Solusi Babak Penyisihan
ITB Mathematics Olympiad 2022

Panitia ITBMO 2022

20 Februari 2022

1. Misalkan persamaan kubik $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$ memiliki akar-akar m, c, dan f. Tentukan nilai $\frac{1}{m} + \frac{1}{c} + \frac{1}{f} + \frac{m}{cf} + \frac{c}{fm} + \frac{f}{mc}$.

   Jawaban: 1.875

   Dengan teorema Vieta, didapatkan

$$\begin{aligned} m + c + f &= -3 \\ mc + cf + mf &= -6 \\ mcf &= 8 \end{aligned}$$

   Dengan mensubstitusikan persamaan tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} + \frac{1}{c} + \frac{1}{f} + \frac{m}{cf} + \frac{c}{fm} + \frac{f}{mc} &= \frac{(m+c+f)^2 - (mc + cf + mf)}{mcf} \\ &= \frac{(-3)^2 - (-6)}{8} \\ &= \frac{15}{8} \\ &= 1.875 \end{aligned}$$

2. Suatu bilangan rasional dikatakan *emceef* apabila dapat direpresentasikan sebagai $\frac{p}{q}$, dengan p dan q bilangan asli dan $p + q$ merupakan bilangan prima yang kurang dari 22. Banyak bilangan rasional *emceef* adalah ...

   Jawaban: 69

   Bilangan prima yang kurang dari 22 adalah $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.
   $p + q = 2 \implies 1$ kemungkinan $\left(\frac{1}{1}\right)$
   $p + q = 3 \implies 2$ kemungkinan $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right)$
   $p + q = 5 \implies 4$ kemungkinan $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}\right)$
   $\ldots$
   $p + q = 19 \implies 18$ kemungkinan $\left(\frac{1}{18}, \cdots, \frac{18}{1}\right)$
   Total kemungkinan: $1 + 2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16 + 18 = 69$.

3. Diketahui $\sec(2022x) + \tan(2022x) = 2022$. Berapakah $m - n$ jika $\sec(2022x) - \tan(2022x) = \frac{m}{n}$ dengan m dan n bilangan asli yang relatif prima (yaitu FPB dari m dan n sama dengan 1)?

   Jawaban: -2021

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(\sec(2022x) + \tan(2022x))(\sec(2022x) - \tan(2022x)) &= 2022 \cdot \frac{m}{n} \\
\sec^2(2022x) - \tan^2(2022x) &= 2022 \cdot \frac{m}{n} \\
1 &= 2022 \cdot \frac{m}{n} \\
\frac{m}{n} &= \frac{1}{2022}
\end{aligned}$$

   Akibatnya, $m = 1$ dan $n = 2022$ sehingga $m - n = -2021$.

4. Diketahui m, c, f bilangan prima yang memenuhi $m - c = f$. Jika $f < 2022$, tentukan nilai f terbesar yang mungkin.

   Jawaban: 1997

   Perhatikan paritas ketiga bilangan tersebut. Salah satu dari ketiga bilangan tersebut haruslah bilangan genap karena hasil pengurangan dan penjumlahan dua bilangan ganjil adalah bilangan genap dan satu-satunya bilangan prima genap adalah 2. Untuk memperoleh nilai f terbesar, kita harus mencari bilangan prima terbesar yang berselisih 2 dengan bilangan prima lainnya dan bilangan tersebut lebih kecil daripada 2022. Dapat diperoleh $1999 - 1997 = 2$ sehingga nilai f terbesar adalah 1997.

5. Misalkan (a_n) barisan bilangan real dengan $a_1 = 2$ dan $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$. Tentukan nilai $2021a_{2021}$.

   Jawaban: 2022

   Klaim: $a_n = \frac{n+1}{n}$.

   Bukti. Dengan metode induksi, misalkan $P(n) : a_n = \frac{n+1}{n}$.

   Langkah basis. Akan ditunjukkan $P(1)$ benar.

$$a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

   Langkah induksi. Misalkan $P(k)$ benar, akan ditunjukkan $P(k+1)$ juga benar.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{k+1}{k} \\
a_{k+1} &= 2 - \frac{1}{a_k} \\
&= 2 - \frac{k}{k+1} \\
&= \frac{(k+1)+1}{k+1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Akibatnya, $2021a_{2021} = 2021 \cdot \frac{2021+1}{2021} = 2022$.

6. Misalkan A dan B adalah dua himpunan, masing-masing beranggotakan bilangan-bilangan asli yang berurutan. Jumlah rata-rata aritmetika anggota-anggota A dan rata-rata aritmetika anggota-anggota B adalah 4044. Jika irisan A dengan B tidak kosong, tentukan anggota terbesar yang mungkin dari $A \cup B$.

   Jawaban: 8085

   Misalkan m_A dan m_B berturut-turut adalah rata-rata aritmetika anggota-anggota A dan B. Diberikan $m_A + m_B = 4044$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $m_A \leq m_B$. Misalkan $|A|$ dan $|B|$ berturut-turut adalah banyak anggota A dan banyak anggota B. Dengan rumus barisan dan deret aritmatika, diperoleh anggota terkecil dan terbesar dari A berturut-turut adalah $\frac{2m_A-|A|+1}{2}$ dan $\frac{2m_A+|A|-1}{2}$, sedangkan anggota terkecil dan terbesar dari B berturut-turut adalah $\frac{2m_B-|B|+1}{2}$ dan $\frac{2m_B+|B|-1}{2}$.

