Buku Pembahasan

Mathematics Quiz and Competition

Thamrin Olympiad and Cup 11

Babak Penyisihan 1 & 2

Sekolah Menengah Pertama

Smanu M H Thamrin
Februari 2021

SMA NEGERI UNGGULAN
MOHAMMAD HUSNI THAMRIN
JALAN BAMBU WULUNG 7
RT07/RW05, BAMBU APUS
CIPAYUNG, KOTA JAKARTA
TIMUR, DKI JAKARTA
13890

KATA SAMBUTAN

Pertama-tama, marilah kita senantiasa panjatkan puji syukur ke Hadirat Allah SWT, karena atas rahmat, ridha, dan karunia-Nya, pengerjaan laporan kegiatan Thamrin Olympiad Cup 11 dalam bentuk buku pembahasan ini bisa diselesaikan sesuai waktu yang ditentukan. Shalawat serta salam tidak lupa kita selalu haturkan kepada Nabi Muhammad SAW, semoga syafaatnya sampai kepada kita semua selaku umatnya.

Sebelumnya, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada seluruh pihak panitia atas sumbangsihnya dalam pelaksanaan Thamrin Olympiad Cup ini, karena tanpa kerja sama seluruh pihak, tidaklah mungkin kegiatan ini dapat berjalan dengan lancar dari awal sampai akhir. Terutama kepada Bapak Kepala Sekolah SMANU MH Thamrin dan jajaran ibu/bapak guru lainnya, yang telah memberikan arahan kepada kami dan ruang untuk bereksplorasi dalam mengembangkan kegiatan ini.

Kemudian, kami juga mengapresiasi kepada seluruh peserta atas antusiasme dan sportivitas kalian meskipun menghadapi tantangan yang berat. Kami sangat menghargai kejujuran, integritas, semangat, dan usaha seluruh peserta dalam rangka mengikuti dan menyukseskan kegiatan ini. Kiranya memang kegiatan Thamrin Olympiad Cup ini dilaksanakan dengan segala keterbatasannya mengingat sedang berlangsungnya keadaan pandemi di tahun ini. Namun hal itu semua tidak membuat kami lantas putus arah, kami mencoba memberikan yang terbaik, agar kegiatan ini tetap terlaksana dengan optimal dan kami yakin seluruh peserta juga mengharapkan dan mengusahakan hal yang sama.

Kami berharap agar ke depannya, kegiatan ini bisa terus menjadi wadah bagi peserta-peserta didik untuk menunjukkan kemampuannya sekaligus mengembangkan potensi akademik maupun non-akademiknya pada kegiatan ini. Kami juga ingin agar kegiatan ini dapat terus berkembang ke arah yang lebih baik ke depannya.

Pastinya penyelenggaraan kegiatan ini masih jauh dari kata sempurna, oleh karenanya masukan, saran, kritik, dan lain sebagainya baik dari ibu/bapak guru sekolah, pihak panitia, peserta kegiatan, maupun komponen-komponen lainnya akan sangat membantu kami untuk meningkatkan kualitas penyelenggaraan kegiatan ini di waktu-waktu yang akan datang.

Semoga buku pembahasan ini dapat bermanfaat bagi kalian. Sampai jumpa di lain waktu!

Jakarta, 22 Februari 2021

Haidar Prayata Wirasana
***Event Organizer* MaQC 2021**

Daftar Isi

MAQC

PENYISIHAN 1

1 Soal dan Sumber

§1.1 Pilihan Ganda

1. **(K - Aljabar, Klasik, Sangat Mudah)** Rudi adalah tukang parkir yang memegang uang Rp2.000 dan Rp5.000an. Rudi memegang uang sejumlah Rp159.000 dan banyaknya uang adalah 60 lembar. Banyaknya uang lembar Rp2.000an yang dipegang Rudi adalah ....

   A. 23

   B. 29

   C. 37

   D. 47

2. **(K - Kombinatorika, Original, Sangat Mudah)** Pada sebuah survei yang dijawab 10 orang, tepat 8 orang menyukai sate, tepat 8 orang menyukai nasi goreng, serta tepat 8 orang menyukai ketoprak. Setiap dari 10 orang tersebut menyukai setidaknya salah satu dari makanan-makanan tersebut. Jika banyaknya orang yang menyukai sate, nasi goreng, dan ketoprak adalah maksimal dan memenuhi sifat yang telah diberikan, banyaknya orang yang menyukai ketiga makanan tersebut adalah ....

   A. 4

   B. 5

   C. 6

   D. 7

3. **(W - Teori Bilangan, Original, Mudah)** Misalkan $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ untuk semua bilangan asli n dan $0! = 1$. Banyaknya pasangan bilangan cacah (m, n) yang memenuhi

   $$n! + 9! = 3^m$$

   adalah ....

   A. 0

   B. 1

   C. 2

   D. 3

4. **(W - Geometri, Original, Mudah)** Diberikan sebuah lingkaran ω berjari-jari 5 dan berpusat di titik O. Titik A dan B terletak pada busur lingkaran dan panjang $AB = 8$. Titik C merupakan titik tengah AB dan titik-titik D_1 dan D_2 merupakan perpotongan perpanjangan OC dengan lingkaran ω. Luas minimum dan maksimum dari segitiga AD_1B dan AD_2B berturut-turut adalah m dan M. Nilai dari $M - m$ adalah ....

   A. 14

   B. 20

   C. 24

   D. 30

5. **(K - Aljabar, Last Minute Mock AMC 11.5 2015, AoPS: whatshisbucket P7, Mudah)** Petra dan Susi suka membangun tembok. Petra dapat membangun sebuah tembok dalam 6 jam sementara Susi dapat membangun sebuah tembok dalam 7 jam. Jika Petra dan Susi bekerja sama mereka akan memerlukan waktu 3 jam 30 menit untuk membangun sebuah tembok. Suatu hari, atasan dari Petra dan Susi menyuruh mereka membangun dua tembok identik. Jika Petra dan Susi membangun temboknya sendiri terlebih dahulu, lalu setelah Petra selesai membangun temboknya ia membantu Susi, lamanya waktu pembangunan yang dihemat dibandingkan dengan jika mereka membangun kedua tembok tersebut bersama-sama adalah ... jam.

   A. $\frac{1}{3}$

   B. $\frac{1}{2}$

   C. $\frac{3}{4}$

   D. 0

6. **(K - Aljabar, Mock AMC 12: Christmas Mathematics Competition 3 2020, AoPS: FedeX333X P5, Mudah-sedang)** Misalkan barisan (a_n) memenuhi $a_0 = 0$ dan

$$a_n + \frac{1}{a_{n+1}} = 2$$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$. Hasil kali dari

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{2021}$$

bernilai ....

   A. $\frac{1}{2022}$

   B. $\frac{1}{2021}$

   C. $\frac{1}{1011}$

   D. $\frac{1}{1010}$

7. **(K - Kombinatorika, Mock AMC 10 2020, DMC 10 2020 - AoPS: DeToasty3 P13, Mudah-sedang)** Sepuluh murid akan mengikuti suatu ujian akhir. Tiga murid rajin dan pasti lulus pada ujian akhir ini, sementara 7 murid lainnya malas dan memiliki peluang yang sama untuk lulus. Jika Tomo adalah salah satu murid yang malas dan diketahui bahwa tepat 6 dari 10 orang lulus ujian akhir ini, peluang Tomo lulus dari ujian akhir ini adalah ....

   A. $\frac{1}{3}$

   B. $\frac{5}{16}$

   C. $\frac{2}{5}$

   D. $\frac{3}{7}$

8. **(H - Teori Bilangan, Original, Mudah-sedang)** Dua digit terakhir dari representasi desimal $7^{2005} \times 9^{11}$ adalah ....

   A. 09

   B. 27

   C. 63

   D. 81

9. **(W - Geometri, Original, Sedang)** Diberikan segitiga ABC dengan $\angle ABC = 30°$. Misalkan I merupakan perpotongan dari ketiga garis bagi segitiga ABC. Dibuat lingkaran berdiameter AI yang memotong sisi AC dan AB berturut-turut di titik P dan Q. Lalu, dibuat lingkaran berdiameter CI yang memotong sisi BC di titik R. Maka besar sudut $\angle RPQ$ adalah ....

   A. $60°$

   B. $85°$

   C. $75°$

   D. $70°$

10. **(W - Aljabar, Original, Sedang)** Diberikan suatu polinomial $P(x)$ sehingga untuk semua bilangan real x berlaku
$$P(P(x)) - P(x) = x.$$
Definisikan $P^n(x) = P(P^{n-1}(x))$ untuk setiap bilangan asli n dan misalkan $P^1(x) = P(x)$. Nilai dari
$$P(0) + P^2(0) + P^3(0) + \cdots + P^{2021}(0)$$
adalah ....
    A. -1
    B. 0
    C. 2
    D. 2021

11. **(K - Kombinatorika, Modifikasi OSP SMA 2006 Uraian Nomor 2, Sedang)** Diketahui m adalah bilangan asli yang memenuhi pertidaksamaan $1945 \leq m \leq 2020$. Misalkan $S = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$. Himpunan bagian dari S memiliki k anggota sehingga di dalam himpunan bagian tersebut selalu terdapat sepasang anggota yang jumlahnya 2020. Nilai minimum dari k adalah ....
    A. 505
    B. 506
    C. 1011
    D. 1012

12. **(W - Geometri, Original, Sedang-sulit)** Titik C dan D terletak berseberangan (pada belahan sisi yang berbeda dalam bidang) terhadap AB dan panjang $AB = 6$. Titik X merupakan perpotongan AB dan CD serta panjang $CD = 9$. Misalkan M dan N berturut-turut titik tengah AX dan BX. Jika panjang $AD = 8$ dan $BC = 4$ serta $\angle ADC = \angle BCD$, maka nilai dari $DM^2 + 2 \cdot CN^2$ adalah ....
    A. 51
    B. 69
    C. 78
    D. 81

13. **(K - Teori Bilangan, 2018 Memorial Day Mock AMC 10, AoPS: QIDb602 P18, Sedang-sulit)** Banyaknya bilangan bulat $1 \le n \le 100$ sehingga ekspresi

$$\frac{\sqrt{n^{3n}}}{\sqrt[3]{n^{2n}}}$$

juga bilangan bulat adalah ....

A. 18

B. 19

C. 20

D. 21

14. **(K - Kombinatorika, Mock AMC 10 2020, Spring TMC 10A - AoPS: kevinmathz P16, Sedang-sulit)** Anang dan Miftah bermain koin dengan peluang angka atau gambar yang tidak imbang. Suatu lemparan koin hanya dapat menghasilkan angka atau gambar, tetapi tidak keduanya sekaligus. Anang melempar koin duluan, kemudian dilanjutkan dengan Miftah. Anang akan menang jika Anang mendapatkan angka pada gilirannya, sedangkan Miftah akan menang jika Miftah mendapatkan gambar pada gilirannya. Ternyata peluang Anang atau Miftah menang adalah sama. Peluang munculnya angka jika koin tidak imbang pada permainan tersebut dilempar adalah ....

A. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

B. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

C. $\dfrac{1}{3}$

D. $\dfrac{2}{5}$

15. **(K - Aljabar, Stormersyle Mock AMC 10 P19, Sedang-sulit)** Untuk suatu real a, misalkan $M(a)$ adalah nilai minimum dari $x + \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{x + \frac{a}{x}}$ untuk semua x yang merupakan bilangan real positif. Banyaknya bilangan real $1 \le a \le 20$ yang menyebabkan $M(a)$ bilangan bulat positif adalah ....

A. 9

B. 2

C. 11

D. 4

16. **(K - Teori Bilangan, Eduversal Mathematics Competition SMA, Sulit)** Misalkan $P(x)$ adalah polinomial dengan suku-sukunya berkoefisien bilangan bulat sedemikian sehingga untuk suatu bilangan asli n, $P(x)$ memenuhi sistem persamaan

$$P(1) = 0$$
$$P(2) = 2$$
$$P(n) = n!$$

di mana $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$. Bilangan n terbesar yang memenuhi adalah ....

    A. 2

    B. 3

    C. 4

    D. 6

17. **(W - Geometri, Original, Sulit)** Diberikan segitiga ABC dengan $\angle BAC = 50^\circ$ dan $\angle ACB = 70^\circ$. Garis bagi $\angle BAC$ memotong lingkaran luar di titik M, serta I merupakan perpotongan garis-garis bagi segitiga dari ABC. Titik N merupakan titik tengah BI. Maka besar dari $\angle IMN$ adalah ....

    A. 50°

    B. 40°

    C. 47°

    D. 35°

18. **(H - Kombinatorika, Original, Sulit)** Haidar dan Kevin bermain suatu permainan dengan aturan sebagai berikut. Haidar memulai duluan dengan suatu bilangan bulat positif k. Lalu, Kevin melanjutkannya dengan memilih suatu angka $k+1$, $k+2$, atau $2k+2$ agar diperoleh bilangan selanjutnya. Kemudian permainan dilanjutkan secara bergantian dengan cara yang sama. Orang terakhir yang dapat menghasilkan bilangan asli yang tidak lebih dari 2021 pada gilirannya akan menang. Jika Haidar dapat selalu menang dengan memulai dengan bilangan asli k, jumlah dari 2 bilangan asli k terkecil sehingga hal ini dapat terjadi adalah ....

    A. 10

    B. 7

    C. 6

    D. 4

19. **(K - Geometri, Mock AMC 10 2020, Spring TMC 10A - AoPS: kevinmathz P21, Sangat Sulit)**
Pada keliling lingkaran ω berdiameter ruas garis AB, terdapat titik $C \neq A$. Garis singgung ω melalui A dan C berpotongan pada titik D sehingga $DA = DC = 3$ dan diketahui pula $BC = 5$. Panjang dari diameter AB adalah ....

   A. 6

   B. 8

   C. $6\sqrt{2}$

   D. $3\sqrt{5}$

20. **(K - Teori Bilangan, Mock AIME 2019 $WT\mu OO$ 2019 P1, AoPS: cjquines0, Sangat sulit)**
Definisikan sebuah operasi $x \star y = \dfrac{2xy}{x+y}$ kemudian misalkan S_1 adalah himpunan yang memiliki 2 anggota, yakni $S_1 = \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$. Untuk $n \geq 2$, himpunan S_n didefinisikan sebagai berikut: Jika x dan y adalah anggota-anggota (yang mungkin sama) dari himpunan S_{n-1}, maka $x \star y$ adalah anggota dari himpunan S_n. Unsur ke-2021 terkecil dari S_{12} adalah $\dfrac{m}{n}$, di mana m dan n adalah bilangan-bilangan bulat positif yang relatif prima. Nilai dari $m+n$ adalah ....

   A. 768

   B. 775

   C. 1031

   D. 1034

§1.2 Isian Singkat

21. **(K - Geometri, Original, Mudah-sedang)** Pada suatu bidang, titik-titik O, A, B segaris dengan urutan tersebut dan terdapat titik C yang tidak segaris dengan OA pada bidang yang sama sehingga $\triangle OAC$ sebangun dengan $\triangle ACB$. Jika panjang $AB = 24$ dan $AO = 54$, maka luas $\triangle OCB$ adalah ....

