tengah segmen CD. Misalkan garis EF bertemu CD di titik P (kita belum tahu bahwa titik M terletak pada garis EF). Karena $AB \parallel CD$, maka $FA/AD = FB/BC$. Sekarang gunakan teorema Ceva, diperoleh

$$1 = \frac{FA}{AD}\frac{DP}{PC}\frac{CB}{BF} = \frac{DP}{PC}$$

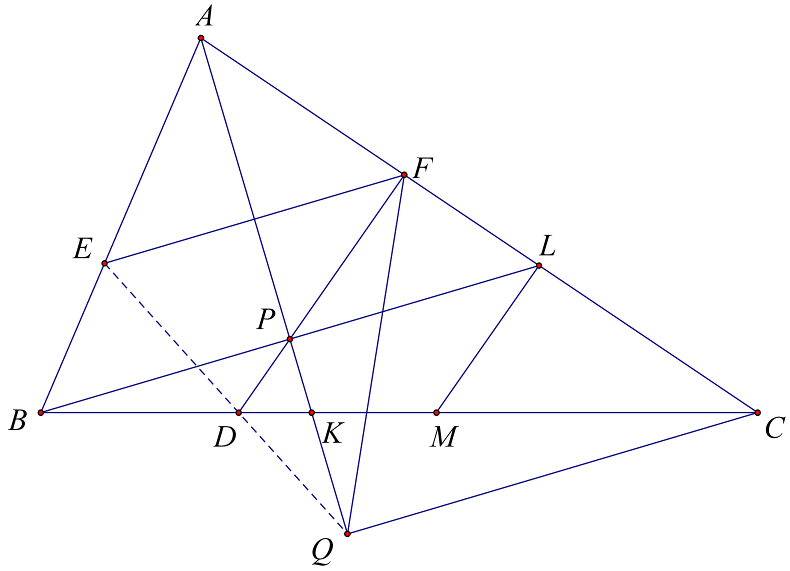
sehingga $DP = PC$ dan klaim terbukti.

Misalkan garis AK dan BL bertemu di titik M dan misalkan garis CL dan DK bertemu di titik N. Karena $AEDK$ dan $BECL$ jajar genjang, maka $MK \parallel BD \parallel LN$ dan $ML \parallel AC \parallel KN$. Kita peroleh tiga jajar genjang lagi, $AMBE$, $CNDE$ dan $KMLN$. Dengan demikian, $\angle MAE = \angle MKN = \angle EDN = \angle NCE$. Selain itu, karena $AB \parallel CD$, maka segitiga $ABE \sim CDE$, menghasilkan $MA/AE = BE/AE = DE/CE = CN/CE$. Jadi, $MAE \sim NCE$ dan akibatnya $\angle MEA = \angle NEC$, yakni M, E, N terletak pada satu garis. Karena $CNDE$ jajar genjang, maka garis EN melalui titik tengah CD, yakni titik P. Jadi, M, E, N, P terletak pada satu garis.

Kita simpulkan bahwa garis EF sama dengan garis MN. Karena $KMLN$ jajar genjang, maka garis tersebut melalui titik tengah segmen KL dan kita selesai.

G4. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB < AC$. Titik P dan Q terletak pada garis bagi $\angle BAC$ sehingga BP dan CQ tegak lurus dengan garis bagi tersebut. Misalkan titik E, F berturut-turut pada sisi AB dan AC sedemikian sehingga $AEPF$ layang-layang. Buktikan bahwa garis BC, PF, dan QE berpotongan di satu titik.

Solusi.



Misalkan garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi BC di titik K. Misalkan garis BP memotong sisi AC di titik L. Karena $BP \perp AP$ dan $\angle BAP = \angle PAL$, maka ABL segitiga sama kaki dengan $AB = AL$ dan juga P titik tengah BL. Misalkan garis FP memotong sisi BC di titik D dan garis melalui L sejajar FD memotong BC di titik M, sehingga D titik tengah BM (karena P tititk tengah BL dan $PD \parallel LM$).

