Shortlist Soal OSN Matematika 2017

Olimpiade Sains Nasional ke-16
Pekanbaru, Riau, 2017

Kontributor

Komite Pemilihan Soal OSN Matematika 2017 menyampaikan rasa terima kasihnya kepada para penyumbang soal berikut.

Muhammad Afifurrahman, Nanang Susyanto, Ronald Widjojo, Purwanto, Aleams Barra, Soewono, Budi Soerodjo, Made Tantrawan, Herbert Ilhan Tanudjaja

Aljabar

A1. Diberikan suku banyak P dengan koefisien-koefisien bilangan bulat. Misalkan diketahui bahwa persamaan $P(x) = 0$ mempunyai sedikitnya 9 solusi bulat berbeda dan misalkan juga n adalah sebarang bilangan bulat dengan sifat $|P(n)| < 2017$. Buktikan bahwa $P(n) = 0$.

A2. Diberikan $2n$ bilangan real $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Buktikan bahwa terdapat suatu $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ sedemikian sehingga

$$|x_1 - x_i| + |x_2 - x_i| + \cdots + |x_n - x_i| \leq |y_1 - x_i| + |y_2 - x_i| + \cdots + |y_n - x_i| .$$

A3. Tentukan semua kuadruplet bilangan real (a, b, c, d) yang memenuhi sistem persamaan berikut:

$$a^3 = bc + cd$$

$$b^3 = cd + da$$

$$c^3 = da + ab$$

$$d^3 = ab + bc$$

A4. Misalkan

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

dan

$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

berturut-turut merupakan barisan aritmetika dan barisan geometri. Jika $a_m = g_m$ untuk takberhingga banyaknya m, buktikan bahwa $a_n = g_n$ untuk setiap n.

A5. Tentukan semua pasang bilangan real x, y yang berbeda yang memenuhi sistem persamaan

$$x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$$
$$x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$$

A6. Untuk sebarang bilangan real positif a, b, c dengan $a+b+c = 1$ didefinisikan

$$R(a, b, c) = \frac{a+b-c}{ab} + \frac{b+c-a}{bc} + \frac{c+a-b}{ca}.$$

Buktikan bahwa $8 < R(a, b, c) \leq 9$ jika dan hanya jika a, b, c merupakan sisi-sisi dari suatu segitiga.

A7. Tunjukkan bahwa

$$n^n < (n!)^2$$

berlaku untuk setiap bilangan asli $n > 2$.

A8. Diketahui $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ adalah fungsi tak konstan yang memenuhi

$$f(n) + \frac{f(f(n) + n)}{2} < f(n+1) + 1$$

untuk setiap n. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan asli $m \in \mathbb{N}$ sehingga $f(n) = 0$ untuk $n \leq m$ dan $f(n) = 1$ untuk $n > m$.

A9. Carilah banyaknya bilangan asli $n \leq 2017$ sehingga terdapat n bilangan real $x_1, x_2, \cdots, x_n$ yang berada pada interval $[-5, 3]$, yang juga memenuhi tiga kondisi berikut:

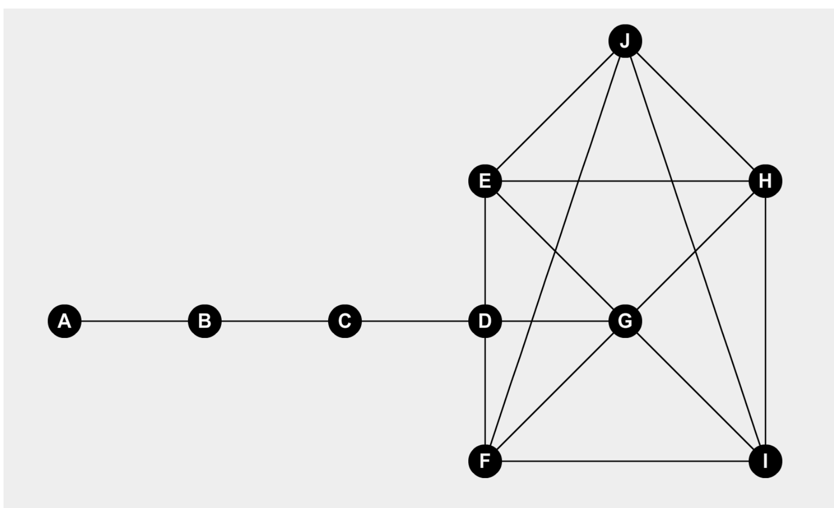
- jumlah dari n bilangan tersebut minimal n
- jumlah kuadrat dari n bilangan tersebut maksimal $5n$
- jumlah kuartik dari n bilangan tersebut minimal $73n$

A10. Misalkan $n \geq 4$. Buktikan bahwa untuk sebarang n bilangan real positif $x_1, x_2, \cdots, x_n$ yang jumlahnya 1, berlaku bahwa

$$x_1^{x_2} x_2^{x_3} \cdots x_n^{x_1} \leq \frac{1}{4}$$

Kombinatorika

C1. Pada graf di bawah ini polisi dan pencopet melakukan permainan. Pertama polisi memilih satu buah titik dan berikutnya pencopet memilih titik yang lain. Satu *langkah* adalah bergerak dari satu titik ke titik lain yang terhubung oleh satu sisi atau tetap diam di tempat. Polisi dan pencopet melakukan langkah secara bergantian. Buktikan bahwa polisi dapat memilih suatu titik, sehingga dimanapun posisi awal pencopet, ia dapat ditangkap dalam 6 langkah atau kurang. Pemilihan titik awal tidak dihitung sebagai satu langkah.



C2. Buktikan bahwa diantara sebarang 7 bilangan kuadrat sempurna terdapat dua diantaranya yang selisihnya habis dibagi 20.

C3. Terdapat k siswa dalam suatu kelas. Masing-masing siswa menghitung banyaknya siswa lain yang memiliki makanan favorit yang sama dengannya dan banyaknya siswa lain yang memiliki minuman favorit yang sama dengannya (Diasumsikan masing-masing anak hanya memiliki

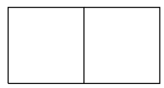
1 makanan favorit dan 1 minuman favorit). Hasilnya kemudian dituliskan di papan tulis (Masing-masing anak menuliskan 2 buah bilangan). Diketahui ternyata bilangan $0, 1, 2, \ldots, 7$ ada pada papan tulis tersebut. Tentukan nilai k terkecil sehingga selalu dapat dipastikan bahwa terdapat dua siswa dengan makanan dan minuman favorit yang sama.

C4. Lima orang siswa bertemu di suatu lomba. Sebagian sudah saling mengenal dan sebagian lagi tidak saling mengenal. Suatu trio adalah pasangan tiga siswa (A, B, C) sehingga A dan B dan B dan C saling kenal atau A dan B dan B dan C tidak saling kenal. Trio (A, B, C) dan (C, B, A) dianggap sebagai trio yang sama. Paling sedikit ada berapa banyak trio yang mungkin dimiliki?

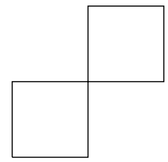
C5. Pada suatu papan catur $2^n \times 2^n$, n bilangan bulat positif, tempelkan persegi panjang 2×1 pada bagian luar sehingga mempunyai sisi persekutuan dengan tepat dua persegi pada papan catur. Tunjukkan bahwa hasilnya dapat ditutup dengan tepat oleh gabungan bentuk-bentuk L tanpa ada yang tumpang tindih. (Bentuk L adalah gabungan tiga persegi satuan yang mempunyai titik persekutuan).

C6. Diketahui P adalah segi 2017 beraturan. Tentukan k terkecil sehingga untuk setiap k titik sudut pada P selalu ada 17 di antaranya dengan sifat segi 17 yang terbentuk olehnya mempunyai 16 sisi persekutuan dengan P.

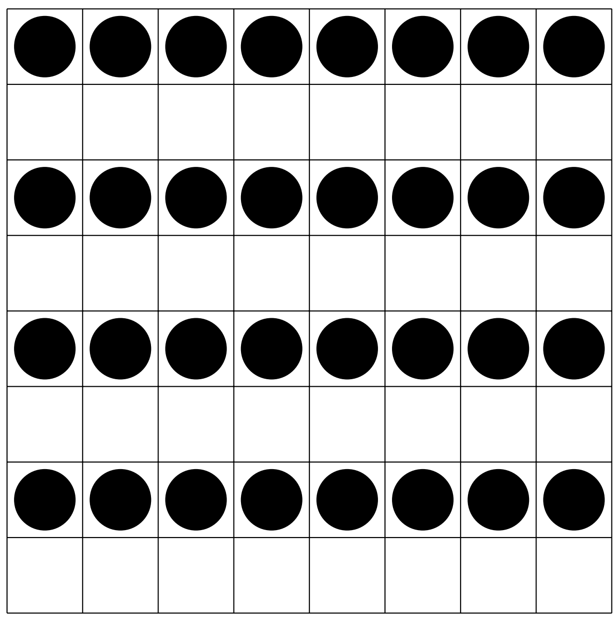
C7. Diberikan sebuah papan catur 8×8. 2 kotak di papan catur disebut *bersinggungan* bila kedua kotak tersebut memiliki tepat satu titik persekutuan. Sebuah konfigurasi 32 pion di papan tersebut disebut *bijak* bila tidak ada dua kotak bersinggungan yang keduanya ditempati pion. Sebuah konfigurasi bijak disebut *bijak-n* bila tepat n kotak pojokan diduduki pion. Cari semua n sehingga terdapat konfigurasi bijak-n.



Contoh dua kotak yang *tidak* bersinggungan



Contoh dua kotak yang bersinggungan



Contoh konfigurasi bijak-2. Di sini, lingkaran hitam menandakan pion.

Formulasi Alternatif

Misalkan $S = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 8, 1 \leq y \leq 8\}$ sebagai himpunan 64 titik di bidang Kartesian. Dua titik di S, misalkan (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), dikatakan *bersinggungan* bila $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 1$. Sebuah himpunan $T \subset S$ disebut *bijak* bila $|T| = 32$ dan tidak ada dua titik di T yang bersinggungan. Sebuah himpunan bijak U disebut *bijak-n* bila $U \cap \{(1,1),(1,8),(8,1),(8,8)\}$ memiliki kardinalitas n. Cari semua n sehingga terdapat konfigurasi bijak-n.

C8. Suatu kontes musik diikuti oleh $m > 1$ penyanyi. Ada n juri yang menilai kontes ini. Setiap juri membagikan nilai $0, 1, \ldots, m-1$ ke setiap penyanyi sehingga setiap penyanyi memperoleh nilai yang berbeda. Semakin tinggi nilai yang diberikan seorang juri ke seorang penyanyi, penyanyi tersebut semakin disukai. Pemenang kontes adalah penyanyi yang memperoleh nilai tertinggi (mungkin lebih dari satu). Salah satu penyanyi di kontes ini adalah Jamala. Dibandingkan setiap penyanyi lain, Jamala tidak pernah lebih disukai menurut lebih dari $\frac{n}{2}$ juri.

Tunjukkan bahwa Jamala tidak mungkin memenangkan kontes ini.

C9. Misalkan F adalah himpunan sejumlah hingga interval tertutup di garis bilangan real.

Sebuah subhimpunan S dari F adalah *terpisah* jika tidak ada dua interval di F yang saling

berpotongan. Dari semua subhimpunan terpisah S dari F, misalkan $m(F)$ adalah nilai

maksimum $|S|$.

Sebuah himpunan bilangan real T adalah *penyatu* untuk F jika untuk setiap interval di F,

interval tersebut mengandung setidaknya satu anggota dari T. Dari semua subhimpunan

penyatu T untuk F, misalkan $n(F)$ adalah nilai minimum $|T|$.

Buktikan $m(F) = n(F)$ untuk semua F.

C10. Sebuah aula lantainya ditutupi oleh 2017×2017 ubin. Luffy mempunyai sejumlah detektor. Jika detektor ini diletakkan di atas sebuah ubin dia akan menyala jika tepat dibawahnya terdapat emas, dan tidak bereaksi apapun jika tidak ada emas di bawahnya. Luffy menyimpan k buah detektor tepat di atas k buah ubin kemudian dia keluar ruangan. Sanji memilih suatu daerah yang ditutupi oleh 1500×1500 ubin dan menyembunyikan tepat satu koin emas di bawah setiap ubin. Ketika Luffy kembali dan melihat detektor yang tadi dia pasang, dia dapat menentukan letak semua koin yang tadi di tanam Sanji.

Paling sedikit berapa banyak detektor yang harus Luffy gunakan agar ia dapat selalu menentukan letak semua koin emas seperti di atas?

Geometri

G1. Melalui titik sudut A dari jajargenjang $ABCD$, dibuat suatu garis g. Buktikan bahwa jarak dari C ke garis g adalah jumlah atau selisih jarak dari B dan D ke g.

G2. Diketahui dua lingkaran berpusat di P dan Q. Buktikanlah bahwa titik potong kedua garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran dengan kedua garis singgung persekutuan luar keduanya terletak pada satu lingkaran.

G3. Pada segitiga ABC, titik P dan Q berturut-turut adalah proyeksi titik A ke garis bagi sudut ABC dan ACB. Buktikanlah bahwa $PQ \parallel BC$.

G4. Di dalam segitiga samasisi ABC terletak titik T. Buktikanlah bahwa TA, TB dan TC adalah panjang sisi-sisi suatu segitiga.

G5. Diberikan lingkaran $\Gamma(O)$ yang berpusat di O dan P titik di luar $\Gamma(O)$. A dan B titik di $\Gamma(O)$ sedemikian sehingga PA dan PB adalah garis singgung $\Gamma(O)$. Garis l melalui P memotong $\Gamma(O)$ berturut-turut di titik C dan D (C terletak di antara P dan D). Garis BF sejajar garis PA dan memotong garis AC dan garis AD berturut-turut di E dan F. Buktikan bahwa $BE = BF$.

G6. Diberikan jajargenjang $ABCD$. Titik-titik E dan F dipilih berturut-turut pada sisi BC dan CD sedemikian rupa sehingga segitiga ABE dan BCF mempunyai luas yang sama. Diagonal BD memotong AE dan AF berturut-turut di M dan N. Buktikan terdapat segitiga yang panjang sisi-sisinya sama dengan BM, MN, dan ND.

G7. Dibuat setengah lingkaran $\Gamma(O)$ dengan titik pusat O, dengan O terletak di sebuah garis l. C dan D terletak di lingkaran $\Gamma(O)$, dan garis singgung $\Gamma(O)$ di titik C dan D berturut-turut memotong garis l di titik B dan A, sedemikian sehingga O terletak di antara titik B dan A. Misalkan E titik potong antara AC dan BD, dan F titik pada l sehingga EF tegak lurus l. Buktikan bahwa EF membagi sudut CFD.

G8. Diberikan lingkaran Γ yang berpusat di titik O, dengan AB sebagai diameternya. Titik C terletak pada perpanjangan garis AB sehingga B terletak di antara A dan C, dan garis yang melalui C memotong lingkaran Γ di titik-titik D dan E (dengan D terletak di antara C dan E). OF adalah diameter lingkaran luar segitiga OBD, dan perpanjangan garis CF memotong lingkaran luar segitiga OBD di titik G. Buktikan titik-titik O, A, E, G terletak pada satu lingkaran.