22. **(K - Aljabar, Modifikasi USAMTS 1998, Modifikasi Brilliant Competition Penyisihan 2 P1 2019, Mudah-sedang)** Misalkan x, y adalah bilangan real sehingga

$$(4x^2 - 14x + 15)(9y^2 - 12y + 40) = k$$

memiliki tepat sebuah solusi real (solusi unik) (x, y). Nilai dari k yang mungkin adalah ....

23. **(H - Teori Bilangan, Klasik, Sedang)** Bilangan $Neverland$ adalah bilangan yang bersisa 83 ketika dibagi oleh 101, bersisa 11 ketika dibagi 17 dan bersisa 4 ketika dibagi 23. Bilangan $Neverland$ positif terkecil adalah ....

24. **(K - Geometri, Original, Sedang)** Diketahui semua talibusur-talibusur AF, CE, dan AG terletak pada sebuah lingkaran ω sehingga titik potong AF dengan CE adalah B dan titik potong AG dengan CE adalah D. Ternyata, $BC = DE < BD$ dan $\triangle ADF$ sama sisi dengan panjang $AB = BF = 42$. Panjang ruas garis CE adalah $a\sqrt{b}$ di mana b bilangan asli yang tidak habis dibagi kuadrat prima manapun. Nilai dari $a + b$ adalah ....

25. **(K - Teori Bilangan, Original, Sedang-sulit)** Misalkan terdapat k anak dan beberapa permen, dengan k merupakan suatu bilangan asli. Ternyata, semua anak merasa senang jika sudah mendapatkan m permen, dengan m merupakan suatu konstanta bilangan asli. Misalkan Anda yang mengendalikan permen yang Anda ingin berikan. Jika Anda memberikan 187 permen dan membagikannya serata mungkin (seorang anak hanya memperoleh p atau $p + 1$ permen), semua anak akan merasa senang. Namun, jika Anda memberikan 160 permen serata mungkin, tidak ada anak yang merasa senang. Nilai maksimum dari k adalah ....

26. **(H - Aljabar, Ben Asriparusa, Sedang-sulit)** Misalkan $\lfloor x \rfloor$ menotasikan bilangan bulat terbesar yang kurang dari sama dengan x. Misalnya, $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$ dan $\lfloor 2 \rfloor = 2$. Diketahui bilangan real x memenuhi persamaan

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{\lfloor x \rfloor} + \frac{1}{\lfloor 2x \rfloor}.$$

Nilai x terbesar yang memenuhi adalah $\dfrac{m}{n}$ di mana m dan n merupakan pasangan bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $m + n$ adalah ....

27. **(H - Kombinatorika, Klasik, Sedang-sulit)** Wildan adalah seorang yang rajin, ia selalu membuat setidaknya 5 soal setiap hari. Pada suatu minggu, ia membuat 32 soal dalam 5 hari. Dengan syarat tidak ada 3 hari berurutan di mana dia membuat soal dengan jumlah yang sama, maka banyaknya total pembuatan soal yang mungkin jika soalnya tidak dibedakan adalah ....

28. **(H - Aljabar, Original, Sulit)** Diketahui x, y, z adalah bilangan-bilangan real positif sehingga $x + y + z = 8$. Nilai maksimum dari ekspresi

$$\frac{8x^2}{x^4 + 48} + \frac{8y^3}{y^4 + 256} + \frac{3z^2}{z^3 + 16}$$

adalah ....

29. **(H - Kombinatorika, Klasik, Sulit)** Kenji dan Haidar sedang memainkan permainan dadu bermata 6. Pada permainan tersebut, setiap orang melemparkan sebuah dadu kemudian jumlah mata dadu di atas direkam. Pemain yang menang adalah pemain pertama yang jika angka-angka yang terekam dari pelemparan dadu pertama sampai kepada giliran orang tersebut dijumlahkan, hasil penjumlahannya merupakan kelipatan 7. Jika Haidar melakukan pelemparan pertama, peluang Kenji memenangkan permainan ini adalah $\frac{p}{q}$ di mana $FPB(p, q) = 1$. Nilai dari $p + q$ adalah ....

30. **(H - Geometri, Original, Sulit)** Diketahui $ABCD$ adalah jajargenjang yang mana pada ruas garis AB terdapat titik E sehingga $AE : EB = 2 : 3$, serta titik F pada ruas garis BC sehingga $BF : FC = 1 : 2$. Garis AF memotong garis-garis DE dan DB pada G dan I berturut-turut, sementara garis CE memotong BD dan AF pada J dan H berturut-turut. Jika $[ABCD]$ artinya luas dari daerah yang dibatasi oleh titik-titik A, B, C, D, nilai dari

$$\frac{[\triangle JHI] + [\triangle GHE]}{[ABCD]}$$

adalah $\frac{m}{n}$ di mana $FPB(m, n) = 1$. Nilai dari $m + n$ adalah ....

2 Kunci Jawaban

§2.1 Pilihan Ganda

1. D
2. D
3. A
4. C
5. A
6. A
7. D
8. C
9. C
10. B
11. C
12. B
13. D
14. A
15. A
16. C
17. D
18. B
19. D
20. C

§2.2 Isian Singkat

21. 1404
22. 99
23. 487
24. 49
25. 23
26. 27
27. 289
28. 2
29. 17
30. 841

3 Solusi dan Pembahasan

§3.1 Pilihan Ganda

1. Misal banyaknya uang Rp2.000an adalah u sehingga banyaknya uang Rp5.000an adalah $60 - u$, maka

$$2000u + 5000(60 - u) = 159000 \iff 2000u + 300000 - 5000u = 159000$$
$$\iff 141000 = 3000u \iff u = 47$$

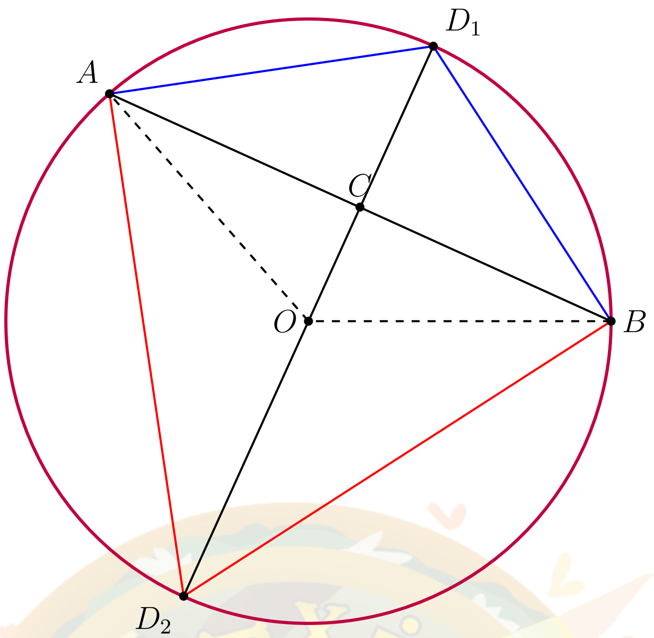
jadi banyaknya uang Rp2.000an adalah $\boxed{47}$. $\square$

2. Misalkan nasi goreng $= N$, sate $= S$, dan ketoprak $= K$. Pertimbangkan banyaknya orang yang menyukai maksimal 2 makanan. Terdapat masing-masing tepat 2 orang yang tidak menyukai N, K, atau S saja. Perhatikan bahwa keenam pernyataan mengenai orang tersebut haruslah memiliki kardinalitas minimal, maka keenam pernyataan mengenai "tidak menyukai makanan" daripada orang-orang tersebut haruslah beririsan semaksimal mungkin. Namun, tidak boleh ada orang yang mana ketiga pernyataan berlaku untuknya (setiap orang menyukai setidaknya satu) dan tidak boleh ada orang yang memiliki pernyataan yang berlaku (kasus untuk orang yang menyukai ketiganya sudah diabaikan). Ternyata, jika setiap orang memenuhi 2 pernyataan, 3 orang tidak termasuk dalam kelompok orang yang menyukai ketiga makanan tersebut. Jadi terdapat maksimal 7, di mana 7 orang menyukai ketiga makanan, 1 orang menyukai masing-masing makanannya saja. Jadi jawabannya $\boxed{7}$. $\square$

> **Komentar.** Solusi yang lebih sederhana sebagai berikut: Jelas bahwa banyaknya orang adalah $n \leq 8$. Dan $n = 8$ tidak memenuhi karena artinya kedua orang lain tidak menyukai manapun, kontradiksi dengan soal. Sementara $n = 7$ memenuhi, dengan 7 orang menyukai ketiganya dan 1 orang menyukai masing-masing makanan yang ada, sehingga jawabannya $\boxed{7}$. Kemampuan dasar yang diujikan pada soal ini adalah mencari konfigurasi, dan penalaran dengan logika umum. Menyelesaikan soal ini murni dengan rumus dapat menyebabkan kesulitan.

3. Tinjau bahwa 3^m senantiasa ganjil, maka ruas kiri harus ganjil sehingga $n \leq 1$. Ada dua kemungkinan, $n! = 0! = 1$ atau $1! = 1$ namun ini berarti $9! + 1 = 3^m$. Namun $3|9!$ yang berarti $9! + 1$ tidak habis dibagi 3. Jadi satu-satunya nilai yang mungkin adalah $m = 0$ jadi $9! + 1 = 1$. Artinya $9! = 0$, kontradiksi, maka ada $\boxed{0}$ solusi cacah (m, n). $\square$

4. Misalkan perpanjangan OC memotong ω di titik D_1 dan D_2 dimana $[AD_1B] = m$ dan $[AD_2B] = M$.



Karena panjang $AO = OB = 5$ dan $AC = CB = 4$, maka $OC \perp AB$ (OC apotema dari tali busur AB). Dari Teorema Pythagoras diperoleh

$$OC = \sqrt{OB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

Sehingga panjang $D_1C = OD_1 - OC = 5 - 3 = 2$. Maka

$$m = [AD_1B] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$$

Tinjau $CD_2 = OC + OD_2 = 3 + 5 = 8$. Maka

$$M = [AD_2B] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot D_2C = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$$

Maka $M - m = 32 - 8 = \boxed{24}$. $\square$

5. Perhatikan kedua kasus yang disediakan. Misalkan kecepatan kerja Petra adalah p, kecepatan kerja Susi adalah s sementara kecepatan kerja bersama adalah r. Maka $6p = 7s = \frac{7r}{2} = t$ di mana t adalah banyaknya bagian dari sebuah tembok. Jika Petra dan Susi mengerjakan secara terpisah, maka setelah 6 jam Petra akan menyelesaikan temboknya sementara Susi bekerja selama 6 jam, maka tembok Susi akan sudah selesai $6s = \frac{6}{7}t$ sehingga $\frac{1}{7}t$ akan dikerjakan bersama. Tinjau $\frac{1}{7}t = \frac{r}{2}$ maka lamanya mereka bekerja sama adalah $\frac{1}{2}$ jam, total waktu kerja adalah $6\frac{1}{2}$ jam. Sementara pada kasus 2, lamanya mengerjakan 2 tembok adalah $2 \times 3\frac{1}{2} = 7$ jam. Maka waktu yang dihemat adalah $7 - 6\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$ jam. $\square$

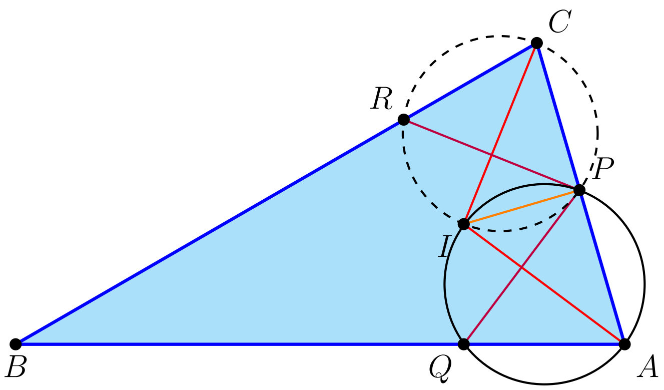
6. Memasukkan, $a_0 + \frac{1}{a_1} = 2$ sehingga $a_1 = \frac{1}{2}$, kemudian $a_1 + \frac{1}{a_2} = 2 \iff \frac{1}{2} + \frac{1}{a_2} = 2 \iff a_2 = \frac{2}{3}$. Dapat diduga bahwa $a_n = \frac{n}{n+1}$. Menggunakan induksi kuat (*strong induction*), misalkan $a_n = \frac{n}{n+1}$ berlaku untuk $n = 1, 2, \ldots, n$ bagi suatu bilangan asli n. *Base case* untuk $n = 1$ dan $n = 2$ sudah terbukti. Maka $a_n + \frac{1}{a_{n+1}} = 2 \iff \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2n+2-n}{n+1} \iff \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1}$ sehingga induksi terbukti. Maka nilai yang dicari adalah
$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2021}{2022} = \boxed{\frac{1}{2022}}. \quad \square$$

7. Perhatikan 3 dari 6 sudah pasti lulus, 3 dari 7 lain yang lulus adalah di antara murid-murid yang malas. Akan ditentukan total kemungkinannya terlebih dahulu. Banyaknya kemungkinan memilih 3 murid dari 7 murid adalah $\binom{7}{3} = 35$. Hal ini dapat dilakukan karena peluang semua murid lulus sama, sehingga tidak faktor peluangnya tidak beda. Sedangkan, banyaknya kemungkinan memilih Tomo dan 2 murid dari 6 murid lainnya adalah $1 \cdot \binom{6}{2} = 15$ maka peluangnya adalah $\frac{15}{35} = \boxed{\frac{3}{7}}$. $\square$

> **Komentar.** Solusi resmi dari penyelenggara lombanya menggunakan peluang binomial, namun sebenarnya cara di atas lebih ringkas. Cara peluang binomial sebagai berikut: Misal p peluang murid malas lulus. Peluang 3 dari 7 murid malas lulus adalah $\binom{7}{3}p^3(1-p)^4$. Sedangkan peluang Tomo lulus dan 2 murid dari 6 murid malas lulus adalah $p \cdot \binom{6}{2}p^2(1-p)^4 = \binom{6}{2}p^3(1-p)^4$ sehingga diperoleh kesimpulan yang sama.

