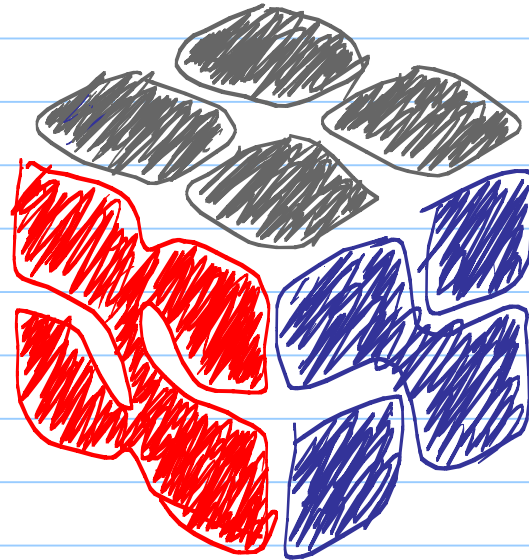
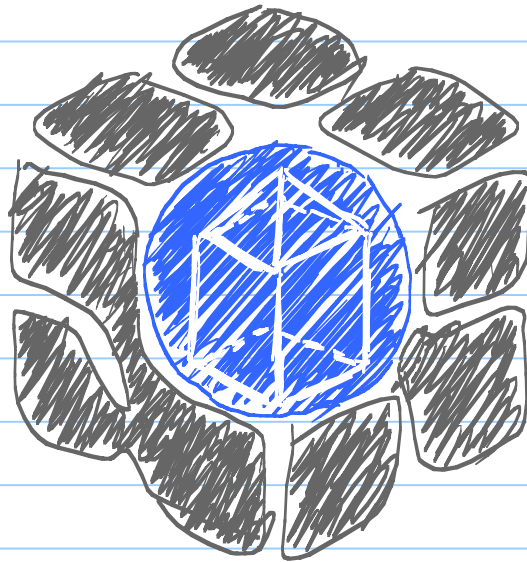


Pembahasan OSK Matematika SMA 2019



Oleh :
Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

Pembahasan OSK Matematika SMA 2019



Oleh :

Pak Anang

<http://pak-anang.blogspot.com>

Kemampuan Dasar

Pada bagian ini setiap jawaban yang benar bernilai 2 poin dan setiap jawaban yang salah atau kosong bernilai nol.

Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

1. Pak Budi memiliki sawah berbentuk huruf L. Jika diketahui bahwa sawahnya Pak Budi hanya memiliki sisi yang panjangnya 5 meter dan 10 meter dan semua sudut sawahnya siku-siku, luas sawah pak Budi adalah ... meter persegi.

2. Jika sebuah jam sekarang menunjukkan pukul 13:00 maka 2019 menit yang lalu jam tersebut menunjukkan pukul ...

3. Kedua akar persamaan kuadrat $x^2 - 111x + k = 0$ adalah bilangan prima. Nilai k adalah ...

4. Ani dan Banu bermain dadu enam sisi. Jika dadu yang keluar bernilai genap, maka Ani mendapatkan skor 1 sedangkan jika dadu yang keluar bernilai ganjil, maka Banu yang mendapatkan skor 1. Pemenang dari permainan ini adalah orang pertama yang mendapatkan skor total 5. Setelah dilakukan pelemparan dadu sebanyak 5 kali, Ani mendapat skor 4 dan Banu mendapatkan skor 1. Peluang Ani memenangkan permainan ini adalah ...

5. Diketahui $a + 2b = 1$, $b + 2c = 2$, dan $b \neq 0$. Jika $a + nb + 2018c = 2019$ maka nilai n adalah ...

6. Misalkan $a = 2\sqrt{2} - \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$ dan $b = 2\sqrt{2} + \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$. Jika $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x + y\sqrt{2}$ dengan x, y bulat, maka nilai $x + y$ adalah ...

7. Diberikan suatu trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD . Misalkan titik P dan Q berturut-turut pada AD dan BC sedemikian sehingga PQ sejajar AB dan membagi trapesium menjadi dua bagian yang sama luasnya. Jika $AB = 17$ dan $DC = 7$ maka nilai PQ adalah ...

8. Tujuh buah bendera dengan motif berbeda akan dipasang pada 4 tiang bendera. Pada masing-masing tiang bendera bisa dipasang sebanyak nol, satu, atau lebih dari satu bendera. Banyaknya cara memasang bendera tersebut adalah ...

Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

9. Misalkan n adalah bilangan asli terkecil yang semua digitnya sama dan sedikitnya terdiri dari 2019 digit. Jika n habis dibagi 126, maka hasil penjumlahan semua digit dari n adalah ...

10. Untuk sebarang bilangan real x , simbol $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar daripada x , sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil dibanding x . Interval $[a, b)$ adalah himpunan semua bilangan real x yang memenuhi

$$\lceil 2x \rceil^2 = \lceil x \rceil + 7.$$

Nilai $a \cdot b$ adalah ...

Kemampuan Lanjut

Pada bagian ini setiap jawaban yang benar bernilai 4 poin, jawaban kosong bernilai nol dan jawaban **salah** bernilai -1 (minus satu)

Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

1. Sisa pembagian 1111^{2019} oleh 11111 adalah ...

Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

2. Diberikan segitiga ABC dengan D pertengahan AC , E pertengahan BD , dan H merupakan pencerminan dari A terhadap E . Jika F perpotongan antara AH dengan BC , maka nilai $\frac{AF}{FH}$ sama dengan ...

