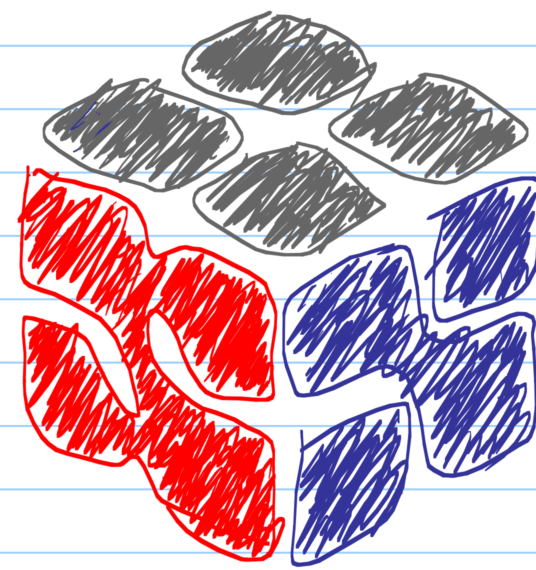
Pembahasan OSP Matematika SMA 2018



Oleh :
Pak Anang
http://pak-anang.blogspot.com

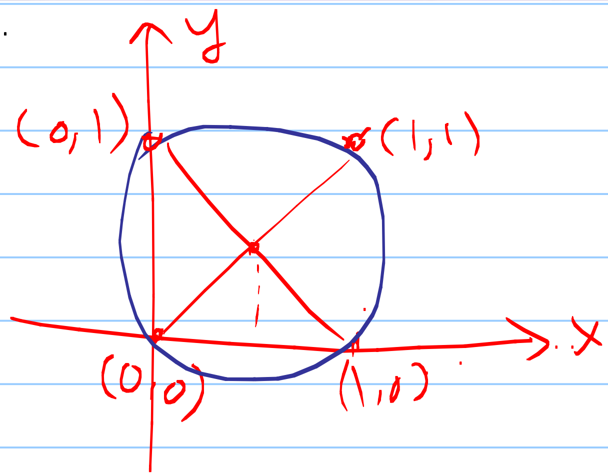
Pembahasan OSP Matematika SMA 2018

Oleh :

Pak Anang

http://pak-anang.blogspot.com

1. Banyaknya pasangan terurut bilangan bulat (a, b) sehingga $a^2 + b^2 = a + b$ adalah ....



ada 4 $\rightarrow$ (0,0)
(0,1)
(1,1)
(1,0)

1. Banyaknya pasangan terurut bilangan bulat (a, b) sehingga $a^2 + b^2 = a + b$ adalah ....

Cara alternatif :

$$a^2 + b^2 = a + b$$

$$a^2 - a + b^2 - b = 0$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \times 2^2$$

$$\underbrace{\underbrace{(2a-1)^2}_{} + \underbrace{(2b-1)^2}_{}}_{\text{ganjil}} = \underbrace{2}_{\text{genap}}$$

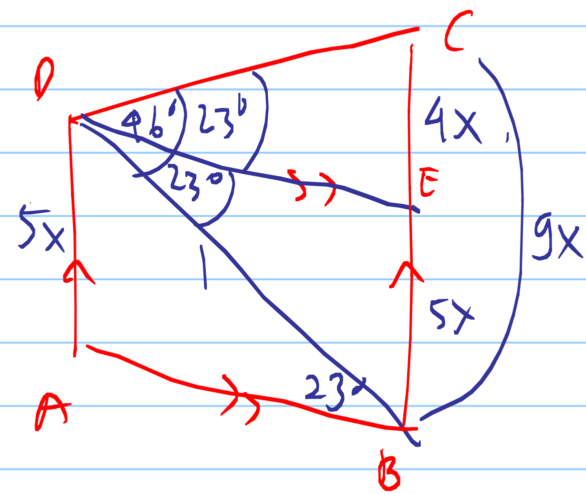
$(2a-1) = \pm 1 \rightarrow a = 1,\ a = 0$

$(2b-1) = \pm 1 \rightarrow b = 1,\ b = 0$

$(a,b) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

ada 4 pasangan terurut (a,b)

2. Diberikan trapesium $ABCD$, dengan AD sejajar BC. Diketahui $BD = 1$, $\angle DBA = 23^\circ$, dan $\angle BDC = 46^\circ$. Jika perbandingan $BC : AD = 9 : 5$, maka panjang sisi CD adalah ....



dari sifat garis bagi DE

$$\frac{DB}{BE} = \frac{DC}{CE}$$

$$\frac{1}{5x} = \frac{DC}{4x}$$

$$DC = \frac{4}{5}$$

3. Misalkan $a > 0$ dan $0 < r_1 < r_2 < 1$ sehingga $a + ar_1 + ar_1^2 + \cdots$ dan $a + ar_2 + ar_2^2 + \cdots$ adalah dua deret geometri tak hingga dengan jumlah berturut-turut r_1 dan r_2. Nilai $r_1 + r_2$ adalah ....

$$r = \frac{a}{1-r} \Rightarrow r^2 - r + a = 0 \begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases}$$

$$r_1 + r_2 = 1$$

3. Misalkan $a > 0$ dan $0 < r_1 < r_2 < 1$ sehingga $a + ar_1 + ar_1^2 + \cdots$ dan $a + ar_2 + ar_2^2 + \cdots$ adalah dua deret geometri tak hingga dengan jumlah berturut-turut r_1 dan r_2. Nilai $r_1 + r_2$ adalah ....

