Soal 5. Diberikan bilangan real x. Definisikan barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $a_n = \lfloor nx \rfloor$ untuk setiap bilangan asli n. Jika barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan aritmetika, haruskah x bilangan bulat?

Jawab: Misalkan $x = z + r$ dengan z bulat dan $0 \le r < 1$. Asumsikan x tidak bulat, yaitu $r > 0$. Terdapat 2 kasus untuk r yaitu $0 < r < \frac{1}{2}$ atau $\frac{1}{2} \le r < 1$.

- Kasus $0 < r < \frac{1}{2}$ Misalkan $n > 2$ adalah bilangan bulat terkecil sehingga $nr > 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2\lfloor (n-1)x \rfloor &= \lfloor (n-2)x \rfloor + \lfloor nx \rfloor \\ 2\lfloor (n-1)z + (n-1)r \rfloor &= \lfloor (n-2)z + (n-2)r \rfloor + \lfloor nz + nr \rfloor \\ 2(n-1)z &= (n-2)z + nz + 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

  (kontradiksi).

- Kasus $\frac{1}{2} \le r < 1$ Diperhatikan bahwa barisan $\{\lfloor nx \rfloor\}$ merupakan barisan aritmetika sehingga $\lfloor (n+1)x \rfloor - \lfloor nx \rfloor = b$ untuk suatu konstan $b \in \mathbb{Z}$.
  $\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \lfloor 2(z+r) \rfloor - \lfloor z + r \rfloor = 2z + 1 - z = z + 1 = b$.
  Akibatnya $zn + (n-1)r = z + b(n-1) = \lfloor nx \rfloor = \lfloor n(z+r) \rfloor = nz + \lfloor nr \rfloor$
  $\lfloor nr \rfloor = (n-1)$, untuk setiap n. Dipilih $k \in \mathbb{Z}$ terkecil sehingga berlaku $r < \frac{k}{k+1}$.
  Akibatnya berlaku $\lfloor (k+1)r \rfloor = (k-1) < k$ (kontradiksi).

Jadi haruslah $r = 0$ atau dengan kata lain x bilangan bulat.

- Jika hanya menyelesaikan salah satu kasus lengkap mendapat . . . . (3 poin).
- Dalam kasus pertama, jika tidak menstate n terkecil mendapat . . . . (1 poin).
- Jika menstate n terkecil namun tidak selesai mendapat maksimum . . . . (2 poin).
- Dalam kasus kedua jika mendapat fakta $\lfloor nr \rfloor = (n-1)r$ maka mendapat . . . . . (1 poin).
- Jika menyelesaikan kedua kasus dan lengkap mendapatkan poin . . . . (7 poin).
- Jika mengerjakan 2 kasus dan tidak lengkap maka nilai total merupakan penjumlahan nilai masing-masing kasus.

Soal 6. Diberikan segiempat $ABCD$ yang kedua diagonalnya tidak saling tegak lurus. Suatu persegi dikatakan *fantastik* jika masing-masing garis sisi persegi tersebut memuat tepat satu titik yang berbeda diantara A, B, C, D. Buktikan bahwa sebarang segiempat $ABCD$ memiliki paling sedikit 6 persegi *fantastik*.
`Catatan` : garis sisi adalah sisi dan perpanjangannya.

Jawab: Pertama, observasi bahwa jika $ABCD$ merupakan persegi, terdapat tak hingga banyaknya persegi luar biasa.

Berikutnya, akan kita konstruksi keenam persegi tersebut. Misalkan E adalah suatu titik sehingga BE tegak lurus serta sama panjang dengan AC. Buat garis yang melalui DE. Buat garis melalui B sejajar DE; buat dua garis melalui A dan C, yang keduanya tegak lurus DE.

Klaim. Persegi yang dibentuk pada konstruksi adalah persegi luar biasa.

Bukti klaim. Misalkan $XYZU$ adalah persegi yang dibentuk pada konstruksi tersebut, $A \in XY; B \in YZ; C \in ZU; D \in UX$. Dari konstruksi, kita punya $XYZU$ adalah suatu persegi panjang. Jadi tanpa kehilangan keumuman, cukup ditunjukkan bahwa $XY = YZ$.

Misalkan F pada YZ sehingga $XF \parallel DE$; misalkan pula G pada UZ sehingga $YG \parallel AC$. Karena $XFED$ dan $YGCA$ jajar genjang, maka $YG = AC = DE = XF$. Jadi $YG = XF$.

