Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Oktober 2019

25 Oktober – 28 Oktober 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
4. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
5. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
6. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
7. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
9. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
10. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
11. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
12. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
13. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
14. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

(e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

15. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

16. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

18. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

19. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

20. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

21. Rata-rata kuadratik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Selamat datang di KTO Matematika Oktober 2019! KTO kedatangan anggota baru , yaitu si Mawang. Untuk menyambut Mawang, tim KTO membuat barisan baru dengan hanya menggunakan angka $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ untuk tiap suku dimana tiap digit digunakan setidaknya sekali dalam 20 suku pertama. Untuk $n \geq 21$, digit ke n ditentukan dengan mengalikan semua angka sebelumnya dalam modulo 10. Tentukan suku ke 2019 barisan tersebut.

2. Tentukanlah banyak kuarduplet bilangan real positif (k, t, o, m) sehingga keempat persamaan kuadrat $kx^2 + tx + o = 0$, $tx^2 + ox + m = 0$, $ox^2 + mx + k = 0$ dan $mx^2 + kx + t = 0$ keempatnya memiliki masing-masing dua akar real yang berbeda. (Boleh saja ada akar l yang merupakan akar dari lebih dari satu persamaan kuadrat di soal).

3. Valen ingin pergi jalan-jalan. Valen dapat memilih untuk memakai 2 jaket, 5 kaos, 3 celana, 4 sepatu dan 3 topi. Berapa banyak tampilan berbeda Valen yang mungkin? (Valen wajib memakai kaos, celana dan sepatu).

4. Dalam sebuah koordinat kartesius, bidak Bejo berada pada titik $(0, 0)$. Definisikan *jalur rute* sebagai jalur terpendek antar dua titik. Bejo menggerakkan bidaknya melalui jalur rute dari titik $(n-1, \frac{(n-1)n}{2})$ ke titik $(n, \frac{n(n+1)}{2})$ secara bertahap, dimulai dari $n = 1$ hingga $n = 20$. Akibatnya, bidak Bejo membagi persegi panjang dengan titik sudut $(0, 0)$, $(20, 0)$, $(20, 210)$, dan $(0, 210)$ menjadi dua bagian. Tentukan selisih dari luas dua bagian tersebut.

5. Diberikan sebuah fungsi $f : \mathbb{R}_{\leq 1014} \to \mathbb{R}_{\leq 1014}$ sedemikian sehingga untuk semua bilangan rill $x \neq y$, maka berlaku
$$f(x) + f(y) = x + y$$
Tentukan jumlah semua nilai yang mungkin dari $f(1014)$.

6. Diberikan barisan bilangan asli $\{a_n\}_{n\geq 1}$ yang terdiri dari semua bilangan asli kecuali bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik sempurna dengan $a_i < a_{i+1}$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Tentukan nilai dari m sehingga $a_m = 2019$.

7. Diberikan segiempat $ABCD$ dimana AB dan CD saling sejajar, $\angle ACD = 30°$, $AB = 3\sqrt{7}$, $AC = \sqrt{21}$, serta $CD = \sqrt{7}$. Misalkan lingkaran luar segitiga BCD memiliki titik pusat O. Jika x menyatakan panjang segmen garis OA, tentukan nilai dari x^2.

8. Tentukan bilangan asli terkecil yang bisa dibagi oleh tepat 44 bilangan asli berbeda.

9. Diberikan polinomial
$$P(x) = x^4 + 20x^3 - 210x^2 - 540x + t$$
memiliki 4 akar real yang membentuk barisan geometri dengan rasio bilangan rasional. Jika a, b, c, d merukapan akar-akar dari $P(x)$ dengan $a < b < c < d$, tentukan nilai dari $t + |a||b| - |c||d|$.

10. Budi memiliki 100 koin adil dan 300 koin yang memiliki kemungkinan mengeluarkan gambar sebanyak $\frac{1}{6}$. Budi mengetos 400 koin miliknya dan menghitung banyak gambar yang muncul. Misalkan t ialah kemungkinan banyak gambar yang muncul ialah genap. Berapakah nilai dari $\lfloor 1000t \rfloor$?

11. Titik A, B, C terletak pada satu garis dengan $AB = 114, BC = 76$ dan B terletak diantara A dan C. Misalkan ω_1, ω_2 dan Ω berturut-turut merupakan lingkaran dengan diameter AB, BC dan AC dengan pusat O_1, O_2 dan O. Misalkan pula lingkaran ω_3 merupakan lingkaran dengan pusat O_3 yang menyinggung dengan ω_1, ω_2 di luar dan menyinggung Ω di dalam. Misalkan P adalah titik singgung antara ω_3 dengan Ω. Garis singgung lingkaran Ω di P memotong garis AC di Q. Jika QO_3 adalah $a\sqrt{b}$ dengan a, b bilangan asli dan b tidak dapat dibagi dengan sembarang bilangan kudrat sempuna selain 1. Tentukan nilai dari $a + b$.

12. Diketahui sebuah barisan bilangan asli $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ yang memiliki karakteristik: $a_n \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ dan $b_n \equiv a_n^n \bmod 13$ dengan syarat b_n bernilai minimum . Jika $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = 102019$. Tentukan nilai minimum dari n.

13. Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Untuk setiap $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, misalkan M merupakan subset dari S dengan k elemen. Jika $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ dengan $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_k$, didefinisikan *jumlah bolak-balik* dari subset M adalah $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_k(-1)^k$. Sebagai contoh, *jumlah bolak-balik* dari $\{1, 3, 4, 7, 20\}$ adalah $20 - 7 + 4 - 3 + 1 = 15$ dan *jumlah bolak-balik* dari $\{12\}$ adalah 12. Jika T adalah jumlah dari *jumlah bolak-balik* dari semua subset dari $\{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$, tentukan 3 digit terakhir dari T.

    Catatan: *Jumlah bolak-balik* dari himpunan kosong adalah 0.

14. Carilah jumlah dari semua n tiga digit yang memenuhi $\tau(n) + \tau(2n) + \tau(n+1) = 17$. ($\tau(n)$ melambangkan banyak faktor positif dari n. Contohnya, $\tau(36) = 9$).

15. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = BC = 5$ dan $CA = 6$. Misalkan M dan N terletak di BC sehingga AM dan AN berturut-turut merupakan garis berat dan garis bagi dari segitiga ABC. Misalkan pula garis l diperoleh dari refleksi garis AM terhadap garis AN dan memotong lingkaran luar ABC di X ($X \neq A$). Jika nilai dari AX adalah $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ dengan a, b, c bilangan asli, $FPB(a, b) = 1$ dan c tidak dapat dibagi dengan sembarang bilangan kudrat sempuna selain 1. Tentukan nilai dari $a + b + c$.

16. Diketahui fungsi

    $$f(x) = \lfloor \tan(\cos(\sin(x))) \rfloor + \left\lfloor \frac{2^x}{2^{1-x} + 2^{x-1}} \right\rfloor$$

    dengan daerah asal f adalah $x \in \mathbb{R}$ dan

    $$g(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \lfloor log_2 x \rfloor$$

    dengan daerah asal g adalah I sehingga daerah hasil f sama dengan daerah hasil g. Total panjang interval I dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m, n bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai mn.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Diberikan ABC ialah sebuah segitiga. D, E, F ialah titik tengah dari BC, CA, AB. Misalkan $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ialah titik berat dari AFG,AEG,BDG,BFG,CEG dan CDG.

   a) Kita tahu bahwa AD, BE, CF bertemu di satu titik G. Buktikan bahwa, dalam titik kartesian, jika $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b), C = (x_c, y_c)$, maka

   $$G = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right).$$

   (Hint : Carilah persamaan garis yang melewati titik A dan titik tengah BC, lalu carilah perpotongannya dengan titik B dan titik tengah CA. Setelah itu, buktikan bahwa titik ini ada di garis yang melewati titik C dan titik tengah AB).

   b.) Buktikanlah bahwa titik berat $A_1B_1C_1$ dan $A_2B_2C_2$ merupakan titik yang sama.

   c.) Tentukan nilai dari $\frac{A_1B_2+B_1C_2+C_1A_2}{AB+BC+CA}$ (Hint : Mungkin membantu untuk mencari hubungan dari A_1B_2 dan AB).

   d.) Apakah segitiga $A_1B_1C_1$ dan $A_2B_2C_2$ pasti sebangun? Jelaskan jawaban anda!

2. Otto sedang mempelajari bahasa **KTO**. Bahasa **KTO** adalah bahasa yang setiap katanya hanya terdiri dari huruf K, T, dan O. Pembentukan kata-kata dalam bahasa **KTO** ditentukan oleh beberapa aturan sebagai berikut :

   A. Kata pertama dalam bahasa **KTO** adalah KT.

   B. Jika ada kata dalam bentuk xT untuk suatu kata x, maka xTO juga kata dalam bahasa **KTO**.

   C. Jika ada kata dalam bentuk Kx untuk suatu kata x, maka Kxx juga kata dalam bahasa **KTO**.

   D. Jika ada kata dalam bentuk $xTTTy$ untuk suatu kata x, y, maka xOy juga kata dalam bahasa **KTO**.

   E. Jika ada kata dalam bentuk $xOOy$ untuk suatu kata x, y, maka xy jgua kata dalam bahasa **KTO**.

   F. Suatu kata ada dalam bahasa **KTO** jika dan hanya jika terbentuk menggunakan kombinasi beberapa langkah dari A sampai E.

   Sebagai contoh, Otto dapat membuat $KOTTO$ dengan menggunakan langkah sesuai dengan urutan berikut

   $$A \to C \to C \to C \to D \to D$$

   Dapatkah Otto membuat kata $KTOTO...TO$ dengan TO muncul sebanyak $2^{2019}+1$ kali?

3. Misalkan a, b, c, d ialah bilangan asli sehingga $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Apakah mungkin $a + b + c + d$ merupakan bilangan prima?

4. Tentukan bilangan asli k yang memaksimalkan ekspresi fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ berikut dan tentukan nilai maksimumnya.

$$f(k) = \frac{199^{k-1} + 201^{k+1}}{(k-1)! + (k+1)!}$$