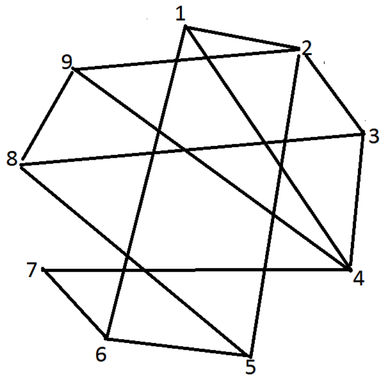
OSN 2014 Matematika SMA/MA

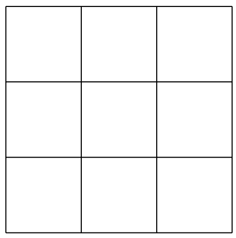
Hari Pertama Nomor Peserta : ____________

Soal 1. Bilangan-bilangan 1,2,. . . , 9 akan ditempatkan ke dalam papan catur berukuran 3×3. Mungkinkah bilangan-bilangan ini ditempatkan sehingga setiap dua persegi yang bertetangga, baik secara vertikal ataupun horizontal, jumlah dari dua bilangan yang ada di dalamnya selalu prima?

Solusi. Pandang graf berikut dimana dua bilangan dihubungkan dengan suatu sisi jika hasil jumlah keduanya merupakan bilangan prima.



Perhatikan papan catur berukuran 3×3 berikut



Karena persegi di pusat bertetangga dengan 4 persegi lainnya, maka bilangan yang dapat ditempatkan dipusat adalah bilangan pada graf di atas yang berorde 4 atau lebih. Bilangan yang memenuhi adalah 4 atau 2. Sekarang bilangan pada persegi yang bukan terletak di sudut ataupun dipusat haruslah minimal berorde 3. Karena 7 berorde 2, maka ia harus ditempatkan di sudut. Akan tetapi ini mengakibatkan 4 barus bertetangga dengan 7. Jadi 2 haruslah di persegi pusat. Tapi ini mengakibatkan 2 dan 4 bertetangga dan $2 + 4$ tidak prima. Jadi penempatan yang ingin dilakukan tidak mungkin.

Skema:

1. Membuat graf dengan titik-titiknya bilangan $1, 2, \ldots, 9$ dan dua bilangan dihubungkan dengan suatu sisi jika jumlah keduanya prima . . . . (**1 point**)
2. Menentukan bahwa bilangan yang dipusat adalah 2 atau 4 . . . . (**2 point)**
3. Melengkapi argumen bahwa penempatan tidak mungkin . . . . (**4 point)**

Soal 2. Misalkan m, n bilangan *asli* sehingga sistem persamaan

$$x + y^2 = m$$
$$x^2 + y = n$$

memiliki *tepat satu* solusi *bulat* (x, y). Tentukan semua nilai yang mungkin bagi $m - n$.

Solusi. Untuk $m - n$ ganjil, jika sistem persamaan mempunyai solusi bulat (x, y) maka dengan mengurangkan kedua persamaan diperoleh

$$y(y-1) - x(x-1) = m - n.$$

Akan tetapi ini tidak mungkin karena ruas kiri genap sedangkan ruas kanan ganjil.

Jika $m - n = 2t \neq 0$ (genap) maka dengan memilih $m = t^2 + 3t + 1 = (t+1)^2 + t$ dan $n = t^2 + (t+1)$ maka $m - n = 2t$ dan $(t, t+1)$ merupakan solusi bulat sistem persamaan.

Kita akan tunjukkan bahwa untuk $m \neq n$ bilangan asli sehingga sistem persamaan

$$\begin{aligned} x + y^2 &= m \\ x^2 + y &= n \end{aligned}$$

memiliki solusi bulat $(x, y) = (a, b)$ maka solusinya tunggal.

Pertama, perhatikan bahwa $b = n - a^2$ sehingga

$$a^4 - 2a^2n + a + n^2 = a + (n - a^2)^2 = a + b^2 = m.$$

Misalkan (c, d) juga solusi. Dengan cara sama, $c^4 - 2a^2n + c + n^2 = m$. Jadi,

$$\begin{aligned} 0 &= (a^4 - 2a^2n + a) - (c^4 - 2c^2n + c) \\ &= (a - c)\big((a + c)\big(a^2 + c^2 - 2n\big) + 1\big). \end{aligned}$$

Andaikan $a \neq c$, maka $(a + c)(a^2 + c^2 - 2n) + 1 = 0$. Ada dua kasus kemungkinan.

Kasus 1. $a + c = -1$ dan $a^2 + c^2 = 2n + 1$.

Dalam kasus ini, $c = -(1 + a)$, sehingga $a^2 + (1 + a)^2 = 2n + 1$ yang ekivalen dengan $n = a^2 + a$. Dengan demikian, $b = n - a^2 = a$ yang berakibat $m = n$ suatu kontradiksi.