Berikutnya, tinjau segitiga siku-siku XYF dan segitiga siku-siku YZG. Perhatikan bahwa penjumlahan dengan sudut 180° tidak mengubah sudut diantara dua garis, sehingga

$$\begin{aligned}\angle GYZ &= \angle(GY;YZ) = \angle(AC;YZ) = \angle(AC;XU)\\ &= 90^\circ + \angle(AC;XU) + 90^\circ\\ &= \angle(DE;AC) + \angle(AC;XU) + \angle(XU;XY)\\ &= \angle(DE;XY) = \angle(FX;XY) = \angle FXY.\end{aligned}$$

Akibatnya, $\angle GYZ = \angle FXY$, sehingga segitiga siku-siku XYF dan YZG memiliki sudut-sudut yang sama dan sisi yang sama panjang. Dengan demikian $XY = YZ$ dan selesailah bukti klaim.

Kembali ke soal. Konstruksi yang telah dibuat memiliki dua kemungkinan E, yang berseberangan dengan D terhadap AC, dan yang terletak di satu sisi terhadap AC. Karena tidak disebutkan urutan titik-titik $ABCD$ pada persegi luar biasa, kita bisa memilih kemungkinan urutannya, yaitu A, B, C, D (seperti konstruksi di atas); A, C, B, D; dan terakhir A, B, D, C; (masing-masing dengan dua kemungkinan persegi) sehingga total ada 6 kemungkinan.

- Bukti konstruksi .... $\boxed{3}$ poin.
  - Memilih titik E sehingga $BE \perp AC$ dan $BE = AC$ ... $\boxed{1}$ poin.
  - Kontruksi persegi panjang $UXYZ$ ... $\boxed{1}$ poin.
  - Membuktikan $XY = YZ$ ... $\boxed{2}$ poin.
- Pemilihan E_2 yang berbeda (E_2 refleksi E terhadap B) .... $\boxed{1}$ poin
- Menghitung permutasinya .... $\boxed{2}$ poin

Catatan :

- Permutasi tidak dihitung dengan lengkap .... $\boxed{-1}$ poin
- Meninjau jika $ABCD$ dimana $AB \perp CD$ dan $AB = CE$ mmempunyai sangat banyak persegi fantastik .... $\boxed{1}$ poin
- Kasus khusus, misalkan $ABCD$ suatu segiempat khusus .... $\boxed{1}$ poin

Soal 7. Misalkan $p > 2$ suatu bilangan prima. Untuk setiap bilangan bulat $k = 1, 2, \cdots, p-1$, definiskan r_k sebagai sisa pembagian k^p oleh p^2. Buktikan bahwa

$$r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_{p-1} = \frac{p^2(p-1)}{2}$$

Jawab: Dari definisi r_k kita punyai bahwa $0 \leq r_k < p^2$. Sekarang, perhatikan bahwa

$$l^p + (p-l)^p \equiv l^p + \binom{p}{p-1} p(-l)^{p-1} + (-l)^p \equiv l^p + (-l)^p \equiv 0 \pmod{p^2}$$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa

$$r_l + r_{p-l} \equiv 0 \pmod{p^2}$$

Selain itu karena $p \nmid k^p$ untuk setiap k pada soal, maka $r_l, r_{p-l} > 0$. Maka itu kita simpulkan bahwa $0 < r_l + r_{p-l} < 2p^2$ sehingga apabila $p^2 \mid r_l + r_{p-l}$, haruslah $r_l + r_{p-l} = p^2$. Sehingga

$$\sum_{i=1}^{p-1} r_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (r_i + r_{p-i}) = \frac{1}{2} \times (p-1)p^2 = \frac{p^2(p-1)}{2}$$

- Menggunakan fakta bahwa $p \mid \binom{p}{k} \forall k = 1, 2, \cdots, p-1$ .... $\boxed{1}$ poin.
- Membuktikan bahwa $k^p + (p-k)^p \equiv 0 \pmod{p^2}$ .... $\boxed{2}$ poin.
- Menyimpulkan bahwa $p^2 \mid r_l + r_{p-l}$ .... $\boxed{1}$ poin.
- Menyatakan bahwa $0 < r_l, r_{p-l} < p^2$ sehingga $0 < r_l + r_{p-l} < 2p^2$ .... $\boxed{1}$ poin.
- Menyimpulkan bahwa $r_l + r_{p-l} = p^2$ .... $\boxed{1}$ poin.
- Menyimpulkan statement soal .... $\boxed{1}$ poin.

