AZZAM LABIB HAKIM

1

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019
Number Theory 1 (NS-1)
Malang, 8 Oktober 2018

1. Give a reduced residue system modulo 12. 1, 5, 7, 11
2. Give a complete residue system modulo 13 consisting only of odd integers. 1, 3, 5, 7, 9, 11
3. Find $\phi(8)$ and $\phi(101)$. $\phi(8) = 4$ $\phi(101) = 100$
4. Find all solutions of $3x \equiv 6 (mod\ 9)$. $x \equiv 2 \bmod 3$
5. Find all solutions of $3x \equiv 2 (mod\ 7)$. $x \equiv 3 \bmod 7$
6. Find an inverse modulo 13 of 2 and of 11. $x = 7$, $x = 19$
7. Show that if $\bar{a}$ is the inverse of a modulo m and $\bar{b}$ is the inverse of b modulo m, then $\bar{a}\bar{b}$ is the inverse of ab modulo m. $(ab)(\bar{a}\bar{b}) \equiv 1 \bmod m$
8. Show that 10!+1 is divisible by 11. $10! \equiv -1 \bmod 11$ by wilson's
9. What is the remainder when 5!25! is divided by 31? 1
10. What is the remainder when 5^{100} is divided by 7? 2
11. Show that if p is an odd prime, then $2(p-3)! \equiv -1 (mod\ p)$. $(p-2)(p-1) \equiv 2 \bmod p$
12. Find a reduced residue system modulo 2^m, where m is a positive integer. an odd integer mod 2^m
13. Show that if $a_1, a_2, ..., a_{\phi(m)}$ is a reduced residue system modulo m, where m is a positive integer with $m \neq 2$, then $a_1 + a_2 + ... + a_{\phi(m)} \equiv 0 (mod\ m)$. $\equiv 1+2+...+(m-1) = \frac{(m-1)m}{2}$ $2 | m-1$
14. Show that if a is an integer such that a is not divisible by 3 or such that a is divisible by 9, then $a^7 \equiv a (mod\ 63)$. I : $a^7 \equiv a \bmod 7$ (Fermat's), $a^2 \equiv 1 \bmod 9 \Rightarrow a^7 \equiv a \bmod 9 \Rightarrow a^7 \equiv a \bmod 63$
II : $a^7 \equiv a \bmod 7$ (Fermat's) $\Rightarrow a^7 \equiv a \bmod 63$
15. Let m and n be positive integers posessing the following property: the equation
$11k \equiv 1 \bmod d$ $m+1 \equiv n+1 \equiv 1 \bmod d$ $m-n \equiv 0 \bmod d$ $11k-1 \equiv m \bmod d$ $11k \equiv m+1 \bmod d$,
$d \nmid 11 \Rightarrow \because d | m-n \Rightarrow m = 11^r n$.
$11^r \in \mathbb{Z}_d$.
$$d = \gcd(11k-1, m) = \gcd(11k-1, n)$$ ~~$\Rightarrow \gcd(m, 11) = \gcd(n, 11) = 1$~~ ~~$\gcd(m, n)$~~
holds for all positive integers k. Prove that $m = 11^r n$ for some integer r.
16. Let a and b be two relatively prime positive integers, and consider the arithmetic progression $a, a+b, a+2b, a+3b, ...$ Prove that there are infinitely many pairwise relatively prime terms in the arithmetic progression. use $\mathbb{Z}_n^*$ $a \equiv a + kb \bmod n$
17. For how many integer values of $i, 1 \leq i \leq 1000$, does there exist an integer $j, 1 \leq j \leq 1000$, such that i is a divisor of $2^j - 1$? $2^j \equiv 1 \bmod i$ $\phi(i) \in [1, 1000]$
$2^{\phi(i)} \equiv 1 \bmod i$ ambil $j = \phi(i) \Rightarrow i$ bil. ganjil $\Rightarrow$ 500

AZZAM LABIB HAKIM NS-1 8 oktober 2018

$29^p+1 \equiv 29+1 \equiv 30 \mod p$ $p|30$, $p=2,3,5$

✓ 18. How many prime numbers p are there such that $29^p + 1$ is a multiple of p?

✓ 19. Determine the remainder on dividing $6^{83} + 8^{83}$ by 49. $(7-1)^{83}+(7+1)^{83} \equiv 83(7)+83(7) \equiv 35$ (AIME 83)

20. Calculate the last three digits of $2019^{11} + 2019^{12} + \cdots + 2019^{2020}$.

21. Calculate the last 3 digits of $2018^{2017^{2016^{\cdots^{2^1}}}}$.

✓ 22. Let a be a positive integer. Prove that any prime factor > 2 of $a^2 + 1$ is of the form $4^m + 1$. $a^2+1 \equiv 0 \mod p \Rightarrow a^4 \equiv 1 \mod p \Rightarrow 4|p-1 \Rightarrow p \equiv 1 \mod 4$ with order

✓ 23. If $n^{n+1} + (n + 1)^n$ is a perfect square, prove that n must be composite. $n, n+1$ different parity $\equiv 1 \mod 4 \Rightarrow n \equiv 0 \mod 4$

✓ 24. (a) Find all positive integers n such that 7 divides $2^n - 1$. $n \equiv 0 \mod 3$, i.e. $n=3k$.

(b) Prove that for any positive integer n the number $2^n + 1$ cannot be divisible by 7. $n \equiv 0, \pm 1 \mod 3 \Rightarrow 2^n+1 \equiv 2+1, 4+1, 1+1 \not\equiv 0 \mod 7$

✓ 25. Several integers are given (some of them may be equal) whose sum is equal to 2018. Find all n such that the sum of their seventh powers can equal n.

✓ 26. Let $3^n - 2^n$ be a power of a prime for some positive integer n. Prove that n is a prime.

$n=2,3$ obvious. $n>3$ $3^n-2^n \equiv 0 \mod q$, $q>3$

Assume $n \notin$ prime. $n=pa$ $3^n-2^n \equiv 0 \mod r$. $3^n-2^n=r^k = 3^{pa}-2^{pa} = (3^p-2^p)k$. $1<p,a$

By Zsigmondy therem, $r|3^n-2^n$ but $r \nmid 3^p-2^p$ then $3^p-2^p=1$ ※ since $p>1$.

$\Rightarrow n$ must be prime

AZZAM LABIB HAKIM

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019

Number Theory 2 (NS-2)

Malang, 8 Oktober 2018

1. Diberikan sebarang bilangan asli m. Misalkan $a_k \in \mathbb{Z}_m^*$. $a_i \equiv r \mod m$, $a_k \equiv j \mod m$, $a_k - j \equiv 0$, $\gcd(r, j) = 1$

$$\mathbb{Z}_m^* = \{n \in \mathbb{Z}_m | \gcd(m, n) = 1\}.$$

Misalkan juga P merupakan hasil kali semua elemen-elemen pada $\mathbb{Z}_m^*$. Tunjukkan bahwa $P \equiv \pm 1 (\mod m)$. Kapan berlaku dan $P \equiv -1 (\mod m)$? Wilson's

↳ m apa saja ↳ m prime

2. Tentukan bilangan bulat terbesar N sehingga $N | a^{13} - a$ untuk setiap bilangan bulat a. $2730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$

3. Tentukan banyaknya bilangan asli n sehingga $n | a^{25} - a$ untuk setiap bilangan bulat a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ 32

4. Cari semua bilangan asli n sehingga terdapat sistem residu lengkap $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ dan $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ yang menyebabkan $\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n\}$ juga merupakan sistem residu lengkap. $a_1 + \dots + a_n \equiv \frac{n(n+1)}{2} \mod n \equiv 0$ $a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + \dots + b_n \equiv n(n+1) \equiv 0 \mod n$
$b_1 + \dots + b \equiv \frac{n(n+1)}{2} \mod n \equiv 0 \Rightarrow n+1 \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow n$ ganjil

5. Ada berapa banyak bilangan asli $x \leq 2018^{2017}$ sehingga $x^2 - 1$ merupakan kelipatan 2018^{2017}. $x = 1$, $\frac{\phi(2018^{2017})}{2}$, $x = 2018^{2017} - 1$.

6. Cari banyak bilangan asli x sehingga $x^2 - x$ habis dibagi 10^{2017}. $1 \leq x \leq 10^{2017}$
$x = 1$, $x = 10^{2017}$

7. Misalkan a dan b adalah bilangan asli dengan $(a, b) = 1$. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat m dan n sehingga $a^m + b^n \equiv 1 \mod ab$

8. Diberikan a, b dan m adalah bilangan asli yang memenuhi $(a, m) | b$. Cari banyak solusi bulat persamaan $ax \equiv b \mod m$ untuk $0 \leq x \leq m$.

9. Let $p > 2$ be a prime number such that $3 | (p-2)$. Let $S = \{y^2 - x^3 - 1 | 0 \leq x, y \leq p - 1. x, y \in \mathbb{Z}\}$ Prove that there are at most p elements of S divisible by p.

10. Let a, b be positive integers such that $b^n + n$ is a multiple of $a^n + n$ for all positive integers n. Prove that $a = b$. $a^n \equiv b^n \mod a^n + n$, $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \equiv 0 \mod a^n + n$ $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\Rightarrow a = b$.

11. Misalkan S adalah subhimpunan dari himpunan semua bilangan prima yang memenuhi

   (a) S tidak kosong,

   (b) untuk setiap anggota-anggota berbeda $q_1, q_2, ..., q_n \in S$ jika bilangan prima $p | (q_1 q_2 ... q_n + 1)$ maka $p \in S$. Euclid's proof for infinitely many prime.
   $q_1 q_2 \dots q_n + 1$ is a new prime $\neq q_1, q_2, \dots, q_n$.

   Buktikan bahwa S memuat semua bilangan prima.

12. Find all polynomials W with integer coefficients satisfying the following condition: for every natural number n, $2^n - 1$ is divisible by $W(n)$.

Azzam Labib Hakim

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019

Number Theory 3 (NS-3)

Malang, 8 Oktober 2018

√ 1. Diberikan bilangan prima p dan misalkan $a \in \mathbb{Z}$ dengan $o_p(a) = 3$. Tentukan order dari $(1 + a)$. $k = ord_p(1+a)$. $p \mid (a+1)^k - 1 = a(a^{k-1} + \dots + 1)$. $3 \mid k$. $k \neq 3$. $k = 6$.
$p \mid a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$. if $a \equiv 1$ ✗ . $\Rightarrow p \mid a^2+a+1$.

2. Diberikan bilangan prima ganjil p dan r adalah suatu elemen dengan order $p - 1$. Buktikan bahwa order $r + p \bmod p^2$ adalah $(p - 1)$ atau $p(p - 1)$.

√ 3. Diberikan bilangan prima p dan bilangan asli n dengan sifat $p \mid n^4 - n^2 + 1$. Buktikan bahwa $12 \mid p - 1$. $p \mid n^6+1 \Rightarrow p \mid n^{12} - 1$. kalo $O_p(n) = 11 \Rightarrow$ $\times (n^2+1)$ mod p n^6 aja bukan ord. ord $\mid 12$ tapi ord $\nmid 6$. cek ord $= 4$.

√ 4. Adakah bilangan asli $n > 1$ dengan $n \mid 3^n + 1$? Ada, $n = 2$.

√ 5. Jika $p \mid 2^{2^n} + 1$ maka tunjukkan bahwa $2^{n+1} \mid p - 1$ $p \mid 2^{2^{n+1}} - 1 \Rightarrow 2^{n+1} \mid p-1$ karena ord $\mid 2^{n+1}$

6. Cari semua bilangan asli n sehingga n membagi $2^n - 1$.

√ 7. Cari semua bilangan prima p, q, dan r sehingga $p \mid 2^q + 1, q \mid 2^r + 1$, dan ~~$r \mid 2^p + 1$.~~ $r \mid 2^p + 1$ $(3,3,3)$

$2^{2q} \equiv 1 \bmod p$
ord $\mid 2q$
ord $\mid 2$.
kalo ord $= 2q$,
$2q \leq p-1$
$2r \leq q-1$
$2p \leq r-1$ ✗.

8. Misalkan $n > 1$ adalah bilangan bulat dengan sifat

$$a^{\phi(n)+1} \equiv a \pmod{n}$$

untuk setiap bilangan bulat a. Buktikan bahwa n adalah *square free*.

9. Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan ganjil $n > 1$, tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $n \mid (x^{n-1} + 1)$.

10. How many positive integer multiples of 1001 can be expressed in the form $10^j - 10^i$, where i and j are integers and $0 \leq i < j \leq 99$?

11. Find the smallest number n with the property that $2^{2019} \mid 17^n - 1$.

12. Let a and b be relatively prime integers. Prove that any odd divisor of $a^{2^n} + b^{2^n}$ is of the form $2^{n+1}m + 1$.