G9. Diketahui $ABCD$ jajarangenjang. Titik E diambil sehingga $BCED$ merupakan segiempat tali busur. Misalkan l garis yang melalui A, memotong segmen DC di titik F dan memotong perpanjangan garis BC di G. Diketahui $EF = EG = EC$. Buktikan bahwa l merupakan garis bagi sudut BAD.

G10. Diketahui lingkaran $\Gamma_1(O_1)$ berpusat di O_1, lingkaran $\Gamma_2(O_2)$ berpusat di O_2, dan keduanya berpotongan di titik C dan D. Diketahui pula titik P dan Q berturut-turut terletak di lingkaran $\Gamma_1(O_1)$ dan $\Gamma_2(O_2)$. Sebuah garis l melalui titik D dan memotong $\Gamma_1(O_1)$ dan $\Gamma_2(O_2)$ berturut-turut di titik A dan B. Garis PD dan AC bertemu di titik M, dan garis-garis QD dan BC bertemu di titik N. Misalkan O pusat lingkaran luar dari segitiga ABC. Buktikan bahwa OD tegak lurus MN jika dan hanya jika dapat ditemukan sebuah lingkaran yang melalui titik-titik P, Q, M dan N.

Teori Bilangan

N1. Misalkan $A = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ merupakan bilangan asli dalam basis 10 yang digit ke-i nya adalah a_i. Definiskan $A^* = \overline{a_n \cdots a_2 a_1}$ dan $d(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Sepasang bilangan (A, B) disebut *serasi* jika $A \times B = C$ dan $A^* \times B^* = C^*$. Sebagai contoh $(12, 24)$ serasi karena $12 \times 24 = 288$ dan $21 \times 42 = 882$. Cari suatu pasangan serasi (A, B) sehingga $d(A + B) = 2017$.

N2. (NT) Suatu bilangan asli x dikatakan bersifat *binom* jika terdapat bilangan-bilangan asli m dan n dengan $1 < m \leq \frac{n}{2}$ sehingga $\binom{n}{m} = x$.

(a) Buktikan bahwa 2017 tidak bersifat binom.

(b) Tunjukkan bahwa ada tak hingga banyak bilangan asli kelipatan 2017 yang bersifat binom.

(keterangan: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$)

N3. Tentukan semua bilangan asli n yang memenuhi dua bilangan

$$n^2 + 4 \quad \text{dan} \quad n^4 + 2n^2 + 3$$

merupakan bilangan kubik!

N4. Tentukan semua pasangan bilangan asli (r, n) sehingga pernyataan ini benar:

Perkalian n bilangan prima ganjil terkecil, ditambah 1, sama dengan 2^r

N5. Buktikan bahwa terdapat tak hingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- n memiliki setidaknya 2017 faktor.
- terdapat bilangan asli k sehingga $\dfrac{20^n + 17k}{n}$ merupakan bilangan asli

N6. Suatu bilangan asli d disebut *istimewa* jika setiap bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai $a^2 + b^2 - dc^2$ untuk suatu bilangan bulat a, b, c.

(a) Tunjukkan bahwa 2017 adalah bilangan istimewa.

(b) Tentukan bilangan asli terkecil yang tidak istimewa.

Alternatif Redaksi(Hard) Tentukan semua bilangan istimewa.

N7. Tentukan semua triplet (p, q, r) prima sehingga $8p - q - r, 8q - r - p, 8r - p - q$ juga merupakan bilangan prima.

N8. Tentukan semua n asli sehingga dapat ditemukan bilangan asli k yang dapat dinyatakan sebagai penjumlahan n bilangan prima berurutan, dan penjumlahan $n + 1$ bilangan prima berurutan.

N9. Definiskan suatu barisan a_n sebagai berikut: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ dan untuk $n > 4$, a_n didefinisikan sebagai bilangan asli terkecil yang belum muncul pada suku-suku sebelumnya sehingga $(a_n, a_{n-2}) > 1$ dan $(a_n, a_{n-1}) = 1$. Tunjukkan bahwa setiap bilangan asli m terdapat n sehingga $m = a_n$.

N10. Diketahui bahwa bilangan rasional positif $\dfrac{m}{n}$ jika dituliskan kedalam bentuk desimal, disebelah kanan tanda komanya (tidak mesti tepat setelah tanda koma) mengandung blok angka 17649. Buktikan bahwa n terkecil yang memenuhi kriteria di atas adalah 2017.

Aljabar

A1. Diberikan suku banyak P dengan koefisien-koefisien bilangan bulat. Misalkan diketahui bahwa persamaan $P(x) = 0$ mempunyai sedikitnya 9 solusi bulat berbeda dan misalkan juga n adalah sebarang bilangan bulat dengan sifat $|P(n)| < 2017$. Buktikan bahwa $P(n) = 0$.

Solusi:

Perhatikan bahwa persamaan $P(x) = 0$ mempunyai sedikitnya 9 solusi bulat berbeda, misalkan kita sebut $x_1, x_2, ..., x_9$. Dengan demikian, kita dapat menuliskan P dalam bentuk

$$P(x) = (x - x_1) ... (x - x_9) Q(x)$$

untuk suatu suku banyak Q dengan koefisien bulat.

Sekarang, andaikan n adalah bilangan bulat dengan sifat $|P(n)| < 2017$ dan $P(n) \neq 0$. Jelas bahwa $Q(n) \neq 0$, sehingga $|Q(n)| \geq 1$. Karena $P(n) \neq 0$ maka $n \neq x_i$ sehingga $n - x_i \neq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, .., 9$, dan mudah dipahami bahwa $n - x_i$ semuanya berbeda. Dengan demikian kita punya bahwa

$$|(n - x_1)(n - x_2) ... (n - x_9)| \geq |(1)(-1)(2)(-2)(3)(-3)(4)(-4)(5)| = 5(4!)^2 = 28$$

Akan tetapi, ini akan berakibat

$$|P(n)| = |(x - x_1) ... (x - x_9) Q(x)| \geq 2880 > 2017$$

yang jelas kontradiksi dengan pernyataan $|P(n)| < 2017$. Jadi haruslah $P(n) = 0$.

A2. Diberikan $2n$ bilangan real $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Buktikan bahwa terdapat suatu $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ sedemikian sehingga

$$|x_1 - x_i| + |x_2 - x_i| + \cdots + |x_n - x_i| \leq |y_1 - x_i| + |y_2 - x_i| + \cdots + |y_n - x_i|.$$

Solusi Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.Untuk setiap k berlaku

$$|x_1 - x_k| + |x_k - x_n| = |x_1 - x_n| \leq |x_1 - y_k| + |y_k - y_n|.$$

Akibatnya

$$\sum_{k=1}^{n} |x_1 - x_k| + \sum_{k=1}^{n} |x_n - x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_1 - y_k| + \sum_{k=1}^{n} |x_n - y_k|.$$

Jika $\sum_{k=1}^{n} |x_1 - x_k| > \sum_{k=1}^{n} |x_1 - y_k|$ dan $\sum_{k=1}^{n} |x_n - x_k| > \sum_{k=1}^{n} |x_n - y_k|$ maka penjumlahan kedua ketaksamaan ini akan bertentangan dengan ketaksamaan diatas. Demikian salah satu dari $\sum_{k=1}^{n} |x_1 - x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_1 - y_k|$ atau $\sum_{k=1}^{n} |x_n - x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_n - y_k|$ haruslah benar.

A3. Tentukan semua kuadruplet bilangan real (a, b, c, d) yang memenuhi sistem persamaan berikut:

$$a^3 = bc + cd$$

$$b^3 = cd + da$$

$$c^3 = da + ab$$

$$d^3 = ab + bc$$

Solusi Misal (a, b, c, d) solusi soal.

Bagi dua kasus:

(a) $a = c$. Dari persamaan kedua dan keempat, didapat $b^3 = 2ad$ dan $d^3 = 2ab$. Kalikan kedua ruas persamaan kedua dengan b dan kedua ruas persamaan keempat dengan d, didapat $b^4 = 2abd = d^4$, ekivalen dengan $b^4 - d^4 = (b - d)(b + d)(b^2 + d^2) = 0$.

Jika $b^2 + d^2 = 0$, dapat disimpulkan $b = d = 0$, dan dari persamaan pertama dapat diambil kesimpulan $a = 0 = c$. Cek, $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ jelas memenuhi sistem persamaan.

Jika $b+d=0$, dari persamaan pertama didapat $a^3 = bc+cd = c(b+d) = 0$, ekuivalen dengan $a = 0 = c$. Meninjau persamaan kedua dan keempat, diperoleh pula $b = 0$, dan $d = 0$. Cek, $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ jelas memenuhi sistem persamaan.

Jika $b - d = 0$, dari persamaan pertama dan kedua diperoleh $a^3 = 2ab$, $b^3 = 2ab$. Akibatnya, $a^3 = b^3$, ekuivalen dengan $a = b$. Maka, $a^3 = 2a^2$, ekuivalen dengan $a^2(a-2) = 0$. Jika $a = 0$, didapat $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$, yang jelas memenuhi sistem persamaan soal. Jika $a - 2 = 0$, didapat $(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2)$, yang jelas memenuhi sistem persamaan soal.

Jadi, di kasus ini diperoleh $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0), (2, 2, 2, 2)$.

(b) $a \neq c$. Kurangkan persamaan pertama dan ketiga, diperoleh $a^3 - c^3 = bc + cd - da - ab$, ekuivalen dengan $(a-c)(a^2 - ac + c^2) = (c-a)(b+d)$, dan $a^2 - ac + c^2 = -(b+d)$ Kuadratkan persamaan terakhir, diperoleh $(a^2 - ac + c^2)^2 = (b+d)^2$

Kalikan persamaan pertama dan ketiga, diperoleh

$$a^3c^3 = (bc+cd)(da+ab) = ac(b+d)^2 = ac(a^2 - ac + c^2)^2$$

, ekuivalen dengan

$$ac((a^2-ac+c^2)^2-(ac)^2) = 0 = ac(a^2-2ac+c^2)(a^2+c^2) = ac(a-c)^2(a^2+c^2)$$

. Karena $a \neq c$, persamaan terakhir ekuivalen dengan $ac(a^2+c^2) = 0$.

Jika $a^2 + c^2 = 0$, didapat $a = c = 0$, kontradiksi dengan asumsi awal. Jika $a = 0$, dari persamaan 3 haruslah $c = 0$, kontradiksi dengan asumsi awal. Jika $c = 0$, dari persamaan 1 haruslah $a = 0$, kontradiksi dengan asumsi awal. Jadi, di kasus ini tidak ada (a, b, c, d) yang memenuhi soal.

Jadi, solusi sistem persamaan ini adalah $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0), (2, 2, 2, 2)$

A4. Misalkan

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

dan

$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

berturut-turut merupakan barisan aritmetika dan barisan geometri. Jika $a_m = g_m$ untuk takberhingga banyaknya m, buktikan bahwa $a_n = g_n$ untuk setiap n.

Solusi: Perhatikan bahwa $a_n = g_n$ untuk setiap n jika dan hanya jika $\{a_n\}, \{g_n\}$ merupakan barisan konstan. Andaikan $\{a_n\}, \{g_n\}$ tidak konstan. Karena $\{a_n\}$ barisan aritmetika tak konstan maka dapat dinyatakan sebagai $a_n = a + (n-1)\,b$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $b \neq 0$, dan karena $\{g_n\}$ barisan geometri tak konstan maka $g_n = gr^{n-1}$ untuk suatu $g, r \in \mathbb{R}$ dengan $g \neq 0$ dan $|r| \neq 0$ dan $|r| \neq 1$. Kita bagi menjadi 2 kasus:

- untuk $|r| > 1$. Karena $|r| > 1$ maka terdapat bilangan asli N sehingga $|r|^{N-1} > \left|\frac{b}{g(r-1)}\right|$ (yaitu $N > \left\lceil 1 + \log_{|r|} \left|\frac{b}{g(r-1)}\right|\right\rceil$). Perhatikan bahwa untuk semua $n \geq N$, berlaku

  $$\left|gr^n - gr^{n-1}\right| = \left|gr^{n-1}\,(r-1)\right| \geq \left|gr^{N-1}\,(r-1)\right| > b.$$

  Ini berarti bahwa untuk $n > N$, tidak ada lagi barisan aritmetika dengan beda b yang dapat dipilih pada barisan $\{g_n\}$ karena selisih di antara 2 suku yang berurutan nilai mutlaknya lebih besar dari $|b|$. Dengan demikian, banyak anggota dari $A \cap G$ paling banyak ada N.

- untuk $|r| < 1$. Karena $|r| < 1$ maka terdapat bilangan asli N sehingga $|r| < 1 - \left|\frac{b}{a+(N-1)b}\right|$. Perhatikan bahwa untuk setiap $n \geq$

N yang cukup besar, berlaku

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{a+nb}{a+(n-1)\,b}\right| = \left|1+\frac{b}{a+(n-1)\,b}\right| \geq 1-\left|\frac{b}{a+(n-1)\,b}\right| \\ &\geq 1-\left|\frac{b}{a+(N-1)\,b}\right| > |r|\,.\end{aligned}$$

Ini berarti bahwa untuk $n > N$, tidak ada lagi barisan geometri dengan rasio(pengali) r yang dapat dipilih pada barisan $\{a_n\}$ karena hasil bagi dari 2 suku yang berurutan nilai mutlaknya lebih besar dari $|r|$. Dengan demikian, banyak anggota dari $A \cap G$ paling banyak ada N.

Dari dua kasus di atas, terlihat bahwa banyak anggota $A \cap G$ berhingga. Jadi $\{a_n\}, \{g_n\}$ haruslah barisan konstan yang berarti bahwa $A = G$.

A5. Tentukan semua pasang bilangan real x, y yang berbeda yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned}x^{100} - y^{100} &= 2^{99}(x-y) \\ x^{200} - y^{200} &= 2^{199}(x-y)\end{aligned}$$

Solusi Solusinya hanyalah $(0, 2)$ dan $(2, 0)$.
Tulis $x = 2a$ dan $y = 2b$. Maka didapat $a^{100} - b^{100} = a^{200} - b^{200} = a - b$. Karena $(a^{100} - b^{100})(a^{100} + b^{100}) = a^{200} - b^{200} = a^{100} - b^{100}$ maka $a^{100} + b^{100} = 1$. Dari sini diperoleh bahwa $|a|, |b| \leq 1$. Jika $|a| = 1$ maka $b = 0$. Kita periksa bahwa untuk $(a, b) = (-1, 0)$ pasang $(x, y) = (-2, 0)$ bukan solusi. Tapi untuk $(a, b) = (1, 0)$ pasang $(x, y) = (2, 0)$ merupakan solusi. Dengan cara serupa $(x, y) = (0, 2)$ merupakan solusi.

Untuk kasus $|a| \neq 1$ dan $|b| \neq 1$ kita peroleh $0 < |a|, |b| < 1$. Dari $a^{100} - a = b^{100} - b$ kita simpulkan bahwa a, b kedua-duanya positif atau kedua-duanya negatif. Dengan demikian $ab > 0$.

Sekarang perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
1 &= \left|\frac{a^{100}-b^{100}}{a-b}\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{99} a^{99-i}b^i\right| \\
&= \sum_{i=0}^{99} |a|^{99-i}|b|^i \qquad\qquad \text{karena } a^{99-i}b^i \text{ bertanda sama} \\
&> |a|^{99}+|b|^{99} \\
&> a^{100}+b^{100} \\
&= 1
\end{aligned}$$

yang merupakan suatu kontradiksi.

