Number Theory

GCD, Modulo, dan Keterbagian

Audrey Felicio Anwar

Its like asking why is Ludwig van Beethovens Ninth Symphony beautiful. If you don't see why, someone can't tell you. I know numbers are beautiful. If they aren't beautiful, nothing is. - Paul Erdos

Teori Dasar Aritmatika

Setiap bilangan dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian dari bilangan-bilangan prima dan representasinya unik.
Contoh : $12 = 2^2 \cdot 3$, $27 = 3^3$

Algoritma Pembagian

Untuk setiap bilangan asli a, b dengan $a > b$, ada tepat 1 pasang (q, r) bilangan asli yang memenuhi

$$a = bq + r \quad 0 \leq r < b$$

GCD dan LCM

Misalkan kita punya n bilangan asli berbeda $a_1, a_2, ..., a_n$

$$gcd(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$$

adalah bilangan terbesar yang membagi a_i untuk $i = 1, 2, ..., n$

$$lcm(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$$

adalah bilangan terkecil yang habis dibagi oleh a_i untuk $i = 1, 2, ..., n$
Biasanya hanya ditanya untuk dua bilangan saja.
Untuk dua bilangan, misalkan

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n} \quad b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} ... p_n^{b_n}$$

maka,

$$gcd(a, b) = p_1^{min(a_1, b_1)} p_2^{min(a_2, b_2)} ... p_n^{min(a_n, b_n)}$$

$$lcm(a, b) = p_1^{max(a_1, b_1)} p_2^{max(a_2, b_2)} ... p_n^{max(a_n, b_n)}$$

Kita juga mempunyai hubungan berikut

$$gcd(a, b) \cdot lcm(a, b) = ab$$

$$gcd(a, b, c) = gcd(gcd(a, b), c) \quad lcm(a, b, c) = lcm(lcm(a, b), c)$$

Algoritma Euclid

Untuk menghitung gcd, kita dapat menggunakan algoritma euclid. Misalkan a, b adalah bilangan asli dengan $a > b$, menggunakan algoritma pembagian berkali-kali,

$$a = bq_1 + r_1$$

$$b = r_1 q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3$$

$$...$$

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$$

Maka, kita punya $gcd(a, b) = gcd(b, r_1) = gcd(r_1, r_2) = ... = gcd(r_{n-1}, r_n) = r_n$

Contoh 1 Hitunglah $gcd(1234, 86)$

$$gcd(1234, 86) = gcd(30, 86) = gcd(30, 26) = gcd(4, 26) = gcd(4, 2) = 2$$

Keterbagian

Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b
Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b
beberapa properti penting :

- Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid xb + yc$ dengan x, y bilangan bulat
- Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$
- Jika $a \mid b$ maka $a \leq b$
- Jika $a \mid b$ dan $a \mid b \pm c$, maka $a \mid c$
- Jika $a \mid b$ dan $b \mid a$, maka $a = b$
- Jika $gcd(a, b) = 1$ dan $a \mid bc$ maka $a \mid c$

Sifat-Sifat Habis Dibagi

- Suatu bilangan habis dibagi 2^n jika n digit terakhirnya habis dibagi 2^n
- Suatu bilangan habis dibagi 3 jika jumlah semua digitnya habis dibagi 3
- Suatu bilangan habis dibagi 5 jika digit terakhirnya 0 atau 5
- Suatu bilangan habis dibagi 9 jika jumlah semua digitnya habis dibagi 9
- Suatu bilangan habis dibagi 11 jika jumlah digit posisi genap - jumlah digit posisi ganjil hasilnya habis dibagi 11

Modulo

Notasi $a \equiv b \mod m$ berarti a, b jika dibagi dengan m memiliki sisa bagi yang sama. Sifat-sifat :

- Jika $a \equiv b \mod m$ dan $b \equiv c \mod m$, maka $a \equiv c \mod m$
- Jika $a \equiv b \mod m$ dan $c \equiv d \mod m$, maka $a + c \equiv b + d \mod m$ dan $a - c \equiv b - d \mod m$
- Jika $a \equiv b \mod m$ maka $ka \equiv kb \mod m$ untuk k suatu bilangan bulat.