8. Tinjau bahwa $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$ maka $7^{2005} = (7^4)^{501} \cdot 7 \equiv 1^{501} \cdot 7 \pmod{100}$. Sementara $9^{11} = (10-1)^{11} \equiv \binom{11}{10} \cdot 10 - 1 \pmod{100} \equiv 9 \pmod{100}$. Maka, hanya perlu dicari $7 \cdot 9 \pmod{100} \equiv 63 \pmod{100}$, sehingga dua digit terakhir yang diminta adalah $\boxed{63}$. $\square$

9. Kita punya $\angle A + \angle C = 150°$.



Tinjau bahwa $\angle API = \angle CPI = 90^\circ$ karena AI diameter. Jika lingkaran luar berdiameter CI memotong AC di P', maka $\angle CP'I = 90^\circ = \angle CPI$, demikian karena lingkaran berdiameter CI memotong sebuah garis pada maksimal 2 titik yakni pada C dan P', serta C, P, P' kolinear (segaris), diperoleh $P = P'$. Dari hubungan sudut keliling, maka

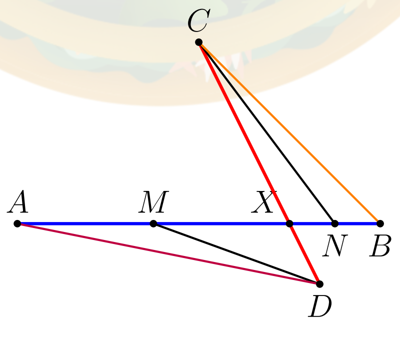
$$\angle RPQ = \angle RPI + \angle QPI = \angle RCI + \angle QAI = \frac{\angle A + \angle C}{2} = \frac{150^\circ}{2} = \boxed{75^\circ.} \quad \square$$

> **Komentar.** Solusi menggunakan *Phantom point.* Pernyataan lain menggunakan observasi 2 segiempat siklis dan menyimpulkan dari situ.

10. Perhatikan untuk $x = 0$, $P(P(0)) - P(0) = 0 \iff P(P(0)) = P(0)$. Memisalkan $P(0) = u$ dan memasukkan kembali, $u = P(P(u)) - P(u)$. Diketahui juga $P(u) - u = 0 \iff P(u) = u$, maka $P(u) - P(u) = u \iff u = 0$. Jelas $P^n(u)$ juga 0 untuk n bilangan asli, karena $P(P(0)) = P(0) = 0$ yang dapat dilanjutkan dengan induksi. Sehingga jumlahnya adalah $\boxed{0}$. $\square$

11. Jawabannya $\boxed{1011}$. Jika $k \leq 1010$, jelas tidak memenuhi karena jumlah maksimal dari himpunan bagian berukuran k dari $\{1, 2, 3, \ldots, 1010\}$ hanyalah $2019 < 2020$. Untuk membuktikan $m = 1011$ minimal, kelompokkan $(1, 2019), (2, 2018), \ldots, (1009, 1011)$ menjadi 1009 pasangan, dan 1010 adalah kelompok sendirian. Perhatikan 2020 tidak dipertimbangkan karena tidak dapat dipasangkan dengan anggota manapun sehingga jumlahnya 2020. Maka ada 1010 kelompok, sehingga dengan *Pigeonhole Principle*, jika diambil 1011 akan terdapat pasangan lengkap yang jumlahnya 2020, sehingga terbukti. $\square$

12. Karena $\angle ADX = \angle BCX$, $\angle AXD = \angle BXC$, dan $\angle XAD = \angle CBX$, maka $\triangle AXD \sim \triangle BXC$.



Sehingga

$$\frac{AX}{XB} = \frac{DX}{XC} = \frac{AD}{BC} = \frac{8}{4} = 2$$

Maka kita peroleh panjang $AX = 4, BX = 2$, dan $DX = 6, CX = 3$. Dengan Teorema Stewart pada $\triangle ADX$, diperolehlah

$$DM^2 = \frac{AD^2 \cdot MX + DX^2 \cdot AM - MX \cdot AM \cdot AX}{AX} = \frac{128 + 72 - 16}{4} = \frac{184}{4} = 46$$

Dengan cara sama kita peroleh $2 \cdot CN^2 = 23$. Maka $DM^2 + 2 \cdot CN^2 = 46 + 23 = \boxed{69}$. $\square$

> **Komentar.** Alternatif dari mencari CN adalah dengan meninjau bahwa dengan kesebangunan $\triangle AXD$ dengan $\triangle BXC$ maka haruslah DM dengan CN memiliki proporsi panjang yang sama, yang mana $2CN = DM$. Sehingga $4CN^2 = DM^2 \iff 2CN^2 = \frac{1}{2}DM^2$, sehingga hanya perlu mencari $\frac{3}{2}DM^2 = \frac{3}{2} \times 46 = 69$.

13. Tinjau ekspresi yang dimiliki ekuivalen dengan $n^{\frac{5}{6}\cdot n}$. Agar ekspresi tersebut merupakan bilangan bulat, haruslah dipertimbangkan kelima kasus berikut:

Kasus 1. $n = 1$ ada 1 solusi.

Kasus 2. n kelipatan 6: $n = 6, 12, \ldots, 96$ maka ada 16 solusi.

Kasus 3. n pangkat 6 dari suatu bilangan bulat: $2^6 = 64$ maka ada 1 solusi.

Kasus 4. n bilangan kuadrat dari kelipatan 3: $3^2, 6^2, 9^2$ maka ada 2 solusi baru (6^2 pada kelipatan 6)

Kasus 5. n bilangan kubik dari kelipatan 2: $2^3, 4^3$ maka ada 1 solusi baru ($4^3 = 2^6$).

Jadi ada $1 + 16 + 1 + 2 + 1 = \boxed{21}$ solusi. □

14. Misalkan peluang munculnya angka adalah p. Maka peluang munculnya gambar adalah $1 - p$. Definisikan sebuah ronde sebagai kelompok dua giliran, dengan urutan Anang kemudian Miftah. Perhatikan bahwa:

Peluang Anang menang pada giliran pertama: p

Peluang Miftah menang pada ronde pertama, giliran kedua: $(1 - p)(1 - p)$

(Anang mendapatkan gambar dan Miftah mendapatkan gambar)

Peluang melanjut ke ronde selanjutnya: $(1 - p)p$

(Anang mendapatkan gambar dan Miftah mendapatkan angka)

Maka peluang kemenangan total dari Anang dan Miftah adalah

$$p(1 + (1 - p)p + [(1 - p)p]^2 + [(1 - p)p]^3 + \ldots) = \frac{1}{2}$$
$$(1 - p)^2(1 + (1 - p)p + [(1 - p)p]^2 + [(1 - p)p]^3 + \ldots) = \frac{1}{2}$$

karena $1 + (1 - p)p + [(1 - p)p]^2 + \ldots$ adalah pengalian (faktor) dari peluang kemenangan dengan peluang menang pada ronde pertama dan ronde-ronde selanjutnya, sebab mereka tidak akan berhenti sampai ditemukan pemenangnya. Sekarang tinjau bahwa $t = 1 + (1 - p)p + [(1 - p)p]^2 + \ldots \neq 0$ sehingga membagi kedua persamaan tersebut dengan t, diperoleh persamaan

$$p = (1 - p)^2 = \frac{1}{2t} \iff p^2 - 3p + 1 = 0$$

maka $p = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Jelas solusi yang diambil adalah $p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ karena $0 < p < 1$, maka peluang mendapatkan kepala adalah $\boxed{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$. □

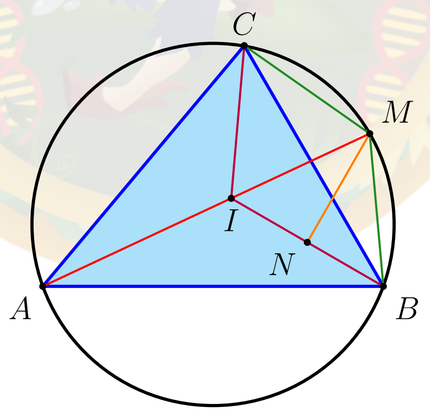
15. Memisalkan $y = x + \frac{a}{x}$, dengan AM-GM, $y \geq 2\sqrt{a}$ saat $x = \sqrt{a}$. Jika $y \geq \sqrt{a}$, maka $y + \frac{a}{y}$ akan naik tegas, maka $M(a)$ optimal saat $y \geq \sqrt{a}$, dan mengingat domainnya $y \geq 2\sqrt{a}$, harus ditinjau bahwa $y + \frac{a}{y}$ naik tegas sehingga $M(a)$ optimum saat $y = 2\sqrt{a}$. Maka agar $M(a) = 2\sqrt{a} + \frac{a}{2\sqrt{a}} = \frac{5}{2}\sqrt{a}$ bilangan bulat positif, maka bilangan real a yang memenuhi adalah $a = \frac{4}{25}n^2$ agar hasilnya adalah bilangan asli n. Maka dapat dilihat dan diperiksa bahwa $3 \leq n \leq 11$ memenuhi untuk $1 \leq a \leq 20$ sehingga banyaknya solusi untuk a adalah $11 - 2 = \boxed{9}$, yakni saat $n = 3, 4, \ldots, 11$. $\square$

16. Jawabannya adalah 4. Tinjau bahwa $n - 2 | P(n) - P(2)$ karena koefisien-koefisiennya bilangan bulat. Hal ini diperoleh dengan memisalkan

$$P(k) = \sum_{k=0}^{p} a_k \cdot x^k$$

untuk polinom berderajat p, maka $P(n) - P(2) = \sum_{k=0}^{p} a_k \cdot (n^k - 2^k)$ habis dibagi $n - 2$ karena untuk $k > 0$, $n^k - 2^k = (n-2)(n^{k-1} + 2n^{k-2} + \cdots + 2^{k-1})$, dan untuk $k = 0$, diperoleh $n - 2|0$. Artinya, $n - 2|n! - 2$. Dengan sifat keterbagian, karena $n - 2|n!$, $n - 2|-2$. Mengambil faktor terbesarnya, $n - 2 = 2 \iff n = 4$. Maka cukup membuktikan bahwa ada solusi untuk $P(1) = 0, P(2) = 2, P(4) = 24$. Ternyata $P(x) = 3x^2 - 7x + 4$ memenuhi, sehingga terbukti bahwa $n = \boxed{4}$ bilangan terbesar. $\square$

17. Kita punya bahwa $\angle ABC = 60°$.



Sehingga kita punya juga $\angle ABI = \angle CBI = 30°$. Demikian juga $\angle BCI = \angle ACI = 35°$. Karena $ABMC$ siklis, maka

$$\angle BMA = \angle BCA = 70° \quad \text{dan} \quad \angle CMA = \angle CBA = 60°$$

Tinjau bahwa $\angle BAI = \angle CAI = 25°$. Kita punya $\angle MBC = \angle MAC = 25°$. Sehingga $\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = 25° + 30° = 55°$. Tinjau juga bahwa

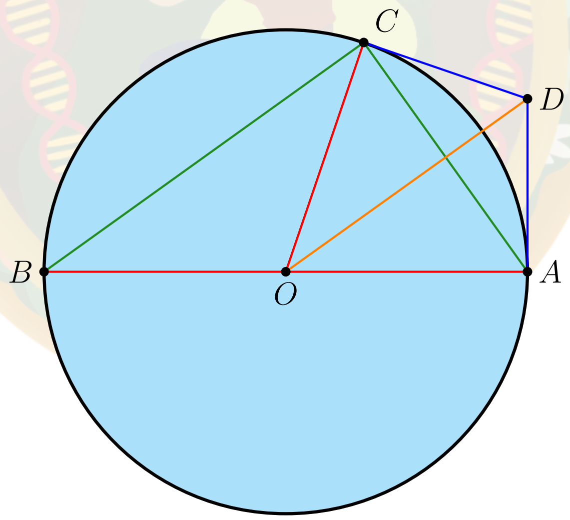
$$\angle IMB = \angle AMB = \angle ACB = 70°$$

Kita peroleh $\angle BIM = 55°$. Demikian panjang $BM = MI$, karena N titik tengah BI maka $MN \perp BI$. Maka kita dapatkan $\angle IMN = 90° - 55° = \boxed{35°}$. $\square$

> **Komentar.** Cara lain adalah dengan menggunakan informasi yang diperoleh dari derivasi *Incenter-Excenter Lemma*, yakni titik M yang terdefinisi merupakan titik pusat segiempat siklis $BICI_A$ di mana I_A titik pusat lingkaran singgung luar yang menyinggung langsung sisi BC dan menyinggung perpanjangan dari sisi-sisi AB dan AC. Maka dari itu, $MB = MI = MC$ sehingga $\triangle MIB$ samakaki. Karena $MB = MI$ dan $NB = NI$, $\triangle BMN \cong \triangle IMN$ dengan dalil sisi-sisi-sisi sehingga $\angle IMN = \angle BMN$. Karena $\angle IMN + \angle BMN = \angle IMB = \angle AMB = \angle ACB = 70°$, maka $\angle IMN = \frac{1}{2} \times \angle ACB = 35°$.

18. Perhatikan bahwa pemenangnya harus memperoleh 2021 karena adanya operasi $k+1$. Tinjau bahwa $2021 \equiv 2 \pmod 3$, maka Haidar akan memilih bilangan yang merupakan bilangan $2 \pmod 3$. Dengan ini, Kevin tidak akan pernah mendapatkan bilangan yang $2 \pmod 3$: Jika Kevin memilih $k+1$ atau $k+2$ bilangannya akan menjadi 0 atau $1 \pmod 3$, sementara jika Kevin memilih $2k+2$ bilangannya menjadi $0 \pmod 3$. Sementara, dari sini, Haidar selalu dapat menjadikan bilangannya $2 \pmod 3$ dengan operasi $k+1$ untuk $1 \pmod 3$ atau $k+2$, $2k+2$ jika $k \equiv 0 \pmod 3$. Jadi Kevin tidak mungkin menang - sehingga Haidar selalu menang. Dua nilai terkecil dari k adalah 2 dan 5, sehingga jumlahnya $\boxed{7}$. □

19. Misalkan titik tengah ruas garis AB adalah O sehingga O merupakan titik pusat ω.



Kini, tinjau $\triangle DAO \cong \triangle DCO$ karena $DO = DO$, $DA = DC$ dan $AO = CO = R$ di mana R merupakan jari-jari dari ω. Maka memisalkan $\angle COD = \angle DOA = x$, diperoleh $\angle COA = 2x = 2\angle CBA$ sehingga $\angle CBA = x$. Maka karena $\angle ACB = 90° = \angle DCO$ dan $\angle COD = \angle CBA$, diperoleh $\triangle CDO \sim \triangle CAB$ maka berlakulah

$$\frac{CD}{CO} = \frac{CA}{CB} = \frac{3}{R} = \frac{AC}{5} \iff \frac{15}{R} = AC.$$

Sekarang, memberlakukan Pythagoras pada $\triangle ACB$,

$$\left(\frac{15}{R}\right)^2 + 5^2 = (2R)^2 \iff \left(\frac{225}{R^2}\right) + 25 = 4R^2$$

sehingga dengan memisalkan $R^2 = m$ dan mengalikan kedua ruas dengan m, mengetahui bahwa $m = 0$ tidak memenuhi, diperoleh persamaan kuadrat

$$4m^2 - 25m - 225 = 0$$

yang berarti $m = \dfrac{45}{4}$ atau $m = -5$ dengan rumus kuadrat. Namun karena $x^2 = m \geq 0$, diambil solusi $m = \dfrac{45}{4}$. Yang dicari adalah nilai $2R = \sqrt{4m} \Rightarrow 2R = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}}$. $\square$