A6. Untuk sebarang bilangan real positif a, b, c dengan $a+b+c = 1$ didefinisikan

$$R(a,b,c) = \frac{a+b-c}{ab} + \frac{b+c-a}{bc} + \frac{c+a-b}{ca}.$$

Buktikan bahwa $8 < R(a,b,c) \leq 9$ jika dan hanya jika a, b, c merupakan sisi-sisi dari suatu segitiga.

Penyelesaian:
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
R(a,b,c)-8 &= (a+b+c)R(a,b,c)-8 \\
&= \frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{ab}+\frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{bc}+\frac{c^2+a^2+2ca-b^2}{ca}-8 \\
&= \frac{a^2+b^2-c^2}{ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}-2 \\
&= \frac{a^2c+b^2c-c^3+ab^2+ac^2-a^3+bc^2+a^2b-b^3-2abc}{abc} \\
&= \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{abc}.
\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Diketahui $8 < R(a,b,c) \leq 9$. Tanpa mengurangi keumuman misalkan $0 < a \leq b \leq c$. Jelas bahwa $b < a+c$ dan $a < b+c$. Cukup ditunjukkan $c < a + b$. Kembali hal ini jelas dari persamaan di atas sebab $R(a, b, c) > 0$.

($\Leftarrow$) Diketahui a, b, c sisi-sisi suatu segitiga. Berdasarkan persamaan di atas $R(a, b, c) > 8$. Di pihak karena a, b, c sisi-sisi suatu segitiga, terdapat $x, y, z > 0$ sehingga $a = x + y, b = x + z, c = y + z$. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} R(a,b,c) - 8 &= \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{abc} \\ &= \frac{8xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)} \\ &\leq \frac{8xyz}{2\sqrt{xy}2\sqrt{xz}2\sqrt{yz}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Jadi, $8 < R(a, b, c) \leq 9$ jika dan hanya jika a, b, c merupakan sisi-sisi dari suatu segitiga.

A7. Tunjukkan bahwa

$$n^n < (n!)^2$$

berlaku untuk setiap bilangan asli $n > 2$.

Solusi.

Kita gunakan lemma sederhana berikut.

Lema 1. *Jika a, b bilangan asli, maka $ab \geq a + b - 1$.*

Proof. Perhatikan bahwa

$$(a-1)(b-1) \geq 0$$

dan dengan mudah diperoleh $ab - a - b + 1 \geq 0$, yaitu $ab \geq a + b - 1$. $\square$

Dengan lemma, maka untuk setiap bilangan asli $k = 1, 2, \ldots, n$, kita punyai

$$\begin{aligned} k\cdot (n + 1 - k) &\geq k + (n + 1 - k) - 1 \\ &= n. \end{aligned}$$

Kalikan ketaksamaan ini untuk setiap $k = 1, \ldots, n$, maka diperoleh

$$(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)^2 \geq n^n$$

yaitu $(n!)^2 \geq n^n$.

Kesamaan terjadi saat $k\cdot (n + 1 - k) = n$ untuk setiap $k = 1, 2, \ldots, n$. Namun, jika $n > 2$, maka untuk $k = 2$, diperoleh $2\cdot (n - 1) = 2n - 2 > n$, sehingga kesamaan tak mungkin terjadi untuk $n > 2$.

A8. Diketahui $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ adalah fungsi tak konstan yang memenuhi

$$f(n) + \frac{f(f(n) + n)}{2} < f(n + 1) + 1$$

untuk setiap n. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan asli $m \in \mathbb{N}$ sehingga $f(n) = 0$ untuk $n \leq m$ dan $f(n) = 1$ untuk $n > m$.

Penyelesaian:

Dari ketaksamaan tersebut diperoleh beberapa fakta sebagai berikut

(a) Jika $f(m) = 0$ untuk suatu bilangan asli m, kita punya $f(n) = 0$ untuk $n \leq m$.

(b) Jika $f(m) \leq 1$ untuk suatu bilangan asli m, kita punya $f(n) \leq 1$ untuk $n \leq m$.

Akan dibuktikan bahwa $f(n) \leq 1$ untuk setiap n. Andaikan $f(m) \geq 2$ untuk suatu m. Berdasarkan poin (b), haruslah $f(n) \geq 2$ untuk $n \geq$

m. Dengan demikian,

$$f(n)+1 \leq f(n)+\frac{f(f(n)+n)}{2} < f(n+1)+1 \quad \forall n \geq m$$

Artinya, f monoton naik tegas untuk $n \geq m$. Akibatnya,

$$f(k) \geq k-n+f(n)$$

untuk $k \geq n \geq m$. Untuk $n \geq m$ dan $k=f(n)+n$ diperoleh

$$f(f(n)+n) \geq f(n)+n-n+f(n)=2f(n).$$

Dengan demikian,

$$2f(n) < f(n+1)+1 \quad \forall n \geq m$$

atau ekuivalen dengan

$$2f(n) \leq f(n+1) \quad \forall n \geq m$$

Akibatnya

$$1+\frac{f(f(n)+n)}{2} < f(n)+\frac{f(f(n)+n)}{2} < f(n+1)+1 \leq \frac{f(n+2)}{2}+1 \quad \forall n \geq m$$

atau ekuivalen dengan

$$f(f(n)+n) < f(n+2) \quad \forall n \geq m.$$

Karena f monoton naik tegas untuk $n \geq m$, diperoleh

$$f(n)+n < n+2 \quad \forall n \geq m.$$

atau ekuivalen dengan

$$f(n) < 2 \quad \forall n \geq m,$$

suatu kontradiksi.

Dengan demikian, $f(n) \leq 1$ untuk setiap n.

Sekarang, karena f tidak konstan, terdapat $m \in \mathbb{N}$ sehingga $f(m) = 0$ dan $f(m+1) = 1$. Dari (a) dan fakta bahwa $f(n) \leq 1$ untuk setiap n, disimpulkan bahwa $f(n) = 0$ untuk $n \leq m$ dan $f(n) = 1$ untuk $n > m$.

Catatan: Dalam menunjukkan bagian akhir kontradiksi tidak harus menggunakan fakta monoton tegasnya: Dari fakta $2f(n) \leq f(n+1) \quad \forall n \geq m$ dan ketaksamaan awal, dapat diperoleh fakta baru bahwa $3f(n) \leq (2^{f(n)-1}+1)f(n) \leq f(n+1) \quad \forall n \geq m$. Dengan melakukan induksi, dapat diperoleh $kf(n) \leq f(n+1) \quad \forall n \geq m, \forall k \in \mathbb{N}$, suatu kontradiksi.

A9. Carilah banyaknya bilangan asli $n \leq 2017$ sehingga terdapat n bilangan real $x_1, x_2, \cdots, x_n$ yang berada pada interval $[-5, 3]$, yang juga memenuhi tiga kondisi berikut:

- jumlah dari n bilangan tersebut minimal n
- jumlah kuadrat dari n bilangan tersebut maksimal $5n$
- jumlah kuartik dari n bilangan tersebut minimal $73n$

Solusi. Perhatikan bahwa x_i berada $[-5, 3]$ sehingga berlaku bahwa

$$(x_i - 3)(x_i + 5)(x_i - 1)^2 \leq 0$$

yang ekuivalen dengan

$$x_i^4 + 32x_i \leq 18x_i^2 + 15$$

Akibatnya

$$73n + 32n \leq \sum x_i^4 + 32 \sum x_i \leq 18 \sum x_i^2 + \sum 15 \leq 105n$$

yang merupakan suatu kesamaan. Akibatnya $x_i = \{-, 5, 1, 3\}$ dan ketidaksamaan dari soal menjadi kesamaan.

Misalkan dari n bilangan tersebut terdapat a buah x_i yang bernilai -5, b buah x_i yang bernilai 1, dan c buah x_i yang bernilai 3. Maka haruslah berlaku

$$\begin{cases} -5a + b + 3c = n \\ 25a + b + 9c = 5n \\ 625a + b + 81c = 73n \end{cases}$$

Solusi dari sistem persamaan tersebut adalah

$$a = \frac{n}{12}, b = \frac{2n}{3}, c = \frac{n}{4}$$

Maka itu, haruslah $12|n$, sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat sebanyak $\left\lfloor \frac{2017}{12} \right\rfloor = 168$ nilai n yang memenuhi syarat soal.

A10. Misalkan $n \geq 4$. Buktikan bahwa untuk sebarang n bilangan real positif $x_1, x_2, \cdots, x_n$ yang jumlahnya 1, berlaku bahwa

$$x_1^{x_2} x_2^{x_3} \cdots x_n^{x_1} \leq \frac{1}{4}$$

Solusi. Karena $\sum x_i = 1$, maka perhatikan bahwa dengan weighted AM-GM kita punyai bahwa

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_n \cdot x_1 \geq x_1^{x_2} x_2^{x_3} \cdots x_n^{x_1}$$

Sehingga cukup dibuktikan bahwa

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1 \leq \frac{1}{4}$$

- n genap. Misal $X = x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1}$ dan $Y = x_2 + x_4 + \cdots + x_n$. Jelas bahwa

  $$X + Y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

  Perhatikan bahwa

  $$1 = (X + Y)^2 \geq 4XY = 4(x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1})(x_2 + x_4 + \cdots + x_n)$$

namun jelas juga bahwa

$$4(x_1+x_3+\cdots+x_{n-1})(x_2+x_4+\cdots+x_n) \geq 4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)$$

sehingga ketaksamaan terbukti.

- n ganjil. Misal $X = x_1+x_3+\cdots+x_n$ and $Y = x_2+x_4+\cdots+x_{n-1}$. Jelas bahwa
$$X+Y = x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$$
Karena ketaksamaan ini siklis, WLOG $x_n = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Kita punyai bahwa
$$1 = (X+Y)^2 \geq 4XY = 4(x_1+x_3+\cdots+x_n)(x_2+x_4+\cdots+x_{n-1})$$
Sekarang perhatikan bahwa
$$4(x_1+x_3+\cdots+x_n)(x_2+x_4+\cdots+x_{n-1}) \geq 4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)+4x_1x_{n-1}$$
sehingga cukup dibuktikan bahwa $x_1x_{n-1} \geq x_{n-1}x_n$, yang jelas benar karena x_n minimal. Ketaksamaan terbukti.

Remark. Konjektur yang lebih kuat sebenarnya

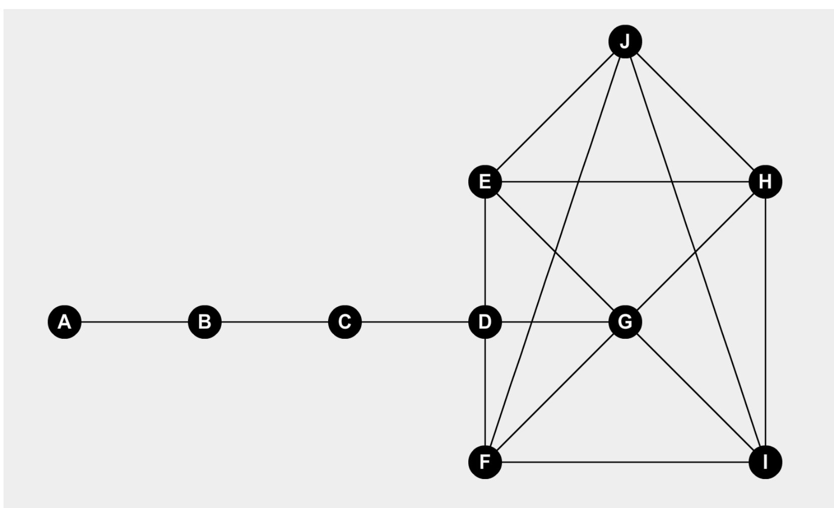
$$x_1^{x_2}x_2^{x_3}\cdots x_n^{x_1} \leq \frac{1}{n}$$

tapi tampaknya metode buktinya bakal jauh lebih susah. Kesamaan juga hanya mungkin terjadi saat $n = 4$. Untuk $n \geq 5$, maka

$$x_1^{x_2}x_2^{x_3}\cdots x_n^{x_1} < \frac{1}{4}$$

Kombinatorika

C1. Pada graf di bawah ini polisi dan pencopet melakukan permainan. Pertama polisi memilih satu buah titik dan berikutnya pencopet memilih titik yang lain. Satu *langkah* adalah bergerak dari satu titik ke titik lain yang terhubung oleh satu sisi atau tetap diam di tempat. Polisi dan pencopet melakukan langkah secara bergantian yang dimulai oleh polisi terlebih dulu. Buktikan bahwa polisi dapat memilih suatu titik, sehingga dimanapun posisi awal pencopet, ia dapat ditangkap dalam 6 langkah atau kurang. Pemilihan titik awal tidak dihitung sebagai satu langkah.



Solusi Pilih titik H sebagai posisi awal polisi. Kita akan meninjau langkah pencopet agar ia ditangkap selama mungkin. Jika pencopet memilih titik awal E, J, G, I atau H maka polisi akan menangkap pencopet pada langkah berikutnya.

Perhatikan bahwa jika pada suatu saat polisi berada di G dan pencopet berada di A, B, C atau D maka polisi pasti bisa menangkapnya maksimum dalam 4 langkah. Ini dikarenaka pencopet harus tetap berada pada vertex-vertex A, B, C atau D. Ketika polisi bergerak dari G ke A pasti ada saat di mana pencopet akan tertangkap. Dari G ke A hanya perlu 4 langkah, jadi pada situasi ini maksimum polisi akan menangkap pencopet dalam 4 langkah.

Jika titik awal pencopet di F, pilih polisi untuk bergerak ke I. Sekarang pencopet tidak punya pilihan selain bergerak ke D. Polisi berikutnya akan bergerak ke G. Situasi ini tercapai setelah 2 langkah. Berdasarkan pengamatan di atas, dalam 4 langkah berikutnya pasti pencopet akan tertangkap. Jadi maksimal diperlukan 4 langkah.

Jika titik awal pencopet di A, B, C atau D, polisi akan bergerak ke G. Maksimal dalam empat langkah berikutnya pencopet akan tertangkap.

C2. Buktikan bahwa diantara sebarang 7 bilangan kuadrat sempurna terdapat dua diantaranya yang selisihnya habis dibagi 20.

Solusi $a^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$ dengan demikian diantara 7 bilangan tersebut paling sedikit ada 4 diantaranya yang nilai mod 4 nya sama. Misalkan keempat bilangan ini adalah x^2, y^2, s^2, t^2. Sekarang $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$. Jadi ada dua diantara keempat bilangan ini yang nilai mod 4 nya sama. Akibatnya selisih kedua bilangan ini habis dibagi 5 dan juga habis dibagi 4.

C3. Terdapat k siswa dalam suatu kelas. Masing-masing siswa menghitung banyaknya siswa lain yang memiliki makanan favorit yang sama dengannya dan banyaknya siswa lain yang memiliki minuman favorit yang sama dengannya (Diasumsikan masing-masing anak hanya memiliki 1 makanan favorit dan 1 minuman favorit). Hasilnya kemudian dituliskan di papan tulis (Masing-masing anak menuliskan 2 buah bilangan). Diketahui ternyata bilangan $0, 1, 2, \ldots, 7$ ada pada papan tulis tersebut. Tentukan nilai k terkecil sehingga selalu dapat dipastikan bahwa terdapat dua siswa dengan makanan dan minuman favorit yang sama.

