Azzam Labib H. SSP sesi 1 24 ~~Oktober~~ sept. 2018

**Keterbagian**

1. Buktikan bahwa tidak terdapat bilangan bulat positif $x$ dan $y$ sedemikian sehingga $x^3 + xy^3 + y^2 + 3$ habis membagi $x^2 + y^3 + 3y - 1$. ineq

2. Carilah semua pasangan bilangan bulat positif $(x, y)$ sedemikian sehingga $x^3 + y$ dan $y^3 + x$ habis dibagi oleh $x^2 + y^2$. relatif prima antara x dan y

3. Diberikan bilangan-bilangan bulat positif $d$, $m$, dan $n$ sedemikian sehingga $d \mid mn^2+1$ dan $d \mid m^2n + 1$. Buktikan bahwa $d \mid m^3 + 1$ dan $d \mid n^3 + 1$. $(d,m)=(d,n)=1$

4. Misalkan $q, r, s$ bilangan bulat sehingga $s^2 - s + 1 = 3qr$. Buktikan bahwa $q + r + 1$ habis membagi $q^3 + r^3 - s^3 + 3qrs$. $\sum a^3 = (\sum a)(\sum a^2 - \sum ab) + 3abc$

5. Let $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ be positive integers such that

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015} = a_1 \cdots a_{2015}$$

Prove that among numbers $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ at most nine are greater than 1.

**Bilangan prima**

1. Carilah bilangan prima $p$ sehingga $16p + 1$ merupakan bilangan kubik. misalin $= k^3$. cari / kuli.

2. Misalkan $p$ bilangan prima. carilah banyaknya bilangan bulat $n$ sehingga $pn$ kelipatan dari $p + n$. $p+n \mid pn + p^2 - p^2$

3. Carilah semua pasangan bilangan prima $(p, q)$ sehingga $p^2 + q^3$ merupakan bilangan kubik. agak kuli

4. Misalkan $n$ bilangan asli dan $p$ bilangan prima sehingga $n \mid p - 1$ dan $p \mid n^3 - 1$. Buktikan bahwa $4p - 3$ kuadrat sempurna. $n \neq 1$. misal $kn = p-1$. ketemu $p = n^2+n+1$

5. Jika $p$ prima dan persamaan

$$p^k + p^l + p^m = n^2$$

memiliki penyelesaian, buktikan bahwa $4|p + 1$. jika $p > 2$. mod 4.

6. Diberikan bilangan bulat positif $n$ sedemikian sehingga $2n+1$ dan $3n+1$ merupakan kuadrat sempurna. Mungkinkah $5n + 3$ merupakan bilangan prima? $5n+3 = 4(2n+1) - (3n+1)$

7. Carilah semua bilangan bulat $x$ dan bilangan prima $p$ yang memenuhi persamaan $x^8 + 2^{2^x+2} = p$.

8. Diberikan polinomial $P(n) = n^3 - n^2 - 5n + 2$. Carilah semua bilangan bulat $n$ sedemikian sehingga $P(n)^2$ merupakan kuadrat dari suatu bilangan prima. $P(n) = (n+2)(n^2-3n+1)$

9. Carilah semua pasangan bilangan-bilangan prima $(p, q, r)$ sedemikian sehingga $p^q + q^r$ merupakan kuadrat sempurna.

10. Carilah semua bilangan prima $p$ dan bilangan bulat positif $m$ sedemikian sehingga $2p^2 + p - 9 = m^2$.

AZZAM LABIB H. SSP sesi 1 24 ~~oktober~~ sept. 2018

11. Carilah semua bilangan prima $p$, $q$, dan $r$ dengan $p > q > r$ sedemikian sehingga $p - q$, $q - r$, dan $p - r$ juga merupakan bilangan prima.

12. Carilah semua bilangan prima $p$, $q$, dan $r$ yang memenuhi persamaan $15p + 7pq + qr = pqr$.

13. Jika $p$ dan $q$ dua bilangan prima ganjil yang berurutan, buktikan bahwa $p + q$ mempunyai setidaknya 3 faktor prima (tidak harus berbeda).

14. Carilah semua pasangan bilangan bulat $(x, y)$ dan bilangan prima $p$ yang memenuhi persamaan

$$x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p$$

15. Misalkan $p$ prima ganjil. Carilah semua pasangan bulat positif $(x, y)$ yang memenuhi persamaan

$$p^x - y^p = 1$$

16. Misalkan $m < n$. Misalkan

$$p = \frac{n^2 + m^2}{\sqrt{n^2 - m^2}}$$

   (a) Carilah semua pasangan $(m, n)$ sedemikian sehingga $p$ prima.

   (b) Jika $p$ prima, buktikan bahwa $p \equiv 1 \bmod 8$.

17. Misalkan $p$ bilangan prima dan $n$ bilangan bulat positif. Buktikan bahwa $pn^2$ paling banyak memiliki sebuah faktor $d$ yang menyebabkan $n^2 + d$ merupakan kuadrat sempurna.

18. Carilah semua pasangan bilangan prima $(p, q)$ yang sedemikian sehingga $p^2 + q^3$ dan $p^3 + q^2$ merupakan kuadrat sempurna.

19. Diberikan bilangan-bilangan prima $p$ dan $q$. Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat $a$ dan $b$ sedemikian sehingga rata-rata aritmatika dari himpunan semua pembagi positif $p^aq^b$ merupakan bilangan bulat.

20. Let $p$ be a prime. Find all solutions to the equation $a + b - c - d = p$, where $a, b, c, d$ are positive integers such that $ab = cd$.

**Bezout**

1. Jika $a \mid bc$ dan $\text{FPB}(a, b) = 1$, buktikan $a \mid c$.

2. Misalkan $\text{FPB}(a, b) = d$, buktikan $\text{FPB}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

3. Buktikan bahwa $\text{FPB}(a^n, b^n) = \text{FPB}(a, b)^n$ untuk setiap bilangan asli $n$.

4. Buktikan bahwa

$$\frac{\text{FPB}(m, n)}{n}\binom{m}{n}$$

untuk sebarang bilangan bulat $m > n \geq 1$.

AZZAM LABIB H. SSP sesi 1 24 ~~oktober~~ sept. 2018

5. Suatu himpunan $S \subseteq \mathbb{Z}$ memiliki sifat: jika $a, b \in S$, maka $a+b \in S$. Diketahui bahwa $S$ memiliki satu anggota positif dan satu anggota negatif. Benarkah pernyataan berikut ini?
   *Terdapat bilangan bulat $d$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, $x \in S$ jika dan hanya jika $d|x$.*

**FPB dan KPK**

1. Jika $a$ dan $b$ bilangan-bilangan bulat positif yang memenuhi $kpk(a, a+5) = kpk(b, b+5)$, buktikan bahwa $a = b$.

2. Dua bilangan bulat positif, $m$ dan $n$ hanya memiliki faktor persekutuan yang tidak lebih dari 1. Tentukan nilai terbesar dari $fpb(m + 2000n, n + 2000m)$.

3. Misalkan $[a, b] = KPK(a, b)$. Misalkan $n$ bilangan asli sehingga
$$[n, n+1] > [n, n+2] > \cdots > [n, n+35]$$
   Buktikan bahwa $[n, n+35] > [n, n+36]$.

4. Bilangan asli $a, b, c, d$ sepasang-sepasang saling prima dan memenuhi
$$ab + cd = ac - 10bd$$
   Buktikan bahwa selalu dapat dipilih 3 bilangan sehingga yang satu merupakan jumlahan 2 sisanya.

5. Untuk sebarang bilangan bulat positif $a, m, n$, buktikan bahwa
$$\text{FPB}\,(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{FPB}(m,n)} - 1$$

6. Buktikan bahwa jika $a, b > 2$ berlaku $2^b - 1 \nmid 2^a + 1$.

7. Jika $p$ prima ganjil dan $\text{FPB}(a, b) = 1$ buktikan bahwa
$$\text{FPB}\left(a+b, \frac{a^p + b^p}{a+b}\right) = 1 \text{ atau } p$$

8. Afif menulis bilangan bulat positif $a, b$ di papan. Bilangan terkecil diantaranya dihapus kemudian diganti bilangan $\frac{ab}{|a-b|}$. Proses ini berlangsung selama kedua bilangan berbeda. Buktikan bahwa penderitaan Afif akan berakhir.

9. Jika $a, b \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \in \mathbb{N}$ serta $d = \text{FPB}(a, b)$, buktikan bahwa $d^2 \leq a + b$.

10. Didefinisikan $a_n$ dan $b_n$ dengan $a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$ untuk setiap $n \geq 1$. Buktikan bahwa $\text{FPB}(a_n, b_n) = 1$ untuk setiap $n \geq 1$.

11. Misalkan $a, b$ bilangan bulat positif dengan $a > b$. Jika $\text{FPB}(a-b, ab+1) = 1$ dan $\text{FPB}(a+b, ab-1) = 1$ buktikan bahwa $(a-b)^2 + (ab+1)^2$ bukan kuadrat sempurna.

AZZAM LABIB HAKIM

sesi malam Otto A. 24 September 2018.

# Soal mandiri malam 1 Tahap 1 IMO 2019

Otto Alexander Sutianto

Malang, 24 September 2018

1. Let $ABC$ be an acute scalene triangle. Let $D$ and $E$ be points on the sides $AB$ and $AC$, respectively, such that $BD = CE$. Denote by $O_1$ and $O_2$ the circumcenters of the triangles $ABE$ and $ACD$, respectively. Prove that the circumcircles of the triangles $ABC$, $ADE$, and $AO_1O_2$ have a common point different from $A$. AX radical axis

2. Let $ABC$ be an acute triangle. $D$ midpoint $BC$. $I_B$ and $I_C$ incenter triangle $BAD$, $CAD$. $DI_C$ meet $(I_BAD)$ at $Y$. $DI_B$ meet $(I_CAD)$ at $Z$. $I$ incenter $ABC$. $P$ foot of the perpendicular to $BC$ through $I$. Prove $D, Y, Z, P$ cyclic.

3. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that $f(x) = x$.

$$f(2x + 2f(y)) = x + f(x) + 2y$$

holds for all $x, y \in \mathbb{R}^+$

4. Let $a_1, a_2, \ldots, a_N$ be positive reals. Prove that there exists a sequence $1 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k = N + 1$ of integers such that

$$n_1a_{n_0} + n_2a_{n_1} + \ldots n_ka_{n_{k-1}} < 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

5. Let $m$ and $n$ be two positive integers such that $gcd(m + 1, n + 1) = 1$. The cells of an $m \times n$ board are colored in black and white like a chessboard. Each white cell contains a nonnegative integer. The Minesweeper needs to put mines into black cells, any nonnegative number of mines in each, so that the number in every white cell should equal the number of mines in adjacent black cells. Prove that this Minesweeper puzzle has at most one solution.

6. Farras and Gian play the following game: They start with non-empty piles of coins. Taking turns, with Farras playing first, each player choose a pile with an even number of coins and moves half of the coins of this pile to the other pile. The game ends if a player cannot move, in which case the other player wins. pilenya cuma 2

   Determine all pairs $(a, b)$ of positive integers such that if initially the two piles have $a$ and $b$ coins respectively, then Gian has a winning strategy.

7. An odd prime number $q$ and nonzero integers $x$ and $y$ satisfy $x^2 = 8y^q + 1$. Prove that $q$ divides $y - 1$.

8. Let $f(k) = 2^k + 1$ for arbitrary positive integer $k$. Is there any integer $n$ which divides $f(f(n))$, but does not divide $f(f(f(n)))$?

Azzam Labib H.    SSP



# 1 Pengantar

Dua objek dapat dikaitkan dengan menggunakan sebuah operasi yang disebut relasi. Kita dapat sebut objek $a$ berelasi dengan objek $b$ jika memenuhi syarat relasi yang kita inginkan. Dapat kita tuliskan $a \sim b$ jika keduanya berelasi atau $a \nsim b$ jika keduanya tidak berelasi.

Sebagai contoh sebuah relasi adalah $a \sim b$ jika $b$ merupakan kuadrat dari $a$. Dapat dicek bahwa $2 \sim 4$ demikian juga $-3 \sim 9$. Akan tetapi $0 \nsim 1$. Demikian juga kita dapat menemukan bahwa jika $x \sim x^2$ untuk setiap bilangan kompleks $x$. Atau juga kita dapat menyimpulkan jika $x, y \in \mathbb{R}$ maka $x \sim y^2$ jika dan hanya jika $x = \mp y$.

Selain objek, relasi juga dapat mengaitkan anggota-anggota dari dua himpunan. Sebut saja himpunan tersebut $A$ dan $B$. Jika $a \in A$ dan $b \in B$ berelasi, selain dapat disimbolkan $a \sim b$, kita juga dapat melihatnya sebagai pasangan terurut $(a, b)$. Intinya jika $a$ dan $b$ berelasi, maka pasangan $(a, b)$ ada. Dengan kata lain, relasi antara $A$ dan $B$ dapat dilihat sebagai himpunan bagian dari $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Contoh yang sederhana adalah relasi antara himpunan $A = \{1, 2\}$ dengan $B = \{u, v, w\}$. Salah satunya adalah $\{(1, u), (1, v), (2, v)\}$, yang merupakan himpunan bagian dari $A \times B = \{(1, u), (1, v), (1, w), (2, u), (2, v), (2, w)\}$. Dapat dicek pula $\emptyset$ juga merupakan relasi antara $A$ dan $B$.

Contoh istimewa dari sebuah relasi adalah pemetaan atau sebutan lainnya adalah **fungsi (total)**. Fungsi (total) yang merupakan relasi dengan sifat untuk setiap $a \in A$ terdapat tepat sebuah $b \in B$ sedemikian sehingga $a \sim b$. Selanjutnya dari sifat tersebut muncul beberapa fakta antara lain:

1. Dari fakta ketunggalan $b$ untuk masing-masing $a$, maka $(a, b)$ dapat dituliskan dalam $a, f(a)$ dengan $f$ menyatakan nama fungsi. Dapat diterjemahkan pula $f$ memetakan $A$ ke $B$ dengan $f$ memetakan $a$ ke $b$.

2. Himpunan $A$ disebut **daerah asal (domain)**, himpunan $B$ disebut **daerah kawan (kodomain)**.

3. **Daerah hasil(range)** dari fungsi $f$ merupakan himpunan $\{f(a) \mid a \in A\} \cap B$ sebab bisa jadi telah diketahui bahwa beberapa anggota $A$ berelasi dengan objek lain di luar $B$.

4. Istilah **pra peta** dari $f$ adalah domain itu sendiri. Sedangkan **peta (image)** adalah daerah hasil. Adapun ada juga istilah **domain alami**. Istilah tersebut muncul ketika didefinisikan relasinya terlebih dahulu. Sebagai contoh kita ingin merelasikan bilangan real $x$ dengan bilangan real lain melalui fungsi $f$ sehingga $x$ direlasikan dengan $f(x) = \sqrt{x}$. Hal ini memunculkan fakta bahwa hanya $x \geq 0$ saja yang dapat direlasikan. Akibatnya bilangan real tak negatif merupakan domain alami dari $f$.

Suatu fungsi $f$ yang memetakan $A$ ke $B$ dengan sifat $f$ memetakan $a$ ke $f(a)$ ditulis

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Sebagai contoh misalkan fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ yang merelasikan $x$ dengan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari $x$. Dituliskan

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

Pada materi ini kita akan bekerja pada fungsi dengan domain maupun kodomain himpunan bilangan kompleks. Bagian utamanya adalah fungsi dengan domain maupun kodomain bilangan rasional dan bilangan real.

AZZam L.H.



## 2 Klasifikasi Fungsi

Setelah mengenali definisi fungsi, selanjutnya akan kita kenali beberapa fungsi yang menarik.

1. Fungsi **satu-satu** atau **injektif** adalah fungsi $f$ yang memenuhi sifat untuk sebarang $a, b$ di domain $f$ jika $f(a) = f(b)$ maka $a = b$. Sebagai contoh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Dapat dicek $f$ bahwa $f$ injektif. Sedangkan fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ bukan fungsi injektif karena $f(-1) = f(1)$ padahal $-1 \neq 1$. Jika domain $g$ diganti menjadi bilangan real taknegatif, maka $g$ menjadi injektif.

2. Fungsi **pada** atau **surjektif** adalah fungsi $f$ yang memenuhi sifat untuk setiap $b$ pada kodomainnya terdapat $a$ pada domainnya sehingga $f(a) = b$. Definisi tersebut dengan kata lain menyatakan bahwa peta dari $f$ sama dengan kodomain dari $f$. Contoh yang cukup sederhana adalah fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^n$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Jika $n$ genap maka $f$ tidak surjektif, sebaliknya jika $n$ ganjil maka $f$ surjektif.

3. Fungsi yang innjektif sekaligus surjektif disebut fungsi **bijektif** (**satu-satu dan pada**). Fungsi yang bijektif juga biasa disebut bijeksi. Contoh fungsi bijektif dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ adalah $f(x) = x^3$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Contoh fungsi injektif tapi tidak surjektif adalah $f(x) = 2^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ karena range $f$ hanya interval $(0, +\infty)$. Contoh fungsi surjektif tapi tidak injektif adalah $f(x) = x^3 - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ karena $f(0) = f(1)$. Sedangkan contoh fungsi yang tidak injektif sekaligus surjektif adalah $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Jika memperhatikan karakteristik kurva fungsi $f(x) = x^n$ pada domain himpunan bilangan real, maka akan ada pola menarik. Saat $n$ ganjil maka kurvanya simetris terhadap titik $(0, 0)$ atau dengan kata lain $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sedangkan saat $n$ genap maka kurvanya simetris terhadap sumbu-$y$ atau dengan kata lain $f(x) = f(-x)$. Dari pola tersebut kemudian muncul istilah fungsi yang memenuhi sifat $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ disebut dengan fungsi **ganjil**. Sedangkan fungsi yang memenuhi sifat $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ disebut dengan fungsi **genap**. Contoh fungsi ganjil yang terkenal adalah fungsi $f$ sehingga $f(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sedangkan fungsi $f$ sehingga $f(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ merupakan contoh fungsi genap.

5. Karena $\mathbb{R}$ memiliki urutan maka dapat kita lihat ada fungsi yang kurvanya cenderung naik ketika nilai inputnya naik. Demikian juga kita dapat melihat ada fungsi yang cenderung turun ketika inputnya turun. Secara formal fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(x) \geq f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x > y$ disebut fungsi **monoton naik**. Sebaliknya jika $f(x) \leq f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x > y$ disebut fungsi **monoton turun**. Fungsi yang memenuhi $f(x) > f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x > y$ disebut fungsi yang **naik tegas**. Fungsi yang memenuhi $f(x) < f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x > y$ disebut fungsi yang **turun tegas**. Contoh fungsi yang naik tegas adalah $f(x) = 2^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sedangkan $f(x) = \frac{1}{x}$ turun tegas pada domain $(0, +\infty)$. Contoh fungsi monoton naik tapi tidak naik tegas adalah $f(x) = \lfloor x \rfloor$ di $\mathbb{R}$.

## 3 Persamaan Fungsi

Topik utama dari materi ini adalah persamaan fungsi. Persamaan fungsi merupakan persamaan yang melibatkan nilai fungsi di suatu domain tertentu. Persamaan yang disajikan merupakan persamaan yang tidak secara eksplisit menyebutkan fungsi yang dimaksud.

Azzom L.H.