3. Banyaknya bilangan delapan digit yang setiap digitnya adalah 1 atau 2 tetapi tidak memuat tiga digit 1 berurutan adalah ...

4. Misalkan $f(x) = 1 + \frac{90}{x}$. Nilai terbesar x yang memenuhi

$$\underbrace{f(f(\cdots(f(x))\cdots))}_{2019 \text{ kali}} = x.$$

adalah ...

Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

5. Misalkan $ABCD$ adalah persegi dengan panjang sisi 4. Lingkaran-lingkaran x, y, z dengan jari-jari sama mempunyai pusat di dalam persegi sedemikian sehingga lingkaran x menyinggung sisi AB dan AD , lingkaran y menyinggung sisi AB dan BC , serta lingkaran z menyinggung sisi DC , lingkaran x , dan lingkaran y . Diketahui jari-jari lingkaran x dapat dinyatakan dengan $n + \sqrt{m}$ dengan m dan n bilangan bulat positif. Nilai m adalah ...

6. Semua bilangan bulat n sehingga $n^4 + 16n^3 + 71n^2 + 56n$ merupakan bilangan kuadrat tak nol adalah...

7. Diberikan jajar genjang $ABCD$, dengan $\angle ABC = 105^\circ$. Titik M berada di dalam jajar genjang sehingga segitiga BMC sama sisi dan $\angle CMD = 135^\circ$. Jika K pertengahan sisi AB , maka besarnya $\angle BKC$ sama dengan ... derajat.

8. Bilangan real terbesar M sehingga untuk setiap x positif berlaku

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+11) \geq Mx$$

adalah ...

Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

9. Banyaknya tripel bilangan bulat (m, n, p) dengan p prima yang memenuhi

$$p^2 n^2 - 3mn = 21p - m^2$$

adalah ...

Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

10. Suatu lomba matematika diikuti oleh 2019 peserta. Untuk setiap dua peserta lomba, keduanya saling mengenal atau saling tidak mengenal. Diketahui bahwa tidak ada tiga orang peserta lomba yang ketiganya saling mengenal satu sama lain. Misalkan m adalah bilangan asli sehingga :

- Masing-masing peserta mengenal paling banyak m peserta lainnya.
- Untuk setiap bilangan asli k dengan $1 \leq k \leq m$, minimal terdapat satu orang peserta yang mengenal tepat k peserta lainnya.

Nilai m terbesar yang mungkin adalah ...

Pembahasan

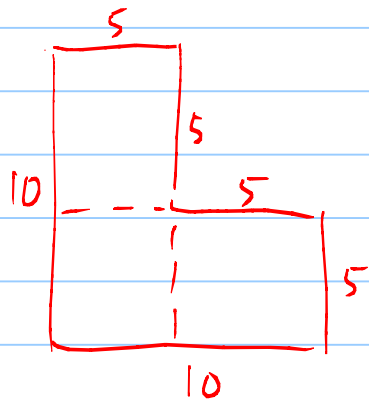
Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

Kemampuan Dasar

Pada bagian ini setiap jawaban yang benar bernilai 2 poin dan setiap jawaban yang salah atau kosong bernilai nol.

Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

1. Pak Budi memiliki sawah berbentuk huruf L. Jika diketahui bahwa sawahnya Pak Budi hanya memiliki sisi yang panjangnya 5 meter dan 10 meter dan semua sudut sawahnya siku-siku, luas sawah pak Budi adalah ... meter persegi.



$$\begin{aligned} L &= 3 \times L \text{ persegi} \\ &= 3 \times 5 \times 5 \\ &= 3 \times 25 \\ &= 75 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

2. Jika sebuah jam sekarang menunjukkan pukul 13:00 maka 2019 menit yang lalu jam tersebut menunjukkan pukul ...

$$1 \text{ jam} = 60 \text{ menit}$$

$$1 \text{ hari} = 24 \text{ jam} = 1.440 \text{ menit}$$

$$\begin{aligned} 2019 \text{ menit} &= 1.440 \text{ menit} + 579 \text{ menit} \\ &= 1 \text{ hari} + 540 \text{ menit} + 39 \text{ menit} \\ &= 1 \text{ hari} + 9 \text{ jam} + 39 \text{ menit} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \cancel{1 \text{ hari}} & 13 \text{ jam} & 00 \text{ menit} \\ \cancel{1 \text{ hari}} & 9 \text{ jam} & 39 \text{ menit} \\ \hline & & \Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \cancel{1 \text{ hari}} & 12 \text{ jam} & 60 \text{ menit} \\ \cancel{1 \text{ hari}} & 9 \text{ jam} & 39 \text{ menit} \\ \hline & 3 \text{ jam} & 21 \text{ menit} \end{array}$$

Jadi, 2019 menit sebelum jam 13:00 adalah jam 03:21 //

3. Kedua akar persamaan kuadrat $x^2 - 111x + k = 0$ adalah bilangan prima. Nilai k adalah ...

$$x^2 - 111x + k = 0 \quad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 111$$

$$x_1 \cdot x_2 = k$$

dari $x_1 + x_2 = 111$ dg x_1 dan x_2 bilangan prima, bilangan ganjil hanya diperoleh dari penjumlahan bilangan berbeda paritas.

