# KUMPULAN USULAN SOAL INAMO 2008

## Aljabar

**Problem A1**

Definisikan himpunan-himpunan

$$\begin{aligned} A &= \left\{ a \mid a = \frac{1+xy}{x+y} \text{ untuk suatu } x, y \in \mathbb{N} \right\}, \text{ dan} \\ B &= \left\{ b \mid b = x - \frac{1}{y} \text{ untuk suatu } x, y \in \mathbb{N} \text{ dengan } x > 1 \right\}. \end{aligned}$$

Buktikan bahwa $B \subset A$.

**Problem A2**

Misalkan $a$ dan $b$ bilangan-bilangan real positif dengan $a + b = 2$. Buktikan bahwa

$$\sqrt{a^2 - a + 1} + \sqrt{b^2 - b + 1} \geq 2.$$

**Problem A3**

Buktikan bahwa sistem persamaan

$$\begin{aligned} \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} &= 3x + y + z \\ y - z &= \sqrt{3yz} \end{aligned}$$

tidak memiliki solusi real tak-nol $(x, y, z)$.

**Rumusan alternatif:** Misalkan $x, y, z$ bilangan-bilangan real yang memenuhi

$$\begin{aligned} y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 &= xyz(3x + y + z) \\ y - z &= \sqrt{3yz}. \end{aligned}$$

Buktikan bahwa $x = y = z = 0$.

**Problem A4**

Tentukan semua $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fungsi yang memenuhi:

$$f(mn) + f(m + n) = f(m)f(n) + 1 \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

**Problem A5**

Suatu rombongan kemah pramuka yang terdiri dari 100 anak pramuka dan 5 orang pembina dewasa tiba di suatu tepian sungai yang lebar. 5 orang pembina tersebut terdiri dari 3 laki-laki dan 2 perempuan. Mereka memiliki satu buah perahu yang akan membantu mereka menyeberangi sungai. Perahu tersebut hanya bisa memuat:
1. 1 orang dewasa laki-laki
2. 1 orang dewasa perempuan dan 1 anak, atau
3. 3 anak-anak.

Semua orang di rombongan tersebut sanggup mengemudikan perahu menyebrangi sungai, baik seorang diri maupun bersama-sama. Tentu saja, perahu tidak dapat menyeberang sendiri tanpa pengemudi.

Tentukan banyaknya penyeberangan minimum yang diperlukan. (1 penyeberangan adalah perjalanan dari satu tepi ke tepi seberang. Jika perjalanannya bolak-balik, dianggap 2 kali penyeberangan)

### Problem A6

Misalkan $x, y, z \geq 0,\ 0 \leq \theta < \pi$. Tentukan semua bilangan asli $n$ sehingga sistem persamaan

$$\begin{aligned} x + y + z &= \cos\theta \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \cos 2\theta \\ &\vdots \\ x^n + y^n + z^n &= \cos n\theta \end{aligned}$$

mempunyai berhingga solusi $(x, y, z, \theta)$.

### Problem A7

Cari semua bilangan real $x, y, z$ yang memenuhi sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} |x| + \lfloor y \rfloor = z \\ |y| + \lfloor z \rfloor = x \\ |z| + \lfloor x \rfloor = y \end{cases}$$

Dimana untuk setiap bilangan real $a$, $|a|$ menyatakan harga mutlak dari $a$, dan $\lfloor a \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari $a$.

### Problem A8

Untuk setiap bilangan real positif $x, y$ buktikan bahwa

$$x^3 + y^3 + 1 \geq x + x^2y + y^2.$$

### Problem A9

Misalkan $a_1, a_2, \ldots$ ialah barisan aritmetika yang suku-sukunya bilangan bulat positif. Jika $y_n = a_n a_{n+1}$ untuk setiap bilangan asli $n$, tunjukkan bahwa

$$\left\lceil \frac{1}{2007} \sum_{i=1}^{10^{2008}} \frac{a_{2008} - a_1}{y_i} \right\rceil = 1.$$

( $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari $x$ ).

### Problem A10

Misalkan

$$P(x) = x^{99} + a_{98}x^{98} - 100x^{97} + \ldots + a_1x + a_0$$

polinomial dengan koefisien bulat. Buktikan bahwa $P(x)$ tidak mungkin memiliki 99 akar bilangan bulat yang berurutan.

### Problem A11

Buktikan bahwa untuk $x, y$ real positif, berlaku

$$\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{y})^2} \geq \frac{2}{x+y+2}$$

### Problem A12

Cari semua solusi dari sistem persamaan dibawah ini

$$\begin{aligned} x+y+z+3xyz &= 2\left(xy+yz+zx\right) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1-y}}+\frac{1}{\sqrt{1-z}} &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

dengan $x, y, z$ adalah bilangan-bilangan real yang kurang dari 1.

