Azzam Labib Hakim

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES I PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019
Rabu, 26 September 2018
Waktu: 240 menit (4 jam)

Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan.
Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajad, dan penggaris segitiga.
Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah tujuh.

√ 1. Diberikan segitiga lancip ABC. Terdapat sebuah persegi $PQRS$ yang keempat titik sudutnya terletak pada sisi-sisi ΔABC, dengan P dan Q terletak pada segmen BC, R dan S masing-masing terletak pada segmen AC dan AB, dan P terletak diantara B dan Q. Garis melalui P yang tegak lurus AB memotong QR di K, dan garis melalui Q tegak lurus AC memotong PS di L. Garis CK dan LB berpotongan di M. Misalkan O adalah pusat persegi $PQRS$, buktikan bahwa OM membagi dua $\angle BMC$ sama besar. $\angle BMO = 45° = \angle OMC$

√ 2. Tentukan bilangan asli terkecil $n > 2$ sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat tak nol berbeda $a_1, \ldots, a_n$ dengan a_i dan a_j relatif prima untuk setiap $i \neq j$ dan memenuhi $a_1^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + \cdots + a_n)^2 = 0$. $n=5$ $(-9,-5,-1,7,8)$

√ 3. Dalam sebuah pesta, setiap peserta mengenal tepat 201 peserta lainnya. Setiap dua peserta yang saling mengenal satu sama lain, terdapat tepat 8 peserta lainnya yang dikenal kedua orang tersebut dan setiap dua peserta yang tidak saling mengenal, terdapat tepat 24 peserta lainnya yang dikenal kedua peserta tersebut. Perhatikan bahwa a mengenal b jika dan hanya jika b mengenal a. Tentukan banyaknya peserta dalam pesta tersebut. 1810

√ 4. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sehingga

$$(y + f(x))\, f(x + f(y)) = yf(x)$$

untuk ssetiap $x, y \in \mathbb{R}^+$. $f(x) = \frac{1}{ax}$

AZZAM LABIB HAKIM

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES II PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019
Sabtu, 29 September 2018
Waktu: 240 menit (4 jam)

Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan.
Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajad, dan penggaris segitiga.
Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah tujuh.

1. Diberikan segitiga lancip ABC dengan pusat lingkaran dalam I. Titik P terletak di dalam segitiga ABC yang memenuhi $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$.

   a. Buktikan bahwa $AP \geq AI$.

   b. Kapan tanda sama terjadi?

2. Untuk segitiga ABC sebarang, buktikan bahwa

$$\frac{1}{\tan^3\frac{A}{2} + \left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^3} + \frac{1}{\tan^3\frac{B}{2} + \left(\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\right)^3} + \frac{1}{\tan^3\frac{C}{2} + \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)^3} < \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

3. Untuk dua persegi panjang A dan B pada suatu bidang, nyatakan dengan $A \subseteq B$ jika A dapat ditempatkan di dalam B. Sebagai contoh, jika A adalah persegi panjang dengan ukuran 1×2, B adalah persegi panjang dengan ukuran 2×2, dan C adalah persegi panjang dengan ukuran 3×1, maka $A \subseteq B$ dan $A \subseteq C$, tetapi tidak berlaku $B \subseteq C$ maupun $C \subseteq B$. Tunjukkan bahwa di antara 2018 persegi panjang yang panjang sisinya bilangan bulat positif tidak lebih besar dari 134, terdapat 31 persegi panjang $A_1, A_2, ..., A_{31}$, sehingga $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_{31}$.

4. Bilangan asli (m, n) dikatakan *couple* jika dapat ditemukan bilangan bulat non negatif $p \leq n$ yang memenuhi

$$m! + n! + 2018 = m^{n-p}.$$

   Temukan semua bilangan *couple* (m, n).

AZZAM LABIB HAKIM

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES III PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019
Minggu, 7 Oktober 2018
Waktu: 240 menit (4 jam)

Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan.
Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajad, dan penggaris segitiga.
Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah tujuh.