   Agar A dan B tidak memuat bilangan negatif, haruslah $1 \leq \min(A)$ dan $1 \leq \min(B)$.

$$\begin{array}{l|l} 1 \leq \dfrac{2m_A - |A| + 1}{2} & 1 \leq \dfrac{2m_B - |B| + 1}{2} \\ 2 \leq 2m_A - |A| + 1 & 2 \leq 2m_B - |B| + 1 \\ 1 \leq 2m_A - |A| & 1 \leq 2m_B - |B| \end{array}$$

   Dengan menjumlahkan kedua pertidaksamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} 2 &\leq 2m_A + 2m_B - |A| - |B| \\ |A| + |B| &\leq 2m_A + 2m_B - 2 \\ &= 2(4044) - 2 \\ &= 8086 \end{aligned}$$

   Perhatikan bahwa $(\max(A \cup B) = \max(A))$ atau $(\max(A \cup B) = \max(B))$. Perhatikan juga bahwa $0 \leq \max(A) - 1$ dan $0 \leq \max(B) - 1$. Dapat diperoleh

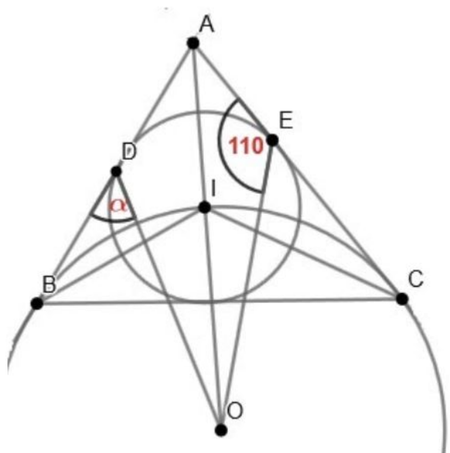
$$\begin{aligned} \max(A \cup B) &\leq \max(A) + \max(B) - 1 \\ &= \frac{2m_A + |A| - 1}{2} + \frac{2m_B + |B| - 1}{2} - 1 \\ &= m_A + m_B + \frac{|A| + |B|}{2} - 2 \\ &\leq 4044 + \frac{8086}{2} - 2 \\ &= 8085 \end{aligned}$$

   Konstruksi suatu kasus dengan $\max(A \cup B) = 8085$:
   $A = \{1\}, B = \{1, 2, \cdots, 8085\}$ memenuhi syarat soal.

   Dengan demikian, nilai anggota terbesar yang mungkin dari $A \cup B$ adalah 8085.

7. Diberikan segitiga ABC. Lingkaran dalam segitiga ABC berpusat di I dan menyinggung sisi-sisi AB dan AC berturut-turut di titik D dan E. Misalkan O adalah pusat lingkaran luar segitiga BIC. Jika besar sudut AEO adalah $110°$, maka besar sudut BDO adalah ... derajat.
   Petunjuk: A, I, dan O segaris.

   Jawaban: 70



   Perhatikan bahwa $\angle ADO = \angle AEO$. Karena A, I, O segaris dan AI garis bagi, maka $\angle DAO = \angle DAI = \angle EAI = \angle EAO$. Perhatikan bahwa $AD = AE$ karena keduanya garis singgung lingkaran dari titik A. Akibatnya, $\triangle ADO \equiv \triangle AEO$. Oleh karena itu, $\angle BDO = 180° - \angle ADO = 180° - \angle AEO = 180° - 110° = 70°$.

8. Misalkan $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x dan $\{x\} = x - [x]$. Tentukan banyak pasangan terurut (a, b) dengan a dan b bilangan tak negatif yang memenuhi $[a][b] - [a] + \{a\} - 2[b] = 26.543$ dan $\{a\} + \{b\} = 0.768$. (Titik di angka adalah titik desimal.)

   Jawaban: 6

   Perhatikan bahwa berdasarkan definisi, $0 < \{x\} < 1$. Karena $[a][b] - [a] + \{a\} - 2[b] = 26.543$, dengan $[a], [b]$ bulat dan $0 \leq a < 1$, haruslah $[a][b] - [a] - 2[b] = 26$ dan $\{a\} = 0.543$.

   Substitusikan $\{a\} = 0.543$ ke persamaan $\{a\} + \{b\} = 0.768$ sehingga $b = 0.768 - 0.543 = 0.225$.

   Perhatikan bahwa persamaan $[a][b]-[a]-2[b] = 26$ dapat ditulis sebagai $([a] - 2)([b] - 1) = 28$ sehingga didapat $[b] = \frac{28}{[a]-2} + 1$. Agar $[b]$ bulat tak negatif, haruslah $[a] - 2$ merupakan faktor positif dari 28. Banyak $[a] - 2$ yang memenuhi ada 6 bilangan, yakni 1, 2, 4, 7, 14, 28.

   Karena $b = [b] + \{b\} = \frac{28}{[a]-2} + 1 + 0.225$ dan $a = [a] + \{a\} = [a] + 0.543$ maka banyaknya pasangan terurut (a, b) bergantung pada banyaknya bilangan $[a]$ yang memenuhi, yakni sebanyak 6.