Soal 8. Tentukan banyaknya permutasi $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2016}$ dari $1, 2, 3, ...2016$ sehingga

$$|a_1 - 1| = |a_2 - 2| = |a_3 - 3| = ... = |a_{2016} - 2016| = M$$

untuk suatu bilangan asli M yang habis dibagi 3.

Jawab: Misalkan $S = \{1, 2, 3, ...2016\}$ Nyatakan permutasinya sebagai fungsi $f : S \to S$ dengan $f(i) = a_i$, $\forall i \in S$. Akan digunakan:

(i) $f(i) \neq i$, $\forall i \in S$

(ii) $f(i) \neq f(j)$, jika $i \neq j$

(iii) Jika $f(i) = j$ maka $f(j) = i$.

Nomor (i) jelas karena $|f(i) - i|$ bilangan positif. Nomor (ii) jelas karena f permutasi.

Bukti nomor (iii): Andaikan ada $f(i) = j$ tetapi $f(j) \neq i$.

Kasus: $j > i$.

Misalkan $k = j - i$. Maka $f(i) = j = i + k$. Karena $k = |f(i) - i| = |f(j) - j|$ dan $f(j) \neq i$, maka $|j - i| = |f(j) - j|$. Akibatnya $f(j) - j = j - i$ atau $f(j) - j = i - j$. Karena $f(j) \neq i$, maka tidak berlaku $f(j) - j = i - j$. Sehingga $f(j) - j = j - i$, atau $f(j) = 2j - i$, yang berakibat $f(i + k) = i + 2k$.

Kemudian $|f(i + k) - (i + k)| = |f(i + 2k) - (i + 2k)|$,

$|(i + 2k) - (i + k)| = |f(i + 2k) - (i + 2k)|$,

$k = |f(i + 2k) - (i + 2k)|$.

Maka

$k = f(i + 2k) - (i + 2k)$ atau $k = -f(i + 2k) + (i + 2k)$,

$f(i + 2k) = i + 3k$ atau $f(i + 2k) = i + k$.

Karena $f(i) = i + k$, maka $f(i + 2k) = i + 3k$.

Dengan argumen yang sama, akan diperoleh $f(i + nk) = i + (n + 1)k$. Hal ini tidak mungkin karena range nilai fungsi f terhingga. Jadi, jika $f(i) = j$ maka $f(j) = i$. Argumen yang sama untuk kasus $i > j$.

Dari (i), (ii), dan (iii), f mempartisi S menjadi 1008 pasangan berbeda (i, j) dengan $f(i) = j$ dan $f(j) = i$. Juga selisih $|f(i) - i|$ selalu sama untuk setiap $i \in S$.

Jika $f(1) - 1 = k$, atau $f(1) = 1 + k$, maka $f(2) = 2 + k$, $f(3) = 3 + k$, ..., $f(k) = 2k$, dan $f(k + 1) = 1$, $f(k + 2) = 2$, $f(k + 3) = 3$, ..., $f(2k) = k$.

Kemudian $f(2k + 1) = 3k + 1$, $f(2k + 2) = 3k + 2$, $f(2k + 3) = 3k + 3$, ..., $f(3k) = 4k$, dan $f(3k + 1) = 2k + 1$, $f(3k + 2) = 2k + 2$, $f(3k + 3) = 2k + 3$, ..., $f(4k) = 3k$, dan seterusnya.

Jadi f mempartisi S menjadi blok-blok $2k$ anggota. Karena k kelipata 3, maka $2k$ kelipatan 6. Permutasinya (fungsinya) ada sebanyak pembagi $2016 = 2^5 3^2 7$ yang yang keliupatan 6. Ada sebanyak $5(2)(2) = 20$.

Skema.

1. Menunjukkan bahwa jika $a_i = j$ maka $a_j = i$ .... **(2 poin)**
2. Memperoleh bahwa $2M \mid 2016$ dan memperoleh banyaknya permutasi yang diminta adalah 20 .... **(2 poin)**
3. Konstruksi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jika $2M \mid 2016$ .... **(2 poin)**
4. Mendapatkan semua komponen solusi di atas dan membuat kesimpulan ...... **(1 poin)**