13. Find all pairs of prime p, q such that $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

14. Find all pairs of prime p, q such that $pq \mid 5^p + 2^q$.

15. Find all pairs of prime p, q such that $q^2 + 1 \mid 2003^p + 1$. $p^2+1 \mid 2003^q + 1$

16. Find all ordered prime triples (p, q, r) such that $p \mid q^r + 1$, $q \mid r^p + 1$, and $r \mid p^q + 1$.

AZZAM LABIB HAKIM

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019

Number Theory 4 (NS-4)

Malang, 8 Oktober 2018

1. If p is an odd prime, g and g' primitive roots mod p, show that gg' can?t be a primitive root. ~~$g=g'$. g^2 can't be a primitive roots.~~

2. Let g be a primitive root mod p. Prove that $\mathbb{Z}_p^* = \{1,2,\dots,p-1\} = \{g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$

$$(p-1)! \equiv g^{p(p-1)/2}.$$ $(p-1)! \equiv g \cdot g^2 \cdots g^{p-1} \equiv g^{\frac{p(p-1)}{2}}$

and get a proof of Wilson?s thm from this. $g^{\frac{(p-1)}{2}\cdot p} \equiv (-1)^p \equiv -1 \mod p$

3. The decimal representations of $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}$ are 0.142857, 0.285714, ..., 0.857142, which surprisingly are all cyclic shifts of each other. Is this a coincidence? no. 10 PR mod 7. desimalnya $\frac{1}{7} = \frac{10}{7}$, $\frac{2}{7} = \frac{100}{7}, \dots$

4. Let n be a positive integer and $p > n+1$ a prime. Prove that p divides
n odd obvious
$$1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n.$$

5. Diberikan bilangan asli m. Misalkan g adalah akar primitif di modulo m. Buktikan bahwa $g^{\varphi(m)/2} \equiv -1 \mod m$ ~~punya solusi jika dan hanya jika $p \equiv 1 \mod 8$.~~
cek $n = 1, 2, 4, p^a, 2p^a$

6. Tentukan semua bilangan asli $n > 1$ sehingga
$$\frac{2^n+1}{n^2}$$
merupakan bilangan asli. (IMO 1990).

7. For every prime number $p \geq 3$, define
$$F(p) = \sum_{k=1}^{(p-1)/2} k^{120}, \; f(p) = \frac{1}{2} - \left\{\frac{F(p)}{p}\right\}.$$
Find the value of $f(p)$.

8. Find all prime numbers p, q for which the congruence $\alpha^{3pq} \equiv \alpha(\mod 3pq)$ holds for all integers α.

9. Let $f(x_1, \dots, x_n)$ be a polynomial with integer coefficients of total degree less than n. Show that the number of ordered $n-$tuples $(x_1, \dots, x_n)$ with $0 \leq x_i \leq 12$ such that $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \mod 13$ is divisible by 13.

10. Alice and Bob play the following game. They alternate selecting distinct nonzero digits (from 1 to 9) until they have chosen seven such digits, and then consider the resulting seven-digit number (i.e. $\overline{A_1B_2A_3B_4A_6B_6A_7}$). Alice wins if and only if the resulting number is the last seven decimal digits of some perfect seventh power. Please determine which player has the winning strategy.

1

AZZAM LABIB HAKIM

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

PEMBINAAN TAHAP I CALON PESERTA IMO 2019

Number Theory 5 (NS-5)

Malang, 9 Oktober 2018

√ 1. Show that if p is prime and $p \geq 7$, then there are always two consecutive quadratic residues of p. (see no.5) diantara 2, 5, 10 satu atau tiga-tiganya QR. Padahal 1, 4, 9 jelas QR.

√ 2. Show that if p is prime and $p \geq 7$, then there are always two quadratic residues of p that differ by 3. 1 and 4

√ 3. Find the value of Legendre symbol $\left(\frac{j}{7}\right)$ for $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 1, 1, −1, 1, −1, −1

√ 4. Evaluate the Legendre symbol $\left(\frac{7}{11}\right)$ by using Euler's criterion. $\left(\frac{7}{11}\right) \equiv 7^5 \equiv -1 \mod p$

√ 5. Let a and b be integers not divisible by p. Show that either one or all three of the integers a, b and ab are quadratic residues of p, p prime. $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$ bagi kasus: 1 1 1; 1 −1 −1; −1 1 −1; −1 −1 1

√ 6. Let p be a prime and a be a quadratic residue of p. Show that if $p \equiv 1(mod\ 4)$, then $-a$ is also a quadratic residue of p, whereas if $p \equiv 3(mod\ 4)$, then $-a$ is a quadratic nonresidue of p. $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{-a}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{a^2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

√ 7. Show that if p is an odd prime and a is an integer not divisible by p then $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$. $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a^2}{p}\right)$

√ 8. Evaluate $\left(\frac{3}{53}\right)$. $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{3}{53}\right) = -1$ //

√ 9. Evaluate $\left(\frac{31}{641}\right)$. $= 1$

√ 10. Using the law of quadratic reciprocity, show that if p is an odd prime, then $p \neq 3$

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv \pm 1(mod\ 12) \\ -1 & \text{if } p \equiv \pm 5(mod\ 12). \end{cases}$$

~~$\left(\frac{3}{p}\right) \equiv 3^{\frac{p-1}{2}} \mod p$~~ $\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

$p \equiv \pm 1 \mod 3$. $\left(\frac{p}{3}\right) \equiv p^{\frac{3-1}{2}} \mod 3 \equiv p$.

√ 11. Show that if p is an odd prime, then

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv 1(mod\ 6) \\ -1 & \text{if } p \equiv -1(mod\ 6). \end{cases}$$

no. 10

$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(\pm 1)$

√ 12. Find a congruence describing all primes for which 5 is a quadratic residue. odd $\left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}} = 1$

$\left(\frac{p}{5}\right) \equiv p^2 \mod 5 \equiv 1 \Rightarrow p \equiv \pm 1 \mod 5$. $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ if $p \equiv \pm 1 \mod 5$.

13. For which positive integers n that are relatively prime to 15 does the Jacobi symbol $\left(\frac{15}{n}\right)$ equal 1?

14. Let n be an odd square free positive integer. Show that there is an integer a such that $(a, n) = 1$ and $\left(\frac{a}{n}\right) = -1$.

15. Diketahui p adalah bilangan prima. Ada berapa banyak $1 \leq a \leq p - 1$ sehingga persamaan $x^2 \equiv a \mod p$ mempunyai solusi bulat?

16. Prove that $2^n + 1$ has no prime factors of the form $8k + 7$. $\left(\frac{2^n+1}{p}\right) \equiv (2^n+1)^{\frac{p-1}{2}} \mod p \not\equiv 0$, $p \equiv 7 \mod 8$.

√ 17. Suppose that $a_1, a_2, \ldots, a_k$ are non-negative integers such that $a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n$ is a perfect square for all positive integers n. Show that k must be a perfect square. fermat's

~~$\left(\frac{2^n+1}{p}\right)\left(\frac{p}{2^n+1}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{2^n+1-1}{2}}$~~

~~$= +1$~~

18. Find all positive integers n such that $2^n - 1 \mid 3^n - 1$.

19. Find the smallest prime factor of $12^{2^{15}} + 1$.

20. Let $k = 2^{2^n} + 1$ for some positive integer n. Show that k is a prime if and only if k is a factor of $3^{(k-1)/2} + 1$.

21. Find a number n between 100 and 1997 such that $n \mid 2^n + 2$.

✓ 22. Let p be a prime number. Prove that there exists $x \in \mathbb{Z}$ for which $p|x^2 - x + 3$ if and only if there exists $y \in \mathbb{Z}$ for which $p|y^2 - y + 25$. $p \mid (2x-1)^2 + 11 \Leftrightarrow \left(\frac{-11}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow \underset{=1}{\left(\frac{9}{p}\right)}\underset{=1}{\left(\frac{-11}{p}\right)} = \underset{=1}{\left(\frac{-99}{p}\right)} \Leftrightarrow p \mid (2y-1)^2 + 99 \Leftrightarrow p \mid y^2 - y + 25$.

23. Let $p = 4k - 1$ be a prime number and $k \in \mathbb{N}$. Show that if a is an integer such that the congruence $x^2 \equiv a \pmod{p}$ has a solution, then the solutions are given by $x = \pm a^k$.

24. Show that all odd divisors of number $5x^2 + 1$ have an even tens digit.

25. Show that for every prime p, there exist integers a and b such that $a^2 + b^2 + 1$ is a multiple of p.

✓ 26. Find all integers x and y such that $\frac{x^2+1}{y^2-5}$ is an integer. $x^2 + 1 \equiv 1, 2 \bmod 4$. $y^2 - 5 \equiv 0, 3 \bmod 4$. $\Rightarrow$ no solutions exist.

27. Consider $p(x) = x^3 + 14x^2 - 2x + 1$. Show that there exists a natural number n such that for each integer x,

$$101 | \underbrace{p(p(\ldots p(x)))}_{n} - x.$$

28. Prove that for no $x, y, z \in \mathbb{N}$ is $4xyz - x - y$ a square.

29. If $n \in \mathbb{N}$, show that all prime divisors of $n^8 - n^4 + 1$ are of the form $24k + 1, k \in \mathbb{N}$.

30. Prove that $2^{3^n} + 1$ has at least n prime divisors of the form $8k + 3$.

31. Determine all pairs (p, q) of odd primes with $q \equiv 3 \mod 8$ such that $\frac{1}{p}(q^{p-1} - 1)$ is a perfect square.

32. Let m, n be positive integers such that

$$A = \frac{(m+3)^n + 1}{3m}$$

is an integer. Prove that A is odd.

AZZAM LABIB HAKIM

Excircle
RWK
Malang, 9th Oktober 2018

Let I_A be ex-center of triangle ABC opposite to A (ω_A). Let the feet of the perpendiculars from I_A to BC, A and AB be $_A, Y_A$ and Z_A respectively.

√ 1.

$$AY_A = AZ_A = s, BX_A = BZ_A = s - c \text{ and } CX_A = CY_A = s - b$$

Where ($s = \frac{a+b+c}{2}$ and a, b, c denote the lengths BC, CA, AB).)

√ 2. Let M_A be the midpoint of arc BC not containing A in the circumcircle of triangle ABC. Then I, I_A, B, C all lie on a circle that is centered at M_A.

√ 3. Let the incircle of ABC touch BC at D. If PD is diameter the incircle of ABC and Q reection of D about the midpoint of BC, then A, P, and Q are collinear.

√ 4. Let N_A be the midpoint of the arc BC containing A in the circumcircle of triangle ABC. Then I_B, I_C, B, C all lie on a circle that is centered at N_A.

√ 5. $A, B, C, M_A, M_B, M_C, N_A, N_B, N_C$ lie on a circle.

Problems

1. If r_a, r_b and r_c are the radii of the excircles opposite to A, B and C, prove that
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$
$\frac{r}{r_a} = \frac{s-a}{s}$

2. Let $ABCD$ be an isosceles trapezoid with $AB \| CD$. The inscribed circle ω of triangle BCD meets CD at E. Let F be a point on the (internal) angle bisector of $\angle DAC$ such that $EF \perp CD$. Let the circumscribed circle of triangle ACF meet line CD at C and G. Prove that the triangle AFG is isosceles.

3. Given triangle ABC the point J is the center of the excircle opposite the vertex A. This excircle is tangent to the side BC at M, and to the lines AB and AC at K and L, respectively. The lines LM and BJ meet at F, and the lines KM and CJ meet at G. Let S be the point of intersection of the lines AF and BC, and let T be the point of intersection of the lines AG and BC. Prove that M is the midpoint of ST

4. Triangle ABC has orthocenter H, incenter I and circumcenter O. Let K be the point where the incircle touches BC. If IO is parallel to BC, then prove that AO is parallel to HK.

5. In triangle ABC, let ω be the excircle opposite to A. Let D, E and F be the points where ω is tangent to BC, CA, and AB, respectively. The circle AEF intersects line BC at P and Q. Let M be the midpoint of AD. Prove that the circle MPQ is tangent to ω.

6. Let ABC be a triangle and let ω be its incircle. Denote by D_1 and E_1 the points where ω is tangent to sides BC and AC, respectively. Denote by D_2 and E_2 the points on sides BC and AC, respectively, such that $CD_2 = BD_1$ and $CE_2 = AE_1$, and denote by P the point of intersection of segments AD_2 and BE_2. Circle ω intersects segment AD_2 at two points, the closer of which to the vertex A is denoted by Q. Prove that $AQ = D_2P$

7. The circle S has centre O, and BC is a diameter of S. Let A be a point of S such that $\angle AOB < 120°$. Let D be the midpoint of the arc AB which does not contain C. The line through O parallel to DA meets the line AC at I. The perpendicular bisector of OA meets S at E and at F. Prove that I is the incentre of the triangle CEF.

8. Let O be the center of the excircle of triangle ABC opposite A. Let M be the midpoint of AC and let P be the intersection of lines MO and BC. Prove that if $\angle BAC = 2\angle ACB$, then $AB = BP$.

9. A triangle ABC is given, in which the segment BC touches the incircle and the corresponding excircle in points M and N. If $\angle BAC = 2\angle MAN$, show that $BC = 2MN$.

10. Let I, O be the incenter and circumcenter of the triangle ABC respectively. Let the excircle ω_A of ABC be tangent to the side BC on N, and tangent to the extensions of the sides AB, AC on K, M respectively. If the midpoint of KM lies on the circumcircle of ABC, prove that O, I, N are collinear.

