



HONG KONG INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD 2018

Senior Secondary

Time allowed: 90 minutes

Question Paper

Instructions to Contestants:

1. Each contestant should have ONE Question-Answer Book which CANNOT be taken away.
2. There are 5 exam areas and 5 questions in each exam area. There are a total of 25 questions in this Question-Answer Book. Each carries 4 marks. Total score is 100 marks. No points are deducted for incorrect answers.
3. All answers should be written on ANSWER SHEET.
4. NO calculators can be used during the contest.
5. All figures in the paper are not necessarily drawn to scale.
6. This Question-Answer Book will be collected at the end of the contest.

THIS Question-Answer Book CANNOT BE TAKEN AWAY.

DO NOT turn over this Question-Answer Book without approval of the examiner.
Otherwise, contestant may be DISQUALIFIED.

Open-Ended Questions (1st ~25th) (4 points for correct answer, no penalty point for wrong answer)

Logical Thinking

1. Given A , B and C are three non-zero digits and the 3-digit numbers formed by these three digits have the following properties:

1. \overline{ACB} is divisible by 9;
2. \overline{BCB} is a cubic number.

Find the 3-digit number \overline{AAB} .

Diketahui A , B dan C adalah tiga angka bukan-nol dan bilangan-bilangan 3-angka yang dibentuk ketiga angka tersebut mempunyai properti sebagai berikut:

1. \overline{ACB} dapat dibagi 9;
2. \overline{BCB} adalah sebuah bilangan kubik.

Carilah nilai dari bilangan 3-angka \overline{AAB} .

2. There are n lines that are not parallel with each other on a plane. There are no 3 lines intersecting at a point. If they intersect 105 times, find n .

Terdapat garis sebanyak n yang tidak saling paralel satu dengan yang lainnya pada sebuah bidang datar. Tidak ada 3 garis yang berpotongan pada sebuah titik. Jika garis-garis tersebut berpotongan 105 kali, carilah n .

3. Andy goes north for 99 km, then goes east for 15 km, goes south for 78 km and goes west for 87 km. How far is he now from the original position?

Andy pergi ke Utara sejauh 99 km, kemudian pergi ke Timur sejauh 15 km, ke Selatan 78 km dan ke Barat sejauh 87 km. Berapa jauh dia sekarang dari posisi awalnya?

4. 1st September, 2018 is Saturday. Which day of the week is 21st September, 2078?

1 September 2018 adalah hari Sabtu. Hari apakah 21 September 2078?

5. There are 15 pieces of white chopsticks, 16 pieces of yellow chopsticks and 12 pieces of brown chopsticks mixed together. Close your eyes. If you want to get 1 pair of chopsticks that are not white and 1 pair of chopsticks that are not yellow, at least how many piece(s) of chopstick(s) is / are needed to be taken?

Ada 15 batang sumpit putih, 16 batang sumpit kuning, dan 12 batang sumpit coklat, dicampur bersamaan. Dengan menutup mata, jika kamu ingin mendapatkan 1 pasang sumpit yang bukan warna putih dan 1 pasang sumpit yang bukan warna kuning, berapa batang sumpit sekurang-sekurangnya yang harus diambil?

All answers should be written on the ANSWER SHEET.

Algebra

6. Calculate $C_1^8 + 9C_2^8 + 9^2C_3^8 + \dots + 9^6C_7^8 + 9^7C_8^8$.

Hitunglah $C_1^8 + 9C_2^8 + 9^2C_3^8 + \dots + 9^6C_7^8 + 9^7C_8^8$.

7. Find the coefficient of x in the expansion of $(x + \frac{1}{x})^4(x - \frac{1}{x})^5$.

Carilah koefisien dari x dalam pengembangan dari $(x + \frac{1}{x})^4(x - \frac{1}{x})^5$.

8. Calculate $\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots}}}$.

Hitunglah $\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots}}}$.

9. If a is an integer, find the smallest value of a such that $(a + 2)x^2 + ax - 7 = 0$ has no real roots.

Jika a adalah sebuah bilangan bulat, carilah nilai terkecil dari a sehingga $(a + 2)x^2 + ax - 7 = 0$ tidak mempunyai akar riil.

10. Factorise $6x^4 - x^3 - 14x^2 - x + 6$.

Faktorisasikan $6x^4 - x^3 - 14x^2 - x + 6$.

Number Theory

11. Find the smallest positive integral solution of congruence equations $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{5} \\ 5x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$

Carilah jawaban bulat positif terkecil dari persamaan kongruensi $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{5} \\ 5x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$

All answers should be written on the ANSWER SHEET.