Sekarang karena $BP \perp AK$ dan $CQ \perp AK$, maka $ABP \sim ACQ$. Selain itu, $BP \parallel CQ$, sehingga $BPK \sim CQK$. Jadi, $AP/AQ = BP/CQ = PK/QK$ sehingga $AP/PK = AQ/QK$.

Karena $AEPF$ layang-layang, maka $AE = AF$, sehingga $BE = LF$. Jadi, $CF/CD = LF/MD = BE/BD$.

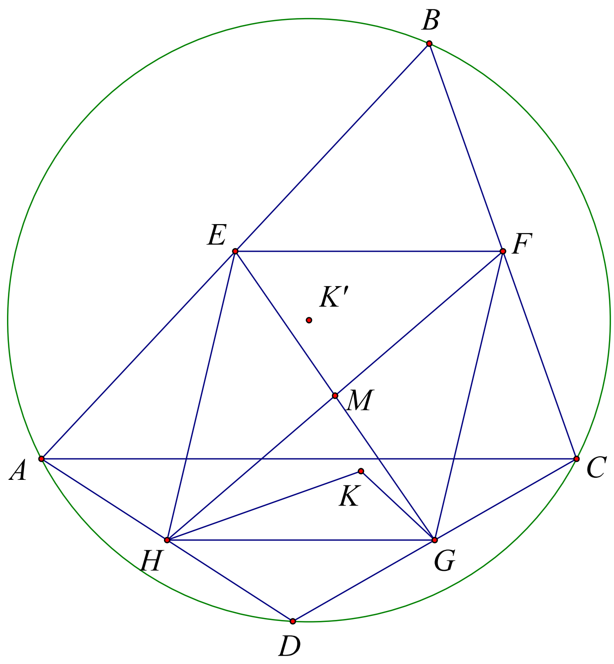
Sekarang dengan teorema Menelaos, karena F, P, D kolinear, ditemukan

$$1 = \frac{AP}{PK}\frac{KD}{DC}\frac{CF}{FA} = \frac{AP}{PK}\frac{CF}{CD}\frac{DK}{AF} = \frac{AQ}{QK}\frac{BE}{BD}\frac{DK}{AE} = \frac{AQ}{QK}\frac{KD}{DB}\frac{BE}{EA}.$$

Jadi, E, D, Q kolinear. Kita simpulkan D terletak pada garis QE, dengan kata lain, garis BC, FP, QE berpotongan di titik D.

G5. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$. Misalkan E, F, G, H berturut-turut titik tengah sisi AB, BC, CD, DA. Garis melalui G tegak lurus AB berpotongan dengan garis melalui H tegak lurus BC di titik K. Buktikan bahwa $\angle EKF = \angle ABC$.

Solusi.



Pertama, perhatikan bahwa $EFGH$ adalah jajar genjang karena EF dan GH sejajar dengan AC sementara EH dan FG sejajar dengan BD. Misalkan M adalah titik potong diagonal EG dan FH.

Sekarang refleksikan titik K terhadap titik M menghasilkan titik K'. Dengan demikian M adalah titik tengah KK'. Karena M juga titik tengah EG dan FH, maka $EKGK'$ dan $FKHK'$ keduanya jajar genjang. Jadi, $GK \parallel EK'$ dan $HK \parallel FK'$. Karena $GK \perp AB$ dan $HK \perp BC$, maka $EK' \perp AB$ dan $FK' \perp BC$. Jadi, garis EK' dan FK' berturut-turut adalah garis sumbu sisi AB dan BC. Kita simpulkan K' adalah titik pusat lingkaran luar $ABCD$. Ini berakibat $HK' \perp AD$ dan juga $GK' \perp CD$. Jadi, $GDHK'$ segiempat talibusur.

Karena $ABCD$ juga segiempat talibusur, diperoleh

$$\angle GK'H = 180^\circ - \angle GDH = 180^\circ - \angle CDA = \angle ABC.$$

Karena $GK' \parallel EK$, $HK' \parallel FK$ dan $EF \parallel GH$, segitiga EKF sebangun dengan segitiga $GK'H$ dan $\angle EKF = \angle GK'H = \angle ABC$, seperti yang diinginkan.