Cara alternatif

$$r = \frac{a}{1-r} \Rightarrow r_1 = \frac{a}{1-r_1} \text{ dan } r_2 = \frac{a}{1-r_2}$$

$$r_1 - r_1^2 = a \qquad r_2 - r_2^2 = a$$

$$r_1 - r_1^2 = r_2 - r_2^2 \Rightarrow (r_1^2 - r_2^2) - (r_1 - r_2) = 0$$

$$(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) - (r_1 - r_2) = 0$$

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2 - 1) = 0$$

$$\cancel{r_1 = r_2} \text{ (TM)} \quad \vee \quad r_1 + r_2 = 1$$

4. Diketahui $S = \{10, 11, 12, \ldots, N\}$. Suatu unsur di S dikatakan *trubus* jika jumlah digit-digitnya merupakan pangkat tiga dari suatu bilangan asli. Jika S memiliki tepat 12 trubus, maka nilai terbesar N yang mungkin adalah ....

Σ digit $= 1 = 1^3 \rightarrow$ 10 dan 100 $\rightarrow$ 2 buah

Σ digit $= 8 = 2^3 \rightarrow$ 17, 26, ..., 80 $\}$ 8 buah

kurang 2 lagi $\rightarrow$ 107, 116 $\}$ 2 buah

+ 12 buah

trubus berikutnya 125

sehingga, N terbesar adalah $N < 125$

Jadi, $N = 124$.

5. Bilangan asli terkecil n sehingga $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ habis dibagi 30 adalah ....

$$\frac{2n!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}$$

Nguli yuk!

1. $\rightarrow \frac{2}{1} = 2$.
2. $\rightarrow \frac{3\,4}{1\,2} = 6$
3. $\rightarrow \frac{4\,5\,6}{1\,2\,3} = 20$
4. $\rightarrow \frac{5\,6\,7\,8}{1\,2\,3\,4} = 70$
5. $\rightarrow \frac{6\,7\,8\,9\,10}{1\,2\,3\,4\,5} = 252$
6. $\rightarrow \frac{7\,8\,9\,10\,11\,12}{1\,2\,3\,4\,5\,6} = 924$
7. $\rightarrow \frac{8\,9\,10\,11\,12\,13\,14}{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7} = 3432$
8. $\rightarrow \frac{9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16}{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8} = 12870$

bisa dibagi 30

Jadi $n = 8$

5. Bilangan asli terkecil n sehingga $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ habis dibagi 30 adalah ....

cara alternatif

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1.2.3.4\ldots 2n}{(n!)^2} = \frac{\prod(2n-1) . \prod \cancel{2n}^{2^n}}{\prod n \cancel{\prod n}}$$

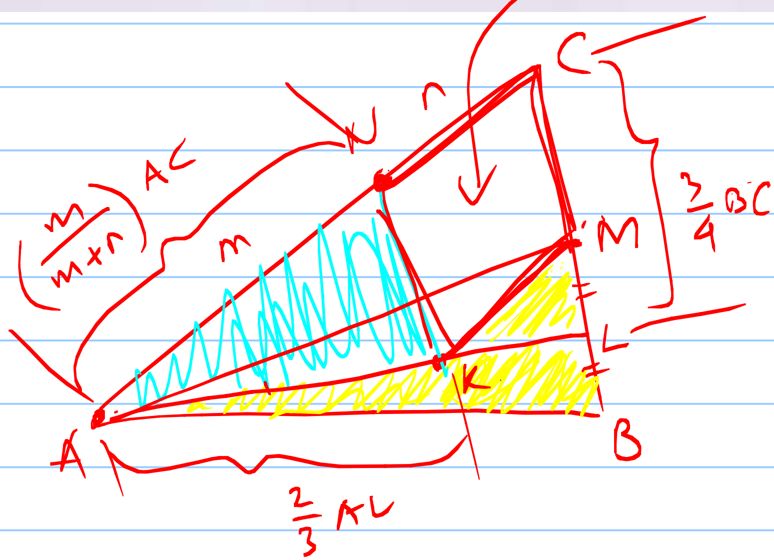
$$= 2^n\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\right)$$

agar bisa dibagi $30 = 2.3.5$ jadi $2n-1 = 15$

$2n = 16$

$n = 8$

6. Diberikan segitiga tak samakaki ABC dengan M titik tengah BC. Misalkan K adalah titik berat segitiga ABM. Titik N pada sisi AC sehingga luas segiempat $KMCN$ setengah dari luas segitiga ABC. Nilai $\frac{AN}{NC}$ adalah ....



$$[ABL] = \frac{1}{4}[ABC]$$
$$[KLM] = \frac{1}{12}[ABC]$$
$$[AKN] = x\,[ABC]$$
$$[KMCN] = \frac{1}{2}[ABC]$$
$$[ABC] = [ABC]$$

$$[AKN] = \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)\right)[ABC]$$
$$= \frac{1}{6}[ABC]$$

$$[AKN] = \cancel{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}\cdot\frac{m}{m+n}[ABC]$$
$$\frac{1}{6}\cancel{[ABC]} = \frac{1}{2}\,\frac{m}{m+n}\cancel{[ABC]}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Jadi $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$

7. Di dalam suatu kotak terdapat n kelereng merah dan m kelereng biru. Diambil 5 kelereng sekaligus. Jika peluang terambilnya 3 kelereng merah dan 2 biru $\frac{25}{77}$, maka nilai terkecil $m^2 + n^2$ yang mungkin adalah ….

$$\frac{{}_nC_3 \cdot {}_mC_2}{{}_{(n+m)}C_5} = \frac{25}{77} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}} \cdot \frac{m(m-1)}{2\cdot 1}}{\frac{m(m+n-1)\cdots(m+n-4)}{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}} = \frac{25}{77}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\,m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+n-4)} = \frac{5}{154} \rightarrow \frac{5}{2\cdot 11\cdot 7}$$

karena 11 dan 7 prima maka jelas $m+n=11$
11−7 ada 5 bilangan

$$\frac{n(n-1)(n-2)\,(11-n)(10-n)}{\cancel{11}\cdot 10\cdot 9\cdot \cancel{8}_{4}\cdot \cancel{7}} = \frac{5}{\cancel{14}}$$

$$n(n-1)(n-2)(11-n)(10-n) = 1800$$

jadi $n=5$
shg $m=6$

$$\left.\begin{array}{l} n=5 \\ m=6 \end{array}\right\} m^2+n^2 = 6^2+5^2 = 36+25 = 61$$

8. Misalkan $P(x)$ suatu polinom (suku banyak) *tak konstan* dengan koefisien bilangan bulat tak negatif yang memenuhi $P(10) = 2018$. Misalkan m dan M berturut-turut adalah nilai minimum dan maksimum yang mungkin dari $P(1)$. Nilai $m + M$ adalah ....

diingat $P(x) \leq 3$ mengingat $2018 < k \cdot 10^4$ dg k bil bulat posit.