12. Now is June. Which month will it be after 7^{38} months?

Sekarang adalah bulan Juni. Bulan apakah 7^{38} bulan dari sekarang?

13. How many positive integer(s) x is / are there so that $\sqrt{x^2 - 22x + 221}$ is an integer?

Berapakah banyak bilangan bulat positif x dimana $\sqrt{x^2 - 22x + 221}$ juga bilangan bulat?

14. If $\frac{2018!}{20^n}$ is a positive integer, find the maximum integral value of n .

Jika $\frac{2018!}{20^n}$ adalah sebuah bilangan bulat positif, carilah nilai bulat maksimum dari n .

15. What is the smallest integral value n that satisfies the inequality $n^{210} \geq 11^{280}$?

Carilah nilai bulat terkecil yang memenuhi pertidaksamaan $n^{210} \geq 11^{280}$?

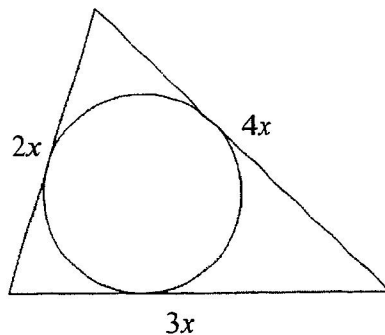
Geometry

16. Find the area enclosed by the x -axis and the straight lines $4x - 3y = 1$ and $y = -\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$.

Carilah luas wilayah yang dibentuk oleh sumbu- x dan garis-garis lurus $4x - 3y = 1$ dan $y = -\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$.

17. A triangle in the figure below has sides with lengths $2x$, $3x$ and $4x$. If the radius of inscribed circle is r , find $\frac{x}{r}$.

Sebuah segitiga pada gambar berikut memiliki sisi-sisi dengan panjang $2x$, $3x$ dan $4x$. Jika panjang jari-jari lingkaran adalah r , carilah $\frac{x}{r}$.



18. In $\triangle ABC$, $BC = 10$, $AB = 13$, $\angle ACB = 45^\circ$. Find the area of triangle ABC .
Pada $\triangle ABC$, $BC = 10$, $AB = 13$, $\angle ACB = 45^\circ$. Carilah luas dari segitiga ABC .

19. Given that $\sin x = \sqrt{3} \cos x$. Find the value of $\left| \frac{\tan x}{\cos x} \right|$.

Diketahui bahwa $\sin x = \sqrt{3} \cos x$. Carilah nilai dari $\left| \frac{\tan x}{\cos x} \right|$.

20. There is a container whose length is 18 cm, width is 15 cm and height is 12 cm. The depth of the water level inside is 7 cm now. Now a cube of 9 cm side length is put in the container. How many cm will the water level raise?

Ada sebuah wadah berukuran panjang 18 cm, lebar 15 cm dan tinggi 12 cm. Kedalaman air di dalamnya sekarang 7 cm. Lalu diletakkan sebuah kotak kubus berukuran panjang sisi 9 cm ke dalam wadah itu. Berapa cm airnya akan naik?

All answers should be written on the ANSWER SHEET.

Combinatorics

21. There are 6 pairs of couples. If we pick 4 people from them, how many way(s) is/are there to include exactly 1 pair of couple among the 4 people?
Ada 6 pasang kekasih. Jika kita memilih 4 orang dari mereka, berapa banyak cara yang ada untuk menyertakan tepat 1 pasangan di antara 4 orang tadi?
22. Peter, Amy and John got 15 books altogether. How many different combination(s) of number-of-books-each-of-them-has is/are there if each of them at least got a book?
Peter, Amy dan John mempunyai 15 buku secara keseluruhan. Berapa banyak kombinasi berbeda yang ada dari jumlah buku yang masing-masing mereka punyai jika masing-masing mereka setidaknya mempunyai sebuah buku?
23. A fair 6-face die is thrown 3 times. Find the probability that the sum of numbers obtained is not a multiple of 3.
Sebuah dadu bersisi 6 dilempar 3 kali. Carilah peluang bahwa jumlah dari bilangan-bilangan yang diperoleh bukan kelipatan 3.
24. There are 5 identical Mathematics books, 3 identical English books and 3 identical Chinese books. How many different arrangement(s) is/are there?
Ada 5 buku Matematika identik, 3 buku Bahasa Inggris identik dan 3 buku Bahasa Mandarin identik, berapa banyak cara penyusunan yang berbeda dari buku-buku tersebut?
25. Find the number of positive integral solution(s) of linear equations $3x + 4y = 228$.
Carilah jumlah dari jawaban bulat positif dari persamaan linear $3x + 4y = 228$.

~ End of Paper ~