Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan November 2018

23–26 November 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\dbinom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

22. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *injektif* atau *satu-satu* bila untuk setiap $a, b \in X$ yang memenuhi $f(a) = f(b)$, dipunyai $a = b$. Dengan kata lain, tidak ada $a, b \in X$ dengan $a \neq b$ yang memenuhi $f(a) = f(b)$.

23. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *surjektif* bila untuk setiap $y \in Y$, ada $x \in X$ yang memenuhi $f(x) = y$. Dengan kata lain, range dari fungsi f adalah Y.

24. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *bijektif* bila fungsi tersebut injektif dan surjektif. Dengan kata lain, terdapat fungsi $g : Y \to X$ yang memenuhi $g(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in X$, dan $f(g(y)) = y$ untuk setiap $y \in Y$. (Fungsi g ini disebut *invers* dari fungsi f.)

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Selamat datang di KTOM November $\overline{\spadesuit \circ \star \diamondsuit}$! Sebagai soal nomor $\star$, kami ingin memberikan soal yang mudah. Sayang, komputer kami rusak sehingga semua tombol angka kami menghasilkan simbol. Tapi, kalian ialah murid-murid yang pintar, jadi kalian pasti dapat menyelesaikan soal ini! Selamat mengerjakan!

   Jika $s(i) = i^{\spadesuit} + \diamondsuit i$, tentukan nilai dari $s(\spadesuit) + s(\spadesuit + \star) + s(\spadesuit + \spadesuit) + \ldots + s(\overline{\star\circ})$.

2. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 14, BC = 16, CA = 18$. Titik D terletak pada sisi BC sedemikian hingga AD adalah garis tinggi segitiga ABC. Apabila M adalah titik tengah AD, tentukan nilai BM^2.

3. Seorang pedagang kaki lima menjual eskrim 8 rasa dengan 5 toping berbeda. Jika Tendo ingin membeli eskrim dengan 1 macam toping, tentukan banyaknya kombinasi eskrim dan toping yang dapat dibeli Tendo.

4. Bilangan palindrom adalah bilangan yang jika dibaca dari depan ke belakang dan dari belakang ke depan adalah sama, sebagai contoh $1881, 13431$, dan 284482 adalah bilangan palindrom. Bilangan dikatakan $11-$indrom (Sebelasindrom) jika bilangan tersebut merupakan bilangan palindrom dan habis dibagi 11. Tentukan banyaknya bilangan $11-$indrom $6-$digit.

5. Terdapat dua buah dadu seimbang dengan delapan sisi. Pada setiap sisi dadu, dituliskan angka 1 hingga 8. Kedua dadu dilempar dan hasilnya dijumlahkan. Bila peluang jumlah kedua mata dadu adalah kelipatan 5 adalah p, tentukan nilai $128p$.

6. Tentukan banyak bilangan asli $x \leq 2018$ sehingga

   $$\frac{x+2}{91}$$

   merupakan pecahan yang tidak dapat disederhanakan lagi.

7. Diketahui bilangan real a, b, c memenuhi $a+2b+c = 8$. Tentukan nilai b sedemikian hingga $ab + bc + b^2$ mencapai nilai maksimum.

8. Diberikan layang-layang $ABCD$ dengan $\angle ABC = \angle ADC$. Lingkaran luar ΔBCD memotong segmen AD dan segmen AB berturut-turut di E dan F sehingga $FE = ED = DC$. Jika $\angle ADC = x^\circ$ dan $\angle BAD = y^\circ$, maka tentukan nilai $\dfrac{10x}{y}$.

9. Diberikan x dan y merupakan bilangan real positif sehingga

   $$x^4 + y^4 + 3(xy)^3 = (xy)^5$$

   Jika $V = \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} + \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} - \sqrt{2 + xy}$, tentukan nilai $\lfloor 20V^3 + 18 \rfloor$.

10. Diberikan segitiga ABC dengan panjang $AB = 6$. Titik F pada BC sehingga AF adalah garis bagi $\angle BAC$. D adalah titik tengah segmen BC. Titik E pada AF sehingga BE tegak lurus AF. Jika panjang $DE = 2$, tentukan panjang garis AC.

11. Diberikan barisan $\{a_n\}$ yang memenuhi

$$a_n = n \cdot 2015^n + n^{2018}.$$

untuk setiap bilangan asli n. Tentukan nilai dari $FPB(a_1, a_2, \ldots, a_{2018})$.