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dengan $a, b, c, d \geq 0$ dan $a \& b \& c \neq 0$, mengingat $P(x)$ tak konstan

$P(10) = 1000a + 100b + 10c + d = 2018$

$P(1) = a + b + c + d$

agar $P(1)$ max maka c minimum $\rightarrow c = 1$ dan $d = 2008$, shg $P(1) = 2009 = M$

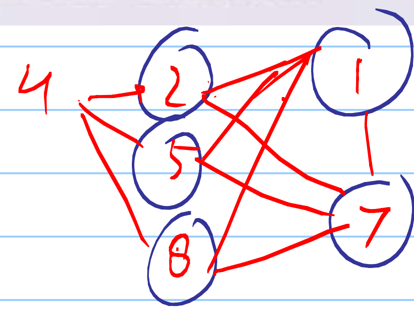
agar $P(1)$ min maka a maksimum $\rightarrow a = 2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 8$, shg $P(1) = 11 = m$

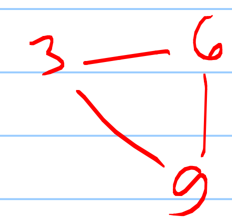
Jadi $m + M = 11 + 2009 = 2020$ //

9. Sebuah provinsi terdiri dari sembilan kota yang diberi nama 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dari kota a terdapat jalan langsung ke kota b jika dan hanya jika $\overline{ab}$ dan $\overline{ba}$ merupakan bilangan dua digit yang habis dibagi 3. Dua kota *berbeda* a_1 dan a_n dikatakan terhubung jika terdapat barisan kota-kota $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sehingga terdapat jalan langsung dari a_i ke a_{i+1} untuk setiap $i = 1, \ldots, n-1$. Banyaknya kota yang terhubung dengan kota 4 adalah ....

$3 \mid \overline{ab}$

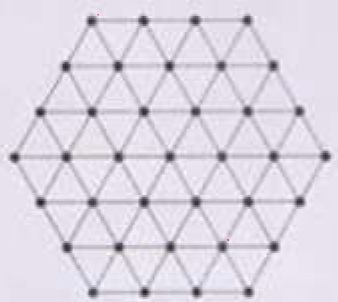
$3 \mid \overline{ba}$



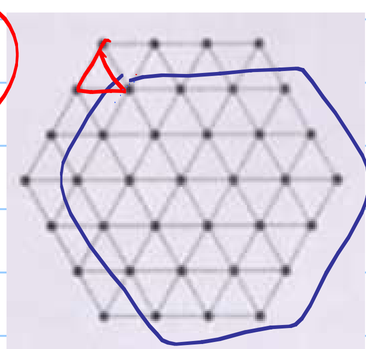


Jadi ada 5 kota yg terhubung dg kota 4

10. Diberikan 37 titik seperti pada gambar sehingga setiap dua titik yang bertetangga berjarak satu satuan. Dari setiap tiga titik berbeda digambar segitiga merah. Banyaknya kemungkinan panjang sisi segitiga merah yang sama sisi adalah ....

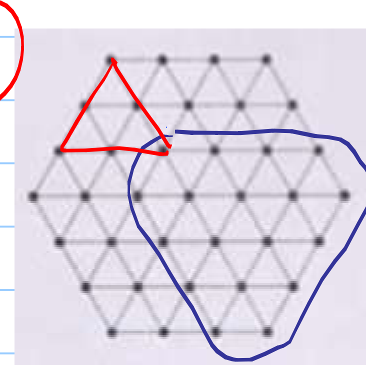


#1



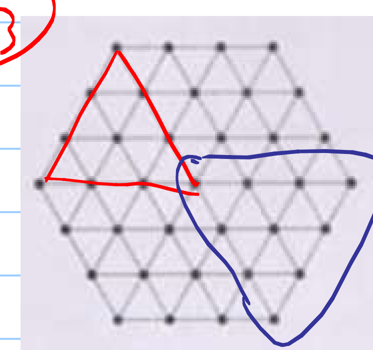
$4+5+6$
$+5+4+3$
$=27$

#2



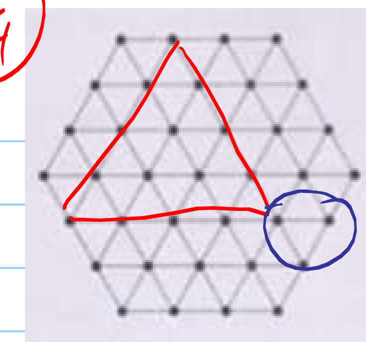
$4+5+4$
$+3+2$
$=18$

#3



$4+3+2+1$
$=10$

#4



$2+1$
$=3$

Jadi $\sum \triangle_{\text{sama sisi}} = 2(27+18+10+3)$

$= 116$

Kalo yg ditanya banyak kemungkinan panjang sisi segitiga sama sisi ada 4

11. Diambil secara acak suatu bilangan bulat positif k dengan $k \leq 2018$. Peluang k^{1009} bersisa 2 jika dibagi 2018 adalah ....