Maka, salah satu x_1 atau x_2 adalah bilangan prima genap yaitu 2.

Untuk $x_1 = 2$, maka $x_2 = 109$. jadi $k = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 109 = 218$

4. Ani dan Banu bermain dadu enam sisi. Jika dadu yang keluar bernilai genap, maka Ani mendapatkan skor 1 sedangkan jika dadu yang keluar bernilai ganjil, maka Banu yang mendapatkan skor 1. Pemenang dari permainan ini adalah orang pertama yang mendapatkan skor total 5. Setelah dilakukan pelemparan dadu sebanyak 5 kali, Ani mendapat skor 4 dan Banu mendapatkan skor 1. Peluang Ani memenangkan permainan ini adalah ...

$$p = P(\text{Ani}) = P(\sum x = \text{genap}) = \frac{1}{2}$$

$$q = P(\text{Banu}) = P(\sum x = \text{ganjil}) = \frac{1}{2}$$

Kemenangan akan diperoleh Ani jika ada minimal satu dadu pada pelemparan ke-6 hingga pelemparan ke-9.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - b(4, 0, \frac{1}{2}) \\ &= 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= 1 - \frac{1}{16} \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

5. Diketahui $a + 2b = 1$, $b + 2c = 2$, dan $b \neq 0$. Jika $a + nb + 2018c = 2019$ maka nilai n adalah ...

$$\begin{array}{rcl} a + 2b & = & 1 \\ b + 2c & = & 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \times 1 \\ \times 1009 \end{array} \right| \quad \begin{array}{rcl} a + 2b & = & 1 \\ \hline 1009b + 2018c & = & 2018 \\ \hline a + 1011b + 2018c & = & 2019 \end{array}$$

jadi, $n = \underline{\underline{1011}}$.

6. Misalkan $a = 2\sqrt{2} - \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$ dan $b = 2\sqrt{2} + \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$. Jika $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x + y\sqrt{2}$ dengan x, y bulat, maka nilai $x + y$ adalah ...

Misal $p = 2\sqrt{2}$
 $q = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} a &= p - q \\ b &= p + q \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} a + b &= 2p = 4\sqrt{2} \\ ab &= p^2 - q^2 = 4\sqrt{2} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Sehingga, } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab} - 2$$

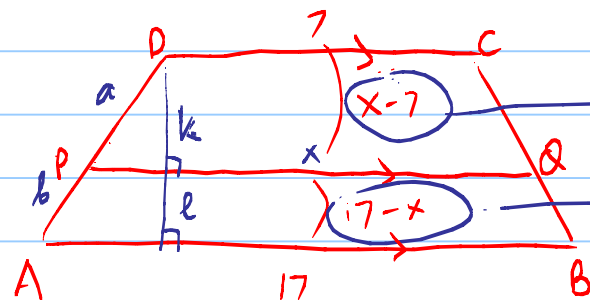
Maka $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x + y\sqrt{2}$

$$\frac{(a+b)^2}{ab} - 2 = x + y\sqrt{2}$$

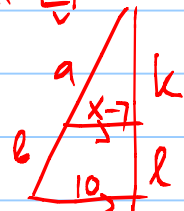
$$\frac{(4\sqrt{2})^2}{4\sqrt{2}} - 2 = x + y\sqrt{2}$$

$$-2 + 4\sqrt{2} = x + y\sqrt{2} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 4 \end{aligned} \right\} x + y = -2 + 4 = 2 //$$

7. Diberikan suatu trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD . Misalkan titik P dan Q berturut-turut pada AD dan BC sedemikian sehingga PQ sejajar AB dan membagi trapesium menjadi dua bagian yang sama luasnya. Jika $AB = 17$ dan $DC = 7$ maka nilai PQ adalah ...



Bukti



$$\frac{a}{a+b} = \frac{x-7}{10}$$

$$10a = (x-7)a + (x-7)b$$

$$(17-x)a = x-7b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x-7}{17-x}$$

$$[PQCD] = [ABQP]$$

$$\left(\frac{7+x}{2}\right)k = \left(\frac{x+17}{2}\right)l$$

$$\frac{k}{l} = \frac{x+17}{x+7}$$

Padahal,

$$\frac{a}{b} = \frac{x-7}{17-x}$$

karena $\frac{a}{b} = \frac{k}{l}$

Sehingga

$$\frac{x-7}{17-x} = \frac{x+17}{x+7}$$

$$x^2 - 49 = 289 - x^2$$

$$2x^2 - 338 = 0$$

$$2(x+13)(x-13) = 0$$

$$x = -13 \quad \vee \quad x = 13$$

$$\text{Jadi } PQ = 13$$

8. Tujuh buah bendera dengan motif berbeda akan dipasang pada 4 tiang bendera. Pada masing-masing tiang bendera bisa dipasang sebanyak nol, satu, atau lebih dari satu bendera. Banyaknya cara memasang bendera tersebut adalah ...



Salah satu alternatif cara memasang bendera

Jika motif bendera sama
dg kombinasi dg perulangan :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \text{cacah}$

maka ada $\binom{10}{3}$ cara.

