Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA

Seleksi Tingkat Sekolah/SMAN 2 Jakarta

Tahun 2019

BAGIAN PERTAMA

Petunjuk: Masing-masing soal bagian pertama bernilai 1 (satu) angka. Untuk masing-masing soal, tulis jawab akhirnya saja (tanpa penjabaran) di lembar jawab yang disediakan.

1. Diketahui $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dan $a + 5b + c = 8$. Nilai maksimum $ab + bc + b^2$ dicapai ketika $b = ...$

2. Banyaknya quadruple (a, b, c, d) dengan a, b, c, d bilangan asli kurang dari 10 sehingga $2^a 3^b 4^c 5^d$ adalah bilangan kuadrat sempurna

3. Segitiga ABC siku-siku di B, BD garis tinggi segitiga ABC. Jika $AD = 144$ dan $DC = 25$, Luas segitiga ABC adalah...

4. Digit terakhir bukan nol dari 11!+12!+13! adalah ....

5. Sebuah bilangan asli a, b yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{4a} = \frac{1}{b^2 + 2b}$$

jika dijumlahkan mempunyai nilai minimum...

6. Dari sebuah himpunan $A = \{1, 2, ..., 24\}$ akan diambil n anggota untuk membentuk sub himpunan B, himpunan B disebut *imba* jika terdapat $B_i, B_j \in B$ sehingga $B_i + B_j = 27$. Nilai n minimum agar B selalu *imba* adalah...

7. Jika a, b, c adalah bilangan prima kurang dari 40 dan $a + b = c$, maka banyak tripel (a, b, c) yang mungkin adalah...

8. Diketahui fungsi tangga $f(x) = 2019 + \lfloor log_2 x \rfloor + \lfloor log_3 x \rfloor - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. Panjang interval x saat $f(x) = 2014$ adalah... satuan panjang.

9. Valentio memiliki pabrik handphone kecil. Dalam proses produksi handphone di pabrik tersebut, kemungkinan handphone tersebut gagal berfungsi $\frac{1}{6}$, handphone tersebut cacat $\frac{1}{3}$, dan sisanya berfungsi dengan normal. Setiap hari pabrik itu hanya memproduksi 10 handphone. Peluang handphone yang diproduksi besok jika 2 gagal berfungsi, 3 cacat, dan 5 normal adalah $\frac{a}{b}$, dimana $a, b \in \mathbb{N}$ dan FPB$(a, b) = 10$. Tentukan nilai $a + b$.

10. Kantin SMAN 2 Jakarta mempunyai 5 stand yang berbeda. Carilah banyaknya cara 15 murid mengantri di depan stand-stand tersebut jika disetiap stand terdapat minimal 2 murid yang mengantri.

11. Akar real dari $3x^7 - 30x^5 - x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 1 = 0$ dapat dituliskan dalam bentuk 3^m dimana m adalah bilangan rasional. Jika $\lfloor y \rfloor$ menyatakan bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan y. Nilai $|\lfloor 11m \rfloor|$ adalah. . .

12. Diketahui $f(p) = 7^p - p\left\lfloor \frac{7^p}{p} \right\rfloor$ dengan p prima, Carilah nilai p terkecil sehingga $f(p) = 7$

13. Dalam $\Delta ABC, BE$ memotong segmen AC di E sehingga $AE : EC = 3 : 2$. D berada di segmen BC dan AD memotong BE di G sehingga $AG : GD = 2 : 1$. CG memotong AB di F. Carilah nilai $\frac{AF}{BF}$

14. Jika $a, x, n \in \mathbb{Z}$, dan $x^2 + 2019^n + 1 = a^{2019}$. Jumlah semua x yang mungkin adalah...

15. $\sum_{n=1}^{4} \frac{sin\frac{\pi}{24}(2n+1)sin(\frac{\pi}{24})}{cos\frac{\pi}{12}(2n+1)+cos(\frac{\pi}{12})} = ...$

16. Garis bagi $\angle A$ memotong lingkaran lingkaran luar ΔABC di X. I adalah pusat lingkaran singgung dalam ΔABC. Jika diketahui $AI = 20$, $AB = 30$, $AC = 40$. Panjang IX adalah. . .

17. Sebuah polinomial $\Delta(x) = 2x^3 - 6x^2 + bx + c$ memiliki akar-akar real positif yang merupakan panjang sisi dari $\Delta\pi$. Polinomial $\Delta(x)$ jika dibagi $(2x - 3)$ bersisa 12. Luas $\Delta\pi$ adalah ...

18. Sebuah polinomial monik berderajat 2 dengan koefisiennya bilangan bulat memenuhi persamaan berikut:

$$P(P(2 + \sqrt{15})) = P(P(2 - \sqrt{15})) = P(P(5))$$

Tentukan nilai $|P(1)|$.

19. Sebuah barisan aritmatika $\{a_i\}$ dan barisan geometri $\{g_i\}$ mempunyai suku-suku positif memenuhi persamaan berikut:

$$log_{g_1} a_1 = log_{g_2}(a_2 - a_1) = log_{g_3} a_2$$

Tentukan nilai dari $\frac{a_2}{a_1}$.

20. Diagonal segiempat $ABCD$ berpotongan di X dan membentuk sudut α. O_1, O_2, O_3,dan O_4 adalah berturut-turut pusat lingkaran luar ΔABX, $\Delta BCX, \Delta CDX$, dan ΔDAX. Jika $tan\ \alpha = 11$. Perbandingan luas $ABCD$ dan luas $O_1O_2O_3O_4$ adalah...

BAGIAN KEDUA

Petunjuk: Masing-masing soal bagian kedua bernilai 7 (tujuh) angka. Anda diminta menyelesaikan soal yang diberikan secara lengkap. Selain jawaban akhir, Anda diminta menuliskan semua langkah dan argumentasi yang Anda gunakan untuk sampai kepada jawaban akhir tersebut.

1. 2019 siswa laki-laki dan 2019 siswa perempuan ingin duduk melingkar di sebuah meja. Buktikan terdapat siswa yang sebelah kiri dan kanan dua-duanya siswa laki-laki atau siswa perempuan.

2. Jika diketahui $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, Buktikan pertidaksamaan berikut:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} > \frac{1}{2}\sqrt[3]{xyz} + \frac{1}{3}\sqrt{xy} + \frac{x}{4}$$

Apabila anda mendapatkan tanda $\geq$, buktikan kesamaan tidak akan tercapai.

3. Tentukan semua solusi real dari

$$\frac{3}{x-3} + \frac{5}{x-5} + \frac{17}{x-17} + \frac{19}{x-19} = x^2 - 11x - 4$$

4. Sebuah segitiga lancip ΔABC dengan pusat lingkaran luar O. AO memotong BC di P. M sebuah titik di BC sehingga $OM \perp BC$, OM memotong lingakaran luar ΔABC di N, AN memotong BC di Q. Lingkaran dengan diameter BC memotong AC di D dan AB di E, DB dan EC berpotongan di F. AF memotong BC di R. Buktikan $\frac{BP.BR}{PC.RC} = \frac{BA.BQ}{AC.QC}$.

5. Diketahui sebuah barisan bilangan asli $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ yang memiliki karakteristik: $a_n \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ dan $b_n \equiv a_n^2 \mod 13$ dengan syarat b_n bernilai minimum dan $b_{n+1} \geq b_n$.
Buktikan solusi untuk $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{2019} = 2022$ adalah unik.