1. Tentukan semua polinomial kuadrat $Q(x)$ (polinomial berderajat dua) sehingga untuk setiap bilangan real a dan bilangan real positif b berlaku pernyataan:

$$\text{jika } Q(a) + Q(b) \neq 0 \text{ maka } Q\left(\frac{a+b}{2}\right) + Q\left(\frac{a-b}{2}\right) \neq 0.$$

2. Sebanyak n titik dengan koordinat bilangan bulat positif pada bidang kartesius diberi tanda. Diketahui bahwa jika titik (x, y) diberi tanda, maka semua titik dengan koordinat bilangan bulat positif (x', y'), dimana $x' \leq x, y' \leq y$, juga diberi tanda. Untuk setiap titik (x, y) yang bertanda, $R(x, y)$ menyatakan banyaknya titik (x', y') yang bertanda, dengan $x' \geq x$ dan $y' \geq y$.

   Buktikan bahwa terdapat setidaknya $\frac{n}{4}$ titik (x, y) dengan $R(x, y)$ ganjil.

3. Untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$, didefinisikan $a_n = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k}$ dimana $p_1, \ldots, p_k$ merupakan faktor-faktor prima berbeda dari n. Tunjukkan bahwa

$$\frac{N}{3} < \sum_{n=2}^{N} a_n < \frac{N}{2}$$

   untuk setiap bilangan asli $N \geq 15$.

4. Diberikan segitiga lancip ABC yang bukan sama kaki dengan $\angle BAC = 45^\circ$. Garis-garis tinggi AD, BE, CF berpotongan di H. Garis EF memotong BC di P. Titik I pertengahan segmen BC, dan IF memotong PH di Q.

   (a) Buktikan bahwa $\angle IQH = \angle AIE$.

   (b) Misalkan K titik tinggi segitiga AEF dan J pusat lingkaran luar segitiga PKD. Garis CK memotong lingkaran luar segitiga PKD di G $(G \neq K)$, garis IG memotong lingkaran luar segitiga PKD di M $(M \neq G)$. dan garis JC memotong lingkaran dengan diameter BC di N $(N \neq C)$.

   Buktikan bahwa C, G, M, N terletak pada satu lingkaran.

AZZAM LABIB HAKIM

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES IV PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019
Sabtu, 13 Oktober 2019
Waktu: 240 menit (4 jam)

Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan.
Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajad, dan penggaris segitiga.
Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah tujuh.

1. Hitunglah banyaknya polinomial $P(x)$ dengan koefisien-koefisien dipilih dari $\{0, 1, 2, 3\}$ sedemikian sehingga $P(2) = 2019$

2. Didefinisikan barisan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dengan $x_1 = 1$ dan $x_n = x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}}$ untuk $n \geq 2$. Buktikan bahwa
$$\sum_{n=1}^{2019} \frac{1}{x_n} < 3.$$

3. Dierikan segitiga ABC dengan $AB > AC$. Suatu lingkaran ω menyinggung busur (ABC) ~~(ABC) di~~ BC yang tidak memuat A di titik T dan menyinggung segmen AB di F. Jika I adalah pusat lingkaran dalam segitiga ABC maka buktikan bahwa A, I, T kolinear jika dan hanya jika FI sejajar BC.

4. Tentukan semua bilangan prima p dan q yang memenuhi $3p^{q-1} + 1$ membagi habis $11^p + 17^p$.

AZZAM LABIB HAKIM

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES SIMULASI I
PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019
Rabu, 17 Oktober 2018
Waktu: 270 menit (4,5 jam)

Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan.
Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajad, dan penggaris segitiga.
Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah tujuh.

English

1. Let n be a given positive integer and let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be a positive real numbers. Prove that

$$x_1(1-x_1^2) + x_2\left(1-(x_1+x_2)^2\right) + \cdots + x_n\left(1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\right) < \frac{2}{3}.$$

2. There are n stone piles each consisting of 2018 stones. The weight of each stone is equal to one of the numbers $1, 2, \ldots, 25$ and the total weights of any two piles are different. It is given that if we choose any two piles and remove the heaviest and lightest stones from each of these two piles then the pile which was the heavier one becomes the lighter one. Determine the maximal possible value of n.

