

Senin, 9 Juli 2018

Soal 1. Misalkan Γ lingkaran luar suatu segitiga lancip ABC . Titik D dan E berturut-turut terletak pada segmen AB dan AC sehingga $AD = AE$. Garis sumbu segmen BD dan CE memotong busur minor AB dan AC pada Γ berturut-turut di F dan G . Buktikan bahwa garis DE dan FG paralel (atau berimpit).

Soal 2. Tentukan semua bilangan bulat $n \geq 3$ sehingga terdapat bilangan real a_1, a_2, \dots, a_{n+2} sehingga $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ dan

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.

Soal 3. Suatu *segitiga anti-Pascal* adalah susunan bilangan dalam bentuk segitiga sehingga setiap bilangan selain bilangan pada baris terbawah merupakan nilai mutlak dari selisih dua bilangan tepat dibawahnya. Sebagai contoh, susunan berikut merupakan segitiga anti-Pascal yang terdiri dari empat baris dan mengandung semua bilangan dari 1 sampai dengan 10.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

Apakah terdapat suatu segitiga anti-Pascal dengan 2018 baris yang mengandung semua bilangan dari 1 sampai dengan $1 + 2 + \dots + 2018$?

Selasa, 10 Juli 2018

Soal 4. Suatu *situs* adalah sebarang titik (x, y) di bidang dengan x dan y bilangan bulat positif tidak lebih dari 20.

Mula-mula, masing-masing dari 400 situs tidak ditempati. Amy dan Ben bergiliran menempatkan batu dengan Amy pada giliran pertama. Pada gilirannya, Amy menempatkan sebuah batu merah baru pada suatu situs yang kosong sedemikian sehingga jarak setiap dua situs yang berisi dua batu merah tidak sama dengan $\sqrt{5}$. Pada gilirannya, Ben menempatkan sebuah batu biru baru pada suatu situs yang kosong. (Sebuah situs yang ditempati oleh batu biru boleh berjarak berapapun dari situs lain yang sudah ditempati.) Mereka berhenti bermain setelah ada pemain yang tidak bisa menempatkan batu.

Tentukan K terbesar sehingga Amy dapat menjamin bahwa dia dapat menempatkan sedikitnya K buah batu merah, tidak peduli bagaimana Ben menempatkan batu-batu birunya.

Soal 5. Misalkan a_1, a_2, \dots suatu barisan tak hingga bilangan bulat positif. Misalkan terdapat bilangan bulat $N > 1$ sehingga untuk setiap $n \geq N$,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

merupakan bilangan bulat. Buktikan bahwa terdapat suatu bilangan bulat positif M sehingga $a_m = a_{m+1}$ untuk setiap $m \geq M$.

Soal 6. Suatu segiempat konveks $ABCD$ memenuhi $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Titik X terletak di dalam $ABCD$ sehingga

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{dan} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Buktikan bahwa $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.