Pembahasan Seleksi Peserta OSN Matematika SMAN 1 Probolinggo

Oleh Wildan Bagus Wicaksono

1. Tentukan nilai x yang memenuhi

$$x = \left(3-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right) + \left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

Solusi: $2\sqrt{10}$

Ingat bahwa $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

$$\begin{aligned}
x &= \left(3-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right) + \left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right) \\
&= \sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2\left(3+\sqrt{5}\right)} + \sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2\left(3-\sqrt{5}\right)} \\
&= \sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3^2-\sqrt{5}^2\right)} + \sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3^2-\sqrt{5}^2\right)} \\
&= \sqrt{4\left(3-\sqrt{5}\right)} + \sqrt{4\left(3+\sqrt{5}\right)} \\
&= 2\sqrt{3-\sqrt{5}} + 2\sqrt{3+\sqrt{5}} \\
x &= 2\left[\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right]
\end{aligned}$$

Misalkan $y = \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

$$\begin{aligned}
y^2 &= \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 + 2\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)} + \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 \\
&= 3-\sqrt{5} + 2\sqrt{3^2-\sqrt{5}^2} + 3+\sqrt{5} \\
&= 6 + 2\sqrt{4} \\
&= 6 + 4 \\
y^2 &= 10 \\
\therefore y &= \pm\sqrt{10}
\end{aligned}$$

Karena $\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}} > 0$, maka $y = \sqrt{10}$. Sehingga

$$x = 2y = \boxed{2\sqrt{10}}$$

2. Diketahui $a + (a+1) + (a+2) + \cdots + 50 = 1139$. Jika a bilangan positif, maka $a =$ ... .

Solusi: 17

Misalkan banyak suku pada deret tersebut adalah n. Terlihat bahwa diatas merupakan deret aritmetika dengan beda 1. Maka kita dapat menggunakan

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b} \quad \text{atau} \quad \boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)}$$

Kita gunakan $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1139 &= \frac{n}{2}(a+50) \\ 7 \times 67 &= \frac{n}{2} \times (a+50) \\ 2 \times 7 \times 67 &= n \times (a+50) \end{aligned}$$

Karena a positif dan melihat bentuk soal, pasti $100 > a + 50 \geq 51$. Sehingga akan dipenuhi ketika $a + 50 = 67$ yang ekuivalen dengan $a = \boxed{17}$.

3. Parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ memotong sumbu koordinat tepat empat titik. Keempat titik tersebut merupakan titik-titik sudut layang-layang dengan luas 24. Nilai $a + b$ adalah ... .

Solusi: 3

Parabola $y = ax^2 - 4$ memotong sumbu y di titik $(0, -4)$.

Parabola $y = 8 - bx^2$ memotong sumbu y di titik $(8, 0)$.

Dua titik lainnya berada di sumbu x. Karena hanya ada dua titik, kedua parabola tersebut memotong sumbu x di titik yang sama. Dengan kata lain, $y = 8 - bx^2$ memotong sumbu x di titik $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ serta $y = ax^2 - 4$ juga memotong sumbu x di titik $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$.

Misalkan parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ berpotongan di $A(x_1, 0)$ dan $B(x_2, 0)$.

$$\begin{aligned} ax^2 - 4 &= 8 - bx^2 \\ ax^2 + bx^2 - 4 - 8 &= 0 \\ (a+b)x^2 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan rumus ABC (kecap, sirup, dan lain-lain), kita peroleh

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(a+b)(-12)}}{2(a+b)} \\ &= \frac{\pm\sqrt{0 + 48(a+b)}}{2(a+b)} \\ &= \pm\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b}} \end{aligned}$$

Maka

$$x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a+b}} \quad \text{dan} \quad x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a+b}}$$

Diketahui bahwa luas layang-layang adalah 24.

$$\begin{aligned} 24 &= \frac{1}{2}\left|8 - (-4)\right| \left|\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a+b}} - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a+b}}\right)\right| \\ 24 \cdot 2 &= |12| \left|\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{a+b}}\right| \\ 48 &= 12 \left|\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{a+b}}\right| \end{aligned}$$

Berdasarkan $|a|^2 = a$,

$$\begin{aligned}4 &= \left|\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{a+b}}\right| \\ 4^2 &= \left|\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{a+b}}\right|^2 \\ 16 &= \frac{48}{a+b} \\ \therefore a+b &= \boxed{3}\end{aligned}$$

4. Suatu fungsi $f : x \to \mathbb{Q}$ mempunyai sifat $f(x+1) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Jika $f(2) = 2$, maka nilai fungsi $f(2018)$ adalah ... .