Sederhananya misalkan kita memiliki fungsi $f$ di domain real dengan $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pernyataan tersebut sudah eksplisit memperlihatkan fungsi yang dimaksud. Tetapi jika kita ubah sedikit menjadi $f(x)^2 = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ kita memiliki banyak sekali kemungkinan fungsi. Bisa saja $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Bisa juga $f(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tetapi bisa juga $f(x) = x$ untuk $x \in A$ dan $f(x) = -x$ untuk $x \in \mathbb{R}\backslash A$. Jadi pernyataan $f(x)^2 = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ untuk menjelaskan apa saja fungsinya. Soal-soal persamaan fungsi berkaitan dengan hal tersebut.

Agar lebih jelas, pertama kita lihat persamaan fungsi yang sederhana terlebih dahulu. Carilah fungsi $f : A \to B$ sehingga $f(x + y) = f(x) + y$. Dari contoh ini ada banyak hal yang bisa kita simak.

1. Saat $A = B = \mathbb{N}$, yang bisa dilakukan pertama adalah menguji bagaimana jika $x = 1$. Mengapa **substitusi** $x = 1$? Karena 1 merupakan bilangan asli terkecil dan semua bilangan asli merupakan kelipatan 1. Mungkin juga alasannya terlalu mengada-ada. Tetapi yang jelas kita ingin menguji persamaan tersebut dengan **substitusi** sesuatu yang membuatnya terlihat sederhana. Kita peroleh $f(1 + y) = f(1) + y$. Dapat dianalisa bahwa $f(1) = f(1) + 1 - 1$ dan $f(t) = f(1) + t - 1$ untuk setiap $t \geq 2$. Bisa kita simpulkan bahwa $f(t) = f(1) + t - 1$, $\forall t \in \mathbb{N}$. Jangan lupa **menguji fungsi tersebut ke persamaan awal** yakni $f(x + y) = f(x) + y \iff f(1) + x + y - 1 = f(1) + x - 1 + y$ sudah benar.

   Selajutnya bagaimana jika yang kita substitusikan adalah $y = 1$. Hasil yang kita dapatkan adalah $f(x+1) = f(x)+1$. Selanjutnya kita berjalan dari $x = 1, 2, 3, \ldots$ kita akan dapatkan pola $f(x) = f(1)+x-1$ untuk setiap $x \in \mathbb{N}$ melalui proses **induksi matematika**. Tinggal dicek ke persamaan awal apa yang telah kita peroleh.

2. Saat $A = B = \mathbb{Z}$ substitusi $y = 1$ masih bisa dilakukan karena induksi bisa dijalankan mundur. Sedangkan substitusi $x = 1$ tidak terpengaruh, jadi pasti berhasil. Tetapi $0 \in \mathbb{Z}$ yang merupakan modal bagus untuk melakukan substitusi. Artinya substitusi $y = 0$ atau $x = 0$ merupakan langkah bagus. Substitusi $y = 0$ tidak berarti apa-apa. Substitusi $x = 0$ menghasilkan $f(y) = f(0) + y$ yang berarti kita sudah dapatkan hasil. Analog saat $A = B = \mathbb{Q}$. Akan tetapi saat substitusi $y = 1$ induksi tidak akan bekerja. Jalan terbaiknya tetap substitusi $x = 0$.

3. Sekarang mudah dicek saat $A = B = \mathbb{R}$ dengan substitusi $x = 0$. Tetapi fakta lain yang bisa didapat dari soal ini adalah $f$ **bijektif**. Membuktikan injektifnya dengan cara jika $f(a) = f(b)$ maka $f(a) + b = f(a + b) = f(b) + a$ sehingga $a = b$. Demikian juga jika substitusi $x = 0, y = k - f(0)$ maka $f(k - f(0)) = k$ untuk sebarang $k \in \mathbb{R}$ sehingga $f$ surjektif. Selain itu $f$ juga **naik tegas** karena jika dipilih sebarang $y$ real positif, $x + y > x$ berakibat $f(x + y) = f(x) + y > f(x)$. Meskipun demikian kegunaan fakta tersebut belum tampak signifikan karena soal dapat diselesaikan langsung dengan substitusi. Satu hal lagi yang menarik, jika $x, y$ posisinya ditukar kita akan dapatkan $f(x) + y = f(x + y) = f(y) + x$ sehingga $f(x) - x = f(y) - y$ maka $f(x) - x$ konstan untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Cara ini disebut **menukar variabel**.

Berikut ini soal sederhana terkait persamaan fungsi:

1. Carilah semua fungsi $f$ yang memenuhi $f(f(x) + y) = f(x) + y$ untuk setiap $x, y$ di domainnya dengan domain dan kodomain:

   (a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, atau $\mathbb{Z}$

   (b) $\mathbb{N}$.

Azzam L.H.



2. Carilah semua fungsi $f$ yang memenuhi $f(x + f(y)) = f(x) + y$ untuk setiap $x, y$ di domainnya dengan domain dan kodomain:

   (a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, atau $\mathbb{Z}$

   (b) $\mathbb{N}$.

3. Teliti apakah fungsi pada soal nomor 1 dan 2 injektif, surjektif, atau monoton.

## 3.1 Substitusi

Jika kita mengamati suatu fungsi yang memenuhi persamaan tertentu, sepantasnya kita tertarik untuk melihat efek persamaan yang ada jika dimasukkan suatu input. Sebagai misal jika kita mempunyai fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $f(f(x + y) + f(x - y)) = f(y)$. Beberapa substitusi yang dapat kita lakukan untuk mendapatkan solusi $f$ yang memenuhi adalah sebagai berikut:

1. Substitusi $y = 0$ menghasilkan $f(2f(x)) = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Substitusi $y = x$ yang artinya **membuat nol salah satu ekspresinya** diperoleh $f(f(2x) + f(0)) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demikian juga substitusi $y = -x$ menghasilkan $f(f(0) + f(2x)) = f(-x)$, $\forall -x \in \mathbb{R}$. Akibatnya $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Substitusi $x = 0$ diperoleh $f(f(y) + f(-y)) = f(y) \iff f(0) = f(y)$. Jadi $f$ fungsi konstan. Jangan lupa mengecek kembali ke persamaan awal fungsi konstan apa saja yang memenuhi.

Contoh lain dari fungsi yang dapat dicari menggunakan substitusi adalah $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(f(x + y)) = x + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Untuk mendapatkannya dilakukan substitusi antara lain:

1. Subtitusi $x = 0$ yang menghasilkan $f(f(y)) = f(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

2. Dari hasil sebelumnya $f(f(x + y)) = f(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Alhasil kita punya $f(x + y) = x + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Menjadi cukup mudah bukan?

Contoh lagi fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x + y) + xf(y) = f(xy) + f(x) + y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Tanpa menggunakan substitusi standar, akan kita coba adalah **menghilangkan ekspresi di masing-masing ruas**. Caranya adalah dengan memilih yang akan kita hilangkan. Misalkan akan kita hilangkan ekspresi $f(x + y)$ dan $f(xy)$. Maka substitusi yang kita lakukan harus mengakibatkan $x + y = xy$ yaitu $y = \frac{x}{x-1}$ dengan $x \neq 1$. Dihasilkan

$$xf\left(\frac{x}{x-1}\right) = f(x) + \frac{x}{x-1}$$

Pada persamaan terakhir dapat disubstitusikan $x = \frac{y}{y-1}$ karena $x \neq 1$. Akan diperoleh

$$\left(\frac{y}{y-1}\right) f(y) = f\left(\frac{y}{y-1}\right) + y$$

Karena $x = \frac{y}{y-1} \iff y = \frac{x}{x-1}$ maka jika $x \neq 1$ sebarang bilangan real berakibat $y$ juga dapat mewakili semua bilangan real selain 1. Silakan dicek. Ya selanjutnya $y$ diganti dengan $x$ dan kalikan kedua ruas persamaan kedua dengan $x$ kemudian jumlahkan kedua persamaan. Kita akan dapatkan $f(x) = x$ untuk setiap $x \neq 1$. Bagaimana dengan $f(1)$? Cukup dengan memanfaatkan $f(2) = 2$ dan substitusi $x = y = 1$ pada persamaan awal.

Contoh terakhir adalah fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(f(x + y) + f(x - y)) = x^2 f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Seperti soal-soal sebelumnya, kita lakukan substitusi antara lain:

Azzam L.H.



1. Substitusi $x = y = 0$ diperoleh $f(2f(0)) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Substitusi $y = 0$ diperoleh $f(2f(x)) = x^2 f(0)$. $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Substitusi $x = 2f(0)$ pada persamaan sebelum diperoleh $f(2f(2f(0))) = 4f(0)^3$. Padahal $f(2f(2f(0))) = f(0)$ jika dalam dihitung dulu. Kita dapatkan $f(0) = 0$, $f(0) = \frac{1}{2}$, atau $f(0) = -\frac{1}{2}$. Seolah-olah kita **menambahkan** $f$ lagi. Atau bisa dilihat sebagai menarik nilai $f$ pada persamaan $2f(2f(0)) = 0$.

4. Terakhir dengan substitusi $y = x$ dan $y = -x$ kita dapatkan

$$f(f(2x) + f(0)) = x^2 f(x)$$
$$f(f(0) + f(2x)) = x^2 f(-x)$$

yang berarti $f(-x) = f(x)$. Selanjutnya kita dapat **tukar variabel** $x$ **dan** $y$, maksudnya dapat dilakukan manipulasi

$$\begin{aligned} x^2 f(y) &= f(f(x+y) + f(x-y)) \\ &= f(f(x+y) + f(y-x)) \\ &= y^2 f(x) \end{aligned}$$

yang ekuivalen dengan $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(y)}{y^2}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ yang tak nol. Artinya $\frac{f(x)}{x^2}$ konstan untuk setiap $x$ tak nol. Silakan dicek fungsi $f(x) = cx^2$ apa saja yang memenuhi. Jangan lupa mengecek $f(0)$ mana saja yang mungkin.

Berikut ini latihan soal yang dapat dipakai untuk meningkatkan kemampuan substitusi.

1. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(f(y + f(x))) = f(x + y) + f(x) + y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. f(x) tau ada $y \mapsto f(y)$ . $x \leftrightarrow y$

2. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(y) + f(x + f(y)) = y + f(f(x) + f(f(y)))$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. $f(x)=x$ $x \mapsto f(x)$ . $x \leftrightarrow y$

3. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sehingga $f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.

4. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ sehingga $f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

5. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sehingga $f(m + n) + f(mn - 1) = f(m)f(n) + 2$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$.

6. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x - y) = f(x + y)f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. $f(x)=0 \vee 1$.

7. Carilah semua pasangan fungsi $(f, g)$ dengan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x^3 + 2y) + f(x + y) = g(x + 2y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sehingga $f(x^2 + y^2) = f(xy)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$. $f(x)=c$

Azzom L. H.



10. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(f(x)y + x) = xf(y) + f(x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dan persamaan $f(t) = -t$ memiliki tepat satu solusi.
11. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga $f(2x + 3y) = 2f(x) + 3f(y) + 4$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{N}$.
12. Carilah semua bilangan asli $k$ sehingga terdapat fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ sehingga
    (a) $f(1995) = 1996$, dan
    (b) untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $f(ab) = f(a) + f(b) + kf(\text{fpb}(a, b))$

## 3.2 Induksi Matematika

Bahasan berikutnya adalah mengenai sebuah cara untuk menyelesaikan persamaan fungsi dengan domain $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, atau $\mathbb{Q}$. Kita tentu sudah akrab dengan induksi matematika, kali ini dibahas mengenai kegunaan induksi matematika untuk mendapatkan bentuk fungsi dari suatu persamaan fungsi.

Lebih jelasnya kita gunakan contoh fungsi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sehingga $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$. Berikut ini langkah-langkah penyelesaiaannya:

1. Substitusi $x = y = 0$ menghasilkan $f(0) = 0$.
2. Substitusi $x = y = 1$ untuk mendapatkan $f(2) = 2f(1) + 2$. Selanjutnya substitusi $x = 2, y = 1$ didapat $f(3) = 3f(1) + 6$. Substitusi $x = 3, y = 1$ didapat $f(4) = 4f(1) + 12$. Dengan induksi pada $\mathbb{N}$ dapat dibuktikan pola $f(n) = nf(1) + n(n - 1)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
3. Subtitusi $y = -x$ untuk mendapatkan hubungan antara $f(-x)$ dan $f(x)$. Dengan demikian kita dapatkan nilai $f(n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.
4. Terakhir dengan tetapkan suatu $n \in \mathbb{N}$ kemudian dicari kaitan nilai fungsi pada himpunan $\{\frac{p}{n} \mid p = 1, 2, \ldots, p\}$.

Karena ini cukup mudah, kita langsung ke latihan. Berikut latihan soal terkait induksi matematika

✓ 1. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x + y) = f(x)f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$. $\cancel{f(x)=0}$, $f(x) = C^x$

✓ 2. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sehingga $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$. $f(x) = Cx + \frac{(x-1)x}{2}$

3. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sehingga $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$.
4. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sehingga $f(1) = 2$ dan $f(xy) = f(x)f(y)f(x + y) + 1$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$.
5. Carilah semua fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$ $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x)f(y)$.
6. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ sehingga memenuhi:
    (a) $f(x + 1) = f(x) + 1$, dan
    (b) $f(x)^2 = f(x^2)$

Azzam L.H.



untuk setiap $x \in \mathbb{Q}$.

7. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sehingga $f(x^2 + y) = xf(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$.
8. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sehingga $f(x - y) + f(x + y) = 2f(x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$.
9. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga
   (a) $f(xy) = f(x)f(y)$, dan
   (b) $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$

   untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$
10. Carilah semua fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x + f(y)) = y + f(x + 1)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$
11. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga $f(f(m + n) + f(m - n)) = 8m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$dengan $m > n$.
12. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sehingga $f(x + y + z) = f(x) + f(y) + f(z) + 3(x + y)(y + z)(z + x)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

## 3.3 Memanfaatkan Fungsi Cauchy

Sebelumnya telah kita selesaikan persamaan fungsi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sehingga $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$. Pertanyaannya bagaimana jika domain dan kodomainnya diganti $\mathbb{R}$? Apakah induksi masih bisa dipakai mengingat pada bilangan real tidak ada prinsip induksi matematika? Jelas tidak.

Untuk itu kita perlu tambahan fakta. Ada beberapa fakta yang dapat ditambahkan, tetapi intinya berujung pada satu fakta yaitu **untuk setiap bilangan real, terdapat barisan bilangan rasional yang konvergen ke bilangan tersebut**.

Nah sebelum itu, kita perlu mengenal tipe-tipe fungsi apa saja yang dapat diselesaikan menggunakan cara ini. Beberapa diantaranya terangkum oleh Cauchy. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fungsi-fungsi Cauchy adalah fungsi yang memenuhi salah satu dari:

+ kontinu

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Fungsi ini disebut fungsi Cauchy aditif. $f(x) = cx$
2. $f(xy) = f(x)f(y)$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Fungsi ini disebut fungsi Cauchy multiplikatif. $f(x) = x^c$
3. $f(x + y) = f(x)f(y)$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Fungsi ini disebut fungsi Cauchy logaritmik. $f(x) = e^{cx}$
4. $f(xy) = f(x) + f(y)$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Fungsi ini disebut fungsi Cauchy eksponensial. $f(x) = c \log x$

Pertama yang akan kita bahas adalah fungsi Cauchy aditif. Dari latihan sebelumnya kita dapat mencari solusi dari fungsi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sehingga $f(x + y) = f(x) + f(y)$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$ menggunakan induksi matematika. Langsung saja, solusi yang akan kita dapatkan berbentuk $f(x) = cx$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dengan $c$ real konstan. Adapun untuk mencari nilai fungsi $f$ pada domain real, kita dapat menambahkan fakta diantaranya:

Azzam L.H.



1. Kontinu di $\mathbb{R}$ artinya kontinu di setiap titik di himpunan bilangan real. Kita tahu bahwa untuk setiap bilangan irasional $y$ terdapat barisan bilangan rasional $a_1, a_2, \ldots$ yang konvergen ke $y$. Karena $f$ kontinu maka

$$\begin{aligned} f(y) &= f\left(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} ca_n \\ &= cy \end{aligned}$$

2. Kontinu di satu titik. Misalkan $f$ kontinu di $t$ maka $\lim_{x\to t} f(x) = f(t)$. Akibatnya untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} f(x-a+a-t+t) \\ &= \lim_{x\to a} f(x-a+t) + \lim_{x\to a} f(a-t) \\ &= f(t) + f(a-t) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

Jadi $a$ kontinu di setiap titik. Sesuai kesimpulan sebelumnya maka $f(x) = cx$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

3. Monoton. Misalkan $f$ monoton naik maka untuk setiap barisan rasional $\{a_n\}$ yang naik dan konvergen ke bilangan irasional $y$ maka $f(a_n) \le f(y)$. Demikian juga untuk setiap barisan rasional $\{b_n\}$ yang turun dan konvergen ke bilangan irasional $y$ maka $f(y) \le f(b_n)$. Akibatnya

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le f(y) &\le \lim_{n\to\infty} f(b_n) \\ \lim_{n\to\infty} ca_n \le f(y) &\le \lim_{n\to\infty} cb_n \\ cy \le f(y) &\le cy \end{aligned}$$

Tentunya $f(y) = y$.

Berikut ini beberapa permasalahan terkait fungsi Cauchy

✓ 1. Carilah semua fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. $f(x) = cx\ {}^a\log|x|$ . $y \mapsto x$ . $x \mapsto -x$ .

✓ 2. Jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan solusi dari persamaan fungsi $f(x+y) = f(x)f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ atau $f(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. obvious

✓ 3. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x+y) = f(x) + f(y) + \lambda f(x)f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $\lambda$ suatu konstanta real. $f(x)=0\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . $f(x) = cx$ , $\lambda = 0$. kali $\lambda$ dikedua ruas $f(x) = \frac{a^x - 1}{\lambda}$ .

✓ 4. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x+y) = a^{xy}f(x)f(y)$untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $a$ suatu konstanta real. $f(x) = c^x a^{\frac{x^2}{2}}$ $xy = \frac{1}{2}((x+y)^2 - x^2 - y^2)$

5. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

6. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x) + (y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Azzam L.H.



7. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $[f(x)+f(y)][f(u)+f(v)] = f(xu-yv)+f(xv+yu)$ untuk setiap $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

8. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dan $f(xy) = f(x)f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$

9.

10. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

## 3.4 Memanfaatkan Injektif dan Surjektif

Pad awal bab ini kita telah mempelajari klasifikasi fungsi termasuk sifat injektif dan surjektif suatu fungsi. Kali ini kita coba memanfaatkan sifat tesebut untuk menyelesaikan persamaan fungsi. Dimulai dari satu contoh fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x) + f(x + f(y)) = 2x + y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Langkah awal kita untuk menyelesaikan persamaan fungsi ini masih menggunakan substitusi. Berikut dua diantara beberapa cara yang bisa dimanfaatkan:

1. Substitusi $x = y = 0$ untuk mendapatkan $f(0) + f(f(0)) = 0$. Kemudian substitusi $x = f(0), y = -2f(0)$ untuk mendapatkan $f(f(0)) + f(f(0) + f(-2f(0))) = 0$. Apa yang menarik dari kedua substitusi ini? Poin utamanya adalah mendapatkan bentuk $f(0) = f(f(0) + f(-2f(0)))$. Bentuk $f(a) = f(b)$ berguna jika kita memiliki pernyataan $f(a) = f(b) \iff a = b$. Inilah sifat injektif. Jika fungsi tersebut injektif maka $0 = f(0) + f(-2f(0)) \iff -f(0) = f(-2f(0)) \iff f(f(0)) = f(-2f(0))$. Sekali lagi karena injektif maka $f(0) = -2f(0) \iff f(0) = 0$. Setelah mendapatkan $f(0) = 0$ maka substitusi $y = 0$ menghasilkan $f(x) = x$.