9. Tentukan hasil kali semua bilangan real x yang memenuhi persamaan berikut:

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$$

Jawaban: -1

Misalkan $2^x = a$ dan $3^x = b$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{a^3+b^3}{a^2b+b^2a} &= \frac{7}{6} \\
\frac{a^2-ab+b^2}{ab} &= \frac{7}{6} \\
6a^2-13ab+6b^2 &= 0 \\
(2a-3b)(3a-2b) &= 0 \\
2a = 3b \quad &\vee \quad 3a = 2b \\
2\left(2^x\right) = 3\left(3^x\right) \quad &\vee \quad 3\left(2^x\right) = 2\left(3^x\right) \\
2\left(2^x\right) = 3\left(3^x\right) \quad &\vee \quad \frac{2^x}{2} = \frac{3^x}{3} \\
2^{x+1} = 3^{x+1} \quad &\vee \quad 2^{x-1} = 3^{x-1}
\end{aligned}$$

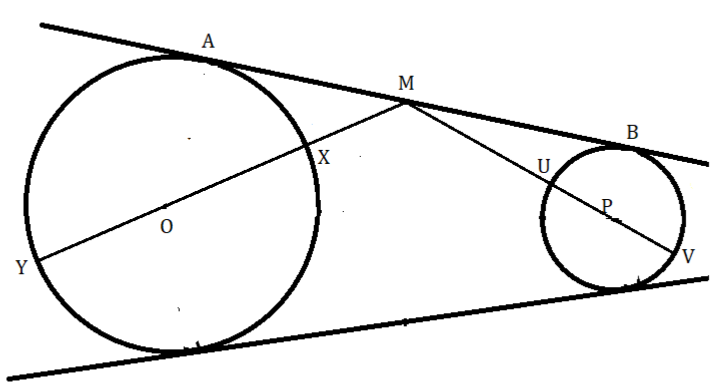
Akibatnya, $(x = 1) \vee (x = -1)$. Jadi, hasil kali semua bilangan real x yang memenuhi adalah -1.

10. Tentukan banyaknya pasangan empat bilangan bulat nonnegatif yang tidak harus berbeda a, b, c, d yang memenuhi $a + b + c = d$ dan $d \leq 11$.

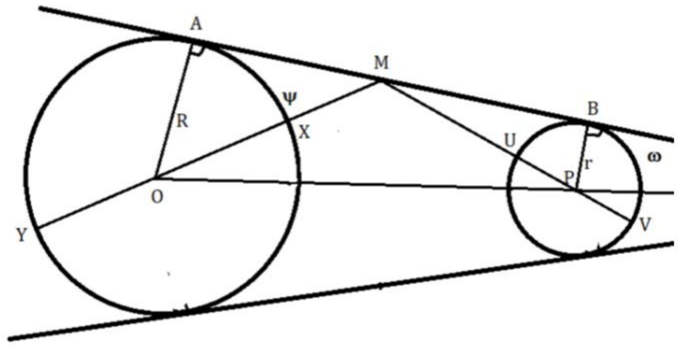
    Jawaban: 364

    Perhatikan bahwa banyaknya bilangan bulat non-negatif yang memenuhi $a+b+c = d$ ada sebanyak $\binom{d+2}{2}$ sehingga banyak bilangan a, b, c yang memenuhi adalah $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{13}{2} = \binom{14}{3} = 364$. *Catatan: Perhitungan dapat dibantu dengan Identitas Pascal.*

11. Diberikan dua buah lingkaran yang saling lepas dengan pusat berturut-turut O dan P. Garis singgung persekutuan keduanya memotong lingkaran pertama di A dan lingkaran kedua di B. Diketahui titik M adalah titik tengah ruas garis AB. Sinar MO memotong lingkaran pertama di X dan Y, sedangkan sinar MP memotong lingkaran kedua di U dan V, dengan $MX < MY$ dan $MU < MV$. Jika $MU : MX = 3 : 1$, tentukan $MY : MV$.



Jawaban: 3



Perhatikan bahwa titik M adalah titik tengah AB sehingga $MA = MB$. Perhatikan juga bahwa titik M merupakan titik kuasa terhadap lingkaran pertama dan kedua sehingga $MX \cdot MY = MA^2$ dan $MU \cdot UY = MB^2$. Karena $MA = MB$, maka

$$\begin{aligned} MA^2 &= MB^2 \\ MX \cdot MY &= MU \cdot MV \\ \frac{MY}{MV} &= \frac{MU}{MX} \\ &= 3 \end{aligned}$$

12. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b. Berapa banyak bilangan prima p yang memenuhi $p \mid 2022^p + 2022$?

    Jawaban: 3

    Perhatikan bahwa $2022^p + 2022$ dapat difaktorkan menjadi $2022\left(2022^{p-1} + 1\right)$.
    Jika $p \mid 2022\left(2022^{p-1} + 1\right)$, maka $p \mid 2022$ atau $p \mid 2022^{p-1} + 1$

    - Kasus 1: $p \mid 2022$
      p yang memenuhi adalah faktor prima dari 2022, yakni 2,3 dan 337 sehingga ada tiga solusi untuk kasus ini.
    - Kasus 2: $p \nmid 2022$
      Perhatikan bahwa p dan 2022 relatif prima. Kemudian, $p \mid 2022^{p-1} + 1$ dapat ditulis sebagai $2022^{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Karena p prima dan 2022 relatif prima dengan p, maka dengan Teorema Kecil Fermat, diperoleh

      $$\begin{aligned} 2022^{p-1} &\equiv 1 \pmod{p} \\ 2022^{p-1} + 1 &\equiv 2 \pmod{p} \\ 2 &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

      Akibatnya, $p \mid 2$ sehingga $p \mid 2022$. Kontradiksi. Tidak ada solusi untuk kasus ini.