Beberapa teorema penting :

Invers Modulo

Sebuah bilangan bulat b kita sebut invers dari $a \mod m$ jika $ab \equiv 1 \mod m$. Invers dari $a \mod m$ ada jika dan hanya jika $gcd(a, m) = 1$. b dapat ditulis sebagai a^{-1}

Contohnya invers dari $7 \mod 20$ adalah 3

Fermat Little Theorem

Jika p adalah suatu bilangan prima dan $gcd(a, p) = 1$, maka

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

Euler's Theorem

Jika a, b adalah bilangan asli dengan $gcd(a, b) = 1$, $b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n}$, maka

$$a^{\phi(b)} \equiv 1 \mod b$$

dengan

$$\phi(b) = b\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

Chinese Remainder Theorem

Sistem kongruensi berikut

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \mod b_1 \\ x \equiv a_2 \mod b_2 \\ ... \\ x \equiv a_n \mod b_n \end{cases}$$

dengan $gcd(b_i, b_j) = 1$ untuk setiap $i \neq j$ pasti memiliki solusi modulo $b_1 b_2 ... b_n$ dan nilai x unik modulo $b_1 b_2 ... b_n$

Secara eksplisit,

$$x \equiv (a_1 x_1 y_1) + (a_2 x_2 y_2) + ... + (a_n x_n y_n) \mod B$$

dengan $B = b_1 b_2 ... b_n$, $x_i = \frac{B}{b_i}$, $y_i = x_i^{-1} \mod b_i$

Soal

Soal 1 Faktorkan 30030

Soal 2 Hitunglah $gcd(380, 35)$

Soal 3 Hitunglah $gcd(49726, 2946)$

Soal 4 Hitunglah $gcd(24, 900, 1729)$

Soal 5 Hitunglah $lcm(13, 37)$

Soal 6 Hitunglah $lcm(4, 12, 27)$

Soal 7 Jika $gcd(a, b) = 1$, buktikan $gcd(ab, a + b) = 1$

Soal 8 Hitunglah $gcd(2002 + 2, 2002^2 + 2, 2002^3 + 2, ...)$

Soal 9 Diberikan $n - 1$ buah pecahan berikut, $n > 2, n$ bilangan asli.

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}$$

Buktikan bahwa sebanyak genap dari pecahan-pecahan tersebut tidak dapat disederhanakan lagi

Soal 10 Jika a, b adalah bilangan asli 1 digit sehingga $3a86b$ habis dibagi 11 dan 9, tentukan $a + b$

Soal 11 Tentukan semua nilai n bulat sehingga $\frac{4n-49}{n+3}$ adalah bilangan bulat.

Soal 12 Tentukan semua nilai n bulat sehingga $n - 3 \mid n^3 - 3$

Soal 13 Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional

Soal 14 Buktikan ada tak hingga banyaknya bilangan prima

Soal 15 Hitunglah sisa pembagian 2018^{1296} dengan 37

Soal 16 Hitunglah sisa pembagian 3^{41} dengan 42

Soal 17 Hitunglah sisa pembagian 7^{6^5} dengan 100

Soal 18 Tentukan invers dari $9 \mod 13$

Soal 19 Tentukan invers dari $31 \mod 341$

Soal 20 Tentukan nilai n bilangan asli $0 \leq n \leq 1000$ yang memenuhi

$$\begin{cases} n \equiv 3 \mod 13 \\ n \equiv 7 \mod 37 \end{cases}$$

Soal 21 Tentukan nilai n bilangan asli kurang dari 100 yang memenuhi

$$\begin{cases} n \equiv 1 \mod 4 \\ n \equiv 3 \mod 5 \\ n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Soal 22
Misalkan x, y, z adalah tiga bilangan asli yang memenuhi $gcd(x, y, z) = 1$ dan

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

Misalkan $gcd(x, y) = d$
(a) Buktikan $gcd(d, z) = 1$
(b) Buktikan $x - z, y - z, x + y, xyz$ adalah bilangan kuadrat sempurna
Soal 23 Tentukan semua pasangan bilangan prima (p, q) yang memenuhi

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2$$

Tantangan

Challenge 1 Tentukan semua pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi

$$xy^2 + y + 7 \mid x^2y + x + y$$

Challenge 2 Adakah sebuah polinom $P(x)$ sehingga terdapat tiga bilangan asli a, b, c dengan $P(a) = b,\ P(b) = c,\ P(c) = a$?
Challenge 3 Misalkan a, b, c adalah bilangan asli yang memenuhi

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$$

Buktikan c adalah bilangan kuadrat sempurna
Challenge 4 Misalkan p adalah suatu bilangan prima yang habis membagi $\phi(p^2 + 2)$
(a) Buktikan terdapat suatu bilangan prima q sehingga $p \mid q - 1,\ q \mid p^2 + 2$
(b) Tentukan semua nilai p yang mungkin
Challenge 5 Misalkan a adalah bilangan bulat positif sehingga

$$gcd(an + 1, 2n + 1) = 1$$

(a) Tunjukan bahwa $gcd(a - 2, 2n + 1) = 1$
(b) Tentukan semua nilai a yang mungkin

*soal tidak diurutkan berdasarkan tingkat kesulitan