Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes November 2019

22 November – 25 November 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
4. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
5. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
6. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
7. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
9. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
10. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
11. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
12. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
13. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
14. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

(e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

15. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

16. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

18. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

19. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

20. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

21. Rata-rata kuadratik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Gary memiliki sebuah dadu yang aneh. Dadu tersebut terlihat seperti dadu biasa (dengan mata dadu bernilai $1, 2, 3, 4, 5, 6$), tetapi peluang munculnya angka 1,2,3,4,5,6 berturut-turut memiliki rasio $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$ untuk setiap pelemparan dadu. Gary melempar dadu aneh tersebut sebanyak 2 kali dan mencatat angka yang muncul dari dadu tersebut. Jika peulang diperoleh jumlah dari kedua angka yang ditulis Gary bernilai 9 bisa ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana $FPB(a, b) = 1$, tentukan nilai dari $a + b$.

2. Misalkan
$$A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2019}}$$
Tentukan nilai dari $\lfloor A \rfloor$.

3. Misalkan I dan O berturut-turut merupakan pusat lingakran dalam dan pusat lingkaran luar dari segitiga ABC. Jika B, I, O, C terletak pada satu lingkaran, tentukan $\angle BAC$. (Nyatakan jawaban Anda dalam derajat)

4. Tentukan bilangan asli terbesar yang tidak bisa ditulis dalam bentuk $26a + 57b$ dimana a, b bilangan bulat tak negatif.

5. Sebuah segitiga siku-siku memiliki panjang jari-jari lingaran dalam 11 dan keliling 2019. Jika panjang jari-jari lingkaran luar segitiga tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m, n adalah bilangan asli yang realtif prima, hitunglah $10m + n$.

6. Misalkan $T = 2019^{2019}$ dan $S = T^T$. Misalkan r ialah banyak faktor positif dari S. Jika $s = \sqrt{r} - 1$, berapakah banyak faktor positif dari s?

7. Audrey sedang memilih mata kuliah. Ia dapat memilih 4 mata kuliah Matematika, 2 mata kuliah Fisika, 5 mata kuliah Kimia dan 4 mata kuliah Informatika. Audrey ingin mengambil minimal 6 mata kuliah dan maksimal 7 mata kuliah, dan sebagai mahasiswa Informatika, ia harus mengambil minimal 2 mata kuliah Informatika. Berapakah banyak kombinasi mata kuliah yang dapat Audrey ambil?

8. Sebuah fungsi $f(x) = \cos(nx)$, $x \in (0,2]$ memiliki 2019 titik potong dengan $g(x) = x^2 - 2x + 1$. Tentukan nilai $\frac{n}{\pi}$.

9. Leo sedang mencari PIN baru (4 digit) yang tepat untuk HP-nya. Karena sedang bosan, Leo ingin menentukan PIN-nya dengan cara berenang di kolam $20 \times 20\ m^2$. Terdapat bola bernomor 1 sampai 9 di tengah kolam tersebut (Posisi bola di kolam jika titik pojok kolam adalah (0,0),(0,4),(4,0),dan (4,4) adalah (1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),dan (3,3)). Leo akan mengambil 4 bola yang berbeda dari kolam tersebut untuk dijadikan PIN-nya. Urutan pengambilan bola adalah urutan digit pada PIN tersebut. Karena Leo benar-benar bosan, dia hanya ingin berenang maksimal sejauh 27,5 m (sudah termasuk jarak ke pinggir kolam lagi) dalam pengambilan 4 bola. Tentukan banyak PIN baru yang dapat Leo pakai.

10. Misalkan $f(x) = \lfloor x^{\lfloor x \rfloor} \rfloor$ untuk $x \neq 0$. Berapakah banyak nilai n bilangan asli lebih kecil dari 1000 sehingga $f(x) = n$ memiliki solusi ?

11. Diketahui ΔABC memiliki panjang sisi $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 8$. Titik D pada BC sehingga $BD = DC$. Titik E pada AC sehingga $\angle ABE = \angle CBE$. Titik F pada AB sehingga $FC \perp AB$. AD berpotongan dengan BE dan FC di titik X dan Y. BE dan FC berpotongan di titik Z. Luas XYZ dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ dengan a dan c bilangan asli yang relatif prima dan b bukan bilangan kuadrat sempurna. Tentukan nilai $a + b + c$!

12. Definisikan a, b, c, d, e, f sebagai *bro-prima* jika semuanya prima dan membentuk barisan aritmatika dengan $a < b < c < d < e < f$. Jika a, b, c, d, e, f *bro-prima*, hitunglah nilai minimum dari f.

13. Misalkan
$$f(x) = \frac{x^2 - 2019x + 1}{x^2 + 1}$$
untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Tentukan nilai maksimum yang mungkin dari $|f(x) - f(y)|$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$

14. Jika persamaan
$$(x + 1)^{y+1} + 1 = (x + 2)^{z+1}$$
memiliki solusi bilangan bulat positif $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., (x_k, y_k, z_k)$, tentukan nilai dari $\sum_{i=1}^{k} x_i + y_i + z_i$.