### Problem A13

Diberikan barisan bilangan real $a_0, a_1, a_2, \ldots$ yang didefinisikan dengan rumus

$$a_{i+1} = [a_i]\left\{a_i\right\}, i = 0, 1, 2, \ldots$$

untuk suatu $a_0$ bilangan real non-negatif. Buktikan bahwa terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $a_i = 0$ untuk semua $i \geq n$.
**Catatan:** Notasi $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari $x$, dan $\{x\} = x - [x]$.

### Problem A14

Diberikan empat bilangan real $a \geq b \geq c \geq d$ yang memenuhi $a+b+c+d = 9$ dan $a^2+b^2+c^2+d^2 = 21$. Carilah nilai minimum untuk $ab - cd$.

## Kombinatorika

### Problem C1

Ada 98 orang dengan setiap orang saling kenal dengan paling sedikit 32 orang yang lain. Buktikan bahwa 98 orang tersebut tidak dapat dikelompokkan menjadi tiga kelompok dengan syarat tidak ada orang pada suatu kelompok kenal dengan seseorang pada kelompok yang lain.

### Problem C2

Ada 21 orang berhubungan secara rahasia dengan menggunakan frekuensi gelombang radio yang berbeda. Ada pasangan dua orang yang dapat berhubungan, mungkin ada yang tidak dapat. Setiap pasang yang berhubungan hanya menggunakan satu frekuensi tertentu yang berbeda dengan frekuensi yang digunakan pasangan lain. Setiap tiga orang selalu ada dua orang di antaranya yang tidak dapat berhubungan. Tentukan, dengan penjelasan, banyak maksimum frekuensi berbeda yang diperlukan.

### Problem C3

Misalkan $A = \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

(a) Tentukan banyaknya subhimpunan dari $A$ yang hasilkali semua elemennya habis dibagi 7.

(b) Misalkan $N(i)$ menyatakan banyaknya subhimpunan dari $A$ yang jumlah semua elemennya bersisa $i$ jika dibagi 7. Buktikan bahwa

$$\sum_{i=0}^{7}(-1)^i N(i) = 0.$$

**Problem C4**

Sebuah himpunan $A$ dikatakan seimbang bila himpunan tersebut dapat dipartisi menjadi 2 himpunan bagian yang saling lepas $A_1$ dan $A_2$ sehingga berlaku:
- $A_1 \cup A_2 = A$.
- penjumlahan elemen-elemen di $A_1$ = penjumlahan elemen-elemen di $A_2$.

Misalnya, himpunan $\{1, 14, 15, 28\}$ seimbang, sebab dapat dipartisi menjadi $\{1, 28\}$ dan $\{14, 15\}$, sedangkan himpunan $\{24, 27, 28, 29\}$ tidak seimbang.
Definisikan $S(n) = \{1, 2, ..., n\}, n \geq 1$. Buktikan bahwa $S(n)$ seimbang jika dan hanya jika $n(n+1)$ kelipatan 4.

**Problem C5**

Misalkan $H = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ adalah himpunan yang terdiri dari $n$ bilangan real positif berbeda. Definisikan $D = \{|x-y|\,, x, y \in H\}$.
a. Buktikan bahwa $D$ setidaknya mempunyai $n$ elemen berbeda.
b. Tentukan syarat cukup dan perlu sehingga $D$ mempunyai tepat $n$ elemen berbeda.

**Problem C6**

Suatu permutasi $(a_1, a_2, \ldots, a_{2008})$ dari himpunan $\{1, 2, \ldots, 2008\}$ disebut *permutasi cantik* jika

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \text{ kelipatan } k, \text{ untuk semua } k = 1, 2, \ldots, 2008.$$

Tentukan cacah dari semua permutasi cantik.

**Problem C7**

Suatu permutasi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dari himpunan $\{1, 2, \ldots, n\}$ disebut *permutasi cantik* jika

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \text{ kelipatan } k, \text{ untuk semua } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Tentukan semua $n$ sehingga semua permutasi dari himpunan $\{1, 2, \ldots, n\}$ merupakan permutasi cantik.

## Geometri

**Problem G1**

Pada segitiga $ABC$, dibuat titik $D, E, F$ di luar segitiga sedemikian sehingga $\triangle ABD, \triangle BCE, \triangle CAF$ adalah segitiga sama sisi. Buktikan bahwa ketiga lingkaran luar segitiga tersebut berpotongan di satu titik.

**Problem G2**

Misalkan segitiga $ABC$ sama kaki siku-siku di $C$ dan $P$ sembarang titik pada $CB$. Misalkan pula $Q$ ialah titik tengah dari $AB$ dan $R, S$ ialah titik-titik pada $AP$ sedemikian hingga CR tegak lurus $AP$ dan $|AS| = |CR|$. Buktikan bahwa $|RS| = \sqrt{2}|SQ|$. ($|AB|$ melambangkan panjang segmen garis $AB$).

