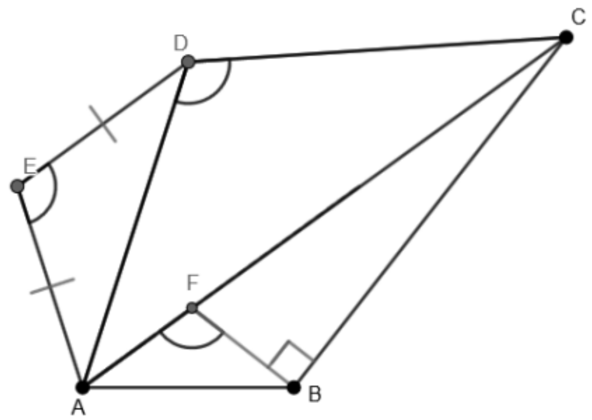
Solusi Babak Final
ITB Mathematics Olympiad 2022

Panitia ITBMO 2022

19 Maret 2022

1. Diberikan segilima konveks $ABCDE$. Titik F terletak pada ruas garis AC sehingga $\angle FBC = 90^\circ$. Diketahui panjang ruas garis $EA = ED$ serta segitiga ABF, ACD, dan ADE sebangun dengan $\angle AED = \angle ADC = \angle AFB$. Buktikan bahwa F terletak pada garis BE.

   Solusi:



Karena $EA = ED$, maka $\triangle ADE$ sama kaki. Akibatnya, $\triangle ABF$ dan $\triangle ACD$ juga sama kaki dengan sudut $\angle FAB = \angle FBA = \angle DAC = \angle DCA = \angle EAD = \angle EDA = \frac{180^\circ - \angle AED}{2} = \frac{180^\circ - \angle ADC}{2} = \frac{180^\circ - \angle AFB}{2}$.

Perhatikan bahwa $\triangle ABF \sim \triangle ACD$ sehingga $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD} = \frac{BF}{CD}$.

Perhatikan bahwa $\angle CAB = \angle FAB = \angle DAC = \angle DAF$. Karena $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD}$ dan $\angle CAB = \angle DAF$, maka $\triangle DAF \sim \triangle CAB$ sehingga $\angle AFD = \angle ABC$.

$$\angle AFD = \angle ABC = \angle FBA + \angle FBC = \frac{180^\circ - \angle AED}{2} + 90^\circ = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AED$$

Tinjau $\triangle ADE$. Misalkan dibuat lingkaran yang berpusat di titik E dengan berjari-jari EA dan ED. Karena $\angle AFD = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AED$, maka titik F berada pada lingkaran tersebut. Akibatnya, EF juga jari-jari sehingga $EA = ED = EF$ yang mengakibatkan $\triangle AEF$ merupakan segitiga sama kaki sehingga $\angle EFA = \angle EAF$.

Perhatikan bahwa $\angle EFA = \angle EAF = \angle EAD + \angle DAC = \angle FAB + \angle FBA = 180^\circ - \angle AFB$ sehingga $\angle EFA + \angle AFB = 180^\circ$.

Jadi, titik E, F, dan B berada pada satu garis lurus. $\blacksquare$

2. Untuk setiap bilangan bulat $a > 1$, didefinisikan barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dengan cara sebagai berikut:

$$a_0 = a$$

dan untuk setiap bilangan asli n, berlaku

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{jika } \sqrt{a_n} \text{ adalah bilangan bulat} \\ a_n + 4 & \text{jika bukan bilangan bulat} \end{cases}$$

Tentukan himpunan semua nilai a sehingga terdapat suatu bilangan A yang menyebabkan himpunan $\{n \mid a_n = A\}$ memiliki tak hingga banyak anggota.

Solusi:

Agar terdapat suatu nilai A sehingga terdapat $a_n = A$ untuk $n \geq 0$, barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ harus periodik. Akan dibuktikan beberapa hal:

(a) Jika $a \equiv 2 \pmod 4$ atau $a \equiv 3 \pmod 4$ dengan $a > 1$, maka a_n bukan bilangan kuadrat untuk setiap n sehingga barisannya monoton naik.

