Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan Agustus 2018

24–27 Agustus 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Pak Budi berbelanja di pasar TOMI setiap 3 hari sekali, sedangkan Pak Wono mengunjungi pasar TOMI setiap 5 hari sekali. Jika pada tanggal 17 Agustus mereka bertemu di pasar TOMI, paling cepat dalam berapa hari mereka akan bertemu di pasar TOMI lagi?

2. Tentukan jumlah semua solusi real berbeda dari $(x-2)(x^2-5x-6) = (x+6)(x-2)$.

3. Jika semua permutasi berbeda dari KTOM diurutkan secara urutan alfabet, berada di urutan ke berapakah KTOM bila diurutkan dari belakang?

4. Terdapat sebuah lapangan berbentuk lingkaran dengan diameter 10 meter, beserta tiang di tengah lapangan tersebut. Adi dan Budi berdiri tepat di keliling lingkaran lapangan. Diketahui jarak antara Adi dan Budi adalah $5\sqrt{3}$ meter. Bila Adi menghadap pada tiang, berapa sudut terkecil Adi harus berputar (dalam derajat) agar dia menghadap ke Budi?

5. Diberikan bilangan $\underbrace{123\ldots123}_{2016\text{digit}}ab\underbrace{456\ldots456}_{2016\text{digit}}$ untuk suatu a dan b bilangan asli lebih kecil dari 10. Jika bilangan tersebut habis dibagi 13, tentukan nilai minimum $a+b$.

6. Diberikan dua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(g(x)) = x + 2018$ dan $g(f(x)) = x - 2018$. Jika diketahui $g(6054) = 2018$, tentukan nilai dari $f(8072)$.

7. Pada trapesium sama kaki $ABCD$ dengan $BC \parallel AD$, titik P adalah perpotongan AC dan BD. Titik S dan R berturut-turut berada di segmen PC dan segmen PD sehingga $SR \parallel CD$. Misalkan Q adalah perpotongan dari BS dan AR. Jika $BS = 2016$, $QR = 1120$, dan $\frac{BC}{AD} = \frac{9}{13}$, tentukan panjang QA.

8. Pada suatu ruangan, terdapat dua meja bundar identik dan tujuh kursi identik yang disusun sedemikian rupa sehingga setiap meja dikelilingi empat kursi, dua meja memiliki satu kursi yang sama, dan jarak antara sebarang dua kursi yang bersebelahan pada suatu meja sama panjang. Jika terdapat tujuh orang hendak mengadakan rapat di ruangan tersebut, tentukan banyaknya cara mereka duduk.

9. Lucas dan Valen sedang bermain suatu permainan dengan aturan berikut: bila mula-mula terdapat m batu, pemain hanya boleh mengambil k batu dimana $1 \leq k \leq n < m$ untuk n bilangan asli. Pemain yang mengambil batu terakhir menang. Valen mengambil pasangan (m, n) tersebut secara acak dimana $1 \leq m \leq 15$. Jika Valen berjalan duluan dan peluang Lucas memiliki strategi menang adalah $\frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan asli dan $gcd(a, b) = 1$, tentukan nilai dari $a^2 + 2b$.

10. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang $AC = BC$. Titik E berada di AB sehingga $CE \perp AB$ dan D di BC sehingga AD membagi 2 sudut $\angle BAC$. Apabila $AD = 2CE$, tentukan besar $\angle ACB$.

11. Audrey menuliskan 2018 bilangan bulat pertama: $1, 2, 3, 4, \ldots, 2018$ di papan tulis, dan dia akan memulai permainan sebagai berikut: tiap putaran, dia akan memilih dua buah bilangan a dan b di papan tulis, dengan syarat sebagai berikut:

    - Apabila tepat satu dari a dan b adalah bilangan prima, b dipilih menjadi bilangan prima tersebut. Sebagai contoh, apabila dia memilih 2017 dan 2010, maka $a = 2010$, dan $b = 2017$.
    - Apabila a dan b keduanya prima ataupun non-prima, diambil a dan b sehingga $a \geq b$.

    Lalu, dia akan menghapus a dan b, dan menuliskan bilangan $|(ab)^2 + 2b^2 - 4b - 4a^2 + 2|$. Dia akan melakukan proses ini secara terus menerus sampai tersisa 1 bilangan di papan tulis. Tentukan bilangan ini.

12. Tentukan banyaknya bilangan prima p yang membuat $\frac{(199p-1)!}{(p!)^{199}}$ menjadi bilangan bulat.

13. Diketahui $P(x)$ adalah polinomial monik berderajat 2 dengan koefisien bulat yang memenuhi:
$$P(P(2+\sqrt{15})) = P(P(2-\sqrt{15})) = P(P(5)).$$
    Tentukan nilai dari $|P(1)|$.

14. Pada segitiga ABC yang tumpul di A, M adalah titik tengah BC. Titik X dan Y berturut-turut terletak pada lingkaran luar segitiga ABM dan lingkaran luar segitiga ACM sehingga MX dan MY berturut-turut merupakan garis bagi sudut AMB dan AMC. Jika XY memotong garis AM di P dengan $PY = 4224, PX = 2376, PA = 668$, tentukan panjang BC.

15. Misalkan D adalah banyak pasangan bilangan bulat (x, y), sedemikian sehingga $0 < x < y < 2018$ dan
$$\frac{x^4 + y^4 + m^4}{x^2 + y^2 + m^2} = m^2 + n$$
    mempunyai solusi bilangan bulat positif (m, n). Jika sisa pembagian dari D ketika dibagi 2000 adalah a, tentukan nilai a.