Padahal motif bendera berbeda

sehingga ada $7! \cdot \binom{10}{3}$ cara

$$= 7! \cdot \frac{10!}{7! 3!}$$

$$= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$= 10 \cdot 72 \cdot 840$$

$$= 604.800 \text{ cara}$$

$$\begin{array}{r} 84 \\ 72 \\ \hline 156 \\ 588 \\ \hline 6048 \end{array} +$$

9. Misalkan n adalah bilangan asli terkecil yang semua digitnya sama dan sedikitnya terdiri dari 2019 digit. Jika n habis dibagi 126, maka hasil penjumlahan semua digit dari n adalah ...

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

```

  126
 /  \
2    63
     /  \
    3    21
         /  \
        3    7
  
```

$$126|n \Rightarrow 2|n \text{ (} n \text{ adalah genap)} \rightarrow n = \{2[\underbrace{111\dots 11}], 4[\underbrace{111\dots 11}], 6[\underbrace{111\dots 11}], 8[\underbrace{111\dots 11}]\}$$

$$\Rightarrow 9|n \text{ (} \underbrace{11111111}_{9 \text{ digit}} = 0 \pmod 9)$$

$$\Rightarrow 7|n \text{ (} \underbrace{111111}_{6 \text{ digit}} = 0 \pmod 7)$$

$$\Rightarrow 3|n \text{ (} \underbrace{111}_{3 \text{ digit}} = 0 \pmod 3)$$

Ada 4 kasus, yaitu: 3 digit

$$n = 2[\underbrace{111\dots 11}] \Rightarrow 5|n \text{ dan } 7|n \Rightarrow 18 \times \left\lceil \frac{2019}{18} \right\rceil \text{ digit} = 2.034 \text{ digit}$$

Sebanyak kelipatan KPK (5,6) = 18

$$n = 4[\underbrace{111\dots 11}] \Rightarrow 5|n \text{ dan } 7|n \Rightarrow 18 \times \left\lceil \frac{2019}{18} \right\rceil \text{ digit} = 2.034 \text{ digit}$$

Sebanyak kelipatan KPK (5,6) = 18

$$n = 6[\underbrace{111\dots 11}] \Rightarrow 3|n \text{ dan } 7|n \Rightarrow 6 \times \left\lceil \frac{2019}{6} \right\rceil \text{ digit} = 2.022 \text{ digit}$$

Sebanyak kelipatan KPK (3,6) = 6

$$n = 8[\underbrace{111\dots 11}] \Rightarrow 5|n \text{ dan } 7|n \Rightarrow 18 \times \left\lceil \frac{2019}{18} \right\rceil \text{ digit} = 2.034 \text{ digit}$$

Sebanyak kelipatan KPK (5,6) = 18

$$\underbrace{666\dots 66}_{2022 \text{ digit}} < \underbrace{222\dots 22}_{2034 \text{ digit}} < \underbrace{444\dots 44}_{2034 \text{ digit}} < \underbrace{888\dots 88}_{2034 \text{ digit}}$$



$$\Sigma \text{ digit terkecil} = 6 \times 2.022 = 12.312$$

10. Untuk sebarang bilangan real x , simbol $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar daripada x , sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil dibanding x . Interval $[a, b)$ adalah himpunan semua bilangan real x yang memenuhi

$$\lfloor 2x \rfloor^2 = \lceil x \rceil + 7.$$

Nilai $a \cdot b$ adalah ...

$$\lfloor 2x \rfloor^2 = \lceil x \rceil + 7$$

untuk x bulat $\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2x, \lceil x \rceil = x$

$$\lfloor 2x \rfloor^2 = \lceil x \rceil + 7$$

$$(2x)^2 = x + 7$$

$$4x^2 - x - 7 = 0.$$

$$D = (-1)^2 - 4(4)(-7)$$

$$D = 113 \neq \text{bil. kuadrat sempurna}$$

$$D \neq \text{kuadrat} \Rightarrow x \text{ irrasional}$$

$$x \text{ tidak bulat (TM)}$$

untuk x tidak bulat, misal $x = \lfloor x \rfloor + \delta$

$$* \text{ untuk } 0 \leq \delta < 0,5 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$$

$$\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$$

$$\lfloor 2x \rfloor^2 = \lceil x \rceil + 7$$

$$(2\lfloor x \rfloor)^2 = (\lfloor x \rfloor + 1) + 7$$

$$4\lfloor x \rfloor^2 - \lfloor x \rfloor - 8 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4(4)(-8) = 129 \neq \text{kuadrat}$$

$$D \neq \text{kuadrat} \Rightarrow \lfloor x \rfloor \text{ irrasional}$$

$$\lfloor x \rfloor \text{ tidak bulat (TM)}$$

$$* \text{ untuk } 0,5 \leq \delta < 1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$$

$$\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$$

$$\lfloor 2x \rfloor^2 = \lceil x \rceil + 7$$

$$(2\lfloor x \rfloor + 1)^2 = (\lfloor x \rfloor + 1) + 7$$

$$4\lfloor x \rfloor^2 + 3\lfloor x \rfloor - 7 = 0$$

$$D = 3^2 - 4(4)(-7) = 121 = \text{kuadrat}$$

$$D = \text{kuadrat} \Rightarrow \lfloor x \rfloor \text{ rasional}$$

$$\lfloor x \rfloor \text{ mungkin bulat } \lfloor x \rfloor = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{8} = \{-7, 1\}$$

$$\text{jadi, } x = \lfloor x \rfloor + \delta \Rightarrow 1,5 \leq x < 2$$

$$\text{Dan } a \cdot b = 1,5 \times 2 = 3 //$$

Kemampuan Lanjut

Pada bagian ini setiap jawaban yang benar bernilai 4 poin, jawaban kosong bernilai nol dan jawaban **salah** bernilai -1 (minus satu)