Solusi: 2

Untuk $x = 1$, maka

$$\begin{aligned}f(1+1) &= \frac{1+f(1)}{1-f(1)} \\ f(2) &= \frac{1+f(1)}{1-f(1)} \\ 2 &= \frac{1+f(1)}{1-f(1)} \\ 2-2f(1) &= 1+f(1) \\ 2-1 &= 3f(1) \\ \therefore f(1) &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Untuk $x = 2$, maka

$$\begin{aligned}f(2+1) &= \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} \\ \therefore f(3) &= -3\end{aligned}$$

Untuk $x = 3$, maka

$$\begin{aligned}f(3+1) &= \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1+(-3)}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \\ \therefore f(4) &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Untuk $x = 4$, maka

$$\begin{aligned}f(4+1) &= \frac{1+f(4)}{1-f(4)} = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \\ \therefore f(5) &= \frac{1}{3} \quad \text{(Berulang)}\end{aligned}$$

Pola tersebut berulang setelah 4 pola (yaitu setelah $f(4)$). Karena $2018 : 4$ bersisa 2, maka nilai dari $f(2018)$ sama dengan nilai $f(2)$, yaitu 2.

Jadi, nilai dari $f(2018) = \boxed{2}$.

5. Jika $(x-1)^2$ membagi ax^4+bx^3+1, maka $ab = \ldots$.

   Solusi: -12

   Karena $(x-1)^2 \mid ax^4+bx^3+1$, maka $ax^4+bx^3+1 = k \cdot (x-1)^2$ yang ekuivalen dengan $ax^4+bx^3+1 = K(x)\cdot(x^2-2x+1)$.

   Misalkan $P(x) = ax^4+bx^3+1$ dan $Q(x) = x^2-2x+1$. Karena $P(x)$ berderajat 4 dan $Q(x)$ berderajat 2, maka $K(x)$ harus berderajat 2.

   Misalkan $K(x) = cx^2+dx+e$. Karena konstanta dari $P(x)$ dan $Q(x)$ masing-masing adalah 1, maka konstanda dari $K(x)$ harus 1 dengan kata lain $e = 1$. Kita peroleh

$$\begin{aligned} P(x) &= K(x)\cdot Q(x) \\ ax^4+bx^3+1 &= \left(cx^2+dx+1\right)\left(x^2-2x+1\right) \\ ax^4+bx^3+1 &= cx^4+dx^3+x^2-2cx^3-2dx^2-2x+cx^2+dx+1 \\ ax^4+bx^3+0\cdot x^2+0\cdot x+1 &= cx^4+(d-2c)x^3+(1-2d+c)x^2+(d-2)x+1 \end{aligned}$$

   Sehingga haruslah

$$\begin{cases} a &= c \\ b &= d-2c \\ 0 &= 1-2d+c \\ 0 &= d-2 \end{cases}$$

   Demikian kita peroleh $d = 2$. Dengan mensubtitusikan nilai d pada $1-2d+c = 0$, maka

$$\begin{aligned} 1-2(2)+c &= 0 \\ \therefore c &= 3 \end{aligned}$$

   Maka

$$b = d-2c = 2-2(3) = -4$$

   dan $a = 3$.

   Sehingga $ab = 3(-4) = \boxed{-12}$.

6. Diberikan satu koin tidak seimbang. Bila koin tersebut ditos satu kali, peluang munculnya angka adalah $\frac{1}{4}$. Jika ditos n kali, peluang muncul tepat dua angka sama dengan peluang muncul angka tiga kali. Nilai n adalah ... .

   Solusi: 11

   Misalkan $P(A)$ adalah peluang munculnya angka dan $P(G)$ adalah peluang munculnya gambar. Maka $P(A) = \frac{1}{4}$ dan $P(G) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Dengan *Distribusi Binomial*,

$$\begin{aligned} P(2A) &= P(3A) \\ \binom{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} &= \binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \\ \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{3}{4} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\frac{1}{4} \\ 9 &= n-2 \\ \therefore n &= \boxed{11} \end{aligned}$$

7. Nilai dari $\dfrac{\left(2^{2010}\right)^2 - \left(2^{2008}\right)^2}{\left(2^{2011}\right)^2 - \left(2^{2009}\right)^2}$ adalah ... .