G6. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O. Misalkan Γ adalah lingkaran yang menyinggung garis AO di titik A dan juga menyinggung garis BC. Buktikan bahwa Γ menyinggung lingkaran luar segitiga BOC.

Solusi.

Invert dengan pusat O dan radius OA. Perhatikan kalau power titik O terhadap lingkaran Γ adalah OA, maka lingkaran Γ menjadi lingkaran Γ setelah diinvert. Lalu, lingkaran OCB menjadi garis CB karena $OC = OB = OA$. Maka lingkaran luar segitiga BOC menyinggung Γ jika dan hanya jika BC menyinggung Γ, yang jelas benar. Maka lingkaran luar segitiga BOC menyinggung Γ, seperti yang diinginkan.

Teori Bilangan

N1. (a) Misalkan k adalah bilangan asli sehingga persamaan

$$ab + (a+1)(b+1) = 2^k$$

tidak memiliki solusi bulat positif (a, b). Tunjukkan bahwa $k+1$ merupakan bilangan prima.

(b) Tunjukkan bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $k+1$ merupakan bilangan prima dan persamaan

$$ab + (a+1)(b+1) = 2^k$$

memiliki solusi bulat positif (a, b).

Solusi.

(a) Kita akan buktikan kontraposisinya. Misalkan $k+1$ tidak prima dan tulis ia sebagai $k+1 = st$ dengan $s, t > 1$. Akibatnya $2^s - 1$ merupakan faktor dari $(2^s)^t - 1 = 2^{k+1} - 1$. Ini berarti $2^{k+1} - 1$ komposit dan dapat dituliskan sebagai perkalian dua bilangan ganjil, katakanlah $2^{k+1} - 1 = (2x+1)(2y+1)$. Akibatnya

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 4xy + 2x + 2y + 2 \\ 2^k &= 2xy + x + y + 1 = xy + (x+1)(y+1). \end{aligned}$$

Jadi $ab + (a+1)(b+1) = 2^k$ mempunyai solusi bulat positif (x, y)

(b) Argumen di atas menunjukkan agar persamaan punya solusi, cukuplah $2^{k+1} - 1$ komposit. Dengan inspeksi, bilangan terkecil k dengan $k+1$ prima dan $2^{k+1} - 1$ komposit adalah $k = 10$.

N2. Misalkan a, b, c, k merupakan bilangan asli dengan $a, b, c \geq 3$ yang memenuhi persamaan

$$abc = k^2 + 1.$$

Tunjukkan bahwa paling sedikit satu diantara $a-1, b-1, c-1$ merupakan bilangan komposit.

Solusi. Tulis ulang persamaan menjadi

$$(p+1)(q+1)(r+1) = k^2 + 1$$

dengan $a = p+1, b = q+1$ dan $c = r+1$ Andaikan p, q, r semuanya prima. Jika semua p, q, r prima ganjil, maka $k^2 + 1 \equiv 0 \pmod 8$. Padahal untuk setiap bilangan asli k berlaku $k^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$. Jadi tanpa mengurangi keumuman r genap, yakni $r = 2$. Sekarang persamaan menjadi $3(p+1)(q+1) = k^2 + 1$ yang berakibat $k^2 \equiv -1 \pmod 3$ Padahal untuk setiap bilangan asli k berlaku $k^2 \equiv 0$ atau 1 modulo 3. Dengan demikian haruslah salah satu di antara $a-1, b-1, c-1$ yang komposit.

N3. Carilah semua pasang bilangan asli (a, b) yang memenuhi

$$a^b = (a+b)^a.$$

Komentar. Soal berikut adalah soal IMO 1997. Carilah semua pasang bilangan asli (a, b) yang memenuhi $a^{b^2} = b^a$.

Solusi. Jelas bahwa $a > 1$. Persamaan yang diberikan berakibat a dan $a+b$ memiliki faktor prima yang tepat sama. Tuliskan

$$a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{r_i}, \quad a+b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{s_i}.$$

Dari persamaan yang diberikan diperoleh $br_i = as_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Jika $a \geq b$, maka $r_i \geq s_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ yang berakibat $a + b \mid a$ yang jelas tidak mungkin. Jadi haruslah $a < b$ dan $r_i < s_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Dengan demikian, $a \mid a+b$ sehingga $a \mid b$. Tuliskan $b = ma$ diperoleh $s_i = mr_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots n$ dan kemudian

$$(1+m)a = a+b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{s_i} = \prod_{i=1}^{n} p_i^{r_i m} = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{r_i}\right)^m = a^m$$

sehingga $1 + m = a^{m-1}$. Dengan demikian $m \geq 2$.