15. Misalkan ABC adalah suatu segitiga dengan $AB = 31, AC = 49, BC = 41$ satuan panjang. Definisikan G sebagai titik berat ΔABC. Misalkan kaki tinggi dari A memotong $\odot BGC$ di P dan Q dengan P terletak di dalam ΔABC. $\odot AGP$ memotong AB dan AC berturut-turut di X dan Y. Definisikan pula T sebagai titik perpotongan antara BY dan CX. Misal R adalah titik potong antara AT dengan $\odot BTC$ untuk kedua kalinya. Jika panjang GR dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ dimana $(a, c) = 1$ dan b tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat selain 1. Maka berapakah sisa ketika $a + b + c$ dibagi oleh 1000?

16. Misalkan terdapat 12 orang menghadiri sebuah acara. Untuk sembarang 2 orang, kedua orang tersebut antara saling kenal satu sama lain atau saling tidak mengenal satu sama lain. Diketahui bahwa setiap orang yang hadir di pesta tersebut memiliki banyak kenalan yang sama banyak. Sebuah kelompok yang terdiri dari 3 orang dikatakan *kelompok keren* apabila untuk setiap 2 orang di kelompok tersebut saling mengenal satu sama lain atau saling tidak mengenal satu sama lain. Tentukan minimal banyaknya dari *kelompok keren* di acara tersebut.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Definisikan sebuah operasi $\star$ yang memetakan $\mathbb{N}$ ke $\{+,-\}$.

   A) Diberikan persamaan $3 \star_1 5 \star_2 7 = 5$. Persamaan ini mempunyai solusi $(\star_1, \star_2) = (-,+)$ karena $3-5+7=5$. Cek apakah

   $$1 \star_1 2 \star_2 3 = 4 \star_3 5 \star_4 6$$

   mempunyai solusi untuk $(\star_1, \star_2, \star_3, \star_4)$.

   B) Diberikan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan rill. Buktikan bahwa terdapat operasi $(\star_1, \star_2, \ldots, \star_{n-1})$ yang memenuhi

   $$|a_1 - a_2| \star_1 |a_2 - a_3| \star_2 \cdots \star_{n-2} |a_{n-1} - a_n| \star_{n-1} |a_n - a_1| = 0$$

   C) Diberikan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ merupakan n buah bilangan prima berbeda. Buktikan bahwa untuk sembarang operasi $(\star_1, \star_2, \ldots, \star_{n-1})$

   $$\frac{1}{p_1} \star_1 \frac{1}{p_2} \star_2 \cdots \star_{n-1} \frac{1}{p_n} \neq 0$$

   D) Diberikan n buah bilangan rill $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan n buah bilangan prima berbeda $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sedemikian sehingga

   $$p_1|a_1 - a_2| = p_2|a_2 - a_3| = p_3|a_3 - a_4| = \cdots = p_n|a_n - a_1|$$

   Buktikan bahwa $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

2. Diberikan persegi panjang $ABCD$ dengan $AB = 3$ dan $BC = 4$. Terdapat titik E, F, G, dan H pada segmen AB, BC, CD, dan DA berturut-turut dimana tidak ada dua titik yang sama. Jika s_{ABCD} menyatakan keliling dari segiempat $ABCD$, tentukan, dengan bukti, nilai terkecil yang mungkin untuk s_{EFGH}.

3. Tentukan konstanta rill terbesar k sedemikian sehingga pertidaksamaan berikut terpenuhi untuk semua bilangan rill positif a dan b.

   $$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{2(a^{k+1} + b^{k+1})}{a^k + b^k}$$

4. Farrel punya 2^{2019} kotak berisi koin, masing-masing mempunyai $1, 2, 3, \ldots, 2^{2019}$ koin. Stanve ingin mengambil semua koin tersebut, dengan cara sebagai berikut:

   Stanve dapat memilih beberapa kotak tersebut, lalu mengambil sejumlah koin dari masing-masing kotak yang ia pilih tersebut, semuanya dengan jumlah yang sama. Sebagai contoh, Stanve dapat memilih kotak yang berisi 20, 30 dan 40 koin dan mengambil 19 koin dari masing-masing ketiga kotak tersebut.

   Stanve tidak dapat mengurangi koin lebih banyak daripada jumlah koin yang berada di kotak tersebut, seperti mengurangi 4 koin dari kotak dengan 1 koin tidak diperbolehkan.

Farrel memberikan peraturan spesial dalam pemilihan kotak kepada Stanve. Tetapi aturan spesial tersebut dapat Stanve abaikan hanya untuk 1 gerak saja dalam satu permainan. Aturan spesialnya adalah:

"Pada putaran ke-i, jika terdapat M koin di dalam kotak dengan koin terbanyak, Stanve tidak diperbolehkan memilih lebih dari $\left\lceil \frac{M}{4} \right\rceil$ buah kotak dengan minimal $\left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil$ koin."

Tentukan banyaknya putaran minimal yang Stanve butuhkan untuk mengambil seluruh koin.