12. Valen mewarnai dua buah persegi satuan dari sebuah papan berukuran 9×9. Dua buah pewarnaan persegi dikatakan sama jika salah satu dari kedua pewarnaan tersebut merupakan hasil rotasi dari pewarnaan yang lain. Tentukan banyak cara berbeda Valen mewarnai papan.

13. Diberikan barisan bilangan $b_{n+1} = 6b_n - 4b_{n-1}, b_0 = 1$ dan $b_1 = 5$. Diketahui barisan bilangan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $b_{n+1} = xb_n + \left\lfloor \sqrt{y} b_n \right\rfloor$. Tentukan nilai dari $x + y$.

14. Diketahui bahwa V adalah bilangan real positif terkecil sedemikian hingga untuk setiap bilangan bulat positif n, pertidaksamaan berikut terpenuhi :

$$FPB(n, \lfloor n\sqrt{2} \rfloor) < \sqrt{Vn}$$

Tentukanlah nilai dari $\lceil 100V \rceil$.

15. Misalkan $ABCD$ adalah segiempat talibusur dengan $AB = 48, BC = 75, CD = 99, DA = 180$. Diagonal AC dan BD berpotongan di E. B_1, B_2, B_3, B_4 adalah titik tengah dari AE, BE, CE, DE secara berturut-turut. G_1, G_2, G_3, G_4 adalah titik berat dari segitiga ABE, BCE, CDE, ADE secara berturut-turut. Tentukan luas dari segidelapan $B_1G_1B_2G_2B_3G_3B_4G_4$.

16. Sebuah domino adalah persegi panjang berdimensi 1×2. Tentukan banyaknya cara mewarnai sebuah kotak 8×8 sedemikian hingga terdapat 16 domino berwarna hitam dan 32 persegi satuan berwarna putih sehingga setiap kotak 2×2 mempunyai bagian putih yang berbentuk domino.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Misalkan $P(x)$ adalah polinomial berderajat 4 yang memenuhi

$$P(1) = \frac{1}{2}, P(2) = \frac{1}{6}, P(3) = \frac{1}{12}, P(4) = \frac{1}{20}, P(5) = \frac{1}{30}$$

   (a) Misalkan $Q(x) = x(x+1)P(x) - 1$. Buktikan bahwa $1, 2, 3, 4$ dan 5 adalah akar-akar dari $Q(x)$ serta $Q(x)$ merupakan polinomial berderajat 6.

   (b) Simpulkan bahwa

$$x(x+1)P(x) - 1 = L(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

   untuk suatu polinomial linear (berderajat 1) $L(x)$.

   (c) Tentukan polinomial $L(x)$ yang memenuhi persamaan pada nomor sebelumnya.

   (Petunjuk : Karena $P(x)$ merupakan polinomial, maka polinomial $x(x+1)$ harus membagi $L(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$. Gunakan fakta ini untuk menentukan $L(x)$).

   (d) Tentukan nilai $P(6)$.

2. Saat upacara, 1234567 siswa di SMA Mantap berbaris. Orang yang berada di paling kiri memilih suatu bilangan prima, kemudian orang ke-2 dari kiri memilih bilangan prima yang lebih besar dari orang paling kiri. Selanjutnya, setiap orang memilih suatu bilangan prima yang lebih besar daripada bilangan prima orang disebelah kirinya. Lucas berdiri pada urutan 1234 dari kiri dan Jessen berdiri pada urutan 1235 dari kiri, Lucas menghitung FPB dari jumlah semua bilangan orang-orang disebelah kirinya dengan bilangan yang ia pilih kemudian menulis hasil tersebut di dahinya. Kemudian Jessen melakukan hal yang sama. Buktikan bahwa salah satu dari bilangan yang ada di dahi Jessen atau Lucas sama dengan 1.

3. Buktikan bahwa untuk setiap n bilangan asli, berlaku

$$\sum_{0 \le j \le i \le n} \frac{(-1)^j}{(n-i)!j!} = 1.$$

4. Diberikan suatu segitiga lancip ABC dengan $AC > AB$, dan suatu titik S di busur kecil AB di lingkaran luar segitiga ABC. Misal refleksi A terhadap O, titik pusat lingkaran luar segitiga ABC, adalah A'. SA' memotong BC di P, dan PO memotong AC di Q. Jika H adalah titik tinggi segitiga ABC, buktikan bahwa $\angle BSH = \angle PQC$.