Untuk $m = 2$, diperoleh $a = 3$ dan kemudian $b = ma = 6$.

Untuk $m = 3$, diperoleh $a = 2$ dan kemudian $b = ma = 6$.

Untuk $m \geq 4$ kita klaim bahwa bahwa $a^{m-1} > m + 1$. Untuk $m = 4$, diperoleh

$$a^{m-1} \geq 2^{m-1} = 2^3 = 8 > 4 + 1 = m + 1.$$

Sekarang jika $a^{m-1} > m + 1$ untuk suatu bilangan asli m, maka

$$a^m = a \cdot a^{m-1} \geq 2a^{m-1} > 2(1 + m) > m + 2.$$

Berdasarkan prinsip induksi matematika, klaim terbukti.

Sekarang, mudah mengecek bahwa pasangan $(a, b) = (2, 6), (3, 6)$ memang memenuhi persamaan yang diberikan.

N4. Misalkan m, n bilangan *asli* sehingga sistem persamaan

$$\begin{aligned} x + y^2 &= m \\ x^2 + y &= n \end{aligned}$$

memiliki *tepat satu* solusi *bulat* (x, y). Tentukan semua nilai yang mungkin bagi $m - n$.

Solusi. Untuk $m - n$ ganjil, jika sistem persamaan mempunyai solusi bulat (x, y) maka dengan mengurangkan kedua persamaan diperoleh

$$x(x - 1) - y(y - 1) = m - n.$$

Akan tetapi ini tidak mungkin karena ruas kiri genap sedangkan ruas kanan ganjil.

Jika $m - n = 2t \neq 0$ (genap) maka dengan memilih $m = t^2 + 3t + 1 = (t + 1)^2 + t$ dan $n = t^2 + (t + 1)$ maka $m - n = 2t$ dan $(t + 1, t)$ merupakan solusi tunggal sistem persamaan.

Kita akan tunjukkan bahwa untuk $m \neq n$ bilangan asli sehingga sistem persamaan

$$\begin{aligned} x + y^2 &= m \\ x^2 + y &= n \end{aligned}$$

memiliki solusi bulat $(x, y) = (a, b)$ maka solusinya tunggal.

Pertama, perhatikan bahwa $b = n - a^2$ sehingga

$$a^4 - 2a^2n + a + n^2 = a + (n - a^2)^2 = a + b^2 = m.$$

Misalkan (c, d) juga solusi. Dengan cara sama, $c^4 - 2a^2n + c + n^2 = m$. Jadi,

$$\begin{aligned} 0 &= (a^4 - 2a^2n + a) - (c^4 - 2c^2n + c) \\ &= (a - c)\left((a + c)\left(a^2 + c^2 - 2n\right) + 1\right). \end{aligned}$$

Andaikan $a \neq c$, maka $(a + c)(a^2 + c^2 - 2n) + 1 = 0$. Ada dua kasus kemungkinan.

Kasus 1. $a + c = -1$ dan $a^2 + c^2 = 2n + 1$.

Dalam kasus ini, $c = -(1 + a)$, sehingga $a^2 + (1 + a)^2 = 2n + 1$ yang ekivalen dengan $n = a^2 + a$. Dengan demikian, $b = n - a^2 = a$ yang berakibat $m = n$ suatu kontradiksi.

Kasus 2. $a + c = 1$ dan $a^2 + c^2 = 2n - 1$.

Dalam kasus ini, $c = (1 - a)$ sehingga $a^2 + (1 - a)^2 = 2n - 1$ yang ekivalen dengan $n = a^2 - a + 1$. Dengan demikian, $b = n - a^2 = 1 - a$, yang berakibat

$$m - n = a + b^2 - (a^2 + b) = -(a - b)(a + b - 1) = 0.$$

suatu kontradiksi juga.

