## A. ANALISIS REAL

### BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong. Jika $\sup A = \inf A$, maka himpunan $A$ adalah ...
2. Jika $\lim\limits_{x\to c} \frac{a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n}{(x-c)^n} = 0$, maka $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \cdots$
3. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \cdots$
4. Diketahui fungsi $f: [-5, 4] \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika $E = \{x \in [-5, 4]: f(x) = x\}$, maka closure dari $E$ adalah ...
5. Nilai $\lim\limits_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{2x^n}{x + x^{2n+1}}\, dx = \cdots$
6. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,
$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx}{2n-1}, & x \in \left[0, \dfrac{2n-1}{n}\right] \\ 1, & x \in \left[\dfrac{2n-1}{n}, 2\right] \end{cases},$$
maka untuk $n \to \infty$, $\int_1^2 f_n(x)\, dx$ konvergen ke ...
7. Diketahui $a \in \mathbb{R}$ dan fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi $|xf(x) + a| < \sin^2(x-a)$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Nilai $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$
8. Diketahui barisan bilangan real $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ keduanya konvergen ke 0. Jika $\{b_n\}$ turun monoton dan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 2018$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{2b_n} = \cdots$

### BAGIAN KEDUA

1. Selidiki kekonvergenan barisan bilangan real $\{x_n\}$, dengan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$, $n \geq 1$.
2. Buktikan pernyataan berikut: Jika untuk setiap $n$, $f_n$ merupakan fungsi naik dan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke $f$ pada $[a, b]$, maka
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx\,.$$
3. Diketahui fungsi $f$ mempunyai turunan yang kontinu pada $[a, b]$. Jika $f(a) = f(b) = 0$ dan $\int_a^b [f(x)]^2\, dx = 1$, buktikan bahwa
$$\int_a^b x^2 [f'(x)]^2\, dx \geq \frac{1}{4}.$$

## B. KOMBINATORIKA

### BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya subset dari himpunan $\{1, 2, \dots, 25\}$ yang terdiri dari 3 bilangan sehingga dalam sebuah subset tidak terdapat dua bilangan berurutan adalah ...
2. Sebuah klub bulu tangkis mempunyai 35 anggota terdiri dari 15 anak laki-laki dan 20 anak perempuan. Klub akan membentuk 10 pasangan ganda campuran. Banyaknya cara yang mungkin untuk membentuk 10 pasangan ganda campuran adalah ...
3. Sebuah toko roti memproduksi 8 jenis donat. Donat dikemas dalam kotak berisi 12 buah donat. Banyaknya cara untuk mengisi sebuah kotak sehingga terdapat sedikitnya satu buah donat untuk setiap jenis adalah ...
4. Untuk bilangan bulat positif $n \geq 2$, nilai dari $\sum_{k=2}^{n}(-1)^k k \binom{n}{k}$ adalah ...
5. Misalkan $b_n$ adalah banyaknya untaian atas $n$ huruf yang dapat dibentuk dengan menggunakan $A$, $B$ dan $C$ sedemikian sehingga bila huruf $A$ muncul bukan sebagai huruf akhir pada untaian, maka $A$ harus segera diikuti oleh $B$. Relasi rekurensi dari barisan $\{b_n\}$ adalah ...
6. Diberikan permutasi $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$ atas himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$ dengan $n \geq 7$. Banyaknya permutasi $\pi$ sehingga $\pi(1) = 5$ atau $\pi(3) = 7$ atau $\pi(6) = 2$ adalah ...
7. Dalam bentuk yang paling sederhana, fungsi pembangkit eksponensial (*exponential generating function*) dari barisan $(0!, 1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots)$ adalah ...
8. Diberikan sebuah graf sederhana $G$ atas 6 titik $v_1, v_2, \dots, v_6$. Bila $G$ mempunyai 8 sisi dan derajat dari titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_6$ masing-masing adalah 1, 3, 3, 3, dan 2, maka derajat dari titik $v_6$ adalah ...

### BAGIAN KEDUA

1. Perhatikan barisan Fibonacci dengan relasi rekurensi: untuk $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Definisikan matriks $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix}$.

   (a) Buktikan bahwa $F^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$.

   (b) Buktikan bahwa $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = \begin{cases} 1, & \text{bila } n \text{ genap} \\ -1, & \text{bila } n \text{ ganjil} \end{cases}$.

2. Andaikan $G$ adalah sebuah graf sederhana (*simple graph*). Bila $e$ adalah sebuah sisi yang menghubungkan titik $u$ dan titik $v$ di $G$, maka dikatakan bahwa titik $u$ bertetangga dengan titik $v$. Derajat dari sebuah titik $v$ di $G$ adalah banyaknya titik-titik yang bertetangga dengan $v$. Perlihatkan bahwa pada sebuah graf sederhana $G$ terdapat sedikitnya dua titik dengan derajat sama.
3. Tentukan banyaknya cara untuk mewarnai bujur sangkar $1 \times 1$ pada persegi panjang $1 \times n$ dengan menggunakan warna merah, hijau, atau biru sedemikian sehingga terdapat sejumlah genap bujur sangkar berwarna merah.