20. Pertimbangkan himpunan $T_i = \left\{\dfrac{1}{x} | x \in S_i\right\}$. Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{x} \star \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

yang berarti anggota-anggota pada T_n hanyalah semua rata-rata yang mungkin dari T_{n-1}. Maka, dapat diperhatikan bahwa:

$$T_1 = \{1, 2\}$$
$$T_2 = \left\{\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}\right\}$$
$$T_3 = \left\{\frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}\right\}$$

dan dengan argumen induksi, dapat dibuktikan bahwa

$$T_{n+1} = \left\{\frac{2^n}{2^n}, \frac{2^n + 1}{2^n}, \cdots + \frac{2^{n+1}}{2^n}\right\}.$$

Maka, suku ke-2021 terkecil dari S_{12} adalah suku ke-2021 terbesar dari T_{12}, yang berarti merupakan bilangan

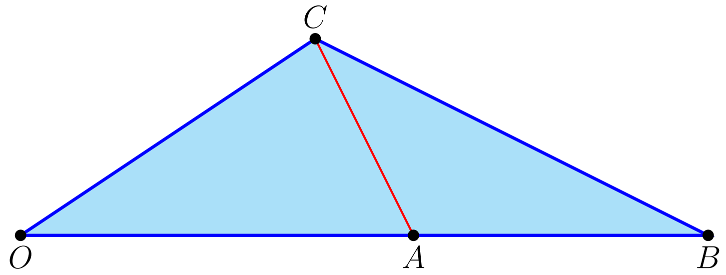
$$\frac{2^{12} - 2020}{2^{11}} = \frac{2076}{2048} = \frac{519}{512}$$

yang berarti $m + n = \boxed{1031}$. $\square$

Komentar. Solusi pada soal adalah suku terbesar ke-2021 dari T_{12}. Jika diambil $\dfrac{512}{519}$ diperoleh suku terkecil ke-2021 dari S_{12}, maka baris terakhir pada solusi di atas sudah cukup. Untuk melengkapi bukti, argumen induksi sebagai berikut:
Misal $T_n = \left\{\dfrac{2^{n-1}}{2^{n-1}}, \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}, \cdots + \dfrac{2^n}{2^{n-1}}\right\}$ sebagai hipotesis induksi. *Base case* untuk $n = 1, 2, 3$ menggunakan contoh pada solusi. Misal $a_k = \dfrac{2^{n-1} + k - 1}{2^{n-1}}$. Maka untuk mendapatkan suku-suku baru dari T_{n+1}, hanya perlu melakukan operasi $\dfrac{1}{a_k} \star \dfrac{1}{a_{k+1}} = \dfrac{1}{2} \cdot (a_k + a_{k+1}) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2^{n-1} + k - 1 + 2^{n-1} + k}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{2^n + 2k - 1}{2^n}$ untuk $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$, sehingga diperoleh 2^{n-1} suku baru. Sementara pada suku lama terdapat $2^{n-1} + 1$ suku, jadi pada himpunan sekarang terdapat $2^n + 1$ suku, sehingga himpunan baru yang diperoleh sudah lengkap, terbukti. $\square$

§3.2 Isian Singkat

21. Karena O, A, B segaris, $\angle OAC + \angle CAB = 180°$.



Maka, $\angle CAB = \angle COA + \angle OCA$. Karena $\triangle OAC \sim \triangle ACB$ dan $\angle COA \neq \angle CAB$ dan $\angle ACO \neq \angle CAB$, maka $\angle CAO = \angle CAB$ sehingga $\angle CAO = \angle CAB = 90°$. Sekarang, jika $\angle OCA = \angle ACB$ maka dengan sudut-sisi-sudut, $\triangle OAC \cong \triangle BAC$ sehingga $AO = AB = 54$, kontradiksi. Maka $\angle OCA = \angle CBA$, sehingga perbandingan sisinya adalah $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AO} \iff AC^2 = AB \times AO \iff AC = \sqrt{24 \times 54} = 36$. Tinjau juga bahwa $CA \perp OB$, maka luas $\triangle OCB = \dfrac{1}{2} \times 78 \times 36 = \boxed{1404}$ satuan luas. □

22. Tinjau bahwa kedua ekspresi x dan y definit positif. Jika ada solusi unik, maka harus ada tepat 1 nilai x dan 1 nilai y yang memenuhi, yang berarti harus dicari nilai pada x dan y sehingga hanya memiliki 1 solusi. Maka, tinjau

$$4x^2 - 14x + 15 = 4\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$$

yang mana pemfaktorannya dapat diperoleh dengan rumus nilai minimum $\dfrac{-D}{4a}$ di mana D adalah diskriminan fungsi kuadrat tersebut. Dan tinjau

$$9y^2 - 12y + 40 \geq 36$$

dengan cara yang sama. Maka hasil kali uniknya adalah

$$\frac{11}{4} \times 36 = 11 \times 9 = \boxed{99}$$

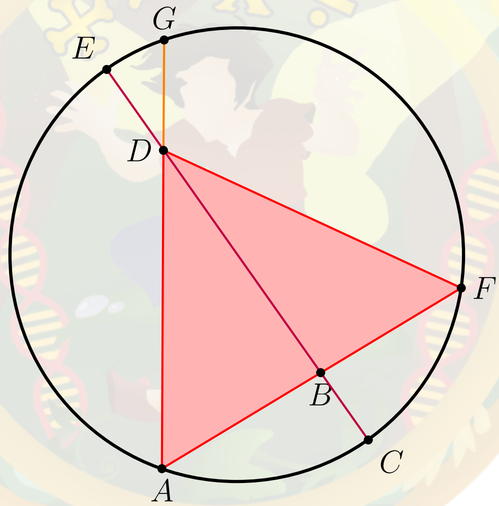
yang dicapai hanya saat $x = \dfrac{7}{4}$ dan $y = \dfrac{2}{3}$. □

23. Bilangan *Neverland* memenuhi sistem

$$x \equiv 83 \pmod{101}$$
$$x \equiv 11 \pmod{17}$$
$$x \equiv 4 \pmod{23}$$

Dengan *Chinese Remainder Theorem*, $x \equiv k \pmod{17 \times 23 \times 101}$ memiliki solusi unik untuk $0 \leq k \leq 17 \cdot 23 \cdot 101 - 1$ karena 17, 23, dan 101 saling relatif prima. Akan dicari terlebih dahulu dua persamaan yang di bawah. Karena $k = 23m + 4 \equiv 11 \pmod{17} \iff 6m \equiv 7 \pmod{17}$ maka $6m = 17n + 7 \iff 17n \equiv -1 \pmod{6} \equiv -n \equiv \pmod{6}$ maka $n = 1$ sehingga $6m = 24 \iff m = 4$ sehingga $k = 96$, jadi $k \equiv 96 \pmod{391}$.
Selanjutnya, karena $k = 391t + 96 \equiv 83 \pmod{101} \iff -13t - 5 \equiv 83 \pmod{101} \iff -13t \equiv 88 \pmod{101} \equiv -13 \pmod{101}$ sehingga $t = 1$ memenuhi, maka $k \equiv 487 \pmod{39491}$ sehingga bilangan *Neverland* terkecil adalah $\boxed{487}$. $\square$

24. Gambarlah grafik yang bagus.



Tinjau bahwa BD adalah garis sumbu AF karena $\triangle ADF$ sama sisi sehingga CE diameter ω sebab titik pusat suatu lingkaran terletak pada titik potong dua garis sumbu dari tali busur yang saling tegak lurus. Dengan segitiga istimewa 30-60-90, $BD = 42\sqrt{3}$. Misalkan $BC = DE = x$ kemudian dengan *Power of a point* dari titik B terhadap ω,

$$x(x + 42\sqrt{3}) = 42^2 \iff x^2 + 42x\sqrt{3} - 42^2 = 0$$

maka solusi dari x adalah $-21\sqrt{3} \pm 21\sqrt{7}$ dengan rumus kuadratik. Jelas solusi positif yang diambil, maka panjang CE adalah $2BC + BD = 2 \times (21(\sqrt{7} - \sqrt{3})) + 42\sqrt{3} = 42\sqrt{7}$ sehingga jawaban yang diminta adalah $42 + 7 = \boxed{49}$. $\square$

25. Definisikan $\lfloor x \rfloor$ dan $\lceil x \rceil$ sebagai fungsi yang menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari sama dengan x dan fungsi yang menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih dari sama dengan x berturut-turut.

Jika dimisalkan banyaknya permen adalah n, nilai $p = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ dan nilai $p+1 = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ (karena jika $\frac{n}{k}$ bulat, maka tidak ada anak yang mendapatkan $p+1$ permen, jika ada, maka akan ada anak yang memperoleh $p-1$ permen, kontradiksi). Artinya,

$$\left\lfloor \frac{187}{k} \right\rfloor \geq m, \text{ dan } \left\lceil \frac{160}{k} \right\rceil < m.$$

Maka $187 \geq mk$ dan $160 \leq mk - k$. Mengurangi persamaan kedua dari yang pertama, diperoleh $k \leq 27$. Jika $k = 27$, maka $\left\lfloor \frac{187}{27} \right\rfloor = 6 \geq m$, namun $\left\lceil \frac{160}{27} \right\rceil = 6 < m$ sehingga kontradiksi. Jika $k = 26$, $\left\lfloor \frac{187}{26} \right\rfloor = 7 \geq m$ namun $\left\lceil \frac{160}{26} \right\rceil = 7 < m$ sehingga kontradiksi lagi. Tinjau bahwa strategi yang lebih jitu adalah menguli berdasarkan m, bukan k. Jika $m = 8$ maka $\left\lfloor \frac{187}{k} \right\rfloor = 8$, $8k \leq 187 \Rightarrow k \leq 23$. Mencoba $k = 23$, diperoleh $\left\lceil \frac{160}{23} \right\rceil = 7 < m$, dan ini memiliki sebuah solusi yaitu $m = 8$, maka nilai maksimum dari k adalah $\boxed{23}$. □

26. Jelas x rasional karena kedua suku di ruas kanan rasional juga. Misalkan $x = n + k$, di mana $k \in [0, 1)$ dan $n \in \mathbb{Z}$. Maka bagi menjadi dua kasus:

Kasus 1. $n \leq n + k < n + \frac{1}{2}$: Maka ekspresi ekuivalen dengan

$$\frac{2}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{2n} \iff \frac{2}{n+k} = \frac{3}{2n}.$$

Solusi untuk ini adalah solusi dari $4n = 3(n+k) \iff 4n = 3n + 3k \iff n = 3k$ untuk $n, n+k \neq 0$. Yang ada hanyalah untuk $n = 0$ dan $n = 1$, yang menyebabkan $k = 0$ (tidak memenuhi, $x = 0$) dan $k = \frac{1}{3}$ (sehingga $x = \frac{4}{3}$, memenuhi jika disubstitusikan). Jadi di sini solusi untuk x adalah $\frac{4}{3}$.

Kasus 2. $n + \frac{1}{2} \leq n + k < n + 1$: Maka ekspresi ekuivalen dengan

$$\frac{2}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} = \frac{3n+1}{2n^2+n} \iff n + k = \frac{4n^2+2n}{3n+1} \iff k = \frac{n^2+n}{3n+1}.$$

Supaya $k \in [0, 1)$, haruslah $0 \leq n^2 + n < 3n + 1$. Penyelesaian untuk 2 suku di kiri adalah $n \leq -1, n \geq 0$ sedangkan untuk dua suku di kanan,

$$n^2 - 2n - 1 < 0 \iff (n-1)^2 < 2 \iff -\sqrt{2} + 1 < n < 1 + \sqrt{2}$$

jadi semua n yang mungkin hanyalah $n = 0, 1, 2$. Karena yang dicari maksimum, gunakan $n = 2$ supaya $x = \frac{4(2^2)+2(2)}{3(2)+1} = \frac{20}{7}$ dan periksa bahwa x ini memenuhi, karena

$$\frac{2}{\frac{20}{7}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} \text{ (Benar).}$$

Maka $m + n = 20 + 7 = \boxed{27}$ karena $\frac{20}{7} > \frac{4}{3}$. □

27. Akan digunakan Prinsip Inklusi-Eksklusi. Pertimbangkan kasus total, yakni semua kemungkinan. Jika setiap hari setidaknya 5 soal yang dibuat, maka 25 soal disebar ke dalam 5 hari terlebih dahulu, maka akan dihitung banyaknya soal tambahan yang dibuat pada setiap harinya, yang merupakan solusi bilangan cacah dari

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7.$$

Dengan *Stars And Bars*, banyaknya solusi adalah $\binom{11}{4} = 330$. Sekarang akan dibagi menjadi dua kasus:

Kasus 1. Jika tiga hari berturut-turut membuat soal yang sama, maka perlu dihitung banyaknya solusi dari $3k + y + z = 7$. Dikuli saja untuk $k = 0, 1, 2$ sehingga dengan *Stars And Bars* diperoleh $\binom{8}{1} + \binom{5}{1} + \binom{2}{1} = 15$ solusi, dan banyaknya cara memilih 3 hari berturut-turut adalah 3. Jadi ada 45 solusi di sini.

Kasus 2. Jika empat hari berturut-turut membuat soal yang sama, pada kasus sebelumnya terhitung dua kali (misalnya saat $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ solusi $x_1 = x_2 = x_3$ dan $x_2 = x_3 = x_4$ terhitung dua kali padahal merupakan solusi yang sama) jadi hanya perlu dikuli $4k + z = 7$, yang ada 2 solusi (masing-masing 1 solusi untuk $k = 0$ dan 1). Maka karena ada 2 cara memilih 4 hari berturut-turut, ada 4 solusi di sini.

Jadi, total banyaknya solusi adalah 330 - 45 + 4 = $\boxed{289}$. □

Solusi alternatif: Akan digunakan komplemen. Pertama dihitung semestanya, yakni semua kasus. Karena setiap hari ada setidaknya 5 soal yang dibuat, maka hanya perlu mendistribusikan 7 soal ke dalam 5 hari, di mana setiap hari banyaknya soal tambahan yang dibuat adalah bilangan cacah. Dengan *Stars and Bars*,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$$

di mana x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bilangan cacah sehingga banyaknya solusi adalah $\binom{11}{4}$. Sekarang pertimbangkan:

Kasus 1. Tiga hari berturut-turut banyaknya sama: $x_1 = x_2 = x_3$, $x_2 = x_3 = x_4$, atau $x_3 = x_4 = x_5$. Misalkan $x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = k$, maka akan dibagi menjadi 3 subkasus, masing-masing dengan ketentuannya sendiri.

Subkasus 1. Untuk kasus $x_2 = x_3 = x_4$ harus dicari solusi cacah $3k+y+z = 7$ di mana $k \neq y$ dan $k \neq z$. Maka dikuli saja, jika $k = 0$ banyaknya solusi cacah dari $y + z = 7$ adalah $\binom{6}{1} = 6$, jika $k = 1$ banyaknya solusi cacah dari $y + z = 4$ adalah 3, sedangkan untuk $k = 2$ banyaknya solusi cacah dari $y + z = 1$ adalah 2. Maka ada 11 solusi pada subkasus ini.