Penyelesaian:

Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ adalah makanan-makanan favorit dari siswa-siswa tersebut.
Misalkan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ adalah minuman-minuman favorit dari siswa-siswa tersebut.
Misalkan A_i dan B_j berturut-turut adalah himpunan siswa yang makanan favoritnya a_i dan banyaknya siswa yang minuman favoritnya b_j. Kita peroleh fakta-fakta sebagai berikut:

(a) Setiap anak termuat dalam tepat satu A_i dan satu B_j untuk suatu i dan j

(b) $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m| = k$.

(c) $|B_1| + |B_2| + \cdots + |B_n| = k$.

Karena bilangan $0, 1, 2, \ldots, 7$ ada pada papan tulis tersebut, terdapat himpunan-himpunan di antara $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ yang banyak anggotanya adalah $1, 2, \ldots, 8$. Dengan demikian, kita punya

$$36 = 1+2+\cdots+8 \leq |A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|+|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_n| = 2k.$$

Akibatnya, haruslah $k \geq 18$.

Akan ditunjukkan bahwa untuk $k = 18$, terdapat dua siswa dengan makanan dan minuman favorit yang sama.

Karena $k = 18$, diperoleh $m + n = 8$ (karena kesamaan berlaku pada pertidaksamaan tersebut). Perhatikan himpunan dengan banyak anggota 8. Tanpa mengurangi keumuman katakan $|A_1| = 8$. Perhatikan bahwa $n \leq 7$. Menurut PHP, terdapat dua anak dalam himpunan A_1 yang termuat dalam himpunan B_i yang sama. Dengan kata lain, mereka memiliki minuman favorit yang sama. Dengan demikian terdapat dua siswa dengan makanan dan minuman favorit yang sama. Jadi, k terkecil adalah 18.

Catatan:

(a) Secara umum, haruslah $k < 36$, sebab jika $k \geq 36$, ambil kasus $1, 2, \ldots, 8$ merupakan banyak anggota dari suatu A_i, dan set $|B_i| = 1$ untuk semua i. Akibatnya, tidak ada dua anak dengan minuman favorit sama.

(b) Untuk $k = 19$, masih dapat dibuktikan bahwa terdapat dua siswa dengan makanan dan minuman favorit yang sama. Soal bisa diganti menjadi :

Terdapat 19 *siswa dalam suatu kelas. Masing-masing siswa mengecek banyaknya siswa lain yang memiliki makanan favorit yang sama dengannya dan banyaknya siswa lain yang memiliki minuman favorit yang sama dengannya (Diasumsikan masing-masing anak hanya memiliki 1 makanan favorit dan 1 minuman favorit). Hasilnya kemudian dituliskan di papan tulis (Masing-masing anak menuliskan 2 buah bilangan). Diketahui ternyata bilangan* $0, 1, 2, \ldots, 7$ *ada pada papan tulis tersebut. Tunjukkan bahwa terdapat dua siswa dengan makanan dan minuman favorit yang sama.*

Bukti masih sama, beda hanya pada paragraf terakhir: Dari ketaksamaan di atas, kita punya $9 \leq m + n \leq 10$. Bagi kasus:

- Jika ada $|A_i|$ sama dengan 10 atau lebih, didapat $n \leq 9$ (sebab $m \geq 1$), kesimpulan mengikuti PHP seperti sblmnya. Analog kasus yg $|B_i|$.
- Jika ada $|A_i|$ sama dengan 9 (dan tidak ada yg lebih dari itu), didapat $m \geq 3$ (sebab jumlah $|A_i|$ adalah 19) sehingga $n \leq 7$,

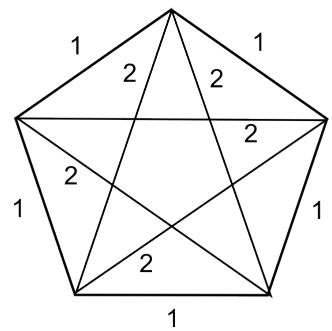
kesimpulan mengikuti PHP seperti sblmnya. Analog kasus yg $|B_i|$.

- Jika tidak ada $|A_i|$ dan $|B_i|$ yg lebih dari 8, wlog misalkan $|A_i|$ sama dengan 8 (dari asumsi soal pasti ada yang 8). Didapat $m \geq 3$ (sebab jumlah $|A_i|$ adalah 19) sehingga $n \leq 7$, kesimpulan mengikuti PHP seperti sblmnya.

(c) Menarik untuk mencari k terbesar nya (belum terjawab).

C4. Lima orang siswa bertemu di suatu lomba. Sebagian sudah saling mengenal dan sebagian lagi tidak saling mengenal. Suatu trio adalah pasangan tiga siswa (A, B, C) sehingga A dan B dan B dan C saling kenal atau A dan B dan B dan C tidak saling kenal. Trio (A, B, C) dan (C, B, A) dianggap sebagai trio yang sama. Paling sedikit ada berapa banyak trio yang mungkin dimiliki?

Solusi Trio (A, B, C) kita katakan sebagai trio yang terhubung melalui B. Untuk suatu B yang tetap, misalkan B mengenal tiga siswa lainnya (atau tidak mengenal tiga siswa lainnya). Misalnya ketiga siswa ini adalah A, C, D. Maka $(A, B, C), (A, B, D)$ dan (C, B, D) adalah trio yang terhubung melalui B. Sedangkan jika B mengenal dua siswa lainnya katakan A, C dan tidak mengenal dua siswa lainnya, katakan D, E maka ada tepat dua trio (A, B, C) dan (D, B, E) yang terhubung melalui B. Dengan demikian untuk setiap siswa paling sedikit terdapat dua trio yang terhubung melalui dirinya. Karena ada 5 siswa maka paling sedikit terdapat $2 \times 5 = 10$ trio. Akan ditunjukkan bahwa ada situasi dimana di mana tepat terdapat 10 buah trio. Letakkan kelima siswa pada titik sudut segilima. Dua siswa saling mengenal jika sisi yang menghubungkan keduanya dilabeli 1 dan jika tidak saling mengenal dilabeli dengan 2. Pada gambar dibawah ini setiap titik terhubung dengan 4 sisi dengan tepat dua diantaranya berlabel 1 dan dua sisi lainnya berlabel 2. Ini menunjukkan bahwa untuk setiap siswa ada tepat dua trio yang terhubung melalui dirinya. Jadi pada gambar ini kita tepat memiliki 10 buah trio.



C5. Pada suatu papan catur $2^n \times 2^n$, n bilangan bulat positif, tempelkan persegi panjang 2×1 pada bagian luar sehingga mempunyai sisi persekutuan dengan tepat dua persegi pada papan catur. Tunjukkan bahwa hasilnya dapat ditutup dengan tepat oleh gabungan bentuk-bentuk L tanpa ada yang tumpang tindih. (Bentuk L adalah gabungan tiga persegi satuan yang mempunyai titik persekutuan).

Solusi

Jawab 1: Penutupan seperti pada soal dapat dilakukan jika penutupan pada papan catur $2^n \times 2^n$ yang dihilangkan salah satu persegi pada tepinya dapat dilakukan.

Dengan induksi akan dibuktikan bahwa papan catur $2^n \times 2^n$ yang dihilangkan salah satu persegi pada tepinya dapat ditutup dengan tepat oleh gabungan bentuk-bentuk L tanpa ada yang tumpang tindih.

Hal itu jelas benar untuk $n = 1$. Anadaikan benar untuk $n = k$, yaitu papan catur $2^k \times 2^k$ yang dihilangkan salah satu persegi pada tepinya dapat ditutup dengan tepat oleh gabungan bentuk-bentuk L tanpa ada yang tumpang tindih.

Untuk papan catur $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ yang dihilangkan salah satu persegi pada tepinya, bagi papan catur ini menjadi empat bagian yang masing-

masing berukuran $2^k \times 2^k$. Pada masing-masing dari tiga bagian yang berukuran $2^k \times 2^k$ yang utuh, hilangkan salah satu persegi pada pojoknya yang mempunyai titik perdsekutuan dengan pusat persegi yang besar $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Menurut hipotesis, hasilnya dapat ditutup dengan tepat oleh gabungan bentuk-bentuk L tanpa ada yang tumpang tindih. Akibatnya papan catur $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ yang dihilangkan salah satu persegi pada tepinya dapat ditutup dengan tepat oleh gabungan bentuk-bentuk L tanpa ada yang tumpang tindih.

C6. Diketahui P adalah segi 2017 beraturan. Tentukan k terkecil sehingga untuk setiap k titik sudut pada P selalu ada 17 di antaranya dengan sifat segi 17 yang terbentuk olehnya mempunyai 16 sisi persekutuan dengan P.

Solusi Misalkan titik-titik sudutnya adalah $1, 2, 3, ..., 2017$. Kita ingin setiap k titik sudut ada 17 titik sudut yang berurutan (termasuk 2017 dan 1). Kita tahu bahwa $2017 : 17 = 118\frac{11}{17}$. Partisi himpunan $\{1, 2, 3, ..., 2017\}$ menjadi 119 himpunan

$H_1 = \{1, 2, ...17\}$, $H_2 = \{18, 19, ..., 34\}$, ..., $H_{118} = \{1990, 1991, ..., 2006\}$, $H_{119} = \{2007, 2008, ..., 2017\}$,

118 himpunan dengan 17 anggota dan satu himpunan dengan 11 anggota.

Jika diambil $16 \times 118 + 10 = 1898$ titik sudut

$1, 2, ...16, 18, 19, ..., 33, 35, 36, ..., 50, ..., 1990, 1991, ..., 2005, 2007, 2008, ..., 2016,$

maka tidak ada 17 titik sudut yang berurutan, sehingga k minimal tidak kurang dari 1899.

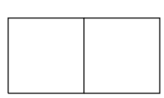
Akan dibuktikan jika diambil minimal $16 \times 118 + 11 = 1899$ titik sudut, maka pasti ada 17 titik sudut yang berurutan. Misalkan diambil minimal 1899 titik sudut. Jika ada anggota H_{119} yang tidak terambil, dan karena $(118 \times 16) + 10 = 1898$ maka ada suatu $i = 1, 2, ...,$ atau 118 yang semua anggota H_i terambil, bukti selesai. Misalkan semua anggota H_{119} terambil dan maksimal titik-titik sudut berurutan yang terambil, termasuk semua yang di H_{119}, adalah

$a, a{+}1, ..., 2007, 2008, ..., 2017, ..., b$. Misalkan banyaknya t. Jika $t \geq 17$, maka bukti selesai. Jika $t \leq 16$, sebutlah $11 \leq t \leq 16$, maka perlu diambil lagi minimal $1899 - t$ titik sudut dari $2017 - t - 2$ titik-titik sudut $b + 2, b + 3, ..., a - 2$. Untuk memudahkan namai lagi (rename) secara berurutan dengan $1, 2, ..., 2017 - t - 2$, dan partisi menjadi 118 himpunan

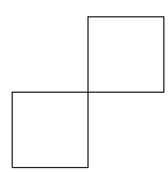
$H_1 = \{1, 2, ...17\}$, $H_2 = \{18, 19, ..., 34\}$, ... $H_{117} = \{1973, 1974, ..., 1989\}$, $H_{118} = \{1990, 1991, ..., 2017 - t - 2\}$,

117 himpunan dengan 17 anggota dan satu himpunan dengan $26 - t$ anggota. Karena $(117 \times 16) + (26 - t) = 1872 + (26 - t)$, dan diambil $1899 - t = 1873 + (26 - t)$ anggota, maka ada suatu $i = 1, 2, ...,$ atau 117 yang semua anggota H_i terambil. Jadi k minimum 1899.

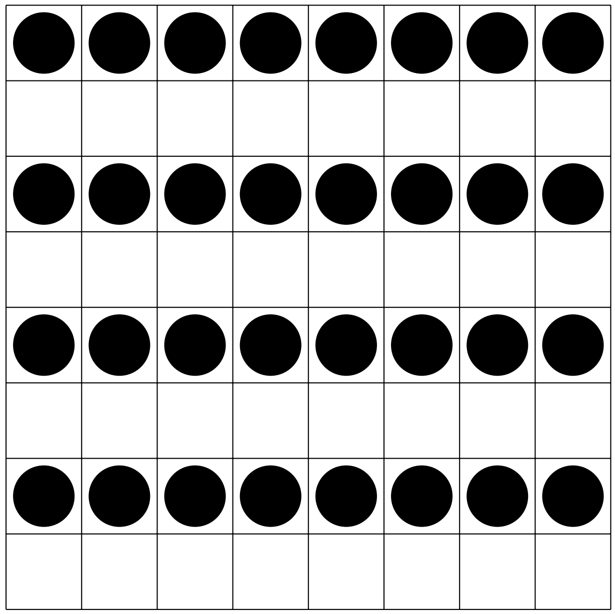
C7. Diberikan sebuah papan catur 8×8. 2 kotak di papan catur disebut *bersinggungan* bila kedua kotak tersebut memiliki tepat satu titik persekutuan. Sebuah konfigurasi 32 pion di papan tersebut disebut *bijak* bila tidak ada dua kotak bersinggungan yang keduanya ditempati pion. Sebuah konfigurasi bijak disebut *bijak-n* bila tepat n kotak pojokan diduduki pion. Cari semua n sehingga terdapat konfigurasi bijak-n.



Contoh dua kotak yang *tidak* bersinggungan



Contoh dua kotak yang bersinggungan



Contoh konfigurasi bijak-2. Di sini, lingkaran hitam menandakan pion.

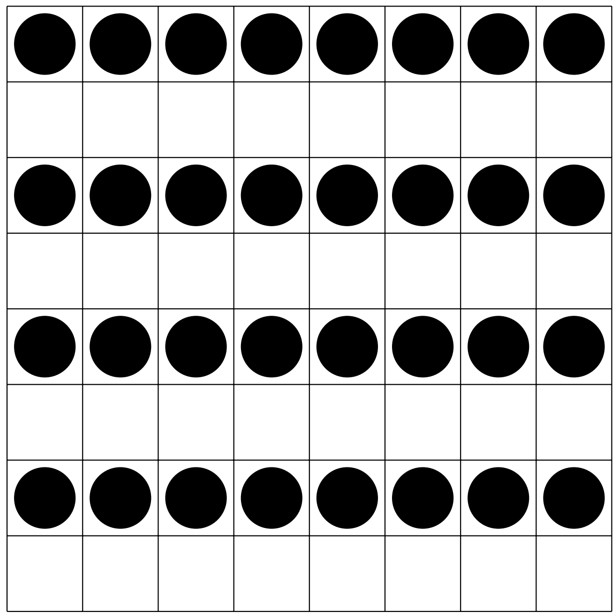
Formulasi Alternatif

Misalkan $S = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 8, 1 \leq y \leq 8\}$ sebagai himpunan 64 titik di bidang Kartesian. Dua titik di S, misalkan (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), dikatakan *bersinggungan* bila $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 1$. Sebuah himpunan $T \subset S$ disebut *bijak* bila $|T| = 32$ dan tidak ada dua titik di T yang bersinggungan. Sebuah himpunan bijak U disebut *bijak-n* bila $U \cap \{(1, 1), (1, 8), (8, 1), (8, 8)\}$ memiliki kardinalitas n. Cari semua n sehingga terdapat konfigurasi bijak-n.