## C. ALJABAR LINEAR

### BAGIAN PERTAMA

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{2018} = \cdots$

2. Jika $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta \end{bmatrix}$ dengan $\alpha^2 \neq 1 \neq \beta^2$, maka $\det(A) = \cdots$

3. Diberikan vektor-vektor $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Salah satu basis subruang dari $\mathbb{R}^{2\times 2}$ yang dibangun oleh keempat vektor tersebut adalah ...

4. Pemetaan $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai
$$f(u, v) = u_1v_1 - 3u_2v_1 - 3u_1v_2 + ku_2v_2,$$
untuk setiap $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Himpunan semua nilai $k$ yang membuat $f$ hasil kali dalam di $\mathbb{R}^3$ adalah ...

5. Matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ memenuhi $A^TA = AA^T = 4I$. Himpunan semua nilai eigen $A$ adalah ...

6. Misalkan $D: P_2 \to P_2$ dengan $D(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x + a_1$, untuk semua $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Nilai eigen pemetaan $D^2 + D + I$ mempunyai multiplitas geometri ...

7. Misalkan $K$ adalah ruang nol matriks $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Maka $K^\perp = \cdots$

8. Misalkan $T: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dengan $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$, untuk semua bilangan real $a, b, c, d$. Himpunan $X = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ adalah basis $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Maka $[T]_X = \cdots$

### BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah transformasi linier pencerminan terhadap garis $y = \left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)x$. Tentukanlah $T(-5, 4)$.

2. Misalkan $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Buktikan bahwa $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

3. Misalkan $x \in \mathbb{C}^n$ dengan $\|x\|_2 = 1$. Tentukan semua nilai eigen matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & x^* \\ x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ serta vektor-vektor eigennya.

## D. ANALISIS KOMPLEKS

### BAGIAN PERTAMA

1. Bilangan bulat terkecil $n$ dengan $n \geq 2018$ sehingga $\left(\sqrt{3}+3i\right)^n$ merupakan bilangan real adalah ...
2. Diketahui bahwa segi-12 dan segi-18 beraturan dengan lingkaran luar yang jari-jarinya satu satuan mempunyai $T$ titik persekutuan, dengan $T > 1$. Nilai $T$ adalah ...
3. Apabila diketahui fungsi
$$f(z) = z\text{Re}(z) + \bar{z}\text{Im}(z) + \bar{z}$$
terdiferensial kompleks di titik $z_0$, maka nilai dari $f'(z_0)$ adalah ...
4. Nilai integral kompleks
$$\int_{|z|=1} \left(z^2 \sin\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\sin z\right)\, dz$$
adalah ...

### BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $z \in \mathbb{C}$ sehingga $|1+z^2| < 1$. Tunjukkan bahwa $2|1+z|^2 \geq 1$.
2. Diberikan $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ adalah sebuah suku banyak kompleks berderajat $n > 0$ dan $\gamma$ adalah lingkaran $|z| = r$. Buktikan
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{|p(z)|^2}{z^{1-n}}\, dz = a_0 \bar{a}_n r^{2n}.$$

## E. STRUKTUR ALJABAR

### BAGIAN PERTAMA

1. Suatu subgrup $\mathbf{H}$ di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ disebut *swapped* jika setiap $(a, b)$ di $\mathbf{H}$, berlaku $(b, a)$ juga di $\mathbf{H}$. Banyaknya subgrup bertipe *swapped* di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ adalah ...
2. Himpunan $\Omega = \{e^{(2k\pi i)/(7^m)} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, dimana $e$ merupakan bilangan Euler dan $i^2 = -1$, membentuk grup dengan operasi perkalian biasa. Banyaknya $\omega \in \Omega$ sedemikian sehingga $\Omega = \langle \omega \rangle$ adalah ...
3. Misalkan $\mathbb{Z}_2[x]$ merupakan ring polinom dengan koefisien di $\mathbb{Z}_2$ dan $I$ merupakan ideal yang dibangun oleh $f(x) = x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$. Banyaknya unsur pembagi nol di ring $\mathbf{R} = \mathbb{Z}_2[x]/I$ adalah ...
4. Diberikan ring komutatif $\mathbb{Z}_3[v] \coloneqq \{\alpha_0 + \alpha_1 v \mid \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{Z}_3\}$, dimana $v \notin \mathbb{Z}_3$ dan $v^2 = v$. Banyaknya ideal maksimal di $\mathbb{Z}_3[v]$ adalah ...

### BAGIAN KEDUA

1. Diberikan sebarang grup $(G,*)$ dan $A, B \subseteq G$, kita notasikan $A * B \coloneqq \{a * b \mid a \in A, b \in B\}$.
   (a) Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 3$ terdapat $A, B \subseteq (\mathbb{Z}_n, +)$ dengan $A, B \neq \mathbb{Z}_n$ dan $|A \cap B| = 1$ sedemikian sehingga $\mathbb{Z}_n = A + B$.
   (b) Buktikan bahwa jika $|A| + |B| > |G|$ maka $G = A * B$.
2. Misalkan $K$ suatu lapangan hingga. Buktikan bahwa $1 + 1 = 0$ di $K$ jika dan hanya jika untuk setiap $f \in K[x]$ dengan derajat $f$ lebih besar atau sama dengan 1 polinom $f(X^2)$ merupakan polinom tereduksi.