TFK $k \equiv k^{1009} \bmod 1009$

$2k \equiv 2k^{1009} \bmod 2018$

$k \equiv k^{1009} \bmod 2018$

shg untuk $k \leq 2018$

$2 \equiv k^{1009} \bmod 2018 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow n(A) = 1.$

padahal k bilbul positif $k \leq 2018$, shg $n(S) = 2018$

$$\left.\begin{matrix} n(A) = 1 \\ n(S) = 2018 \end{matrix}\right\} P(A) = \frac{1}{2018}$$

12. Diberikan bilangan real tak negatif a, b, c, d, e dengan $ab + bc + cd + de = 2018$. Nilai minimum dari $a + b + c + d + e$ adalah ....

$$\frac{(a+c+e)+(b+d)}{2} \geq \sqrt{ab+bc+cd+de+ad+be}$$

$$\left(\frac{a+b+c+d+e}{2}\right)^2 \geq 2018 + \underbrace{ad+be}$$

kita tahu $a,b,c,d,e \geq 0$ shg $ad+be \geq 0$

$$\frac{a+b+c+d+e}{2} \geq \sqrt{2018}$$

$$a+b+c+d+e \geq 2\sqrt{2018}$$

$ab+bc+cd+de = 2018$

ambil $a, e = 0$

$bc + cd = 2018$

$\underbrace{c}_{\sqrt{2018}}\,(\underbrace{b+d}_{\sqrt{2018}}) = 2018$

$(a+e)+c+(b+d) = 0 + \sqrt{2018} + \sqrt{2018}$

$= 2\sqrt{2018}$

13. Banyaknya himpunan bagian (termasuk himpunan kosong) dari $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2017, 2018\}$ yang tidak memiliki dua unsur x dan y sehingga $xy = 2018$ ada sebanyak $m2^n$ dengan m ganjil. Nilai $m + n$ adalah ....

2018 memiliki faktor 1, 2, 1009, 2018 $\rightarrow$ $A = (xy)_1 = (1 \cdot 2018)$
$\rightarrow$ $B = (xy)_2 = (2 \cdot 1009)$

$n(S)$ = banyak himpunan bagian $X = 2^{2018}$

$n(A)$ = banyak himpunan bagian yg memuat bilangan 1 dan 2018 $= 2^{2018-2} = 2^{2016}$

$n(B)$ = ——— " ——— 2 dan 1009 $= 2^{2018-2} = 2^{2016}$

$n(A \cap B)$ = ——— " ——— 1, 2, 1009 dan 1009 $= 2^{2018-4} = 2^{2014}$

Shg banyak himpunan bagian yg tdk memuat xy shg xy = 2018 adalah

$$= 2^{2018} - 2^{2016} - 2^{2016} + 2^{2014}$$
$$= 2^{2014}(2^4 - 2^2 - 2^2 + 1)$$
$$= 2^{2014}(16 - 4 - 4 + 1)$$
$$= 9 \cdot 2^{2014}$$

$\rightarrow m = 9,\ n = 2014 \rightarrow m + n = 9 + 2014 = 2023$ //

14. Misalkan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Diketahui ada tepat 1001 pasangan (a, b, c, d) dengan $a, b, c, d \in S$ dan $a < b < c < d$ sehingga a, b, c, d merupakan barisan aritmetika. Nilai n adalah ....

Perhatikan pola ini

a, b, c, d yg beda 1. $\quad 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$

ada n−3 pasangan

beda 2. $\quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots n$

ada n−6 pasangan

dst.

3 kemungkinan
$$1001 = 1 + 4 + 7 + \ldots + U_n, \quad 1 \equiv U_n \bmod 3$$
$$1001 = 2 + 5 + 8 + \ldots + U_n, \quad 2 \equiv U_n \bmod 3$$
$$1001 = 3 + 6 + 9 + \ldots + U_n, \quad 0 \equiv U_n \bmod 3$$

dimana $U_n = n - 3 \Rightarrow n = U_n + 3$ //

$1\ 2\ 3\ 4 \ldots\ 76\ 77\ 78\ 79$

76

14. Misalkan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Diketahui ada tepat 1001 pasangan (a, b, c, d) dengan $a, b, c, d \in S$ dan $a < b < c < d$ sehingga a, b, c, d merupakan barisan aritmetika. Nilai n adalah ....

$1 \le a < b < c < d \le n$

$1001 = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)3\right)$

$2002 = (2a-3)n + 3n^2$

$3n^2 + (2a-3)n - 2002 = 0$

$2002 = 2 \cdot 1001$, $1001 = 7 \cdot 143$, $143 = 11 \cdot 13$

$3\quad 2\quad 7\quad 11\quad 13$

$-3 \cdot 2002$

$-78 \mid 77$

$13 \times 6 = 78 \qquad 11 \times 7 = 77$

$78 : 3 = 26$

$a = 1 \rightarrow 2a - 3 = -1$

$a = 2 \rightarrow 2a - 3 = 1$

$a = 3 \rightarrow 2a - 3 = 3$

$3n^2 - n - 2002 = 0$

$\frac{(3n-78)(3n+77)}{3} = 0 \Rightarrow n = 26$

$U_n = a + (n-1)3$

$= 1 + 25 \cdot 3$

$= 76$

Jadi $n = 76 + 3 = 79$

14. Misalkan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Diketahui ada tepat 1001 pasangan (a, b, c, d) dengan $a, b, c, d \in S$ dan $a < b < c < d$ sehingga a, b, c, d merupakan barisan aritmetika. Nilai n adalah ....

cara alternatif

$1 \le a < b < c < d \le n$

jika beda 1, ada $n - 3(1)$ pasangan

2, ada $n - 3(2)$ pasangan

$\vdots$

$\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$, ada $n - 3\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ pasangan

Jadi $1001 = \dfrac{\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor}{2}\left(n - 3\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + n - 3(1) \right)$

$3\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor^2 + (3 - 2n)\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 2002 = 0$

$n = 79$ //

$n = -76$ (TM)

15. Banyaknya bilangan asli n sehingga

$$n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n + 10$$

merupakan bilangan prima adalah ....

$$\begin{array}{ccccc} 1 & a & 1 & & \\ & b & ab & b & \\ & & 10 & 10a & 10 \quad + \\ \hline 1 & (a+b) & (11+ab) & (10a+b) & 10 \end{array}$$

$$p = n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n + 10 = (n^2 + an + 1)(n^2 + bn + 10)$$

$$= n^4 + (a+b)n^3 + (11+ab)n^2 + (10a+b)n + 10$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+b = -5 \\ ab = -6 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 \end{array}\right\} \text{cek } (10a+b) = 10 - 6 = 4 \ ✓$$