Subkasus 2. Untuk kasus $x_1 = x_2 = x_3$ atau $x_3 = x_4 = x_5$, misalkan z adalah ujung yang tidak termasuk pada ketiga suku yang disebutkan pada kasus. Maka $3k + y + z = 7$, di mana $k \neq y$. Maka untuk $k = 0$, ada 7 solusi, untuk $k = 1$, ada 5 solusi, sedangkan untuk $k = 2$, ada 1 solusi, total 13 solusi sehingga ada 26 solusi pada subkasus ini.

Jadi untuk kasus ini ada 37 solusi.

Kasus 2. Empat hari berturut-turut banyaknya sama: Misalkan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = k$ atau $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = k$. Untuk $k = 0$, banyaknya solusi adalah 1, sedangkan untuk $k = 1$ banyaknya solusi juga 1. Sehingga ada 2 solusi per subkasus, dikali 2 subkasus maka ada 4 solusi di kasus ini.

Kasus 3. Lima hari berturut-turut banyaknya sama: Misalkan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = k$, jelas mustahil karena $5k = 7$ dan k bukan bilangan cacah.

Maka dengan komplemen, banyaknya solusi adalah $\binom{11}{4}$ - 37 - 4 $= \boxed{289}$. □

28. Dengan AM-GM pada penyebutnya:

$$\begin{aligned} x^4 + 16 + 16 + 16 &\geq 32x \\ y^4 + 256 &\geq 32y^2 \\ z^3 + 8 + 8 &\geq 12z \end{aligned}$$

sehingga

$$\frac{8x^2}{x^4+48} + \frac{8y^3}{y^4+256} + \frac{3z^2}{z^3+16} \leq \frac{8x^2}{32x} + \frac{8y^3}{32y^2} + \frac{3z^2}{12z} = \frac{1}{4}(x+y+z) = 2,$$

yang dicapai saat $x = 2$, $y = 4$, dan $z = 2$ sehingga betul $x + y + z = 8$, maka nilai maksimum yang dimaksud adalah $\boxed{2}$. □

29. Haidar melakukan pelemparan pertama, maka perhatikan bahwa untuk setiap giliran kecuali giliran pertama, peluang untuk menang adalah $\frac{1}{6}$ dan peluang untuk tidak menang (permainan berlanjut dan mengganti giliran) adalah $\frac{5}{6}$. Jika jumlah mata dadu $7n$, orang terakhir yang melempar akan menang, selesai. Namun, jika pada giliran ke-$n+1$ jumlah mata dadu adalah $7n + k$ dengan $n \geq 0$ dan $1 \leq k \leq 6$, peluang menangnya adalah $\frac{1}{6}$ agar mata dadu yang dilempar munculnya a yang menyebabkan $k + a = 7$. Sehingga terbukti. Misalkan sebuah ronde adalah kelompok terurut giliran Kenji dan giliran Haidar. Pertimbangkan:

- Giliran pertama adalah giliran Haidar: Mustahil untuk menang.
- Giliran kedua giliran Kenji: Peluang untuk menang adalah $\frac{1}{6}$.
- Giliran ketiga giliran Haidar: Peluang untuk menang adalah jika Kenji kalah dan Haidar menang: $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

- Peluang melanjut ke ronde selanjutnya: peluang kalah untuk Kenji dan Haidar adalah $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

Maka peluang kemenangan Kenji adalah peluang kemenangan pada setiap ronde $\left(\frac{1}{6}\right)$ dikalikan dengan jumlah peluang masuk ke ronde 1, ronde 2, ronde 3, dan seterusnya sehingga membentuk suatu deret geometri tak hingga. Peluang Kenji menang adalah:

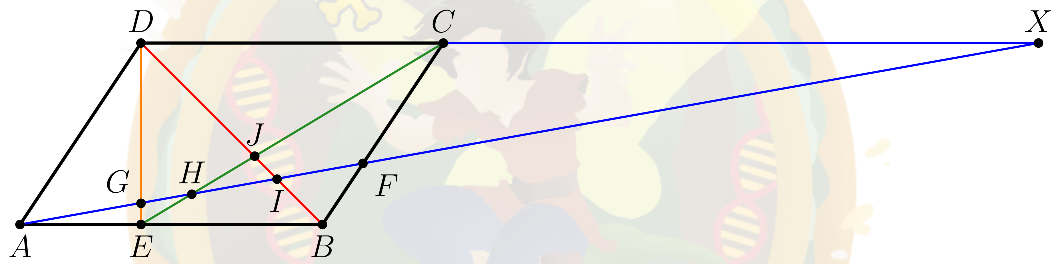
$$P(\text{Kenji wins}) : \frac{1}{6} \times \left(1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \boxed{\frac{6}{11}}$$

sehingga $p + q = 6 + 11 = \boxed{17}$. □

30. Misalkan $AE = 2x$. Perpanjanglah AF dan DC sehingga berpotongan pada titik X. Perhatikan bahwa $\triangle CFX \sim \triangle BFA$ karena $CX \parallel AB$ maka

$$\frac{BF}{FC} = \frac{BA}{CX} = \frac{2}{1}$$

sehingga $CX = 10x$.



Selanjutnya, perhatikan bahwa $\triangle ABI \sim \triangle XDI$ karena $DX \parallel AB$ sehingga

$$\frac{DX}{AB} = \frac{DI}{IB} = \frac{15x}{5x} = \frac{3}{1}.$$

Lalu perhatikan bahwa $\triangle BJE \sim \triangle DJC$ sehingga

$$\frac{EJ}{JC} = \frac{BJ}{JD} = \frac{EB}{CD} = \frac{3}{5}.$$

Tinjau bahwa $\frac{BI}{ID} = \frac{1}{3}$ sedangkan $\frac{BJ}{JD} = \frac{3}{5}$ maka $BI : IJ : JD = 2 : 1 : 5$. Sekarang tinjau bahwa $\triangle AHE \sim \triangle XHC$ karena $AE \parallel CX$ maka

$$\frac{XC}{AE} = \frac{EH}{HC} = \frac{10x}{2x} = \frac{5}{1}$$

jadi karena $\frac{EJ}{JC} = \frac{3}{5}$, $EH : HJ : JC = 4 : 5 : 15$.
Terakhir, karena $\triangle AEG \sim \triangle DGX$,

$$\frac{EG}{GD} = \frac{AE}{DX} = \frac{2}{15}.$$

Perhatikan bahwa $EH : HC = 1 : 5 \iff EH : EC = 1 : 6$ dan $EG : GD = 2 : 15 \iff EG : ED = 2 : 17$. Maka, dengan perbandingan luas segitiga menurut perbandingan alas,

$$\begin{aligned}[\triangle EHG] &= \overbrace{\boxed{\frac{EG}{GD} \times [\triangle EDC]}}^{\text{luas segitiga EGC}} \times \frac{EH}{HC} = \frac{2}{17} \times \frac{1}{6} \times [\triangle DEC] \\ &= \frac{1}{51} \times \frac{1}{2} \times [ABCD] = \frac{1}{102}[ABCD].\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, perhatikan bahwa $JI : IB = 1 : 2 \iff JI : JB = 1 : 3$, $EH : HJ = 4 : 5 \iff JH : JE = 5 : 9$, dan ingat $EJ : JC = 3 : 5 \iff EJ : EC = 3 : 8$ dan $EB : EA = 3 : 2 \iff EB : BA = 3 : 5$ maka dengan perbandingan luas segitiga,

$$\begin{aligned}[\triangle HIJ] &= \overbrace{\boxed{\frac{JI}{JB} \times [\triangle EBJ]}}^{\text{luas segitiga EJI}} \times \frac{JH}{JE} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{9} \times [\triangle EBJ] \\ &= \frac{5}{27}[\triangle EBJ] \\ [\triangle EBJ] &= \frac{EJ}{EC} \times [\triangle EBC] = \frac{3}{8} \times \frac{BE}{BA} \times [\triangle ABC] = \frac{3}{8} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}[ABCD] \\ &= \frac{9}{80}[ABCD] \\ [\triangle HIJ] &= \frac{5}{27} \times \frac{9}{80}[ABCD] = \frac{1}{48}[ABCD]\end{aligned}$$

Sehingga nilai

$$\frac{[\triangle JHI] + [\triangle GHE]}{[ABCD]} = \frac{\frac{1}{48}[ABCD] + \frac{1}{102}[ABCD]}{[ABCD]} = \frac{1}{48} + \frac{1}{102} = \frac{25}{816}$$

maka jawabannya $25 + 816 = \boxed{841}$. $\square$

MAQC

PENYISIHAN 2

4 Soal dan Sumber

§4.1 Isian Singkat

Each problem is worth 2 points.

1. **(K - Geometri, Klasik, Mudah)** Misalkan suatu bejana berbentuk balok dapat menampung cairan berukuran 12×15 dengan tinggi 24 diisi setengah penuh dengan air. Lalu, sebuah balok pejal besi berukuran $6 \times 6 \times 20$ diletakkan secara tegak (tegak maksudnya permukaan balok pejal sejajar dengan permukaan bejana). Jika evaporasi air diasumsikan tidak ada, ketinggian air setelah airnya tenang adalah ....

2. **(R - Aljabar, Original, Mudah-sedang)** Definsikan barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $a_1 = 1$ dan $a_n = 2a_{n-1} + n$ untuk setiap $n \geq 2$. Nilai dari
$$\frac{a_2+4}{a_1+3} \cdot \frac{a_6+8}{a_5+7} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{18}+20}{a_{17}+19}$$
adalah ....

3. **(H - Kombinatorika, Klasik, Sedang)** Banyaknya bilangan asli 5 digit $\overline{abcde}$ yang memenuhi $a \geq b > c \geq d > e$ adalah ....

4. **(H - Teori Bilangan, Original, Sedang)** Misalkan $\overline{Dar}$ adalah bilangan 3 digit di mana bilangan dua digit $\overline{Da}$ adalah kelipatan dari bilangan dua digit $\overline{ar}$. Jika diketahui bahwa $D, r \neq 0$ dan a adalah bilangan prima, banyaknya bilangan $\overline{Dar}$ adalah ....

5. **(K - Aljabar, Original, Sedang)** Misalkan p, q, r adalah semua solusi (kompleks) berbeda dari persamaan kubik $x^3+ax^2+bx+c = 0$. Jika $p+q+r = p^2+q^2+r^2 = p^3+q^3+r^3 = 2021$, nilai $\dfrac{|a+b+c|}{2021}$ adalah ....
Catatan: Akar kompleks maksudnya akar bilangan kompleks: Bilangan kompleks adalah himpunan perkalian bilangan real dengan bilangan imajiner. Jadi jika p, q, r real, p, q, r juga dapat dianggap kompleks, namun jika p, q, r kompleks, belum tentu p, q, r real.

6. **(K - Geometri, Original, Sedang)** Pada segidelapan beraturan $ABCDEFGH$, titik-titik $P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_f, P_g, P_h$ adalah titik-titik tengah ruas-ruas garis AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HA. Jika perbandingan $[ABCDEFGH] : [P_aP_bP_cP_dP_eP_fP_gP_h] = x : 1$, nilai dari x adalah $a + b\sqrt{c}$, di mana a, b, c adalah bilangan-bilangan bulat, serta c tidak habis dibagi kuadrat prima manapun. Nilai dari $a + b + c$ adalah ....

7. **(H - Kombinatorika, Original, Sedang)** Diketahui pada suatu acara terdapat kupon undian, dan beberapa darinya dapat ditukarkan menjadi suatu *Door prize*. Setiap kupon terdiri dari suatu bilangan 8 digit yang tidak sama dengan kupon lain dan semua kupon yang dapat dicetak sudah dibagikan. Bilangan pertama dari semua kupon adalah 0. Seseorang mendapatkan *Door prize* jika pada kupon tersebut terdapat tepat dua bilangan "2" yang mana letak keduanya bersebelahan dan jika terdapat tepat dua bilangan "1" sehingga letak keduanya tidak bersebelahan. Jika Haidar memiliki 1 kupon, peluang kupon tersebut menang adalah $\frac{m}{n}$ di mana m dan n adalah bilangan-bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $m+n$ adalah ....

8. **(H - Teori Bilangan, Original, Sedang-sulit)** Diketahui bilangan-bilangan asli a, b, c memenuhi
$$FPB(a,b,c) < FPB(b,c) < FPB(a,c) < FPB(a,b) < c < b < a.$$
Nilai terkecil dari $a \times b \times c$ adalah ....

9. **(K - Aljabar, Modifikasi OSP SMA 2019 Isian, Sulit)** Untuk suatu polinomial $P(x)$, persamaan
$$P(x^2) = x(x+1)P(x)$$
berlaku untuk semua bilangan real x. Jika diketahui $P\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}$, nilai dari $P(4)$ adalah ....

10. **(H - Kombinatorika, Modifikasi HOMC, Sulit)** Sebuah petak berukuran 2×7 akan diwarnai dengan 3 pilihan warna. Pewarnaan dilakukan dengan mewarnai setiap persegi 1×1 dengan salah satu dari 3 pilihan warna yang ada sehingga jika dua persegi 1×1 bersebelahan (bersebelahan maksudnya memiliki satu sisi yang sama), warna kedua persegi tersebut pasti berbeda. Jika pewarnaan yang sama dapat diperoleh dengan merotasikan atau merefleksikan petak, pewarnaan dianggap berbeda. Banyaknya pewarnaan yang dapat dilakukan adalah ....

§4.2 Uraian

Each problem is worth 8 points.

1. Tentukan semua bilangan bulat nonnegatif n sehingga
$$2021^n + 2^n + 2$$
merupakan bilangan kuadrat sempurna.

2. Untuk semua bilangan real positif x, y, dan z, buktikan bahwa pertidaksamaan berikut selalu berlaku:
$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{xz} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$$

3. Misalkan $A_1, A_2, \cdots, A_{11}$ adalah 11 titik pada suatu garis lurus secara berurutan, di mana $A_1A_{11} = 56$. Diberikan $A_iA_{i+2} \leq 12$ untuk $i = 1, 2, \cdots, 9$ dan $A_jA_{j+3} \geq 17$ untuk $j = 1, 2, \cdots, 8$, carilah, dengan bukti, panjang A_2A_7.

4. Adakah kuadruplet bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi persamaan
$$a^2 + b^5 + c^{11} = d^{2021}?$$
Sertakan jawabanmu dengan bukti.

5. Sebuah mesin terdiri dari 3 kotak, masing-masing dengan lampu merah yang pada awalnya padam. Setelah memasukkan objek-objek ke dalam kotak tersebut, mesin tersebut dapat digunakan untuk menjalankan suatu pemeriksaan. Untuk setiap kotak, jika total berat pada kotak tersebut adalah paling ringan (*strictly the lightest*), lampu merah pada kotak tersebut akan menyala. Jika tidak, maka lampunya akan tetap padam. Anda diberikan 7 bola, dan di antaranya terdapat sebuah bola palsu yang lebih berat daripada keenam bola asli lainnya. Bola asli lainnya beratnya sama. Gunakan mesin ini tepat dua kali untuk menentukan manakah yang merupakan bola palsu yang diinginkan, sertakan jawabanmu dengan bukti bahwa prosedur ini selalu berhasil.