13. Jika m dan c adalah bilangan bulat dan $x^2 - x - 1$ merupakan faktor dari $mx^3 + cx^2 + 1$, maka nilai c adalah ...

    Jawaban: -2

    Perhatikan $mx^3 + cx^2 + 1$. Karena koefisien x^3 adalah m dan konstanta adalah 1, maka

$$\begin{aligned} mx^3 + cx^2 + 1 &= (x^2 - x - 1)(mx - 1) \\ &= mx^3 - (m+1)x^2 + (1-m)x + 1 \end{aligned}$$

    Akibatnya, $1 - m = 0$ sehingga $m = 1$ dan $c = -(m+1) = -(1+1) = -2$.

14. Pada suatu program komputer terdapat 10 variabel yang outputnya diacak dengan ketentuan sebagai berikut:

    - 9 variabel $b_1, b_2, ..., b_9$ bertipe *boolean* (*True* atau *False*)
    - 1 variabel x bertipe *integer* dengan batasan $0 < x < f$, dengan f adalah faktor prima terbesar dari 2022)

    Pengacakan tersebut dilakukan berulang-ulang dan setiap *output* pengacakan disimpan dalam memori. Banyaknya pengulangan yang diperlukan agar dipastikan terdapat 3 *output* yang sama di memori adalah ...

    Jawaban: 344065

    Pada variabel bertipe boolean terdapat 2 pilihan, sehingga terdapat $2^9 = 512$ kemungkinan yang berbeda. Perhatikan bahwa $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ sehingga $f = 337$. Pada variabel bertipe integer terdapat 336 pilihan (perhatikan bahwa tanda pada soal adalah $<$, bukan $\leq$) sehingga terdapat $336^1 = 336$ kemungkinan yang berbeda.

    Akibatnya, total banyak kemungkinan *output* yang dihasilkan oleh program tersebut adalah $512 \times 336 = 172032$. Berdasarkan perumuman Pigeonhole Principle, banyaknya pengulangan yang diperlukan agar setidaknya terdapat 3 output yang sama adalah $2 \times 172032 + 1 = 344064 + 1 = 344065$.

15. Ada barisan aritmetika yang 4 suku pertamanya adalah (secara berurutan) $4, 3p-2q, 4q, 5p-2q$ untuk suatu bilangan real p dan q. Tentukan suku ke-2021 dari barisan aritmetika tersebut.

    Jawaban: 12124

    Misalkan selisih tiap suku pada barisan tersebut adalah b. Dari suku ke-4 dan suku ke-2, diperoleh $(5p - 2q) - (3p - 2q) = 2p \implies 2b = 2p \implies b = p$. Akibatnya,

$$\begin{array}{l|c} 4 + b = 3p - 2q & 3p - 2q + b = 4q \\ 4 + p = 3p - 2q & 3p - 2q + p = 4q \\ p - q = 2 & 2p - 3q = 0 \end{array}$$

Dari kedua persamaan tersebut, diperoleh $p = 6$ dan $q = 4$. Oleh karena itu, suku ke-2021 adalah $4 + (2021 - 1) \cdot 6 = 12124$.

16. Diberikan tiga fungsi polinomial $m(x)$, $c(x)$, dan $f(x)$ yang memenuhi ketentuan sebagai berikut:

$$|m(x)| - |c(x)| + f(x) = \begin{cases} -1 & \text{jika } x < -1 \\ 3x+2 & \text{jika } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x+2 & \text{jika } x > 0 \end{cases}$$

Tentukan nilai dari $m(3) + c(4) + f(5)$.

Jawaban:

Karena $x = -1$ dan $x = 0$ adalah dua titik kritis untuk fungsi nilai mutlak tersebut, maka

$$|m(x)| - |c(x)| + f(x) = a|x+1| + b|x| + cx + d$$

Akibatnya,

$$|m(x)| - |c(x)| + f(x) = \begin{cases} (c-a-b)x + d - a & \text{jika } x < -1 \\ (a+c-b)x + a + d & \text{jika } -1 \leq x \leq 0 \\ (a+b+c)x + a + d & \text{jika } x > 0 \end{cases}$$

Kemudian, diperoleh SPL sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (c-a-b)x + d - a &= -1 \\ (a+c-b)x + a + d &= 3x + 2 \\ (a+b+c)x + a + d &= -2x + 2 \end{aligned}$$

Dari penyelesaian SPL tersebut, diperoleh $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{5}{2}, c = -1, d = \frac{1}{2}$ sehingga diperoleh $|m(x)| - |c(x)| + f(x) = \frac{3}{2}|x+1| - \frac{5}{2}|x| - x + \frac{1}{2}$. Terdapat kesalahan pada soal sehingga terdapat lebih dari satu kemungkinan fungsi $m(x)$ dan $c(x)$. Soal dianulir.

17. Tiga bilangan dipilih secara acak dari $\{2, 3, \cdots, 2022\}$ dengan tidak memperhatikan urutan. Peluang jumlah ketiganya genap adalah $\frac{p}{q}$ dengan p dan q dua bilangan asli yang relatif prima (yaitu FPB dari p dan q sama dengan 1). Nilai $p + q$ adalah ....