Jadi pengandaian salah dan berlaku $a = c$. Dengan ini, $d = n - c^2 = n - a^2 = b$. Jadi, $(c, d) = (a, b)$ dan kita selesai.

Dengan demikian kita untuk $m \neq n$, kita cukup menunjukkan semua rentang untuk $m - n$ sehingga sistem persamaan mempunyai solusi.

Sekarang misalkan $m = n$. Jika (a, b) dengan $a \neq b$ merupakan solusi, maka (b, a) merupakan solusi lain yang berbeda dari (a, b). Jika (a, a) merupakan solusi, maka $(-a - 1, -a - 1)$ merupakan solusi yang lain. Jadi ketika $m = n$ dan sistem persamaan memiliki solusi, solusinya tidak tunggal.

Jadi semua nilai yang mungkin bagi $m - n$ adalah semua bilangan genap taknol.

N5. Buktikan bahwa bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, 2013$ dapat diwarnai dengan tujuh warna berbeda (semua warna digunakan) sedemikian sehingga jika a, b, c berwarna sama, maka $2014 \nmid abc$ dan sisa pembagian abc oleh 2014 berwarna sama dengan a, b, c.

Solusi. Notasikan $X = \{0, 1, 2, \ldots, 2014\}$ yang merupakan suatu sistem residu lengkap modulo 2014. Suatu himpunan bagian $A \subseteq X$ kita katakan *bagus* apabila untuk setiap $a, b \in A$, sisa pembagian ab oleh 2014 juga berada di A (dengan kata lain, A tertutup terhadap operasi perkalian modulo 2014). Kita memiliki lema berikut.

Lema. Misalkan A bagus dan $p \in \{2, 19, 53\}$, yakni p pembagi prima dari $2014 = 2 \times 19 \times 53$. Jika

$$A_1 = \{a \in A \mid p \text{ membagi } a\}, \quad A_2 = \{a \in A \mid p \text{ tidak membagi } a\}$$

keduanya tak kosong, maka A_1 dan A_2 keduanya juga bagus.

Bukti. Ambil sebarang $a, b \in A_1$ dan misalkan c adalah sisa pembagian ab oleh 2014. Perhatikan bahwa $c \in A$ karena A bagus. Sekarang karena $p \mid 2014$ dan $2014 \mid ab - c$, maka $p \mid ab - c$. Karena $p \mid a$, maka $p \mid c$. Jadi, $c \in A$ dan $p \mid c$, yang berarti $c \in A_1$. Kita simpulkan bahwa A_1 bagus.

Sekarang ambil sebarang $a, b \in A_2$ dan misalkan c adalah sisa pembagian ab oleh 2014. Seperti sebelumnya, $c \in A$. Andaikan $c \notin A_2$, maka $p \mid c$. Karena $p \mid ab - c$, maka $p \mid ab$ sehingga $p \mid a$ atau $p \mid b$. Padahal karena $a, b \in A_2$, maka p tidak membagi a maupun b. Kita temukan kontradiksi dan kita simpulkan bahwa A_2 bagus. $\square$

Sekarang kita kembali ke soal. Jelas bahwa X bagus. Definisikan himpunan-himpunan berikut.

$A_1 = \{a \in X \mid 2 \text{ membagi } a\}$ dan $A_2 = \{a \in X \mid 2 \text{ tidak membagi } a\}$

$A_{1,1} = \{a \in A_1 \mid 19 \text{ membagi } a\}$ dan $A_{1,2} = \{a \in A_1 \mid 19 \text{ tidak membagi } a\}$

$A_{2,1} = \{a \in A_2 \mid 19 \text{ membagi } a\}$ dan $A_{2,2} = \{a \in A_2 \mid 19 \text{ tidak membagi } a\}$

Berikutnya, kita definisikan $W_0, W_1, \ldots, W_7$ sebagai berikut:

$W_0 = A_{1,1,1} = \{a \in A_{1,1} \mid 53 \text{ membagi } a\}$

$W_1 = A_{1,1,2} = \{a \in A_{1,1} \mid 53 \text{ tidak membagi } a\}$

$W_2 = A_{1,2,1} = \{a \in A_{1,2} \mid 53 \text{ membagi } a\}$

$W_3 = A_{1,2,2} = \{a \in A_{1,2} \mid 53 \text{ tidak membagi } a\}$

$W_4 = A_{2,1,1} = \{a \in A_{2,1} \mid 53 \text{ membagi } a\}$

$W_5 = A_{2,1,2} = \{a \in A_{2,1} \mid 53 \text{ tidak membagi } a\}$

$W_6 = A_{2,2,1} = \{a \in A_{2,2} \mid 53 \text{ membagi } a\}$

$W_7 = A_{2,2,2} = \{a \in A_{2,2} \mid 53 \text{ tidak membagi } a\}$

Perhatikan bahwa $W_0, W_1, \ldots, W_7$ bagus berdasarkan lema di atas dan $W_0 = \{0\}$ karena ini berisi bilangan yang habis dibagi $2, 19, 53$ yang berarti habis dibagi 2014. Pewarnaan pada bilangan $1, 2, \ldots, 2013$ selanjutnya dilakukan dengan mewarnai bilangan-bilangan yang termuat di himpunan W_i dengan warna yang sama. Pewarnaan ini memenuhi syarat yang diberikan karena sisa pembagian hasil kali tiga bilangan abc oleh 2014 sama dengan sisa pembagian hasil kali dua bilangan rc oleh 2014 dimana r sendiri adalah sisa pembagian ab oleh 2014. Selanjutnya, jika a, b, c berwarna sama, maka r, c berwarna sama sehingga sisa pembagian abc oleh 2014 berwarna sama dengan sisa pembagian rc oleh 2014, yakni W_i juga. Sisa tersebut tidak sama dengan 0 karena $0 \in W_0$ sementara $W_i \neq W_0$, dengan kata lain, abc bukan kelipatan 2014. Bukti kita selesai.

N6. Suatu bilangan asli disebut *cantik* jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

untuk suatu bilangan asli x dan y yang *berbeda*.

(a) Tunjukkan bahwa 2014 dapat dituliskan sebagai perkalian bilangan cantik dan bilangan tidak cantik.

(b) Buktikan bahwa hasil perkalian dua bilangan tidak cantik tetap tidak cantik .

Solusi. Kita notasikan

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

untuk sebarang bilangan asli x, y (tidak harus berbeda).

Kita mulai dengan beberapa observasi. Untuk $n, x, y \in \mathbb{N}$, perhatikan

$$f(nx, ny) = \frac{(nx)^2 + (ny)^2}{nx+ny} = n \cdot \frac{x^2+y^2}{x+y} = nf(x,y).$$

Jadi, untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$

$$f(a(a+b), b(a+b)) = (a+b)f(a,b) = a^2+b^2.$$

Sekarang katakan suatu bilangan *cantik* bila ia berbentuk $f(x,y)$ dengan $x, y \in \mathbb{N}$ berbeda. Kita ingin menentukan semua bilangan cantik.

Pertama, misalkan $p \equiv 1 \bmod 4$ prima. Ingat bahwa p dapat ditulis sebagai $p = a^2+b^2$ dengan $a, b \in \mathbb{N}$. Jelas bahwa a, b berbeda. Dengan demikian, $p = f(a(a+b), b(a+b))$ cantik. Berikutnya bila suatu bilangan asli k habis dibagi oleh p, tulis $k = mp$, maka

$$k = m(a^2+b^2) = mf(a(a+b), b(a+b)) = f(ma(a+b), mb(a+b))$$

cantik. Jadi, setiap bilangan asli yang memiliki suatu faktor prima ganjil yang kongruen 1 mod 4 senantiasa cantik.

Kita klaim bahwa tidak ada bilangan cantik yang lain. Kita butuh dua lema sederhana berikut.

Lema 1. Misalkan m bilangan asli. Jika $2m$ cantik, maka m juga cantik.