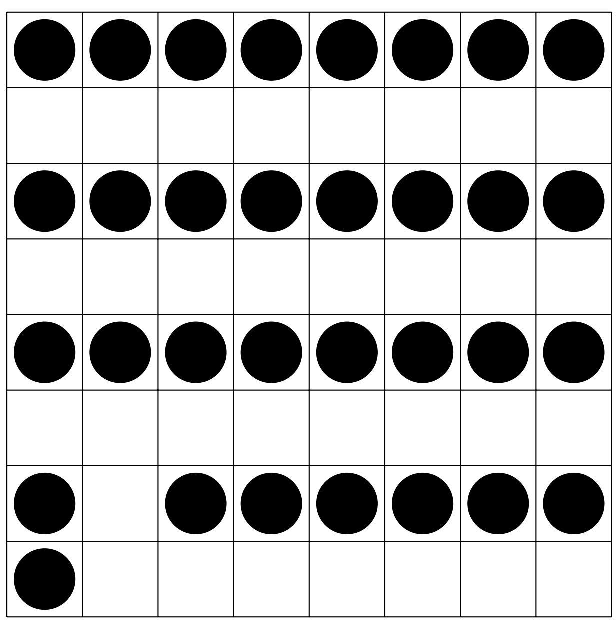
Solusi (kasar)

Akan dibuktikan: hanya ada konfigurasi bijak-2, bijak-3, dan bijak-4.

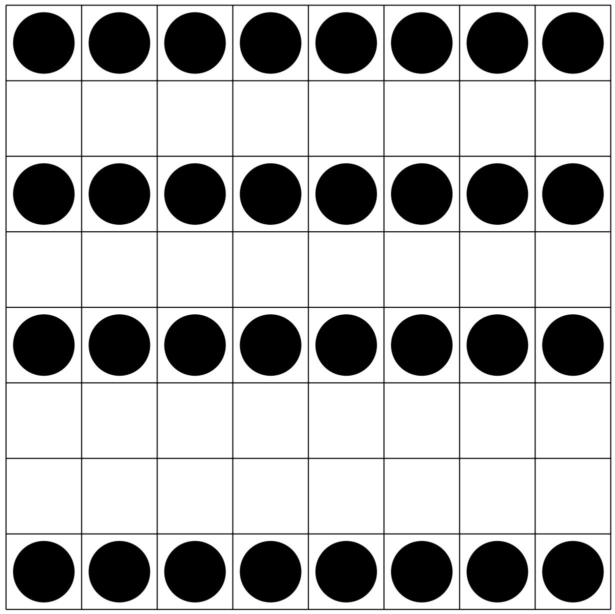
Pertama, berikut ini adalah konfigurasi bijak-2, bijak-3, dan bijak-4:



Konfigurasi bijak-2



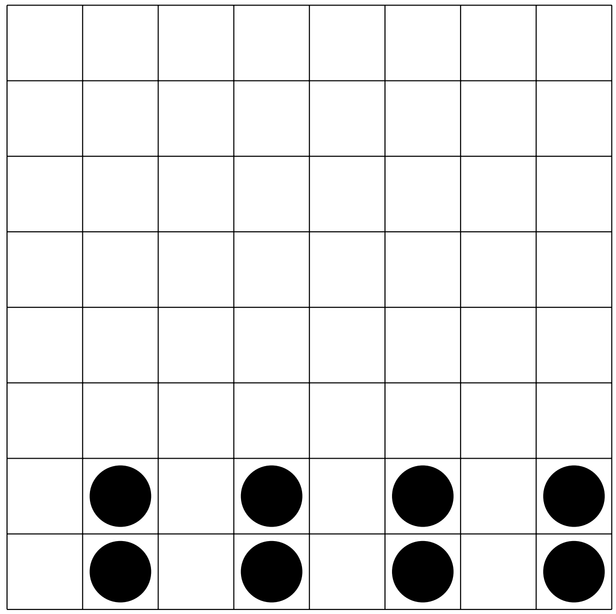
Konfigurasi bijak-3



Konfigurasi bijak-4

Perhatikan bahwa untuk setiap kotak 2×2, kita hanya bisa menaruh 2 pion di kotak tersebut. Artinya, bila kita bagi papan catur tersebut menjadi kotak-kotak 2×2, untuk setiap kotak 2×2 pasti ada tepat 2 pion.

Akan dibuktikan tidak ada konfigurasi bijak-0. Tinjau kotak 2×2 paling bawah kiri. WLOG misalkan di kotak 2×2 tersebut, dua kotak di kanan ditempati pion. Maka papannya mau tidak mau jadi seperti ini:



Jadi pasti ada pojok yang ditempati pion.

Sekarang akan dibuktikan tidak mungkin ada konfigurasi bijak-1. WLOG misalkan di kotak bawah kanan, dua pion di kanan terisi. Maka mau tidak mau pojokan atas kanan pasti terisi. Maka tidak mungkin ada konfigurasi bijak-1.

C8. Suatu kontes musik diikuti oleh $m > 1$ penyanyi. Ada n juri yang menilai kontes ini. Setiap juri membagikan nilai $0, 1, \ldots, m-1$ ke setiap penyanyi sehingga setiap penyanyi memperoleh nilai yang berbeda. Semakin tinggi nilai yang diberikan seorang juri ke seorang penyanyi, penyanyi tersebut semakin disukai. Pemenang kontes adalah penyanyi yang memperoleh nilai tertinggi (mungkin lebih dari satu). Salah satu penyanyi di kontes ini adalah Jamala. Dibandingkan setiap penyanyi lain, Jamala tidak pernah lebih disukai menurut lebih dari $\frac{n}{2}$ juri.

Tunjukkan bahwa Jamala tidak mungkin memenangkan kontes ini.

Solusi.

Misalkan juri ke i meletakkan Jamala pada peringkat ke-k_i, maka ia menerima nilai sebesar $m - k_i$. Dengan demikian, total nilai yang diperoleh Jamala adalah

$$\sum_{i=1}^{n}(m - k_i) = mn - \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Ada sebanyak $k_i - 1$ posisi yang bisa diisi oleh penyanyi lain dalam ranking agar lebih disukai oleh juri ke-i. Dengan demikian, secara total ada sebanyak

$$\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} k_i - n$$

posisi. Namun, setiap penyanyi lebih disukai oleh lebih dari $\frac{n}{2}$ juri, sehingga setiap penyanyi muncul lebih dari $\frac{n}{2}$ kali di posisi ini. Dengan demikian, karena ada $m - 1$ penyanyi lainnya, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} k_i - n &> \frac{(m-1)n}{2} \\ \sum_{i=1}^{n} k_i &> n(m+1)/2.\end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai Jamala haruslah memenuhi ketaksamaan

$$\begin{aligned}nm - \sum_{i=1}^{n} k_i &< mn - \frac{n(m+1)}{2} \\ &= \frac{n(m-1)}{2}.\end{aligned}$$

Jadi, nilai Jamala pasti kurang dari $\frac{n(m-1)}{2}$.

Sekarang, kita periksa kapan Jamala akan menang. Setiap juri memberikan nilai sebesar $m(m-1)/2$, sehingga total nilai yang dibagikan adalah $nm(m-1)/2$. Dengan demikian, seorang pemenang harus memiliki skor sedikitnya $mn(m+1)/(2m) = n(m-1)/2$.

Jadi, Jamala tidak mungkin menang.

C9. Misalkan F adalah himpunan sejumlah hingga interval tertutup di garis bilangan real.

Sebuah subhimpunan S dari F adalah *terpisah* jika tidak ada dua interval di F yang saling

berpotongan. Dari semua subhimpunan terpisah S dari F, misalkan $m(F)$ adalah nilai

maksimum $|S|$.

Sebuah himpunan bilangan real T adalah *penyatu* untuk F jika untuk setiap interval di F,

interval tersebut mengandung setidaknya satu anggota dari T. Dari semua subhimpunan

penyatu T untuk F, misalkan $n(F)$ adalah nilai minimum $|T|$.

Buktikan $m(F) = n(F)$ untuk semua F.

Solusi

Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi kuat pada $|F|$. Untuk $|F| = 1$, jelas bahwa $m(F) = n(F) = 1$: pilih $S = F$, dan pilih titik manapun di dalam interval menjadi satu-satunya anggota T. Sekarang misalkan klaimnya terbukti untuk $|F| < f$; akan dibuktikan klaimnya benar untuk $|F| = f$.

Misalkan $F = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_f, b_f]\}$ sehingga $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_f$. Misalkan G adalah himpunan seluruh $[a, b] \in F$ sehingga $a \le b_1$.

Pertama, kita akan buktikan $m(F) \ge 1 + m(F \setminus G)$. Misalkan S' adalah himpunan terpisah dari $F \setminus G$ dengan banyak anggota terbesar; akan dibuktikan $S = \{[a_1, b_1]\} \cup S'$ adalah himpunan terpisah dari F. Buktinya mudah: jika ada $[a, b] \in S'$ yang berpotongan dengan $[a_1, b_1]$, maka karena $b_1 \le b$ (dengan minimalitas b_1), kita perlu $a \le b_1$ (jika tidak, setiap anggota $[a, b]$ adalah lebih besar dari $[a_1, b_1]$). Namun ini berarti $[a, b] \in G$, padahal kita bilang $S' \subseteq (F \setminus G)$, kontradiksi. Maka S adalah himpunan terpisah dari F. Banyak anggotanya adalah $|S| = 1 + |S'| = 1 + m(F \setminus G)$, maka $m(F) \ge 1 + m(F \setminus G)$.

Selanjutnya, kita akan buktikan $n(F) \le 1 + n(F \setminus G)$. Misalkan T' adalah himpunan penyatu untuk $F \setminus G$ dengan banyak anggota terkecil; akan dibuktikan $T = \{b_1\} \cup T'$ adalah himpunan penyatu untuk F. Buktinya juga mudah: misalkan $[a, b] \cap T' = \emptyset$. Berarti karena T' penyatu $F \setminus G$; kita harus punya $[a, b] \notin F \setminus G$, atau berarti $[a, b] \in G$. Namun jika $[a, b] \in G$, kita punya $a \le b_1 \le b$, jadi $[a, b] \cap \{b_1\} \ne \emptyset$. Ini membuktikan bahwa T penyatu dari F. Banyak anggotanya adalah $|T| = 1 + |T'| = 1 + n(F \setminus G)$, sehingga $n(F) \le 1 + n(F \setminus G)$.

Terakhir, kita akan buktikan $m(F) \le n(F)$. Ini sangat mudah. Misalkan S adalah himpunan terpisah dari F, dan T adalah himpunan penyatu untuk F. Maka T juga harus merupakan himpunan penyatu dari S. Namun setiap interval di S terpisah dari interval-interval lainnya. Jadi setiap anggota T hanya merupakan anggota satu interval di S, maka $|T| \ge |S|$ atau $n(F) \ge m(F)$.

Sekarang, kita gabungkan semuanya. Karena $|G| \ge 1$ (setidaknya $[a_1, b_1]$ adalah anggota G), kita punya $|F \setminus G| < |F| = f$, sehingga $m(F \setminus G) = n(F \setminus G)$ dengan hipotesa induksi. Maka

$$\begin{aligned} m(F) &\ge 1 + m(F \setminus G) \\ &= 1 + n(F \setminus G) \\ &\ge n(F) \\ &\ge m(F) \end{aligned}$$

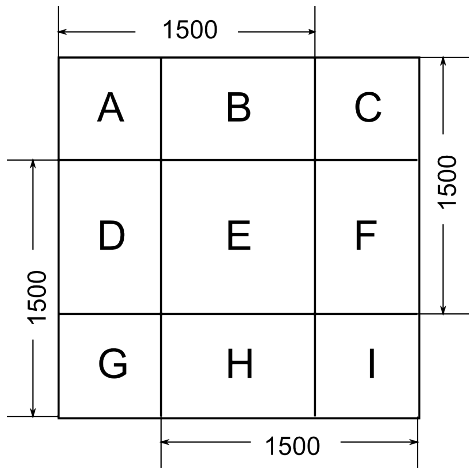
Maka kesamaan tercapai, sehingga $m(F) = n(F)$, membuktikan klaim induksi dan klaim di soal. ■

C10. Sebuah aula lantainya ditutupi oleh 2017×2017 ubin. Luffy mempunyai sejumlah detektor. Jika detektor ini diletakkan di atas sebuah ubin dia akan menyala jika tepat dibawahnya terdapat emas, dan tidak bereaksi apapun jika tidak ada emas di bawahnya. Luffy menyimpan k buah detektor tepat di atas k buah ubin kemudian dia keluar ruangan. Sanji memilih suatu daerah yang ditutupi oleh 1500×1500 ubin dan menyembunyikan tepat satu koin emas di bawah setiap ubin. Ketika Luffy kembali dan melihat detektor yang tadi dia pasang, dia dapat menentukan letak semua koin yang tadi di tanam Sanji.

Paling sedikit berapa banyak detektor yang harus Luffy gunakan agar ia dapat selalu menentukan letak semua koin emas seperti di atas?

Solusi Klaim bahwa 1034 adalah banyaknya detektor minimal yang diperlukan. Labeli baris-baris ubin dari atas ke bawah dan kolom-kolomnya dari kiri ke kanan. Pada baris ke 1009 mulai dari ubin yang paling kiri pasang 517 detektor berturutan dan pasang 517 ubin lainnya pada kolom ke 1009 mulai dari ubin pertama sampai ubin ke 517. Labeli persegi berukuran 1005×1005 dengan $P_{i,j}$ jika baris pertamanya adalah baris ke-i dan kolom pertamanya adalah kolom ke-j untuk $1 \leq i, j \leq 517$. Misalkan a dan b berturut-turut menyatakan baris dan kolom terkecil sehingga detektor yang dipasang di baris dan kolom tersebut menyala maka jelas ini terjadi jika dan hanya jika $P_{a,b}$ adalah lokasi bom berada. Jika tidak ada detektor yang menyala diantara ke 517 kolom pertama maka artinya persegi berada pada baris kolom ke 518 sampai 2017 dan baris pertamanya dapat ditentukan dari baris terkecil (1 sampai 517) dimana detektor menyala. Hal yang serupa dapat kita lakukan ketika tidak ada detektor yang menyala pada baris 1 sampai 517.

Bagi 2017×2017 ubin ke dalam daerah-daerah berikut:



Misalkan kita punya suatu pengaturan detektor yang memastikan posisi bom. Andaikan ada i diantara 1 dan 517 (inklusif) sehingga kolom ke-i (yang sepenuhnya termuat di kotak $A \cup D$ dan kolom ke-$1500 + i$ yang sepenuhnya termuat di kotak $C \cup F$ keduanya tidak memuat detektor. Tinjau situasi terburuk di mana anda memasang detektor pada semua ubin dan di mana persegi bom muncul di dalam daerah $A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$. Misalkan semua detektor diantara kolom ke i dan ke $1500 + i$ menyala, anda tidak bisa memastikan apakah persegi bom dimulai dari kolom ke-i atau berakhir di kolom ke-$1500 + i$. Dengan demikian banyaknya total detektor di daerah $A \cup D \cup C \cup F$ paling sedikit adalah 517. Kita tuliskan fakta ini sebagai $A + D + C + F \geq 517$.

Dengan melakukan hal yang serupa ketika persegi bom nya muncul di daerah lain, beserta ketaksamaan sebelumnya kita memiliki ketidaksamaan berikut:

$$\begin{aligned}(A+D)+(C+F) &\geq 517\\ (D+G)+(F+I) &\geq 517\\ (A+B)+(G+H) &\geq 517\\ (B+C)+(H+I) &\geq 517\end{aligned}$$

Dengan menjumlahkan keempat ketaksamaan kita peroleh $2(A+B+C+D+F+G+H+I) \geq 2\cdot 1034$. Jadi setidaknya kita harus memasang 1034 detektor.