Pak Anang
<http://pak-anang.blogspot.com>

1. Sisa pembagian 1111^{2019} oleh 11111 adalah ...

$$10^5 = 9 \times 1111 + 1 \Rightarrow 10^5 \equiv 1 \pmod{11111}$$

$$1111^2 = (1110+1) \left(\frac{11111-1}{10} \right) \Rightarrow 1111^2 \equiv 10^3 \pmod{11111}$$
$$= 111 \times 1111 + 1000$$

$$11110 = 11111 - 1 \Rightarrow 11110 \equiv (-1) \pmod{11111}$$

$$1111^{2019} \equiv (1111^2)^{1009} \cdot 1111 \pmod{11111}$$

$$\equiv (10^3)^{1009} \cdot 1111 \pmod{11111}$$

$$\equiv (10^{15})^{201} \cdot 10^2 \cdot 1111 \pmod{11111}$$

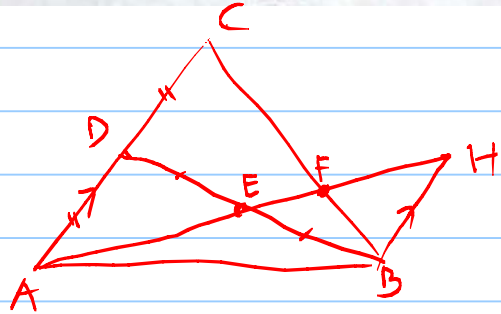
$$\equiv 10 \cdot 11110 \pmod{11111}$$

$$\equiv (-10) \pmod{11111}$$

$$\equiv 11101 \pmod{11111}$$

Jadi, sisa pembagian 1111^{2019} oleh 11111 adalah (-10) atau 11101

2. Diberikan segitiga ABC dengan D pertengahan AC , E pertengahan BD , dan H merupakan pencerminan dari A terhadap E . Jika F perpotongan antara AH dengan BC , maka nilai $\frac{AF}{FH}$ sama dengan ...



Karena $AE = EH$
 $\angle AED = \angle HEB$
 $DE = EB$ } $\triangle AED$ kongruen dengan $\triangle HEB$
 Akibatnya $AD \parallel BH$.

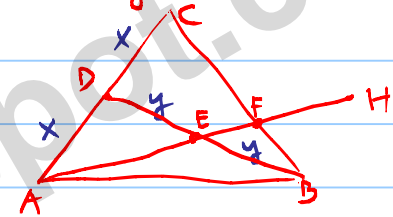
Perhatikan juga $\angle CAF = \angle BHF$
 $\angle ACF = \angle HBF$
 $\angle AFC = \angle HFC$
 $AC \neq HB$ } $\triangle ACF$ sebangun dengan $\triangle HBF$
 sehingga $\frac{AF}{FH} = \frac{FC}{FB} = \frac{AC}{HB}$

Karena $AD = HB$ dan $AC = 2AD$, maka $\frac{AC}{HB} = \frac{2AD}{HB} = \frac{2HB}{HB} = 2$.

Sehingga $\frac{AF}{FH} = \frac{AC}{HB} = 2$



Dengan dalil menelaus



$$\frac{DE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CA}{AD} = 1$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{EB}{DE} \cdot \frac{AD}{CA}$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{y}{y} \cdot \frac{x}{2x}$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{FE}{EA} \cdot \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CB}{BF} = 1$$

$$\frac{FE}{EA} = \frac{DC}{AD} \cdot \frac{BF}{CB}$$

$$\frac{FE}{EA} = \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{FE}{EA} = \frac{1}{3} \Rightarrow EA = 3FE$$

$$\frac{AF}{FH} = \frac{AE + EF}{EH - EF} = \frac{3FE + EF}{3FE - EF} = \frac{4EF}{2EF} = 2$$

3. Banyaknya bilangan delapan digit yang setiap digitnya adalah 1 atau 2 tetapi tidak memuat tiga digit 1 berurutan adalah ...