Kasus 2. $a + c = 1$ dan $a^2 + c^2 = 2n - 1$.

Dalam kasus ini, $c = (1 - a)$ sehingga $a^2 + (1 - a)^2 = 2n - 1$ yang ekivalen dengan $n = a^2 - a + 1$. Dengan demikian, $b = n - a^2 = 1 - a$, yang berakibat

$$m - n = a + b^2 - (a^2 + b) = -(a - b)(a + b - 1) = 0.$$

suatu kontradiksi juga.

Jadi pengandaian salah dan berlaku $a = c$. Dengan ini, $d = n - c^2 = n - a^2 = b$. Jadi, $(c, d) = (a, b)$ dan kita selesai.

Sekarang misalkan $m = n$. Jika (a, b) dengan $a \neq b$ merupakan solusi, maka (b, a) merupakan solusi lain yang berbeda dari (a, b). Jika (a, a) merupakan solusi, maka $(-a - 1, -a - 1)$ merupakan solusi yang lain. Jadi ketika $m = n$ dan sistem persamaan memiliki solusi, solusinya tidak tunggal.

Jadi semua nilai yang mungkin bagi $m - n$ adalah semua bilangan genap taknol.

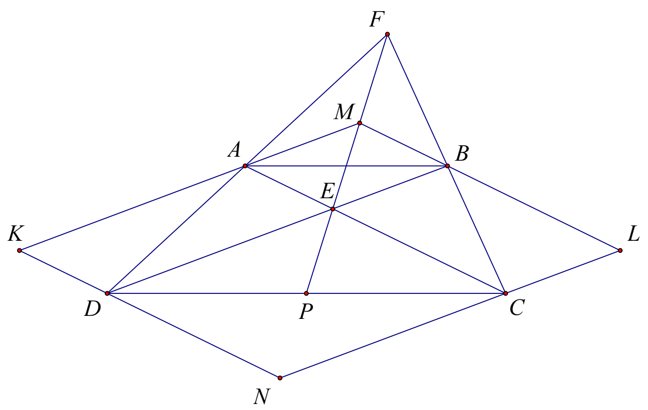
Nomor Peserta : ______________

Skema:

1. Untuk $m - n$ ganjil sistem persamaan tidak mempunyai solusi .... **(1 poin)**
2. Untuk $m - n$ genap sistem persamaan memiliki solusi .... **(1 poin)**
3. Jika $m \neq n$ dan sistem persamaan memiliki solusi maka solusinya tunggal .... **(3 poin)**
4. Jika $m = n$ maka solusinya tidak tunggal .... **(2 poin)**

Soal 3. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD dan $AB < CD$. Misalkan diagonal AC dan BD bertemu di E dan misalkan garis AD dan BC bertemu di titik F. Bangun jajar genjang $AEDK$ dan $BECL$. Buktikan bahwa garis EF melalui titik tengah segmen KL.

Solusi.



Pertama, kita buktikan bahwa garis EF melalui titik tengah segmen CD. Misalkan garis EF bertemu CD di titik P (kita belum tahu bahwa titik M terletak pada garis EF). Karena $AB \parallel CD$, maka $FA/AD = FB/BC$. Sekarang gunakan teorema Ceva, diperoleh

$$1 = \frac{FA}{AD}\frac{DP}{PC}\frac{CB}{BF} = \frac{DP}{PC}$$

sehingga $DP = PC$ dan klaim terbukti.

Misalkan garis AK dan BL bertemu di titik M dan misalkan garis CL dan DK bertemu di titik N. Karena $AEDK$ dan $BECL$ jajar genjang, maka $MK \parallel BD \parallel LN$ dan $ML \parallel AC \parallel KN$. Kita peroleh tiga jajar genjang lagi, $AMBE$, $CNDE$ dan $KMLN$. Dengan demikian, $\angle MAE = \angle MKN = \angle EDN = \angle NCE$. Selain itu, karena $AB \parallel CD$, maka segitiga $ABE \sim CDE$, menghasilkan $MA/AE = BE/AE = DE/CE = CN/CE$. Jadi, $MAE \sim NCE$ dan akibatnya $\angle MEA = \angle NEC$, yakni M, E, N terletak pada satu garis. Karena $CNDE$ jajar genjang, maka garis EN melalui titik tengah CD, yakni titik P. Jadi, M, E, N, P terletak pada satu garis.

Kita simpulkan bahwa garis EF sama dengan garis MN. Karena $KMLN$ jajar genjang, maka garis tersebut melalui titik tengah segmen KL dan kita selesai.

Skema:

(1) Memberikan pernyataan yang ekuivalen dengan soal (misal: F, M, E, P, N segaris) .. **(1 poin)**

(2) Membuktikan klaim di nomer (1) dengan dibagi menjadi bagian-bagian yang sebanding, misal

(a) F, E, P segaris .... **(2 poin)**

(b) M, E, N, segaris .... **(2 poin)**

(3) Solusi penuh .... **(2 poin)**

Soal 4. Tentukan semua polinom dengan koefisien bulat $P(x)$ sehingga untuk setiap bilangan asli a, b, c yang merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku, berlaku $P(a), P(b), P(c)$ juga merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku.
Catatan: Jika c sisi miring, $P(c)$ tidak harus merupakan sisi miring.