Geometri

G1. Melalui titik sudut A dari jajargenjang $ABCD$, dibuat suatu garis g. Buktikan bahwa jarak dari C ke garis g adalah jumlah atau selisih jarak dari B dan D ke g.

Solusi Notasikan dengan $d(X, \ell)$ jarak titik X ke garis g. Ada beberapa kasus yang perlu ditinjau.

I. Garis g berhimpit dengan sisi AB atau sisi AD. WLOG garis g berhimpit dengan sisi AB. Pada kasus ini jarak $d(B, g) = 0$. Sedangkan $CD \parallel AB$ maka $d(D, g) = d(D, AB) = d(C, AB) = d(C, g)$. Dengan demikian $d(C, g) = d(B, g) + d(D, g)$.

II. Garis g berhimpit dengan diagonal AC. Pada kasus ini $d(C, g) = 0$. Di sisi lain, segitiga ABC kongruen dengan segitiga ACD karena $ABCD$ jajar genjang. Ini berarti garis tinggi keduanya sama panjang, yaitu $d(B, AC) = d(D, AC)$ sehingga $d(C, g) = 0 = d(B, AC) - d(D, AC) = d(B, g) - d(D, g)$.

III. Garis g memotong salah satu sisi BC atau CD. WLOG garis g memotong sisi BC di P. Misalkan g memotong perpanjangan DC di Q. Karena $AB \parallel CD$ maka segitiga-segitiga ABP, QCP, dan ADQ ketiganya sebangun. Ingat bahwa garis-garis tinggi segitiga-segitiga sebangun, sebanding dengan sisi-sisinya sehingga $\dfrac{d(B, g)}{d(D, g)} = \dfrac{BP}{AD}$ dan $\dfrac{d(C, g)}{d(D, g)} = \dfrac{CP}{AD}$. Akibatnya

$$\frac{d(B, g)}{d(D, g)} + \frac{d(C, g)}{d(D, g)} = \frac{BP}{AD} + \frac{CP}{AD} = \frac{BP + CP}{AD} = \frac{BC}{AD} = 1.$$

Ini berarti $d(B, g) + d(C, g) = d(D, g)$ atau setara seperti yang diminta.

IV. Garis g tidak memotong sisi-sisi jajargenjang. Misalkan perpanjangan CB dan perpanjangan CD memotong g berturut-turut di X dan Y. Kita dapatkan segitiga-segitga XBA, ADY, dan XCY ketiganya sebangun. Akibatnya $\dfrac{d(B,g)}{d(C,g)} = \dfrac{XB}{XC}$ dan $\dfrac{d(D,g)}{d(C,g)} = \dfrac{AD}{XC}$. Akibatnya

$$\frac{d(B,g)}{d(C,g)} + \frac{d(D,g)}{d(C,g)} = \frac{XB}{XC} + \frac{AD}{XC} = \frac{XB + AD}{XC} = \frac{XB + BC}{XC} = 1.$$

Ini berarti $d(B,g) + d(D,g) = d(C,g)$ seperti yang diminta.

Jadi jarak C ke garis g adalah jumlah jarak dari B dan D ke garis g saat g tidak memotong sisi jajargenjang dan saat g berhimpit dengan salah satu sisi, dan menjadi selisih jarak saat g memotong sisi jajargenjang saat g memotong sisi atau melewati C (berhimpit dengan diagonal).

G2. Diketahui dua lingkaran berpusat di P dan Q. Buktikanlah bahwa titik potong kedua garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran dengan kedua garis singgung persekutuan luar keduanya terletak pada satu lingkaran.

Solusi Perlu diingat bahwa kedua garis singgung persekutuan dalam merupakan cerminan satu sama lain terhadap pusat kedua lingkaran; yaitu jika satu garis singgung persekutuan dalam dicerminkan terhadap garis yang melalui kedua pusat lingkaran, hasilnya akan merupakan garis singgung persekutuan dalam juga. Hal ini juga berlaku untuk garis singgung persekutuan luar.

Misalkan dua garis singgung persekutuan dalam dinotasikan dengan g_1 dan g_2, dan misalkan pula garis singgung persekutuan luar dinotasikan dengan h_1 dan h_2. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\measuredangle(h_1, g_2) &= \measuredangle(h_1, PQ) + \measuredangle(PQ, g_2)\\ &= \measuredangle(h_2, PQ) + \measuredangle(PQ, g_1)\\ &= \measuredangle(h_2, g_1)\end{aligned}$$

Ini berarti bahwa keempat titik potong terletak dalam satu lingkaran.

G3. Pada segitiga ABC, titik P dan Q berturut-turut adalah proyeksi titik A ke garis bagi sudut ABC dan ACB. Buktikanlah bahwa $PQ \parallel BC$.

Solusi Misalkan I adalah titik potong kedua garis bagi. Maka $\angle AIQ = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC$. Akibatnya $\angle IAQ = 90 - \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle ACB$. Sementara itu, $APIQ$ merupakan segiempat talibusur sehingga $\angle IPQ = \angle IAQ$. Akibatnya

$$\angle CPQ = \angle IPQ = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle ICB = \angle PCB$$

yang artinya PQ sejajar BC seperti yang diminta soal.

G4. Di dalam segitiga samasisi ABC terletak titik T. Buktikanlah bahwa TA, TB dan TC adalah panjang sisi-sisi suatu segitiga.

Solusi Cerminkan titik T ke ketiga sisi segitiga. Misalkan A_1, B_1, C_1 berturut-turut adalah hasil pencerminan T ke sisi-sisi BC, CA, dan AB. Tinjau bahwa A_1 terletak di sisi yang berbeda dengan B_1 dan C_1 terhadap garis AB. Ini mengakibatkan bahwa ketiganya tidak mungkin terletak dalam satu garis, atau dengan kata lain, $A_1B_1C_1$ merupakan segitiga *non-degenerate*.

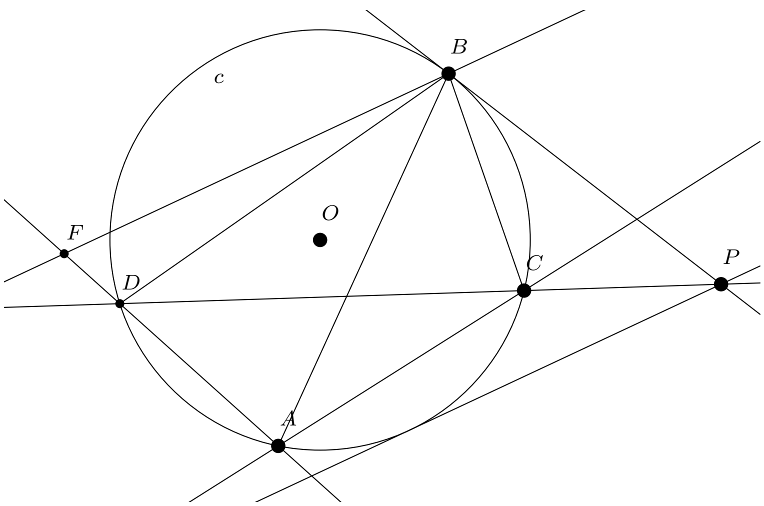
Selanjutnya perhatikan pula bahwa $AT = AB_1 = AC_1$ dan $\angle B_1AC_1 = 120^\circ$ dan

$$\begin{aligned}B_1C_1^2 &= AB_1^2 + AC_1^2 - 2AB_1\, AC_1 \cos\angle B_1AC_1\\ &= 2AT^2(1 - \cos 120^\circ\\ &= 2AT^2(1 + \frac{1}{2}) = 3AT^2\end{aligned}$$

atau $B_1C_1 = \sqrt{3}\,AT$. Dengan cara yang sama dapat diperoleh $C_1A_1 = \sqrt{3}\,BT$ dan $A_1B_1 = \sqrt{3}\,CT$. Ini berarti terdapat suatu segitiga yang kongruen dengan segitiga $A_1B_1C_1$ yang panjang sisinya AT, BT, dan CT.

G5. Diberikan lingkaran $\Gamma(O)$ yang berpusat di O dan P titik di luar $\Gamma(O)$. A dan B titik di $\Gamma(O)$ sedemikian sehingga PA dan PB adalah garis singgung $\Gamma(O)$. Garis l melalui P memotong $\Gamma(O)$ berturut-turut di titik C dan D (C terletak di antara P dan D). Garis BF sejajar garis PA dan memotong garis AC dan garis AD berturut-turut di E dan F. Buktikan bahwa $BE = BF$.

Solusi



Hubungkan segmen BC, BA dan BD. Didapat $\angle ABC = \angle PAC$. Karena $PA//BF$ dan $PA//EF$, didapat $\angle PAC = \angle AEB$; hal ini mengakibatkan segitiga ABC sebangun dengan segitiga AEB. Maka,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BE}{AB} \implies BE = \frac{BC \cdot AB}{AC}$$

Sekarang tinjau bahwa $\angle ABF = \angle PAB = \angle DB$; akibatnya, segitiga

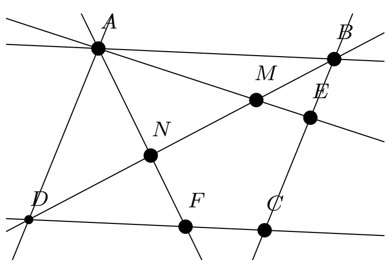
ABF sebangun dengan segitiga ADB. Maka, didapat

$$\frac{BF}{AB} = \frac{BD}{AD} \implies BF = \frac{BD \cdot AB}{AD}$$

Di sisi lain, dapat dilihat bahwa segitiga PBC dan PDB sebangun; begitu juga segitiga PAC dan PDA. Akibatnya, didapat relasi $\frac{PC}{PB} = \frac{BC}{BD}$ dan $\frac{PC}{PA} = \frac{AC}{AD}$. Karena $PA = PB$, didapat relasi $\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \implies \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} \implies \frac{BC \cdot AB}{AC} = \frac{BD \cdot AB}{AD} \implies BE = BF$. Terbukti.

G6. Diberikan jajargenjang $ABCD$. Titik-titik E dan F dipilih berturut-turut pada sisi BC dan CD sedemikian rupa sehingga segitiga ABE dan BCF mempunyai luas yang sama. Diagonal BD memotong AE dan AF berturut-turut di M dan N. Buktikan terdapat segitiga yang panjang sisi-sisinya sama dengan BM, MN, dan ND.

Solusi



Misalkan $BM = x$, $DN = y$, dan $MN = z$, dan $S(XYZ)$ menyatakan luas segitiga XYZ. Dari soal, $S(ABE) = S(BCF)$.

Tinjau bahwa $S(ABE) = \frac{1}{2}h \cdot BC$ dan $S(BCF) = \frac{1}{2}t \cdot CF$, dengan h =tinggi segitiga ABE=tinggi segitiga ABC dan t=tinggi segitiga BCF =tinggi segitiga BCD.

Karena sifat jajarangenjang, didapat $S(ABC) = S(BCD)$, dan

$$\frac{S(ABE)}{S(ABC)} = \frac{S(BCF)}{S(BCD)} \implies \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD}$$

Dari sifat jajarangenjang, $BC = AD$ dan $CD = AB$. Maka, persamaan di atas dapat diubah menjadi

$$\frac{BE}{AD} = \frac{CF}{AB}$$

Tinjau bahwa $AB = CD = DF + FC \implies AB - DF = FC$, dan

$$\frac{CF}{AB} = \frac{AB - DF}{AB} = 1 - \frac{DF}{AB}$$

Gabungkan kedua persamaan di atas, didapat

$$\frac{BE}{BC} = 1 - \frac{DF}{AB} \implies \frac{BE}{BC} + \frac{DF}{AB} = 1$$

Sekarang, karena $BE//AD$ dan $DF//AB$, didapat

$$\frac{BM}{MD} = \frac{BE}{AD} = \frac{x}{y+z}$$

$$\frac{DN}{NB} = \frac{DF}{AB} = \frac{y}{z+x}$$

Gabungkan tiga persamaan terakhir, didapat $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} = 1 \implies x^2 - xy + y^2 = z^2 \implies x^2 + 2xy + y^2 > z^2 \implies x + y > z$

Selanjutnya, misal titik O perpotongan diagonal AC dan BD, diperoleh

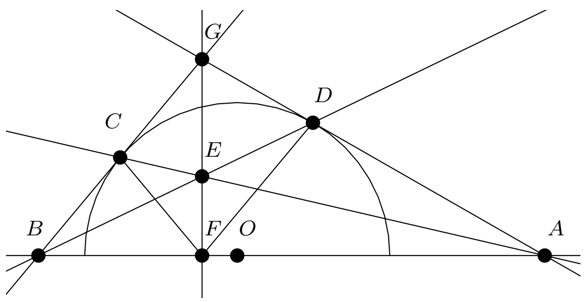
$$BM < BO = OD < DM \implies x < y + z$$

$$DN < DO = BO < NB \implies y < z + x$$

Karena $x + y > z, y + z > x, z + x > y$, maka dapat dibuat segitiga yang panjang sisinya adalah BM, MN, dan ND. Terbukti.

G7. Dibuat setengah lingkaran $\Gamma(O)$ dengan titik pusat O, dengan O terletak di sebuah garis l. C dan D terletak di lingkaran $\Gamma(O)$, dan garis singgung $\Gamma(O)$ di titik C dan D berturut-turut memotong garis l di titik B dan A, sedemikian sehingga O terletak di antara titik B dan A. Misalkan E titik potong antara AC dan BD, dan F titik pada l sehingga EF tegak lurus l. Buktikan bahwa EF membagi sudut CFD.

Solusi

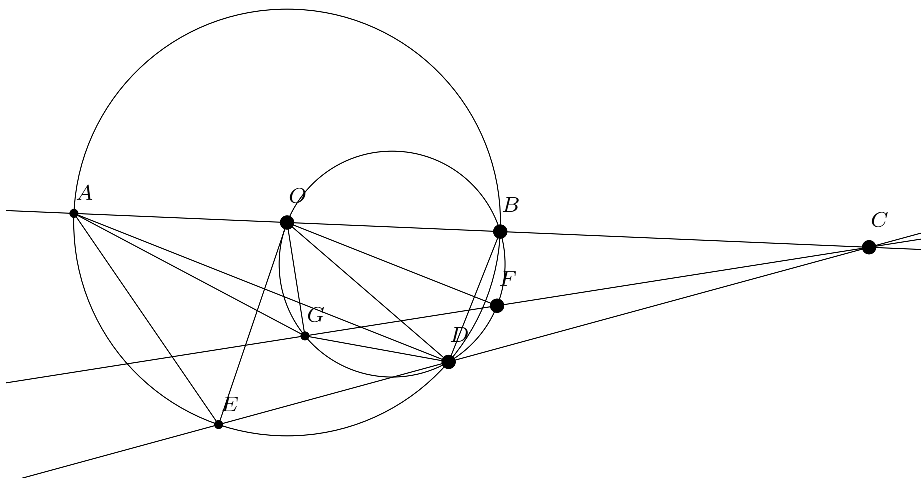


Perpanjang AD dan BC hingga berpotongan di titik G. Buat garis dari G tegak lurus l dan memotong l di H. Karena O titik pusat lingkaran Γ, dapat disimpulkan segitiga GAH dan OAD sebangun. Akibatnya $\frac{AH}{AD} = \frac{HG}{DO}$. Dengan cara yang sama, dapat disimpulkan segitiga GBH dan OBC sebangun; akibatnya, $\frac{BH}{BC} = \frac{HG}{CO} \implies \frac{BH}{BC} = \frac{AH}{AD}$.