11. In a triangle ABC, the excircle ω_a opposite A touches AB at P and AC at Q, and the excircle ω_b opposite B touches BA at M and BC at N. Let K be the projection of C onto MN and let L be the projection of C onto PQ. Show that the quadrilateral $MKLP$ is cyclic.

12. In triangle ABC, let ω be the excircle opposite to A. Let D, E and F be the points where ω is tangent to BC, CA, and AB, respectively. The circle AEF intersects line BC at P and Q. Let M be the midpoint of AD. Prove that the circle MPQ is tangent to ω.

13. Let the excircle of triangle ABC opposite the vertex A be tangent to the side BC at the point A_1. Dene the points B_1 on CA and C_1 on AB analogously, using the excircles opposite B and C, respectively. Suppose that the circumcenter of triangle $A_1B_1C_1$ lies on the circumcircle of triangle ABC. Prove that triangle ABC is right-angled.

14. Let (I) and (J) be the incircle and $B-$ excircle of a triangle ABC. (I) touches CA and AB at D and E respectively. DE intersects BC at F. (J) touches BC at H. IF intersects JH at K. Prove that $\angle ACK = 90°$.

AZZAM LABIB HAKIM

Mandiri
RWK
Malang, 9 Oktober 2018

1. Find the greatest real number k such that for any triple of positive real numbers a, b, c such that

$$kabc > a^3 + b^3 + c^3,$$

there exists a triangle with side legths a, b, c.

√ 2. Does there exist a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$$

for all $n \geq 2$. Sol. on back of paper

√ 3. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n (n \geq 2)$ be real numbers greater than 1. Suppose that $|x_i - x_{i+1}| < 1$ for $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Prove that

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1$$

$\frac{x_k}{x_{k+1}} \in (0,1)$ atau $(1,2)$

ada minimal satu $\frac{x_k}{x_{k+1}} < 1$.

√ 4. The numbers $1, 2, \ldots 49$ are placed in a 7×7 array, and the sum of the numbers in each row and in each column is computed. Some of these 14 sums are odd while others are even. Let A denote the sum of all the odd sums and B the sum of all even sums. Is it possible that the numbers were placed in the array in such a way that $A = B$? $\boxed{\text{NO}}$

$1 + \ldots + 49$ = ganjil
biar $A = B$ harus genap

5. We are given $n \geq 4$ points in the plane such that the distance between any two of them is an integer. Prove that at least $\frac{1}{6}$ of these distances are divisible by 3.

6. An $n \times n$ board is coloured in n colours such that the main diagonal (from top-left to bottom-right) is coloured in the first colour; the two adjacent diagonals are coloured in the second colour; the two next diagonals (one from above and one from below) are coloured in the third colour, etc; the two corners (top-right and bottom-left) are coloured in the n-th colour. It happens that it is possible to place on the board n rooks, no two attacking each other and such that no two rooks stand on cells of the same colour. Prove that $n = 0 \pmod 4$ or $n = 1 \pmod 4$.

7. Let P be a point inside the acute angle $\angle BAC$. Suppose that $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. The points D and E are on the segments BA and CA, respectively, such that $BD = BP$ and $CP = CE$. The points F and G are on the segments AC and AB, respectively, such that DF is perpendicular to AB and EG is perpendicular to AC. Show that $PF = PG$. DPFE, DGEP cyclic $\Rightarrow$ PDGEF cyclic.

8. Let O, O_1 be the centers of the incircle and the excircle opposite A of triangle ABC. The perpendicular bisector of OO_1 meets lines AB and AC at L and N respectively. Given that the circumcircle of triangle ABC touches line LN, prove that triangle ABC is isosceles. tangent d_i $M = \text{mid}(\overline{OO_1})$

9. In triangle ABC, the interior and exterior angle bisectors of $\angle BAC$ intersect the line BC in D and E, respectively. Let F be the second point of intersection of the line AD with the circumcircle of the triangle ABC. Let O be the circumcentre of the triangle $ABC$and let D' be the reflection of D in O. Prove that $\angle D'FE = 90$. sol. on back page

10. Suppose that for a prime number p and integers a, b, c the following holds:
$$6 \mid p+1, \quad p \mid a+b+c, \quad p \mid a^4+b^4+c^4.$$
Prove that $p \mid a, b, c$.

11. Three pairwairs distinct positive integers a, b, c, with $gcd(a, b, c) = 1$, satisfy
$$a|(b-c)^2, b|(a-c)^2, c|(a-b)^2$$
Prove that there doesnt exist a non-degenerate triangle with side lengths a, b, c.

12. Show that given any prime p, there exist integers x, y, z, w satisfying $x^2 + y^2 + z^2 - wp = 0$ and $0 < w < p$.

AZZAM LABIB HAKIM Pak Rudi P. Rabu, 10 oktober 2018

2. Lingkaran

2.1. Titik kuasa dan sumbu radikal. Titik kuasa, atau *Power of a point*, sering disingkat **Power point**, adalah salah satu "alat" atau teorema yang sering digunakan di olimpiade. Idenya sederhana: "memandang" lingkaran dari suatu titik. Ditinjau lebih jauh, ternyata bagaimanapun cara kita "memandang" lingkaran dari satu titik, hasilnya akan sama saja. Hubungannya akan tetap baik-baik saja, tidak berubah meskipun "sudut pandang"nya berubah.

TEOREMA 1.1. *Diberikan satu lingkaran Γ dan titik P pada bidang. Misalkan suatu garis melewati P memotong Γ di titik A dan B. Suatu garis yang lain, melewati P dan memotong Γ di titik C dan D. Akibatnya, dapat diperoleh*

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

A

GAMBAR 1. Kuasa titik

BUKTI. Ada beberapa kasus yang perlu ditinjau disini. Saat titik P berada di lingkaran, di **dalam** lingkaran, dan di **luar** lingkaran. Tentu saja saat P tepat di lingkaran, semua garis yang melewati P akan memotong lingkaran di P dan satu titik lain. Jarak dari P ke P sendiri akan 0 sehingga kedua ruas pada persamaan menjadi 0 dan persamaan benar. Tanpa kehilangan keumuman, misalkan gambar seperti di atas. Jika P berada di luar lingkaran, maka kita punya $\angle PAD = 180° - \angle DAB = \angle DCB = \angle PCB$. Dengan cara yang sama diperoleh $\angle PDA = \angle PBC$. Artinya, kita punya segitiga PAD dan PCB sebangun (sudut, sudut, sudut). Dengan demikian kita punya perbandingan sisi $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{CB}$. Dari persamaan tersebut dapat diperoleh $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Berikutnya, untuk kasus saat P berada di dalam lingkaran, kita punya $\angle PAD = \angle BAD = \angle BCD = \angle BCP$. Dengan cara yang sama, diperoleh $\angle PDA = \angle PBC$ sehingga kita punya segitiga PAD dan PCB sebangun (sudut, sudut, sudut). Selanjutnya mengikuti bukti sebelumnya. $\square$

Teorema ini sangat berguna ketika membutuhkan informasi tentang segmen garis yang berhubungan dengan suatu lingkaran. Kasus khususnya, saat salah satu garis menjadi garis singgung lingkaran sehingga dua titik berhimpit menjadi satu titik. sebut saja misalnya $D = C$. Akibatnya, persamaan pada teorema 1.1 menjadi $PA \cdot PB = PC^2$.

Seperti halnya teorema 1.1, kebalikan dari teorema ini juga sangat berguna. Kalau di 1.1 menemukan hubungan segmen yang dsebabkan oleh lingkaran, kalau kebalikannya,

GAMBAR 2. Kasus khusus kuasa titik

dari data kita bisa membuktikan apakah suatu bangun terletak pada lingkaran atau tidak.

TEOREMA 1.2. *Misalkan A, B, C, and D. Misalkan AB dan CD berpotongan di titik P. Titik P adalah perpotongan $AB dan CD$. Misalkan titik P berada di kedua segmen (di interior kedua segmen) atau tidak berada di segmen manapun (di perpanjangan kedua segmen), serta $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ maka kita punya A, B, C, dan D terletak dalam satu lingkaran.*

BUKTI. Persamaan $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ekuivalen dengan $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$. Di sisi lain, kita juga punya $\angle APD = \angle CPB$, apapun kondisinya. Akibatnya dua segitiga APD dan CPB sebangun dalam urutan demikian (sisi, sudut, sisi). Dengan demikian, sudut-sudut yang bersesuaian besarnya sama. Akibatnya $\angle PAD = \angle PCB$. Untuk semua kasus, ini berakibat A, B, C, D terletak pada satu lingkaran. □

Lebih jauh, apabila kita tinjau sebagai segmen berarah dan kita pilih AB sebagai diameter lingkaran berpusat di O dan berjari-jari r, kita akan punyai

$$PA \cdot PB = (PO + OA)(PO + OB) = (PO + r)(PO - r) = PO^2 - r^2.$$

Perhatikan bahwa nilai ini tidak bergantung terhadap pemilihan A dan B sebab untuk garis-garis yang lain kita punya $PA \times PB = PC \times PD$, untuk apapun pemilihan garis yang melalui P. Jadi bagaimanapun kita "memandang" lingkaran dari titik P, "besarnya" akan selalu $PO^2 - r^2$. Nilai inilah yang disebut kuasa dari titik P terhadap lingkaran berjari-jari r.

DEFINISI 1.1. Misalkan lingkaran Γ berpusat di O dan berjari-jari r. Kita katakan kuasa dari titik P terhadap lingkaran Γ adalah

$$PO^2 - r^2.$$

Berdasarkan konvensi, apabila P berada di luar lingkaran maka kuasanya bernilai positif, sedangkan apabila P berada di dalam (interior) lingkaran maka kuasanya bernilai negatif.

DEFINISI 1.2. Misalkan dua lingkaran Γ_1 dan Γ_2 memiliki pusat berbeda O_1 dan O_2, dan jari-jari r_1 dan r_2. Sumbu radikal (*radical axis*) dari Γ_1 dan Γ_2 adalah tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai kuasa yang sama ke kedua lingkaran, atau dengan kata lain

$$PO_1^2 - r_1^2 = PO_2 - r_2^2.$$

Himpunan tempat kedudukan ini berupa garis[1]. Apabila dua lingkaran berpotongan, maka sumbu radikal merupakan garis yang melalui kedua perpotongan tersebut.

TEOREMA 1.3. *Diberikan tiga lingkaran yang sepasang-sepasang tidak konsentris (memiliki pusat yang sama). Hanya akan ada dua kemungkinan, tiga sumbu radikal akan konkuren atau sejajar ketiga-tiganya.*

[1]perlu dibuktikan

AZZAM LABIB HAKIM Pak Rudi P. Rabu, 10 oktober 2018

Latihan.

√ (1) Buktikan teorema 1.3.

√ (2) Misalkan Γ_1 dan Γ_2 adalah dua lingkaran yang saling berpotongan di di C dan D. Tinjau garis singgung sekutu luar dari kedua lingkaran yang lebih dekat ke D daripada ke C. Buktikan bahwa D berada di garis berat segitiga ABC yang melewati titik C. PoP

√ (3) Misalkan C adalah titik pada setengah lingkaran yang berdiameter $B\cancel{C}A$. Misalkan D adalah titik pada busur AC. Titik E adalah hasil proyeksi D ke garis $\cancel{A}CB$, titik F adalah titik potong garis AE dengan setengah lingkaran. Buktikan bahwa BF membagi segmen DE menjadi dua bagian sama panjang. D = mid $(\overset{\frown}{AC})$

√ (4) Jika A, B, C, D terletak pada suatu lingkaran serta E adalah perpotongan AB dengan CD buktikan bahwa

$$\frac{AC}{BC} \times \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$$

√ (5) Misalkan H adalah kaki tinggi dari A pada suatu segitiga ABC. Misalkan D, E, Q berturut-turut adalah proyeksi dari suatu titik interior P ke garis AB, AC, dan AH. Buktikan bahwa

$$|AB \cdot AD - AC \cdot AE| = BC \cdot PQ.$$

√ (6) Misalkan A, B, C adalah tiga titik pada lingkaran Γ dengan $AB = BC$. Misalkan garis singgung di A dan di B saling berpotongan di D. Misalkan pula DC memotong Γ lagi di E. Buktikan bahwa garis AE membagi segmen BD menjadi dua bagian sama panjang.

√ (7) (IMO 2000) Misalkan dua lingkaran Γ_1 dan Γ_2 saling berpotongan di M dan N. misalkan ℓ adalah garis singgung sekutu kedua lingkaran sehingga M lebih dekat ke ℓ daripada N. Misalkan ℓ menyinggung Γ_1 di A dan menyinggung Γ_2 di B. Misalkan pula garis melalui M sejajar ℓ memotong Γ_1 di C dan M, serta memotong Γ_2 di D dan M. Garis CA dan DB berpotongan di E; garis AN dan CD berpotongan di P; garis BN dan CD berpotongan di Q. Tunjukkan bahwa $EP = EQ$.

√ (8) Misalkan ABC adalah segitiga lancip. Garis melalui B tegak lurus AC bertemu dengan lingkaran berdiameter AC di titik P dan Q; garis melalui C tegak lurus AB memotong lingkaran dengan diameter AB di titik R dan S. Buktikan bahwa P, Q, R, S terletak pada satu lingkaran.