3. Let ABC be a triangle, let I be its incenter, let Ω be its circumcircle, and let ω be the circle tangent to the sides AB and AC, and internally tangent to Ω. Let D, E and T be the points of contact of ω and AB, AC and Ω, respectively, let the line IT cross ω again at P, and let the lines PD and PE cross the line BC at M and N respectively. Prove that the points D, E, M, N lie on a circle. What is the center of this circle?

Indonesia

1. Diberikan bilangan bulat positif n dan bilangan real positif $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Buktikan bahwa

$$x_1(1-x_1^2) + x_2\left(1-(x_1+x_2)^2\right) + \cdots + x_n\left(1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\right) < \frac{2}{3}.$$

2. Terdapat n tumpukan batu dengan masing-masing tumpukan terdiri dari 2018 batu. Berat masing-masing batu adalah salah satu diantara bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, 25$ dan setiap dua tumpukan yang berbeda memiliki berat total yang berbeda. Diketahui bahwa untuk setiap dua tumpukan, jika batu terberat dan teringan pada kedua tumpukan tersebut dibuang maka tumpukan yang mulanya lebih berat menjadi lebih ringan. Tentukan nilai n terbesar yang mungkin.

3. Diberikan segitiga ABC, dengan I pusat lingkaran dalamnya, Ω lingkaran luarnya, dan misalkan ω lingkaran yang menyinggung sisi AB dan AC, dan meyinggung Ω didalam. Misalkan D, E dan T titik singgung dari ω pada AB, AC dan Ω, berturut-turut, misalkan garis IT memotong ω lagi pada P, dan misalkan garis PD dan PE memotong garis BC pada M dan N berturut-turut. Buktikan titik D, E, M, N terletak pada satu lingkaran. Dimanakah pusat lingkaran ini?

AZZAM LABIB HAKIM

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES SIMULASI II
PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019
Sabtu, 20 Oktober 2018
Waktu: 270 menit (4,5 jam)

Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan.
Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajad, dan penggaris segitiga.
Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah tujuh.

English

1. Let H be the orthocenter of an acute-angled triangle ABC ($AB \neq AC$) and let F (which is not A) be the point on the circumcircle of the triangle such that $\angle AFH = 90°$. Point K is symmetric to H with respect to B, point P is such that $\angle PHB = \angle PBC = 90°$, and Q is the foot of perpendicular from point B to CP. Prove that line HQ is tangent to the circumcircle of $\triangle FHK$.

2. Prove there exist an integer $n > 2018^{2018}$ such that the sum of all primes which are smaller than n is coprime to n.

3. Let S be a positive number such that for any collection of numbers (at least two numbers) from $(0, 1]$ whose sum is equal to S, one can always divide all of them into two groups such that the sum of the numbers in the first group does not exceed 1 and the sum of numbers in the second group does not exceed 5.

   Find the maximum possible value of S.

Indonesia

1. Misalkan H merupakan titik tinggi dari segitiga lancip ABC (dengan $AB \neq AC$) dan misalkan F (F bukan A) adalah titik pada lingkaran luar segitiga sehingga $\angle AFH = 90°$. Titik K simetris dengan H terhadap B, titik P sedemikian sehingga $\angle PHB = \angle PBC = 90°$, dan Q merupakan kaki garis tinggi dari titik B ke CP. Buktikan bahwa garis HQ menyinggung lingkaran luar $\triangle FHK$.

2. Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat $n > 2018^{2018}$ sehingga jumlah semua bilangan prima kurang dari n relatif prima terhadap n.

3. Misalkan S adalah bilangan positif yang memenuhi: setiap koleksi dua atau lebih bilangan di $(0, 1]$ yang jumlahnya S, selalu dapat dibagi kedalam dua grup sedemikian sehingga jumlah seluruh bilangan di grup pertama tidak lebih dari 1 dan jumlah seluruh bilangan di grup kedua tidak lebih dari 5.

   Tentukan nilai maksimum dari S.