Sekarang, karena $\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BC}{CG} \cdot \frac{GD}{DA} = 1$, didapat AC, BD, GH konkuren $\implies H$ berimpit dengan F. Karena G, D, F, O, C siklik, disimpulkan $\angle DFG = \angle DOG = \angle COG = \angle CFG \implies EF$ garis bagi $\angle CFD$. Terbukti.

G8. Diberikan lingkaran Γ yang berpusat di titik O, dengan AB sebagai diameternya. Titik C terletak pada perpanjangan garis AB sehingga B terletak di antara A dan C, dan garis yang melalui C memotong lingkaran Γ di titik-titik D dan E (dengan D terletak di antara C dan E). OF adalah diameter lingkaran luar segitiga OBD, dan perpanjangan garis CF memotong lingkaran luar segitiga OBD di titik G. Buktikan titik-titik O, A, E, G terletak pada satu lingkaran.

Solusi



Karena OF diameter dari lingkaran luar segitiga DOB, didapat OF merupakan garis bagi sudut DOB. Akibatnya, $\angle DOB = 2\angle DOF$. Karena $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle DOB$, didapat $\angle DAB = \angle DOF$. Mengingat $\angle DGF = \angle DOF$, maka $\angle DGF = \angle DAB$.

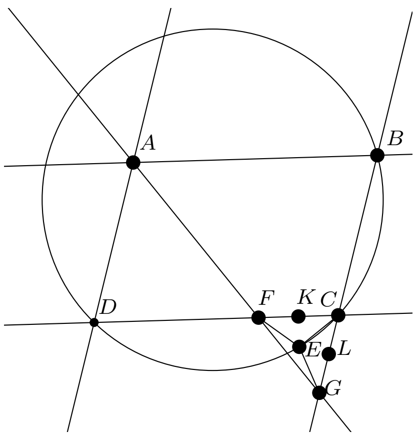
Di sisi lain $\angle DGF = \angle DGC$ dan $\angle DGF = \angle DAB = \angle DAC$. Akibatnya $\angle DGC = \angle DAC$, dan $GACD$ segiempat talibusur. Hal ini mengakibatkan $\angle AGC = \angle ADC$.

Tinjau bahwa $\angle AGC = \angle AGO + \angle OGF = \angle AGO + 90$ dan $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = \angle BDC + 90$ Dari hubungan di atas, diperoleh : $\angle AGO = \angle BDC$. Karena $BDEA$ segiempat talibusur, didapat $\angle BDC = \angle EAO$. Mengingat $OA = OE$, didapat $\angle EAO = \angle AEO$.

Dari hubungan di atas, diperoleh : $\angle AGO = \angle BDC = \angle EAO = \angle AEO \implies \angle AGO = \angle AEO$ Akibatnya, $OAEG$ segiempat talibusur, dan titik O, A, E, G terletak pada satu lingkaran. Terbukti.

G9. Diketahui $ABCD$ jajarangenjang. Titik E diambil sehingga $BCED$ merupakan segiempat tali busur. Misalkan l garis yang melalui A, memotong segmen DC di titik F dan memotong perpanjangan garis BC di G. Diketahui $EF = EG = EC$. Buktikan bahwa l merupakan garis bagi sudut BAD.

Solusi



Tarik garis tinggi dari titik E di segitiga sama kaki ECG dan ECF, dan misalkan garis tingginya berturut-turut L dan K.

Tinjau bahwa segitga ADF dan segitiga GCF sebangun; akibatnya diperoleh relasi $\frac{AD}{GC} = \frac{DF}{GF} = \frac{BC}{CG} \implies \frac{BC}{CG} = \frac{DF}{CF} \implies \frac{BC}{2CL} = \frac{DF}{2CK} \implies \frac{BC}{CL} = \frac{DF}{CK} \implies \frac{BC+CL}{CL} = \frac{DF+KF}{CK}$ (karena $CK = KF$). $\implies \frac{BL}{CL} = \frac{DK}{CK} \implies \frac{BL}{DK} = \frac{CL}{CK} \ldots (1)$

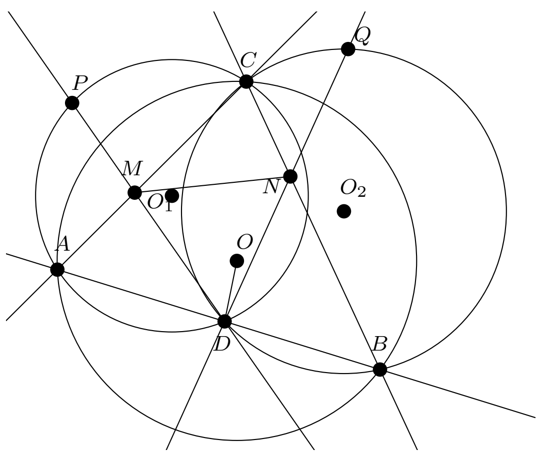
Karena $BCED$ segiempat talibusur, didapat $\angle CBE = \angle LBE = \angle EDK$. Hal ini mengakibatkan segitiga LBE sebangun dengan segitiga DKE (dengan kedua segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku), dan $\frac{BL}{DK} = \frac{EL}{EK} \ldots (2)$.

Dari persamaan (1) dan (2), didapat $\frac{CL}{CK} = \frac{EL}{EK}$; hal ini mengakibatkan segitiga CLE sebangun dengan segitiga CKE. Akibatnya, $\frac{CL}{CK} = \frac{CE}{CE} = 1 \implies CL = CK \implies CG = CF \implies$ segitiga CFG sama kaki. Maka, $\angle CFG = \angle CGF \implies \angle BAG = \angle GAD \implies l$

garis bagi sudut $\angle BAD$. Terbukti.

G10. Diketahui lingkaran $\Gamma_1(O_1)$ berpusat di O_1, lingkaran $\Gamma_2(O_2)$ berpusat di O_2, dan keduanya berpotongan di titik C dan D. Diketahui pula titik P dan Q berturut-turut terletak di lingkaran $\Gamma_1(O_1)$ dan $\Gamma_2(O_2)$. Sebuah garis l melalui titik D dan memotong $\Gamma_1(O_1)$ dan $\Gamma_2(O_2)$ berturut-turut di titik A dan B. Garis PD dan AC bertemu di titik M, dan garis-garis QD dan BC bertemu di titik N. Misalkan O pusat lingkaran luar dari segitiga ABC. Buktikan bahwa OD tegak lurus MN jika dan hanya jika dapat ditemukan sebuah lingkaran yang melalui titik-titik P, Q, M dan N.

Solusi



Misal Ω lingkaran luar ABC yang berpusat di O dan berjari-jari R. Dari *Power of Point*, didapat

$$NO^2 - R^2 = NC \cdot NB$$

$$MO^2 - R^2 = MC \cdot MA$$

Karena A, C, D, P konsiklis serta AC dan PD bertemu di M, berlaku $MC \cdot MA = MD \cdot MP$. Karena Q, D, C, B konsiklis serta QD dan CB bertemu di N, berlaku $NC \cdot NB = ND \cdot NQ$.

Dari keempat persamaan di atas, didapat

$$\begin{aligned} NO^2 - MO^2 &= ND \cdot NQ - MD \cdot MP \\ &= ND(ND + DQ) - MD(MD + DP) \\ &= ND^2 - MD^2 + ND \cdot DQ - MD \cdot DP \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas, dapat disimpulkan

$$\begin{aligned} OD \perp MN &\iff NO^2 - MO^2 = ND^2 - MD^2 \\ &\iff ND \cdot DQ = MD \cdot DP \\ &\iff M, N, P, Q \; konsiklik \end{aligned}$$

Terbukti.

Teori Bilangan

N1. Misalkan $A = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ merupakan bilangan asli dalam basis 10 yang digit ke-i nya adalah a_i. Definiskan $A^* = \overline{a_n \cdots a_2 a_1}$ dan $d(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Sepasang bilangan (A, B) disebut *serasi* jika $A \times B = C$ dan $A^* \times B^* = C^*$. Sebagai contoh $(12, 24)$ serasi karena $12 \times 24 = 288$ dan $21 \times 42 = 882$. Cari suatu pasangan serasi (A, B) sehingga $d(A + B) = 2017$.

Solusi Pilih $A = 1\underbrace{00 \cdots 001}$ dan $B = 1011 \cdots 1101$ dimana A dan B terdiri dari 2017 digit. Diperoleh $A + B = 2011 \cdots 1102$ sehingga $d(A + B) = 2017$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A \times B &= \left(10^{2016} + 1\right) \times B \\ &= (1011 \cdots 1101 \times 10^{2016}) + 1011 \cdots 1101 \\ &= 1011 \cdots 1102011 \cdots 1101. \end{aligned}$$

Dapat kita lihat bahwa $A \times B$ merupakan suatu palindrom. Dengan demikian (A, B) serasi.

N2. (NT) Suatu bilangan asli x dikatakan bersifat *binom* jika terdapat bilangan-bilangan asli m dan n dengan $1 < m \leq \frac{n}{2}$ sehingga $\binom{n}{m} = x$.

(a) Buktikan bahwa 2017 tidak bersifat binom.

(b) Tunjukkan bahwa ada tak hingga banyak bilangan asli kelipatan 2017 yang bersifat binom.

(keterangan: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$)

Solusi:

(a) Andaikan 2017 bersifat binom maka terdapat m dan n dengan $1 < m \leq \frac{n}{2}$. Karena 2017 prima maka jelas $n \geq 2017$. Akan tetapi, ini tidaklah mungkin karena untuk $m \geq 2$ kita punya

$$\binom{n}{m} \geq \binom{2017}{2} > 2017.$$

(b) Untuk sebarang bilangan asli k, ambil $x_k = 2017(4037k - 1)$. Jelas bahwa x_k kelipatan 2017 dan untuk $n = 4034k, m = 2$ diperoleh

$$\binom{n}{m} = \binom{4034k}{2} = \frac{1}{2} \times 4034k \times (4034k - 1) = 2017k\,(4034k - 1) = x_k.$$

N3. Tentukan semua bilangan asli n yang memenuhi dua bilangan

$$n^2 + 4 \text{ dan } n^4 + 2n^2 + 3$$

merupakan bilangan kubik!

Solusi: $n = 2$

Pembahasan: Misalkan $n^2 + 4 = k^3$ dan $n^4 + 2n^2 + 3 = m^3$, maka

$$(km)^3 = k^3m^3 = (n^2+4)(n^4+2n^2+3) = n^6 + 6n^4 + 11n^2 + 12 \quad (1)$$

Sedangkan

$$(n^2+1)^3 = n^6 + 3n^4 + 3n^2 + 1 < n^6 + 6n^4 + 11n^2 + 12$$

dan

$$(n^2+2)^3 = n^6 + 6n^2 + 12n^2 + 8$$

Jika $n > 4$, maka

$$(n^2+1)^3 < n^6 + 6n^4 + 11n^2 + 12 < n^6 + 6n^2 + 12n^2 + 8 = (n^2+2)^3$$

Karena n^2+1 dan n^2+2 berurutan, maka untuk $n > 4$ tidak mungkin Persamaan 1 terjadi.

Untuk $n = 1 \Longrightarrow n^2 + 4 = 5$ bukan kubik
Untuk $n = 2 \Longrightarrow n^2 + 4 = 8 = 2^3$ dan $n^4 + 2n^2 + 3 = 27 = 3^3$
Untuk $n = 3 \Longrightarrow n^2 + 4 = 13$ bukan kubik
Untuk $n = 4 \Longrightarrow n^2 + 4 = 20$ bukan kubik

N4. Tentukan semua pasangan bilangan asli (r, n) sehingga pernyataan ini benar:

Perkalian n bilangan prima ganjil terkecil, ditambah 1, sama dengan 2^r

Solusi Untuk $n = 1$, didapat $3 + 1 = 4 = 2^2 \implies (n, r) = (1, 2)$

Untuk $n = 2$, didapat $3 \cdot 5 + 1 = 16 = 2^4 \implies (n, r) = (2, 4)$

Sekarang misal $n \geq 3$ memenuhi soal. Notasikan prima-prima yang dimaksud dengan $p_1, p_2, \ldots p_n$. Maka, berlaku $p_1 p_2 \ldots p_n + 1 = 2^r$, atau

$$p_1 p_2 \ldots p_n = 2^r - 1$$

Jelas $p_1 = 3, p_3 = 7$. Dari persamaan di atas, fakta barusan menyebabkan $3|2^r - 1$, $7|2^r - 1$. Misalkan $r = 6k + r'$ dengan k, r' bilangan bulat nonnegatif, dan $0 \leq r' \leq 5$. Maka,

$$\begin{aligned} 2^r - 1 &= 2^{6k+r'} - 1 \\ &= 64^k 2^{r'} - 1 \\ &\equiv 2^{r'} - 1 \ (mod\, 3) \\ &\equiv 2^{r'} - 1 \ (mod\, 7) \end{aligned}$$

Jika $r' = 1$, didapat $2^{r'} - 1 = 1 \neq 0 \ (mod\, 3)$, kontradiksi.

Jika $r' = 2$, didapat $2^{r'} - 1 = 3 \neq 0 \ (mod\, 7)$, kontradiksi.

Jika $r' = 3$, didapat $2^{r'} - 1 = 7 \neq 0 \ (mod\, 3)$, kontradiksi.

Jika $r' = 4$, didapat $2^{r'} - 1 = 15 \neq 0 \ (mod\, 7)$, kontradiksi.

Jika $r' = 5$, didapat $2^{r'} - 1 = 31 \neq 0 \ (mod\, 3)$, kontradiksi.

Jadi, haruslah $r' = 0$. Namun, hal ini menyebabkan $2^r - 1 = 2^{6k} - 1 = 64^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0 (mod\, 9) \implies 9 | 2^r - 1 = p_1 p_2 \ldots p_n$. Padahal, faktor 3 hanya muncul sekali di perkalian $p_1 p_2 \ldots p_n$, kontradiksi.

Akibatnya, tidak ada n yang memenuhi soal untuk $n \geq 3$.

Dari pembahasan di atas, didapat semua n yang memenuhi pernyataan soal adalah $n = 1, 2$.

N5. Buktikan bahwa terdapat tak hingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- n memiliki setidaknya 2017 faktor.
- terdapat bilangan asli k sehingga $\dfrac{20^n + 17k}{n}$ merupakan bilangan asli

Solusi. Ambil $n = p_1 p_2 \cdots p_{10} p_{11}$, dengan p_i adalah prima yang berbeda-beda dan juga $p_i \neq 17$. Perhatikan bahwa kita tahu n punya $2^{11} = 2048 \geqslant 2017$ faktor. Jelas bahwa n yang seperti ini ada tak hingga banyaknya. Untuk n yang demikian, menurut CRT, terdapat suatu bilangan asli k yang memenuhi sistem kongruensi

$$k \equiv 17^{-1}(-20^n) \pmod{p_i} \Rightarrow p_i \mid 20^n + 17k$$

untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, 11$. Karena p_i merupakan bilangan-bilangan prima berbeda, maka kita simpulkan bahwa

$$p_1 p_2 \cdots p_{11} \mid 20^n + 17k \Rightarrow \frac{20^n + 17k}{n} \text{ bulat.}$$

atau dengan kata lain syarat kedua pada soal juga terpenuhi.