Shg $n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n + 10 = (n^2 + n + 1)(n^2 - 6n + 10)$ → prima jika salah satu faktor adalah 1

untuk $n^2 + n + 1 = 1$

$n^2 + n = 0$

$n(n+1) = 0$

$n = 0 \vee n = -1$

TM TM

untuk $n^2 - 6n + 10 = 1$

$n^2 - 6n + 9 = 0$

$(n-3)^2 = 0$

$n = 3$

untuk $n = 3$

$n^2 + n + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$ (prima)

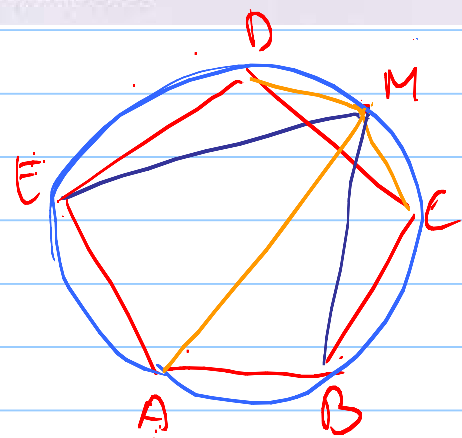
jadi $n = 3$ memenuhi.

Ada satu n yg memenuhi. //

16. Titik M terletak pada lingkaran luar segilima beraturan $ABCDE$. Nilai terbesar

$$\frac{MB + ME}{MA + MC + MD}$$

yang mungkin adalah ....



$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$

$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$

$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$

$\cos 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})$

Jadi pilih $r = 4$

$D(0,4)$

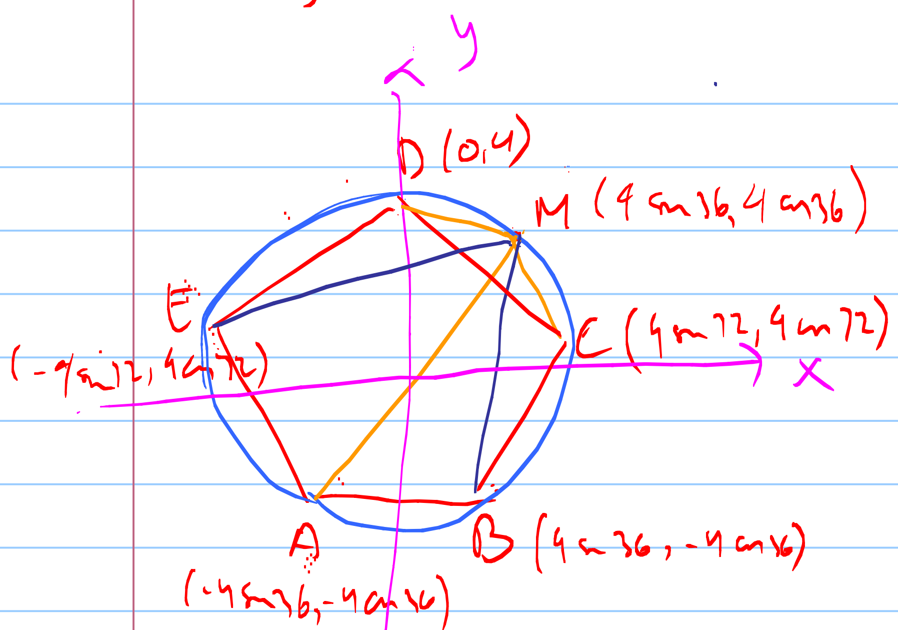
$E \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 72 & -\sin 72 \\ \sin 72 & \cos 72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \sin 72 \\ 4 \cdot \cos 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}$

$A \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \sin 36 \\ -4 \cos 36 \end{pmatrix}$

$B \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \sin 36 \\ -4 \cos 36 \end{pmatrix}$

$C \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \sin 72 \\ 4 \cos 72 \end{pmatrix}$

$x^2+y^2=16$



$$\frac{MB+ME}{MA+MC+MD} = ?$$

Apakah M di tengah $\overset{\frown}{DC}$ agar $\dfrac{MB+ME}{MA+MC+MD}$ maks.

$MB = 8\cos 36$

$ME = \sqrt{(4\sin 36 + 4\sin 72)^2 + (4\cos 36 - 4\cos 72)^2} = 8\cos 36$

$MA = 8$

$MC = 8\cos 72^\circ$

$MD = 8\cos 72^\circ$

$$\frac{MB+ME}{MA+MC+MD} = \frac{16\cos 36}{8(1+2\cos 72)} = \frac{2\cos 36}{1+2\cos 72} = \frac{2\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)}{1+2\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)}{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)} = 1 \;//$$

17. Untuk x, y bilangan real tak nol, jumlah nilai maksimum dan minimum

$$\frac{xy - 4y^2}{x^2 + 4y^2}$$

adalah ....

$$f(x,y) = \frac{xy - 4y^2}{x^2 + 4y^2} \times \frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y^2}} = \frac{\frac{x}{y} - 4}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4}$$

$$f(a) = \frac{a - 4}{a^2 + 4} \Rightarrow f'(a) = \frac{(a^2+4) - (a-4)2a}{(a^2+4)^2} = \frac{-a^2 + 8a + 4}{(a^2+4)^2}$$

$$f'(a) = 0 \Rightarrow -a^2 + 8a + 4 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 16}}{-2} = 4 \pm 2\sqrt{5} \rightarrow$$

min max

$-$ $+$ $-$

$4 - 2\sqrt{5}$ $4 + 2\sqrt{5}$

$$f_{max}(4 + 2\sqrt{5}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

$$f_{min}(4 - 2\sqrt{5}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

$+$

$$f_{max} + f_{min} = -1$$

bukan kata ← } → kata

$H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 \} H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}, H_{11}$

18. Suatu ras alien mempunyai suatu bahasa unik yang hanya terdiri dari dua huruf X dan Z. Dalam bahasa ini, setiap kata paling sedikit terdiri dari satu huruf dan tidak lebih dari 11 huruf. Untuk setiap dua kata, jika kata pertama dan kedua dituliskan berdampingan maka hasilnya bukan merupakan kata. Sebagai contoh jika XXZ dan $ZZZZX$ adalah kata, maka $XXZZZZZX$ bukan kata. Maksimal banyaknya kata dalam bahasa ini adalah ....