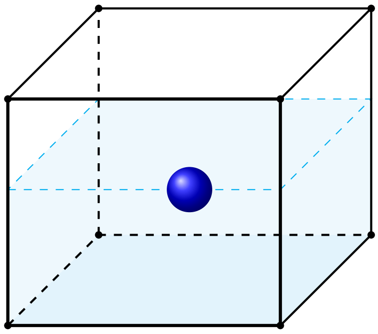
5 Kunci Jawaban

§5.1 Isian Singkat

1. 15
2. 32
3. 792
4. 9
5. 680739
6. 4
7. 15657
8. 900
9. 48
10. 4374

6 Solusi dan Pembahasan Isian Singkat

1. Tingginya 15.



Hanya untuk ilustrasi, bola mengapung juga tidak sepenuhnya tenggelam, seperti soal.

Tinjau bahwa volume air tidak pernah berubah, sehingga volume air adalah $12 \times 15 \times 12 = 2160$ satuan volume. Dengan meletakkan balok pejal secara tegak, kita mengecilkan luas yang dapat diisi oleh air untuk 20 satuan tinggi pertama - dengan asumsi pengetahuan bahwa besi tenggelam di dalam air. Jelas balok diletakkan dengan 6×6 sebagai alas karena jika tidak, balok tersebut tidak akan bisa tegak. Maka, luas yang dapat diisi oleh air hanyalah $12 \times 15 - 6 \times 6 = 180 - 36 = 144$ satuan luas, sehingga ketinggian air adalah $2160 \div 144 = \boxed{15}$ satuan tinggi. □

2. Tinjau bahwa $a_n + n + 2 = 2a_{n-1} + 2n + 2$ sehingga

$$\frac{a_n + n + 2}{a_{n-1} + n + 1} = \frac{2a_{n+1} + 2n + 2}{a_{n+1} + n + 1} = 2$$

Tinjau suku ke-k yang ditulis membentuk suatu barisan aritmetika, yakni jika suku pertamanya 2, dan suku keduanya 6, maka barisan tersebut mengikuti $U_n = 4n - 2$, sehingga jika $U_n = 18, n = 5$. Maka ada 5 suku yang dikali, dengan setiap suku bernilai 2, sehingga jawabannya $2^5 = \boxed{32}$. □

3. Perhatikan bahwa banyaknya solusi dapat diberlakukan bijeksi. Tinjau terlebih dahulu banyaknya solusi $c \geq d$ sama seperti banyaknya solusi $c + 1 > d$, lalu banyaknya solusi $b > c \geq d$ sama dengan banyaknya solusi $b + 1 > c + 1 > d$, dan dapat ditinjau bahwa banyaknya solusi untuk a, b, c, d, e sama dengan banyaknya solusi $a + 2 > b + 1 > c + 1 > d > e$ karena merupakan korespondensi satu-satu (pemetaannya *well-defined* (merupakan suatu fungsi), injektif, dan surjektif). Dan, karena $\overline{abcde}$ bilangan asli 5 digit, $a \leq 9$ dan $e \geq 0$, sehingga sama seperti banyaknya solusi untuk

$$11 \geq a + 2 > b + 1 > c + 1 > d > e \geq 0$$

dan ini sama seperti memilih 5 bilangan bulat di antara 0 sampai 11 inklusif, maka jawabannya $\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{120} = \boxed{792}$. □

4. Kita bagi kasus menjadi $a = 2$, $a = 3$, $a = 5$, dan $a = 7$.

Kasus 1. Untuk $a = 5$ dan $a = 7$, maka jika $\overline{ar} \times 2 > 100$ sehingga haruslah $\overline{Da} = \overline{ar}$, sehingga hanya ada 2 solusi total, $\overline{Dar} = 555$ atau 777. Jadi 2 bilangan.

Kasus 2. Untuk $a = 2$, $\overline{Da} \leq 4 \cdot \overline{ar}$. Untuk $\overline{Da} = \overline{ar}$ jelas hanya ada 1 solusi. Untuk $\overline{Da} = 2 \cdot \overline{ar}$ maka bilangan satuan dari $2r$ haruslah 2, sehingga ada 2 kemungkinan, $r = 1$ atau 6, dengan menyubstitusikan akan diperoleh 2 solusi. Untuk $\overline{Da} = 3 \cdot \overline{ar}$ bilangan satuan dari $3r$ harus 2, maka $r = 4$ jadi dengan menyubstitusikan ada 1 solusi. Untuk $\overline{Da} = 4 \cdot \overline{ar}$, bilangan satuan dari $4r$ haruslah 2, sehingga $r = 3$ atau 8. Namun jika $r = 8$, $4 \cdot \overline{ar} = 4 \times 28 = 112$ sehingga hanya ada 1 solusi di sini. Jadi total untuk kasus ini ada 5 bilangan.

Kasus 3. Untuk $a = 3$, $\overline{Da} \leq 3 \cdot \overline{ar}$. Untuk $\overline{Da} = \overline{ar}$, 1 solusi. Untuk $\overline{Da} = 2 \cdot \overline{ar}$ tidak ada solusi karena $2r$ tidak dapat memiliki 3 sebagai bilangan satuannya. Untuk $\overline{Da} = 3 \cdot \overline{ar}$ bilangan $3r$ harus memiliki 3 sebagai satuannya, maka $r = 1$, ada 1 solusi di sini. Jadi total untuk kasus ini ada 2 bilangan.

Maka ada $\boxed{9}$ bilangan $\overline{Dar}$. □

5. Pertama, tinjau bahwa $\dfrac{|a+b+c|}{2021} = \left|\dfrac{a+b+c}{2021}\right|$ karena $2021 > 0$. Selanjutnya, perhatikan bahwa $p + q + r = -a = 2021$, $pq + qr + rp = b$, dan $pqr = -c$. Perhatikan bahwa:

$$(p+q+r)^2 - 2(pq+qr+rp) = p^2+q^2+r^2 \iff \frac{a^2+a}{2} = b = \frac{2021^2 - 2021}{2} = b$$

$$(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp) = p^3+q^3+r^3-3pqr$$

$$\iff (-a)(-a - \frac{a^2+a}{2}) = -a - 3c \iff a^2 + \frac{a^3+a^2}{2} + a = -3c$$

$$= (-2021)^2 + \frac{2021^3+2021^2}{2} - 2021 \iff \frac{2021^2}{3} + \frac{-2021^3+2021^2}{6} - \frac{2021}{3} = -c$$

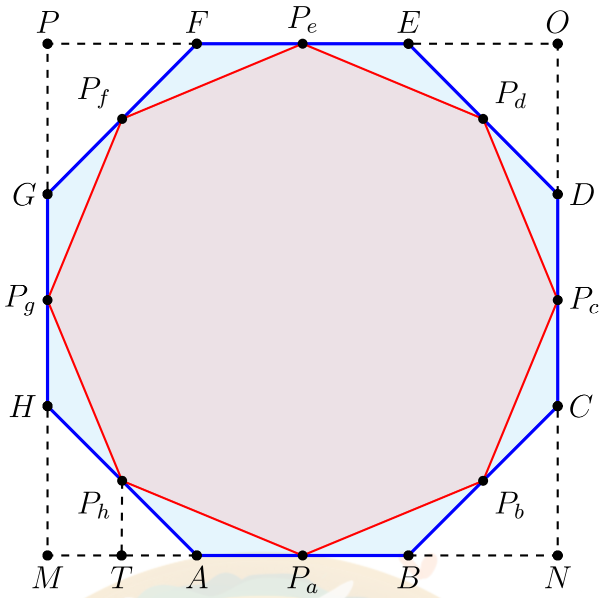
Maka berlakulah:

$$\left|\frac{a+b+c}{2021}\right| = \left|\frac{-2021 + \frac{2021^2-2021}{2} - \frac{2021^2}{3} - \frac{-2021^3+2021^2}{6} + \frac{2021}{3}}{2021}\right|$$

$$= \left|-1 + 1010 - \frac{1}{6}(4042 - 2021^2 + 2021 - 2)\right| = |1009 + 679730| = \boxed{680739}. \quad \square$$

> **Komentar.** Agar dapat menjadi bukti yang meyakinkan, haruslah dibuktikan juga bahwa p, q, r saling berbeda. Asumsikan dengan kontradiksi, pertimbangkan kedua kasus, yakni saat sama semua, dan saat ada sepasang yang sama. Untuk kasus pertama $p = q = r = \dfrac{2021}{3}$, jelas kesamaan tidak dapat dicapai. Karena simetris, tanpa mengurangi keumuman, $p = q$. Artinya $2p + r = 2p^2 + r^2 = 2021$, sehingga dengan $(2p+r)^2 + (2p-r)^2 = 8p^2 + 2r^2 = 2021^2 + (2021 - r)^2 \iff 6p^2 = r^2 - 4042r + 8164840$. Menyubstitusikan dan memanipulasi, diperoleh p, r kompleks dan $2p^3 + r^3$ nonreal, maka tidak ada solusi juga.

6. Segidelapan beraturan besar setiap sudutnya 135 derajat.



Tinjau $\triangle P_hAP_a$ dan perhatikan bahwa kedelapan dari segitiga kecil yang dimaksud kongruen (sisi-sisi yang mengapit sudut terbesar panjangnya sama-sama setengah panjang sisi segidelapan, sehingga dengan dalil sisi-sudut-sisi terbukti kongruen). Jadi hanya perlu ditinjau salah satu saja. Perpanjang AP_a hingga T agar $P_hT \perp AP_a$, maka terbentuk segitiga siku-siku sama kaki P_hTA karena $\angle P_hAT = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. Memisalkan $TA = x$, dengan Pythagoras diperoleh $AP_h = x\sqrt{2}$ dan $AH = 2x\sqrt{2}$. Tinjau bahwa luas $\triangle P_hAP_a$ menggunakan alas AP_a dan tinggi P_hT sehingga luasnya adalah

$$[\triangle P_hAP_a] = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{2} \cdot x = \frac{x^2\sqrt{2}}{2}.$$

Karena ada 8 segitiga kongruen, maka total luas segitiga-segitiga yang dikomplemenkan dari luas segidelapan awal adalah $4x^2\sqrt{2}$. Sekarang akan dihitung luas segidelapan awalnya, perpanjanglah AB dan GH hingga bertemu pada M. Tinjau lagi bahwa $\triangle AMH$ siku-siku sama kaki, maka dengan definisi x tadi, karena $HA = 2x\sqrt{2}$, $AM = MH = 2x$ (segitiga istimewa 45-45-90 atau Pythagoras). Perpanjang pada AB, CD, EF, GH agar terbentuk sebuah persegi $MNOP$ dengan panjang sisi $4x + 2x\sqrt{2}$ sehingga luas persegi $MNOP$ adalah $x(4 + 2\sqrt{2})^2 = x^2(24 + 16\sqrt{2})$. Sekarang tinjau bahwa luas keempat segitiga siku-siku sama kaki kongruen totalnya $\frac{1}{2} \times 2x \times 2x \times 4 = 8x^2$ sehingga luas segidelapan besar adalah $x^2(24 + 16\sqrt{2}) - 8x^2 = x^2(16 + 16\sqrt{2})$, sedangkan luas segidelapan kecil adalah $x^2(16 + 16\sqrt{2}) - 4x^2\sqrt{2} = x^2(16 + 12\sqrt{2})$. Perbandingan luas yang diminta adalah

$$\frac{x^2(16 + 16\sqrt{2})}{x^2(16 + 12\sqrt{2})} = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} \times \frac{3\sqrt{2} - 4}{3\sqrt{2} - 4} = 4 - 2\sqrt{2}$$

sehingga nilai $a + b + c$ adalah $4 - 2 + 2 = \boxed{4}$. □

7. Banyaknya kupon yang mungkin adalah 10^7 karena ada 8 digit dan bilangan pertama selalu 0, sehingga 7 digit lainnya bebas. Akan dihitung banyaknya kupon yang menang. Pertama, banyaknya bilangan bebas kecuali 1 dan 2 adalah 3, karena ada 7 digit bebas dikurangi 4 digit yang harus merupakan 1 atau 2. Maka ada 8^3 pilihan di sini. Selanjutnya kelompokkan kedua bilangan "2" agar bersebelahan, cara memposisikan kelompok ini dengan 3 digit yang sudah dipilih adalah 4 cara, karena ada 2 rongga di antara ketiga digit tersebut dan ada dua tempat di kanannya. Selanjutnya, cara meletakkan 1 agar tidak bersebelahan adalah $\binom{5}{2} = 10$ cara di antara kelima digit yang sudah ada, karena tidak boleh diletakkan di antara kedua bilangan 2 maka ada 5 "rongga" yang dapat dipilih untuk meletakkan 2 digit. Terakhir, digit 0 diletakkan di depan, sehingga terlihat bahwa prosedur yang kita barusan lakukan membuat sebuah nomor kupon - maka merupakan bijeksi (pemetaan merupakan suatu fungsi, serta fungsinya injektif dan surjektif). dengan himpunan kupon-kupon yang menang. Jadi banyaknya kupon yang menang adalah $8^3 \times 4 \times 10$, sehingga peluang yang diminta adalah $\frac{8^3 \cdot 4 \cdot 10}{10^7} = \frac{2^{11}}{10^6} = \frac{2^5}{5^6}$ maka $m = 32$ dan $n = 5^6 = 15625$, sehingga $m + n = \boxed{15657}$. $\square$

8. Asumsikan saja $FPB(a, b, c) = 1$ karena dengan kontradiksi, semisalnya $FPB(a, b, c) = d > 1$, kita dapat membagi hasil kali abc dengan d^3 agar mendapatkan hasil kali yang lebih kecil. Sekarang, tinjau bahwa $FPB(a, b), FPB(b, c), FPB(c, a)$ harus relatif prima dengan satu sama lain (*pairwise relatively prime* - semua pasangan nilai yang dapat dibuat harus relatif prima). Jika tidak, maka ada sebuah bilangan yang membagi semua dari a, b, c. (Semisal $FPB(FPB(a, b), FPB(b, c)) = k > 1$, maka $k|a$, $k|b$, dan $k|c$, kontradiksi.) Terlebih lagi, ini artinya $FPB(a, b)FPB(a, c)|a$, maka $a \geq FPB(a, b)FPB(a, c)$. Lakukan untuk b dan c dengan cara yang sama, sehingga diperoleh $abc \geq (FPB(a, b)FPB(a, c)FPB(b, c))^2$. Mudah dilihat bahwa ruas kanan ≥ 900 (dengan memasukkan $FPB(a, b) = 5, FPB(a, c) = 3, FPB(b, c) = 2$) maka nilai minimum dari abc adalah $\boxed{900}$, yang dapat dicapai dengan $(a, b, c) = (15, 10, 6)$ sehingga terpenuhilah $1 < 2 < 3 < 5 < 6 < 10 < 15$. $\square$

9. Tinjau bahwa dengan memasukkan $x = 1$, diperoleh $P(1) = 2P(1) \iff P(1) = 0$. Sekarang tinjau derajat dari $P(x)$, misalkan derajat dari $P(x)$ adalah n, sehingga derajat dari $P(x^2)$ adalah $2n$ sedangkan derajat $x(x+1)P(x)$ adalah $n+2$. Karena berlaku untuk semua bilangan real x, polinom pada ruas kiri dan kanan selalu ekuivalen sehingga derajat ruas kiri dan kanan selalu sama, maka dari itu, diperolehlah $2n = n+2 \iff n = 2$, yang berarti $P(x)$ adalah polinomial kuadrat.
   Dengan menyubstitusikan $x = 0$, diperoleh $P(0) = 0$. Tinjau bahwa $P(0) = 0$ dan $P\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}$, maka ambil polinomial $R(x) = P(x) - x$. Jelas karena $R(x)$ berderajat dua maka akar-akar dari $R(x)$ hanyalah $x = 0$ dan $x = \frac{5}{4}$. Maka $R(x) = ax\left(x - \frac{5}{4}\right)$.
   Mengambil $R(1) = P(1) - 1 = 0 - 1 = -1$,
   $$R(1) = a\left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \iff a = 4$$
   sehingga $P(x) = 4x\left(x - \frac{5}{4}\right) + x = 4x^2 - 4x$.
   Jadi, $P(4) = 4(4)^2 - 4(4) = 4 \cdot 16 - 16 = \boxed{48}$. $\square$

10. Anggap petak 2×7 sebagai petak dengan 2 baris dan 7 kolom. Selain itu, tanpa mengurangi keumuman, misalkan warna yang digunakan adalah Red (Merah), Green (Hijau), dan Blue (Biru). Maka, pada kolom pertama, tinjau bahwa banyaknya cara pewarnaan adalah $3 \times 2 = 6$. Selanjutnya, kita tinjau banyakya cara mewarnai kolom selanjutnya.
    
