

# Shortlist Babak Penyisihan ITB Mathematics Olympiad 2022

Panitia ITBMO 2022

20 Februari 2022

## Aljabar

1. Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan asli. Tentukan berapa banyak  $x$  yang memenuhi persamaan  $ax + b - \sqrt{b^2 - ax} = 0$ .
2. Diberikan fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sedemikian sehingga

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$

untuk semua  $x \in \mathbb{R}$ . Nilai  $f(2022)$  adalah ...

3. Misalkan terdapat fungsi

$$f(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha & \text{jika } \alpha = \beta \\ f(\alpha - \beta, \beta) & \text{jika } \alpha > \beta \\ f(\beta - \alpha, \alpha) & \text{jika } \alpha < \beta \end{cases}$$

Tentukan nilai dari  $f(-2, -3)!$

4. Misalkan terdapat barisan  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{101}$  yang memenuhi

$$x_1 + 1 = x_3 + 3 = x_5 + 5 = \dots = x_{101} + 101 = \frac{1}{50}(x_2 + x_4 + x_6 + \dots + x_{100} + 101)$$

Tentukan nilai  $\sum_{i=1}^{50} x_{2i+1} - \sum_{i=1}^{50} x_{2i}$ .

5. Tentukan nilai minimum  $\frac{9x^2 + 18x^2 \sin(x) \cos(x) + 4}{x \sin(x) + x \cos(x)}$  dengan domain  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

6. Polinom  $p_0, p_1, p_2, \dots$  didefinisikan dengan persamaan

$$p_0(x) = x^3 + 9x^2 + 5x + 9$$

$$p_n(x) = p_{n-1}(x - n), n \in \mathbb{N}$$

Tentukan koefisien  $x$  dalam  $p_{10}(x)$ .

## Kombinatorika

1. Misalkan ITBMO menyatakan himpunan semua faktor positif dari  $2022^2$ . Sebuah bilangan diambil secara acak dari ITBMO. Peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2022 adalah. . . .
2. Suatu pabrik memproduksi lampu 50 buah yang akan didistribusikan ke Toko G. Toko G menerima kiriman tersebut dengan syarat dalam 5 sampel yang diambil secara acak, paling banyak 1 lampu yang rusak. Apabila terdapat 3 lampu yang cacat dari pabrik, tentukan peluang kiriman lampu tersebut diterima oleh toko G?
3. Ketika Daffa tidur, ia mempunyai kemungkinan 30% mengalami mimpi buruk. Apabila Daffa mengalami mimpi buruk, ia mempunyai kemungkinan 10% mengigau. Peluang Daffa mengalami 1 kali mimpi buruk tetapi tidak mengigau jika Daffa tidur 3 kali adalah. . .
4. Dalam suatu perlombaan memperingati HUT kemerdekaan Indonesia, seorang anak berlomba mengambil hadiah yang berada sejauh 10 langkah di depannya. Terdapat aturan dalam lomba ini, dimana anak hanya boleh melangkah ke depan sebanyak kelipatan tiga langkah dan selebihnya harus melangkah ke belakang.  
Tentukan banyaknya cara anak itu dapat mencapai hadiah jika batas langkah peserta lomba adalah tidak boleh lebih dari 20 langkah. (Catatan: anak tersebut boleh mundur dari tempat awal maupun melangkah maju melewati hadiah, asalkan posisi akhir di tempat hadiah)
5. Sebuah keluarga yang terdiri dari tiga pasang suami istri akan melakukan foto keluarga dan duduk menempati tujuh kursi yang berjajar ke samping. Agar foto terlihat rapi dan indah, diberlakukan aturan bahwa suami istri harus duduk berdekatan dan tidak ada laki-laki dan perempuan yang bukan suami istri duduk berdekatan. Banyak susunan foto yang mungkin adalah . . .
6. Suatu perlombaan diikuti oleh 5 tim yakni tim 1, 2, 3, 4, 5. Setiap dua tim tepat bertanding sekali, masing-masing tim memiliki probabilitas yang sama dalam memenangkan pertandingan, yaitu  $\frac{1}{2}$  untuk menang dan tidak ada pertandingan yang berakhir seri. Peluang bahwa setiap tim kecuali tim 5 kalah dari semua tim yang nomornya lebih kecil darinya adalah . . .

## Geometri

1. Diketahui segitiga STU dengan luas 1. Awalnya, segitiga STU seluruhnya bewarna putih. Lalu, segitiga tersebut dibagi menjadi empat segitiga kongruen dengan salah satu segitiganya memiliki titik sudut berupa titik tengah ST, TU, dan US. Segitiga yang berada di tengah diwarnai hitam, sedangkan tiga segitiga lain tetap putih. Lalu, segitiga-segitiga putih tersebut dikenai perlakuan yang sama dengan segitiga STU. Proses ini berlanjut sampai 5 kali (termasuk pembagian STU di awal). Luas daerah yang bewarna hitam adalah . . . .



## Teori Bilangan

1. Tentukan bilangan asli  $x$  terbesar sehingga  $13^x$  habis membagi  $C_{2022}^{4044}$ .
2. tentukan banyaknya tripel  $(m, c, f) \in \mathbb{N}$  yang memenuhi  $m \times c \times f = 2022^{12}$ .
3. Diberikan 2023 bilangan yakni  $\{1, 3, 9, 27, \dots, 3^{2022}\}$ . Emce dapat menghapus sembarang dua bilangan, misal  $a$  dan  $b$ , dari kumpulan bilangan tersebut dan menambahkan satu bilangan baru, yaitu sisa  $a + b$  dibagi 4. Emce melakukan proses tersebut sampai tersisa 1 bilangan. Bilangan tersebut adalah ...
4. Banyaknya bilangan prima  $p$  sehingga  $p^4 - p^2$  tidak habis dibagi 24 adalah...
5. Misalkan  $M$ ,  $C$ , dan  $F$  adalah bilangan-bilangan bulat yang lebih besar dari 2022 dan merupakan tiga suku berurutan pada suatu barisan aritmatika dengan  $M < C < F$ . Jika  $M$  dan  $F$  merupakan kuadrat dari dua bilangan ganjil yang berurutan serta  $C$  memiliki digit satuan 5, nilai  $C$  kedua-terkecil yang memungkinkan adalah ...
6. Didefinisikan  $x$  sebagai bilangan irasional. Karena satu dan lain hal, pembuat soal memberikan syarat bahwa  $x^3 - 80x + 5$  dan  $x^2 - 10x + 100$  harus menghasilkan bilangan rasional. Berapakah jumlah semua  $x$  yang mungkin?
7. Misalkan  $x, y$  adalah bilangan bulat positif dengan

$$A = \sqrt{\log x}, B = \sqrt{\log y}, C = (\log \sqrt{x})^2, D = (\log \sqrt{y})^2$$

Jika diketahui bahwa  $A, B, C$ , dan  $D$  adalah bilangan bulat dan memenuhi syarat:

$$\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + C + D = \frac{|Z|}{4}$$

dengan  $Z = \sqrt[4]{2022}$ , maka nilai  $xy = 10^n$  dengan nilai  $n$  adalah ...