Bukti: Bilangan kuadrat bila dibagi 4 akan bersisa 0 atau 1. Jadi, a bukan bilangan kuadrat. Akibatnya,

$$\begin{aligned} &a_1 = a + 4 \equiv 2 \text{ atau } 3 \pmod 4 \\ &a_2 = a_1 + 4 = a + 8 \equiv 2 \text{ atau } 3 \pmod 4 \\ &a_3 = a_2 + 4 = a + 12 \equiv 2 \text{ atau } 3 \pmod 4 \\ &\text{dan seterusnya} \end{aligned}$$

Jadi, barisannya monoton naik. ■

(b) Jika $a \equiv 1 \pmod 4$ dengan $a > 1$, maka terdapat m sehingga $a_m \equiv 3 \pmod 4$.

Bukti: Bilangan kuadrat bila dibagi 4 akan bersisa 0 atau 1. Oleh karena itu, jika $a \equiv 1 \pmod 4$, maka barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ memuat bilangan kuadrat. Akar bilangan kuadrat tersebut berbentuk $4k + 1$ atau $4k + 3$. Jika akarnya berbentuk $4k+3$, jelas terdapat m sehingga $a_m \equiv 3 \pmod 4$. Jika akarnya berbentuk $4k+1$, maka terdapat bilangan kuadrat lainnya yang lebih kecil dari bilangan kuadrat pertama pada barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Jika akarnya selalu berbentuk $4k + 1$, maka diperoleh bentuk $4k + 1$ terkecil, yaitu 5, diperoleh barisan $5, 3, \ldots$. Oleh karena itu, terdapat m sehingga $a_m \equiv 3 \pmod 4$. ■

(c) Jika $a \equiv 0 \pmod 4$ dan $a > 1$, maka terdapat m sehingga $a_m \equiv 2 \pmod 4$.

Bukti: Bilangan kuadrat bila dibagi 4 akan bersisa 0 atau 1. Oleh karena itu, jika $a \equiv 0 \pmod 4$, maka terdapat bilangan kuadrat pada barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Akar bilangan kuadrat tersebut berbentuk $4k$ atau $4k+2$. Jika akarnya berbentuk $4k + 2$, jelas terdapat m sehingga $a_m \equiv 2 \pmod 4$. Jika akarnya berbentuk $4k$, maka terdapat bilangan kuadrat lainnya yang lebih kecil dari bilangan kuadrat pertama. Jika akarnya selalu berbentuk $4k$, maka diperoleh bentuk $4k$ terkecil, yaitu 4, diperoleh barisan $4, 2, \ldots$. Oleh karena itu, terdapat m sehingga $a_m \equiv 2 \pmod 4$. ■

Jadi, himpunan semua nilai a yang menyebabkan himpunan $\{n \mid a_n = A\}$ memilik tak hingga banyaknya anggota adalah himpunan kosong.

3. Diketahui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah dua buah fungsi sehingga untuk setiap bilangan real x berlaku

$$f(x+2022)g(x) + f(x)g(x+2022) = 2022$$

Jika g adalah fungsi linear, tentukan semua pasangan fungsi f dan g yang memenuhi.

Solusi:

Misalkan $g(x) = mx + c$ dan H adalah himpunan semua fungsi dari $[0, 2022)$ ke $\mathbb{R}$. Bagi kasus berdasarkan nilai m dan c (yang bersamaan memparameterisasi fungsi g):

Kasus 1: $m = 0,\ c = 0$

$g(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x+2022)0 + f(x)0 &= 2022 \\ 0 &\neq 2022 \end{aligned}$$

Kontradiksi sehingga kasus 1 tidak memenuhi.

Kasus 2: $m = 0,\ c \neq 0$.

$g(x) = c$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x+2022)c + f(x)c &= 2022 \\ f(x) + f(x+2022) &= \frac{2022}{c} \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap bilangan real x berlaku

$$\begin{aligned} f(x+2022) &= \frac{2022}{c} - f(x) \\ f(x-2022) &= \frac{2022}{c} - f(x) \\ f(x) &= f(x+4044) \\ f(x) + f(x+2022) &= \frac{2022}{c} \end{aligned}$$

Jadi, f periodik dengan periode 4044.