$\cancel{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5}$

bukan kata

$H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}, H_{11}$

kata

karena $H_{11} = \cancel{H_5} + H_6 = H_6 + \cancel{H_5}$

$= \cancel{H_4} + H_7 = H_7 + \cancel{H_4}$

dst

kata + kata = bukan kata

kata + bukan kata = kata

bukan kata + kata = kata

bukan kata + bukan kata = kata

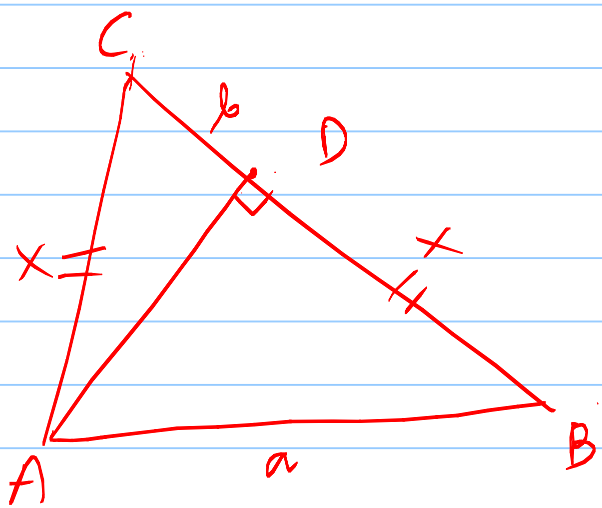
Karena $11 = 6 + 5$, perhatikan jika K_i adalah himpunan kata dg i huruf, jadi K_i akan merupakan kata jika i tidak dapat dinyatakan sbg penjumlahan dari dua buah bilangan.

sbg untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dianggap bukan kata, maka diperoleh banyak kata dalam bahasa alien tersebut maksimal, yaitu dengan $i = 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

Jadi, maksimal banyak kata adalah $2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} = \frac{2^6(2^6-1)}{2-1} = 2^{12} - 2^6 = 4096 - 64$

$= 4032$

19. Suatu segitiga lancip ABC memiliki panjang sisi bilangan bulat. Diketahui $AC = BD$ dengan D adalah titik pada garis BC sehingga AD tegak lurus BC. Nilai terkecil panjang sisi BC yang mungkin adalah ....



Ketaksamaan segitiga

$x + a > x + b \Rightarrow a > b$

$2x + b > a \Rightarrow x + b > a - x$

$x + a + b > x \Rightarrow a + b > 0$

$x^2 - b^2 = a^2 - x^2$

$2x^2 = a^2 + b^2$

karena $2 \mid a^2 + b^2$

maka a, b sama-sama ganjil atau genap

karena $a > b$, misal $a = b + 2n$,

$2x^2 = (b+2n)^2 + b^2$

$x^2 = b^2 + 2nb + 2n^2$

$x^2 = (b+n)^2 + n^2$

$$\underset{\downarrow}{5} \quad \underset{\downarrow}{4} \quad \underset{\downarrow}{3}$$

perhatikan $x^2 = (b+n)^2 + n^2$,

karena x, b, n bilangan bulat,

agar BC terkecil, maka dipilih

tripel pythagoras terkecil 3, 4, 5, shg

$n = 3$

$b + n = 4 \Rightarrow b = 1$

$x = 5$

shg, $a = b + 2n = 1 + 2(3) = 7$

Jadi panjang BC terkecil yg mungkin

$BC = x + b = 5 + 1 = 6$

20. Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Bilangan asli terbesar n sehingga

$$50\lfloor x \rfloor - \lfloor x\lfloor x \rfloor \rfloor = 100n - 27\lceil x \rceil$$

memiliki solusi real x adalah ....

jika x bulat

$$50\lfloor x \rfloor - \lfloor x\lfloor x \rfloor \rfloor = 100n - 27\lceil x \rceil$$

shg $x^2 - 77x + 100n = 0$

akan memiliki solusi real jika

$D \geq 0 \Rightarrow (-77)^2 - 4 \cdot 100n \geq 0$

$400n \leq 77^2$

$n \leq \frac{5929}{400}$

$n \leq 14{,}8\ldots$

Jadi, n terbesar 15.

jika x tidak bulat

untuk $0 < \delta < 1 \Rightarrow x = \lfloor x \rfloor + \delta$ dan $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$

$$50\lfloor x \rfloor - \lfloor (\lfloor x \rfloor + \delta)\lfloor x \rfloor \rfloor = 100n - 27(\lfloor x \rfloor + 1)$$

$\lfloor x \rfloor^2 - 77\lfloor x \rfloor + \lfloor \delta \lfloor x \rfloor \rfloor + 100n - 27 = 0 \rightarrow 0 < \lfloor \delta \lfloor x \rfloor \rfloor < \lfloor x \rfloor - 1$

$\lfloor x \rfloor^2 - 77\lfloor x \rfloor + (100n - 27) = 0$

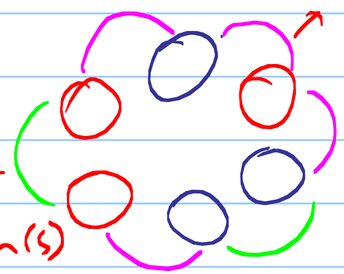
$D \geq 0 \Rightarrow n \leq 15{,}0925$

$\lfloor x \rfloor^2 - 76\lfloor x \rfloor + (100n - 28) = 0$

$D \geq 0 \Rightarrow n \leq 14{,}72$

Soal 1. Sejumlah n siswa duduk mengelilingi suatu meja bundar. Diketahui siswa laki-laki sama banyak dengan siswa perempuan. Jika banyaknya pasangan 2 orang yang duduk bersebelahan dihitung, ternyata perbandingan antara pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin sama dan pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin berbeda adalah 3 : 2. Tentukan n terkecil yang mungkin.

