Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Februari 2020

21 – 24 Februari 2020

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
11. Notasi $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terkecil dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_k$. Sebagai contoh, $\min\{4, 1.5, 5\} = 1.5$, $\min\{3.5, \pi, 3, 4\} = 3$, $\min\{-5, 3\} = -5$, dan $\min\{1\} = 1$.
12. Notasi $\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terbesar dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_k$. Sebagai contoh, $\max\{4, 1.5, 5\} = 5$, $\max\{3.5, \pi, 3, 4\} = 4$, $\max\{-5, 3\} = 3$, dan $\max\{1\} = 1$.
13. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
14. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
15. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
16. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
17. Notasi $\dbinom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
18. Pada $\triangle ABC$:

(a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.

(b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.

(c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.

(d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

(e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

19. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

20. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

21. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

22. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

23. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

24. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 2 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Sekolah SMA KTOM sedang menyiapkan murid-muridnya untuk olimpiade matematika. Dari sekolah tersebut, diketahui sepuluh murid menyukai aljabar dan geometri, tiga belas murid menyukai geometri dan kombinatorika, dan lima belas murid menyukai kombinatorika dan aljabar. Diketahui pula tujuh murid menyukai aljabar, geometri, dan kombinatorika. Tentukan banyaknya murid yang menyukai minimal dua bidang.

2. Tentukan bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga $n!$ memiliki paling sedikit 100 buah faktor positif.

3. Diberikan bilangan real a, b, c, dan d yang memenuhi persamaan berikut
$$\begin{aligned} a+b+2ab &= 4, \\ b+c+2bc &= 7, \\ c+d+2cd &= 2. \end{aligned}$$
Tentukan nilai dari $(2a+1)(2d+1)$.

4. Sebuah segitiga lancip ABC memiliki titik tinggi H. Diketahui A_1 ada di BC sehingga $AA_1 \perp BC$, lalu definisikan B_1, C_1 dengan cara yang sama. Jika $\angle C_1A_1B_1 = 28^\circ$, tentukan besar $\angle C_1HB_1$ dalam satuan derajat.

5. Diberikan suatu segitiga ABC dengan $AB = 6$ dan $AC = 8$. Diberikan pula suatu lingkaran yang terletak di luar segitiga ABC. Lingkaran tersebut menyinggung sinar AB dan AC sekaligus, serta menyinggung segmen BC di T. Tentukan jumlah seluruh nilai yang mungkin dari
$$\lfloor |BT - CT| \rfloor.$$

6. Terdapat n buah kelereng yang berbeda. Duta akan mengambil sejumlah genap buah kelereng untuk dibawa pulang (boleh jadi Duta tidak mengambil kelereng sama sekali). Jika banyaknya cara Duta melakukannya adalah 2^{2020} cara, tentukan nilai dari n.

7. Sebuah bilangan asli n disebut *bebas-prima* jika tidak ada bilangan kuadrat sempurna selain 1 yang habis membagi n. Tentukan k terbesar sehingga ada k bilangan ganjil berurutan yang bebas-prima.

8. Definisikan barisan $A_k = 2^{2^k} + 1$ untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$ dan $B_l = 2^{2\cdot 3^l} + 2^{3^l} + 1$ untuk $l = 0, 1, 2, \ldots$. Tentukan bilangan bulat terkecil m sedemikian sehingga
$$A_0 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_m > B_0 \cdot B_1 \cdot B_2 \cdot \cdots \cdot B_9.$$

9. Misalkan a, b, c dan d adalah bilangan real yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 + (d+a)^2$. Tentukan nilai terbesar yang mungkin dari
$$\lceil \min\{ac, bd\} \rceil.$$

10. Diberikan garis l dengan persamaan $4x + 3y = 36$. Misalkan daerah X adalah daerah yang dibatasi oleh garis l, sumbu-x, dan sumbu-y. Misalkan pula terdapat garis g_1 dan g_2 dengan gradien m_1 dan m_2 berturut-turut yang keduanya melewati titik $(0, 0)$ dan memotong garis l sehingga membagi daerah X menjadi tiga bagian dengan luas yang sama. Tentukan nilai dari $9m_1m_2$.

11. Definisikan himpunan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Misalkan A dan B adalah dua himpunan bagian tak kosong dari S dimana anggota terbesar dari A tidak lebih besar dari anggota terkecil dari B. Tentukan banyaknya pasangan himpunan (A, B) yang mungkin.