   Untuk membuktikan injektifnya andaikan kita punya $f(x) = f(y)$

2. Jika kita substitusi $x = 0$ dan $y = z + f(0)$ untuk sebarang bilangan real yang tetap, kita akan dapatkan $f(f(z + f(0))) = z$. **Maknanya untuk sebarang $z \in \mathbb{R}$ kita selalu memiliki pra peta**. Sifat ini yang kita sebut surjektif. Dari situ kita dapatkan selalu ada $a \in \mathbb{R}$ sehingga $f(a) = 0$. Kemudian substitusikan $y = a$ didapat $f(x) = x + \frac{a}{2}$. Substitusikan ke persamaan awal, kita akan dapatkan $a = 0$. Selesai.

Soal berikutnya adalah mencari fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga

Berikut ini soal yang dapat diselesaikan menggunakan fakta bahwa fungsi tersebut injektif maupun surjektif.

1. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(xf(x) + f(y)) = f(x^2) + y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Carilah semua fungsi $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sehingga $f(x + g(y)) = g(x) + 2y + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$.

Azzam L.H.



6. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x^2 - f(y)^2) = xf(x) - y^2$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Carilah semua fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $g$ bijektif dan $f(g(x) + y) = g(f(y) + x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x + y^2 + z) = f(f(x)) + yf(x) + f(z)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$. tuker x dan y . $f(x)=0$ (lihat f konstan dulu)

10. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x + y + f(y)) = f(f(x)) + 2y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. tuker x dan y , bijektif ; $f(x)=x+k$

26 September 2018

# KOMBINATORIKA LANJUTAN

## A. ATURAN PENJUMLAHAN

Misalkan terdapat $n_1$ cara bagi kejadian $E_1$ terjadi, $n_2$ cara bagi kejadian $E_2$ terjadi, ..., $n_k$ cara bagi kejadian $E_k$ terjadi dengan $k \geq 1$. Jika $E_i \neq E_j = \emptyset$ untuk $i, j = 1, \dots, k, \quad i \neq j$ maka banyak cara kejadian $E_1, E_2, \dots$, atau $E_k$ terjadi adalah

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Misalkan $A_1, A_2, \dots, A_k$ suatu $k$ himpunan berhingga dimana $k \geq 1$. Jika $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i, j = 1, \dots, k, \quad i \neq j$ maka

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

√1. Dari kota P ke kota Q dapat ditempuh dengan jalur darat, air dan udara. Misalkan terdapat 3 jalur darat, 2 jalur air dan 4 jalur udara. Tentukan banyak cara bepergian dari kota P ke kota Q.

√2. Carilah banyaknya pasangan bilangan bulat $(x, y)$ sehingga $x^2 + y^2 \leq 5$.

## B. ATURAN PERKALIAN

Misalkan kejadian $E$ dapat didekomposisikan menjadi $r$ buah kejadian terurut $E_1, E_2, \dots, E_r$ dan terdapat $n_1$ cara bagi kejadian $E_1$ terjadi, $n_2$ cara bagi kejadian $E_2$ terjadi, ..., $n_r$ cara bagi kejadian $E_r$ terjadi dengan $r \geq 1$. Banyak cara dari munculnya kejadian $E$ adalah

$$n_1 n_2 \cdots n_r = \prod_{i=1}^{r} n_i.$$

Misalkan $\prod_{i=1}^{r} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r = \{(a_1, a_2, \dots, a_r) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots r\}$ menyatakan hasil kali cartesius dari himpunan-himpunan berhingga $A_1, A_2, \dots, A_r$. Diperoleh

$$\left|\prod_{i=1}^{r} A_i\right| = |A_1||A_2| \cdots |A_r| = \prod_{i=1}^{r} |A_i|.$$

√3. Untuk bepergian dari kota $A$ ke kota $D$ haruslah melewati kota $B$ dan $C$. Jika terdapat 2 jalur dari kota $A$ ke kota $B$, 3 jalur dari $B$ ke $C$, dan 4 jalur dari $C$ ke $D$, tentukan banyak cara bepergian dari $A$ ke $D$.

Suatu barisan bilangan $a_1 a_2 \dots a_n$ dinamakan barisan $k$-ary untuk suatu $k, n \in \mathbb{N}$, jika $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Panjang dari barisan $a_1 a_2 \dots a_n$ adalah $n$, yakni banyaknya suku yang terdapat pada barisan. Untuk $k = 2, 3, 4$, biasanya barisan $k$-ary masing-masing dikenal sebagai barisan *binary, ternary,* dan *quaternary*. Contoh, himpunan $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ merupakan himpunan dari semua barisan binary dengan panjang 3.

√4. Tentukan banyaknya barisan $k$-ary berbeda dengan panjang $n$.

√5. Carilah banyaknya pembagi positif dari 6000 yang merupakan kelipatan 30.

√6. Misalkan $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ dan $S = \{(a, b, c) | a, b, c \in X, \ a < b, \ a < c\}$. Tentukan $|S|$.

## C. PERMUTASI

djdarmajid@gmail.com

Misalkan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ adalah himpunan dengan $n$ objek. Untuk $0 \le r \le n$, suatu $r$-permutasi dari $A$ adalah suatu cara menyusun sembarang $r$-objek dari $A$ dalam suatu baris.
Jika $r = n$, suatu $n$-permutasi dari $A$ cukup disebut permutasi dari $A$. Notasi $P_r^n$ menyatakan banyaknya $r$-permutasi dari $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

7. Tentukan banyak kata yang terdiri atas 5 huruf jika huruf awal dan akhir merupakan dua vokal berbeda dan tiga huruf sisanya merupakan konsonan berbeda.
8. Dalam berapa cara 7 pria dan 3 wanita duduk pada 10 kursi sebaris dengan ketentuan
   a. ketiga wanita berkelompok?
   b. ujung-ujung kursi ditempati oleh pria dan tidak ada dua wanita berdekatan?
9. Tentukan banyak bilangan genap dengan digit-digit berbeda diantara 20000 dan 70000.
10. Misalkan $S$ adalah himpunan dari semua bilangan asli yang digit-digitnya diambil dari $\{1,3,5,7\}$ sehingga tidak ada digit yang diulang. Tentukan
    a. $|S|$
    b. $\sum_{n \in S} n$. consider 4 digit number from 1, 3, 5, 7.
    Take the sum with the number of appearance.
    (1, 10, 100, 1000) berapa kali, dihitung.

## D. PERMUTASI SIKLIS

Misalkan $A$ suatu himpunan dengan $n$ objek. Untuk $0 \le r \le n$, suatu permutasi $r$-siklis dari $A$ adalah suatu permutasi siklis dari sembarang $r$ objek berbeda yang diambil dari $A$. Misalkan $Q_r^n$ menyatakan banyaknya permutasi $r$-siklis dari $A$. Diperoleh,

$$Q_r^n = \frac{P_r^n}{r}.$$

Khususnya,

$$Q_n^n = \frac{P_n^n}{n} = (n-1)!.$$

11. Tentukan banyak cara mengatur tempat duduk mengelilingi sebuah meja dari $n$ pasangan suami istri jika
    a. pria dan wanita berselang-seling? $(n-1)! \cdot n!$
    b. setiap wanita duduk bersebelahan dengan suaminya? $2^n (n-1)!$

## E. PRINSIP KOMPLEMEN

Jika $A$ suatu himpunan bagian dari himpunan $U$ maka $|U \backslash A| = |U| - |A|$.

12. Dalam berapa cara 5 pria dan 3 duduk mengelilingi sebuah meja jika
    a. tidak ada aturan?
    b. pria bernama Adi dan wanita bernama Ani tidak boleh berdekatan?
    c. tidak ada wanita yang saling berdekatan?

## F. KOMBINASI

Misalkan $A$ suatu himpunan beranggotakan $n$ objek. Suatu kombinasi dari $A$ adalah suatu himpunan bagian dari $A$. Lebih lanjut, suatu $r$-kombinasi dari $A$ adalah suatu himpunan bagian dari $A$ yang beranggotakan $r$ elemen. Notasi $\binom{n}{r}$ menyatakan banyaknya himpunan bagian dengan $r$ elemen dari himpunan $A$ dengan $n$ elemen.

$$\binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

13. Tentukan banyaknya barisan binary dengan panjang 7 yang mempunyai tepat tiga buah angka 0.

14. Dalam berapa banyak cara membentuk panitia beranggotakan 5 orang yang dipilih dari 4 guru dan 7 siswa jika
    a. tidak ada batasan?
    b. panitia tersebut harus memuat tepat 2 guru?
    c. panitia tersebut harus memuat paling sedikit 2 guru?
    d. seorang guru tertentu dan seorang siswa tertentu tidak boleh bersamaan.
15. Dalam suatu kelas terdapat $2n$ siswa. Ibu guru ingin membagi mereke dalam $n$ kelompok yang masing-masing beranggotakan 2 siswa. Tentukan banyak cara yang dapat dilakukan Ibu guru.
16. Misalkan $n$ dan $k$ keduanya bilangan asli dan $S$ suatu himpunan dari $n$ titik pada bidang datar sehingga tidak ada tiga titik segaris yang segaris dan untuk sembarant titik $P \in S$, terdapat paling sedikit $k$ buah titik di $S$ yang berjarak sama dari $P$. Buktikan bahwa $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.
17. Jika diharuskan paling sedikit ada satu orang dalam setiap meja, dalam berapa cara 6 orang duduk
    a. mengelilingi 2 meja (meja tidak dibedakan)?
    b. mengelilingi 3 meja (meja tidak dibedakan)?

Diberikan dua bilangan bulat $r, n$ dengan $0 \le r \le n$. Misalkan $s(r,n)$ menyatakan banyak-nya cara menyusun $r$ objek berbeda mengelilingi $n$ lingkaran (tidak dibedakan) sehingga setiap lingkaran memuat paling sedikit satu objek. Bilangan $s(r,n)$ dinamakan *bilangan Stirling bentuk pertama.* Sebagai contoh $s(6,2) = 274$ dan $s(6,3) = 225$,

$$s(r,0) = 0 \quad \text{jika } r \ge 1,$$
$$s(r,r) = 1 \quad \text{jika } r \ge 0,$$
$$s(r,1) = (r-1)! \quad \text{untuk } r \ge 2,$$
$$s(r,r-1) = \binom{r}{2} \quad \text{untuk } r \ge 2.$$

O O . . O

18. Buktikan bahwa untuk bilangan asli $r$ dan $n$ dengan $n < r$ berlaku
$$s(r,n) = s(r-1,n-1) + (r-1)s(r-1,n).$$

## G. PRINSIP INJEKSI DAN BIJEKSI

Misalkan $A$ dan $B$ dua himpunan berhingga. Fungsi $f: A \to B$ dikatakan *injektif* (satu-satu) jika $\forall a_1, a_2 \in A$ dengan $f(a_1) = f(a_2)$ mengakibatkan $a_1 = a_2$. Fungsi $f: A \to B$ dikatakan *surjektif* (pada/*onto*) jika $\forall b \in B, \exists a \in A$ sehingga $f(a) = b$. Fungsi $f: A \to B$ dikatakan *bijektif* jika $f$ injektif dan surjektif.

Jika ada injeksi dari $A$ ke $B$ maka $|A| \le |B|$.
Jika ada bijeksi dari $A$ ke $B$ maka $|A| = |B|$.

Misalkan $X$ suatu himpunan. Himpunan kuasa dari $X$, dinotasikan dengan $\mathcal{P}(X)$, adalah himpunan dari semua himpunan bagian dari $X$. Sebagai contoh, misalkan $X = \{1,2\}$. Diperoleh, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$.

19. Buktikan bahwa jika $|X| = n$ maka $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ untuk setiap bilangan asli $n$.
20. Misalkan $X = \{1,2,\dots,n\}$ untuk suatu bilangan asli $n$. Buktikan bahwa banyaknya $r$-kombinasi dari $X$ yang tidak memuat dua bilangan berurutan adalah $\binom{n-r+1}{r}$ dimana $0 \le r \le n-r+1$.
    Construct : $a_1, a_2+1, a_3+2, \dots, a_r+r-1$ . Choose $a$ : → $a_1 < a_2 < \dots < a_r$
21. Suatu permutasi $x_1 x_2 \dots x_{2n}$ dari himpunan $\{1,2,\dots,2n\}$ untuk suatu bilangan asli $n$ dikatakan *teratur* jika $|x_i - x_{i+1}| = n$ untuk paling sedikit satu $i \in \{1,2,\dots,2n-1\}$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $n$, terdapat lebih banyak permutasi teratur daripada permutasi yang tidak teratur.

## H. PENATAAN DAN PEMILIHAN DENGAN PERULANGAN

Banyaknya $r$-permutasi dari himpunan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dengan $r$ dan $n$ keduanya bilangan asli, dimana perulangan diperbolehkan adalah $n^r$.

22. Misalkan $A = \{a, b, c\}$. Carilah semua 2-permutasi dari $A$ dengan perulangan.
23. Sebuah ubin berbentuk persegi yang dibagi menjadi 4 luasan yang berbeda akan diwarnai dengan 6 warna berbeda untuk masing-masing luasannya. Tentukan banyak pewarnaan yang dapat dilakukan.
24. Tentukan banyak permutasi dari 5 huruf $a, a, a, b, c$.

Pandang suatu koleksi $r$ objek dimana terdapat $r_1$ objek tipe 1, $r_2$ objek tipe 2, … ,$r_n$ objek tipe $n$, dimana $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$. Banyaknya permutasi berbeda dari koleksi tersebut (permutasi dengan unsur yang sama) adalah

$$P(r: r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{r!}{r_1!\, r_2! \cdots r_n!}.$$

Suatu *multiset* adalah koleksi dari objek-objek tetapi anggota-anggotanya tidak harus berbeda. Contoh $M = \{a, b, a, c, b, a\} = \{3 \cdot a, 2 \cdot b, c\}$

Secara umum, multiset

$$M = r_1 \cdot a_1, r_2 \cdot a_2, \dots, r_n \cdot a_n\}$$

dengan $n, r_1 r_2, \dots, r_n$ bilangan bulat tak negatif dan $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah objek-objek berbeda, terdiri atas $r_i$ buah objek $a_i$. Notasi $\infty \cdot a$ menyatakan bahwa $a$ diulang sebanyak tak berhingga kali. Contoh $\{2 \cdot a, \infty \cdot b, 7 \cdot c, 4 \cdot d, \infty \cdot e\}$ menyatakan multiset dimana $b$ dan $e$ masing-masing muncul tak berhingga dan $a, c, d$ masing-masing muncul sebanyak 2,7,4 kali.

Banyaknya $r$-permutasi dari multiset $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ adalah $n^r$.

Misalkan $M = \{r_1 \cdot a_1, r_2 \cdot a_2, \dots, r_n \cdot a_n\}$ dan $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$. Banyaknya permutasi dari $M$ adalah

$$P(r: r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{r!}{r_1!\, r_2! \cdots r_n!}.$$

25. Carilah banyaknya barisan ternary dengan panjang 10 yang mempunyai dua buah 0, tiga buah 1, dan lima buah 2. $\binom{10}{2,3,5}$
26. Carilah banyaknya cara menutupi persegi panjang berukuran1 × 7 dengan blok-blok berukuran $1 \times 1$, $1 \times 2$, dan $1 \times 3$ dimana setiap blok yang ukurannya sama tidak dibedakan. order: 1+1+2+3, 2+2+3, 1+3+3, 1+1+…+1
    $7 = x+2y+3z$.
27. Buktikan bahwa $(4n)!$ merupakan kelipatan $2^{3n}3^n$ untuk setiap bilangan asli $n$. · Legendre (floor). · Induksi $P(k+1) \to P(k)$
28. Suatu restoran menyediakan 3 jenis burger, yakni ayam, ikan dan daging. Sifon ingin memesan 6 burger. Berapa banyak pesanan bebeda yang dapat Sifon lakukan jika diasumsikan bahwa ketersediaan burger untuk tiap jenis selalu terpenuhi. $\binom{6+3-1}{3-1}$

Misalkan $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$. Banyaknya multi-subset dari $M$ beranggotakan $r$ unsur

$$H_r^n = \binom{r+n-1}{r}.$$

## I. DISTRIBUSI

Kita akan menghitung banyak cara mendistribusikan $r$ objek ke dalam $n$ tempat berbeda yang memenuhi kondisi tertentu

Kasus I : Mendistribusikan $r$ objek <u>berbeda</u> ke dalam $n$ kotak <u>berbeda</u>.

a. Jika setiap kotak dapat menampung *paling banyak satu* objek maka banyak cara mendistribusikannya adalah

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = P_r^n.$$

b. Jika setiap kotak dapat menampung berapapun banyak objek maka banyak cara mendistribusikannya adalah
$$n \times n \times \cdots \times n = n^r.$$
c. Asumsikan setiap kotak dapat menampung berapapun banyak objek dan urutan objek dalam setiap kotak diperhitungkan (masalah bendera dan tiang)
$$n(n+1)(n+2)\cdots\big(n+(r-1)\big) = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!}.$$

Kasus II : Mendistribusikan $r$ objek <u>identik</u> ke dalam $n$ kotak <u>berbeda</u>.

a. Asumsikan bahwa setiap kotak memuat paling banyka 1 objek sehingga $r \le n$. Banyak cara mendistribusikannya adalah
$$\binom{n}{r}.$$
b. Asumsikan bahwa setiap kotak dapat menampung berapapun banyak objek banyak cara mendistribusikannya adalah
$$H_r^n = \binom{r+n-1}{r}.$$
c. Asumsikan setiap kotak harus memuat paling sedikit 1 objek sehingga $r \ge n$. Banyak cara mendistribusikannya adalah
$$\binom{(r-n)+n-1}{r-n} = \binom{r-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}.$$

29. Berapa banyak cara menyusun huruf-huruf pada kata VISITING sehingga tidak ada huruf I yang berdekatan
30. Dalam berapa cara mengatur tempat duduk 7 pria dan 3 wanita sehingga ujung-ujung kursi ditempati pria dan tidak ada dua wanita yang berdekatan.
31. Misalkan $X = \{1,2,\dots,n\}$ unstuk suatu bilangan asli $n$. Tentukan banyaknya himpunan bagian dari $X$ yang memuat $r$ unsur sehingga tidak ada dua bilangan yang berurutan.