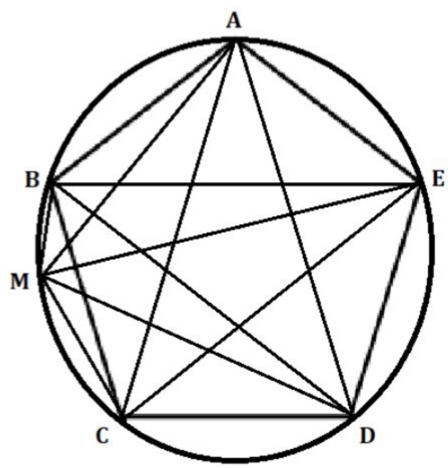
Jawaban: 2040199

- Kasus 1: ketiga bilangan tersebut semuanya genap. Peluangnya adalah $\frac{\binom{1011}{3}}{\binom{2021}{3}}$.
- Kasus 2: tepat salah satu bilangannya ganjil. Peluangnya adalah $\frac{\binom{1011}{1} \cdot \binom{1010}{2}}{\binom{2021}{3}}$.

Dengan menjumlahkan peluang kedua kasus, diperoleh peluang jumlah ketiganya genap adalah $\frac{680066}{1360133}$ sehingga $p + q = 680066 + 1360133 = 2040199$.

18. Titik M terletak pada busur BC di lingkaran luar segilima beraturan $ABCDE$. Jika nilai dari $\frac{MB+MC}{MA+MD+ME}$ adalah $\frac{1}{a\sin(\theta^\circ)+b}$, dengan a, b, θ bulat dan $0 < a,\ b < 6 < \theta < 90$, maka nilai $\theta - (a+b)$ adalah ....

Jawaban: 49



Misalkan $AB = BC = CD = DE = AE = s$ dan $AD = BD = BE = CE = AC = t$. Tinjau segiempat tali busur $ABMC$, berdasarkan Dalil Ptolomeus,

$$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$$
$$MA \cdot s = MB \cdot t + MC \cdot s \tag{1}$$

Tinjau segiempat tali busur $BMCD$, berdasarkan dalil Ptolomeus,

$$MD \cdot BC = MB \cdot CD + MC \cdot BD$$
$$MD \cdot s = MB \cdot s + MC \cdot t \tag{2}$$

Tinjau segiempat tali busur BMCE, berdasarkan dalil Ptolomeus,

$$ME \cdot BC = MB \cdot CE + MC.BE$$
$$ME \cdot s = MB \cdot t + MC \cdot t \tag{3}$$

Jumlahkan persamaan (1), (2), dan (3) sehingga diperoleh

$$(MA + MD + ME) \cdot s = (MB + MC)(2t + s)$$
$$\frac{MB + MC}{MA + MD + ME} = \frac{s}{2t + s} \tag{4}$$

Perhatikan $\triangle BCD$. Perhatikan $\angle BCD = \frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$ sehingga $\angle CBD = \angle CDB = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$. Akibatnya

$$t = 2s \cdot \cos(36^\circ)$$

Substitusikan $t = 2s \cdot \cos(36^\circ)$ ke persamaan (4), diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{MB + MC}{MA + MD + ME} &= \frac{s}{4s \cdot \cos(36^\circ) + s} \\
\frac{1}{a \sin(\theta^\circ) + b} &= \frac{1}{4 \cdot \cos(36^\circ) + 1} \\
&= \frac{1}{4 \cdot \sin(90^\circ - 36^\circ) + 1} \\
&= \frac{1}{4 \cdot \sin(54^\circ) + 1}
\end{aligned}$$

Diperoleh $\theta = 54,\ a = 4$, dan $b = 1$. Jadi, $\theta - (a + b) = 54 - (4 + 1) = 49$.

19. Diberikan m bilangan asli empat-digit dan k bilangan asli yang diperoleh dengan menuliskan digit-digit m secara terbalik. Diketahui bahwa m dan k keduanya habis dibagi 13 dan menghasilkan sisa yang sama apabila dibagi oleh 15. Misalkan n adalah jumlah digit-digit dari m yang memenuhi, maka banyak nilai n berbeda yang mungkin adalah ....

    Jawaban: 26

    Diketahui $m = 1000a + 100b + 10c + d,\ k = 1000d + 100c + 10b + a,$ dan $n = a + b + c + d$ untuk suatu bilangan bulat $0 \le b, c \le 9$ dan $0 < a, d \le 9$. Karena $13 \mid m$ dan $13 \mid k$, maka $13 \mid m + k$.

$$\begin{aligned}
m + k &\equiv 0 \pmod{13} \\
(1000a + 100b + 10c + d) + (1000d + 100c + 10b + a) &\equiv 0 \pmod{13} \\
1001(a + d) + 110(b + c) &\equiv 0 \pmod{13} \\
0 \cdot (a + d) + 6 \cdot (b + c) &\equiv 0 \pmod{13} \\
6(b + c) &\equiv 0 \pmod{13}
\end{aligned}$$

Karena 6 dan 13 relatif prima, maka $b + c \equiv 0 \pmod{13}$. Karena $0 \le b + c \le 18$, maka nilai $b + c$ yang mungkin adalah 0 atau 13. Karena yang ditanya adalah banyak nilai n yang berbeda, kita hanya perlu fokus pada penjumlahan $a + b + c + d$, tidak perlu memikirkan kombinasi a, b, c, d. Diketahui m dan k menghasilkan sisa yang sama saat dibagi oleh 15.

$$\begin{aligned}
m &\equiv k \pmod{15} \\
1000a + 100b + 10c + d &\equiv 1000d + 100c + 10b + a \pmod{15} \\
999a + 90b &\equiv 999d + 90c \pmod{15} \\
999a &\equiv 999d \pmod{15} \\
9a &\equiv 9d \pmod{15} \\
9(a - d) &\equiv 0 \pmod{15}
\end{aligned}$$

Karena FPB(15,9) = 3, maka

$$\begin{aligned} a-d &\equiv 0 \pmod{\frac{15}{3}} \\ a-d &\equiv 0 \pmod{5} \\ a &\equiv d \pmod{5} \end{aligned}$$

Karena $0 < a, d \leq 9$, maka tupel $(a, d, a+d)$ yang memenuhi ada 13 pasang yakni {(1,1,2), (1,6,7), (2,2,4), (2,7,9), (3,3,6), (3,8,11), (4,4,8), (4,9,13), (5,5,10), (6,6,12), (7,7,14), (8,8,16), (9,9,18)}. Ingat kita tidak perlu memikirkan urutan a, d karena yang difokuskan adalah jumlahnya.

