Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan Desember 2018

28–31 Desember 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

22. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *injektif* atau *satu-satu* bila untuk setiap $a, b \in X$ yang memenuhi $f(a) = f(b)$, dipunyai $a = b$. Dengan kata lain, tidak ada $a, b \in X$ dengan $a \neq b$ yang memenuhi $f(a) = f(b)$.

23. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *surjektif* bila untuk setiap $y \in Y$, ada $x \in X$ yang memenuhi $f(x) = y$. Dengan kata lain, range dari fungsi f adalah Y.

24. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *bijektif* bila fungsi tersebut injektif dan surjektif. Dengan kata lain, terdapat fungsi $g : Y \to X$ yang memenuhi $g(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in X$, dan $f(g(y)) = y$ untuk setiap $y \in Y$. (Fungsi g ini disebut *invers* dari fungsi f.)

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Diketahui x dan y keduanya adalah bilangan genap positif. Tentukan nilai minimum dari $x + y + |x - y|$.

2. Tentukan banyaknya cara menyusun semua huruf vokal pada satu baris sehingga huruf A tidak berada di sebelah huruf U.

3. Tentukan bilangan asli n dua digit terbesar sehingga $n^2 - 1$ merupakan perkalian tiga buah prima berbeda.

4. Persegi A dan B diletakkan di bidang, sehingga luas daerah yang berada di dalam persegi A dan di dalam persegi B (sebutlah daerah C) adalah seperduapuluh luas persegi A dan seperdelapanbelas persegi B. Misal perbandingan luas daerah yang berada di dalam persegi A namun tidak berada di daerah C dan luas daerah yang berada di dalam persegi B namun tidak berada di daerah C adalah $p : q$, dengan p dan q merupakan dua bilangan asli dengan $\text{FPB}(p, q) = 1$. Tentukan nilai pq.

5. Enti membagikan $(2x^2 - 11x + 23)$ kue Natal kepada $(x - 3)$ orang sama rata sehingga tidak bersisa satu kue pun. Bila x adalah bilangan bulat positif, tentukan jumlah semua kemungkinan banyaknya kue yang diterima setiap orang.

6. Diberikan bilangan real a yang memenuhi persamaan

$$a^{2019} - 12a + 11 = 0$$

   Tentukan jumlah semua nilai yang mungkin dari

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{2018}$$

7. Luas segitiga ABC adalah 144. Titik-titik $B_1, B_2, \ldots, B_{11}$ dipilih di sisi AC dengan letak yang berurutan sehingga kesebelas titik ini membagi segmen AC menjadi 12 segmen yang sama panjang. Titik-titik $C_1, C_2, \ldots, C_{11}$ dengan letak yang berurutan dipilih di sisi AB sehingga kesebelas titik ini membagi segmen AB menjadi 12 segmen yang sama panjang. (Titik B_1 lebih dekat ke titik A dibanding titik C, dan titik C_1 lebih dekat ke titik A dibanding titik B).

   i dan j dipilih secara acak dari $\{1, 2, \ldots, 11\}$, dengan pengembalian. Misal peluang luas segitiga AB_iC_j kurang dari setengah luas segitiga ABC adalah $\frac{p}{q}$, dengan p dan q dua bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai $p + q$.

8. KTO mengundang sembilan tim untuk saling bertanding dalam sebuah kontes. Sebelum bertanding, semua tim harus mendaftarkan diri agar mendapatkan nomor urut, dimana tidak ada dua tim yang mendaftarkan diri secara bersamaan dan tidak ada dua tim yang mendapatkan nomor urut sama. Pihak KTO memiliki ketentuan unik. Untuk pendaftar pertama, kedua, dan ketiga, mereka mendapatkan nomor 1, 3, atau 8. Untuk pendaftar keempat, kelima, dan keenam, mereka mendapatkan nomor 5, 7, atau 9. Untuk pendaftar ketujuh, kedelapan, dan kesembilan, mereka

mendapatkan nomor 2, 4, atau 6. Selain itu, untuk pendaftar ke-i, ia tidak bisa mendapatkan nomor i, untuk $i = 1, 2, \ldots, 9$. Jika urutan pendaftar telah ditentukan, tentukan banyaknya konfigurasi nomor urut untuk sembilan tim tersebut.

9. Hitunglah banyaknya bilangan asli n yang kurang dari 2019 sehingga $(2^{30}-1)(2^n-1)$ habis membagi $2^{30n} - 1$.

10. Misalkan $ABCDEFG$ adalah segitujuh reguler dengan panjang sisi 5. Tentukan nilai dari $\left\lfloor \frac{272}{CF} + \frac{272}{FD} \right\rfloor$.

11. Diberikan barisan bilangan real positif $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dimana $a_0 = a_1 = 1$ dan

$$\frac{1}{a_n} = \sqrt{\frac{n^2}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_{n+1}a_{n-1}}} + \frac{n}{a_{n+1}}$$

untuk $n \geq 1$. Jika didefinisikan

$$R = \prod_{i=1}^{1009} \left(\frac{a_{2i+1}}{a_{2i}} - 1 \right) \text{ dan } Y = \prod_{j=1}^{1009} \left(\frac{a_{2j}}{a_{2j-1}} - 1 \right),$$

tentukan nilai dari $\frac{R}{Y}$.