Construct: $a_1, a_2+2, a_3+4, \dots, a_r+2(r-1)$ , $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \le a_r$ (no 20)

Bilangan *Stirling bentuk kedua*, dinotasikan dengan $S(r,n)$, didefinisikan sebagai banyak cara mendistribusikan $r$ objek berbeda ke dalam $n$ kotak berbeda sehingga setiap kotak memuat paling sedikit 1 objek
$$S(0,0) = 1, \qquad \text{dan} \qquad S(r,0) = S(0,n) = 0, \quad \forall r,n \in \mathbb{N},$$
$$S(r,n) > 0 \ \text{ jika } \ r \ge n \ge 1,$$
$$S(r,n) = 0 \ \text{ jika } \ n > r \ge 1,$$
$$S(r,1) = S(r,r) = 1 \ \text{ untuk } r \ge 1.$$
$$S(r,2) = 2^{r-1} - 1,$$
$$S(r,3) = \frac{1}{2}(3^{r-1}+1) - 2^{r-1},$$
$$S(r,r-1) = \binom{r}{2},$$
$$S(r,r-2) = \binom{r}{3} + 3\binom{r}{4}.$$

32. Buktikan bahwa $\forall r,n \in \mathbb{N}$ dengan $r \ge n$, berlaku
$$S(r,n) = S(r-1,n-1) + nS(r-1,n).$$

## J. PARTISI

Misalkan $A = \{1,2,\dots,r\}$. Suatu $n$-partisi adalah koleksi $\{S_1,S_2,\dots,S_n\}$ dari $n$ buah subhimpunan tak kosong dari $A$ sehingga
$$S_i \cap S_j \ne \emptyset \ \text{ untuk } \ i \ne j \ \text{ dan } \ \bigcup_{i=1}^{n} S_i = A.$$
Suatu partisi dari $A$ adalah $n$-partisi dari $A$ untuk suatu $n = 1,2,\dots,r$.

djdarmajid@gmail.com

33. Buktikan bahwa banyaknya partisi dari $\{1,2,\dots,r\}$ adalah

$$\sum_{n=1}^{r} S(r,n).$$

34. Tentukan banyak cara mengatur barisan dari $m$ pria dan $n$ wanita jika
    a. tidak ada aturan tertentu,
    b. tidak ada pria yang berdekatan dengan $m \le n+1$,
    c. sebanyak $n$ wanita mengumpul
    d. seorang pria dan seorang wanita tertentu harus berdekatan
35. Tentukan banyak kata dengan 5 huruf yang diambil dari 10 huruf pertama alpabet
    a. jika huruf dalam kata harus berbeda,
    b. jika $A, B, C, D, E, F$ dapat muncul pada huruf pertama, ketiga, dan kelima.
36. Tentukan banyak cara menyusun 26 huruf alpabet dalam sebuah baris sehingga diantara $x$ dan $y$ terdapat tepat 5 huruf.
37. Untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, hitunglah nilai dari

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!}.$$

38. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, buktikan bahwa $2^n \mid (n+1)(n+2)\cdots(2n)$.

## K. BERPIKIR REKURSIF

Tentukan banyak cara menutupi daerah persegi panjang berukuran $1 \times n$ dengan menggunakan ubin berukuran $1 \times 1$ dan $1 \times 2$ ?

Misalkan $a_n$ menyatakan banyaknya cara menutupi persegi panjang berukuran $1 \times n$ dengan menggunakan ubin berukuran $1 \times 1$ dan $1 \times 2$. Kita memperoleh hasil

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = 2, \qquad \text{dan}$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ \ \text{untu } n \ge 3.$$

Misalkan $\{a_n\}$ suatu barisan, relasi rekursif bagi $\{a_n\}$ adalah suatu persamaan yang mengaitkan suku ke-$n$, yakni $a_n$, dengan suku-suku sebelumnya.

Nilai $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$ pada contoh di atas dinamakan *kondisi inisial (awal)*.
Solusi dari suatu relasi rekursif adalah ekspresi $a_n = f(n)$ dimana $f(n)$ adalah suatu fungsi dalam variabel $n$ yang memenuhi relasi rekursif. Sebagai contoh

$$a_n = n$$

merupakan solusi dari relasi rekursif $a_n = a_{n-1} + 1$ dengan kondisi inisial $a_1 = 1$.

√ 39. Misalkan $n$ cincin yag berbeda diameter luarnya di masukkan ke dalam suatu tiang dengan aturan ukuran terbesar berada di bawah untuk membentuk piramida. Dua tiang lainnya berjarak cukup jauh dari tiang yang ditempati cincin-cincin tersebut. Kita akan memindahkan semua cincin ke tiang sebelahnya sehingga tetap terbentuk piramida. Selama proses pemindahan, kita tidak diizinkan untuk menempatkan cincin dengan ukuran besar di atas cincin ukuran di bawahnya pada tiang manapun. Setiap pemindahan satu cincin ke tiang lainnya dihitung satu pemindahan. Tentukan banyaknya pemindahan terkecil untuk memenuhi tugas tersebut.

$a_n = 2a_{n-1} + 1$

$\frac{1}{D}$ $\frac{1}{M}$ $\frac{1}{J}$

$n-1$ : $D \to M \to J$
$1$ : $D \to J$

40. Misalkan $Q_n$ menyatakan banyaknya menempatkan $n$ benteng yang tidak saling menyerang satu sama lain pada papan catur berukuran $n \times n$ sehingga penataan tersebut simetris terhadap satu garis diagonal. Buktikan bahwa $Q_n = Q_{n-1} + (n-1)Q_{n-2}$.

√ 41. Sebuah koin dilempar $n$ kali. Tentukan peluang muncul dua gambar secara berurutan pada pelemparan tersebut.

$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-2}$ $\qquad P(n) = 1 - \frac{1}{a_n}$

komplemennya

6

A G

G A $\downarrow \frac{1}{2}$

$n-1 : \frac{1}{2}a_{n-1}$

A G
G A $\to \frac{1}{4}$

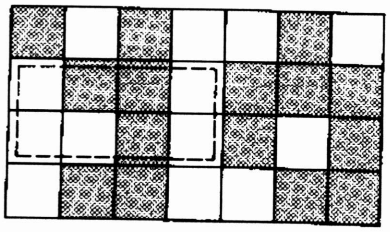
$n-2 : \frac{1}{4}a_{n-2}$

42. Buktikan bahwa sembarang bilangan rasional posistif dapat dituliskan sebagai jumlahan hingga dari kebalikan bilangan asli berbeda. Contoh, $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$.
43. Misalkan $P_n$ menyatakan banyaknya daerah yang terbentuk ketika $n$ garis lurus digambarkan pada bidang datar sehingga tidak ada tiga garis yang konkuren dan tidak ada dua garis yang sejajar. Buktikan bahwa $P_{n+1}=P_n+(n+1)$.
44. Diberikan bilangan real positif $a_1,a_2,\dots,a_n$ dan $A_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$. Buktikan bahwa
$$A_n \geq \sqrt[n]{\frac{A_{n-1}^{n-1}}{a_n}}$$
dimana tanda tanda kesamaan berlaku jika dan hanya jika $A_{n-1}=a_n$.
Lebih jauh, dengan menggunakan hasil tersebut buktikan ketaksamaan AM-GM.

## L. PIGENHOLE PRINCIPLE

Jika sebanyak $kn+1$ objek dengan $k\geq 1$ didistribusikan ke dalam $n$ kotak maka ada satu kotak yang memuat paling sedikit $k+1$ objek.

45. Diberikan suatu himpunan dari $n+1$ bilangan asli yang seluruhnya tidak melebihi $2n$. Buktikan bahwa paling sedikit satu anggota dari himpunan tersebut membagi anggota lainnya.
46. Misalkan $P_1,P_2,P_3,P_4,P_5$ adalah lima titik yang diletakkan dalam sebuah persegi satuan. Buktikan bahwa terdapat dua titik yang berjarak kurang dari $\sqrt{2}/2$.
47. Misalkan setiap petak pada papan catur $4\times 7$ diwarnai hitam atau putih. Sebagai contoh pewarnaan yang terjadi seperti pada gambar di samping. Buktikan bahwa bagaimanapun pewarnaan dilakukan maka pewarnaan tersebut selalu memuat suatu persegi panjang dengan petak pada keempat ujungnya berwarna sama.



48. Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat $a,b,c$ yang tidak ketiganya nol dan nilai mutlak masing-masing bilangan tersebut kurang dari $10^6$ sehingga $|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}$.
49. Misalkan $A\subseteq\{1,2,\dots,99\}$ dimana $|A|=10$. Buktikan bahwa terdapat dua subhimpunan dari $A$ yang saling lepas dimana jumlah unsur-unsur pada masing-masing himpunan sama.
50. Misalkan $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in\mathbb{N}$. Buktikan bahwa untuk sembarang permutasi $b_1b_2b_3b_4b_5$ dari $a_1a_2a_3a_4a_5$, perkalian $(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)(b_4-a_4)(b_5-a_5)$ selalu genap. Paritas .
51. Sepuluh pemain sedang mengikuti turnamen catur dimana setiap pemain bertanding dengan pemain lainnya tepat satu kali. Jika seorang pemain menang maka mendapatkan poin 1, jika kalah dapat poin $-1$, dan jika seri dapat poin 0. Ketika turnamen berakhir, diperoleh fakta bahwa $>70\%$ permainan berakhir dengan seri. Buktikan bahwa terdapat 2 pemain yang memiliki poin total sama.
52. Misalkan $A$ suatu himpunan yang beranggotakan $m$ bilangan asli. Buktikan bahwa terdapat subhimpunan tak kosong $B$ dari $A$ sehingga jumlah anggota-anggota di $B$ habis dibagi oleh $m$. case: residu lengkap dan tidak
53. Diberikan segitiga sama sisi $ABC$ dan $\mathcal{P}$ adalah himpunan dari semua titik yang terletak pada 3 segmen garis $AB,BC,CA$ (termasuk $A,B,C$). Buktikan bahwa untuk setiap partisi dari $\mathcal{P}$ ke dalam 2 subhimpunan saling lepas, paling sedikit satu dari 2 subhimpunan tersebut memuat titik-titik sudut dari suatu segitiga siku-siku
54. Misalkan $A$ suatu himpunan yang beranggotakan 20 bilangan asli berbeda yang diambil dari barisan aritmatik $1,4,7,\dots,100$. Buktikan bahwa terdapat dua anggota dari $A$ yang jumlahnya 104.
55. Misalkan $S$ suatu persegi pada bidang datar dengan panjang 2 cm. Buktikan bahwa diantara 9 titik di $S$ terdapat 3 titik yang merupakan titik sudut segitiga dengan luas $\leq\frac{1}{2}\text{ cm}^2$. extremal

56. Buktikan bahwa jika terdapat $n$ orang pada suatu pesta maka dua dari mereka mengenal orang-orang di pesta tersebut dalam jumlah yang sama.
57. Lima belas kursi ditempatkan melingkari meja bundar dimana terdapat 15 kartu nama dari kelima belas tamu tersebut. Tamu-tamu tersebut duduk pada kursi sehingga tidak seorang pun yang duduk di depan kartu namanya. Buktikan bahwa meja tersebut dapat diputar sehingga terdapat paling sedikit dua orang yang duduk tepat di depan kartu namanya sendiri.
58. Misalkan $x$ suatu bilangan real. Buktikan bahwa diantara bilangan $x, 2x, \dots, (n-1)x$ terdapat satu bilangan yang mempunyai selisih dengan suatu bilangan bulat tidak melebihi $\frac{1}{n}$.
59. Buktikan bahwa diantara 6 orang terdapat tiga orang yang saling kenal atau tiga orang yang saling asing.
60. Tujuh belas orang berkorespondensi melalui surat satu sama lainnya dimana setiap orang mengirim surat kepada 16 orang lainnya. Dalam surat tersebut terdapat 3 topik yang akan didiskusikan. Setiap pasang koresponden sepakat dengan salah satu topik tersebut. Buktikan bahwa terdapat paling sedikit tiga orang yang menuliskan topik yang sama satu sama lainnya.
61. Buktikan bahwa tidak ada 7 bilangan asli kurang dari 25 dimana jumlah setiap subhimpunannya berbeda.

## M. SUSUNAN BILANGAN

62. Bilangan $1,2,\dots,n^2$ ditempatkan pada kotak berukuran $n \times n$ sebagai berikut

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | $2$ | $\cdots$ | $n$ |
| $n+1$ | $n+2$ | $\cdots$ | $2n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $n^2-n+1$ | $n^2-n+2$ | $\cdots$ | $n^2$ |

Diambil sebanyak $n$ bilangan pada kotak tersebut sehingga setiap dua bilangan yang terambil berasal dari baris dan kolom berbeda. Tentukan jumlah dari bilangan-bilangan yang diambil tadi.

63. Sebanyak $mn$ bilangan ditempatkan pada kotak berukuran $m \times n$. Misalkan $x_{ij}$ menyatakan bilangan yang ditempatkan pada baris ke-$i$ kolom ke-$j$. Untuk setiap $1 \le i, j, k \le n$, kesamaan berikut terjadi $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$. Buktikan bahwa terdapat bilangan $t_1, t_2, \dots, t_n$ sehingga $x_{ij} = t_i - t_j$ untuk setiap $1 \le i, j \le n$.
64. Buktikan bahwa diantara sembarang 10 bilangan dari tabel

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 \\ 9 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 8 \\ 8 & 9 & 0 & 1 & \cdots & 7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \end{matrix}$$

yang diambil dari baris dan kolom berbeda, paling sedikit dua bilangan akan sama.

65. Misalkan $a_{ij}$ menyatakan bilangan pada baris ke-$i$ kolom ke-$j$ dari suatu susunan bilangan berukuran $n \times n$. Jumlah dari setiap $n$ bilangan yang diambil dari baris dan kolom berbesa selalu sama. Buktikan bahwa terdapat bilangan $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan $y_1, y_2, \dots, y_n$ sehingga untuk setiap $1 \le i, j \le n$, berlaku$a_{ij} = x_i + y_j$.
66. Dalam tabel bilangan berukuran $n \times n$, setiap susunan bilangan pada baris berbeda (dua baris dikatakan berbeda jika terdapat minimal satu bilangan berbeda). Buktikan bahwa terdapat suatu kolom yang dapat dihapus sehingga baris-baris yang dihasilkan masih tetap berbeda.
67. Bilangan asli dari 1 sampai dengan $n^2$ ditempatkan pada sebuah papan catur berukuran $n \times n$. Buktikan bahwa terdapat dua kotak bertetangga sehingga selisih dari dua bilangan dalam kedua kotak tersebut kurang dari $n+1$.
68. Buktikan bahwa jumlah dari sembarang $n$ bilangan dari tabel

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{array}$$

yang dipilih dari baris dan kolom berbeda tidak kurang dari 1.

## N. PENATAAN URUTAN

69. Diberikan 7 bilangan asli berbeda yang jumlahnya 100, buktikan bahwa tiga diantara berjumlah paling sedikit 50. tinjau 11+12+...+17 = 98. 16+17+18=51. kalo 11 jadi 1, 17 jadi 10 jadi terbukti (contoh)
70. Diberikan $2n + 2$ titik pada bidang datar dimana tidak ada tiga titik segaris, buktikan bahwa dua diantaranya dapat dibentuk garis lurus yang memisah-kan $2n$ menjadi dua kelompok yang masing-masing beranggotakan $n$ titik.
71. Buktikan bahwa digit-digit dari bilangan 6 digit dapat dipermutasi sedemikian sehingga selisih dari jumlah tiga digit pertama dan jumlah tiga digit terakhir paling banyak 9.
72. Buktikan bahwa jika $2n + 1$ bilangan real mempunyai sifat bahwa sembarang jumlahan $n$ diantaranya selalu lebih kecil dari jumlahan $n + 1$ bilangan lainnya maka semua bilangan real tersebut haruslah positif.
73. Diberikan 7 bilangan asli yang tidak melebihi 1706. Buktikan bahwa terdapat tiga diantaranya, sebut saja $a, b, c$ yang memenuhi kondisi $a < b + c < 4a$.
74. Misalkan $a$ adalah bilangan terkecil dan $b$ adalah bilangan terbesar dari $n$ bilangan asli berbeda. Buktikan bahwa KPK dari bilangan-bilangan tersebut lebih besar atau sama dengan $na$ dan FPB dari bilangan-bilangan tersebut kurang dari atau sama dengan $\frac{b}{n}$.
75. Diberikan $2n$ bilangan asli berbeda $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ yang tidak melebihi $n^2$ dengan $n > 2$. Buktikan bahwa terdapat tiga selisih $a_i - a_j$ yang bernilai sama.
76. Diberikan $2n + 3$ titik pada bidang datar dimana tidak ada tiga titik segaris dan tidak ada empat titik yang dilalui lingkaran. Buktikan bahwa terdapat sebuah lingkaran yang melalui tiga titik sehingga terdapat $n$ titik yang terletak di dalam lingkaran.
77. Diberikan $4n$ titik pada bidang datar dimana tidak ada tiga titik segaris. Buktikan bahwa kita dapat membentuk $n$ buah poligon yang tidak saling beririsan dengan titik-titik sudutnya adalah titik-titik tersebut.
78. Diberikan 69 bilangan asli berbeda yang tidak melebihi 100. Buktikan bahwa kita dapat memilih 4 bilangan diantaranya, sebut saja $a, b, c, d$ sehingga $a < b < c$ dan $a + b + c = d$. Apakah pernyataan ini benar untuk 68 bilangan?
79. Buktikan bahwa diantara 25 bilangan positif berbeda, kita dapat memilih dua diantaranya sehingga baik jumlah maupun selisih dari kedua bilangan tersebut tidak ada yang sama dengan salah satu dari 23 bilangan sisanya.
80. Dalam papan catur berukuran $10 \times 10$, diisikan bilangan 1 sampai 100 pada masing-masing kotaknya. Selanjutnya, kita memilih bilangan terbesar ketiga pada masing-masing barisnya. Buktikan bahwa jumlah dari bilangan-bilangan yang dipilih tadi tidak kurang dari jumlah bilangan dari suatu baris tertentu.
81. Diberikan $n$ bilangan asli. Tinjau semua kemungkinan jumlahan yang dibentuk dari satu atau lebih pada bilangan-bilangan tersebut. Buktikan bahwa jumlahan-jumlahan tersebut dapat dipartisi menjadi $n$ kelompok sehingga pada masing-masing kelompok rasio dari bilangan terbesar dan terkecilnya tidak melebihi 2.

AZZAM LABIB HAKIM

# Soal mandiri malam 2 Tahap 1 IMO 2019

Otto Alexander Sutianto

26 September 2018

1. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive integers with sum $2S$, $S \in \mathbb{N}$. Positive integer $k$ is called separator if you can pick $k$ different indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ from set $1, 2, \ldots, n$ such that $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} = S$. Find, in terms of $n$, maximum number of separators.

2. Let $G$ be a graph with $E$ edges, $n$ vertices, and no 4-cycles. Show that $E \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$.

3. Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be $r$-element subsets of a set $X$. Suppose that $|A_i \cap A_j| \leq k$ for all $1 \leq i < j \leq n$. Show that $|X| \geq \frac{nr^2}{r+(n-1)k}$

4. Suppose that in a certain society, each pair of persons can be classified as either amicable or hostile. We shall say that each member of an amicable pair is a friend of the other and each member of a hostile pair is a foe of the other. Suppose that the society has $n$ people and $q$ amicable pairs, and that for every set of three persons, at least one pair is hostile. Prove that there is at least one member of the society whose foes include $q(1 - \frac{4q}{n^2})$ or fewer amicable pairs.

5. Let $ABC$ be a triangle. Let $(O), (I), (I_A)$ be the circum, in, and $A$-excircle. Let $E$ and $F$ be the intersection of $BI$ and $AC$, $CI$ and $AB$ respectively. Let $M$ be the intersection of ray $FE$ and $(O)$. $P$ be the intersection of $(O)$ and $(I_A)(PB < PC)$. Prove $MP$ tangent to $(I_A)$ at $P$.

6. Let $\triangle ABC$ be an acute-angled triangle with $AB < AC$. Let $M$ and $N$ be the midpoints of $AB$ and $AC$, respectively; let $AD$ be an altitude in this triangle. A point $K$ is chosen on the segment $MN$ so that $BK = CK$. The ray $KD$ meets the circumcircle $\Omega$ of $ABC$ at $Q$. Prove that $C, N, K, Q$ are concyclic.

7. $\triangle ABC$, circumcircle $(O)$ with centre $O$. $E, F$ are the midpoint of segments $AB, AC$. $EF \cap AO = M$. $K \in AC$ such as $MK \perp AO$. Denote that $I$ is the circumcentre of $\triangle EFK$. Prove that $IO \perp OA$.