**Problem G3**

Diberikan segitiga $ABC$. Sebuah lingkaran $\Gamma$ menyinggung lingkaran luar segitiga $ABC$ di $A$ dan menyinggung $BC$ di $D$. Perpotongan lingkaran $\Gamma$ dengan $AC$ diberi nama $E$. Tunjukkan bahwa

$$R^2 = OE^2 + CD^2 \left(1 - \frac{BC^2}{AB^2 + AC^2}\right)$$

dimana $O$ adalah pusat lingkaran luar segitiga $ABC$ dengan jari-jari $R$.

**Problem G4**

DIberikan dua lingkaran $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ bersinggungan di dalam di $N$ sehingga $\sigma_2$ berada di dalam $\sigma_1$. Titik $Q$ dan $R$ masing-masing pada $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ sehingga $N, R, Q$ kolinear. Garis melalui $Q$ menyinggung $\sigma_2$ di $S$ dan memotong $\sigma_1$ di $O$. Garis melalui $N$ dan $S$ memotong $\sigma_1$ di $P$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{PQ^3}{PN^2} = \frac{PS.RS}{NS}$$

**Problem G5**

Sebuah segiempat tali busur $ABCD$. Misalkan titik $M$ adalah titik tengah segmen $BD$. Jika garis singgung lingkaran di $B$, dan di $D$ konkuren pula dengan perpanjangan $AC$, tunjukkan bahwa

$$\angle AMD = \angle CMD$$

**Problem G6**

Diberikan segitiga $ABC$ dengan panjang sisi-sisinya $a, b$, dan $c$. Garis-garis singgung terhadap lingkaran dalam segitiga $ABC$ yang sejajar dengan sisi-sisi segitiga $ABC$ membentuk tiga segitiga kecil. Pada setiap segitiga kecil dibuat lingkaran dalam berturut-turut dengan jari-jari $r_A, r_B$, dan $r_C$. Jika jari-jari lingkaran dalam segitiga $ABC$ adalah $r$, Buktikan bahwa jumlah luas dari keempat lingkaran dalam adalah

$$T = \frac{\pi\left(a^2 + b^2 + c^2\right)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}{(a + b + c)^3}$$

**Problem G7**

Diberikan trapesium $ABCD$ sama kaki dengan $AB$ sebagai alasnya. Diagonal $AC$ dan $BD$ berpotongan di titik $S$. Misalkan $M$ titik tengah $BC$ dan garis bagi sudut $BSC$ memotong $BC$ di $N$. Buktikan bahwa besar sudut $AMD$ sama dengan besar sudut $AND$.

**Problem G8**

Buktikan bahwa hanya ada satu segitiga yang sisi-sisinya merupakan bilangan asli berurutan dan salah satu sudutnya dua kali sudut yang lain.

**Problem G9**

Diberikan segitiga $ABC$, titik-titik $D, E$, dan $F$ berturut-turut pada sisi-sisi $BC, CA$, dan $AB$ sedemikian rupa sehingga

$$DC + CE = EA + AF = FB + BD$$

Buktikan bahwa

$$DE + EF + FD \geq \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$$

**Problem G10**

Diberikan segitiga $ABC$ dengan $AB = AC$, sudut $A = 100^0$ dan $BD$ garis bagi sudut $B$. Buktikan bahwa

$$BC = BD + DA$$

# Teori Bilangan

### Problem N1

Misalkan $m, n > 1$ bilangan-bilangan bulat sedemikian hingga $n$ membagi $4^m - 1$ dan $2^m$ membagi $n - 1$. Haruskah $n = 2^m + 1$? Jika ya, buktikan dan jika tidak, berikan contoh penyangkalnya.

### Problem N2

Bilangan asli $n$ dikatakan "baik" jika persamaan

$$2007x^2 + 2009y^2 = nxy$$

memiliki solusi pasangan bilangan asli $(x, y)$ dengan $\gcd(x, y) = 1$. Jika $n$ baik, buktikan bahwa

$$2008^2 \geq n \geq 2 \times 2008.$$

Akibat dari soal tersebut adalah banyaknya bilangan baik hanya berhingga. Lebih jauh, kita punya soal-soal berikut:
(a) Misalkan $n$ bilangan asli baik. Buktikan bahwa persamaan di atas memiliki tepat dua solusi.
(b) Buktikan bahwa ada tepat 18 bilangan baik.

### Problem N3

Suatu bilangan bulat disebut "beragam" jika bilangan tersebut habis dibagi oleh 2008 bilangan prima yang berbeda. Buktikan bahwa terdapat 3 bilangan beragam yang berurutan.