Contoh beberapa bilangan yang diperbolehkan :

22222222, 11212222, 11221122, 11211211

Banyak digit 1 yg diperbolehkan adalah antara 0 sampai 6 buah. Dengan prinsip inklusi-eksklusi dan rumus de Moivre diperoleh :

Ada 0 buah digit 1 $\Rightarrow a+b+c+d+e+f+g+h+i=0$, $0 \leq a,b,c,d,e,f,g,h,i \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{0} = 1$

Ada 1 buah digit 1 $\Rightarrow a+b+c+d+e+f+g+h=1$, $0 \leq a,b,c,d,e,f,g,h \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{1} = 8$

Ada 2 buah digit 1 $\Rightarrow a+b+c+d+e+f+g=2$, $0 \leq a,b,c,d,e,f,g \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{2} = 28$

Ada 3 buah digit 1 $\Rightarrow a+b+c+d+e+f=3$, $0 \leq a,b,c,d,e,f \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{3} - \binom{6}{1}\binom{5}{5} = 50$

Ada 4 buah digit 1 $\Rightarrow a+b+c+d+e=4$, $0 \leq a,b,c,d,e \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{4} - \binom{5}{1}\binom{5}{4} = 45$

Ada 5 buah digit 1 $\Rightarrow a+b+c+d=5$, $0 \leq a,b,c,d \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{5} - \binom{4}{1}\binom{5}{3} = 16$

Ada 6 buah digit 1 $\Rightarrow a+b+c=6$, $0 \leq a,b,c \leq 2 \Rightarrow \binom{8}{6} - \binom{3}{1}\binom{5}{2} + \binom{3}{2}\binom{2}{2} = 1$

Jadi, banyak bilangan yg dapat dibentuk = $1 + 8 + 28 + 50 + 45 + 16 + 1$
 $= 149$

3. Banyaknya bilangan delapan digit yang setiap digitnya adalah 1 atau 2 tetapi tidak memuat tiga digit 1 berurutan adalah ...

Alternatif Solusi

Dengan rekursif $f(x) = f(x-1) + f(x-2) + f(x-3)$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 1 + 1 = 2$$

$$f(3) = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$f(4) = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$f(5) = 7 + 4 + 2 = 13$$

$$f(6) = 13 + 7 + 4 = 24$$

$$f(7) = 24 + 13 + 7 = 44$$

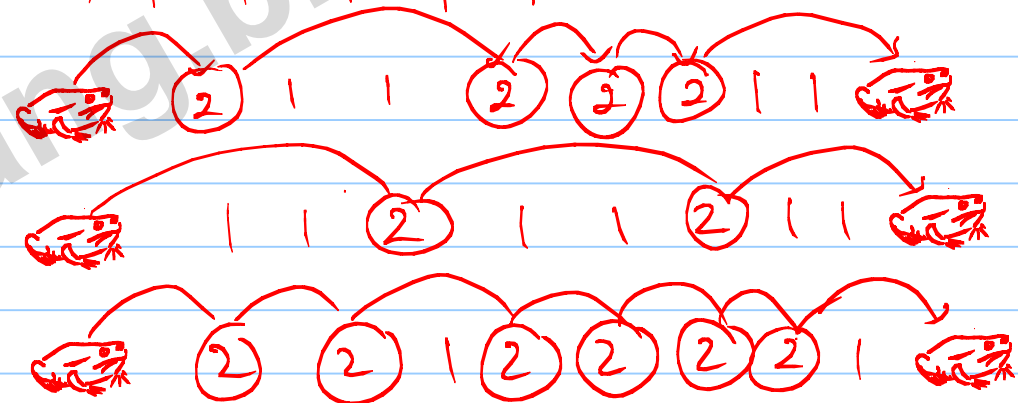
$$f(8) = 44 + 24 + 13 = 81$$

$$f(9) = 81 + 44 + 24 = 149$$



Analog dengan soal katak melompat, hanya boleh lompat 1, 2, 3 batu.

$f(0)$ $f(1)$ $f(2)$ $f(3)$ $f(4)$ $f(5)$ $f(6)$ $f(7)$ $f(8)$ $f(9)$



4. Misalkan $f(x) = 1 + \frac{90}{x}$. Nilai terbesar x yang memenuhi

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{2019 \text{ kali}} = x.$$

adalah ...

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{2019 \text{ kali}} = x$$

$$\underbrace{f(\dots(f(x))\dots)}_{2018 \text{ kali}} = f^{-1}(x)$$

\vdots

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

$$f(x) = 1 + \frac{90}{x} = \frac{x+90}{x}, \quad x \neq 0$$

$$f^{-1}(x) = \frac{90}{x-1}, \quad x \neq 1$$

$$\text{Padahal, } f(x) = f^{-1}(x)$$

$$\frac{x+90}{x} = \frac{90}{x-1}$$

$$(x+90)(x-1) = 90x$$

$$x^2 + 89x - 90 = 90x$$

$$x^2 - x - 90 = 0$$

$$(x-10)(x+9) = 0$$

$$x = 10 \vee x = -9$$

Jadi, nilai terbesar $x = 10$



$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) = x$$

$$1 + \frac{90}{x} = x$$

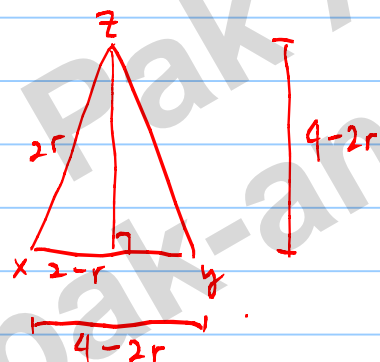
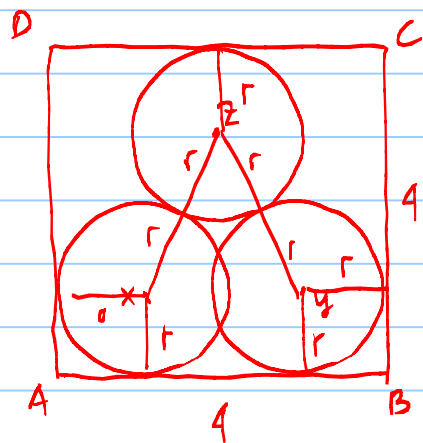
$$x^2 - x - 90 = 0$$