Azzam Labib Hakim Dj Ramis, 27 Sept

# PIGENHOLE PRINCIPLE AND ITS APLICATION

1. (Russia 2000) A $100 \times 100$ board is divided into unit squares. These squares are colored with 4 colors so that every row and every column has 25 squares of each color. Prove that there are 2 rows and 2 columns such that their 4 intersections are painted with different colors.

2. Find 12 points in the plane with integer coordinates such that thecenter of gravity of any 4 of them does not have integer coordinates.

3. A $100 \times 100$ board is divided into unit squares. In every square thereis an arrow that points up, down, left or right. The board square is surrounded by a wall, except for the right side of the top right corner square. An insect is placed in one of the squares. Each second, the insect moves one unit in the direction of the arrow in its square. When the insect moves, the arrow of the square it was in moves 90 degrees clockwise. If the indicated movement cannot be done, the insect does not move that second, but the arrow in its squares does move. Is it possible that the insect never leaves the board?

4. Given any two positive integers $a$ and $b$, find a sequence of $ab$ different real numbers with no increasing subsequences of length $a+1$ or more and no decreasing subsequences of length $b+1$ or more.

5. (OIM 1998) In a meeting there are representatives of $n$ countries ($n \geq 2$) sitting at a round table. It is known that for any two representatives of the same country their neighbors to their right cannot belong to the same country. Find the largest possible number of representatives in the meeting.

√ 6. (OMM 2003) There are $n$ boys and $n$ girls in a party. Each boy likes $a$ girls and each girl likes $b$ boys. Find all pairs $(a, b)$ such that there must always be a boy and a girl that like each other. $a+b > n$

7. (Vietnam 2007) Given a regular 2007-gon, find the smallest positive integer $k$ such that among any $k$ vertices of the polygon there are 4 with the property that the convex quadrilateral they form shares 3 sides with the polygon.

√ 8. (Cono Sur Olympiad 2007) Consider a $2007 \times 2007$ board. Some squares of the board are painted. The board is called "charrúa" if no row is completely painted and no column is completely painted.
   a. What is the maximum number $k$ of painted squares in a charrúa board? $2006 \times 2007$
   b. For such $k$, find the number of different charrúa boards. $2007!$

9. (OMM 1998) The sides and diagonals of a regular octagon are colored black or red. Show that there are at least 7 monochromatic triangles with vertices in the vertices of the octagon.

10. (Peru 2009) In the congress, three disjoint committees of 100 congressmen each are formed. Every pair of congressmen may know each other or not. Show that there are two congressmen from different committees such that in the third committee there are 17 congressmen that know both of them or there are 17 congressmen that know neither of them.

11. (Romania 2004) Let $n \geq 2$ be an integer and $X$ a set of n elements. Let $A_1, A2, \ldots, A_{101}$ be subsets of $X$ such that the union of any 50 of them has more than $\frac{50n}{51}$ elements. Show that there are three of the $A_j$'s such that the intersection of any two is not empty.

12. Let $G$ be the set of points $(x, y)$ in the plane such that $x$ and $y$ are integers in the range $1 \leq x, y \leq 2011$. A subset $S$ of $G$ is said to be *parallelogram-free* if there is no proper parallelogram with all its vertices in $S$. Determine the largest possible size of a parallelogram-free subset of $G$.

13. (Italy 2009) Let $n$ be a positive integer. We say that $k$ is $n$-square if for every coloring of the squares of a $2n \times k$ board with $n$ colors there are two rows and two columns such that the 4 intersections they make are of the same color. Find the minimum $k$ that is $n$-square.

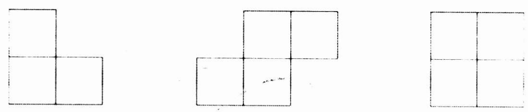
14. (Romania 2009) Let $n$ be a positive integer. A board of size $N = n^2 + 1$ is divided into unit squares with $N$ rows and $N$ columns. The $N^2$ squares are colored with one of $N$ colors in such a way that each color was used $N$ times. Show that, regardless of the coloring, there is a row or a column with at least $n + 1$ different colors.

## INVARIANT

√ 1. (IMO 2011) Let $S$ be a finite set of at least two points in the plane. Assume that no three points of $S$ are collinear. A *windmill* is a process that starts with a line $l$ going through a single point $P \in S$. The line rotates clockwise about the *pivot* $P$ until the first time that the line meets some other point belonging to $S$. This point, $Q$, takes over as the new pivot, and the line now rotates clockwise about $Q$, until it meets a point of $S$. This process continues indefinitely. Show that we can choose a point $P$ in $S$ and a line $l$ going through $P$ such that the resulting windmill uses each point of $S$ infinitely many times. invariant banyaknya titik.

2. (IMO 1986) We assign an integer to each vertex of a regular pentagon, so that the sum of all is positive. If three consecutive vertices have assigned numbers $x, y, z$, respectively, and $y < 0$, we are allowed to change the numbers $(x, y, z)$ to $(x + y, -y, z + y)$. This transformation is made as long as one of the numbers is negative. Decide if this process always comes to an end.

3. (IMO shortlist 2002) A $(2n - 1) \times (2n - 1)$ board is going to be tiled with pieces of the type as shown in figure below. Prove that at least $4n - 1$ of the first type will be used.



4. (Bulgaria 2001) $A$ and $B$ play by turns to write ones and zeros in a list, from left to right. The game ends when each has written 2001 numbers. When the game ends the sequence of numbers is seen as the expansion of a number in base 2. $A$ wins if that number can be written as the sum of two perfect squares and $B$ wins otherwise. Prove that $B$ has a winning strategy.

5. (OIM shortlist 2009) On an $8 \times 8$ board there is a lamp in every square. Initially every lamp is turned off. In a move we choose a lamp and a direction (it can be the vertical direction or the horizontal one) and change the state of that lamp and all its neighbors in that direction. After a certain number of moves, there is exactly one lamp turned on. Find all the possible positions of that lamp.

6. (OIM 2004) We are given a $1001 \times 1001$ board. We want to color some squares so that the following two conditions are met:
   - If two squares share a side, at least one of them is colored.
   - If 6 squares are consecutive (horizontally or vertically), then among them at least two consecutive squares are colored.

   Find the minimum number of squares that must be colored under these two rules.

7. (Germany 2009) On a table there are 100 coins. $A$ and $B$ are going to remove coins from the table by turns. In each turn they can remove 2, 5 or 6 coins. The first one that cannot make a move loses. Determine who has a winning strategy if $A$ plays first.

8. (Middle European Mathematical Olympiad 2010) All positive divisors of a positive integer $N$ are written on a blackboard. Two players $A$ and $B$ play the following game, taking alternate moves. In the first move, the player $A$ erases $N$. If the last erased number is $d$, then the next player erases either a divisor of $d$ or a multiple of $d$. The player who cannot make a move loses. Determine all numbers $N$ for which $A$ has a winning strategy.

9. (APMO 2007) In each square of a $5 \times 5$ board there is a lamp turned off. If we touch a lamp then that lamp and the ones in neighboring squares change their states. After a certain number of moves there is exactly one lamp turned on. Find all squares in which that lamp can be. (Note: Neighboring squares are squares that share a side.)

10. (Japan 2011) Let $N$ be a positive integer. $N$ squares are lined up contiguously from left to right. Students $A$ and $B$ play a game according to the following rules:
    - To start off, $A$ will write one non-negative integer into each of the $N$ squares.
    - The game ends when the following condition is achieved: for every $i$ satisfying $1 \leq i \leq N - 1$, the number in the $i$-th square from the left is less than or equal to the number in the $(i + 1)$-th square from the left.

    The game continues as long as this condition is not achieved by repeating the following procedure:

    a. $A$ designates one non-negative integer.
    b. $B$ chooses one of the $N$ squares and replaces the number in that square by the number designated by $A$ in (a).

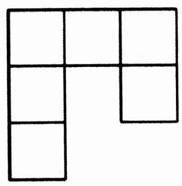
Is it possible for $B$ to force the game to end regardless of how $A$ plays?

11. (USAMO 1994) We are given a regular 99-gon with sides painted in red, blue or yellow. Initially they are painted in the following way: red, blue, red, blue, . . . , red, blue, yellow. In a step we can change the color of any side as long as we do not generate two adjacent sides of the same color. Is it possible to reach a coloring red, blue, red, blue, . . . , red, yellow, blue after some finite number of steps?
Note: The two colorings are considered in clockwise order.

12. (Romania 2007) In an $n \times n$ board the squares are painted black or white. Three of the squares in the corners are white and one is black. Show that there is a $2 \times 2$ square with an odd number of white unit squares. invarian paritas penjumlahan jika putih=1, hitam=0

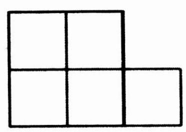
13. (Argentina 2009) Consider an $a \times b$ board, with $a$ and $b$ integers greater than or equal to two. Initially all the squares are painted white and black as a chessboard. The allowed operation is to choose two unit squares that share one side and recolor them in the following way: Any white square is painted black, any black square is painted green and any green square is painted white. Determine for which values of $a$ and $b$ it is possible, using this operation several times, to get all the original black squares to be painted white and all the original white squares to be painted black. (Note: Initially there are no green squares, but these appear after the first time we use the operation.)

14. (USAMO 1999) On a $1 \times 2000$ board, $A$ and $B$ play by turns to write $S$ or $O$ in each square. The first one to write the word $SOS$ in three consecutive squares wins. If $A$ plays first, show that $B$ has a winning strategy.



15. (IMO 2004) Find all pairs $(m, n)$ such that an $m \times n$ board can be tiled with the following tile. (Note: The tile can be rotated and flipped upside down.)

16. (IMO shortlist 1999) Show that if a $5 \times n$ board can be tiled with pieces as in the following figure, then $n$ is even. Show that the number of ways to tile a $5 \times 2k$ board with these tiles is at least $2 \cdot 3^{k-1}$.



Azzam Labib Hakim

# SESI MANDIRI

PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019

@muhammadfaikar

27 September 2018

**Latihan Soal.**

√

1. Find all solutions in set of positive integers of the equation

$$x^2 - y^2 = 2xyz.$$ $x, y, z \in \emptyset$  $y \mid x$  $\cancel{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} = 2h \notin \mathbb{Z}^+$

FPB $(x,y) = d$.

√

2. For $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ such that $x + y + z = 3$, prove that

$$\frac{x^2}{x+2y^3} + \frac{y^2}{y+2z^3} + \frac{z^2}{z+2x^3} \geq 1$$ AM-GM ajaib

3. Let $a, b, c$ be pairwise relatively prime positive integers. Show that $2abc - ab - bc - ca$ is the largest integer that cannot be expressed in the form $xbc + yca + zab$, where $x, y, z$ are nonnegative integers.

√

4. For any integer $x$, set $n_x = 101x - 100 \cdot 2^x$. Show that for $0 \leq a, b, c, d \leq 99$, $n_a + n_b \equiv n_c + n_d \mod 10100$ implies $\{a, b\} = \{c, d\}$. $2^a + 2^b \equiv 2^c + 2^d \mod 101$ representasi binernya unik.

√

5. In triangle $ABC$, the angle bisector at vertex $C$ intersect the cicumcircle and the perpendicular bisectors of sides $BC$ and $CA$ at points $R$, $P$, and $Q$ respectively. The midpoints of $BC$ and $CA$ are $S$ and $T$, respectively. Prove that triangles $RQT$ and $RPS$ have the same area. Trigon $RC = PC + QC$, pake ptolemy trigon.

√

6. Find all real numbers $r$ for which there is at least one triple $(x, y, z)$ of nonzero real numbers such that $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2 = rxyz$. $r \leq -1$, $r \geq 3$

√

7. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y)$$

√

for all $x, y$. $f(x) = kx$, $\forall x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{R}$. colok $y=1$. $\wedge f(x) = 0$.

8. Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers defined by $a_1 = t$ and

$$a_{n+1} = 4a_n - 4a_n^2$$

for $n \geq 1$. For how many distinct real number $t$ do we have $a_{2019} = 0$?

prove $t \in [0,1]$. $t = \sin^2\theta$. $2^{2017} + 1$

Azzam Labib Hakim 28 Sept.

# Pengantar ke Topik Ketaksamaan

Hery Susanto
Jurusan Matematika FMIPA UM
Email: susanto.um@gmail.com

Teori ketaksamaan didasarkan kepada sifat (aksioma) urutan bilangan real. Menurut aksioma ini, diasumsikan terdapat himpunan $P$ yang merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan real yang memenuhi tiga sifat berikut:

(1) Untuk bilangan real $x$ sebarang, berlaku salah satu dari: (i) $x = 0$, atau (ii) $x \in P$, atau (iii) $-x \in P$.
(2) Jika $x, y \in P$, maka $x + y \in P$.
(3) Jika $x, y \in P$, maka $xy \in P$.

Sifat (1), (2), dan (3) di atas berturut-turut disebut *trikotomi*, *ketertutupan operasi tambah*, dan *ketertutupan operasi kali*. Himpunan $P$ di atas disebut *himpunan bilangan real positif*. Selanjutnya digunakan notasi $x > 0$ jika $x \in P$. Dengan demikian ketiga sifat di atas dapat ditulis ulang sebagai berikut.

(1′) Untuk bilangan real $x$ sebarang, berlaku salah satu dari: (i) $x = 0$, atau (ii) $x > 0$, atau $-x > 0$.
(2′) Jika $x > 0$ dan $y > 0$, maka $x + y > 0$.
(3′) Jika $x > 0$ dan $y > 0$, maka $xy > 0$.

Pada pembahasan berikutnya, untuk himpunan bilangan real dan himpunan bilangan real positif berturut-turut digunakan notasi $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^+$.

Berikut didefinisikan relasi "lebih besar dari" dan relasi "lebih kecil dari" untuk dua bilangan real. $x$ dikatakan *lebih besar dari* $y$, dinotasikan $x > y$, jika $x - y > 0$. $x$ dikatakan *lebih kecil dari* $y$, dinotasikan $x < y$, jika $y - x > 0$. Dapat ditunjukkan bahwa $x > y$ ekivalen dengan $y < x$. Notasi $x \geq y$, dibaca $x$ *lebih besar dari atau sama dengan* $y$, digunakan jika $x > y$ atau $x = y$.

**Contoh 1.** Jika $a < b$ dan $c$ bilangan real sebarang, maka $a + c < b + c$.

**Bukti:** Karena $a < b$, maka $b - a > 0$. Perhatikan bahwa $(b + c) - (a + c) = b - a > 0$. Jadi $a + c < b + c$.

**Contoh 2.** Jika $a < b$ dan $c$ bilangan real positif sebarang, maka $ac < bc$.

**Bukti:** Karena $a < b$, maka $b - c > 0$. Perhatikan bahwa $bc - ac = (b - a)c > 0$. Jadi $ac < bc$.

**Contoh 3.** Untuk bilangan real $x$ sebarang, berlaku $x^2 \geq 0$. Selanjutnya, $x^2 = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

**Bukti:** Menurut sifat trikotomi, berlaku salah satu dari: (i) $x = 0$, atau (ii) $x > 0$, atau $-x > 0$. Jika $x=0$, maka $x^2 = xx = 0$. Jika $x > 0$, maka $x^2 = xx>0$. Jika $-x > 0$, maka $x^2 = (-x)(-x) > 0$.

**Latihan 1.** Untuk dua bilangan real $a$ dan $b$ sebarang, berlaku salah satu dari: (i) $a = b$, atau (ii) $a < b$, atau (iii) $a > b$.

**Latihan 2.** Buktikan sifat-sifat berikut.

(i) Jika $a < b$, maka $-b < -a$.
(ii) Jika $a < 0$ dan $b < 0$, maka $ab > 0$.
(iii) Jika $a < 0$ dan $b > 0$, maka $ab < 0$.
(iv) Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$.
(v) Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$.
(vi) Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, maka $ac < bd$.
(vii) Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$.
(viii) Jika $a < 0$, maka $\frac{1}{a} < 0$.
(ix) Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $\frac{a}{b} > 0$.

✓ 9. Let $(x_1, x_2, x_3, ...)$ be a sequence of positive real numbers satisfying $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$.

Prove that

Ada yang telescoping

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} \leq 2.$$

Does the equality holds? NO

10. On some planet, there are $2^N$ countries ($N \geq 4$). Each country has a flag $N$ units wide and one unit high composed of $N$ fields of size $1 \times 1$, each field being either yellow or blue. No two countries have the same flag. We say that a set of $N$ flags is *diverse* if these flags can be arranged into an $N \times N$ square so that a set of $N$ fields on its main diagonal will have the same color. Determine the smallest positive integer $M$ such that among any $M$ distinct flags, there exist $N$ flags forming a *diverse* set.

(x) Jika $a > 0$ dan $b < 0$, maka $\frac{a}{b} < 0$.

(xi) Jika $a > 1$, maka $a^2 > a$.

(xii) Jika $0 < a < 1$, maka $a^2 < a$.

√ **Latihan 3.** Misalkan $a$ dan $b$ bilangan real sebarang, dan $n$ bilangan asli ganjil. Buktikan bahwa $a^n < b^n$ jika dan hanya jika $a < b$.

Perhatikan bahwa untuk $n$ bilangan asli genap, kesimpulan pada latihan di atas tidak selalu benar. Ambil contoh, $-3 < 2$ tetapi $(-3)^2 > 2^2$.

√ **Latihan 4.** Misalkan $a$ dan $b$ bilangan real positif sebarang, dan $n$ bilangan asli. Buktikan bahwa $a^n < b^n$ jika dan hanya jika $a < b$.

Ketaksamaan $x^2 \geq 0$ berlaku untuk semua $x$ real (lihat Contoh 3) merupakan ketaksamaan yang penting dan banyak digunakan. Dengan ketaksamaan ini dapat diperoleh ketaksamaan-ketaksamaan yang lain.

**Contoh 4.** Untuk bilangan real $a$ dan $b$ sebarang berlaku $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Selanjutnya, $a^2 + b^2 = 2ab$ jika dan hanya jika $a = b$.

**Bukti:** Perhatikan bahwa $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$. Jadi $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Selanjutnya,

$$a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

√ **Latihan 5 (OSN 2003).** Untuk bilangan real $a$, $b$, dan $c$, buktikan bahwa

$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4bc + 4ca$$

dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

√ **Latihan 6.** Untuk bilangan real positif $x$, buktikan bahwa $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Selanjutnya tentukan kapan kesamaan berlaku.

√ **Latihan 7.** Misalkan $a$ dan $b$ bilangan real positif. Buktikan bahwa $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

√ **Latihan 8.** Misalkan $n$ dan $m$ bilangan bulat positif. Buktikan bahwa $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ jika dan hanya jika $\sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n}$.

$\frac{m}{n} < \sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \sqrt{2}m + \sqrt{2}n < m + 2n$ .

√ **Latihan 9.** Misalkan $x$ dan $y$ bilangan real positif. Buktikan bahwa $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

CS - Engel $\left(\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}}\right)\left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}}\right) \geq$

**Latihan 10 (IMO 1960).** Tentukan semua nilai real $x$ sehingga ketaksamaan berikut berlaku

$$\frac{4x^2}{\left(1 - \sqrt{1 + 2x}\right)^2} < 2x + 9.$$

**Contoh 5.** Untuk bilangan real positif $a$ dan $b$ sebarang berlaku $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$. Selanjutnya, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a = b$.

Menurut Contoh 4, $a^2 + b^2 \geq 2ab$, dan $a^2 + b^2 = 2ab$ jika dan hanya jika $a = b$. Oleh karena itu

$$2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Selanjutnya,

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b.$$

**Contoh 6.** Untuk bilangan real positif $a$ dan $b$ sebarang berlaku $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Selanjutnya, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a = b$.