12. Diketahui sebelas bilangan asli $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ yang memenuhi sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} abcde &= 10^{22} \\ efgh &= 6^{23} \\ hij &= 15^{24} \\ jk &= 35^{25} \end{cases}.$$

Jika S menyatakan banyak tupel $(a, b, d, e, f, g, h, i, j, k)$ yang memenuhi, dan

$$S = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$$

dimana p_i merupakan bilangan prima berbeda dan e_i merupakan bilangan asli untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, nilai dari

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i + e_i)$$

adalah...

13. Di dunia paralel hanya terdapat tiga jenis sel, yaitu sel Valentio, sel Russell, sel atom Audrey. Sel Valentio memiliki peluang $\frac{2}{7}$ untuk berubah menjadi sel Russell dan $\frac{1}{7}$ untuk berubah menjadi sel Audrey. Sel Audrey memiliki peluang $\frac{1}{4}$ untuk berubah menjadi sel Russell dan $\frac{1}{4}$ juga untuk berubah menjadi sel Valentio. Terakhir, sel Russell memiliki peluang $\frac{1}{6}$ untuk berubah menjadi sel Audrey dan $\frac{1}{2}$ untuk berubah menjadi sel Valentio. Diketahui mula-mula hanya terdapat 1 sel Valentio dan sel lainnya berjumlah 0. Asumsikan perbandingan kelimpahan sel Audrey, sel Russell, dan sel Valentio setelelah cukup lama nilainya konvergen ke $a : r : v$, dimana a, r, v adalah bilangan bulat positif dengan $FPB(a, r, v) = 2$. Tentukan nilai dari $3a + 5r - 2v$.(Konvergen artinya menuju suatu nilai yang konstan).

14. Cari jumlah dari semua prima p sehingga terdapat $x, y, n \in \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$p^n = x^3 + y^3.$$

15. Diberikan $\triangle ABC$ dengan $BC = 15$ dan $AB = AC + 9$. Misalkan titik D dan E terletak pada segmen BC dengan urutan B, D, E, C sedemikian sehingga $BD = 3$ dan $DE = 9$. Selain itu, misalkan titik F terletak pada segmen AC sedemikian sehingga $CE = CF$. Selanjutnya, misalkan titik G terletak pada segmen AD sedemikian sehingga $DG = 3\sqrt{13}$ dan $\angle EFG = 90^\circ$. Jika $DF = x$, tentukan nilai dari x^2.

16. Misalkan k merupakan konstanta real. Agar

$$\frac{a}{1 + 9bc + k(b-c)^2} + \frac{b}{1 + 9ac + k(c-a)^2} + \frac{c}{1 + 9ab + k(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

berlaku untuk semua bilangan real non-negatif a, b, c yang memenuhi $a + b + c = 1$, tentukan nilai maksimum dari $\lceil 100k \rceil$.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Di segitiga ABC, terdapat titik H di garis AB sehingga $CH \perp AB$. Misalkan M, N masing-masing adalah projeksi H terhadap AC dan BC.

   (a) Buktikan bahwa $CH^2 = CM \times CA = CN \times CB$. (Petunjuk: Buktikan bahwa segitiga CMH sebangun segitiga CHA.)

   (b) Buktikan bahwa CMN sebangun CAB.

   (c) Buktikan bahwa $ABNM$ segi empat tali busur.

   (d) Buktikan bahwa $\angle ANH = \angle BMH$.

2. Apakah ada bilangan bulat a dan b sedemikian sehingga $a^2 + 2b^2 - 2ab - 4b + 10$ habis dibagi oleh 9? Jika ada, berikan setidaknya satu contoh. Jika tidak ada, sertakan alasan.

3. Definisikan sebuah himpunan $\mathbb{X}$ sebagai *imba* apabila ia memiliki tepat 2019 bilangan asli berurutan. Misalkan $\mathbb{Y}$ adalah himpunan semua himpunan *imba*. Apakah terdapat himpunan $\mathbb{Z}$ anggota himpunan dari $\mathbb{Y}$ yang memuat tepat 29 bilangan prima? Buktikan pernyataan Anda!

4. Diberikan sebuah barisan rill $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang memenuhi

$$x_{n+2}^2 + x_{n+1}^4 - 4x_n^4 + 16x_{n+1} - 2x_{n+3} + 16 = 0$$

   untuk setiap nilai $n \geq 1$. Misalkan x_1, x_2, x_3 merupakan akar - akar dari persamaan kubik $x^3 - 3x + 1 = 0$, dimana $x_3 < x_2 < x_1$. Selain itu, definisikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sehingga

$$f(n) = (x_{n+2018}^2 + x_{n+2017}^2) - \frac{1}{3}\left(x_{n+2018}^3 + x_{n+2019}^3\right).$$

   Tentukanlah nilai dari

$$\sum_{n=1}^{2018} f(n).$$