$$(x-10)(x+9) = 0$$

$$x = 10 \vee x = -9$$

Jadi nilai terbesar $x = 10$

5. Misalkan $ABCD$ adalah persegi dengan panjang sisi 4. Lingkaran-lingkaran x, y, z dengan jari-jari sama mempunyai pusat di dalam persegi sedemikian sehingga lingkaran x menyinggung sisi AB dan AD , lingkaran y menyinggung sisi AB dan BC , serta lingkaran z menyinggung sisi DC , lingkaran x , dan lingkaran y . Diketahui jari-jari lingkaran x dapat dinyatakan dengan $n + \sqrt{m}$ dengan m dan n bilangan bulat positif. Nilai m adalah ...



$$(4-2r)^2 + (2-r)^2 = (2r)^2$$

$$4(2-r)^2 + (2-r)^2 = 4r^2$$

$$5(2-r)^2 = 4r^2$$

$$5(4-4r+r^2) = 4r^2$$

$$r^2 - 20r + 20 = 0$$

$$r = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 80}}{2}$$

$$r = \frac{20 \pm 2\sqrt{80}}{2}$$

$$r = 10 \pm \sqrt{80}$$

$$r = 10 + \sqrt{80} > 4 \text{ (TM)}$$

$$r = 10 - \sqrt{80} \Rightarrow \begin{cases} m = 80 \\ n = 10 \end{cases} \Rightarrow m = 80$$

6. Semua bilangan bulat n sehingga $n^4 + 16n^3 + 71n^2 + 56n$ merupakan bilangan kuadrat tak nol adalah...

$$\begin{aligned} n^4 + 16n^3 + 71n^2 + 56n &= n(n+1)(n+7)(n+8) \\ &= (n^2 + 8n)(n^2 + 8n + 7) \end{aligned}$$

misal $n^2 + 8n = p$ maka $p(p+7) = \text{bilangan kuadrat}$

jadi $p = 9 \vee p = -16$

$$n^2 + 8n = 9 \Rightarrow n^2 + 8n - 9 = 0$$

$$(n+9)(n-1) = 0$$

$$n = -9 \vee n = 1$$

$$n^2 + 8n = -16$$

$$n^2 + 8n + 16 = 0$$

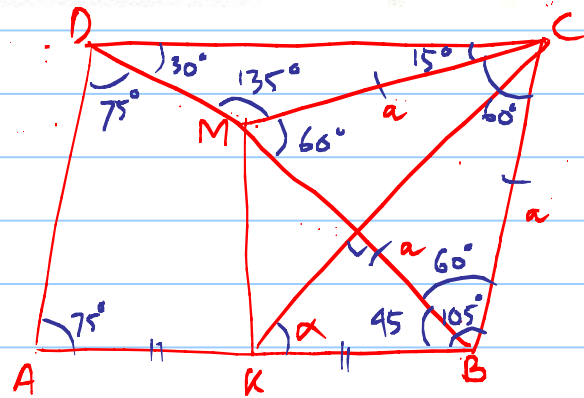
$$(n+4)^2 = 0$$

$$n = -4$$

Jadi $n = \{-9, -4, 1\}$. Banyak n adalah 3 buah.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 16 & 71 & 56 \\ & & -1 & -15 & -56 \\ \hline -7 & 1 & 15 & 56 & 0 \\ & & -7 & -56 & \\ \hline & 1 & 8 & 0 & \end{array}$$

7. Diberikan jajar genjang $ABCD$, dengan $\angle ABC = 105^\circ$. Titik M berada di dalam jajar genjang sehingga segitiga BMC sama sisi dan $\angle CMD = 135^\circ$. Jika K pertengahan sisi AB , maka besarnya $\angle BKC$ sama dengan ... derajat.



Misal $BC = a$

Pada $\triangle DMC$ berlaku

$$\frac{MC}{\sin D} = \frac{DC}{\sin M}$$

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{DC}{\sin 135^\circ}$$

$$DC = a\sqrt{2}$$

$$KB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos (60^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})\end{aligned}$$

Pada $\triangle KBC$ berlaku,

$$KC^2 = KB^2 + BC^2 - 2KB \cdot BC \cos B$$

$$KC^2 = \frac{1}{2}a^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})\right)$$

$$KC^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$$

$$KC^2 = a^2 + \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} \Rightarrow KC = \sqrt{\frac{a^2}{4}(4 + 2\sqrt{3})} = \frac{1}{2}a(\sqrt{3} + 1)$$

Juga berlaku

$$\cos K = \frac{KC^2 + KB^2 - BC^2}{2 \cdot KC \cdot KB}$$

$$\cos K = \frac{a^2 + \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} + \frac{1}{2}a^2 - a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2}}$$

$$\cos K = \frac{\frac{1}{2}a^2(\sqrt{3} + 1)}{\frac{1}{2}a^2(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}$$

$$\cos K = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle K = 45^\circ //$$

8. Bilangan real terbesar M sehingga untuk setiap x positif berlaku

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+11) \geq Mx$$

adalah ...