Misalkan $h \in H$ sedemikian sehingga $h(x) = f(x)$ untuk setiap x dalam selang $[0, 2022)$. Akibatnya, untuk setiap bilangan bulat b dan bilangan real r dalam selang [0,2022) berlaku

$$f(2022b + r) = \begin{cases} h(r) & \text{jika } b \text{ genap} \\ \frac{2022}{c} - h(r) & \text{jika } b \text{ ganjil} \end{cases}$$

Akibatnya, $f(x+2022)g(x) + f(x)g(x+2022) = (f(x+2022) + f(x))c$

Misalkan $x = 2022b + r$ dengan $b \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{R}$ dalam selang $[0, 2022)$, maka karena pasti ada salah satu dari b dan $b+1$ yang genap dan satunya ganjil, maka

$$f(x+2022) + f(x) = f(2022(b+1) + r) + f(2022b + r) = h(r) + \frac{2022}{c} - h(r) = \frac{2022}{c}$$

sehingga

$$f(x+2022)g(x) + f(x)g(x+2022) = \left(\frac{2022}{c}\right)c = 2022$$

memenuhi.

Dengan demikian, semua f yang memenuhi untuk kasus ini adalah semua fungsi f sehingga untuk setiap bilangan bulat b dan setiap bilangan real r dalam selang $[0, 2022)$ berlaku

$$f(2022b + r) = \begin{cases} h(r) & \text{jika } b \text{ genap} \\ \frac{2022}{c} - h(r) & \text{jika b ganjil} \end{cases}$$

Kasus 3: $m \neq 0$

Terdapat tepat satu bilangan a (yaitu $a = -\frac{c}{m}$) sedemikian sehingga $g(a) = 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(a + 2022)g(a) + f(a)g(a + 2022) &= 2022 \\ f(a)g(a - 2022) + f(a - 2022)g(a) &= 2022 \end{aligned}$$

sehingga

$$f(a)g(a + 2022) = f(a)g(a - 2022) = 2022$$

Jelas tidak mungkin $f(a) = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} g(a + 2022) &= g(a - 2022) \\ am + 2022m + c &= am - 2022m + c \\ 4044m &= 0 \\ m &= 0 \end{aligned}$$

Kontradiksi sehingga kasus ini tidak memenuhi.

Sebagai kesimpulan, semua pasangan fungsi f dan g yang memenuhi adalah semua fungsi f dan g sedemikian sehingga untuk setiap x real berlaku

$$g(x) = c$$

dan untuk setiap bilangan bulat b dan bilangan real r dalam selang $[0, 2022)$ berlaku

$$f(2022b + r) = \begin{cases} h(r) & \text{jika } b \text{ genap} \\ \frac{2022}{c} - h(r) & \text{jika } b \text{ ganjil} \end{cases}$$

dengan c sebarang bilangan real bukan 0 dan h sebarang fungsi dari $[0, 2022)$ ke $\mathbb{R}$.

4. Anda menemukan diri Anda di sebuah arena yang besar. Untuk keluar dari arena, Anda harus memainkan dan memenangkan sebuah permainan sebagai berikut.

   Arena terdiri atas *grid* dengan 3 baris dan n kolom, dengan $n > 4$. Awalnya, Anda berdiri di pojok kiri bawah dan lawan Anda berdiri di pojok kanan atas. Anda memulai permainan dengan bergerak seperti huruf L (dua petak horizontal—satu petak vertikal atau satu petak horizontal—dua petak vertikal), lalu lawan Anda bergerak seperti huruf L juga, dan seterusnya secara bergantian.

   Peraturan permainannya sebagai berikut:

   (a) Seorang pemain tidak boleh bergerak ke luar *grid* arena.

(b) Jika seorang pemain berada di kanan pemain lain, maka ia harus bergerak ke kiri, dan jika ia di kiri pemain lain, maka ia harus bergerak ke kanan.

(c) Seorang pemain tidak dapat bergerak ke petak yang bersebelahan (yaitu tepat di atas, bawah, kiri, atau kanan) dengan pemain lainnya.

(d) Pemain menang apabila ia bergerak ke petak yang ditempati oleh lawannya (seperti "memakan" dalam catur), atau lawannya tidak bisa bergerak di gilirannya.