√ (9) (USAMO 1998) Misalkan Γ_1 dan Γ_2 adalah dua lingkaran konsentris dengan Γ_2 berada di dalam Γ_1. Misalkan A adalah titik pada Γ_1 dan B titik pada Γ_2 sehingga AB menyinggung Γ_2. Misalkan C adalah titik potong kedua dari garis AB terhadap lingkaran Γ_1 dan D titik tengah AB. Suatu garis melalui A memotong Γ_2 di E dan F sehingga garis-garis sumbu segmen DE dan CF berpotongan di titik M pada AB. Tentukan perbandingan AM/MC.

AZZAM LABIB HAKIM Pak Rudi P.. Rabu, 10 oktober 2018

Latihan Lagi.

(1) Misalkan $ABCD$ dan $CDEF$ keduanya adalah segiempat talibusur dan garis-garis AB, CD, EF konkuren. Maka buktikan $EFAB$ juga segiempat talibusur. Lebih umum, jika ω_1, ω_2 adalah dua lingkaran dengan sumbu radikal ℓ, titik-titik A, B terletak pada ω_1, titik-titik C, D terletak pada C, D, serta AB dan EF berpotongan di suatu titik di ℓ, maka A, B, E, F terletak pada satu lingkaran.

(2) Dikonstruksi segitiga-segitiga sama kaki $\triangle DBC, \triangle AEC, \triangle ABF$ pada sisi luar segitiga ABC sehingga sisi-sisi $\triangle ABC$ merupakan alas segitiga-segitiga sama kaki tersebut. Buktikan bahwa garis melalui A, B, C yang berturut-turut tegak lurus dengan EF, FD, DE ketiganya konkuren.

(3) Pada segitiga ABC dengan $AB \neq AC$, diketahui BE dan CF adalah garis-garis tinggi segitiga. Misalkan M adalah titik tengah BC, H titik tinggi segitiga ABC, dan D adalah perpotongan garis BC dan garis EF. Perlihatkan bahwa DH tegak lurus AM.

(4) (IMO-SL 94) Suatu lingkaran ω mempunyai dua garis singgung ℓ_1 dan ℓ_2. sejajar Lingkaran ω_1 menyinggung ℓ_1 di A dan menyinggung ω di luar di C. Lingkaran ω_2 menyinggung ℓ_2 di B, menyinggung ω di luar di D, dan menyinggung ω_1 di luar di E. Misalkan Q adalah perpotongan garis AD dan BC, buktikan bahwa $QC = QD = QE$.

(5) (India, 1995) Misalkan pada segitiga ABC suatu garis sejajar BC memotong sisi AB dan AC berturut-turut di D dan E. Misalkan P adalah titik di dalam segitiga ADE, titik-titik F dan G berturut-turut adalah perpotongan DE dengan BP dan CP. Tunjukkan bahwa A terletak di sumbu radikal dari lingkaran luar segitiga PDG dan segitiga PFE.

(6) (IMO 1995) Misalkan A, B, C, D dalam urutan tersebut adalah titik-titik berbeda pada suatu garis. Misalkan lingkaran-lingkaran berdiameter AC dan BD berpotongan di X dan Y. Garis XY memotong BC di Z. Misalkan P titik pada garis XY yang tidak berhimpit dengan Z. Garis CP memotong lingkaran dengan diameter AC di C dan M; garis BP memotong lingkaran dengan diameter BD di B dan N. Buktikan bahwa AM, DN, dan XY konkuren.

(7) Diketahui segitiga ABC dan titik D dan E berturut-turut berada pada sisi AB dan AC sehingga DE sejajar BC. Misalkan P adalah sebarang titik di interior segitiga ADE; titik-titik F dan G berturut-turut perpotongan garis DE dengan garis BP dan CP. Misalkan Q adalah perpotongan kedua dari lingkaran luar segitiga PDG dan PFE. Buktikan bahwa A, P, dan Q kolinear. same with no. 5

(8) (USA TST 2004) Titik D terletak pada interior segitiga ABC. Dikonstruksi lingkaran ω_1 melalui B dan D, dan lingkaran ω_2 melalui C dan D, sedemikian sehingga titik potong kedua lingkaran selain D terletak di garis AD. Notasikan dengan E, F berturut-turut titik-titik dimana ω_1, ω_2 memotong BC. Notasikan dengan X, Y berturut-turut perpotongan DF dengan AB, DE dengan AC. Buktikan bahwa XY sejajar dengan BC.

AZZAM LABIB HAKIM Pak Rudi P. Rabu, 10 oktober 2018

2.2. Garis singung.

√ (1) Misalkan talibusur AC dan BD pada lingkaran ω saling berpotongan di titik P. $T \in \widehat{AD}$
Suatu lingkaran yang lebih kecil ω_1 menyinggung ω di T, menyinggung segmen AC di E, dan menyinggung segmen BD di F. Evan Chen, EGMO, Chapter 4.

√ (a) Buktikan bahwa sinar TE membagi busur ABC menjadi dua bagian sama besar.

√ (b) Misalkan I adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga ACD dan M titik tengah busur ABC, buktikan bahwa $MA = MI = MC$.

√ (c) Jika F' adalah titik potong garis EI dengan ω_1 selain E. Buktikan bahwa I, F', D, T terletak dalam satu lingkaran.

√ (d) Buktikan bahwa DF' menyinggung ω_1. Akibatnya $F = F'$ dan E, F, I kolinear.

(e) Misalkan J adalah pusat lingkaran dalam segitiga APD, buktikan bahwa T, D, F, J terletak pada satu lingkaran.

(f) Buktikan sinar TJ merupakan garis bagi sudut ATD.

√ (2) Diberikan segitiga ABC dengan pusat lingkaran dalam I. Misalkan Γ merupakan lingkaran yang menyinggung sisi-sisi AB dan AC berturut-turut di X dan Y, serta menyinggung lingkaran luar segitiga ABC. Buktikan bahwa I adalah titik tengah XY. EGMO Chapter 4

(3) Misalkan Ω adalah lingkaran luar segitiga ABC. Lingkaran ω menyinggung sisi AB, AC, dan Ω, berturut-turut di $X, Y,$, dan Z. Misalkan M adalah titik tengah busur BC yang tidak memuat A. Buktikan bahwa XY, BC, dan ZM berpotongan di satu titik.

(4) Suatu lingkaran ω menyinggung sisi AB, AC, dan lingkaran luar dari segitiga ABC berturut-turut di X, Y, Z. Segmen AZ dan XY berpotongan di T. Buktikan bahwa $\angle BTX = \angle CTY$.

√ (5) (Sawayama-Thebault) Misalkan ABC adalah segitiga dengan titik pusat lingkaran dalam I. Misalkan D adalah titik pada BC. Misalkan P adalah titik pusat dari lingkaran yang menyinggung AD, DC, dan lingkaran luar ABC; dan Q adalah titik pusat dari lingkaran yang menyinggung AD, BD, dan lingkaran luar ABC. Perlihatkan bahwa P, Q, I kolinear. From lemma in EGMO Chapter 4

AZZAM LABIB HAKIM Pak Rudi P. Jumat, 12 oktober 2018

2.3. Power of A Point in IMO Shortlist level. [2]

(1) (2009) Misalkan ABC segitiga dengan pusat lingkaran luar O. Titik P dan Q berturut-turut adalah titik pada sisi CA dan AB. Lingkaran k melewati titik tengah BP, CQ, dan PQ. Buktikan bahwa jika PQ menyinggung k maka $OP = OQ$. $BQ \cdot QA = AP \cdot PC \Rightarrow \text{Pow}(P) = \text{Pow}(Q)$

(2) (2011) Misalkan $A_1A_2A_3A_4$ adalah suatu segiempat bukan talibusur. Misalkan O_1 dan r_1 berturut-turut adalah pusat dan jari-jari lingkaran luar segitiga $A_2A_3A_4$. Definisikan O_2, O_3, O_4 dengan cara yang sama. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = 0.$$

(3) (2013) Misalkan ABC adalah segitiga lancip dengan titik tinggi H, dan W adalah titik pada sisi BC. Notasikan dengan M dan N berturut-turut adalah kaki garis tinggi segitiga ABC dari B dan C. Notasikan dengan ω_1 lingkaran luar BWN, dan X adalah titik pada ω_1 yang saling berhadapan diameter dengan W. Dengan cara yang sama didefinisikan ω_2 dan Y yang berhadapan dengan diameter dengan W. Buktikan bahwa X, Y, dan H Segaris. Miquel's

(4) (2015) Misalkan ABC adalah segitiga lancip dan M titik tengah AC. Suatu lingkaran ω melewati B dan M memotong AB dan BC lagi berturut-turut di P dan Q. Misalkan T adalah titik sehingga $BPTQ$ jajargenjang. Jika T terletak pada lingkaran luar segitiga ABC, tentukan semua nilai yang mungkin untuk BT/TM.

(5) (2015) Diberikan segitiga ABC dengan $CA \neq CB$. Misalkan D, F, dan G berturut-turut adalah titik tengah AB, AC, dan BC. Suatu lingkaran Γ melalui C dan menyinggung AB di D, memotong segmen AF dan BG berturut-turut di H dan I. Misalkan titik H' dan I' berturut-turut simetris dengan H dan I terhadap F dan G. Garis $H'I'$ memotong CD dan FG berturut-turut di Q dan M. Garis CM memotong Γ lagi di P. Buktikan $CQ = QP$.

[2] IMO Shortlist after 2006

AZZAM LABIB HAKIM   Pak Rudi P.   Jumat, 12 oktober 2018

3. Konkurensi dan Kolinearitas

Konkurensi dan kolinearitas adalah dua hal yang sering dijumpai, baik dalam soal diminta membuktikan ataupun sebagai tebakan (dan kemudian lemma) untuk digunakan untuk membuktikan soal besarnya.

3.1. Konkurensi. Subbab ini dimulai dengan teorema yang paling sederhana yang ditemukan oleh Giovanni Ceva. Namanya juga dipakai untuk segmen garis yang menghubungkan titik sudut dan satu titik di sisi segitiga didepan sudut tersebut: cevian.

TEOREMA 1.6. *(Ceva. 1678) Diberikan segitiga $\triangle ABC$ serta titik P, Q, R berturut-turut ada di garis BC, CA, AB, tidak ada yang sama dengan A, B, C. Maka garis AP, BQ, CR konkuren jika dan hanya jika*

$$\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AR}{RB} = 1$$

ditinjau sebagai segmen garis berarah.

BUKTI. Bukti diserahkan kepada pembaca. □

Seringkali untuk beberapa kasus menghitung panjang kadang tidak terlalu mudah. Jika lebih mudah menghitung sudut daripada menghitung panjang, modifikasi teorema Ceva berikut akan sangat membantu.

TEOREMA 1.7. *(Ceva-trigon) Diberikan segitiga $\triangle ABC$ serta titik P, Q, R di bidang dan tidak ada yang sama dengan A, B, C. Maka garis AP, BQ, CR konkuren jika dan hanya jika*

$$\frac{\sin \angle CAP}{\sin \angle PAB}\frac{\sin \angle ABQ}{\sin \angle QBC}\frac{\sin \angle BCR}{\sin \angle RCA} = 1$$

BUKTI. Bukti diserahkan kepada pembaca. □

Ingat bahwa sudut disini berarah karena $\sin(x) \neq \sin(-x)$.

Selain konkurensi dengan teorema Ceva, ada satu teorema yang cukup banyak penggunaannya, yaitu teorema Brianchon.

TEOREMA 1.8. *Diberikan segienam $ABCDEF$. Apabila ada lingkaran yang meyinggung semua sisi segienam dari dalam, maka AD, BE, dan CF konkuren.*

BUKTI. Bukti diserahkan kepada pembaca. □

Latihan.

√ (1) Buktikan teorema 1.6 dan 1.7. Perhatikan juga kasus-kasus ketika salah satu atau beberapa titik-titik P, Q, R berada di luar segmen. perbandingan luas directed

√ (2) Buktikan bahwa garis-garis bagi dalam dari suatu segitiga konkuren. Buktikan pula untuk garis tinggi, garis berat. Buktikan bahwa dua garis bagi luar dan satu garis bagi dalam dari suatu segitiga konkuren.