    Tanpa mengurangi keumuman, misalkan kolom 1 baris 1 diwarnai R sedangkan kolom 2 baris 2 diwarnai G. Kolom selanjutnya, ditulis dengan urutan baris pertama terlebih dahulu memiliki 3 kemungkinan, yakni: GB, GR, BR. Ternyata jika digeneralisasi, jika R diubah menjadi C_1, G diubah menjadi C_2 dan B diubah menjadi C_3 di mana C_i adalah warna ke-i (i-th colour), dan dapat dilihat dengan mudah bahwa banyaknya konfigurasi warna yang mungkin juga 3. Jadi setiap kolom selanjutnya memiliki 3 pilihan pewarnaan. Sehingga total pewarnaan yang dapat dilakukan adalah $6\times3^6 = 2\times3^7 = 2\times2187 = \boxed{4374}$. Jelas pewarnaan yang dilakukan di sini merupakan bijeksi dengan pewarnaan yang dapat dilakukan pada petak 2×7 di awal. $\square$

7 Solusi dan Marking Scheme Uraian

1. Tentukan semua bilangan bulat nonnegatif n sehingga

$$2021^n + 2^n + 2$$

merupakan bilangan kuadrat sempurna.

Proposed by Rafael Kristoforus Yanto, Indonesia.

Model Solution (Kenji Gunawan): Jawabannya hanyalah $n = 0$ dan $n = 1$. Substitusikan agar diperoleh 4 dan 2025 berturut-turut, keduanya merupakan kuadrat sempurna karena $4 = 2^2$ dan $2025 = 45^2$.

[1 poin, melupakan tahap substitusi akan mengurangi 1 poin]

Kita akan membuktikan kedua nilai ini adalah semua bilangan cacah yang memenuhi. Tinjau bilangan kuadrat sempurna dalam modulo 4. Jika $n = 2k$, $n^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod 4$, sementara jika $n = 2k+1$, di mana $k \in \mathbb{Z}$ maka $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod 4$.

[3 poin untuk menyebutkan]

Sementara, jika $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} 2021^n &= (4 \cdot 505 + 1)^n \equiv 1^n \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4 \\ 2^n &= 2^2 \cdot 2^{n-2} \equiv 0 \cdot 2^{n-2} \pmod 4 \equiv 0 \pmod 4 \end{aligned}$$

sehingga $2021^n + 2^n + 2 \equiv 1 + 0 + 2 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$, yang tidak pernah merupakan kuadrat sempurna jika ditinjau dalam modulo 4, sehingga semua solusi yang ada sudah lengkap.

[4 poin untuk menyelesaikan bukti]

> **Komentar.** Poin-poin yang tertera aditif (jadi jika tahapannya tidak lengkap, ditambahkan saja), kecuali poin penyelesaian bukti. Jadi, semua perolehan poin yang mungkin adalah 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8. Substitusi penting karena harus diverifikasi bahwa kedua jawaban yang ada menghasilkan suatu bilangan kuadrat - meskipun trivial hal ini tetap harus dilakukan. Pengklaiman jawaban tanpa substitusi tidak menghasilkan poin. Selain itu, kata modulo dapat digantikan dengan kata lain seperti "sisa pembagiannya dengan" dan tidak ada pengurangan nilai.

2. Untuk semua bilangan real positif x, y, dan z, buktikan bahwa pertidaksamaan berikut selalu berlaku:
$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{xz} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$$
Proposed by Haidar Prayata Wirasana, Indonesia.

Model Solution 1 (Haidar Prayata Wirasana): Tinjau bahwa pertidaksamaan yang ada ekuivalen dengan membuktikan
$$\frac{x^3}{yz} + y + z + \frac{y^3}{xz} + x + z + \frac{z^3}{xy} + x + y \geq 3x + 3y + 3z$$
yang jelas benar dengan penerapan AM-GM sebagai berikut:
$$\frac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x$$
$$\frac{y^3}{xz} + x + z \geq 3y$$
$$\frac{z^3}{xy} + x + y \geq 3z$$
kemudian menjumlahkan semua pertidaksamaan tersebut, sehingga mendapatkan kesimpulan yang diperlukan. Kesamaan terjadi saat $x = y = z$.

> **Komentar.** Tidak ada poin parsial untuk metode ini. Namun, kesamaan tidak perlu ditentukan karena trivial. Untuk metode ini, perolehan poin adalah 0 atau 8.

Model Solution 2 (Wildan Bagus Wicaksono): Karena pertidaksamaannya *homogeneous*, tanpa mengurangi keumuman misalkan $xyz = 1$, sehingga cukup membuktikan
$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x + y + z.$$
[1 poin]

Dengan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz,
$$((x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \iff x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{3}.$$
Lalu, dengan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz lagi,
$$(x^2 + y^2 + z^2)(1 + 1 + 1) \geq (x + y + z)^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3}$$
sehingga
$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{3} \geq \frac{\left(\frac{(x+y+z)^2}{3}\right)^2}{3} = \frac{(x + y + z)^4}{27} = \frac{(x + y + z)(x + y + z)^3}{27}.$$
[3 poin]

Dengan AM-GM, $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \iff (x + y + z)^3 \geq 27xyz = 27$ sehingga
$$x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{3} \geq \frac{(x + y + z)^4}{27} \geq \frac{27(x + y + z)}{27} = x + y + z$$
sehingga terbukti.

[4 poin untuk menyelesaikan bukti]

Komentar. Homogenitas tidak perlu dibuktikan karena trivial. Cara pembuktiannya adalah dengan memisalkan $x = ka, y = kb, z = kc$ di mana $k > 0$ diperoleh homogenitas sebab diperoleh $\frac{ka^3}{bc} + \frac{kb^3}{ac} + \frac{kc^3}{ab} \geq ka + kb + kc$ dan jika dibagi dengan k pada kedua ruas, diperoleh bentuk pada soal. Poin tidak aditif, jika hanya tahap AM-GM yang dilakukan, perolehan poin hanya 1. Jika Cauchy-Schwarz yang identik dilakukan tanpa homogenitas maka hanya penambahan 1 poin. Semua perolehan poin yang mungkin adalah 0, 1, 2, 4, 8. Namun tidak menutup kemungkinan ada solusi Cauchy Schwarz yang lain.

Model Solution 3 (Kenji Gunawan): Karena $x, y, z > 0$, kedua ruas dapat dikalikan dengan xyz dan pertidaksamaan akan tetap ekuivalen, sehingga cukup membuktikan

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z) \iff x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2.$$

Tanpa mengurangi keumuman, karena pertidaksamaan simetrik, asumsikan $x \geq y \geq z$. Dengan *Rearrangement Theorem*, maka berlaku

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3y + y^3z + z^3x$$

[1 poin untuk tanpa mengurangi keumuman + 2 poin untuk rearrangement pertama]

dan karena $yz \leq xz \leq xy$,

$$x^2 \cdot yz + y^2 \cdot xz + z^2 \cdot xy \leq x^2 \cdot xy + y^2 \cdot yz + z^2 \cdot zx$$

sehingga terbukti.

[5 poin untuk menyelesaikan bukti, -2 jika alasan tidak disertakan.]

Komentar. Teorema Rearrangement (juga disebut Renata di Indonesia) yang digunakan pada soal ini adalah 2 teorema yang berbeda bentuk, yakni: Jika $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n$ dan $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n$ serta $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ permutasi dari $1, 2, 3, \ldots, n$ maka berlaku:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_{k_1} + a_2b_{k_2} + \cdots + a_nb_{k_n}$$

dan

$$a_1b_{k_1} + a_2b_{k_2} + \cdots + a_nb_{k_n} \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

Perolehan poin tidak aditif, semua perolehan poin yang mungkin adalah 0, 1, 3, 6, 8.

3. Misalkan $A_1, A_2, \cdots, A_{11}$ adalah 11 titik pada suatu garis lurus secara berurutan, di mana $A_1A_{11} = 56$. Diberikan $A_iA_{i+2} \leq 12$ untuk $i = 1, 2, \cdots, 9$ dan $A_jA_{j+3} \geq 17$ untuk $j = 1, 2, \cdots, 8$, carilah, dengan bukti, panjang A_2A_7.

Proposed by Kenji Gunawan, Indonesia, retrieved from AoPS Ninjasolver0201.

Model Solution (AoPS: bluelinfish): Misalkan $A_l = x$ merupakan koordinat absis dari titik A_l, dan tanpa mengurangi keumuman $A_1 = 0$ dan semua titik terletak pada sumbu-X. Misalkan $A_iA_{i+2} \leq 12$ disebut "syarat 1" dan misalkan $A_jA_{j+3} \geq 17$ disebut "syarat 2".

[0 poin]

Maka karena $A_{11} = 56$ dan syarat 2, diperolehlah $A_8 \leq 39$. Dengan cara yang sama, kita memperoleh $A_5 \leq 22, A_2 \leq 5$.

[1 poin]

Dari batas A_2 dan syarat 1, kita memperoleh $A_4 \leq 17$. Namun, dengan $A_1 = 0$ dan syarat 2, diperoleh $A_4 \geq 17$. Maka $A_4 = 17$, sehingga $A_2 = 5$, $A_5 = 22$, $A_8 = 39$. Dengan cara yang sama, karena $A_5 = 22$ dan syarat 1, $A_7 \leq 34$.

[3 poin]

Namun, karena $A_4 = 17$ dan syarat 2, diperoleh $A_7 \geq 34$, sehingga $A_7 = 34$. Maka, panjang yang dicari adalah $A_2A_7 = 34 - 5 = \boxed{29}$.

[4 poin untuk menyelesaikan bukti]

> **Komentar.** Letak kesulitan soal ini adalah mencari cara untuk mencapai kesamaan pada beberapa titiknya. Jika hanya diberikan jawaban, perolehan poin adalah 1. Poin pada soal ini bersifat aditif, namun jika caranya kurang lengkap, poin tidak akan diberikan untuk bagian tersebut, kecuali untuk bagian penyelesaian bukti, bagian tersebut jika aditif dianggap berbobot 1 poin. Menyediakan konfigurasi menambahkan 1 poin lagi di atas jawaban yang benar. Jika konfigurasi tidak memenuhi, tidak ada poin yang diberikan. Semua perolehan poin yang mungkin adalah 0, 1, 2, 3, 4, 8.

4. Adakah kuadruplet bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi persamaan

$$a^2 + b^5 + c^{11} = d^{2021}?$$

Sertakan jawabanmu dengan bukti.

Proposed by Kenji Gunawan, Indonesia.

Model Solution 1 (Kenji Gunawan): Ada, salah satu solusinya adalah $(a, b, c, d) = (2^{62650}, 2^{25060}, 2^{11391}, 2^{62})$ yang dapat diperiksa dengan memasukkan kembali kepada persamaan pada soal sehingga memenuhi; atau
Ada, salah satu solusinya adalah $(a, b, c, d) = (3^{51535}, 3^{20614}, 3^{9370}, 3^{51})$ sehingga terbukti.

[8 poin untuk menyelesaikan bukti]

> **Komentar.** Untuk metode ini, tidak ada poin parsial, semua perolehan poin yang mungkin adalah 0 atau 8. Memberi sebuah contoh solusi sudah merupakan bukti yang cukup bahwa terdapat solusi, sehingga penilaiannya seperti ini. Jika solusi bekerja lain diberikan, korektor dapat menggunakan kalkulator untuk membantu memverifikasi solusi, namun tidak ada pengurangan poin untuk ini. Hanya ada satu peserta, Arrafa Fairuz, yang memberikan solusi $(2^{47493}, 2^{18997}, 2^{8635}, 2^{47})$ dengan konstruksi $2b^5 = 2c^{11} = a^2$.

Model Solution 2 (Kenji Gunawan): Ide kita adalah dengan memisalkan $(a, b, c, d) = (2^p, 2^q, 2^r, 2^s)$. Motivasinya adalah karena kita ingin $a^2 = b^5$ dan $a^2 + b^5 = c^{11}$. Maka $2^{2p} = 2^{5q}$, yang berarti $2p = 5q$. Jika p, q bilangan asli, p habis dibagi 5 dan q habis dibagi 2 karena 2 dan 5 relatif prima. Jadi $2p = 5q = 10k$ sehingga $p = 5k, q = 2k$.

[1 poin]

Sekarang $a^2 + b^5 = c^{11} \iff 2^{10k+1} = 2^{11r}$. Ini berarti $10k + 1 = 11r \iff 11r - 1 = 10k \iff 11r \equiv 1 \pmod{10} \iff r \equiv 1 \pmod{10}$. Maka ruas kiri sekarang sudah menjadi 2^{11r+1}.

[1 poin]

Maka $2^{11r+1} = 2^{2021s}$ sehingga $11r + 1 = 2021s \iff 11r \equiv -1 \pmod{2021}$. Akan dicari nilai r dalam mod 2021. Maka dibalik saja, sehingga $2021s - 1 = 11r \iff 2021s \equiv 1 \pmod{11} \iff 8s \equiv 1 \pmod{11}$. Nilai dari s asli terkecil yang memenuhi adalah 7 sehingga $2021s = 14147$ yang berarti $r = 1286$. Maka r dalam modulo 2021 adalah 1286, yang dapat diperiksa dengan $11 \times 1286 = 14146 \equiv -1 \pmod{2021}$. Jadi $r \equiv 1286 \pmod{2021}$.

