Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan Februari 2018

23–26 Februari 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Tujuh siswa akan dipilih menjadi perwakilan SMA KTOM pada lomba catur, bulu tangkis dan pingpong. Apabila akan dipilih tiga siswa pada lomba catur, dua siswa masing-masing pada lomba bulu tangkis dan lomba pingpong, tentukan banyak cara SMA KTOM memilih perwakilan lomba.

2. Diketahui bilangan lima digit $A589B$ habis dibagi 90. Tentukan nilai $A + B$.

3. Apabila x adalah bilangan real yang memenuhi $x + \frac{1}{x} = 3$. Tentukan nilai $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

4. Diberikan segitiga ABC siku-siku di A dan $AB = 20, AC = 15$. Titik E terletak di antara A dan C sedemikian hingga $AE = 3$ dan titik D terletak di antara B dan C sedemikian hingga DE tegak lurus AC. Tentukan panjang CD.

5. Gedung Perusahaan KTO memiliki lift unik. Lift tersebut hanya bisa berpindah ke atas atau ke bawah dengan syarat akan berhenti setelah berjalan 2 lantai atau 3 lantai. Sebagai contoh, jika lift berada di lantai 5, maka lift hanya bisa berpindah ke lantai $2, 3, 7$, atau 8. Rio ingin mengantarkan dokumen ke lantai 11. Tetapi, ia harus mengambil dokumen tersebut di lantai 16. Diketahui Rio sekarang berada di lantai 1 dan diasumsikan bahwa Rio tidak pernah turun saat berjalan dari lantai 1 ke lantai 16 dan tidak pernah naik saat berjalan dari lantai 16 ke lantai 11. Tentukan banyak cara Rio mengantar dokumen dengan lift unik ini.

6. Diberikan persegi panjang $ABCD$ dengan $AB = 8, AD = 20$ dan persegi panjang $AEFG$ dengan $AE = 12, AG = 21$. Jika titik H merupakan perpotongan garis BC dan AE sehingga ABH merupakan irisan dari kedua persegi panjang. Tentukanlah selisih luas dari kedua persegi panjang yang tidak beririsan.

7. Misalkan M dan m adalah nilai terbesar dan terkecil yang mungkin dari $a + b + c$ dengan (a, b, c) adalah tripel bilangan asli yang memenuhi persamaan

$$ab + bc + 2ca = abc + a + c + 2.$$

   Hitunglah $10M + m$.

8. Tentukan tiga digit terakhir dari

$$\sum_{k=1}^{6561} \lfloor \log_3 k \rfloor.$$

9. Permutasi $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ dari $(1, 2, 3, 4, 5)$ disebut *elok* apabila

$$a_1 + a_2 \leq a_3 + a_4 + a_5.$$

   Tentukan banyak permutasi yang *elok*.

10. Diberikan n adalah bilangan bulat positif, sehingga terdapat bilangan real non negatif x, y, z sehingga :
$$n! = \lfloor x \rfloor! + \lfloor y \rfloor! + \lfloor z \rfloor!$$
Jika p adalah bilangan terbesar dan q adalah bilangan terkecil sehingga $p \leq x + y + z < q$. Tentukan nilai $\lfloor p + q \rfloor$.

11. $PQRS$ adalah segiempat siklis dengan $\angle PQS = 70°$, $\angle PSQ = 50°$, dan $QR = RS$. Jika PQ memotong SR di T dan PS memotong QR di U, tentukan nilai dari $\angle RTU - \angle RUT$ dalam derajat.

12. Diberikan lima bilangan real a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, dengan $a_1 = 2018$, a_2 positif, a_1, a_2, a_3 membentuk barisan aritmetika, a_2, a_3, a_4 membentuk barisan geometri dengan rasio taknol, a_3, a_4, a_5 membentuk barisan aritmetika. Nilai minimum $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ dapat dinyatakan dalam bentuk $a + b\sqrt{c}$, dengan a dan b merupakan bilangan bulat, dan c merupakan bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat sempurna yang lebih besar dari 1. Tentukan $|a + b + c|$.

13. Segitiga ABC adalah segitiga sama kaki dan siku-siku di C. Apabila terdapat titik P di dalam $\triangle ABC$ sehingga $PC = 9, PB = 8$ dan $PA = \sqrt{226}$ dan panjang sisi AC dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ dengan a, b dan c bilangan bulat serta c tidak habis dibagi kuadrat bilangan prima apapun, tentukan $a + b + c$.

14. Tentukan banyaknya tripel bilangan asli (a, b, c) dengan $1 \leq a, b, c \leq 100$ yang memenuhi
$$a \times 2^b + b \times 2^a = 2^c.$$

15. Misalkan $P(x)$ adalah polinomial monik berderajat n (koefisien x^n 1) yang semua akarnya adalah bilangan bulat. Misal a_i adalah koefisien dari x^i. Diketahui $a_i > 1$ dan bulat untuk semua i. Diketahui juga untuk setiap i, terdapat p_i prima sehingga a_i adalah perpangkatan dari p_i dan $p_j \neq p_k$ untuk $j \neq k$. Tentukan n terbesar yang mungkin sehingga terdapat $P(x)$ yang memenuhi kondisi tersebut.

16. Lantai sebuah ruangan berukuran 15×15 akan ditutup dengan ubin berbentuk persegi berukuran 2×2 dan bentuk L. Tentukan minimum banyaknya bentuk L yang dibutuhkan.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Diberikan segitiga ABC dengan I titik pusat lingkaran dalam. Sinar AI memotong lingkaran luar segitiga ABC di titik L.

   (a) Buktikan bahwa segitiga BLC sama kaki. (Petunjuk : gunakan fakta bahwa AI merupakan garis bagi sudut BAC dan hubungan sudut keliling)

   (b) Buktikan bahwa segitiga BIL dan segitiga CIL sama kaki.

   (c) Buktikan bahwa titik L adalah titik pusat lingkaran luar segitiga BIC.

   (d) Misalkan I_a merupakan perpotongan garis bagi luar $\angle ABC$ dan $\angle BCA$. Buktikan bahwa $BICI_a$ merupakan segiempat talibusur dengan diameter II_a.

   (e) Jika $AI = 25, AC = 30$, dan $AB = 40$. Tentukan panjang II_a.

2. Buktikan bahwa n^2 membagi $(n + 1)^n - 1$ untuk setiap bilangan asli n.

3. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

   $$f(x^2 + y) = x^2 f(x) + f(y) + 2yf(x)$$

   untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Di setiap kotak dalam petak berukuran 8×8 diisi dengan bilangan real positif. lima kotak akan ditutup oleh sebuah penutup yang dapat digeser-geser (sebuah kotak hanya dapat ditutup oleh maksimal 1 penutup). Kita akan melakukan suatu operasi dan menghitung jumlah bilangan-bilangan yang terlihat setelah setiap operasi. Misal S_n adalah jumlah setelah n kali operasi. Pada awalnya, $S_0 = 8$. Kemudian, kelima penutup akan digeser ke salah satu kotak yang bersebelahan dengan kotak yang di tutup sebelumnya. Setelah pergeseran terjadi, kita punya $S_1 = 64$. Proses ini akan diulang beberapa kali. Apabila diketahui $S(n) = 8^{n+1}$ untuk setiap $n \leq M$, dimana M adalah suatu bilangan asli, tentukan nilai maksimum yang mungkin untuk M.