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+11) \geq Mx$$

$$\frac{(x+1)}{x^{\frac{1}{2}}} \frac{(x+3)}{x^{\frac{1}{4}}} \frac{(x+5)}{x^{\frac{1}{6}}} \frac{(x+11)}{x^{\frac{1}{12}}} \geq M$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{3}{4}} + 3x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{5}{6}} + 5x^{-\frac{1}{6}})(x^{\frac{11}{12}} + 11x^{-\frac{1}{12}}) \geq M$$

$$\text{AM-GM } \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{2} \geq \sqrt{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) \geq 2$$

$$\frac{x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}}{4} \geq \sqrt[4]{x^{\frac{3}{4}} x^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{4}}} \Rightarrow (x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}) \geq 4$$

$$\frac{x^{\frac{5}{6}} + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{6}}}{6} \geq \sqrt[6]{x^{\frac{5}{6}} x^{-\frac{1}{6}} x^{-\frac{1}{6}} x^{-\frac{1}{6}} x^{-\frac{1}{6}} x^{-\frac{1}{6}}} \Rightarrow (x^{\frac{5}{6}} + 5x^{-\frac{1}{6}}) \geq 6$$

$$\frac{x^{\frac{11}{12}} + x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{1}{12}}}{12} \geq \sqrt[12]{x^{\frac{11}{12}} x^{-\frac{1}{12}} x^{-\frac{1}{12}} x^{-\frac{1}{12}} x^{-\frac{1}{12}} x^{-\frac{1}{12}} x^{-\frac{1}{12}} x^{-\frac{1}{12}} x^{-\frac{1}{12}} x^{-\frac{1}{12}} x^{-\frac{1}{12}} x^{-\frac{1}{12}}} \Rightarrow (x^{\frac{11}{12}} + x^{-\frac{1}{12}}) \geq 12$$

$$\text{Jadi, } (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{3}{4}} + 3x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{5}{6}} + 5x^{-\frac{1}{6}})(x^{\frac{11}{12}} + 11x^{-\frac{1}{12}}) \geq M = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12$$

$$M = 576 //$$



$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+11) \geq Mx$$

$$x^4 + 20x^3 + 122x^2 + 268x + 165 \geq Mx$$

AM-GM

$$\frac{x^4 + (x^3 + \dots + x^3) + (x^2 + \dots + x^2) + (x + \dots + x) + (1 + \dots + 1)}{1 + 20 + 122 + 268 + 165} \geq \sqrt[576]{x^{576}}$$

$$x^4 + (x^3 + \dots + x^3) + (x^2 + \dots + x^2) + (x + \dots + x) + (1 + \dots + 1) \geq 576x$$

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+11) \geq 576x = Mx$$

Jadi, $M = 576$

12

9. Banyaknya tripel bilangan bulat (m, n, p) dengan p prima yang memenuhi

$$p^2 n^2 - 3mn = 21p - m^2$$

adalah ...

$$p^2 n^2 - 3mn = 21p - m^2$$

$$p^2 n^2 + m^2 = 3(mn - 7p) \equiv 0 \pmod{3}$$

padahal, bilangan kuadrat dalam bentuk $3k$ atau $3k+1$

sehingga, $p^2 n^2 + m^2 \equiv 0 \pmod{3}$ jika $p^2 n^2 \equiv 0 \pmod{3}$ dan $m^2 \equiv 0 \pmod{3}$

akutaknya $3 \mid m^2 \Rightarrow m = 3a$, a bulat.

$$\text{substitusikan } m = 3a \Rightarrow p^2 n^2 - 3mn = 21p - m^2$$

$$p^2 n^2 - 9an = 21p - 9a^2$$

$$21p = p^2 n^2 + 9a^2 - 9an$$

karena $3 \mid p^2 n^2 \Rightarrow 3 \mid pn \Rightarrow 9 \mid p^2 n^2$, diperoleh

$$21p = p^2 n^2 + 9a^2 - 9an \equiv 0 \pmod{9}$$

maka $9 \mid 21p \Rightarrow 3 \mid 7p \Rightarrow p$ bilangan prima, maka $p = 3$.

$$\text{substitusikan } p = 3 \Rightarrow 63 = 9n^2 + 9a^2 - 9an$$

$$7 = n^2 + a^2 - an$$

$$n^2 + a^2 = 7 + an$$

$$n^2 - an + a^2 - 7 = 0$$

$$D = (-a)^2 - 4(1)(a^2 - 7)$$

$$= a^2 - 4a^2 + 28$$

$$= 28 - 3a^2$$

n bulat, $D = \text{kuadrat}$

$$a = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\} \Rightarrow n(A) = 6, D > 0 \text{ berarti}$$

$$\text{ada 2 kemungkinan, sehingga } n(a, n) = 2 n(a) = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\text{jadi, } n(m, n, p) = n(a, n) = 12$$

Jangan lupa kunjungi

<http://pak-anang.blogspot.com>

Dan silakan berlangganan di channel telegram di

<http://t.me/pakanangblog>

Silakan klik link di atas agar tetap mendapat update terbaru.