Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Juli 2019

26 Juli – 29 Juli 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
11. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
12. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
13. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
14. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
15. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
16. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.

(d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

(e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

17. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

19. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

20. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

21. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

22. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Mimin sedang membuat suatu fungsi yang bernama $KTOMAug(n)$. Fungsi ini menerima input berupa bilangan asli dan mengeluarkan hasil berupa bilangan bulat terkecil dengan banyak faktor positif sebanyak n, lalu dimodulokan dengan n. Tentukan $KTOMAug(2019)$

2. Misalkan $\{k, t, o, m, a, u, g\} \in S$. Tentukan banyaknya cara memilih subset S_1 dan S_2 di S sehingga $S_1 \subseteq S_2$.

3. Misalkan terdapat dua bilangan real positif. Diketahui apabila salah satu bilangan dikalikan 5, maka selisih kedua bilangan yang baru tidak berubah dari yang sebelumnya. Tentukan perbandingan bilangan yang lebih besar dengan bilangan yang lebih kecil.

4. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AC = 673$. Misalkan lingkaran dengan titik pusat A dan melalui titik B memotong AC di titik D. Selain itu, misalkan lingkaran dengan titik pusat A dan melalui titik C memotong AB di titik E. Selanjutnya, misalkan BC dan DE saling berpotongan di titik F. Jika $\frac{BF}{FC} = 3$, tentukan panjang AB.

5. Tentukan banyaknya bilangan bulat m sedemikian sehingga m habis membagi $ax - by$ untuk setiap bilangan bulat a, b, x, dan y yang memenuhi $a + b = x + y = 2019$.

6. Tentukan banyaknya bilangan real x yang memenuhi

$$\lfloor x \rfloor + \frac{1}{\{x\}} = \{x\} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{\lfloor x \rfloor},$$

dimana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari x dan $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

7. Tentukan banyaknya barisan $(a_1, a_2, \ldots, a_{2019})$, dengan $a_1 = 0$, dimana untuk $n \geq 2$ setidaknya salah satu dari kedua persamaan berikut terpenuhi: (i) $a_n = a_{n-1}$ atau (ii) $a_n = 2019$.

8. Misalkan $TUVW$ adalah suatu persegi. Titik E dan F terletak pada segmen garis UW dengan titik E berada lebih dekat ke titik U. Apabila diketahui $\angle ETF = 45^\circ$, panjang UE dan WF berturut-turut adalah 3 dan 7, tentukan bilangan bulat terdekat dengan panjang segmen EF.

9. Misalkan $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ ialah segiduabelas beraturan yang memiliki luas 333. Misalkan ω ialah poligon yang dibatasi oleh garis A_iA_{i+3} untuk $i = 1, 2, \cdots, 12$ (Indeks diambil modulo 12). Misalkan J ialah luas dari ω dan $J = a - b\sqrt{c}$, dengan a, b, c bilangan asli dan c bukan bilangan kuadrat. Berapakah nilai dari $a + b + c$?

10. Diberikan sebuah fungsi $f : \left(0, \frac{5\pi}{6}\right) \to \mathbb{R}$ sehingga

$$f(x) = \frac{4\cos^3 x + \sqrt{n^2 + 11}\sin x - \cos 3x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

bernilai konstan untuk semua $x \in \left(0, \frac{5\pi}{6}\right)$ untuk suatu bilangan real positif n. Apabila konstanta tersebut bernilai k, tentukan nilai dari $\lfloor 100(n+k) \rfloor$.

11. Tang, Ting dan Tung sedang bermain. Di papan, ada sebuah kotak 3×3. Tiap orang memiliki tiga buah stiker dengan warna berbeda; Tang memiliki stiker merah, Ting memiliki stiker hijau dan Tung memiliki stiker biru. Mereka meletakkan stiker secara acak, dengan syarat tidak ada dua stiker yang berada di satu kotak yang sama. Jika seseorang berhasil meletakkan stikernya dalam satu garis, ia diberikan sebuah permen oleh Slep. Setelah itu, satu ronde dianggap selesai. Misalkan $\frac{p}{q}$ ialah frekuensi harapan dari banyak permen yang diberikan oleh Slep dalam satu ronde, dimana p dan q ialah bilangan asli yang relatif prima. Berapakah nilai dari $p+q$?

12. Diberikan sebuah barisan $\{a_i\}_{i \geq 1}$, yaitu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ yang memenuhi

$$a_{n+2} = 20a_{n+1}^2 + a_n$$

untuk setiap bilangan asli $n \geq 1$. Apabila $a_1 = 1$ dan $a_2 = 9$, tentukan nilai dari sisa pembagian dari $a_{2017!}$ oleh 43.

13. Misalkan ABC ialah segitiga sama sisi dengan $AB = 2\sqrt{3}$ dan X ialah sebuah titik yang ada di lingkaran dalam segitiga tersebut. Diketahui $AX = \frac{4\sqrt{14}}{5}$. Jika $BX^2 + CX^2 = \frac{p}{q}$ dimana p dan q ialah bilangan yang relatif prima, berapakah nilai dari $p+q$?

