



Kontes Terbuka Olimpiade Matematika  
Kontes Januari 2020 (Simulasi KSK: Bagian B)

31 Januari – 3 Februari 2020

Berkas Soal

## Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi  $\mathbb{N}$  menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu  $\{1, 2, \dots\}$ .
2. Notasi  $\mathbb{Z}$  menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu  $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk  $\frac{a}{b}$  dengan  $a, b$  adalah bilangan bulat dan  $b \neq 0$ .
4. Notasi  $\mathbb{Q}$  menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi  $\mathbb{R}$  menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika  $n$  adalah sebuah bilangan bulat positif,  $n!$  (dibaca  $n$  faktorial) bernilai  $1 \times 2 \times \dots \times n$ . Contohnya,  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ . Selain itu,  $0!$  didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real  $x$ , notasi  $\lfloor x \rfloor$  menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan  $x$ . Sebagai contoh,  $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$ , dan  $\lfloor 4 \rfloor = 4$ .
9. Untuk setiap bilangan real  $x$ , notasi  $\lceil x \rceil$  menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan  $x$ . Sebagai contoh,  $\lceil 2.3 \rceil = 3$ ,  $\lceil \pi \rceil = 4$ ,  $\lceil -2.89 \rceil = -2$ , dan  $\lceil 4 \rceil = 4$ .
10. Untuk setiap bilangan real  $x$ , notasi  $\{x\}$  menyatakan bagian pecahan dari  $x$ . Dengan kata lain,  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ . Sebagai contoh,  $\{2.3\} = 0.3$ ,  $\{9.99\} = 0.99$ ,  $\{-2.89\} = 0.11$ , dan  $\{4\} = 0$ .
11. Notasi  $a \mid b$  menyatakan  $a$  habis membagi  $b$  (atau  $b$  habis dibagi  $a$ ). Notasi  $a \nmid b$  menyatakan  $a$  tidak habis membagi  $b$ .
12.  $a \equiv b \pmod{c}$  jika dan hanya jika  $c$  membagi  $|a - b|$ .
13. Dua bilangan bulat  $a$  dan  $b$  disebut *relatif prima* bila  $\text{fpb}(a, b) = 1$ .
14. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai  $\varphi(n)$ , menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai  $n$  yang relatif prima dengan  $n$ .
15. Notasi  $\binom{n}{k}$  menyatakan nilai  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .
16. Pada  $\triangle ABC$ :
  - (a) Garis berat dari titik  $A$  adalah garis yang melewati titik  $A$  dan membagi garis  $BC$  menjadi dua bagian yang sama panjang.
  - (b) Garis bagi  $\angle A$  adalah garis yang melewati titik  $A$  dan membagi  $\angle BAC$  menjadi dua bagian yang sama besar.
  - (c) Garis tinggi dari titik  $A$  adalah garis yang melewati titik  $A$  dan tegak lurus dengan garis  $BC$ .

- (d) Titik berat  $\triangle ABC$  adalah perpotongan garis berat dari titik  $A$ , garis berat dari titik  $B$ , dan garis berat dari titik  $C$ .
  - (e) Titik tinggi  $\triangle ABC$  adalah perpotongan garis tinggi dari titik  $A$ , garis tinggi dari titik  $B$ , dan garis tinggi dari titik  $C$ .
  - (f) Lingkaran luar  $\triangle ABC$  adalah lingkaran yang melewati titik  $A$ ,  $B$ , dan  $C$ .
  - (g) Lingkaran dalam  $\triangle ABC$  adalah lingkaran di dalam  $\triangle ABC$  yang menyinggung segmen  $BC$ ,  $CA$ , dan  $AB$ .
17. Luas dari sebuah segi- $n$  dibungkus dengan kurung siku, yakni [ dan ]. Contohnya,  $[ABC]$  dan  $[DEFG]$  masing-masing menyatakan luas segitiga  $ABC$  dan luas segiempat  $DEFG$ .
  18. Suatu barisan  $\{a_n\}$  disebut *barisan aritmetika* bila  $a_{i-1} - a_i$  bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap  $i$ . Contohnya,  $3, 5, 7, 9, \dots$  dan  $2, 2, 2$  merupakan barisan aritmetika.
  19. Suatu barisan  $\{a_n\}$  disebut *barisan geometrik* bila  $\frac{a_{i+1}}{a_i}$  bernilai konstan tak nol (bisa jadi 1) untuk setiap  $i$ . Contohnya,  $4, 6, 9$  dan  $5, 5, 5, 5, 5, \dots$  merupakan barisan geometrik.
  20. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real  $a$  dan  $b$  adalah  $\frac{a+b}{2}$ .
  21. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real  $a$  dan  $b$  adalah  $\sqrt{ab}$ .
  22. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real  $a$  dan  $b$  adalah  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ .

## Bagian B : Kemampuan Lanjut

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 4 angka. Terdapat pengurangan nilai sebesar 1 angka untuk jawaban yang salah dan tidak ada pengurangan nilai untuk soal yang dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian B dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Tentukan banyaknya bilangan asli  $x \leq 2020$  sedemikian sehingga  $x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2020}$  tidak habis dibagi oleh 11.
2. Tentukan nilai minimum yang mungkin dari  $a^4 - 7a^2 + 2ab - 10a + 2b^2 - 16b + 56$  dengan  $a$  dan  $b$  adalah bilangan real.
3. Diberikan jajargenjang  $ABCD$  dimana  $BD = 2AD$  serta kedua diagonal berpotongan di titik  $E$ . Misalkan titik  $F$  terletak pada segmen  $CD$  sedemikian sehingga  $EF$  tegak lurus dengan  $AC$ . Jika  $CF = 2020$ , tentukan panjang  $CD$ .
4. Definisikan himpunan  $S = \{1, 2, \dots, 30\}$ . Abid dan Esar akan membentuk himpunan baru  $A$  dan  $E$  berturut-turut dimana  $A, E \subseteq S$  dan  $A \cap E = \emptyset$ . Selanjutnya, untuk setiap himpunan  $X$  yang hanya beranggotakan bilangan-bilangan, definisikan  $s(X)$  adalah jumlah semua anggota pada  $X$  dan  $n(X)$  adalah banyaknya anggota pada  $X$ . Sebagai contoh,  $s(S) = 1 + 2 + \dots + 30 = 465$  dan  $n(S) = 30$ . Jika pernyataan berikut bernilai benar: "Untuk setiap himpunan  $A$  dan  $E$  dimana  $n(A) = m$ , berlaku  $s(A) > s(E)$ .", tentukan nilai minimum yang mungkin dari  $m$ .
5. Anto, Beno, dan Cheryl akan mengikuti sebuah konferensi meja bundar bersama tujuh peserta lainnya. Namun, karena ketiganya saling bertengkar, tidak ada dari mereka yang akan duduk saling bersebelahan. Jika jumlah kursi yang tersedia sama dengan jumlah peserta yang mengikutinya, tentukan banyaknya cara kesepuluh orang tersebut duduk.
6. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan  $AB = 10$ ,  $BC = 12$ , dan  $CA = 14$ . Titik  $X$  terletak pada segmen  $BC$  dimana  $X \neq B, C$ . Misalkan  $H_1$  dan  $H_2$  adalah titik tinggi segitiga  $ABX$  dan segitiga  $ACX$  berturut-turut. Tentukan banyaknya titik  $X$  sehingga luas segiempat  $BH_1CH_2$  merupakan bilangan bulat positif.
7. Misalkan  $S$  adalah himpunan seluruh bilangan bulat  $x$  yang memenuhi sifat berikut:
  - $x \equiv 10 \pmod{25}$ ,
  - $x^4 \equiv 5^4 \pmod{5^7}$ , dan
  - $|x| < 5^5$ .

Jika  $n$  menyatakan jumlah dari seluruh anggota dari  $S$ , tentukan nilai dari  $|n|$ .

8. Misalkan

$$S = \sum_{k=1}^{2^{2018}} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{2020}}}.$$

Jika  $S$  dapat dinyatakan dalam bentuk  $a^b$  dimana  $a$  dan  $b$  adalah bilangan asli serta  $a$  dibuat seminimal mungkin, tentukan nilai dari  $a + b$ .

9. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan  $AB = 169$ ,  $BC = 144$ , dan  $CA = 168$ . Misalkan titik  $P$  terletak pada  $AB$  sedemikian sehingga  $CP$  merupakan garis bagi dalam  $\angle ACB$ . Misalkan pula titik  $D$  terletak di dalam segitiga  $ABC$  dengan  $AD = 105$  dan  $BD = 90$ . Jika titik  $O$  merupakan titik pusat lingkaran luar segitiga  $CDP$ , tentukan nilai dari  $AO + BO$ .
10. Sebuah himpunan  $S$  dikatakan *bebas jumlah* jika tidak terdapat  $a, b, c \in S$  sehingga  $a + b = c$ . Sebagai contoh, himpunan kosong dan himpunan  $\{5, 6, 8\}$  merupakan himpunan bebas jumlah, tetapi himpunan  $\{2, 4\}$  dan  $\{2, 3, 5\}$  bukan merupakan himpunan bebas jumlah. Tentukan banyaknya himpunan bagian dari  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  yang merupakan himpunan bebas jumlah.