Lawan Anda selalu bermain sempurna, tetapi Anda-lah yang memilih nilai n. Carilah semua nilai n yang membuat Anda punya strategi untuk menang. Buktikan jawaban Anda.

Solusi:

Warnai arena seperti papan catur, dengan "Anda" berada di petak warna terang. Kita klaim bahwa: "untuk suatu posisi di mana jarak horizontal kedua pemain adalah m, dengan $m \geq 2$, maka pemain yang akan bergerak punya strategi menang jika ia (sebelum bergerak) berada pada warna yang berbeda dengan lawannya, dan lawannya punya strategi menang jika ia berada pada warna yang sama dengan lawannya".

Bukti dengan induksi sebagai berikut.
Notasi: A = Anda, L = lawan
WLOG pemain yang bergerak A.

(Langkah basis)
Kasus $m = 2$:
Subkasus (a): A di warna terang, L di warna terang (WLOG di c3)

	a	b	c
3	A(1)		L
2			
1	A(2)		

Subkasus (b): A dan L di warna gelap

	a	b	c
3			
2	A		L
1			

Subkasus (c): A di terang, L di gelap

	a	b	c
3	A(1)		
2			L
1	A(2)		

Subkasus (d): A di gelap, L di terang (WLOG c3)

	a	b	c
3			L
2	A		
1			

Jika A berada di warna yang berbeda dengan L, maka A dapat memakan L. Jadi A punya strategi. Terbukti klaim benar untuk $m = 2$.

Kasus $m = 3$:
Subkasus (a): A di gelap, L di gelap (WLOG di d3)

	a	b	c	d
3				L
2	A			
1				

Subkasus (b): A di terang, L di terang

	a	b	c	d
3	A(1)			
2				L
1	A(2)			

Jika A berada di warna yang sama dengan L, maka A kalah, karena petak-petak yang bisa ditarget oleh A (gerakan kuda, ke kanan) adalah petak yang bersebelahan dengan L atau dapat dimakan oleh L di langkah berikutnya. Akibatnya L punya strategi.

Subkasus (c): A di terang, L di gelap (WLOG di d3)

	a	b	c	d
3	A(1)			L
2				
1	A(2)			

Subkasus (d): A di gelap, L di terang

	a	b	c	d
3				
2	A			L
1				

Di subkasus (c), A bisa bergerak ke c2, dan di subkasus (d), A bisa bergerak ke c3. Pada kedua subkasus, L tidak bisa bergerak dengan aman lagi. Jadi A punya strategi. Terbukti klaim benar untuk $m = 3$.

(Langkah induktif)
Asumsikan klaim benar untuk $m = 2, 3, ..., k$, dengan $k \geq 3$. Akan dibuktikan klaim benar untuk $m = k + 1$. Akan dibuktikan klaim benar untuk $m = k + 1$. Misalkan $m = k + 1 \geq 4$ dan WLOG pemain yang akan bergerak adalah A.

Jika kedua pemain berada di petak yang berlawanan warna, maka A akan berpindah warna saat bergerak, sehingga posisi baru adalah $m = k$ atau $k - 1$, kedua pemain pada warna yang sama, dan pemain yang akan bergerak adalah L. Jadi, dari asumsi induksi, A punya strategi. Jika kedua pemain berada di petak yang warnanya sama, maka posisi baru adalah $m = k$ atau $k - 1$, kedua pemain pada warna yang berbeda, dan pemain yang akan bergerak adalah L. Jadi, dari asumsi induksi, L punya strategi. Klaim terbukti benar untuk $m = k + 1$.

Dengan demikian, klaim benar untuk setiap bilangan asli $m >= 2$.

Perhatikan bahwa $n >= 5$ sehingga di awal $m = n - 1 \geq 4 \geq 2$. Jika n ganjil, maka kedua pemain awalnya sama warna. Karena A bergerak pertama, maka L punya strategi. Jika n genap, maka kedua pemain awalnya berbeda warna. Karena A bergerak pertama, maka A punya strategi.

Dengan demikian, semua n yang membuat Anda punya strategi adalah semua bilangan genap yang lebih dari atau sama dengan 6.