16. Suatu papan tak berwarna berukuran 6×6 dibagi menjadi 36 petak berukuran 1×1. Kazuma dan Megumin bermain secara bergilir pada papan tersebut, dengan Kazuma mendapatkan langkah pertama. Pada giliran masing-masing, Kazuma mewarnai suatu petak dengan warna kuning, sedangkan Megumin mewarnai suatu petak dengan warna merah. Syaratnya, tidak boleh ada dua petak berwarna yang berdekatan (termasuk secara diagonal) dan setiap petak diwarnai maksimal sekali. Permainan berakhir jika tidak ada lagi petak yang bisa diwarnai. Kazuma berusaha memaksimalkan banyak petak berwarna kuning, sedangkan Megumin berusaha meminimalkan banyak petak berwarna kuning. Jika keduanya bermain optimal, tentukan banyaknya petak kuning yang mungkin di akhir permainan.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Diberikan sebuah segitiga $\triangle ABC$ dengan $AB < AC$. Pada busur AC yang lebih kecil dari lingkaran luar $\triangle ABC$, dibuat titik P. Misalkan X dan Y adalah proyeksi tegak lurus dari P ke garis BC dan CA, berturut-turut. Misalkan garis tinggi $\triangle ABC$ dari titik A memotong BC di titik D dan memotong lingkaran luar sekali lagi di titik K. Misalkan H adalah titik tinggi $\triangle ABC$. Misalkan garis PK memotong BC dan XY di titik L dan M, berturut-turut.

   (a) Buktikan bahwa $PYXC$ adalah segiempat talibusur.

   (b) Buktikan bahwa $\angle MPX = \angle MXP$.

   (c) Buktikan $MP = MX = ML$.

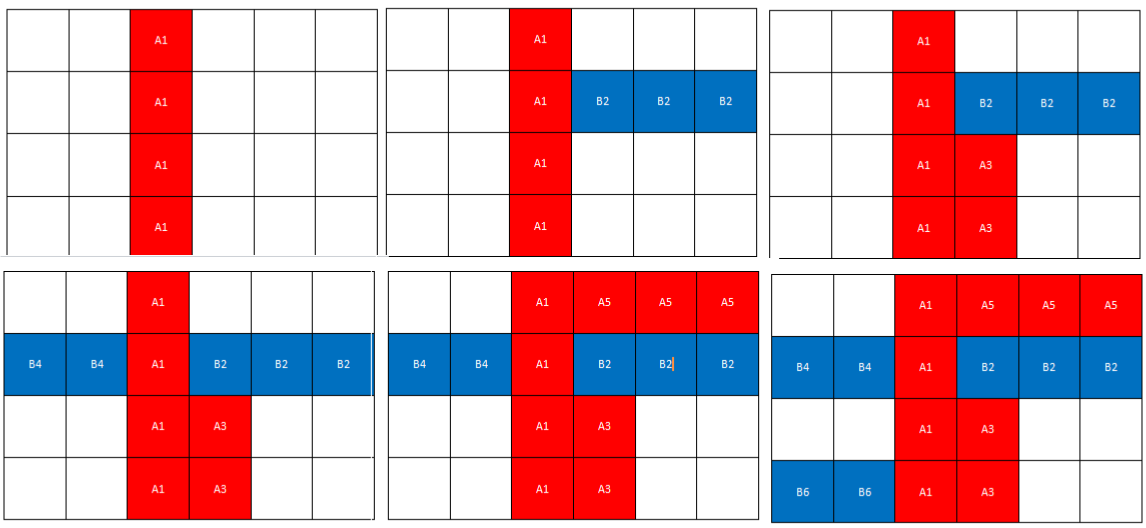
   (d) Buktikan $HD = DK$.

   (e) Buktikan HL sejajar dengan XY.

   (f) Jika HP memotong XY di titik N, buktikan bahwa N adalah titik tengah PH.

2. Andi dan Budi bermain secara bergiliran menggunakan papan kotak-kotak (grid) berukuran $m \times n$ yang dimulai dari Andi. Andi memulai dengan mewarnai satu baris atau kolom papan tersebut sehingga terbentuk dua persegi panjang. Kemudian Budi melanjutkan dengan memilih salah satu dari dua persegi panjang yang terbentuk, kemudian mewarnai salah satu baris atau kolom pada persegi panjang tersebut sehingga terbentuk 3 persegi panjang dan berlanjut seterusnya. Pemain dinyatakan kalah apabila ia tidak dapat mewarnai papan lagi. Tentukan semua pasangan bilangan asli (m, n) sehingga Andi mempunyai strategi untuk menang.

   Berikut adalah contoh permainan yang mungkin untuk $m = 4, n = 6$ selama 6 giliran. (Download file soal untuk melihat)



3. Tentukan semua bilangan bulat tak negatif a, b, c yang memenuhi

$$21^a + 28^b = 35^c.$$

4. Diberikan empat buah bilangan real positif a, b, c, d yang memenuhi:

$$\begin{cases} a & \le 1 \\ a + 4b & \le 17 \\ a + 4b + 16c & \le 273 \\ a + 4b + 16c + 64d & \le 4369. \end{cases}$$

Tentukan nilai minimum dari

$$\frac{1}{d} + \frac{2}{4c+d} + \frac{3}{16b+4c+d} + \frac{4}{64a+16b+4c+d}.$$