(3) Diketahui segienam $ABCDEF$ mempunyai lingkaran luar. Buktikan bahwa AD, BE, CF konkuren. Buktikan pula teorema 1.8

√ (4) (~~Napoleon~~) Tiga segitiga samasisi ACB_1, ABC_1, dan BCA_1 dikonstruksi di luar segitiga ABC. Buktikan bahwa AA_1, BB_1, CC_1 konkuren. Buktikan pernyataan tersebut jika ketiga segitiga dikonstruksi di sisi dalam segitiga. Spiral similarity

√ (5) Tiga persegi ACC_1A_2, ABB_1A_1, dan $BCDE$ dikonstruksi di luar segitiga ABC. Misalkan P adalah titik tengah persegi $BCDE$. Buktikan bahwa AP, A_1C, A_2B konkuren. Spiral similarity

√ (6) Misalkan pada segitiga ABC, cevian-cevian AP, BQ, CR berpotongan di T. Buktikan bahwa

$$\frac{TP}{AP} + \frac{TQ}{BQ} + \frac{TR}{CR} = 1.$$

√ (7) Diketahui bahwa titik D, E, F berturut-turut titik pada segmen BC, CA, AB sehingga cevian-cevian AD, BE, CF konkuren. Diketahui pula bahwa M, N, P berturut-turut adalah titik-titik pada segmen EF, FD, DE. Buktikan bahwa AM, BN, CP konkuren jika dan hanya jika DM, EN, FP konkuren. (NO 11)

√ (8) Diberikan segitiga $\triangle ABC$ tak samakaki, tak siku-siku yang memiliki lingkaran luar dengan pusat O. Misalkan A_1, B_1, C_1 berturut-turut adalah titik tengah dari BC, CA, AB. Titik A_2 terletak di sinar OA_1 sehingga $\triangle OAA_1$ sebangun dengan $\triangle OA_2A$. Titik-titik B_1 dan C_1 didefinisikan dengan cara yang serupa. Buktikan bahwa garis AA_2, BB_2, dan CC_2 konkuren. CC_2 BB_2 AA_2 Symmedian.

√ (9) Diberikan segitiga ABC dan titik X, Y, Z sehingga $\angle ABZ = \angle XBC$, $\angle BCX = \angle YCA$, dan $\angle CAY, \angle ZAB$. Buktikan bahwa AX, BY, CZ konkuren. Ceva trigon / dalil sin

(10) Misalkan A, B, C, D, E, F, P adalah tujuh titik dalam lingkaran. Tunjukkan AD, BE, CF konkuren jika dan hanya jika

$$\frac{\sin\angle APB \sin\angle CPD \sin\angle EPF}{\sin\angle BPC \sin\angle DPE \sin\angle FPA} = -1.$$

Dalam hal ini sudut diambil modulo 2π.

√ (11) (Cevian Nest) Pada segitiga $A_1B_1C_1$, titik-titik A_2, B_2, C_2 berturut-turut titik-titik pada B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, titik-titik A_3, B_3, C_3 berturut-turut titik-titik pada B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2. Buktikan bahwa jika dua dari pernyataan ini benar, maka pernyataan yang ketiga juga benar.

(a) A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 konkuren ceva trigon / dalil sin

(b) A_3A_1, B_3B_1, C_3C_1 konkuren

(c) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 konkuren.

Jika semua pernyataan tersebut benar, maka ketiga segitiga $A_iB_iC_i$, $i = 1, 2, 3$, dikatakan membentuk *Cevian nest*

(12) Diberikan segitiga ABC dengan segitiga DEF adalah segitiga singgung dalamnya, segitiga yang titik sudutnya merupakan titik singgung dari lingkaran dalam dan sisi segitiga awal. Misalkan H adalah titik tinggi DEF dan I pusat lingkaran singgung dalam segitiga DEF. Misalkan G adalah refleksi dari D terhadap EF. Buktikan bahwa HI, GA, dan BC konkuren.

(13) Diberikan segitiga ABC dengan pusat lingkaran luar O dan tiga garis tinggi AD, BE, CF. Misalkan H_a, H_b, H_c berturut-turut adalah titik tinggi segitiga BOC, COA, AOB. Buktikan bahwa DH_a, EH_b, FH_c konkuren.

(14) Misalkan ABC segitiga dengan pusat lingkaran luar O. Misalkan DEF adalah segitiga cevian dari O. Titik-titik X, Y, Z berturut-turut terletak pada EF, FD, DE sehingga $OX \perp BC, OY \perp CA$ dan $OZ \perp AB$. Buktikan bahwa AX, BY, CZ konkuren.

AZZAM LABIB HAKIM Pak Rudi P. Jumat, 12 oktober 2018

3.2. Kolinearitas. Pada bidang, apabila kita punya dua titik, kita bisa menemukan tepat satu garis yang melewati kedua titik. Apabila kita mempunyai tiga titik, akan kita dapatkan tiga garis yang melalui ketiga titik tersebut, kecuali bila ketiga titik terletak dalam satu garis[3]. Kasus spesial ini sudah dibahas sejak jaman Yunani kuno oleh Menelaus of Alexandria (70-140CE).

TEOREMA 1.9. *(~~Ceva, 1678~~ Menelaus) Diberikan segitiga $\triangle ABC$ serta titik P, Q, R berturut-turut ada di garis BC, CA, AB, tidak ada yang sama dengan A, B, C. Maka garis P, Q, R kolinear jika dan hanya jika*

$$\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AR}{RB} = -1$$

ditinjau sebagai segmen garis berarah.

BUKTI. Bukti diserahkan kepada pembaca. □

Ada banyak bukti untuk teorema ini[4]. Satu hal yang layak diperhatikan. Bentuk $\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AR}{RB}$ muncul di kedua teorema, dengan letak titik yang sama. Hanya berbeda di tanda. Jika nilai ekspresi tersebut 1, maka cevian-ceviannya konkuren, jika nilai ekspresi tersebut -1, maka titik-titiknya kolinear. Tentu saja ini hal yang menarik. Desargues (1648) memberikan teorema terkait kedua hal ini.

TEOREMA 1.10. *(Desargues). Diberikan dua segitiga ABC dan DEF. Garis AD, BE, CF konkuren atau paralel jika dan hanya jika titik-titik potong $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CA \cap FD$ kolinear.*

Lebih jauh, dua segitiga ABC dan DEF dikatakan perspektif dari titik jika garis AD, BE, CF konkuren atau paralel, dua segitiga ABC dan DEF dikatakan perspektif dari garis jika titik-titik potong $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CA \cap FD$ kolinear.

Selain itu, ada dua lagi teorema tentang kolinearitas yang cukup terkenal. Satu mengenai kolinearitas di lingkaran (dan konik pada umumnya) serta kolinearitas yang terbentuk dari kolinearitas yang lain. Yang terakhir, mungkin bisa dianggap "mirip" dengan ceva nest, sementara yang sebelumnya "mirip" soal 3 pada subbab sebelumnya sebab terkait dengan segienam dan lingkaran.

TEOREMA 1.11. *(Pascal) Misalkan $ABCDEF$ adalah segienam yang mempunyai lingkaran luar. Maka titik-titik potong $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CD \cap FA$ kolinear.*

BUKTI. Bukti diserahkan kepada pembaca. □

TEOREMA 1.12. *(Pappus) Misalkan A, C, E adalah tiga titik kolinear. Misalkan pula B, D, F tiga titik kolinear yang lain. Maka titik-titik potong $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CD \cap FA$ kolinear.*

BUKTI. Bukti diserahkan kepada pembaca. □

Kedua teorema ini juga sangat mirip, namun kita tidak akan membahas ini sampai kita mempunyai alat yang lebih canggih.

Latihan.

✓ (1) Buktikan teorema 1.9, 1.10, 1.11, 1.12 sdengan menggunakan menelaus.

✓ (2) Misalkan tiga titik A, B, C terletak pada satu garis. Misalkan D suatu titik pada bidang dan E terletak pada garis BD. Tinjau garis ℓ yang melalui titik-titik potong $AE \cap CD$ dan $CE \cap AD$. Tunjukkan bahwa ℓ memotong AC di titik P yang tidak bergantung terhadap pemilihan D dan E. Ceva + Menelaus

(3) Misalkan A, B, C tiga titik kolinear dan D, E, F tiga titik kolinear yang lain. Misalkan $G = BE \cap CF$, $H = AD \cap CF$, dan $I = AD \cap CE$. Jika $AI = HD$ dan $CH = GF$ buktikan bahwa $BI = GE$.

[3]Jika diberikan tiga titik random di bidang, peluang bahwa ketiga titik tersebut segaris adalah nol

[4]need citation

(4) Diberikan segitiga ABC dan titik P di dalam segitiga namun tidak terletak pada median ABC. Misalkan $A_1 = PA \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$, dan $C_1 = PC \cap AB$. Misalkan pula $A_2 = B_1C_1 \cap BC$, $B_2 = C_1A_1 \cap CA$, dan $C_2 = A_1B_1 \cap AB$. Buktikan bahwa titik tengah segmen-segmen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 ketiganya terletak dalam satu garis[5].

(5) Diberikan segitiga ABC dan sebarang titik D (tidak harus di dalam segitiga). Garis melalui D dan tegak lurus DA, DB, DC berturut-turut memotong BC, CA, AB di A_1, B_1, C_1. Buktikan bahwa titik tengah AA_1, BB_1, CC_1 kolinear[6]

(6) Misalkan di luar segitiga sembarang ABC dikonstruksi persegi $BCWX$, $ACUV$, dan $ABST$. Misalkan pula $L = SU \cap BC$, $M = WV \cap AB$ dan $N = XT \cap AC$. Buktikan bahwa L, M, N kolinear.

(7) Diberikan segitiga ABC dan garis ℓ memotong garis BC, CA, AB berturut-turut di L_A, L_B, L_C. Garis tegak lurus dari L_A ke BC memotong AB dan AC berturut-turut di titik A_B dan A_C. Titik O_A adalah pusat lingkaran luar segitiga AA_BA_C. Titik O_B dan O_C didefinisikan dengan cara yang sama. Buktikan bahwa O_A,O_BO_C terletak dalam satu garis.

(8) Misalkan ABC dan DEF adalah segitiga dan P adalah suatu titik di bidang. Untuk setiap bilangan real r, misalkan T_r adalah segitiga yang didapat dari segitiga ABC yang dikenakan dilatasi dengan pusat P dan rasio r. Misalkan terdapat tiga bilangan real r_1, r_2, r_3 sehingga masing-masing $T_{r_1}, T_{r_2}, T_{r_3}$ adalah perspektif titik (garis) dari DEF. Buktikan bahwa T_r adalah perspektif titik (garis) dari DEF untuk berapapun nilai r.

(9) Pada segitiga ABC titik D adalah titik pada segmen BC dan I_B adalah pusat lingkaran dalam dari segitiga BAD. Misalkan O_B adalah pusat lingkaran luar segitiga I_BAD. Buktikan bahwa B, O_B, I_B kolinear. Buktikan pula $ABDO_B$ terletak dalam satu lingkaran.

(10) (Newton-Gauss) Diberikan segiempat $ABCD$. Misalkan $M = AD \cap BC = M$ dan $N = AB \cap CD$. Misalkan P, Q, R berturut-turut adalah titik tengah AC,BD, dan MN. Buktikan bahwa P, Q, R terletak dalam satu garis[7].

(11) Diberikan segitiga ABC dengan pusat lingkaran luar O. Misalkan ℓ_1 adalah refleksi garis BC ke garis OA; A_b, A_c berturut-turut refleksi A ke garis OB, OC. Misalkan $A^* = \ell_1 \cap A_bA_c$. Definisikan B^*, C^* dengan cara yang sama. Buktikan bahwa A^*, B^*, C^* terletak dalam satu garis.

(12) Diberikan segitiga ABC dengan lingkaran luar ω. Titik D terletak pada ω dan berbeda dengan B, C, maupun titik tengah busur BC. Garis singgung ω di D memotong BC, CA, AB berturut-turut di A', B', C'. Misalkan BB' dan CC' berpotongan di E, lalu garis AA' memotong ω lagi di F. Buktikan bahwa D, E, F terletak dalam satu garis.

(13) Diberikan segitiga ABC dan P titik yang terletak di garis sumbu sisi BC, sehingga P dan A terletak di sisi yang sama terhadap BC. Misalkan Q terletak di sisi yang berbeda dengan P terhadap BC dan memenuhi $\angle BCQ = \angle ABP, \angle CBQ = \angle ACP$. Buktikan bahwa A, P, Q terletak dalam satu garis.

---

[5]Soal ini sangat mirip dengan soal berikutnya. Soal ini sendiri ditulis Kiran Kedlaya pada 2006

[6]Sharygin Geometry Olympiad 2014. Tidak diketahui apakah soal ini mirip soal sebelumnya atau malah memang kasus khusus darinya.

[7]garis ini disebut garis Newton-Gauss

AZZAM LABIB HAKIM Pak Rudi P. Jumat, 12 oktober 2018

3. Konkurensi dan Kolinearitas

Konkurensi dan kolinearitas adalah dua hal yang sering dijumpai, baik dalam soal diminta membuktikan ataupun sebagai tebakan (dan kemudian lemma) untuk digunakan untuk membuktikan soal besarnya.

3.1. Konkurensi. Subbab ini dimulai dengan teorema yang paling sederhana yang ditemukan oleh Giovanni Ceva. Namanya juga dipakai untuk segmen garis yang menghubungkan titik sudut dan satu titik di sisi segitiga didepan sudut tersebut: cevian.

TEOREMA 1.6. *(Ceva, 1678) Diberikan segitiga $\triangle ABC$ serta titik P, Q, R berturut-turut ada di garis BC, CA, AB, tidak ada yang sama dengan A, B, C. Maka garis AP, BQ, CR konkuren jika dan hanya jika*

$$\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AR}{RB} = 1$$

ditinjau sebagai segmen garis berarah.