### Problem N4

Diketahui $x, y, z$, dan $u$ bilangan bulat positif dan $z \geq 3$. Tentukan nilai $x, y, z$, dan $u$ yang memenuhi

$$3x^x = y^y + (z-1)^z + u^u.$$

### Problem N5

Carikah bilangan asli terkecil $r$, sehingga

$$\frac{7a^2 + 5b^2}{ab + 1} = r$$

mempunyai berhingga solusi bulat $a, b$.

### Problem N6

Misalkan $a$ bilangan bulat positif yang terdiri dari tepat $k$ faktor prima berbeda. Definisikan $S$ sebagai himpunan semua bilangan bulat positif $b$ dengan $0 < b < a$ dan $a - b \,|\gcd(a, b)$, dimana $\gcd(a, b)$ menyatakan faktor persekutuan ter besar dari $a$ dan $b$.
Buktikan bahwa $|S| \geq 2^k - 1$. Kapan kesamaan berlaku?
Keterangan: $|X|$ menyatakan banyaknya elemen di himpunan $X$.

**Penyajian alternatif:**
Misalkan $a$ bilangan bulat positif yang terdiri dari tepat $k$ faktor prima berbeda. Definisikan $S$ sebagai himpunan semua bilangan bulat positif $b$ dengan $0 < b < a$ dan $a - b \,|\gcd(a, b)$, dimana $\gcd(a, b)$ menyatakan faktor persekutuan ter besar dari $a$ dan $b$.
Buktikan bahwa $|S| = 2^k - 1 \iff a$ square-free.

Keterangan: $|X|$ menyatakan banyaknya elemen di himpunan $X$. Sebuah bilangan $n$ dikatakan square-free bila tidak ada bilangan bulat positif $r > 1$ sehingga $r^2|n$.

**Problem N7**

Cari semua bilangan bulat positif $n$ yang dapat dinyatakan sebagai penjumlahan tepat 2008 bilangan komposit.

**Problem N8**

Buktikan bahwa ada tak hingga banyaknya bilangan bulat positif $k$ sehingga $2008 \,|\, 7^{9k} - 9^{7k} + k$.

**Problem N9**

Cari semua bilangan bulat non-negatif $i, n, k$ yang memenuhi:

$$\begin{cases} \binom{k}{i} = \binom{n}{i} \\ \binom{k+2}{i+2} = \binom{n}{i+1} \\ \binom{k+4}{i+4} = \binom{n}{i+2} \end{cases}$$

**Problem N10**

Cari semua bilangan bulat positif $n, k$ sehingga $\binom{n}{k} = 2008$.

**Problem N11**

Diberikan bilangan bulat $a$ yang tidak nol. Misalkan $x^2 + y^2 + xy = a$ memiliki penyelesaian bulat. Carilah bilangan asli $n$ sedemikian hingga $x^2 + y^2 + xy = a^n$ juga memiliki penyelesaian bulat.

**Problem N12**

Pada tahun ini usia Ardi sama dengan jumlah digit pada tahun kelahirannya dan dua kali usia adiknya. Pada tahun berapakah Ardi lahir?.

**Problem N13**

Carilah semua bilangan asli yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

untuk suatu $a, b$, dan $c$ bilangan asli dengan

$$\text{FPB}\,(a, b) = \text{FPB}\,(b, c) = \text{FPB}\,(c, a) = 1$$

**Problem N14**

Diketahui $x, y$, dan $z$ adalah bilangan-bilangan asli yang memenuhi persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Jika $x + y - 4z$ dan $z$ merupakan kuadrat sempurna, tunjukkan bahwa terdapat bilangan-bilangan asli $a, b$, dan $c$ sehingga $x = a^2 + b^2$ dan $y = b^2 + c^2$.

**Problem N15**

Carilah semua pasangan bilangan prima $(p, q)$ yang memenuhi persamaan persamaan $2^p + p^2 = q$.

**Problem N16**

Untuk sebarang bilangan asli $n$ didefinisikan $\tau(n)$ sebagai jumlahan semua faktor positif dari $n$. Contoh: $\tau(1) = 1,\ \tau(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 10$, dan sebagainya. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli $n$ dan $k$ berlaku

$$n \leq \frac{\tau\left(n^{k+2}\right)}{\tau\left(n^{k+1}\right)} \leq \frac{\tau\left(n^{k+1}\right)}{\tau\left(n^{k}\right)}.$$

**Problem N17**

Suatu himpunan $A$ dikatakan "renggang" jika setiap pasang 2 elemen yang berbeda saling prima. Diberikan $n$ adalah bilangan asli dengan $n \geq 2$. Misalkan

$$N(n) = maks\left\{n(A) \,|A \text{ renggang dan } A \subset \{1, 2, ..., n\}\right\}$$

Tentukan nilai dari $N(100)$.