Dari Contoh 4, dengan mengganti $a$ dan $b$ beruturut-turut dengan $\sqrt{a}$ dan $\sqrt{b}$ diperoleh

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, yaitu jika dan hanya jika $a = b$.

**Contoh 7.** Untuk bilangan real positif $a$ dan $b$ sebarang berlaku $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Selanjutnya, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a = b$.

Dari Contoh 6, diperoleh

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{a+b}.$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan $ab$, maka ketaksamaan di atas ekivalen dengan

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Untuk dua bilangan real positif $a$ dan $b$ didefinisikan *rataan kuadrat* (QM), *rataan aritmatika* (AM), *rataan geometri* (GM), dan *rataan harmonik* (HM) berturut-turut sebagai berikut.

$$QM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\quad AM = \frac{a+b}{2},\quad GM = \sqrt{ab},\ \text{dan}\ HM = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Contoh 5, Contoh 6, dan Contoh 7 berturut-turut disebut ketaksamaan QM - AM, ketaksamaan AM - GM, dan ketaksamaan GM - HM. Karena pada ketaksamaan berlaku sifat transitif, maka dapat dibentuk ketaksamaan lain yang merupakan kombinasi dari hasil di atas.

Hasil di atas diitlakkan ke situasi yang lebih umum. Rataan kuadrat (QM), rataan aritmatika (AM), rataan geometri (GM), dan rataan harmonik (HM) dari $n$ bilangan real positif $a_1, a_2, \ldots, a_n$ berturut-turut didefinisikan sebagai berikut.

$$QM = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

$$AM = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

**Proposisi.** *Jika QM, AM, GM, dan HM berturut-turut menyatakan rataan kuarat, rataan aritmatika, rataan geoetri, dan rataan harmonik dari bilangan real positip $a_1, a_2, \ldots, a_n$, maka $QM \geq AM \geq GM \geq HM$. Selanjutnya, salah satu dari ketaksamaan ini akan berlaku sebagai kesamaan jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

Berikut adalah bukti dari proposisi di atas. Pertama kita buktikan ketaksamaan QM - AM. Perhatikan bahwa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)t^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} a_i\right)t + n = \sum_{i=1}^{n}(a_i t - 1)^2 \geq 0,$$

untuk semua bilangan real $t$. Menurut teori fungsi kuadrat, yaitu $at^2+bt+c\geq 0, \forall t\in \mathbf{R}$ jika dan hanya jika $a>0$ dan $b^2-4ac\leq 0$, diperoleh

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)n\leq 0.$$

Ketaksamaan di atas ekivalen dengan

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i .$$

Dengan demikian ketaksamaan QM - AM telah terbukti.

Sekarang bukti untuk ketaksamaan AM - GM. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ untuk bilangan real positif $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sebarang. Jika kita dapat menunjukkan

(1) $P(2)$ benar,

(2) $P(n)\Rightarrow P(2n)$ benar, dan

(3) $P(n)\Rightarrow P(n-1)$ benar,

maka, menurut prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk $n\geq 2$.

Sekarang kita akan membuktikan ketiga hal di atas.

(1) Dari Contoh 6.

(2) Misalkan $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ bilangan real positif. Menurut (1), yaitu $P(2)$ benar,

$$a_{2i-1}+a_{2i}\geq 2\sqrt{a_{2i-1}a_{2i}},\ i=1,2,\ldots,n.$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\cdots+a_{2n} &= (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})\\ &\geq 2\sqrt{a_1a_2}+2\sqrt{a_3a_4}+\cdots+2\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}\\ &= 2\left(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}+\cdots+\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}\right)\end{aligned}$$

Menurut hipotesis, yaitu diasumsikan $P(n)$ benar, diperoleh

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}+\cdots+\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}\geq n\sqrt[n]{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}\cdots\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\cdots+a_{2n} &\geq 2n\sqrt[n]{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}\cdots\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}}\\ &= 2n\sqrt[2n]{a_1a_2a_3a_4\cdots a_{2n-1}a_{2n}}\end{aligned}$$

Yang ekivalen dengan

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n}\geq\sqrt[2n]{a_1a_2\cdots a_{2n}} .$$

(3) Misalkan $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ bilangan real positif. Definisikan $g=\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$. Menurut hipotesis, yaitu diasumsikan $P(n)$ benar, diperoleh

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+g}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}g}=\sqrt[n]{g^{n-1}g}=g.$$

Sehingga

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+g=ng$$

yaitu

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)g$$

Yang ekivalen dengan

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\geq g=\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$$

Menurut prinsip induksi matematika, ketaksamaan AM - GM telah terbukti.

Yang terakhir adalah bukti untuk ketaksamaan GM - HM. Bukti dari ketaksamaan ini diturunkan dari ketaksamaan AM - GM. Karena $a_1,a_2,\ldots,a_n$ bilangan real positif, maka $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n}$ juga merupakan bilangan real positif. Menurut ketaksamaan AM - GM,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}.$$

Yang ekivalen dengan

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \ge \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}.$$

Bentuk terakhir merupakan ketaksamaan GM – HM dari bilangan real positif $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

**Contoh 8.** Misalkan $a$, $b$, dan $c$ bilangan real positip dan $a + b + c = 1$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 9.$$

Menurut ketaksamaan AM-HM, kita mempunyai

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}$$

Karena $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > 0$, maka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 9$.

√ **Latihan 11.** Misalkan $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Buktikan bahwa

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \ge n^2.$$

CS / AM-HM

√ **Latihan 12 (APMO 1991).** Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ bilangan-bilangan real positif, sehingga $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Buktikan bahwa

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \ge \frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

CS

√ **Latihan 13 (SEAMO 2005).** Misalkan $a$, $b$, $c$ bilangan real positif. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)} \ge \frac{3}{1+abc}.$$

6

11

$\sum \frac{abc+ab+a+1}{a(1+b)} = \sum \frac{ab(c+1)}{a(1+b)} + \sum \frac{a+1}{a(1+b)} \ge 3\sqrt[3]{abc} + \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$

√ **Latihan 14 (SEAMO 2005).** Misalkan $a$, $b$, $c$, $d$ bilangan real positif. Buktikan bahwa

$$\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{c^4}+\frac{c^4}{d^4}+\frac{d^4}{a^4} \ge \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}.$$

AM-GM

$\frac{\sum\left(\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{c^4}+\frac{c^4}{d^4}+1\right)}{4} \Rightarrow \frac{\sum \frac{a^4}{b^4}}{4} \ge \sum \frac{a}{d}+1$

√ **Latihan 15.** Misalkan $a$, $b$, $c$ bilangan real positif. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}.$$

$a^3+b^3 \ge a^2b+ab^2$

√ **Latihan 16.** Misalkan $a$, $b$, $c$ bilangan real positif dengan $a + b + c = 1$. Buktikan bahwa

$$\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right) \ge 64.$$

AM-GM

√ **Latihan 17.** Misalkan $a$, $b$, $c$ bilangan real positif dengan $a + b + c = 1$. Buktikan bahwa

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \ge 8.$$

AM-GM

√ **Latihan 18.** Misalkan $a$, $b$, $c$ bilangan real positif dengan $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c} \ge 3.$$

$\sum_{cyc}\frac{abc+ab}{1+a} = \sum_{cyc} ab\frac{1+c}{1+a} \ge \prod ab = 1.$

√ **Latihan 19 (Russia 1992).** Untuk sebarang bilangan real $x, y > 1$, buktikan bahwa

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8.$$

$x = a+1$, $y = b+1$ $\quad \sum \frac{(a+1)^2}{a} \overset{\text{AM-GM}}{\geq} \sum \frac{4a}{a} = 8$

√ **Latihan 20 (Russia 1992).** Untuk semua bilangan real positif $x, y, z$, buktikan bahwa

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz.$$

$\frac{x^4+y^4}{2} + \frac{x^4+y^4}{2} + z^2 \overset{\text{AM-GM}}{\geq} 2x^2y^2 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz.$

√ **Latihan 21 (Russia 1991).** Untuk semua bilangan real non-negatif $x, y, z$, buktikan bahwa

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

for $x, y, z \in \{0\}$ trivial.

for $R^+$: $\underbrace{\sum \frac{x^2+x^2+y^2+z^2}{12}}_{\text{AM-HM}} + \sum \frac{xy+xz}{3} \geq \sum \frac{x\sqrt{yz}}{3} + \sum \frac{2x\sqrt{yz}}{3}$

$= \sum x\sqrt{yz}$

√ **Latihan 22.** Misalkan $a, b, c$ bilangan real positif. Buktikan bahwa

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq a + b + c.$$

√ **Latihan 23.** Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ bilangan real positif. Buktikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i b_i} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \geq 4n^2.$$

AM-GM $\rightarrow$ CS.

√ **Latihan 24.** Misalkan $a, b, c$ bilangan real positif dengan $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1.$$

$a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3$


**Rujukan**

[1] Engel, A. 1998. *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer-Verlag.

[2] Larson, L. C. 1983. *Problem-Solving Through Problems*. New York: Springer-Verlag.

[3] Manfrino, R. B., Ortego, J. A. G., and Delgado, R. V. 2005. *Inequalities*. Mexico: Universidad Nacional Autonoma de Mexico.

Azzam Labib Hakim 28 Sept.

# KETAKSAMAAN JENSEN

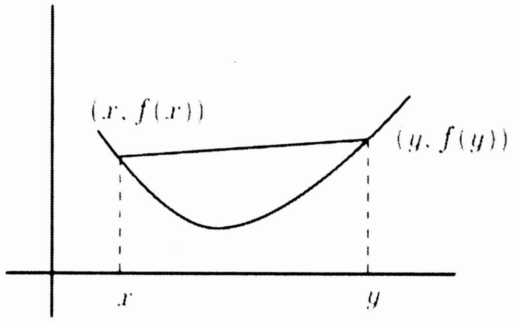
**HerySusanto**
Jurusan Matematika FMIPA UM
Email: susanto.um@gmail.com

Salah satu metode untuk menyelesaikan masalah ketaksamaan adalah dengan menggunakan sifat kecekungan fungsi. Kecekungan fungsi sebenarnya adalah membandingkan kurva grafik fungsi antara dua titik sebarang dengan garis yang menghubungkan kedua titik itu.

Suatu fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan *konveks* pada interval $[a,b]$ jika untuk $t \in [0,1]$ sebarang dan untuk semua $a \leq x < y \leq b$ berlaku ketaksamaan

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x). \tag{1}$$

Secara geometri, ketaksamaan di atas mempunyai arti bahwa grafik$f$ di antara $x$ dan $y$ berada di bawah garis yang menghubungkan titik $\big(x, f(x)\big)$dan $\big(y, f(y)\big)$.Perhatikan gambar berikut.




**Gambar 1**

Persamaan garis yang melalui$(x, f(x))$ dan $(y, f(y))$ adalah

$$L(s) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(s - x).$$

Padatitik$s = ty + (1-t)x$ diperoleh

$$L(ty + (1-t)x) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\big(t(y - x)\big) = tf(y) + (1-t)f(x).$$

Sehingga ketaksamaan (1) ekivalen dengan

$$f(ty + (1-t)x) \leq L(ty + (1-t)x).$$

Berdasarkan ilustrasi secara geometri, fungsi-fungsi yang didefinisikan dengan $k(x) = x^2$, $s(x) = \sin x$, $c(x) = \cos x$, dan $e(x) = e^x$ berturu-turut merupakan fungsi konveks pada $\mathbb{R}$, $[\pi, 2\pi]$, $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, dan $\mathbb{R}$.

**Proposisi 1.** *Misalkan $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Jika $f$ konveks pada $[a,b]$, maka untuk sebarang $x, y \in [a,b]$ berlaku*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}. \tag{2}$$

**Bukti:** Cukup memilih $t = \frac{1}{2}$ pada (1), diperoleh (2). ■

**Contoh 1.** Dengan menggunakan fakta bahwa fungsi $k(x) = x^2$ konveks pada $\mathbb{R}$ dan Proposisi 1 diperoleh

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2+y^2$$

untuk semua bilangan real $x$ dan $y$.

**Contoh 2.** Sebagai akibat dari Contoh 1, karena $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, maka

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

ini adalah ketaksamaan AM - QM.

**Proposisi 2 (Ketaksamaan Jensen).** *Jika $f$ konvekspada $[a,b]$, makauntuksebarang $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ dengan $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ dan $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ berlaku*

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n)\,. \tag{3}$$

*Secara khusus, jika $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ makaberlaku*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}. \tag{4}$$

**Bukti:** Ketaksamaan (3) akan ditunjukkan dengan menggunakan induksi matematika. Perhatikan bahwa

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) = f\left((1-t_n)\left(\frac{t_1}{1-t_n}x_1 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}x_{n-1}\right) + t_nx_n\right)$$

Berdasarkan kekonvekan

$$f\left((1-t_n)\left(\frac{t_1}{1-t_n}x_1 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}x_{n-1}\right) + t_nx_n\right)$$
$$\leq (1-t_n)f\left(\frac{t_1}{1-t_n}x_1 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}x_{n-1}\right) + t_nf(x_n)$$

Berdasarkan hipotesis induksi

$$f\left(\frac{t_1}{1-t_n}x_1 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}x_{n-1}\right) \leq \frac{t_1}{1-t_n}f(x_1) + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}f(x_{n-1})$$

Sehingga

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leq (1-t_n)\left(\frac{t_1}{1-t_n}f(x_1) + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}f(x_{n-1})\right) + t_nf(x_n)$$
$$= t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n).$$

Ketaksamaan (4) diperoleh dari Ketaksamaan (3) dengan mengambil $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$. ■

**Contoh 3 (Ketaksamaan AM - QM).** Sebagai generalisasi Contoh 2, dengan menggunakan fakta bahwa fungsi $k(x) = x^2$ konveks pada $\mathbb{R}$ dan Proposisi 2 diperoleh bahwa untuk $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}.$$

Sehingga

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Suatufungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan *konkaf* pada interval $[a, b]$ jika $-f$ konveks pada interval $[a, b]$.

**Proposisi3.** *Fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ konkaf pada interval $[a, b]$ jika dan hanya jika*

$$f(ty + (1-t)x) \geq tf(y) + (1-t)f(x) \tag{5}$$

*untuk $0 \leq t \leq 1$ dan $a \leq x < y \leq b$.*

**Bukti:** $f$ konkaf pada interval $[a, b]$ jika dan hanya jika $-f$ konveks pada interval $[a, b]$ jika dan hanya jika

$$(-f)(ty + (1-t)x) \leq t(-f)(y) + (1-t)(-f)(x) \tag{6}$$

untuk $0 \leq t \leq 1$ dan $a \leq x < y \leq b$. Selanjutnya, (6) jika dan hanya jika (5). ■

Berikut diberikan beberapa kriteria kekonvekan suatu fungsi. Kriteria pertama dikaitkan dengan sifat kemonotonan fungsi.

**Proposisi4.** *Fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks pada interval $[a, b]$ jika dan hanya jika, untuk masing-masing $x_0 \in [a, b]$, fungsi*

$$P(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, x \neq x_0, \tag{7}$$

*merupakan fungsi tidak turun.*

**Bukti:** Misalkan $f$ konveks pada interval $[a, b]$ dan $x_0 \in [a, b]$. Akan ditunjukkan bahwa

$$P(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, x \neq x_0,$$

merupakan fungsi tidak turun. Misalkan $x, y \in [a, b]$ dengan $x < y$. Akan ditunjukkan bahwa $P(x) \leq P(y)$. Untuk keperluan ini, ditinjau tiga kasus yaitu (i) $x_0 < x < y$, (ii) $x < x_0 < y$, dan (iii) $x < y < x_0$. Untuk kasus (i), perhatikan bahwa

$$P(x) \le P(y) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \le f(x_0) + \frac{x-x_0}{y-x_0}\left(f(y)-f(x_0)\right) = \frac{x-x_0}{y-x_0} f(y) + \frac{y-x}{y-x_0} f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x-x_0}{y-x_0} y + \frac{y-x}{y-x_0} x_0\right) \le \frac{x-x_0}{y-x_0} f(y) + \frac{y-x}{y-x_0} f(x_0)$$

Karenat $= \frac{x-x_0}{y-x_0} \in [0,1]$dan $\frac{y-x}{y-x_0} = 1-t$, serta $f$ konveks, maka ketaksamaan di atas berlaku. Dengan demikian, $P(x)$ merupakan fungsi tidak turun. Untuk dua kasus yang lain, bukti analog.

Bukti sebaliknya, misalkan untuk masing-masing $x_0 \in [a,b]$, fungsi

$$P(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, x \ne x_0,$$

Merupakan fungsi tidak turun. Akan ditunjukkan bahwa $f$ konveks pada interval $[a,b]$. Misalkan $t \in [0,1]$ dan $a \le x < y \le b$, sebarang. Pilih $x_0 = ty + (1-t)x$. Perhatikan bahwa

$$x_0 = ty + (1-t)x \Leftrightarrow t = \frac{x-x_0}{x-y}.$$

Sehingga

$$f(ty+(1-t)x) \ge tf(y) + (1-t)f(x) \Leftrightarrow f(x_0) \ge \frac{x-x_0}{x-y} f(y) + \frac{x_0-y}{x-y} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-x_0}{x-y} f(x) + f(x_0) \ge \frac{x-x_0}{x-y} f(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-x_0} + \frac{x-y}{(y-x_0)(x-x_0)} f(x_0) \ge \frac{f(y)}{y-x_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-x_0} - \frac{f(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)}{y-x_0} \ge \frac{f(y)}{y-x_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}.$$

Karena $P(x)$merupakan fungsi tidak turun, maka ketaksamaan di atas berlaku. Sehingga$f$ konveks pada interval $[a,b]$. ■

**Proposisi5.***Jikafungsi* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *diferensiabel pada interval* $[a,b]$ *dengan turunan tidak turun, maka* $f$ *konveks pada* $[a,b]$. *Khususnya, jika* $f$ *mempunyai turunan kedua dan* $f''(x) \ge 0$ *untuk semua* $x \in [a,b]$, *maka* $f$ *konveks pada* $[a,b]$.