N6. Suatu bilangan asli d disebut *istimewa* jika setiap bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai $a^2 + b^2 - dc^2$ untuk suatu bilangan bulat a, b, c.

(a) Tunjukkan bahwa 2017 adalah bilangan istimewa.

(b) Tentukan bilangan asli terkecil yang tidak istimewa.

Alternatif Redaksi(Hard) Tentukan semua bilangan istimewa.

Solusi

(a) Perhatikan bahwa $(44k-1)^2+(9k+5)^2-2017k^2=2k+26$ dan $(44k+52)^2+(9k-30)^2-2017\,(k+1)^2=2k+1587.$

Dengan demikian semua bilangan bulat genap dan ganjil dapat dinyatakan ke dalam bentuk $a^2+b^2-2017c^2$ dan akibatnya 2017 istimewa.

(b) Akan kita tunjukkan bahwa 1 dan 2 istimewa. Hal tersebut dikarenakan

$$2^2+(k-2)^2-(k-3)^2=2k-1$$
$$k^2+1^2-(k-1)^2=2k$$

dan

$$(k-1)^2+k^2-2\,(k-1)^2=2k-1.$$
$$(k-1)^2+(k+1)^2-2\,(k-1)^2=4k.$$
$$(k-3)^2+(k+1)^2-2\,(k-2)^2=4k+2.$$

Sekarang kita tunjukkan bahwa 3 tidak istimewa. Andaikan ia istimewa maka terdapat bilangan bulat a,b,c sehingga $a^2+b^2=3c^2+3=3\,(c^2+1)$. Akibatnya $3\mid a^2+b^2$ yang mengakibatkan $9\mid a^2+b^2$. Akibatnya $3\mid c^2+1$, yang tidak mungkin terjadi karena $c^2+1\not\equiv 1$.atau 2 mod 3. Jadi 3 adalah bilangan asli terkecil yang tidak istimewa.

N7. Tentukan semua triplet (p,q,r) prima sehingga $8p-q-r, 8q-r-p, 8r-p-q$ juga merupakan bilangan prima.

Solusi Misalkan (p, q, r) merupakan solusi soal. Tinjau bahwa $8p - q - r + 8q - r - p + 8r - p - q = 6(p + q + r)$ merupakan bilangan genap. Akibatnya, minimum salah satu dari $8p - q - r, 8q - r - p, 8r - p - q$ haruslah genap. Jika tepat dua di antara $8p - q - r, 8q - r - p, 8r - p - q$, maka $8p - q - r + 8q - r - p + 8r - p - q = 6(p + q + r)$ ganjil, tidak mungkin. Jika $8p - q - r, 8q - r - p, 8r - p - q$ genap semua, didapat $8p - q - r = 8q - r - p = 8r - p - q = 2$, dan $8p - q - r + 8q - r - p + 8r - p - q = 6(p + q + r) = 2 + 2 + 2 = 6 \implies p + q + r = 1$, kontradiksi. Jadi, tepat satu dari $8p - q - r, 8q - r - p, 8r - p - q$ merupakan bilangan genap, dan dua bilangan lain merupakan bilangan ganjil.

Tinjau bahwa jika (p, q, r) solusi, semua permutasi (p, q, r) yang mungkin juga merupakan sousi soal. Oleh karena itu, wlog $8p - q - r = 2$. Maka, $8q - r - p$ dan $8r - p - q$ ganjil. Didapat $8q - r - p \equiv r + p \equiv 1 \, (mod \, 2)$. Akibatnya, tepat satu dari p dan r haruslah genap. Dengan cara yang sama, meninjau paritas $8r - p - q$, didapat pula tepat satu dari p dan q haruslah genap.

Seandainya q genap, didapatlah p ganjil dan r genap. Akibatnya haruslah $q = r = 2$, dan $2 = 8p - q - r = 8p - 4 \implies 8p = 6$, kontradiksi karena p bulat. Akibatnya, haruslah q ganjil (dan r ganjil), mengakibatkan p genap $\implies p = 2$. Didapat $2 = 8 \cdot 2 - q - r \implies q + r = 14$.

Jika $q = 2$, didapat $r = 12$, kontradiksi dengan fakta r prima.

Jika $q = 3$, didapat $r = 11$. Cek, $8p - q - r = 16 - 3 - 11 = 2, 8q - r - p = 24 - 11 - 2 = 11, 8r - p - q = 88 - 2 - 3 = 83 \implies (p, q, r) = (2, 3, 11)$ solusi soal.

Jika $q = 5$, didapat $r = 9$, kontradiksi dengan fakta r prima.

Jika $q = 7$, didapat $r = 7$. Cek, $8p - q - r = 16 - 7 - 7 = 2.8q - r - p = 56 - 7 - 2 = 47, 8r - p - q = 56 - 2 - 7 = 47 \implies (p, q, r) = (2, 7, 7)$ solusi soal.

Jika $q = 11$, didapat $r = 3$. Karena $(2, 11, 3)$ permutasi dari solusi $(2, 3, 11)$, tripel ini memenuhi soal.

Dari kasus-kasus di atas, didapat semua solusi soal adalah $(p, q, r) = (2, 7, 7), (2, 3, 11)$ dan permutasinya.

Jadi, semua solusi soal adalah $(p, q, r) = (2, 7, 7), (7, 2, 7), (7, 7, 2), (2, 3, 11), (2, 11, 3), (3, 11, 2), (11, 3, 2), (11, 2, 3)$.

N8. Tentukan semua n asli sehingga dapat ditemukan bilangan asli k yang dapat dinyatakan sebagai penjumlahan n bilangan prima berurutan, dan penjumlahan $n + 1$ bilangan prima berurutan.

Dua prima dikatakan berurutan jika tidak ada bilangan prima lain di antara kedua bilangan tersebut. Sebagai contoh, {23,29} adalah dua prima berurutan, dan {5,7,11} adalah tiga prima berurutan.

Solusi Untuk $n = 1$, ambil $k = 5 = 2 + 3 = 5$. Jelas fakta ini menyebabkan $n = 1$ merupakan solusi soal.

Misal $n > 1$ dan k memenuhi persyaratan di soal. Maka, dapat ditemukan prima $p_1, p_2, \ldots p_n, p_{n+1}$, (barisan n+1 bilangan prima berurutan) $q_1, q_2, \ldots, q_n$, (barisan n bilangan prima berurutan) dengan $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < p_{n+1}$, $q_1 < q_2 < \ldots < q_n$, yang memenuhi persamaan $k = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + p_{n+1} = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$.

Jika $p_1, p_2, \ldots p_n, p_{n+1}$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ semuanya ganjil, maka $k \equiv n + 1 \equiv n \pmod 2$, kontradiksi. Jadi, salah satu dari prima-prima di atas haruslah genap (sama dengan 2). Karena tidak ada bilangan prima yang lebih kecil dari 2, jadi 2 hanya mungkin menjadi nilai p_1 ataupun q_1.

Jika $p_1 > q_1$, berlaku pula $p_2 > q_2, \ldots p_n > q_n$ (karena $p_1, p_2, \ldots p_n$ dan $q_1, q_2, \ldots q_n$ merupakan prima berurutan). Maka, $k = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + p_{n+1} > q_1 + q_2 + \ldots + q_n + p_{n+1} = k + p_{n+1}$, ekuivalen dengan $p_{n+1} < 0$, kontradiksi. Maka $p_1 \le q_1$.

Jika $p_1 = q_1$, didapat $p_i = q_{i+1} \forall 1 \leq i \leq n$. Akibatnya $k = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + p_{n+1} = q_1 + q_2 + \ldots + q_n + p_{n+1} = k + p_{n+1} > k$, kontradiksi. Maka, haruslah $p_1 < q_1$

Akibat dari pertidaksamaan di atas, jelas $q_1 \neq 2 \implies p_1 = 2$. Karena $p_1 < q_1$, serta $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < p_{n+1}$, $q_1 < q_2 < \ldots < q_n$. Jelas $p_2 = 3, p_3 = 5$ (p_3 terdefinisi karena $n > 1$). Karena $q_1 > p_1 = 2$, dapat disimpulkan $q_1 \geq 3$. Sekarang, jika $q_1 = 3 = p_2$, dapat disimpulkan $q_2 = p_3, \ldots q_n = p_{n+1} \implies k = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n+1} = p_1 + q_1 + \ldots + q_n = 2 + k$, kontradiksi. Jadi, $q_1 \geq 5$.

Dari pertidaksamaan terakhir, jelas $q_2 > 5 = p_3$. Akibatnya dapat disimpulkan $q_i > p_{i+1}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. (karena $q_1 \geq 5 > 3 = p_2$) Maka,

$$k = p_1 + p_2 + \ldots p_{n+1} = p_1 + p_2 + \sum_{i=3}^{n+1} p_i < 2 + 3 + \sum_{i=2}^{n} q_i = 5 + k - q_1$$

, ekuivalen dengan $q_1 < 5$, kontradiksi. Jadi, tidak ada solusi untuk $n > 1$.

Dapat disimpulkan bahwa semua n yang memenuhi pernyataan soal adalah $n = 1$.

N9. Definiskan suatu barisan a_n sebagai berikut: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ dan untuk $n > 4$, a_n didefinisikan sebagai bilangan asli terkecil yang belum muncul pada suku-suku sebelumnya sehingga $(a_n, a_{n-2}) > 1$ dan $(a_n, a_{n-1}) = 1$. Tunjukkan bahwa setiap bilangan asli m terdapat n sehingga $m = a_n$.

Solusi Kita tunjukkan bahwa a_n merupakan barisan dengan takberhingga suku. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ telah terpilih. Ambil suatu bilangan prima p yang tidak membagi $a_1, \ldots, a_n$. Perhatikan bahwa $(a_{n-2}, pa_{n-2}) > 1$ dan $(pa_{n-2}, a_n) = 1$. Dengan demikian pa_{n-2} merupakan kandidat untuk a_{n+1} yang artinya kita bisa menambahkan suku ke $n + 1$.

Berikutnya kita akan tunjukkan bahwa ada takberhingga banyaknya bilangan prima p yang membagi suatu suku barisan di atas. Andaikan hanya suku-suku barisan hanya dibagi oleh bilangan-bilangan prima yang kurang dari p (di sini p juga prima). Karena barisan memiliki takberhingga banyaknya suku yang berbeda, maka ada n sehingga $a_n > p^2$. Misalkan $a_{n-2} = tq$ dengan q prima. Perhatikan bahwa $pq < p^2 < a_n$ dan $(pq, a_{n-2}) = q$ dan $(pq, a_{n-1}) = 1$. Ini kontradiksi dengan pendefinisian a_n.

Sekarang akan kita tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan prima p terdapat takberhingga banyaknya n sehingga $p \mid a_n$. Pertama kita tunjukkan bahwa pasti ada m sehingga $p \mid a_m$. Andaikan ada bilangan prima p sehingga $p \nmid a_n$ untuk setiah n. Kita akan tunjukkan bahwa pengandaian ini akan mengakibatkan untuk setiap bilangan prima q dengan $q > p$ maka tidak ada satu sukupun yang dibagi oleh q. Andaikan ada n terkecil sehingga $q \mid a_n$. Tulis $a_n = tq$. Dari definisi $(a_{n-2}, tp) > 1$ dan $(a_{n-1}, tp) = 1$ tapi $tp < tq$ (kontradiksi). Dari sini kita simpulkan bahwa hanya ada berhingga banyaknya bilangan prima yang membagi suku-suku a_n dan ini bertentangan dengan apa yang kita peroleh sebelumnya. Dengan demikian pastilah ada m sehingga $p \mid a_m$. Andaikan untuk $n \geq N$ berlaku $p \nmid a_n$. Pilih i cukup besar sehinga p^i tidak membagi $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Ambil suatu bilangan prima $q > p^i$ yang tidak membagi $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Perhatikan bahwa ada m terkecil sehingga $a_m = tq$. Perhatikan bahwa tp^i dapat menggantikan peran tq padahal $tp^i < tq$ (kontradiksi).

Untuk setiap bilangan prima p akan ditunjukkan bahwa ada n sehingga $a_n = p$. Berdasarkan hasil sebelumnya terdapat N sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $a_n > p$ dan terdapat $m > N$ sehingga $a_m = tp$. Perhatikan bahwa p merupakan kandidat yang lebih kecil dari a_{m+2} (kontradiksi).

Terakhir kita tunjukkan bahwa setiap bilangan asli muncul di barisan. Andaikan ada k terkecil yang tidak muncuk dibarisan. Misalkan N adalah indeks sehingga semua bilangan yang kurang dari k sudah muncul di antara $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Misalkan p faktor prima dari k. Menurut hasil sebelumnya, terdapat $M > N$ sehingga $p \mid a_M$. Ini menunjukkan bahwa $(a_M, k) > 1$. Akan ditunjukkan bahwa ini mengakibatkan $(a_n, k) > 1$ untuk setiap $n > M$. Jika tidak demikian maka terdapat $j > M$ sehingga $(a_j, k) > 1$ tapi $(a_{j+1}, k) = 1$. Ini mengakibatkan $a_{j+2} = k$ (kontradiksi). Jadi $(a_n, k) > 1$ untuk setiap $n > M$. Ambil prima q yang belum muncul sebagai faktor prima dari $a_1, a_2, \ldots, a_M$ maka menurut hasil kita sebelumnya maka ada $n > M$ sehingga $a_n = q$. Tapi ini mengakibatkan $(a_n, k) = 1$ (kontradiksi).

N10. Diketahui bahwa bilangan rasional positif $\dfrac{m}{n}$ jika dituliskan kedalam bentuk desimal, disebelah kanan tanda komanya (tidak mesti tepat setelah tanda koma) mengandung blok angka 17649. Buktikan bahwa n terkecil yang memenuhi kriteria di atas adalah 2017.

Solusi Pertama kita buktikan lemma berikut.

Lema 2. *Misalkan a, b, c, d, p, n bilangan asli dan $\dfrac{a}{b} < \frac{p}{n} < \dfrac{c}{d}$ sehingga $bc - ad = 1$. Maka $n \geq b + d$.*

Perhatikan bahwa $an < bp$ dan $pd < cn$. Sekarang

$$\begin{aligned} n &= n(bc - ad) \\ &= bcn - bpd + bpd - dan \\ &= b(cn - pd) + d(bp - an) \\ &\geq b + d \end{aligned}$$

Jika $\dfrac{m}{n}$ mempunyai digiti-digit 17649 disebelah kanan tanda koma, maka untuk suatu k dan x bulat kita peroleh bahwa $\dfrac{10^k m}{n} = x +$

$0,17649....$ Sekarang $\frac{10^k m}{n} - x$ bisa dituliskan ke dalam bentuk $\dfrac{p}{n} = 0,17649....$ Sekarang perhatikan bahwa $\dfrac{3}{17} = 0,17647...$ dan $353/2000 = 0,1765$. Ini menunjukkan bahwa $\dfrac{3}{17} < \dfrac{p}{n} < \dfrac{353}{2000}$ dengan $17 \cdot 353 - 3 \cdot 2000 = 1$. Maka menurut lema di atas $n \geq 17 + 2000 = 2017$. Perhatikan bahwa nilai $n = 2017$ tercapai karena $\frac{353}{2017} = 0,1764997...$