12. Tentukan bilangan asli n terbesar sehingga n^2+n+1 adalah faktor dari $20n^{2020}+1$.

13. Tentukan jumlah semua bilangan asli n yang mungkin sehingga $n^4 + 4n + 4$ adalah bilangan kuadrat.

14. Misalkan p, q, r merupakan akar-akar dari polinomial $x^3 + 2x^2 - x - 9$. Misalkan $S_n = p^n + q^n + r^n$ untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n. Misalkan pula terdapat bilangan real a, b, c sehingga $S_{k+1} = a \cdot S_k + b \cdot S_{k-1} + c \cdot S_{k-2}$ untuk setiap $k = 2, 3, 4, \ldots$. Tentukan nilai dari $a + b + c + S_5$.

15. Diberikan segitiga tumpul ABC dengan $\angle A > 90°$. Misalkan titik D dan E berada pada segmen BC sedemikian sehingga titik D merupakan titik tengah segmen BC serta $AC \perp AE$. Jika diketahui bahwa $AB = 2AD$ dan $\angle BAE - \angle DAC = 10°$, tentukan besar $\angle BAE$ dalam satuan derajat.

16. Terdapat 2020 peserta game di suatu taman. Diketahui bahwa setiap orang mempunyai tepat tiga teman, dimana pertemanan mutual. Ronde dimulai ketika peluit dibunyikan dan setiap peserta harus berpegang tangan dengan tepat satu temannya. Suatu ronde dikatakan menang jika terdapat tepat 1010 pasangan teman. Diketahui bahwa kita dapat membuat peserta game menjadi sebuah lingkaran sehingga setiap orang yang berdiri bersebelahan berteman dengan satu sama lain. Tentukan total ronde maksimal yang dapat dimenangkan sehingga tidak ada pasangan yang lebih dari sekali muncul.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Misalkan (p, x, y) adalah pasangan bilangan yang memenuhi

$$p^x - y^4 = 4,$$

dimana x dan y adalah bilangan bulat nonnegatif dan p adalah bilangan prima.

   (a) Buktikan bahwa $p^x = (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2)$.
   Hint: Gunakan identitas $a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$. *Identitas ini dikenal sebagai Sophie Germain Identity.*

   (b) Buktikan bahwa $y^2 - 2y + 2 | y^2 + 2y + 2$.
   Hint: Tunjukkan terlebih dahulu bahwa $y^2 - 2y + 2 = p^m$ *dan* $y^2 + 2y + 2 = p^n$, *dimana* m *dan* n *adalah bilangan bulat nonnegatif yang memenuhi* $m \leq n$ *dan* $m + n = x$.

   (c) Buktikan bahwa $y^2 - 2y + 2 | 32$. Lalu, simpulkan semua nilai y yang memenuhi keterbagian berikut.
   Hint: Tunjukkan terlebih dahulu bahwa $y^2 - 2y + 2 | 4y$.

   (d) Tentukan semua pasangan (p, x, y) yang memenuhi persamaan pada soal.

2. A dan B bermain game. Terdapat $n > 2$ buah titik. Tiap langkah, satu pemain menggambar garis yang menghubungkan dua titik. Satu pasang titik hanya boleh dipasangkan oleh satu garis. Seorang pemain dikatakan sebagai pemenang jika pemain tersebut mampu untuk membuat segitiga untuk yang pertama kalinya. Diketahui bahwa A akan memulai permainan dan permainan akan dilakukan secara bergilir. Carilah, dengan bukti, semua n sehingga

   (a) A dapat memastikan kemenangannya.

   (b) B dapat memastikan kemenangannya.

3. Terdapat lingkaran dan dua tali busur l_1 dan l_2 yang tidak saling sejajar dan tidak saling berpotongan. Lipatlah lingkaran dengan garis lipatnya l_1 dan l_2 sedemikian sehingga kedua daerah yang terlipat saling bersinggungan. Misalkan l_3 adalah garis yang menyinggung kedua daerah yang telah terlipat tersebut. Buktikan bahwa l_1, l_2, dan l_3 ketiganya berpotongan di satu titik.

4. Tanpa menggunakan kalkulator, buktikan bahwa

$$\sqrt[4]{\frac{2}{1}} + \sqrt[4]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \cdots + \sqrt[4]{\frac{505}{504}} - \frac{1511}{3} < \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{8076}.$$