**Bukti:** Misalkan $t \in [0,1]$ dan $a \le x < y \le b$, sebarang. Tulis $x_0 = ty + (1-t)x$. Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata, terdapat $c \in (x, x_0)$ dan $d \in (x_0, y)$ sehingga

$$f(x_0) - f(x) = (x_0 - x)f'(c) = t(y-x)f'(c)$$

dan

$$f(y) - f(x_0) = (y - x_0)f'(d) = (1-t)(y-x)f'(d).$$

Karena $f'$ tidak turun, maka

$$(1-t)\big(f(x_0)-f(x)\big) = (1-t)t(y-x)f'(c) \leq (1-t)t(y-x)f'(d) = t\big(f(y)-f(x_0)\big),$$

yang ekivalen dengan

$$f(ty+(1-t)x) = f(x_0) \leq tf(y)+(1-t)f(x).$$

Jadi $f$ konveks pada interval $[a,b]$.
Selanjutnya, jika $f$ mempunyai turunan kedua dan $f''(x) \geq 0$ untuk semua $x \in [a,b]$, maka $f'$ tidak turun pada $[a,b]$. Sehingga $f$ konveks pada $[a,b]$. ■

**Contoh 4.** Jika $n$ bilangan asli, $a$ dan $b$ bilangan real positif, maka

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

**Bukti:** Fungsi $f(x) = x^n, n \geq 1$, tidak turun dan konveks pada $\mathbb{R}^+$ karena $f'(x) \geq 0$ dan $f''(x) \geq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}^+$. Sehingga

$$2^n = f(2) \leq f\left(\frac{\left(1+\frac{a}{b}\right)+\left(1+\frac{b}{a}\right)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f\left(1+\frac{a}{b}\right)+f\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\right).$$

Jadi

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

**Contoh 5 (Ketaksamaan AM - GM Berbobot).** Jika $x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n$ bilangan real positif dengan $t_1 + \cdots + t_n = 1$, maka

$$x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} \leq t_1x_1 + \cdots + t_nx_n.$$

**Bukti:** Fungsi eksponen $f(x) = e^x$ konveks pada $\mathbb{R}$, karena $f''(x) = e^x > 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Dengan menggunakan ketaksamaan Jensen diperoleh.

$$x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} = e^{t_1 \ln x_1} \dots e^{t_n \ln x_n} = e^{t_1 \ln x_1 + \cdots + t_n \ln x_n} = f(t_1 \ln x_1 + \cdots + t_n \ln x_n)$$
$$\leq t_1 f(\ln x_1) + \cdots + t_n f(\ln x_n) = t_1 e^{\ln x_1} + \cdots + t_n e^{\ln x_n} = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n.$$

**Contoh 6 (Ketaksamaan Young).** Untuk bilangan real $x, y > 0$ dan $a, b > 0$ dengan $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1$ berlaku

$$xy \leq \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b.$$

**Bukti:** Dengan menggunakan Ketaksamaan AM - GM Berbobot diperoleh

$$xy = (x^a)^{\frac{1}{a}}(y^b)^{\frac{1}{b}} \leq \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b.$$

**Contoh 7 (Ketaksamaan Holder).** Untuk bilangan real $x_i, y_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ dan $a, b > 0$ dengan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{\frac{1}{a}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^b\right)^{\frac{1}{b}}.$$

**Bukti:** Pertama asumsikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^a = \sum_{i=1}^{n} y_i^b = 1.$$

Digunakan Ketaksamaan Young diperoleh

$$x_i y_i \le \frac{1}{a} x_i^a + \frac{1}{b} y_i^b.$$

Sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} x_i^a + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n} y_i^b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Sekarang untuk

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^a = A \text{ dan } \sum_{i=1}^{n} y_i^b = B.$$

Misalkan

$$x_i' = \frac{x_i}{A^{\frac{1}{a}}} \text{ dan } y_i' = \frac{y_i}{B^{\frac{1}{b}}}.$$

Diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i')^a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^a}{A} = 1$$

dan

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i')^b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^b}{B} = 1.$$

Sehingga

$$1 \ge \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i' = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{A^{\frac{1}{a}} B^{\frac{1}{b}}} = \frac{1}{A^{\frac{1}{a}} B^{\frac{1}{b}}} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Akibatnya

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le A^{\frac{1}{a}} B^{\frac{1}{b}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{\frac{1}{a}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^b\right)^{\frac{1}{b}}.$$

**Soal-soal Latihan**

1. Jika $\alpha, \beta, \gamma$ sudut-sudut dalam suatu segitiga, maka
   (a) $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \le \frac{3}{8}\sqrt{3}$;   $\prod \sin\alpha \overset{\text{AM-GM}}{\le} \left(\frac{\sum \sin\alpha}{3}\right)^3 \overset{\text{jensen}}{\le} \sin^3\left(\frac{\sum\alpha}{3}\right) = \sin^3 60^\circ = \frac{3}{8}\sqrt{3}$
   (b) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$.   $\prod \sin\frac{\alpha}{2} \overset{\text{AM-GM}}{\le} \left(\frac{\sum \sin\frac{\alpha}{2}}{3}\right)^3 \overset{\text{jensen}}{\le} \sin^3\left(\frac{\sum\frac{\alpha}{2}}{3}\right) = \sin^3 30^\circ = \frac{1}{8}$
2. (Short list IMO, 1998) Jika $r_1, \dots, r_n$ bilangan real lebih besar atau sama dengan 1, maka
   $$\frac{1}{1+r_1} + \cdots + \frac{1}{1+r_n} \ge \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 \dots r_n} + 1}.$$
   $\cancel{f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ convex}}$
   $\cancel{\frac{\sum f(x)}{n} \overset{\text{jense}}{\ge} f\left(\frac{\sum x}{n}\right) = \frac{n}{\sum x + n}}$
3. (China, 1989) Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n$ dengan $x_1, \dots, x_n \in (0,1)$ dan $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ berlaku
   $$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \ge \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$
4. (Hungary–Israel, 1999) Misalkan diberikan bilangan asli $k$ dan $l$, dan bilangan real positif $a_{ij}$, $1 \le i \le k$ dan $1 \le j \le l$. Buktikan bahwa jika $q \ge p > 0$ maka
   $$\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$
5. Untuk $a, b \in \mathbb{R}^+$ dengan $a + b = 1$ berlaku
   $$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{25}{2}.$$
   $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ convex
6. Untuk $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dengan $a + b + c = 1$ berlaku
   $$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \ge \frac{100}{3}.$$
   $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ convex
7. Untuk $0 \le a, b, c \le 1$, buktikan bahwa
   $$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1.$$
8. (Rusia, 2000) Untuk bilangan real $x$ dan $y$ dengan $0 \le x, y \le 1$, buktikan bahwa
   $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$
9. (Ketaksamaan Bernoulli)
   (i) Untuk sebarang real $x > -1$ dan untuk bilangan bulat positif $n$, diperoleh
   $$(1+x)^n \ge 1 + nx.$$
   bukti: induksi di $n$ - / geometric series
   (ii) Gunakan ketaksamaan di atas untuk membuktikan ketaksamaan AM-GM.
10. (Ketaksamaan Schur) Jika $x, y, z$ bilangan real positif dan $n$ bilangan bulat positif, maka
    $$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-z)(y-x) + z^n(z-x)(z-y) \ge 0.$$
    Untuk kasus $n = 1$, diperoleh salah satu dari ketaksamaan dalam bentuk
    (i) $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$.
    (ii) $xyz \ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

(iii) Jika $x + y + z = 1$, maka $9xyz + 1 \geq 4(xy + yz + zx)$.

11. (Canada, 1992) Untuk sebarang bilangan real positif $x, y, z$ berlaku
$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z).$$

12. Jika $a, b, c$ bilangan real positif, maka
$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

13. Misalkan $a, b$, dan $c$ bilangan real positif. Buktikan bahwa
$$1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geq \frac{6}{a+b+c}.$$
Selanjutnya, jika $abc = 1$, buktikan bahwa
$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}.$$

14. (Ketaksamaan Rataan Pangkat / Power Mean Inequality). Misalkan $x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n$ bilangan real positif dengan $t_1 + \cdots + t_n = 1$. Buktikan bahwa jika $r$ dan $s$ bilangan real sehingga $r > s$, maka
$$(t_1 x_1^s + \cdots + t_n x_n^s)^{\frac{1}{s}} \leq (t_1 x_1^r + \cdots + t_n x_n^r)^{\frac{1}{r}}$$
dan kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x_1 = \cdots = x_n$.

15. (Ketaksamaan Holder diperluas). Buktikan bahwa untuk bilangan real $x_i, y_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ dan $a, b, c > 0$ dengan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ berlaku
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)^c\right)^{\frac{1}{c}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{\frac{1}{a}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^b\right)^{\frac{1}{b}}.$$

16. (Ketaksamaan Holder diperluas). Buktikan bahwa untuk bilangan real $x_i, y_i, z_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ dan $a, b, c > 0$ dengan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ berlaku
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{\frac{1}{a}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^b\right)^{\frac{1}{b}} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^c\right)^{\frac{1}{c}}.$$

17. Misalkan $a, b$, dan $c$ bilangan real nonnegatif. Buktikan bahwa
    (a) $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab + bc + ca)$
    (b) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$

18. Misalkan $a, b$, dan $c$ bilangan real positif. Buktikan bahwa
$$\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right) \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

AZZAM LABIB HAKIM

# SESI MANDIRI

PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019

@muhammadfaikar

28 September 2018

**Latihan Soal.**

1. Suppose that a sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ of positive real numbers satisfies
$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)},$$
for every positive integer $k$. Prove that $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$ for every $n \geq 2$.

2. Determine all positive integers $M$ for which the sequence $a_0, a_1, a_2, \ldots$, defined by $a_0 = \frac{2M+1}{2}$ and $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$, contains at least one integer term.

3. For a positive integer $n$, let $f(n)$ be the number obtained by writing $n$ in binary and replacing every 0 with 1 and vice versa. For example: $n = 23$ is 10111 in binary, so $f(n)$ is 1000 in binary, therefore $f(23) = 8$. Prove that
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \frac{n^2}{4}.$$
When does equality hold?.

4. Given an isoscales triangle $ABC$ with $AB = AC$. The midpoint of side $BC$ is denoted by $M$. Let $X$ be a variable point on the sorter arc $MA$ of the circumcircle of triangle $ABM$. Let $T$ be the point at angle domain $BMA$, for which $\angle TMX = 90^o$ and $TX = BX$. Prove that $\angle MTB - \angle CTM$ does not depend on $X$.

5. √ Let $ABC$ be an acute triangle with orthocenter $H$. Let $G$ be the point such that the quadrilateral $ABGH$ is parallelogram. Let $I$ be the point on the line $GH$ such thath $AC$ bisect $HI$. Suppose that the line $AC$ intersect the circumcircle of the triangle $GCI$ at $C$ and $J$. Prove that $IJ = AH$.

6. Find all finite sequences $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ such that for every $j, 0 \leq j \leq n, x_j$ equals the number of times $j$ appear in the sequence.

7. Let $n$ be apositive integer. Consider $2n$ distinct line on the plane, no two of which are parallel. Of the $2n$ lines, $n$ are colored blue, the other $n$ are colored red. let $\mathcal{B}$ be the set of all points on the plane that lie on at least one blue line, and $\mathcal{R}$ the set of all points on the plane that lie on at least one red line. Prove that there exist a circle that intersects $\mathcal{B}$ in exactly $2n-1$ points, and also intersects $\mathcal{R}$ in exactly $2n-1$ points.

8. A number $n$ is perfect if $s(n) = 2n$, where $s(n)$ is the sum of the divisors of $n$. Let $n > 6$ be a perfect number, and let $n = p_1^{e_1} \ldots p_k^{e_k}$ be its prime factorisation with $1 < p_1 < \ldots < p_k$. Prove that $e_1$ is an even number.

AZZAM LABIB HAKIM

# CHEBYSHEV INEQUALITY

RWK Reza

Malang, 29*th* September 2018

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ and $b_1, b_2, \ldots, b_n$ are **two increasing sequences of real number**, then

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

[**Example**] Let $a, b, c > 1$ be positive real number such that

$$\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{c^2-1} = 1$$

Prove that

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \leq 1$$

**Solution:**

WLOG $a \geq b \geq c$ then we have

$$\frac{a-2}{a+1} \geq \frac{b-2}{b+1} \geq \frac{c-2}{c+1}, \textit{and}$$

$$\frac{a+2}{a-1} \leq \frac{b+2}{b-1} \leq \frac{c+2}{c-1}$$

By chebyshev we have

$$3\left(\sum \frac{a^2-4}{a^2-1}\right) \leq \left(\sum \frac{a+2}{a-1}\right)\left(\sum \frac{a-2}{a+1}\right)$$

By hypothesis, the left-hand expression is equal to 0, which means

$$\frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} \geq 0$$

$$\sum\left(1 - \frac{3}{a+1}\right) \geq 0$$

$$3 \geq \sum \frac{3}{a+1}$$

$$1 \geq \sum \frac{1}{a+1}$$

# PROBLEMS

1. Let $a, b, c, d, e$ be non-negative real numbers such that

$$\frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e}=1$$

Prove that

$$\frac{a}{4+a^2}+\frac{b}{4+b^2}+\frac{c}{4+c^2}+\frac{d}{4+d^2}+\frac{e}{4+e^2} \le 1$$

2. Suppose that $a, b, c, d$ are four positive real numbers satisfying $a+b+c+d=4$. Prove that

$$\frac{1}{11+a^2}+\frac{1}{11+b^2}+\frac{1}{11+c^2}+\frac{1}{11+d^2} \le \frac{1}{3}$$

3. Let $a, b, c$ be three positive real numbers with sum 3. Prove that

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge a^2+b^2+c^2$$

4. Suppose $a, b, c, d$ are positive real numbers such that

$$a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$$

Prove that

$$2(a+b+c+d) \ge \sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}+\sqrt{c^2+3}+\sqrt{d^2+3}$$

5. Suppose $a, b, c$ are positive real numbers with sum 3. Prove that

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+b+a} \le 1$$

6. Let $a, b, c$ be positive real numbers and $0 \le k \le 2$. Prove that

$$\frac{a^2-bc}{b^2+c^2+ka^2}+\frac{b^2-ca}{c^2+a^2+kb^2}+\frac{c^2-ba}{a^2+b^2+kc^2} \ge 0$$

7. Let $a, b, c$ be positive real numbers. Prove that

$$\sqrt{a^2+8bc}+\sqrt{b^2+8ca}+\sqrt{c^2+8ab} \le 3(a+b+c)$$

8. Let $a, b, c, d$ be positive real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Prove that

$$\frac{1}{5-a} + \frac{1}{5-b} + \frac{1}{5-c} + \frac{1}{5-d} \leq 1$$

9. Let $a_l, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers satisfying

$$a_l + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

Prove that

$$\frac{1}{n^2 + a_1^2 - 1} + \frac{1}{n^2 + a_2^2 - 1} + \cdots + \frac{1}{n^2 + a_n^2 - 1} \geq \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

10. Suppose that $a, b, c$ are positive real numbers with sum 3. Prove that

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{3}{8}$$

11. Let $a, b, c$ be positive real numbers such that $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Prove that

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$$

12. Let $a_l, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers satisfying

$$a_l + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

Prove that

$$\frac{1}{n + a_1^2 - 1} + \frac{1}{n + a_2^2 - 1} + \cdots + \frac{1}{n + a_n^2 - 1} \leq 1$$

13. Let $a, b, e, d$ be positive real numbers with sum 4. Prove that

$$\frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-acd} + \frac{1}{5-abd} + \frac{1}{5-abc} \leq 1$$

AZZAM LABIB HAKIM

# Chaucy Reverse Technique

RWK. Reza

Malang, 29*th* September 2018

## Example

Let $a, b, c$ be positive real numbers with sum 3. Prove that

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}$$

Using a little trick, we will have

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\geq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

and the inequality become

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq a+b+c-\frac{ab+bc+ac}{2}\geq\frac{3}{2}$$

Since $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2=9$

This ends the proof, with equality holds for $a=b=c=1$.

## Problems

1. Suppose that $a, b, c, d$ are four positive real numbers with sum 4. Prove that
$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\geq 2$$

2. Suppose that $a, b, c, d$ are four positive real numbers with sum 4. Prove that
$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq 2$$

3. Suppose that $a, b, c, d$ are four positive real numbers. Prove that
$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+d^2}+\frac{d^3}{d^2+a^2}\geq\frac{a+b+c+d}{2}$$

4. Suppose that $a, b, c, d$ are four positive real numbers. Prove that
$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}+\frac{b^4}{b^3+2c^3}+\frac{c^4}{c^3+2d^3}+\frac{d^4}{d^3+2a^3}\geq\frac{a+b+c+d}{3}$$

5. Suppose that $a, b, c$ are three positive real numbers with sum 3. Prove that
$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\geq 1$$

6. Suppose that $a, b, c$ are three positive real numbers with sum 3. Prove that
$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\geq 1$$

7. Suppose that $a, b, c$ are three positive real numbers with sum 3. Prove that
$$\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\geq 3$$

8. Suppose that $a, b, c, d$ are four positive real numbers with sum 4. Prove that
$$\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+d^2}+\frac{d+1}{1+a^2}\geq 4$$

9. Suppose that $a, b, c, d$ are four positive real numbers with sum 4. Prove that
$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+d^2}\geq 2$$

10. Suppose that $a, b, c$ are three positive real numbers with sum 3. Prove that

$$\frac{1}{1+2b^2c}+\frac{1}{1+2c^2a}+\frac{1}{1+2a^2b}\geq 1$$

11. Suppose that $a, b, c, d$ are four positive real numbers with sum 4. Prove that

$$\frac{1+ab}{1+b^2c^2}+\frac{1+bc}{1+c^2a^2}+\frac{1+cd}{1+d^2a^2}+\frac{1+da}{1+a^2b^2}\geq 4$$

12. Suppose that $a, b, c$ are three positive real numbers with $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geq 1$$

13. Suppose that $a, b, c$ are three positive real numbers with sum 3. Prove that

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{2+a}{2+b}+\frac{2+b}{2+c}+\frac{2+c}{2+a}$$

14. Suppose that $a, b, c$ are three positive real numbers with $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geq 3$$

15. Suppose that $a, b, c$ are three positive real numbers with sum 3. Prove that

$$\frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$$

16. Suppose that $a, b, c$ are three positive real numbers with sum 3. Prove that

$$\frac{a}{1+b^3}+\frac{b}{1+c^3}+\frac{c}{1+a^3}\geq\frac{3}{2}$$

AZZAM LABIB HAKIM 29 September 2018

# Ketaksamaan Renata
# (The Rearrangement Inequality)

Hery Susanto
Jurusan Matematika FMIPA UM
Email: susanto.um@gmail.com

Perhatikan contoh masalah sederhana yang memberikan gambaran tentang ketaksamaan renata. Misalkan ada ada lima kotak yang akan dimasuki koin. Koin yang akan dimasukkan pada kotak-kotak itu juga lima macam, yaitu 50-an, 100-an, 200-an, 500-an, dan 1000-an. Kotak pertama, kedua, ketiga, keempat, dan kelima berturut-turut akan dimasuki 10, 8, 6, 4, dan 2 koin. Jumlah nominal terbesar yang mungkin adalah 15.700 yang diperoleh dari

$$10 \times 1000 + 8 \times 500 + 6 \times 200 + 4 \times 100 + 2 \times 50.$$

Sedangkan jumlah nominal terkecil yang mungkin adalah 6.500 yang diperoleh dari

$$2 \times 1000 + 4 \times 500 + 6 \times 200 + 8 \times 100 + 10 \times 50.$$

Berikut diberikan rumusan teorema tentang ketaksaman renata.

**Teorema (Ketaksamaan Renata).** Misalkan diberikan dua barisan bilangan real, yaitu

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \quad \text{dan} \quad b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n.$$

Jika $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ sebarang permutasi dari $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, maka

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \ge a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n \tag{1}$$

dan

$$a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n \ge a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n \tag{2}$$

Selanjutnya, kesamaan pada (1) berlaku jika dan hanya jika $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Sedangkan kesamaan pada (2) berlaku jika dan hanya jika $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$.

**Bukti:**
Misalkan $k$ adalah indeks terkecil sehingga $a'_k \ne a_k$. Dengan demikian ada $j > k$ sehingga $a_k = a'_j \le a'_k$. Definisikan

$$c_k = a'_j, \qquad c_j = a'_k, \qquad \text{dan } c_i = a'_i \;\; i \ne k, j.$$

Misalkan

$$S = a'_1 b_1 + \cdots + a'_k b_k + \cdots + a'_j b_j + \cdots + a'_n b_n .$$

dan

$$T = c_1 b_1 + \cdots + c_k b_k + \cdots + c_j b_j + \cdots + c_n b_n .$$

Diperoleh

$$T - S = (c_k - a'_k) b_k + (c_j - a'_j) b_j = (a'_j - a'_k) b_k + (a'_k - a'_j) b_j = (a'_k - a'_j)(b_j - b_k) \ge 0.$$

Dengan mengulangi proses di atas (paling banyak $n$ kali) diperoleh bahwa

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

merupakan nilai paling besar jika dibanding dengan

$$a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n,$$

untuk $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ sebarang permutasi dari $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Selanjutnya dua nilai di atas sama jika dan hanya jika $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$.
Bukti untuk ketaksamaan (2) analog dengan bukti untuk ketaksamaan (1).