Karena nilai $b+c$ yang mungkin ada 2 dan nilai $a+d$ yang berbeda ada 13, jadi banyak nilai n berbeda yang mungkin adalah $2 \cdot 13 = 26$, yaitu {2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31}.

20. Diketahui

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 3$$

dan

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} - \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8} = \frac{1}{a}$$

Tentukan nilai dari a.

Jawaban: 6.24

Sederhanakan penjumlahan pecahan yang pertama.

$$\begin{aligned} \frac{(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2}{x^4-y^4} &= 3 \\ \frac{2x^4+2y^4}{x^4-y^4} &= 3 \end{aligned}$$

Bagi kedua ruas dengan 2.

$$\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} = \frac{3}{2}$$

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} + \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} &= \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \\ \frac{(x^4+y^4)^2+(x^4-y^4)^2}{x^8-y^8} &= \frac{13}{6} \\ \frac{2x^8+2y^8}{x^8-y^8} &= \frac{13}{6} \end{aligned}$$

Bagi kedua ruas dengan 2.

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} = \frac{13}{12}$$

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}-\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}&=\frac{13}{12}-\frac{12}{13}\\ \frac{1}{a}&=\frac{25}{156}\\ a&=\frac{156}{25}\\ &=6.24\end{aligned}$$

21. Sebuah bilangan asli a dikatakan *meng* apabila a tidak dapat dinyatakan sebagai selisih dari dua bilangan asli yang memiliki sejumlah ganjil faktor positif. Bilangan asli b dikatakan *ming* apabila b memiliki digit terakhir 0 atau 1. Bilangan asli c dikatakan *mung* apabila c kurang dari 1000. Banyak bilangan *mung* yang merupakan bilangan *meng* atau *ming* adalah ....

    Jawaban: 400

    Notasi $|H|$ menyatakan banyak anggota dari himpunan H.

    Klaim: Bilangan asli yang memiliki faktor positif sebanyak ganjil adalah bilangan kuadrat selain 0.

    Bukti. Misalkan $x=p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_r^{q_r}$. Banyak faktor positif dari x adalah $(q_1+1)(q_2+1)\cdots(q_r+1)$. Agar banyak positifnya ganjil, haruslah q_i+1 dengan $1\le i\le r,\ i\in\mathbb{N}$ bernilai ganjil. Akibatnya, q_i bernilai genap. Perhatikan juga bahwa 0 bukan bilangan asli. Akibatnya, x adalah bilangan kuadrat selain 0. ■

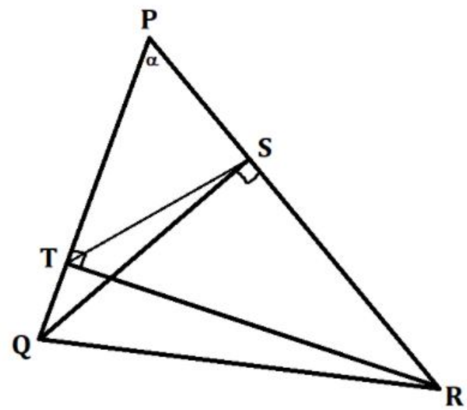
    Perhatikan bentuk $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$. Agar m dan n bilangan bulat, haruslah pasangan $((m+n),(m-n))$ bernilai (genap,genap) atau (ganjil,ganjil). Perhatikan bahwa bilangan yang kongruen $2 \pmod 4$ hanya memiliki pasangan faktor (genap,ganjil) sehingga bilangan yang kongruen $2 \pmod 4$ adalah *meng*. Semua bilangan ganjil yang lebih besar dari 4 tidak dikatakan *meng* karena memiliki pasangan faktor (ganjil-ganjil) yang keduanya berbeda. Semua bilangan kelipatan 4 yang lebih besar dari 4 tidak dikatakan *meng* karena memiliki pasangan faktor (genap,genap) yang keduanya berbeda. 1 dikatakan *meng* karena hanya terdapat pasangan faktor (1,1) yang mengakibatkan $1=1^2-0^2$ (0 bukan bilangan asli). 3 tidak dikatakan *meng* karena $3=2^2-1^2$. 4 dikatakan *meng* karena pasangan faktor (genap,genap) nya hanya (2,2) yang mengakibatkan $4=2^2-0^2$ (0 bukan bilangan asli). Jadi, bilangan asli yang dikatakan *meng* adalah $1,2,4,6,10,14,18,\cdots$

    Misalkan A adalah himpunan semua bilangan *mung* yang *meng*, dan B adalah himpunan semua bilangan *mung* yang *ming*, maka $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=(2+\frac{1000}{4})+(2\cdot 99+1)-(1+\frac{1000}{20})=252+199-51=400$.