BUKTI. Bukti diserahkan kepada pembaca. □

Seringkali untuk beberapa kasus menghitung panjang kadang tidak terlalu mudah. Jika lebih mudah menghitung sudut daripada menghitung panjang, modifikasi teorema Ceva berikut akan sangat membantu.

TEOREMA 1.7. *(Ceva-trigon) Diberikan segitiga $\triangle ABC$ serta titik P, Q, R di bidang dan tidak ada yang sama dengan A, B, C. Maka garis AP, BQ, CR konkuren jika dan hanya jika*

$$\frac{\sin\angle CAP}{\sin\angle PAB}\frac{\sin\angle ABQ}{\sin\angle QBC}\frac{\sin\angle BCR}{\sin\angle RCA} = 1$$

BUKTI. Bukti diserahkan kepada pembaca. □

Ingat bahwa sudut disini berarah karena $\sin(x) \neq \sin(-x)$.

Selain konkurensi dengan teorema Ceva, ada satu teorema yang cukup banyak penggunaannya, yaitu teorema Brianchon.

TEOREMA 1.8. *Diberikan segienam $ABCDEF$. Apabila ada lingkaran yang meyinggung semua sisi segienam dari dalam, maka AD, BE, dan CF konkuren.*

BUKTI. Bukti diserahkan kepada pembaca. □

Latihan.

√ (1) Buktikan teorema 1.6 dan 1.7. Perhatikan juga kasus-kasus ketika salah satu atau beberapa titik-titik P, Q, R berada di luar segmen. Perbandingan luas directed

√ (2) Buktikan bahwa garis-garis bagi dalam dari suatu segitiga konkuren. Buktikan pula untuk garis tinggi, garis berat. Buktikan bahwa dua garis bagi luar dan satu garis bagi dalam dari suatu segitiga konkuren.

(3) Diketahui segienam $ABCDEF$ mempunyai lingkaran luar. Buktikan bahwa AD, BE, CF konkuren. Buktikan pula teorema 1.8

√ (4) ~~(Napoleon)~~ Tiga segitiga samasisi ACB_1, ABC_1, dan BCA_1 dikonstruksi di luar segitiga ABC. Buktikan bahwa AA_1, BB_1, CC_1 konkuren. Buktikan pernyataan tersebut jika ketiga segitiga dikonstruksi di sisi dalam segitiga. Spiral similarity

√ (5) Tiga persegi ACC_1A_2, ABB_1A_1, dan $BCDE$ dikonstruksi di luar segitiga ABC. Misalkan P adalah titik tengah persegi $BCDE$. Buktikan bahwa AP, A_1C, A_2B konkuren. Spiral similarity

√ (6) Misalkan pada segitiga ABC, cevian-cevian AP, BQ, CR berpotongan di T. Buktikan bahwa

$$\frac{TP}{AP} + \frac{TQ}{BQ} + \frac{TR}{CR} = 1.$$

(7) Diketahui bahwa titik D, E, F berturut-turut titik pada segmen BC, CA, AB sehingga cevian-cevian AD, BE, CF konkuren. Diketahui pula bahwa M, N, P berturut-turut adalah titik-titik pada segmen EF, FD, DE. Buktikan bahwa AM, BN, CP konkuren jika dan hanya jika DM, EN, FP konkuren. obv

(8) Diberikan segitiga $\triangle ABC$ tak samakaki, tak siku-siku yang memiliki lingkaran luar dengan pusat O. Misalkan A_1, B_1, C_1 berturut-turut adalah titik tengah dari BC, CA, AB. Titik A_2 terletak di sinar OA_1 sehingga $\triangle OAA_1$ sebangun dengan $\triangle OA_2A$. Titik-titik B_1 dan C_1 didefinisikan dengan cara yang serupa. Buktikan bahwa garis AA_2, BB_2, dan CC_2 konkuren. sampah

(9) Diberikan segitiga ABC dan titik X, Y, Z sehingga $\angle ABZ = \angle XBC$, $\angle BCX = \angle YCA$, dan $\angle CAY = \angle ZAB$. Buktikan bahwa AX, BY, CZ konkuren. e z

(10) Misalkan A, B, C, D, E, F, P adalah tujuh titik dalam lingkaran. Tunjukkan AD, BE, CF konkuren jika dan hanya jika

$$\frac{\sin\angle APB \sin\angle CPD \sin\angle EPF}{\sin\angle BPC \sin\angle DPE \sin\angle FPA} = -1.$$

Dalam hal ini sudut diambil modulo 2π. obv

(11) (Cevian Nest) Pada segitiga $A_1B_1C_1$, titik-titik A_2, B_2, C_2 berturut-turut titik-titik pada B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, titik-titik A_3, B_3, C_3 berturut-turut titik-titik pada B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2. Buktikan bahwa jika dua dari pernyataan ini benar, maka pernyataan yang ketiga juga benar.

(a) A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 konkuren

(b) A_3A_1, B_3B_1, C_3C_1 konkuren

(c) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 konkuren.

Jika semua pernyataan tersebut benar, maka ketiga segitiga $A_iB_iC_i$, $i = 1, 2, 3$, dikatakan membentuk *Cevian nest*. obv

(12) Diberikan segitiga ABC dengan segitiga DEF adalah segitiga singgung dalamnya, segitiga yang titik sudutnya merupakan titik singgung dari lingkaran dalam dan sisi segitiga awal. Misalkan H adalah titik tinggi DEF dan I pusat lingkaran singgung dalam segitiga DEF. Misalkan G adalah refleksi dari D terhadap EF. Buktikan bahwa HI, GA, dan BC konkuren. e z

(13) Diberikan segitiga ABC dengan pusat lingkaran luar O dan tiga garis tinggi AD, BE, CF. Misalkan H_a, H_b, H_c berturut-turut adalah titik tinggi segitiga BOC, COA, AOB. Buktikan bahwa DH_a, EH_b, FH_c konkuren.

(14) Misalkan ABC segitiga dengan pusat lingkaran luar O. Misalkan DEF adalah segitiga cevian dari O. Titik-titik X, Y, Z berturut-turut terletak pada EF, FD, DE sehingga $OX \perp BC, OY \perp CA$ dan $OZ \perp AB$. Buktikan bahwa AX, BY, CZ konkuren. obv

なに?!

Mandiri

RWK

Malang, 10 Oktober 2018

1. Let $a_0, a_1, a_2, \ldots$ be an infinite sequence of real numbers satisfying $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$ for all positive integers n. Show that
$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$
holds for all positive integers n.

2. Find all functions f defined on all real numbers and taking real values such that $y \mapsto f(y)$
$$f(f(y)) + f(x-y) = f(xf(y) - x),$$
for all real numbers x, y. $f(x)=0$

3. Let $a_1, a_2, \ldots$ be an infinite sequence of real numbers, for which there exists a real number c with $0 \leq a_i \leq c$ for all i, such that
$$|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j} \quad \text{for all } i,\ j \text{ with } i \neq j.$$
Prove that $c \geq 1$.

4. Determine all polynomials $P(x)$ with real coefficients such that
$$(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$$
is a constant polynomial.

5. Santa Claus has at least n gifts for n children. For $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, the i-th child considers $x_i > 0$ of these items to be desirable. Assume that
$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$
Prove that Santa Claus can give each child a gift that this child likes.

6. A square $(n-1) \times (n-1)$ is divided into $(n-1)^2$ unit squares in the usual manner. Each of the n^2 vertices of these squares is to be coloured red or blue. Find the number of different colourings such that each unit square has exactly two red vertices. (Two colouring schemse are regarded as different if at least one vertex is coloured differently in the two schemes.)

7. A positive integer is written on a blackboard. Players A and B play the following game: in each move one has to choose a proper divisor m of the number n written on the blackboard ($1 < m < n$) and replaces n with $n - m$. Player A makes the first move, then players move alternately. The player who can't make a move loses the game. For which starting numbers is there a winning strategy for player B?

√ 8. Let $ABCD$ be a quadrilateral with $\angle CBD = 2\angle ADB$, $\angle ABD = 2\angle CDB$, and $AB = CB$. Prove that $AD = CD$. trigon (Eucvs di belakang)

√ 9. A line l is drawn through the orthocenter of acute triangle ABC. Prove that the reections of l across the sides of the triangle are concurrent.

10. In convex quadrilateral $ABCD$, $\angle BCD = \angle CDA$. The bisector of angle ABC intersects CD at point E. Prove that $\angle AEB = 90°$ if and only if $AB = AD + BC$.

11. Find all odd positive integers n greater than 1 such that for any relatively prime divisors a and b of n, the number $a + b - 1$ is also a divisor of n.

12. Let $f(n) = \{n\sqrt{3}\} - \frac{c}{n\sqrt{3}}$. Find all natural number c such that for every natural number n, $f(n) > 0$.

($\{x\}$denotes the fractional part of x.)

13. Suppose that a and b are distinct rational numbers such that: $a^n - b^n \in \mathbb{Z}$ for infinitely many $n \in \mathbb{N}$. Prove that a, b are integers.

14. Prove that if $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ is negatif integer for some integers (a, b), then $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = -5$.

15. Find all $a \in \mathbb{Z}$ such that

$$x^2 + axy + y^2 = 1$$

has innitely many distinct integer solutions (x, y).

√ 16. Find all positive integers which can be represented uniquely as

$$\frac{x^2 + y}{xy + 1}$$ (1,y).

for x, y positive integers. Vieta walking

AZZAM LABIB HAKIM Pan Pur Kamis, 11 oktober 2018 Kombin bangke 1

1. Terdapat 2018 satelit mengelilingi bumi bola. Buktikan bahwa ada tempat di permukaan bumi sehingga paling banyak 1008 satelit yang dapat dilihat.

2. Tiga subset A_1, A_2, A_3 (bisa sama) dipilih secara acak dari semua subset $R = \{1, 2, \ldots, n\}$. Tentukan peluang $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$.

3. A rectangle is filed with smaller rectangles each of which has at least one side of integral length. Prove that the filed rectangle also must have at least one side of integral length.

4. Is it possible to tile 66×62 rectangle with 12×1 rectangle?

5. Fix an integer $n > 1$ and consider the permutations of the set $\{1, 2, \ldots, n\}$. Say that such a permutation σ is self inverse if $\sigma(\sigma(i)) = i$ for all $1 \leq i \leq n$. Say that σ is the modest if $\sigma(i) > \min\{\sigma(i+1), \sigma(i+2)\}$ for all $1 \leq i \leq n-2$. Prove that the number of self inverse permutations equals the number of modest permutations.

6. A symmetrical ring of m identical regular n sided polygons is formed according to the rules:
(1) Each polygon in the ring meets exactly two others
(2) Two adjacent polygons have only an edge in common
(3) The perimeter of the inner region enclosed by the ring consist of exactly two edges of each polygons.

7. (a) 6×6 chessboard is tiled by 1×2 domino. Prove it can be decomposed into two rectangles, tiled by disjoint subsets of the dominoes.
(b) Is the same thing true for an 8×8 array?

8. A billiard table is obtained by cutting out some squares from the chessboard. The billiard ball is shot from one of the table corners in such a way that its trajectory forms angle α with side of the billiard table, $\tan \alpha \in \mathbb{Q}$. When the balls hits the border of the billiard, it reflects according to the rule: The incidace angle equals the reflection angle. If the ball lands on any corner, it falls into a hole. Prove that the ball will necessarily fall into some hole

9. David is also planning a party, at which there are to be 26 guests. Considering that a triple of guests has "social potential" if it contains a pair who have met each other before and also a pair who haven't met each other before, he wants at least half of all the $\binom{26}{3}$ triples to have social potential. What is the smallest number of previously acquinted pairs that could possibly be compatible with this requirement?

AZZAM LABIB HAKIM   Pak Pur   Kamis, 11 oktober 2018   Kombin bangke 2

10. A tree is a connected ~~graph~~ simple graph with no cycles. For a tree T, let $s(T)$ denote the number of nonempty subsets X, of the set of vertices of T such that for any two vertices of T ~~such that for any two~~ there is a path in T joining them that only passes through vertices in X. For a positive integer n, find the minimum and maximum values of $s(T)$ as T ranges over all trees with n vertices.

11. Tunjukkan bahwa banyaknya himpunan bagian dari $\{1,2,\ldots,n\}$ dengan tidak ada dua anggota yang berurutan adalah $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+1}{k}$.

12. Untuk setiap bilangan bulat positif $m \le n$, buktikan bahwa

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\binom{m}{k}\left(\frac{k}{m}\right)^n \le \binom{n}{m}\frac{m!}{m^m}$$

13. On a board there are n nails. Each two connected by a string. Each string is colored in one of n given colors. For each three distinct colors there exist three nails connected ~~by~~ with strings in this three colors. Can n be a) 6? b) 7?

AZZAM LABIB HAKIM   sesi malam Yasya   Kamis, 11 oktober 2018

Marathon Geometri
19.00 – 23.30

Lingkaran. Misalkan lingkaran-lingkaran k_1 dan k_2 dengan jari-jari k_1 lebih dari jari-jari lingkaran k_2, mempunyai pusat berturut-turut di O_1 dan O_2. Misalkan juga k_1 dan k_2 berpotongan di dua titik berbeda, C dan D. Garis singgung persekutuan luar dari k_1 dan k_2 yang lebih dekat ke C daripada D menyinggung k_1 dan k_2 berturut-turut di titik-titik A dan B.

