

Berkas Soal Final ITB Mathematics Olympiad 2022

Panitia ITBMO 2022

19 Maret 2022

Peraturan

1. Peserta diwajibkan berada di Zoom babak final selama lomba berlangsung. Panitia akan merekam babak final.
2. Kompetisi ini bersifat **tutup-buku**. Peserta ITBMO 2022 dilarang menggunakan buku, catatan, atau referensi lainnya dalam mengerjakan soal kompetisi.
3. Peserta ITBMO 2022 dilarang menggunakan alat hitung seperti kalkulator dan *software/website* matematika serta dilarang bekerja sama dengan orang lain dalam mengerjakan soal kompetisi.
4. Pengerjaan soal babak final ITBMO 2022 berlangsung selama 180 menit dan terdiri atas 4 soal uraian. Setiap soal bernilai maksimal 7 poin. Peserta dapat memperoleh nilai parsial atas jawaban yang benar sebagian. Setelah pengerjaan selesai, peserta harus mempresentasikan jawaban salah satu soal yang telah dikerjakannya di hadapan juri secara bergiliran. Presentasi bernilai maksimal 7 poin.
5. Peserta yang ingin ke toilet diharuskan meminta izin ke panitia melalui *private chat* di Zoom atau dengan cara lain terlebih dahulu. Peserta hanya diperbolehkan ke toilet selama total 10 menit selama waktu pengerjaan soal (waktu toilet saat sesi presentasi tidak dibatasi).
6. Jika terdapat poin yang sama di hasil babak final, peringkat akan ditentukan langsung oleh juri berdasarkan kualitas jawaban dan presentasi peserta.
7. Panitia berhak mendiskualifikasi peserta yang melakukan pelanggaran, kecurangan, atau memasukkan data registrasi yang tidak aktual atau tidak memenuhi syarat.
8. Apabila pada saat perlombaan berlangsung peserta tidak dapat mengikuti perlombaan, maka peserta **tidak dapat digantikan**.
9. Keputusan juri dan panitia MCF ITB 2022 tidak dapat diganggu gugat.

Soal Babak Final ITB Mathematics Olympiad 2022

1. Diberikan segilima konveks $ABCDE$. Titik F terletak pada ruas garis AC sehingga $\angle FBC = 90^\circ$. Diketahui panjang ruas garis $EA = ED$ serta segitiga ABF , ACD , dan ADE sebangun dengan $\angle AED = \angle ADC = \angle AFB$. Buktikan bahwa F terletak pada garis BE .
2. Untuk setiap bilangan bulat $a > 1$, definisikan barisan a_0, a_1, a_2, \dots dengan cara sebagai berikut:

$$a_0 = a$$

dan untuk setiap bilangan asli n , berlaku

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{jika } \sqrt{a_n} \text{ adalah bilangan bulat} \\ a_n + 4, & \text{jika } \sqrt{a_n} \text{ bukan bilangan bulat} \end{cases}$$

Tentukan himpunan semua nilai a sehingga terdapat suatu bilangan A yang menyebabkan himpunan $\{n \mid a_n = A\}$ memiliki tak hingga banyak anggota.

3. Diketahui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dua buah fungsi sehingga untuk setiap bilangan real x berlaku

$$f(x + 2022)g(x) + f(x)g(x + 2022) = 2022$$

Jika g adalah fungsi linear (yaitu fungsi polinomial berderajat 1 atau kurang), tentukan semua pasangan fungsi f dan g yang memenuhi.

4. Anda menemukan diri Anda di sebuah arena yang besar. Untuk keluar dari arena, Anda harus memainkan dan memenangkan sebuah permainan sebagai berikut.

Arena terdiri atas grid dengan 3 baris dan n kolom, dengan $n > 4$. Awalnya, Anda berdiri di pojok kiri bawah dan lawan Anda berdiri di pojok kanan atas. Anda memulai permainan dengan bergerak seperti huruf L (dua petak horizontal, satu petak vertikal atau satu petak horizontal, dua petak vertikal), lalu lawan Anda bergerak seperti huruf L juga, dan seterusnya secara bergantian.

Peraturan permainan sebagai berikut:

- (a) Seorang pemain tidak boleh bergerak ke luar *grid* arena.
- (b) Jika seorang pemain berada di kanan pemain lain, maka ia harus bergerak ke kiri, dan jika ia di kiri pemain lain, maka ia harus bergerak ke kanan.
- (c) Seorang pemain tidak dapat bergerak ke petak yang bersebelahan (yaitu tepat di atas, bawah, kiri, atau kanan) dengan pemain lainnya.
- (d) Pemain menang apabila ia bergerak ke petak yang ditempati oleh lawannya (seperti "memakan" dalam catur), atau lawannya tidak bisa bergerak di gilirannya.

Lawan Anda selalu bermain sempurna, tetapi Anda-lah yang memilih nilai n . Carilah semua nilai n yang membuat Anda punya strategi untuk menang, dan buktikan jawaban Anda.