22. Diberikan segitiga lancip PQR dengan sudut P sebesar α sehingga $\cos(\alpha)=\frac{1}{3}$. S dan T masing-masing adalah kaki tinggi dari titik sudut Q dan R. Jika nilai $PQ+PR=2022$,

berapakah nilai $TQ + SR$? (Kaki tinggi dari suatu titik sudut segitiga adalah titik pada sisi di hadapannya yang menjadi pangkal dari garis tinggi.)

Jawaban: 1348



Karena $\angle QTR = \angle QSR = 90°$, maka $QTSR$ adalah segiempat tali busur (keduanya merupakan sudut keliling). Akibatnya, $\angle PTS = 180° - \angle STQ = \angle PRQ$ (jumlah besar dua sudut berhadapan pada segiempat tali busur adalah 180°). Oleh karena itu, diperoleh $\triangle PST \sim \triangle PQR$ dengan rasio

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{ST}{QR} = \frac{PT}{PR} = \cos a = \frac{1}{3}$$

(tinjau segitiga siku-siku PTR). Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
TQ + SR &= (PQ - PT) + (PR - PS) \\
&= (PQ + PR) - (PT + PS) \\
&= (PQ + PR) - \frac{1}{3}(PR + PQ) \text{ (karena sebangun)} \\
&= \frac{2}{3}(PQ + PR) \\
&= \frac{2}{3} \cdot 2022 = 1348
\end{aligned}$$

23. Ambil sebarang bilangan asli x sedemikian rupa sehingga $343^x + n(2365^x)$ merupakan kelipatan 2022, dengan n juga merupakan bilangan asli dengan syarat $n \leq 202^2$. Banyaknya nilai n yang mungkin adalah ....

    Jawaban: 20

    Faktorisasi prima dari 2022 adalah $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

    Tinjau faktor pertama.

$$343^x + n(2365^x) \equiv 0 \pmod 2$$

$$
\begin{aligned}
1^x + n \cdot 1^x &\equiv 0 \pmod 2 \\
1 + n &\equiv 0 \pmod 2 \\
2 &\mid 1 + n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Tinjau faktor kedua.

$$
\begin{aligned}
343^x + n(2365^x) &\equiv 0 \pmod 3 \\
1^x + n \cdot 1^x &\equiv 0 \pmod 3 \\
1 + n &\equiv 0 \pmod 3 \\
3 &\mid 1 + n
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Tinjau faktor ketiga.

$$
\begin{aligned}
343^x + n(2365^x) &\equiv 0 \pmod{337} \\
6^x + n \cdot 6^x &\equiv 0 \pmod{337} \\
6^x(1 + n) &\equiv 0 \pmod{337}
\end{aligned}
$$

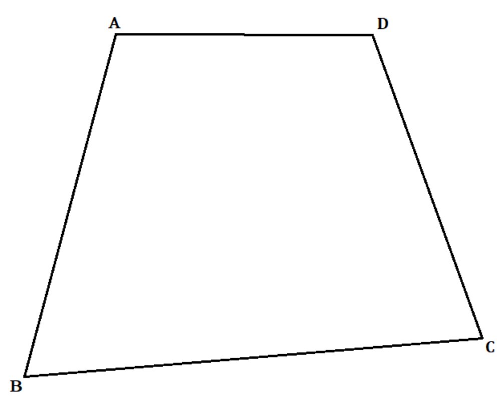
Karena 6^x tidak habis dibagi 337, maka

$$337 \mid 1 + n \tag{3}$$

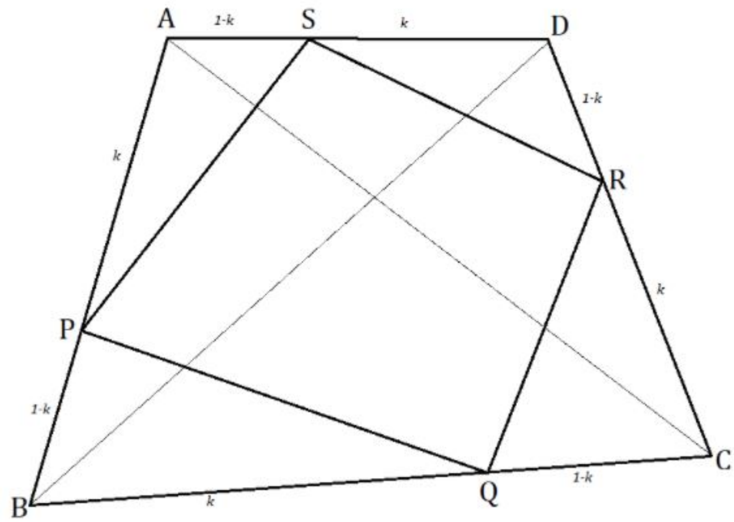
Berdasarkan persamaan (1), (2), dan (3), diperoleh $2022 \mid 1 + n$. Nilai n terkecil yang memungkinkan adalah ketika $1 + n = 2022$ yakni $n = 2021$

Banyaknya nilai n yang memungkinkan adalah: $\lfloor \frac{2022^2}{2021} \rfloor = 20$ kemungkinan.

24. Diberikan segiempat konveks $ABCD$ yang tidak memiliki dua sisi sejajar dan tidak memiliki sudut siku-siku (lihat gambar). Titik-titik P, Q, R, S berturut-turut pada sisi AB, BC, CD, AD sedemikian sehingga $\frac{AP}{AB} = \frac{BQ}{BC} = \frac{CR}{CD} = \frac{DS}{AD} = k$. Tentukan nilai k terkecil sehingga luas $PQRS$ adalah 82% dari luas $ABCD$. (Segiempat konveks adalah segiempat yang semua sudutnya kurang dari 180°.)



