



Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Juni 2019: Simulasi OSN Matematika SMA 2019 Hari
Kedua

16 Juni – 17 Juni 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi \mathbb{N} menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi \mathbb{Z} menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi \mathbb{Q} menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi \mathbb{R} menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \dots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b .
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n .
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
 - (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
 - (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
 - (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC .
 - (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A , garis berat dari titik B , dan garis berat dari titik C .
 - (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A , garis tinggi dari titik B , dan garis tinggi dari titik C .

- (f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A , B , dan C .
- (g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC , CA , dan AB .
16. Luas dari sebuah segi- n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.
17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i+1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i . Contohnya, $3, 5, 7, 9, \dots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.
18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan tak nol (bisa jadi 1) untuk setiap i . Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \dots$ merupakan barisan geometrik.
19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{a+b}{2}$.
20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah \sqrt{ab} .
21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Hari Kedua

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Definisikan sebuah *substring* sebuah bilangan cacah $x = \overline{a_1a_2a_3 \dots a_n}$, dimana a_i adalah digit-digit dari x untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n (a_i \neq 0)$, adalah bilangan bulat yang berbentuk $\overline{a_i a_{i+1} \dots a_j}$ dimana $1 \leq i \leq j \leq n$. Sebagai contoh, substring dari 219 adalah 2, 1, 9, 21, 19 dan 219. Tentukan bilangan prima terbesar n sedemikian sehingga setiap substring dari n juga merupakan bilangan prima.
2. Misalkan $ABCD$ ialah sebuah persegi dan E ialah titik di segmen AB . DE dan AC berpotongan di titik F . Misalkan ω ialah lingkaran luar dari DCF . ω memotong segmen AD dan BC di G dan H . GF dan HF memotong garis AB di I dan J . Lingkaran luar FEI memotong ω dan AC di K dan L .
 - a. Buktikan bahwa G, L, K kolinear.
 - b. Buktikan bahwa $JD \perp GK$.
3. Diberikan a, b, c bilangan real positif. Buktikanlah bahwa

$$5(a + b + c) \geq \sqrt{a^2 + 3b^2} + \sqrt{b^2 + 3c^2} + \sqrt{c^2 + 3a^2} + 9\sqrt[3]{abc}$$

4. Diberikan suatu papan persegi berukuran $n \times n$. Papan tersebut dibagi menjadi n^2 petak persegi berukuran 1×1 . Definisikan suatu lembaran *tisu* sebagai persegi berukuran $k \times k$ untuk suatu bilangan asli $k \leq n$. Pada mulanya, papan persegi tersebut tidak tertutup tissu.

Setelah pulang dari perjalanan panjang menuju Gunung Freeze, Muddy terkena flu, sehingga setiap menit dia harus mengambil tissu. Setiap menit, setelah menggunakan tissu, dia menaruh tissu pada papan dengan syarat berikut:

- Sisi dari tissu sejajar dengan sisi papan, setiap petak papan yang tertutup tissu harus tertutup sepenuhnya oleh tissu, dan seluruh bagian tissu harus menutup papan.
- Setiap menit, tissu yang ditaruh pada papan harus menutup minimal satu petak yang belum ditutupi tissu-tisu sebelumnya.

Muddy berhenti menaruh tissu pada papan tersebut setelah papan tertutup secara sempurna oleh tissu. Misalkan S adalah jumlah dari luas (dalam satuan luas) dari seluruh tissu yang ditaruh oleh Muddy. Tentukan nilai terbesar yang mungkin dari S .