   Solusi: $\frac{1}{4}$

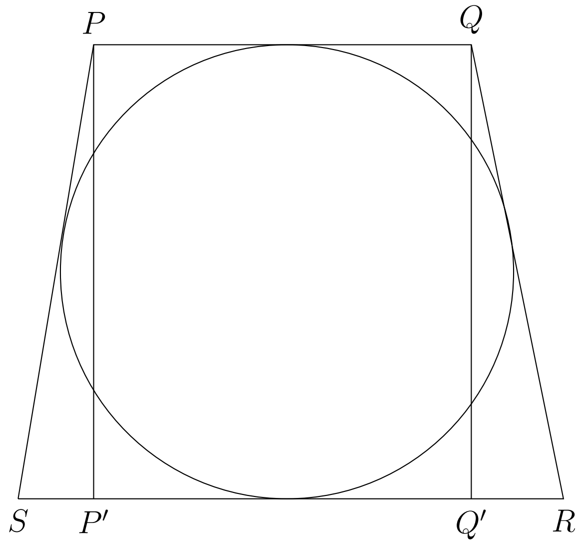
   Dengan sifat $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\left(2^{2010}\right)^2 - \left(2^{2008}\right)^2}{\left(2^{2011}\right)^2 - \left(2^{2009}\right)^2} &= \frac{2^{4020} - 2^{4016}}{2^{4022} - 2^{4018}} \\
&= \frac{2^{4016}\left(2^4 - 1\right)}{2^{4018}\left(2^4 - 1\right)} \\
&= \frac{2^{4016}}{2^{4018}} \\
&= \frac{1}{2^2} \\
\therefore \frac{\left(2^{2010}\right)^2 - \left(2^{2008}\right)^2}{\left(2^{2011}\right)^2 - \left(2^{2009}\right)^2} &= \boxed{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

8. Sebuah lingkaran digambar di dalam trapesium samakaki $PQRS$ sehingga lingkaran menyinggung setiap sisi trapesium. Jika $PS = QR = 25$ cm, $PQ = 18$ cm dan $SR = 32$ cm. Panjang diameter lingkaran adalah ... .

   Solusi: 24 cm

   Misalkan garis tinggi dari titik P dan Q memotong SR berturut-turut di titik P' dan Q'.



   Perhatikan bahwa panjang diameter lingkaran sama saja dengan panjang PP' atau QQ'.

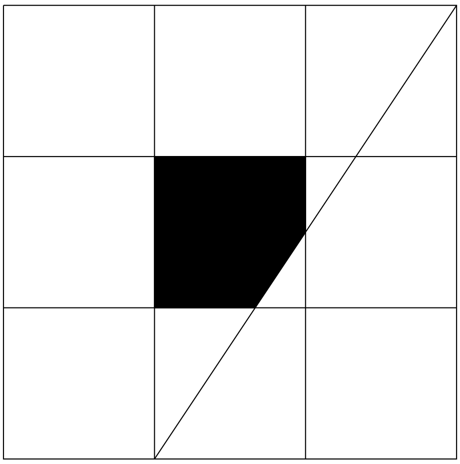
   Perhatikan bahwa $P'Q' = PQ = 18$ cm yang berarti $SP' + Q'R = 14$ cm. Karena $PS = QR$, pasti $SP' = Q'R$. Kita peroleh panjang $SP' = Q'R = 7$ cm.

   Perhatikan $\triangle SP'P$. Menurut Phytagoras,

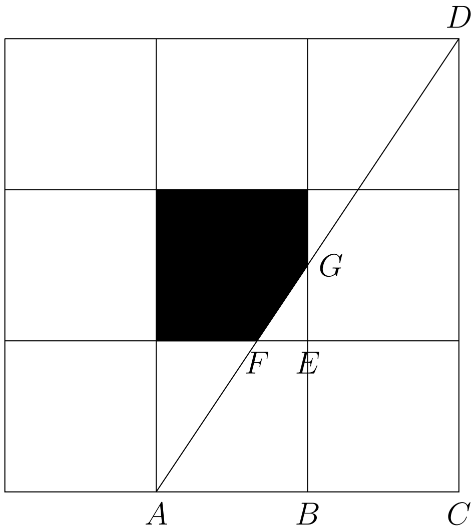
$$\begin{aligned}
SP'^2 + PP'^2 &= SP^2 \\
7^2 + PP'^2 &= 25^2 \\
PP'^2 &= 25^2 - 7^2 \\
PP' &= 24\ cm
\end{aligned}$$

   Maka panjang diameter lingkaran adalah $\boxed{24\ cm}$.

9. Perhatikan gambar persegi dengan ukuran 3×3 satuan. Luas daerah segilima yang hitam adalah ... .



Solusi: $\frac{11}{12}$



Perhatikan bahwa $\triangle ACD$ sebangun dengan $\triangle ABG$.

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BG}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{1+EG}$$
$$2 + 2EG = 3$$
$$EG = \frac{1}{2}$$

Perhatikan bahwa $\triangle ABG$ sebangun dengan $\triangle FEG$.

$$\frac{AB}{BG} = \frac{FE}{EG}$$
$$\frac{1}{1+EG} = \frac{FE}{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{FE}{\frac{1}{2}}$$
$$FE = \frac{1}{3}$$

Maka

$$\text{Luas Arsir} = L_{persegi} - L_{\triangle FEG} = 1 \times 1 - \frac{1}{2} \cdot EG \cdot FE = 1 - \frac{1}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}$$

Dalam pembahasan ini, tentunya banyak sekali kekurangan. Maka dari itu kritik dan saran pembaca akan sangat berharga bagi saya.

Whatsapp: 082230569632

LaTeX