[3 poin]

Tinjau bahwa $2021 = 43 \times 47$ yang relatif prima dengan 10, maka dengan Chinese Remainder Theorem, hanya ada satu nilai $0 \le k \le 20210$ memenuhi sistem kongruensi

$$r \equiv 1 \pmod{10}$$
$$r \equiv 1286 \pmod{2021}$$

Maka $r = 2021t + 1286 \equiv 1 \pmod{10} \iff t + 6 \equiv 1 \pmod{10} \iff t \equiv 5 \pmod{10}$. Maka memasukkan $t = 5, k = 11391$ sehingga $r \equiv 11391 \pmod{20210}$. Ambil nilai r terkecil, yakni $r = 11391$ sehingga dengan memasukkan, $11r + 1 = 2021s = 125302 \iff s = 62$, dan $10k + 1 = 125301 \iff k = 12530$ yang berarti $p = 62650, q = 25060$. Maka $(p, q, r, s) = (62650, 25060, 11391, 62)$ sehingga $(a, b, c, d) = (2^{62650}, 2^{25060}, 2^{11391}, 2^{62})$. Periksa dengan memasukkan kepada persamaan awal, maka

$$(2^{62650})^2 + (2^{25060})^5 + (2^{11391})^{11} = (2^{62})^{2021} \iff 2^{125300} + 2^{125300} + 2^{125301} = 2^{125302}$$

sehingga betul keempat solusi tersebut memenuhi. Jadi ternyata ada solusinya.

[3 poin untuk menyelesaikan bukti]

> **Komentar.** Semua perolehan poin yang mungkin dengan cara ini adalah 0, 1, 2, 5, 8. Perolehan poin tidak aditif, kecuali jika solusi sudah dituliskan dan memenuhi, maka diberikan nilai sempurna.

Model Solution 3 (Kenji Gunawan): Kita klaim bahwa jawabannya ada. Misalkan $(a, b, c, d) = 3^p, 3^q, 3^r, 3^s$ maka jika $a^2 = b^5 = c^{11} = 3^{110k}$, diperoleh $3^{110k+1} = 3^{2021s}$ karena $KPK(2, 5, 11) = 110$. Dan solusi akhir yang dimiliki adalah $a = 3^{55k}, b = 3^{22k}, c = 3^{10k}, d = 3^s$. Maka harus dicari suatu bilangan s sehingga $110k + 1 = 2021s$.

[1 poin]

Dapat dituliskan bahwa dengan Identitas Bezout, akan ada bilangan bulat k, s sehingga $2021s - 110k = 1$ karena 110 dan 2021 relatif prima. Perhatikan bahwa

$$110k = 2021s - 1 \iff 110k \equiv -1 \pmod{2021} \ldots (1)$$

Sekarang invers modulo 2021 dari 110 akan dicari. Misalkan suatu bilangan asli $1 \leq m \leq 2020$ menghasilkan $110m \equiv 1 \pmod{2021}$. Maka kita akan mencari m dalam mod 2021, dan dapat dilihat bahwa jika

$$\begin{aligned}
&110m \equiv 1 \pmod{2021} \\
\iff &\exists n \in \mathbb{N} \ni 1 \leq n \leq 110, 110m - 1 = 2021n \iff 2021n \equiv -1 \pmod{110} \\
\iff &41n \equiv -1 \pmod{110} \implies \exists i \in \mathbb{N} \ni 1 \leq i \leq 40, 110i \equiv 1 \pmod{41} \\
\iff &28i \equiv 1 \pmod{41} \implies \exists j \in \mathbb{N} \ni 1 \leq j \leq 28, 41j \equiv -1 \pmod{28} \\
\iff &13j \equiv -1 \pmod{28} \implies \exists l \in \mathbb{N} \ni 1 \leq l \leq 13, 28l \equiv 1 \pmod{13} \\
\iff &2l \equiv 1 \pmod{13} \implies l = 7.
\end{aligned}$$

Dari sini, substitusikan agar ditemukan bahwa $j = 15, i = 22, n = 59, m = 1084$.

[3 poin]

Mengalikan 1084 kepada (1), diperoleh:

$$110(1084)k \equiv -1084 \pmod{2021} \iff k \equiv 937 \pmod{2021}.$$

Ambil solusi terkecil, $k = 937$ sehingga $110k + 1 = 2021s$, maka $s = 51$. Selanjutnya, $a = 3^{55k} = 3^{51535}, b = 3^{22k} = 3^{20614}, c = 3^{9370}$. Maka harus diperiksa bahwa $(a, b, c, d) = (3^{51535}, 3^{20614}, 3^{9370}, 3^{51})$ memenuhi, maka masukkan agar diperoleh

$$(3^{51535})^2 + (3^{20614})^5 + (3^{9370})^{11} = (3^{51})^{2021} = 3^{103070} + 3^{103070} + 3^{103070} = 3^{103071}$$

yang berarti satu solusi telah ditemukan, terbukti bahwa ternyata ada kuadruplet bilangan asli yang memenuhi.

[4 poin untuk menyelesaikan bukti]

> **Komentar.** Perolehan poin tidak aditif. Semua tahap sebelumnya harus ada juga agar dapat diberikan poin-poin selanjutnya. Namun, jika solusi kuadruplet sudah dituliskan, maka akan diberikan nilai sempurna. Perolehan poin yang mungkin adalah 0, 1, 4, 8.

Featured Participant's Solution (By Maulana Satya Adigama, with modifications by Kenji Gunawan, reproduced with permission): Soal ini akan dikerjakan dengan pendekatan konstruktif. Misalkan $a = 3^{55k}, b = 3^{22k}, c = 3^{10k}$, dan $d = 3^l$. Maka, jika (a, b, c, d) solusi,

$$\Rightarrow a^2 + b^5 + c^{11} = 3 \times 3^{110k} = 3^{110k+1} = d^{2021} = 3^{2021l}.$$

Tinggal dibuktikan pasti ada bilangan asli k dan l agar $110k + 1 = 2021l$.
Perhatikan bahwa 110 dan 2021 relatif prima (sebab $110 = 2 \times 5 \times 11$ sementara $2021 = 43 \times 47$). Artinya menurut Identitas Bezout, pasti ada k dan l bilangan bulat yang memenuhi $2021l - 110k = 1$.
Bukti: Akan ditunjukkan bahwa $110k$ lengkap pada residu modulo 2021. (Jika iya, artinya ada bilangan bulat k sehingga $110k \equiv -1 \pmod{2021}$.) Asumsikan dengan kontradiksi, residunya tidak lengkap. Maka akan ada bilangan bulat berbeda x dan y pada interval $0 \le x, y \le 2020$ sedemikian sehingga

$$110x \equiv 110y \pmod{2021}.$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$110(x - y) \equiv 0 \pmod{2021}$$

yang berarti karena 110 dan 2021 relatif prima, dengan Lemma Euclid:

$$2021|110(x - y) \equiv 2021|x - y$$

sehingga $x - y = 0$ sebab $-2019 \le x - y \le 2019$, kontradiksi dengan asumsi awal x dan y berbeda. Maka terbukti. $\square$
Sehingga pasti ada bilangan bulat k dan l yang memenuhi $110k + 1 = 2021l$. Semisal ada k atau l yang bernilai negatif (atau bahkan dua-duanya), tambahkan 2021 pada k dan 110 pada l untuk menghasilkan solusi baru. Lakukan secara berulang sampai k dan l bilangan asli. Maka, karena k dan l memiliki solusi, dapat ditentukan nilai a, b, c, dan d, sehingga terbukti bahwa persamaan tersebut memiliki solusi bilangan asli. $\square$

5. Sebuah mesin terdiri dari 3 kotak, masing-masing dengan lampu merah yang pada awalnya padam. Setelah memasukkan objek-objek ke dalam kotak tersebut, mesin tersebut dapat digunakan untuk menjalankan suatu pemeriksaan. Untuk setiap kotak, jika total berat pada kotak tersebut kurang dari (*strictly less than*) berat dari masing-masing dua kotak lain manapun, lampu merah pada kotak tersebut akan menyala. Jika tidak, maka lampunya akan tetap padam. Anda diberikan 7 bola, dan terdapat sebuah bola palsu yang lebih berat daripada keenam bola asli lainnya. Bola asli lainnya beratnya sama. Gunakan mesin ini tepat dua kali untuk menentukan manakah yang merupakan bola palsu yang diinginkan, sertakan jawabanmu dengan bukti bahwa prosedur ini selalu berhasil.

Proposed by Haidar Prayata Wirasana, Indonesia, retrieved from IWYMIC 2012.

Model Solution (Official TAIMC Solution): Tandai setiap bola 1 sampai 7, agar lebih mudah dalam penjelasan. Pada pemeriksaan pertama, masukkan bola 1 dan 2 pada kotak pertama, bola 3 dan 4 pada kotak kedua, dan bola-bola 5, 6, dan 7 pada kotak ketiga. Jelas lampu merah pada kotak ketiga tidak akan menyala. Terdapat 3 kasus:

[2 poin]

Kasus 1. Tidak ada lampu yang menyala. Berat kotak pertama dan kedua sama, maka salah satu bola pada kotak ke 5, 6, dan 7 lebih berat. Masukkan bola 5 pada kotak pertama, bola 6 pada kotak kedua, dan 2 dari kelima bola lainnya pada kotak ketiga. Jelas lampu pada kotak ketiga tidak dapat menyala. Jika lampu kotak pertama menyala, bola 6 adalah bola palsu tersebut, sedangkan jika lampu pada kotak kedua menyala, bola 5 adalah bola palsu. Jika tidak ada lampu yang menyala, maka bola 7 adalah bola palsu. Maka untuk kasus ini, selesai.

[3 poin]

Kasus 2. Lampu kotak pertama menyala. Maka berat kotak pertama paling ringan, sehingga bola palsu pada kotak kedua. Ambil bola 3 dan 4 lalu masukkan ke kotak pertama dan kedua berturut-turut, lalu masukkan 2 bola lain ke kotak terakhir. Jelas lampu pada kotak ketiga tidak dapat menyala. Jika lampu pada kotak pertama menyala, bola 4 adalah bola palsu, sementara jika lampu pada kotak ketiga menyala, bola 3 adalah bola palsu, sehingga untuk kasus ini sudah selesai.

[2 poin]

Kasus 3. Lampu kotak kedua menyala. Lakukan dengan logika yang sama dengan kasus kedua, sehingga untuk kasus ini juga sudah selesai.

Maka, prosedur ini selalu menyelesaikan masalah setelah digunakan tepat dua kali.

[1 poin untuk menyelesaikan bukti]

> **Komentar.** Perolehan poin tidak aditif. Perolehan poin yang mungkin adalah 0, 2, 5, 7, 8.

CREDITS

CREATED BY
Aisha Tasya Aulia
Aleeza Amanda Qynanti
Fikri Fauzan Rahman
Haidar Prayata Wirasana
Kenji Gunawan
Wildan Bagus Wicaksono from nimbailmu.com

GRAPHICS BY
Aisha Tasya Aulia
Aleeza Amanda Qynanti
Kenji Gunawan
Nafi Suling
Wildan Bagus Wicaksono

EVENT ORGANIZERS
Aisha Tasya Aulia
Haidar Prayata Wirasana
Nafi Suling

LIAISON OFFICERS
Asri Andhini
Aulia Putri Kusuma
Tarisha Alya Zhafira

PROBLEM PROPOSERS
Aisha Tasya Aulia
Ben Asriparusa
Haidar Prayata Wirasana
Kenji Gunawan
M. Jilan Wicaksono
M. Nadhif Arfa Rayyan
Nasywa Hanan Huriyah
Rafael Kristoforus Yanto
Reswara Anargya Dzakirullah
Rizky Rajendra Anantadewa
Wildan Bagus Wicaksono

PROBLEM SC
Ben Asriparusa
Bu Sutryati from Klinik Pendidikan MIPA
Denzel Elden Wijaya
Haidar Prayata Wirasana
Kenji Gunawan
Rafael Kristoforus Yanto
Rizky Rajendra Anantadewa

MODULE CREATORS
Aisha Tasya Aulia
Aleeza Amanda Qynanti
Aulia Putri Kusuma
Dinda Yuviarahmah
Haliza Arfa
M. Aqila Putrawisesa
M. Nadhif Arfa Rayyan
M. Rizki
M. Salman
Nasywa Hanan Huriyah
Satria Pangestu

GAME CREATORS
Aisha Tasya Aulia
Haidar Prayata Wirasana
Nafi Suling

POSTER BY
Ninda Irvany

JUDGE (FINAL ROUND)
Ben Asriparusa
from bemathpro.id

MODERATORS
Asri Andhini
Aulia Putri Kusuma
Tarisha Alya Zhafira

GAME MASTERS
Lila Mutiara Kasbi
Muhammad Aqila Putrawisesa
Mutiah
Nasywa Hanan Huriyah
Vianza Ravendika Darsana

ASSISTANT GAME MASTERS
Adella Nanda Jelita
Aditya Al-Farizi
Aleeza Amanda Qynanti
Arin Vania
Arsya Maulana
Dinda Yuviarahmah
Nabil Rafif
Nafta Fauzan Afta
Salwa Shabrina
Tertia Shatara

ESSAY JURORS
Aisha Tasya Aulia
Ben Asriparusa
Haidar Prayata Wirasana
Kenji Gunawan
M. Nadhif Arfa Rayyan
Nasywa Hanan Huriyah

SUPPORTED BY
nimbailmu.com

INVIGILATORS
Abu Dzar Al-Ghifari
Adea Zahwa
Aditya Al-Farizi
Agatha Kristanavia
Ahnaf Aufaa Thilaal
Alban Mulky
Alifia Sariningtyas
Alvara Danica Fajra
Aswal Ikraam
Aulia Putri Kusuma
Benaya Wellington
Cantik Arsy
Daffa Axel
Dinda Yuviarahmah
Fathan Fahrezi
Ghina Khalda
Haliza Arfa
Jonathan Aldric
Jovando Haryo
Kyla Zakira
Lila Mutiara Kasbi
Lutfiah Rahmadini
Melisa Febriani
M. Aksal Prima Putra Revino
M. Nadhif Arfa Rayyan
M. Nur Ihsan
M. Rafi Fazhila
M. Salman Al-Farisi
M. Syahreza Trihatmanto
Mutiah
Nabil Rafif
Nabila Puspita
Nabila Taluakova
Namia Tsabita Balqis
Nashwa Ammara
Nasywa Hanan Huriyah
Naufal Maghribi
Naufal Nabil
Ninda Irvany
Nur Sofia
Qarira Rahmamunifa
Rafly Afid
Rifa Anindya
Shifa Kayana
Vivi Alvianita
Windriya Kusumowijoyo
Yarina Ainun Nufus
Yasmin Jihan
Zefanya Arundhati
Zhafira Uzma