√ **Soal.** $\angle BAC = \angle ADC$ dan $\angle ABC = \angle BDC$.

√ **Soal.** $\angle ACB + \angle ADB = \pi$.

Misalkan garis AB dan CD berpotongan di M.

√ **Soal.** M titik tengah segmen AB. P.O.P

√ **Soal.** Luas segitiga ACD sama dengan luas segitiga BCD.

Misalkan garis AC memotong k_2 lagi di titik E.

√ **Soal.** $\angle ADB = \angle BDE$. $\angle ADB = 180° - \angle ACB = \angle BCE = \angle BDE$

Misalkan F titik pada k_2 dengan $F \neq C$ sehingga CF menyinggung k_1 di C. Garis BF memotong garis AE di titik G dan garis CF memotong garis AB di titik H.

√ **Soal.** $\angle DBF = \angle DAE$. $\angle DCF = \angle DAC$

√ * **Soal.** $\angle BGC = \angle GDC = \angle BCG$ Back of paper

√ **Soal.** $HA = HC$.

√ * **Soal.** $\triangle ABD \sim \triangle CGD \sim \triangle BED$.

√ **Soal.** $BC \cdot GD = CD \cdot EG$. $\angle CBD = \angle CED = \angle GED$. spiral similarity $\triangle CGD \to \triangle BED \Rightarrow \angle CDB = \angle GDE$

$\therefore \triangle CDB \sim \triangle GDE$

Misalkan garis melalui B dan tegak lurus AE memotong garis O_1O_2 di titik K dan garis BO_2 memotong k_2 lagi di titik L.

√ **Soal.** $\angle KBO_2 = \angle BAC$. $AB \perp BO_2$

√ **Soal.** $\angle BO_2K = \angle AMC$ $MD \perp O_1O_2$. $\angle BO_2K = 180 - \angle AO_1O_2 = \angle AMC$

√ **Soal.** $\triangle BKL \sim \triangle ACB$ $\triangle BKO_2 \sim \triangle ACM$. $M = \text{mid}(AB)$, $O_2 = \text{mid}(BL)$

√ **Soal.** Titik-titik C, K, L terletak pada satu garis. $\angle KLB = \angle CBA = 90 - \angle CBL$

Misalkan garis melalui C dan sejajar AB memotong k_1 dan k_2 lagi berturut-turut di titik-titik P dan Q. Garis PQ memotong garis-garis AD dan BD berturut-turut di R dan S. Garis-garis PA dan QB berpotongan di titik T.

√ **Soal.** $CR = CS$. (IMO 2000)

√ **Soal.** $\triangle ATB \sim \triangle ACB$

√ **Soal.** $RT = ST$

√ **Soal.** $ADBT$ segiempat talibusur.

Misalkan O_2D memotong k_1 lagi di titik U dan garis O_1D memotong k_2 lagi di titik V.

√ **Soal.** U dan V terletak pada lingkaran luar segitiga CO_1O_2. $\angle O_1CO_2 = \angle O_1DO_2 = 180° - \angle O_2DE = 180 - \angle O_2ED$

√ ** **Soal.** $\angle DCU = \angle DCV$. back of paper

Garis melalui D sejajar UV memotong k_1 dan k_2 lagi berturut-turut di titik-titik W dan X.

√ **Soal.** $WX = CU + CV$.

$\angle CUV = \angle CO_1V = \angle CO_1D$

$\angle CUD = \angle CUO_2 = \angle CO_1O_2$

$\Rightarrow \angle CUD = \angle DUV = \angle WDU \Rightarrow WD = CU$. $WX = WD + DX$
$= UC + CV$.

AZZAM LABIB HAKIM Sesimalam Yasya Kamis, 11 oktober 2018

Marathon Geometri

19.00 – 23.30

Segitiga. Misalkan ABC segitiga lancip dengan $AB > AC$. Titik-titik D, E, F berturut-turut di BC, CA, AB sehingga AD, BE, CF garis tinggi dengan H titik tinggi. Misalkan juga N titik tengah sisi BC dan I titik tengah segmen AH.

✓ **Soal.** $ABDE$, $BCEF$, dan $CAFD$ segiempat talibusur. Titik pusatnya?

✓ **Soal.** $AEHF$, $BDHF$ dan $CDHE$ segiempat talibusur. Titik pusatnya?

✓ **Soal.** $\angle FDH = \angle EDH$.

✓ **Soal.** H adalah titik pusat lingkaran dalam dari segitiga DEF.

✓ **Soal.** $IN \perp EF$. $FD = DE$, $FI = IE$

Misalkan garis-garis AD, BE, dan CF memotong lingkaran luar segitiga ABC lagi berturut-turut di titik K, L, dan M.

✓ **Soal.** $\angle KBC = \angle HBC$ dan $\angle KCB = \angle HCB$.

✓ **Soal.** $HD = DK$, $HE = EL$, dan $HF = FM$.

✓ **Soal.** $CK = CL$. $AL = AM$, dan $BM = BK$.

✓ **Soal.** $DE||KL$. $EF||LM$ dan $FD||MK$.

✓ **Soal.** Titik H adalah titik pusat lingkaran dalam dari segitiga KLM.

Misalkan garis KM memotong sisi BC di titik G dan garis LM memotong sisi CA di titik J.

✓ **Soal.** $\angle CGH = \angle CGK = \angle BAC$ dan $\angle CJH = \angle CJL = \angle ABC$.

✓ **Soal.** $\angle CHG + \angle CHJ = \pi$.

✓ **Soal.** $GJ||KL$.

✓ **Soal.** $\angle AGC = \angle BJC$. AJGB siklis

Misalkan O titik pusat lingkaran luar segitiga ABC, garis AO memotong lingkaran luar segitiga ABC lagi di titik P, dan garis NH momotong lingkaran luar segitiga ABC lagi di titik Q.

✓ **Soal.** $PK||BC$.

✓ **Soal.** $BP = CK$.

✓ **Soal.** $BL||PC$.

✓ **Soal.** $\angle HNC = \angle KNC = \angle PNB$.

✓ **Soal.** Titik-titik P. N. dan H terletak pada satu garis.

✓ **Soal.** $NQ \perp AQ$.

Misalkan garis MP memotong sisi AB dan garis BH berturut-turut di titik R dan S. Garis RH memotong garis BM di T.

✓ **Soal.** Segitiga BPR sebangun dengan segitiga FAH.

✓ **Soal.** Segitiga APR sebangun dnenga segitiga FDH.

✓ **Soal.** $AH \perp RH$. $\angle AHR = \angle AMR = \angle AMP = 90°$

✓ **Soal.** $ST \perp AB$. $\angle THB = \angle HBC = \angle KBC = \angle KAC = \angle BAP = \angle BMP$

Misalkan garis EF memotong garis BC di titik U, UH memotong garis AB di titik V dan garis AU memotong lingkaran luar segitiga ABC lagi di titik W.

✓ **Soal.** $UE \cdot UF = UW \cdot UA$. $UE \cdot UF = UC \cdot UB = UW \cdot UA$

✓ **Soal.** $W = Q$. $\cancel{\angle PAW = \angle PAQ}$, $\cancel{\angle AWP = \angle AQP}$. AWEF cyclic. AQHF cyclic, AEHF cyclic → AQEF cyclic

✓ **Soal.** $UV \perp AN$. Brocard

✓ **Soal.** $FEHW$ segiempat talibusur. Titik pusatnya? pusat = mid($\overline{AH}$)

AZZAM LABIB HAKIM Sesi Malam Yasya

Mandiri Malam
Kamis, 11 Oktober 2018

1. In an equilateral trapezoid, the point O is the midpoint of the base AD. A circle with a center at a point O and a radius BO is tangent to a straight line AB. Let the segment AC intersect this circle at point $K(K \neq C)$, and let M is a point such that $ABCM$ is a parallelogram. The circumscribed circle of a triangle CMD intersects the segment AC at a point $L(L \neq C)$. Prove that $AK = CL$.

2. Prove that for all reas $a, b, c, d \in (0, 1)$ we have

$$(ab - cd)(ac + bd)(ad - bc) + \min(a, b, c, d) < 1.$$

3. $P_k(n)$ is the product of all positive divisors of n that are divisible by k (the empty product is equal to 1). Show that $P_1(n)P_2(n)\cdots P_n(n)$ is a perfect square, for any positive integer n.

√ 4. On the board written numbers from 1 to 25 . Bob can pick any three of them say a, b, c and replace by $a^3 + b^3 + c^3$. Prove that last number on the board can not be 2013^3. invariant mod 3

5. Let a, b, c be positive real numbers such that $\min(ab, bc, ca) \geq 1$. Prove that

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 1.$$

6. Determine all sequences $(x_1, x_2, \ldots, x_{2011})$ of positive integers, such that for every positive integer n there exists an integer a with

$$\sum_{j=1}^{2011} j x_j^n = a^{n+1} + 1$$

7. A circle is divided into $2n$ equal by $2n$ points. Ali draws $n+1$ arcs, of length $1, 2, \ldots, n+1$. Prove that we can find two arcs, such that one of them is inside in the other one.

8. In a concert, 20 singers will perform. For each singer, there is a (possibly empty) set of other singers such that he wishes to perform later than all the singers from that set. Can it happen that there are exactly 2010 orders of the singers such that all their wishes are satisfied?

9. Let ABC be an acute triangle with D, E, F the feet of the altitudes lying on BC, CA, AB respectively. One of the intersection points of the line EF and the circumcircle is P. The lines BP and DF meet at point Q. Prove that $AP = AQ$.

AZZAM LABIB HAKIM   Sesi Malam Yasya   Kamis, 11 Oktober 2018

10. On some planet, there are 2^N countries ($N \geq 4$). Each country has a flag N units wide and one unit high composed of N fields of size 1×1, each field being either yellow or blue. No two countries have the same flag. We say that a set of N flags is diverse if these flags can be arranged into an $N \times N$ square so that all N fields on its main diagonal will have the same color. Determine the smallest positive integer M such that among any M distinct flags, there exist N flags forming a diverse set.

11. Determine all pairs (x, y) of positive integers such that

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

12. Let $n \geq 1$ be an odd integer. Determine all functions f from the set of integers to itself, such that for all integers x and y the difference $f(x) - f(y)$ divides $x^n - y^n$.

13. Let ABC be an acute triangle with circumcircle Ω. Let B_0 be the midpoint of AC and let C_0 be the midpoint of AB. Let D be the foot of the altitude from A and let G be the centroid of the triangle ABC. Let ω be a circle through B_0 and C_0 that is tangent to the circle Ω at a point $X \neq A$. Prove that the points D, G and X are collinear.

14. Consider a cake in the shape of a circle. It's been divided to some inequal parts by its radii. Arash and Bahram want to eat this cake. At the very first, Arash takes one of the parts. In the next steps, they consecutively pick up a piece adjacent to another piece formerly removed. Suppose that the cake has been divided to 5 parts. Prove that Arash can choose his pieces in such a way at least half of the cake is his.

15. Let f be a function from the set of integers to the set of positive integers. Suppose that, for any two integers m and n, the difference $f(m) - f(n)$ is divisible by $f(m-n)$. Prove that, for all integers m and n with $f(m) \leq f(n)$, the number $f(n)$ is divisible by $f(m)$.

AZZAM LABIB HAKIM Sesi Pak Rudi Jumat, 12 oktober 2018

Olympiad Problems

O457. Let a, b, c be real numbers such that $a+b+c \geq \sqrt{2}$ and

$$8abc = 3\left(a+b+c-\frac{1}{a+b+c}\right).$$

Prove that

$$2(ab+bc+ca)-\left(a^2+b^2+c^2\right) \leq 3.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas

O458. Let $F_n = 2^{2^n}+1$ be a Fermat prime, $n \geq 2$. Find the sum of periodical digits of

$$\frac{1}{F_n}.$$

Proposed by Doğukan Namli, Turkey

O459. Let a, b, x be real numbers such that

$$(4a^2b^2+1)x^2+9(a^2+b^2) \leq 2018.$$

Prove that

$$20(4ab+1)x+9(a+b) \leq 2018.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

O460. Let a, b, c, d be positive real numbers such that

$$a+b+c+d = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Prove that

$$a^4+b^4+c^4+d^4+12abcd \geq 16.$$

Proposed by Marius Stănean, Zalău, România

O461. Let n be a positive integer and $C>0$ a real number. Let $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ be real numbers such that $x_1+\ldots+x_{2n}=C$ and $|x_{k+1}-x_k| < \frac{C}{n}$ for all $k=1, 2, \ldots, 2n$. Prove that among these numbers there are n numbers $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ such that

$$\left|x_{\sigma(1)}+x_{\sigma(2)}+\cdots+x_{\sigma(n)}-\frac{C}{2}\right| < \frac{C}{2n}.$$

Proposed by Alessandro Ventullo, Milan, Italy

O462. Let a, b, c be positive real numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$\frac{1}{2a^3+a^2+bc}+\frac{1}{2b^3+b^2+ca}+\frac{1}{2c^3+c^2+ab} \geq \frac{3}{4}abc.$$

Proposed by Bui Xuan Tien, Quang Nam, Vietnam

Undergraduate Problems

U457. Evaluate

$$\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n\left(n^2-n+1\right)^3}{(n-2)!+(n+2)!}.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

U458. Let a, b, c be positive real numbers such that $abc=1$. Prove that

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{11}{3}.$$

Proposed by An Zhenping, Xianyang Normal University, China

U459. Let a, b, c be positive real numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^{ab}\left(1+\frac{1}{c}\right)^{bc}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{ca}\leq 8.$$

Proposed by Mihaela Berindeanu, Bucharest, România

U460. Let L_k denote the k^{th} Lucas number. Prove that

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{L_{k+1}}{L_kL_{k+2}+1}\cdot\tan^{-1}\frac{1}{L_{k+1}}=\frac{\pi}{4}\cdot\tan^{-1}\frac{1}{3}.$$

Proposed by Angel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain

U461. Find all positive integers $n>2$ such that the polynomial

$$X^n+X^2Y+XY^2+Y^n$$

is irreducible in the ring $\mathbb{Q}[X,Y]$.