Jawaban:



misal :

○ = laki-laki.

○ = perempuan

Pada gambar disamping adalah contoh 6 orang, terdiri dari 3 laki-laki dan 3 perempuan duduk melingkar. Garis pink menunjukkan jenis kelamin berbeda bersebelahan, dan garis hijau menunjukkan jenis kelamin berbeda bersebelahan.

Ternyata banyak garis pink dan hijau sama dengan banyak anak.

Jika $n_\ell = n_p$ dan $s : b = 3 : 2$

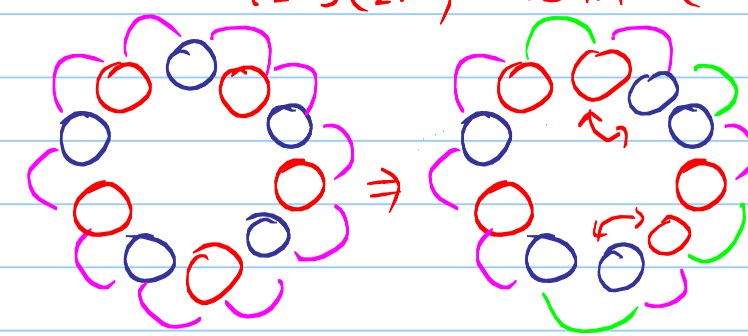
shg

$$\frac{s}{b} = \frac{3k}{2k} \quad \text{dan} \quad n_\ell + n_p = 3k + 2k = 5k$$

karena $n_\ell = n_p \Rightarrow 2n_\ell = 5k$

shg k adalah bil. genap

Jadi misal $k = 2m$, maka jumlah siswa $n = 5(2m) = 10m$. (kelipatan 10)



shg: $n = 10$ memenuhi $s : b = 3 : 2$.

Jadi n terkecil adalah 10.

Soal 2. Misalkan a, b, dan c bilangan bulat positif sehingga

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}.$$

Buktikan bahwa c adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat.

Jawaban:

$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$

agar c adalah bilangan kuadrat

maka $\frac{b}{a} - \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{b}$

$a = b^2$

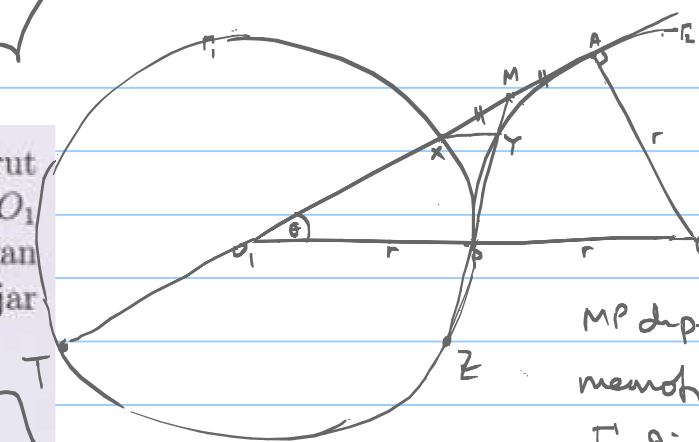
shg $c = b^2 + \frac{b}{b^2} - \frac{1}{b}$

$c = b^2$

terbukti c adalah kuadrat dari b, yaitu kuadrat dari bilangan bulat

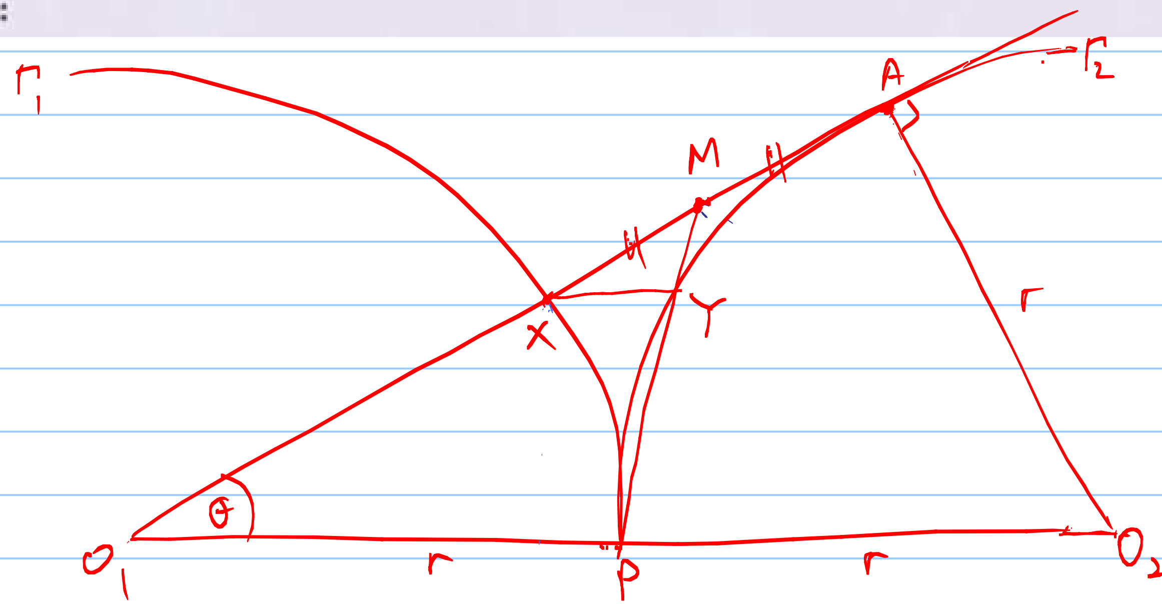
Ingat $\frac{MX}{XO_1} = \frac{MY}{YP} \rightarrow \frac{MX}{MO_1} = \frac{MY}{MP_1}$

Soal 3. Misalkan Γ_1 dan Γ_2 lingkaran berbeda dengan panjang jari-jari sama dan berturut-turut berpusat di titik O_1 dan O_2. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 bersinggungan di titik P. Garis ℓ melalui O_1 menyinggung Γ_2 di titik A. Garis ℓ memotong Γ_1 di titik X dengan X di antara A dan O_1. Misalkan M titik tengah AX dan Y titik potong PM dengan Γ_2 dengan $Y \neq P$. Buktikan bahwa XY sejajar O_1O_2.