Bukti. Misalkan $2m = f(a,b)$ dengan a,b berbeda. Dari definisi f, diperoleh $2m(a+b) = a^2+b^2$. Seandainya a,b keduanya ganjil, maka $a^2+b^2 \equiv 2 \bmod 4$ padahal $2(a+b) \equiv 0 \bmod 4$, suatu kontradiksi. Jadi, a,b keduanya genap sehingga $2m = f(a,b) = f(2a', 2b') = 2f(a', b')$ dan $m = f(a', b')$ cantik. $\square$

Lema 2. Misalkan m, q bilangan asli dengan $q \equiv 3 \bmod 4$ prima. Jika qm cantik, maka m juga cantik.

Bukti. Misalkan $qm = f(a,b)$ dengan a,b berbeda. Dari definisi f, diperoleh $qm(a+b) = a^2+b^2$. Karena $q \equiv 3 \bmod 4$, maka q membagi a dan b. Jadi, $qm = f(a,b) = f(qa', qb') = qf(a', b')$ dan $m = f(a', b')$ cantik. $\square$

Kembali ke soal, andaikan ada bilangan cantik selain disebut di atas, maka ia berbentuk $2^k q_1 q_2 \cdots q_l$ dengan $q_i \equiv 3 \bmod 4$ untuk setiap i. Dengan lema berkali-kali diperoleh bahwa 1 adalah bilangan cantik. Tulis $1 = f(a,b)$ dengan a,b berbeda, maka $a+b = a^2+b^2$ sehingga $a(a-1) + b(b-1) = 0$. Ini berakibat $a = b = 1$, suatu kontradiksi.

(a) Karena $2014 = 53 \times 38$ dengan 53 bilangan prima berbentuk $4k+1$. Maka 53 merupakan bilangan cantik dan akibatnya 2014 juga cantik. Di lain pihak 1 tidak cantik. Jadi $2014 = 1 \times 2014$ merupakan suatu perkalian bilangan cantik dan tak cantik.

(b) Bilangan tak cantik adalah bilangan berbentuk $n = 2^\alpha m$ dengan semua faktor prima dari m berbentuk $4k+3$. Mengalikan dua bilangan seperti itu akan menghasilkan bilangan yang sama bentuknya.

Solusi alternatif. Kita gunakan notasi fungsi f yang sama. Misalkan n suatu bilangan cantik. Tuliskan $n = f(a,b)$ dengan a,b bilangan asli berbeda. Misalkan $d = \gcd(a,b)$ dan $a = du$, $b = dw$ dengan $\gcd(u,w) = 1$. Karena a,b berbeda, u,w juga berbeda. Karena $a+b$ membagi a^2+b^2, maka ia membagi $(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab$. Karena

$a+b = d(u+w)$ dan $2ab = 2d^2uw$, maka $u+w$ membagi $2duw$. Karena $\gcd(u, u+w) = \gcd(v, u+w) = 1$, maka $u+w$ habis membagi $2d$. Tuliskan $2d = (u+w)m$ diperoleh

$$n = \frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{2d(u^2+w^2)}{2(u+w)} = \frac{m(u^2+w^2)}{2}.$$

Jika m genap, maka $n = (m/2)(u^2+w^2)$ dan jika m ganjil, maka u, w keduanya ganjil (karena relatif prima) dan $n = m((u^2+w^2)/2)$.

Sebaliknya, dapat dilihat dari substitusi yang digunakan di atas bahwa bilangan yang memiliki faktor berbentuk u^2+w^2 dengan u, w berbeda dan relatif prima, atau memiliki faktor berbentuk $(u^2+w^2)/2$ dengan u, w ganjil, berbeda dan relatif prima, adalah bilangan cantik.

Komentar. Kalau mau dicek secara rinci, misalnya

$$k(u^2+w^2) = \frac{2k}{2}(u^2+w^2) = f(a,b)$$

dengan $a = du$, $b = dw$ dengan $2d = (u+w)(2k)$ (pandang $m = 2k$ pada substitusi di atas). Yang kedua juga sama saja juga,

$$k\left(\frac{u^2+w^2}{2}\right) = \frac{k(u^2+w^2)}{2} = f(a,b)$$

dengan $a = du$, $b = dw$ dengan $2d = (u+w)k$.