Jawaban: 0.1



Misalkan $[ABC]$ menyatakan luas daerah segitiga ABC.
Dengan konsep perbanding luas, diperoleh

$$
\begin{aligned}
[APS] &= \frac{AS}{AD}\cdot[APD] = \frac{AS}{AD}\cdot\frac{AP}{AB}\cdot[ABD] = (1-k)(k)\cdot[ABD] \\
[BPQ] &= \frac{BP}{AB}\cdot[BAQ] = \frac{BP}{AB}\cdot\frac{BQ}{BC}\cdot[BAC] = (1-k)(k)\cdot[BAC] \\
[CQR] &= \frac{CQ}{BC}\cdot\frac{CR}{CD}\cdot[CBD] = (1-k)(k)\cdot[BCD] \\
[DRS] &= \frac{DR}{CD}\cdot\frac{DS}{AD}\cdot[DCA] = (1-k)(k)\cdot[DCA]
\end{aligned}
$$

Jumlahkan keempat persamaan tersebut, diperoleh

$$
\begin{aligned}
[APS]+[BPQ]+[CQR]+[DRS] &= (1-k)(k)\cdot([ABD]+[BCD]+[BAC]+[BCD]) \\
[ABCD]-[PQRS] &= (1-k)(k)\cdot 2\cdot[ABCD] \\
1-\frac{[PQRS]}{[ABCD]} &= 2\cdot(1-k)(k) \\
100\% - 82\% &= 2\cdot(1-k)(k) \\
18\% &= 2\cdot(1-k)(k) \\
9\% &= (1-k)(k) \\
\frac{9}{100} &= k-k^2 \\
k^2-k &= -\frac{9}{100} \\
k^2-k+\frac{1}{4} &= \frac{1}{4}-\frac{9}{100} \\
\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{16}{100}
\end{aligned}
$$

$$k - \frac{1}{2} = \pm\frac{2}{5}$$
$$k = \frac{1}{2} \pm \frac{2}{5}$$

Nilai k terkecil adalah $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} = 0.1$.

25. Banyaknya bilangan yang tidak lebih dari 2022, bersisa 3 jika dibagi dengan 4, 5, dan 6, serta bersisa 2 jika dibagi dengan 7, 8, atau 11 adalah ....

    (Keterangan: soal dianulir karena terdapat keterangan yang kurang, yakni banyaknya bilangan **bulat positif** yang tidak lebih dari 2022)

    Jawaban: 8

    Misalkan n adalah bilangan yang memenuhi kriteria pada soal. Diketahui

    $$n \equiv 3 \pmod 4$$
    $$n \equiv 3 \pmod 5$$
    $$n \equiv 3 \pmod 6$$

    Akibatnya, haruslah $n \equiv 3 \pmod{KPK(4,5,6)} \equiv 3 \pmod{60}$. Oleh karena itu, $n = 60k + 3$ untuk suatu bilangan bulat k.

    Kemudian, diketahui $n \equiv 2 \pmod 7$ atau $n \equiv 2 \pmod 8$ atau $n \equiv 2 \pmod{11}$. Namun, karena $n \equiv 3 \pmod 4$, maka tidak mungkin $n \equiv 2 \pmod 8 \equiv 2 \pmod 4$. Akibatnya, $n \equiv 2 \pmod 7$ atau $n \equiv 2 \pmod{11}$.

    Kasus 1.

    $$n \equiv 2 \pmod 7$$
    $$60k + 3 \equiv 2 \pmod 7$$
    $$4k + 1 \equiv 0 \pmod 7$$

    Nilai k positif terkecil yang memenuhi adalah 5 dengan $n = 303$. Akibatnya, $n \equiv 303 \pmod{KPK(60,7)} \equiv 303 \pmod{420}$. Diperoleh $n - 303$ merupakan kelipatan 420.
    Karena $n \leq 2022 \implies n - 303 \leq 1719$, maka banyak n yang memenuhi adalah $\lfloor \frac{1719}{420} \rfloor + 1 = 5$.
    Kasus 2.

    $$n \equiv 2 \pmod{11}$$
    $$60k + 3 \equiv 2 \pmod{11}$$
    $$5k + 1 \equiv 2 \pmod{11}$$

    Nilai k positif terkecil yang memenuhi adalah 2 dengan $n = 123$. Akibatnya $n \equiv 123 \pmod{KPK(60,11)} \equiv 123 \pmod{660}$. Diperoleh $n - 123$ merupakan kelipatan 660.

Karena $n \leq 2022$, $n - 123 \leq 1899$, maka banyak n yang memenuhi adalah $\lfloor \frac{1899}{660} \rfloor + 1 = 3$.

Kasus 3.

$$\begin{aligned} n \equiv 2 \pmod 7 \quad &\wedge \quad n \equiv 2 \pmod{11} \\ n &\equiv 2 \pmod{77} \\ 60k + 3 &\equiv 2 \pmod{77} \\ 60k + 1 &\equiv 0 \pmod{77} \end{aligned}$$

Tidak ada bilangan yang tidak lebih dari 2022 yang memenuhi. Banyak n yang memenuhi adalah 0.

Berdasarkan prinsip eksklusi-inklusi, total n yang memenuhi adalah $5 + 3 - 0 = 8$ bilangan.