MP diperpanjang memotong lingkaran Γ_1 di Z dimana $PZ = PY$.
dan $MT = MO_1 + XO_1$

Jawaban:



Dengan POP

$MA^2 = MY \cdot MP$

$MX \cdot MT = MP \cdot MZ$

$$\frac{MA^{\cancel{2}}}{\cancel{MX} \cdot MT} = \frac{MY \cdot \cancel{MP}}{\cancel{MP} \cdot MZ}$$

$$\frac{MX}{MX+2XO_1} = \frac{MY}{MY+2PY}$$

$$\frac{MX+2XO_1}{MX} = \frac{MY+2PY}{MY}$$

$$1+\frac{2XO_1}{MX} = 1+\frac{2PY}{MY}$$

$$\frac{MX}{XO_1} = \frac{MY}{PY}$$

Jadi $XY // O_1O_2$

Soal 4. Misalkan a, b, c bilangan real positif dengan $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Buktikan bahwa

$$a+b+c+\frac{4}{1+(abc)^{\frac{2}{3}}}\geq 5.$$

Jawaban:

perhatikan $\frac{4+4\square}{1+\square}=4 \Rightarrow \frac{4}{1+\square}=4-\frac{4\square}{1+\square}$

(AM-GM) $\frac{1+\sqrt[3]{(abc)^2}}{2}\geq\sqrt[3]{abc}$

$$-\frac{1}{1+\sqrt[3]{(abc)^2}}\geq-\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}$$

(AM-GM) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$

$$\sqrt[3]{abc}\geq 1$$

(AM-HM) $\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

$$a+b+c\geq 3$$

Shg, $a+b+c+\frac{4}{1+\sqrt[3]{(abc)^2}} = a+b+c+\left(4-\frac{4\sqrt[3]{(abc)^2}}{1+\sqrt[3]{(abc)^2}}\right)$

$$\geq 3+4+4\sqrt[3]{(abc)^2}\left(-\frac{1}{1+\sqrt[3]{(abc)^2}}\right)$$

$$\geq 7+4\sqrt[3]{(abc)^2}\left(-\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}\right)$$

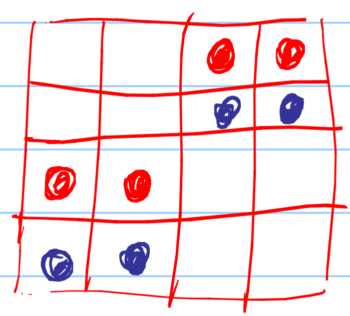
$$\geq 7-2\sqrt[3]{abc}$$

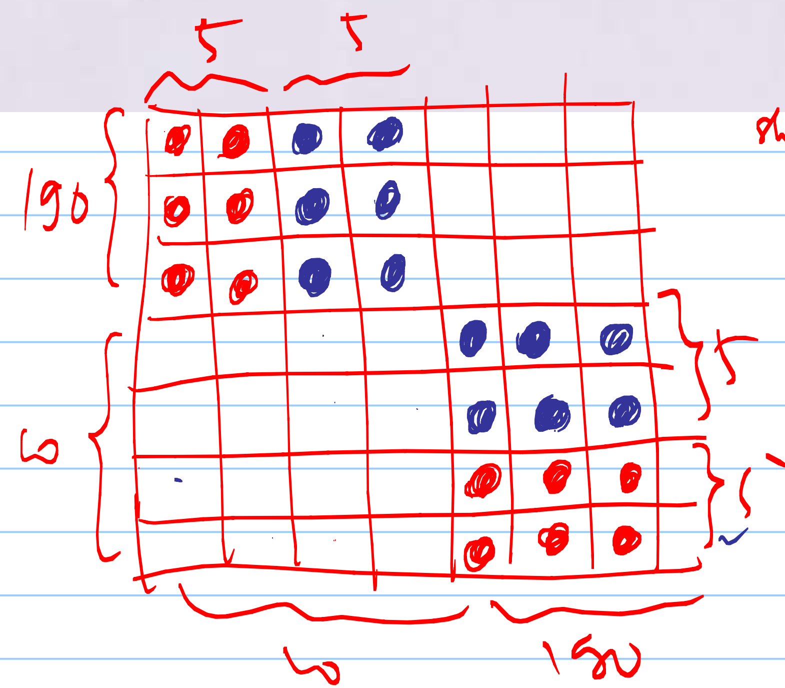
$$\geq 7-2$$

$$\geq 5 \ //$$

Soal 5. Pada papan catur berukuran 200×200 persegi satuan diletakkan kelereng merah atau biru sehingga setiap persegi satuan memiliki paling banyak 1 buah kelereng. Dua kelereng dikatakan segaris jika mereka terletak pada baris atau kolom yang sama. Diketahui untuk setiap kelereng merah ada tepat 5 kelereng biru yang segaris dan untuk setiap kelereng biru ada tepat 5 kelereng merah yang segaris. Tentukan maksimum banyaknya kelereng yang mungkin pada papan catur tersebut.

Jawaban:





bny max $= 2(180 \times 10)$

$= 2(1800)$

$= 3600$