Solusi. Pertama, trivial bahwa $P(x) = mx$ dengan m konstanta bilangan asli memang memenuhi syarat yang disebutkan.

Misalkan polinom $P(x)$ memenuhi kondisi pada soal. Polinom $P(x)$ jelas tidak konstan karena segitiga sama sisi tidak pernah siku-siku. Tuliskan $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ dengan $n \geq 1$ dan $a_n \neq 0$.

Perhatikan untuk setiap bilangan asli k berlaku $3k$, $4k$ dan $5k$ adalah sisi-sisi segitiga siku-siku. Dengan demikian, $P(3k)$, $P(4k)$ dan $P(5k)$ juga adalah sisi-sisi segitiga siku-siku, namakan segitiga ini Δ_k. Andaikan terdapat tak berhingga bilangan asli k sehingga $P(3k)$ sisi miring dari Δ_k. Jadi, $P(3k)^2 = P(4k)^2 + P(5k)^2$ untuk tak berhingga banyaknya bilangan asli k. Karena itu, polinom $Q(x) = P(3k)^2 - P(4k)^2 - P(5k)^2$ memiliki tak berhingga banyak akar (bilangan asli), sehingga haruslah $Q(x) = 0$ atau $P(3x)^2 = P(4x)^2 + P(5x)^2$. Kita jabarkan ini dari bentuk polinom $P(x)$ diperoleh

$$(a_n(3x)^n + a_{n-1}(3x)^n + \cdots + a_0)^2 = (a_n(4x)^n + \cdots + a_0)^2 + (a_n(5x)^n + a_{n-1}(5x)^n.$$

Lihat koefisien depan kedua ruas diperoleh $(a_n \cdot 3^n)^2 = (a_n \cdot 4^n)^2 + (a_n \cdot 5^n)^2$ atau ekivalen dengan $9^n = 16^n + 25^n$ yang jelas tidak mungkin. Dengan argumen yang sama, tidak mungkin juga berlaku $P(4x)^2 = P(3x)^2 + P(5x)^2$. Yang berlaku adalah $P(5x)^2 = P(3x)^2 + P(4x)^2$ dan dengan argumen yang sama juga diperoleh $25^n = 9^n + 16^n$. Ini juga berakibat $n = 1$ karena jika $n \geq 2$, maka $25^n = (9+16)^n > 9^n + 16^n$. Dengan demikian, $P(x) = mx + t$. Sekarang dari persamaan

$$(m(5x) + t)^2 = (m(3x) + t)^2 + (m(4x) + t)^2$$

diperoleh $t^2 = t^2 + t^2$ sebagai koefisien belakang (konstanta) dari polinom di kedua ruas. Jadi, $t = 0$ dan disimpulkan bahwa $P(x) = mx$. Terakhir, m tidak mungkin negatif atau nol sehingga $P(x)$ memang memiliki bentuk seperti klaim di awal.

Solusi Alternatif Solusi ini adalah solusi lain bahwa $P(x)$ haruslah linier. Andaikan $P(x) = ax^n + Q(x)$ dengan $n \geq 2$ dan $\deg Q(x) < n$. Tanpa mengurangi keumuman kita bisa anggap $a > 0$. Misalkan $s < t$. Perhatikan bahwa

$$sP(tx) - tP(sx) = (sat^n - tas^n)x^n + sQ(tx) - tQ(sx)$$

merupakan polinom berderajat $n \geq 2$ dengan koefisien pembuka yang positif. Akibatnya untuk x yang cukup besar $sP(tx) > tP(sx)$. Khususnya $3P(5x) > 5P(3x)$ dan $4P(5x) > 5P(4x)$. Dengan mengkuadratkan masing-masing ketaksamaan di atas dan kemudian menjumlahkannya kita peroleh

$$P(5x)^2 > P(3x)^2 + P(4x)^2.$$

Jadi untuk suatu k yang cukup besar, $P(3k), P(4k), P(5k)$ bukan merupakan sisi-sisi segitiga siku-siku meskipun $3k, 4k, 5k$ merupakan sisi-sisi segitiga siku-siku.

Skema

1. Menebak bahwa $P(x) = mx$ merupakan satu-satunya polinom yang mungkin dan memeriksa atau menyatakan bahwa $P(x) = mx$ memang memenuhi .... (**1 poin**)
2. Menunjukkan bahwa jika $P(x) = mx + c$ memenuhi maka haruslah $c = 0$ ...... (**1 poin**)
3. Menunjukkan bahwa semua polinom berderajat $n \geq 2$ tidak memenuhi .... (**5 poin**)