14. Diketahui a, b, c adalah tiga bilangan real positif yang memenuhi untuk setiap a, b, c yang memenuhi $a+b+c = k$ maka nilai minimal dari$(a^2+8)(b^2+8)(c^2+8)$ adalah 18^3. Tentukan nilai dari k^2.

15. Diberikan S ialah himpunan semua kata yang terdiri dari 20 huruf yang seluruh hurufnya merupakan "X" atau "Y". Sebuah kata k anggota dari S disebut *ktom* jika tidak ada dua buah "X" dan tiga buah "Y" yang saling bersebelahan. Misalkan ada j buah kata di S yang ktom. Berapakah nilai dari $j \mod 1000$?

16. Untuk n, k,terdapat n kartu berbeda dengan satu sisi merah dan sisi satunya biru. Diketahui di sisi merah terdapat angka $1, 2, ..., n$ dan dibalik sisi merah dengan angka m terdapat angka $\binom{m}{k}[\binom{a}{b} = 1 \text{jika} a < b]$. Jessen akan membalikkan beberapa kartu. Sebuah pasangan (n, k) dikatakan semlehoy jika Jessen dapat membuat perkalian semua angka yang menghadap atas menjadi bilangan kuadrat. Tentukan jumlah semua bilangan x sehingga untuk setiap $k < x$ bilangan asli $\{(x, k), (x+2, k), (x+4, k)\}$ tidak ada yang semlehoy.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Diberikan sebuah polinomial $P(x)$ sebagai berikut :

$$P(x) = x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 6x + 1$$

dengan $x \neq 0$

(a) Misalkan y adalah sebuah akar dari $P(x)$ dan $a = y + \frac{1}{y}$, berapakah nilai a yang mungkin? (petunjuk : bagi $P(y)$ dengan y^2)

(b) Tentukan semua x yang memenuhi persamaan diatas.

Diberikan polinomial lain $Q(x)$ sebagai berikut :

$$Q(x) = x^5 + x^4 - 7x^2 - 7x - 6$$

(c) Tentukan semua akar dari $Q(x)$.

Diberikan persamaan sebagai berikut :

$$x^2 + 7x - 6 = 6\sqrt{x^3 - 8}$$

(d) Tentukan semua x yang memenuhi persamaan tersebut.

2. Apakah ada bilangan dalam barisan

$$98, 998, 9998, 99998, \cdots$$

yang habis dibagi 13? Jika ada, berikan contohnya. Jika tidak ada, jelaskan argumen anda.

3. Misalkan ABC ialah sebuah segitiga. $ABDE$ dan $ACFG$ ialah segiempat yang dibentuk keluar dari segitiga ABC dan pusatnya ialah M dan N. BG dan CE berpotongan di H. Buktikanlah bahwa GM, DN dan AH konkuren.

4. Terdapat sebuah kota NBA di bidang Kartesius, dengan populasi penduduk sebanyak 1001 orang: PG, sebagai seorang sheriff dan 1000 orang sisanya dibagi menjadi 2 kelompok orang: guards dan forwards, dengan masing-masing kelompok sebanyak 500 orang. Diketahui bahwa setiap orang di kota ini kecuali sheriff memiliki bola basket beracun. Pada suatu hari, terjadi perang antar kedua kelompok 1000 orang tersebut: dimana setiap dari mereka mengambil posisi di titik (x, y), dimana x dan y rill, dan setiap guards akan mengarahkan bolanya ke forwards terdekat, dan setiap forwards akan mengarahkan bolanya ke guards terjauh. Perlu diperhatikan bahwa guards hanya akan mengarahkan bolanya ke forwards, begitu juga seba- liknya, dan

proses penyerangan hanya dapat dilakukan sekali. Karena merasa sangat terganggu, PG memutuskan untuk mengakhiri pekerjaannya sebagai sheriff dan berpindah kota. Hal itu dapat dilakukan jika dan hanya jika 1000 orang sisanya terbunuh, dengan kata lain PG mau mengatur agar setiap orang ini dilempar oleh tepat 1 orang lainnya. Sekarang, PG dapat mengatur arah lemparan mereka dengan operasi sebagai berikut: Pilih satu orang, dan kamu dapat mengubah target orang tersebut menjadi orang lain dengan kelompok yang sama dengan orang bidikannya awal awal. Apabila target baru ini telah dilem- par oleh orang lain, kamu dapat mengubah target orang yang melempar target baru ini juga, dan seterusnya sampai tidak ada orang yang melempar orang ke-n selama proses ini berlangsung. Tentukan nilai terkecil $PG(n)$, banyaknya operasi yang perlu dilakukan sehingga kita dapat men- capai konfigurasi yang diinginkan dalam paling banyak $PG(n)$ operasi dari sembarang konfigurasi awal.