Sebagai konsekuensi dari Teorema Renata diperoleh dua akibat berikut.

**Akibat 1.** Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real. Jika $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ sebarang permutasi dari $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, maka

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \ge a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \cdots + a_n a'_n .$$

**Akibat 2.** Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif. Jika $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ sebarang permutasi dari $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, maka

$$\frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \cdots + \frac{a_n'}{a_n} \geq n.$$

Selanjutnya, marilah kita perhatikan beberapa contoh soal ketaksamaan yang dapat diselesaikan dengan Ketaksamaan Renata.

**Contoh 1 (IMO 1975).** Misalkan diberikan dua barisan bilangan real $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ dan $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$, dan $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sebarang permutasi dari $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Buktikan bahwa

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2.$$

**Bukti:**
Karena $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ merupakan permutasi dari $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, maka

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2.$$

Menurut ketaksamaan renata, diperoleh

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n.$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2.\end{aligned}$$

**Contoh 2 (IMO 1978).** Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan bulat positif berbeda. Buktikan bahwa

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

**Bukti:** Misalkan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ permutasi dari $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sehingga $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Akibatnya $x_i \geq i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Menurut ketaksamaan renata, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} &= \frac{1}{1^2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \cdots + \frac{1}{n^2}a_n \\ &\geq \frac{1}{1^2}x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 + \cdots + \frac{1}{n^2}x_n \\ &\geq \frac{1}{1^2}1 + \frac{1}{2^2}2 + \cdots + \frac{1}{n^2}n \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

**Contoh 3 (IMO 1964).** Misalkan $a$, $b$, dan $c$ panjang sisi-sisi suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

**Bukti:**
Karena ketaksamaan yang diberikan adalah simetri (jika $a$, $b$, dan $c$ saling tukar posisi, maka bentuk ketaksamaan tetap seperti semula), maka tanpa menghilangkan sifat keberlakuan secara umum asumsikan $c \leq b \leq a$. Berikut akan ditunjukkan bahwa

$$a(b + c - a) \leq b(c + a - b) \leq c(a + b - c).$$

Perhatikan bahwa

$$a(b+c-a) \le b(c+a-b) \Leftrightarrow ab+ac-a^2 \le bc+ba-b^2 \Leftrightarrow bc-ac+a^2-b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-c) \ge 0.$$

Karena $c \le b \le a$, maka bentuk terakhir adalah benar. Jadi $a(b+c-a) \le b(c+a-b)$. Dengan cara yang sama diperoleh $b(c+a-b) \le c(a+b-c)$. Sehingga $a(b+c-a) \le b(c+a-b) \le c(a+b-c)$.
Dengan menggunakan ketaksamaan renata diperoleh

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c)$$
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c)$$

Dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan di atas diperoleh

$$2\left[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\right] \le 6abc$$

Kedua ruas ketaksamaan terakhir dibagi 2, diperoleh bukti yang kita inginkan.

**Contoh 4 (IMO 1983).** Misalkan $a$, $b$, dan $c$ panjang sisi-sisi suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \ge 0\,.$$

**Bukti:**
Asumsikan $a \ge b, c$.
Jika $a \ge b \ge c$, maka

$$a(b+c-a) \le b(c+a-b) \le c(a+b-c)$$

(lihat Contoh 3) dan

$$\frac{1}{a} \le \frac{1}{b} \le \frac{1}{c}\,.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan renata diperoleh

$$\frac{1}{a}a(b+c-a)+\frac{1}{b}b(c+a-b)+\frac{1}{c}c(a+b-c) \ge \frac{1}{c}a(b+c-a)+\frac{1}{a}b(c+a-b)+\frac{1}{b}c(a+b-c),$$

yang ekivalen dengan

$$a+b+c \ge \frac{a(b-a)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b}+a+b+c\,,$$

yang ekivalen dengan

$$0 \ge \frac{a(b-a)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b}\,.$$

Kedua ruas ketaksamaan terakhir dikalikan dengan $-abc$, diperoleh bukti ketaksamaan yang kita inginkan.
Jika $a \ge c \ge b$, maka dengan cara yang sama kita peroleh bukti ketaksamaan yang kita inginkan.

**Contoh 5 (Ketaksamaan Nesbitt).** Jika $a$, $b$, dan $c$ bilangan real positif, maka

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}\,.$$

**Bukti:**
Karena ketaksamaan yang diberikan adalah simetri, maka tanpa menghilangkan sifat keberlakuan secara umum asumsikan $a \le b \le c$. Sehingga

$$a+b \le a+c \le b+c$$

dan

$$\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{c+a} \le \frac{1}{a+b}\,.$$

Digunakan ketaksamaan renata, diperoleh

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$

dan

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}.$$

Dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan di atas diperoleh

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}=3,$$

yang ekivalen dengan

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

**Contoh 6 (Ketaksamaan QM - AM).** Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif, maka

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Selanjutnya, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

**Bukti:**
Dengan menggunakan Akibat 1, diperoleh

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$$
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq a_1a_3+a_2a_4+\cdots+a_na_2$$
$$\vdots$$
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq a_1a_n+a_2a_1+\cdots+a_na_{n-1}.$$

Dengan menambahkan ketaksamaan di atas dan $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$, diperoleh

$$n\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\geq a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+2a_2a_3+\cdots+2a_na_1=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2.$$

Sehingga

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}\geq\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2,$$

yang ekivalen dengan

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

**Contoh 7 (Ketaksamaan AM - GM).** Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif, maka

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Selanjutnya, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

**Bukti:**
Misalkan

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$
$$x_1=\frac{a_1}{G},$$
$$x_2=\frac{a_1a_2}{G^2},$$
M
$$x_n=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{G^n}=1.$$

Dengan menggunakan Akibat 2, diperoleh

$$n \le \frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_1} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \cdots + \frac{a_n}{G},$$

yang ekivalen dengan

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

**Contoh 8 (Ketaksamaan GM - HM).** Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif, maka

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Selanjutnya, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

**Bukti:**
Misalkan

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$
$$x_1 = \frac{a_1}{G},$$
$$x_2 = \frac{a_1 a_2}{G^2},$$
$$\vdots$$
$$x_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{G^n} = 1.$$

Dengan menggunakan Akibat 2, diperoleh

$$n \le \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} = \frac{G}{a_1} + \frac{G}{a_2} + \cdots + \frac{G}{a_n},$$

yang ekivalen dengan

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = G \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

**Contoh 9 (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz).** Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ bilangan real, maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Selanjutnya, kesamaan berlaku jika dan hanya jika terdapat $\lambda \in \mathbf{R}$ dengan $a_i = \lambda b_i$, untuk semua $i$ = 1, 2, ... , $n$.

**Bukti:**
Jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ atau $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, maka ketaksamaan berlaku.
Untuk kasus selain itu, yaitu terdapat $a_i \ne 0$ dan $b_i \ne 0$. Definisikan

$$S = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

dan

$$T = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Karena $S$ dan $T$ keduanya tidak nol, maka kita dapat mendefinisikan

$$x_i = \frac{a_i}{S} \text{ dan } x_{n+i} = \frac{b_i}{T}, \text{ untuk } 1 \le i \le n.$$

Dengan menggunakan Akibat 1, diperoleh

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{S^2} + \frac{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}{T^2} \\
&= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2 \\
&\geq x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + \cdots + x_n x_{2n} + x_{n+1} x_1 + x_{n+2} x_2 + \cdots + x_{2n} x_n \\
&= 2(x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + \cdots + x_n x_{2n}) \\
&= \frac{2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)}{ST},
\end{aligned}$$

yang ekivalen dengan

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\leq ST \\
&= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}
\end{aligned}$$

Dengan dikuadratkan, diperoleh

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b^2\right).$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $x_i = x_{n+i}$, untuk $1 \leq i \leq n$. Perhatikan bahwa jika $x_i = x_{n+i}$, maka $a_i = \frac{S}{T} b_i$. Sebaliknya, jika terdapat $\lambda \in \mathbf{R}$ dengan $a_i = \lambda b_i$, untuk semua $i$ = 1, 2, ... , $n$, maka kesamaan berlaku. Jadi kesamaan berlaku jika dan hanya jika terdapat $\lambda \in \mathbf{R}$ dengan $a_i = \lambda b_i$, untuk semua $i$ = 1, 2, ... , $n$.

**Contoh 10 (Ketaksamaan Tchebyshev).** Jika $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, dan $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ bilangan real, maka

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}\right).$$

**Bukti:**
Dengan menggunakan ketaksamaan renata, diperoleh

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1 \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \cdots + a_n b_2 \\
&\vdots \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Dengan menjumlahkan ketaksamaan di atas, diperoleh

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n),$$

yang ekivalen dengan

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right).$$

## Soal-soal Latihan

1. Carilah nilai minimum dari

bagi interval $[0,\frac{\pi}{4}], (\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

buat tinjau $\sin x \ge \cos x \vee \sin x \le \cos x$

$\sum \frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot \sin x \ge \sum \sin x \frac{\cos^2}{\sin x} = 1.$

2. Untuk sebarang bilangan real positif $a$, $b$, dan $c$, buktikan bahwa

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge a+b+c.$$

$a^2\cdot ac + b^2\cdot ab + c^2\cdot cb \ge a^2\cdot bc + b^2\cdot ac + c^2\cdot ab$

3. Untuk sebarang bilangan real positif $a$, $b$, dan $c$, dan bilangan asli $n$, buktikan bahwa

Chebyshev

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \ge \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}.$$

$\sum_{cyc} a^{n-1}\cdot\frac{a}{b+c} \ge \frac{(\sum_{cyc} a^{n-1})(\sum_{cyc}\frac{a}{b+c})}{3} \ge \frac{(\sum_{cyc} a^{n-1})\frac{3}{2}}{3}$

4. (IMO 1995) Misalkan $a, b, c$ bilangan real positif dengan $abc = 1$. Buktikan bahwa

$a\le b\le c$ $\quad ab \le ac \le bc$

$\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{b^2}\le\frac{1}{a^2}$

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}.$$

5. (APMO 1998) Misalkan $a, b, c$ bilangan real positif. Buktikan bahwa

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

6. Untuk sebarang bilangan real positif $a$, $b$, dan $c$ dengan $abc = 1$, buktikan bahwa

$a^2\cdot a + b^2\cdot b + c^2\cdot c$

$\ge a^2\cdot b + b^2\cdot c + c^2\cdot a$

$$a^3+b^3+c^3+(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3 \ge 2(a^2b+b^2c+c^2a).$$

$a^2\cdot ab\cdot b\cdot b + b^2\cdot bc\cdot c\cdot c + c^2\cdot ca\cdot a\cdot a$

$\ge a^2\cdot abc\cdot b + b^2\cdot abc\cdot c + c^2\cdot abc\cdot a$

$= a^2b + b^2c + c^2a$

7. Diberikan bilangan real positif $a$, $b$, dan $c$. Buktikan bahwa

$$a^4+b^4+c^4 \ge a^2bc+b^2ca+c^2ab.$$

$\sum_{cyc} a^4 \ge \sum_{cyc} a^2\cdot a\cdot b \ge \sum_{cyc} a^2\cdot c\cdot b$

8. Untuk sebarang bilangan real positif $a$, $b$, dan $c$, buktikan bahwa

AM-GM bisa

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \ge \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

$\sum_{cyc} c^2a^2\cdot a\cdot a \ge \sum_{cyc} c^2a^2\cdot ab \ge \sum_{cyc} c^2a^2\cdot cb$

9. Untuk sebarang bilangan real positif $a$, $b$, dan $c$, buktikan bahwa

$$\frac{a+b+c}{abc} \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc} ab^2c \le \sum_{cyc} a^2b^2$ $\quad \left(\sum_{cyc} a\cdot a\cdot b^2 \ge \sum_{cyc} a\cdot c\cdot b^2\right)$

10. Misalkan $a$, $b$, dan $c$ adalah panjang sisi-sisi segitiga. Buktikan bahwa

akibat no. 11 untuk $n=3$

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \ge 3.$$

11. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif dan $s = a_1+a_2+\cdots+a_n$. Buktikan bahwa

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-a_n} \ge \frac{n}{n-1}.$$

12. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif dan $s = a_1+a_2+\cdots+a_n$. Buktikan bahwa

$$\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots+\frac{s}{s-a_n} \ge \frac{n^2}{n-1}.$$

13. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif dan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Buktikan bahwa

$a_1 \geq \ldots \geq a_n$

$\frac{1}{2-a_1} \geq \ldots \geq \frac{1}{2-a_n}$

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_1} + \ldots = 1$

14. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif dan $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Buktikan bahwa

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1} \geq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

15. (China 1989) Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif dan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}\right).$$

16. Misalkan $a, b, c, d$ bilangan real positif dengan $ab + bc + cd + da = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

17. Misalkan $a, b, c$ bilangan real positif dengan $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

18. Misalkan $a, b, c$ bilangan real positif dengan $a + b + c = 1$. Buktikan bahwa

Jensen

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}.$$

$f(x) = \sqrt{4x+1}$ konkaf

$\sum_{cyc} \sqrt{4a+1} \leq 3\sqrt{4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)+1} = \sqrt{21}$

AZZAM LABIB HAKIM

# PRIMES AND SQUARES

RWK

Malang, 30 September 2018

Misalkan $A$ dan $B$ adalah himpunan semua bilangan prima ganjil dengan bentuk $4k+1$ dan $4k+3$. Misalkan pula $C$ himpunan semua bilangan yang dapat dituliskan sebagai penjumlahan dari dua bilangan kuadrat.

1 • Buktikan bahwa $A$ adalah himpunan bagian dari $C$. Lemma $p \equiv 1 \bmod 4 \Leftrightarrow x^2 \equiv -1 \bmod p$

$p = 29$.

2 • Buktikan jika $p \in A$, maka $p = x^2 + y^2$ tepat mempunyai 1 solusi ( tanpa memperhatikan urutan $x, y$ ).

3 • Misalkan $p \in B$ dan $x, y$ bilangan asli sehingga $p | x^2 + y^2$, maka $p | (x, y)$.

4 • Buktikan bahwa untuk setiap bilangan positif $a$ sedemikian sehingga $a | n^2 + 1$, maka $a \in C$.

5 • Tentukan semua $n-$pasang bilangan positif $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ yang memenuhi

$$(a_1! - 1)(a_2! - 1) \ldots (a_n! - 1) - 16$$

merupakan bliangan kuadrat.

6 • Buktikan bahwa persamaan $y^2 = x^7 + 7$ tidak mempunyai solusi bulat.

7 • Tentukan banyaknya bilangan bulat $x \in \{-2017, -2016, \ldots, 2016, 2017\}$ sedemikian sehingga $2017 | x^2 + (x+1)^2$.

8 • Buktikan bahwa sebuah himpunan $p - 1$ bilangan bulat berurutan, dimana $p \in B$, tidak dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian sedemikian sehingga hasil perkalian anggota pada tiap himpunan adalah sama.

9 • Buktikan terdapat takhingga bilangan asli $n$ sehingga untuk setiap bilangan prima ganjil $p$ ~~shingga~~ jika $p \mid n(n+1)$, maka $p \in A$.

10 • Buktikan bahwa persamaan $x^4 = y^2 + z^2 + 4$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat.

11 • Tentukan semua bilangan asli $n$ sehingga terdapat bilangan asli $m$ yang memenuhi

$$2^n - 1 \mid m^2 + 9.$$

- Misalkan $p \in B$ dan $x, y, z, t$ adalah bilangan bulat sedemikian sehingga
$$x^{2p} + y^{2p} + z^{2p} = t^{2p}$$

- Tentukan bilangan bulat non-negatif terkecil $n$, sedemikian sehingga terdapat non-konstan fungsi $f : \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ yang memenuhi

  a) $f(xy) = f(x)f(y)$

  b) $2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1, \ldots, n\}$ untuk setiap bilangan bulat $x$ dan $y$

  Untuk $n$ tersebut, tentukan fungsi yang memenuhi.

- Buktikan terdapat takhingga banyaknya pasangan berurutan sedemikian sehingga, tidak keduanya mempunyai faktor dari himpunan $B$.

- Buktikan bahwa jika $n^2 + a \in C$ untuk suatu bilangan asli $n$, maka $a \in C$.

- Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ yang memenuhi

  a) Jika $a|b$, maka $f(a) \geq f(b)$

  b) Untuk setiap bilangan asli $a, b$ berlaku
$$f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b)$$

AZZAM LABIB HAKIM

RWK

Malang, 30*th* September 2018

1. $P(x)$ is a polynomial of odd degree with real coefficients. Show that the equation $P(P(x)) = 0$ has at least as many distinct real roots, as the equation $P(x) = 0$. $\because n$ odd, $P(x) \in \mathbb{R}$, $\forall P(x)$, $P(a_k)=0$, $\exists x, P(x)=a_k \Rightarrow P(P(x))=0$.

2. Suppose that $a, b, c$ are three real number with sum 5. Prove that

$$(a^2 + 3)(b^2 + 3)(c^2 + 3) \geq 192$$

3. A sequence of non-negative integers is dened by $G_1 = 1, G_2 = 2$ and $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + 1$ for every $n \geq 2$. Prove that for every positive integer $m$, there exists a positive integer $a$ such that $G_a, G_{a+1}$ are both divisible by $m$.

4. There are eight rooks on a chessboard, no two attacking each other. Prove that some two of the pairwise distances between the rooks are equal. (The distance between two rooks is the distance between the centers of their cells.)

5. $3n$ points are marked on a circle, dividing it into $3n$ arcs, $n$ of which have length 1, $n$ others have length 2, and $n$ have length 3. Prove that it is possible to nd two marked points diametrically opposite to each other.

6. Let $ABCD$ be a fixed ~~xed~~ parallelogram with $AB < BC$, and let $P$ be a variable point on side $CD$. Let $Q$ be the point on side $BC$ so that $PC = CQ$. Prove that, as $P$ moves, the circumcircle of $\triangle APQ$ passes through a fixed ~~xed~~ point in addition to $A$. tarik garis sumbunya PQ. Jika A' refleksi A, maka A' fixed pointnya.

7. A convex quadrilateral $ABCD$ has $| AD |=| CD |$ and $\angle DAB = \angle ABC < 90°$. The line through $D$ and the midpoint of $BC$ intersects line $AB$ in point $E$. Prove that $\angle BEC = \angle DAC$.

8. Suppose that $ABCD$ is a parallelogram such that $\angle DAC = 90°$. Let $H$be the foot of perpendicular from $A$ to $DC$, also let $P$ be a point along the line $AC$ such that the line $PD$ is tangent to the circumcircle of the triangle $ABD$. Prove that $\angle PBA = \angle DBH$. $X = BD \cap AH$. Prove $\Delta PXB \sim \Delta HAB$ from $\Delta DXP \sim \Delta DHA \wedge \Delta DHX \sim \Delta BAX$

9. Find all triples $(m, n, l)$ of positive integers such that

$$m + n = gcd(m, n)^2,$$

$$m + l = gcd(m, l)^2,$$

$$n + l = gcd(n, l)^2.$$

10. Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that

$$f(mn) = \text{lcm}(m, n) \cdot \text{gcd}(f(m), f(n))$$

for all natural numbers $m, n$.