Proposed by Mircea Becheanu, Montreal, Canada

U462. Let $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ be a differentiable function with continuous derivative and such that $f\left(f(x)\right)=x^2$, for all $x\geq 0$. Prove that

$$\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\geq\frac{30}{31}.$$

Proposed by Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc, România

AZZAM LABIB HAKIM   Sesi Malam   Jumat, 12 oktober 2018

Junior Problems

J457. Let ABC be a triangle and let D be a point on segment BC. Denote by E and F the orthogonal projections of D onto AB and AC, respectively. Prove that

$$\frac{\sin^2 \angle EDF}{DE^2 + DF^2} \leq \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

Proposed by Adrian Andreescu, University of Texas at Austin, USA

J458. Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Prove that

$$\frac{1}{\sqrt{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt{c+3a}} \geq \frac{3}{2}.$$

Proposed by Mircea Becheanu, Montreal, Canada

J459. Let a and b be positive real numbers such that

$$a^4 + 3ab + b^4 = \frac{1}{ab}.$$

Evaluate

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt{2 + \frac{1}{ab}}.$$

Proposed by Adrian Andreescu, University of Texas at Austin, USA

√ **J460.** Prove that for all positive real numbers x, y, z

$$\left(x^3 + y^3 + z^3\right)^2 \geq 3\left(x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4\right).$$

Bongkar ← kata Faiq, But, it works

Proposed by Nguyen Viet Hung, Hanoi University of Science, Vietnam

J461. Let a, b, c be real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$(ab + bc + ca - 3)\left(4(ab + bc + ca) - 15\right) + 18(a-1)(b-1)(c-1) \geq 0.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

J462. Let ABC a triangle. Prove that

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3R}{4r}.$$

Proposed by Florin Rotaru, Focşani, România

Senior Problems

S457. Let a, b, c be real numbers such that $ab+bc+ca=3$. Prove that

$$a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2 \le \left((a+b+c)^2-6\right)\left((a+b+c)^2-9\right).$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

√ **S458.** Let AD, BE, CF be altitudes of triangle ABC, and let M be the midpoint of side BC. The line through C and parallel to AB intersects BE at X, and the line through B and is parallel to MX intersects EF at Y. Prove that Y lies on AD.

Proposed by Marius Stănean, Zalău, România

S459. Solve in real numbers the system of equations

$$\begin{aligned} |x^2-2| &= \sqrt{y+2} \\ |y^2-2| &= \sqrt{z+2} \\ |z^2-2| &= \sqrt{x+2}. \end{aligned}$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

S460. Let x, y, z be real numbers. Suppose that $0<x, y, z<1$ and $xyz=\frac{1}{4}$. Prove that

$$\frac{1}{2x^2+yz}+\frac{1}{2y^2+zx}+\frac{1}{2z^2+xy} \le \frac{x}{1-x^3}+\frac{y}{1-y^3}+\frac{z}{1-z^3}.$$

Proposed by Luke Robitaille, Euless, Texas, USA

S461. Find all triples (p, q, r) of prime numbers such that

$$\begin{aligned} p &\mid 7^q-1 \\ q &\mid 7^r-1 \\ r &\mid 7^p-1. \end{aligned}$$

Proposed by Alessandro Ventullo, Milan, Italy

S462. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca} \le \frac{a+b}{2c}+\frac{b+c}{2a}+\frac{c+a}{2b}.$$

Proposed by Hoang Le Nhat Tung, Hanoi, Vietnam

AZZAM LABIB HAKIM

Yasya Sabtu, 13 oktober 2018

2 The Extreme Principle

Kasus ekstrem adalah memeperhatikan nilai-nilai terbesar dan terkecil. Sebagai contoh bilangan terbesar, jarak terpanjang, jarak terpendek, bilangan terkecil, tim terkuat dan seterusnya. Dengan menggunakan kontradiksi dan pengandaian konklusi salah biasanya akan mendapat bentuk yang lebih ekstrem contoh lebih kecil dari yang terkecil, lebih besar dari yang terbesar, lebih kuat dari yang terkuat dan seterusnya.

Contoh 6. Pada sebuah kota terdapat 3 sekolah. Masing-masing memiliki n siswa. Apabila setiap siswa setidaknya mengenal $n + 1$ siswa dari sekolah lain. Buktikan bahwa terdapat tiga anak dari sekolah yang berbeda-beda dan saling kenal.

Petunjuk. :

1. Andaikan tidak ada tiga anak dari sekolah berbeda yang saling kenal
2. Perhatikan anak (misal dari sekolah A) yang memiliki teman terbanyak dari salah satu sekolah (misal sekolah B)
3. Perhatikan teman anak tersebut yang dari sekolah C
4. Dapatkan kontradiksinya

Contoh 7. Pada liga sepakbola setiap tim bertemu dengan tim lainnya tepat sekali. Tim yang menang mendapat 2 poin. yang kalah mendapat 0 poin dan apabila seimbang masing-masing mendapat 1 poin. Apabila tim yang juara malah menang paling sedikit. Berapakah maksimal tim pada liga tersebut?

Petunjuk. :

1. Klaim jawabanmu
2. Buktikan apabila nilainya lebih besar maka tidak mungkin

2.1 Latihan Soal

1. Pada sebuah klub tenis terdapat 20 anggota. Mereka bermain dengan total 14 permainan dan setiap pemain bermain setidaknya sekali. Buktikan terdapat 6 game yang melibatkan 12 pemain berbeda
2. Terdapat turnamen bola yang melibatkan 20 tim. Cari bilangan terkecil n, yaitu banyaknya permainan yang dimainkan, sedemikian sehingga untuk setiap tiga tim terdapat permainan yang mempertemukan dua dari tiga tim tersebut.
3. Pada sebuah turnamen voli setiap tim bertemu tepat satu game dengan tim lainnya. Misalkan tidak ada hasil imbang. Misal tim A menang terhadap tim C; atau tim A menang terhadap tim B dan tim C menang terhadap tim B;. Maka tim A dikatakan melampaui tim B. Mungkinkah terdapat dua tim yang masing-masing melampaui tim lainnya.

3 Local Adjustment

Terkadang terdapat beberapa soal yang dapat kita deduksi menjadi persoalan yang lebih kecil. Permasalahan tersebut memiliki ciri khas ditemukannya sebuah transformasi sehingga dapat diselesaikan dengan beberapa langkah transformasi tersebut.

Contoh 8. Pada sebuah papan catur $n \times n$, $n \geq 4$ setiap persegi satuannya diberi angka 1 atau -1. Perkalian n bilangan yang terdapat pada baris dan kolom berbeda disebut suku sederhana. Misal S adalah penjumlahan semua suku sederhana. Buktikan bahwa S habis dibagi 4.

Petunjuk. Perhatikan hubungan papan catur $n \times n$, suku sederhana dan papan catur bentuk $n-1 \times n-1$

Contoh 9. Misal 2008 ditulis sebagai penjumlahan beberapa bilangan bulat positif berbeda sedemikian sehingga hasil kali beberapa bilangan bulat tersebut bernilai maksimum. Carilah nilai maksimumnya.

Petunjuk. :

1. Apabila memungkinkan, gantilah dua bilangan dari bilangan-bilangan tersebut dengan dua bilangan yang memiliki selisih lebih kecil
2. Bandingkan hasil kali dua bilangan awal dengan dua bilangan baru

Contoh 10. Terdapat 14 orang bermain catur jepang dan setiap orang bermain dengan 13 pemain lainnya tanpa ada skor seimbang. Apabila terdapat 3 pemain A, B, C sehingga A menang terhadap B, B menang terhadap C dan C menang terhadap A maka ketiga pemain tersebut disebut dengan "trio mumet". Cari banyaknya "trio mumet" paling banyak yang mungkin ada dalam pertandingan tersebut.

Petunjuk. :

1. Perhatikan dua pemain yang memiliki selisih banyaknya kemenangan lebih dari 1
2. Bandingkan banyaknya "trio mumet" yang dibentuk dengan dua pemain yang memiliki selisih banyaknya kemenangan yang lebih kecil

Contoh 11. Misalkan terdapat beberapa keranjang berisi bola kecil diletakan dengan posisi melingkar. Banyaknya bola pada setiap keranjang adalah kelipatan 3. Pada setiap langkah-nya, keranjang yang memiliki banyak bola kelipatan 3, bolanya dapat dibagi menjadi 3 bagian yang sama kemudian bagian pertama dimasukkan ke keranjang di sebelah kiri, bagian kedua dimasukkan ke keranjang sebelah kanan dan sisanya tetap pada keranjang tersebut. Apabila banyak keranjang bukan kelipatan 3 tetap dapat dilakukan langkah tersebut namun harus menambahkan 1 atau 2 bola agar menjadi kelipatan 3 terlebih dahulu. Buktikan bahwa setelah beberapa langkah dapat dihasilkan semua keranjang memiliki banyak bola yang sama.

Petunjuk. :

1. Buatlah fungsi yang merupakan selisih keranjang dengan bola terbanyak dan tersedikit

AZZAM LABIB HAKIM   Sesi Siang Yasya

Mandiri Siang
Sabtu, 13 Oktober 2018

√ 1. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. Let P, Q, R be the feet of the perpendiculars from D to the lines BC, CA, AB, respectively. Show that $PQ = QR$ if and only if the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ADC$ are concurrent with AC. IMO 2003 #4

2. Let m be a fixed integer greater than 1. The sequence x_0, x_1, x_2, ... is defined as follows:

$$x_i = \begin{cases} 2^i & \text{if } 0 \le i \le m-1; \\ \sum_{j=1}^{m} x_{i-j} & \text{if } i \ge m. \end{cases}$$

Find the greatest k for which the sequence contains k consecutive terms divisible by m .

3. Each of the numbers in the set $A = \{1, 2, \cdots, 2017\}$ is colored either red or white. Prove that for $n \ge 18$, there exists a coloring of the numbers in A such that any of its n-term arithmetic sequences contains both colors.

4. 1. Let ABC be an acute-angled triangle with $AB \neq AC$. The circle with diameter BC intersects the sides AB and AC at M and N respectively. Denote by O the midpoint of the side BC. The bisectors of the angles $\angle BAC$ and $\angle MON$ intersect at R. Prove that the circumcircles of the triangles BMR and CNR have a common point lying on the side BC.

5. Let $\tau(n)$ denote the number of positive divisors of the positive integer n. Prove that there exist infinitely many positive integers a such that the equation $\tau(an) = n$ does not have a positive integer solution n.

6. Let $n \ge 3$ be an integer. Let t_1, t_2, ..., t_n be positive real numbers such that

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Show that t_i, t_j, t_k are side lengths of a triangle for all i, j, k with $1 \le i < j < k \le n$.

7. Prove that does not exist positive integers a, b and k such that $4abk - a - b$ is a perfect square.

8. a) Let n a positive integer. Prove that $gcd(n, \lfloor n\sqrt{2} \rfloor) < \sqrt[4]{8}\sqrt{n}$.

b) Prove that there are infinitely many positive integers n such that $gcd(n, \lfloor n\sqrt{2} \rfloor) > \sqrt[4]{7.99}\sqrt{n}$.

9. Let a, b, c, d to be non negative real numbers satisfying $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 6$. Prove that

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \ge 2$$

2. Carilah langkah yang selalu memperkecil nilai fungsi tersebut sampai bernilai 0

Contoh 12. Terdapat setidaknya 4 permen pada $n(n \geq 4)$ buah toples. Setiap langkah seseorang dapat mengambil masing-masing sebuah permen dari dua buah toples dan memasukkannya ke dalam toples yang lain. Buktikan bahwa selalu mungkin memasukkan semua permen ke dalam sebuah toples.

Petunjuk. 1. Kita dapat menaruh semua permen ke dalam 2 atau 3 toples

2. Atau cara lain gunakan induksi

3.1 Latihan Soal

1. Terdapat $2n$ titik pada sebuah segment AB dan mereka simetris terhadap M titik tengah AB. Pada titik-titik tersebut n titik diwarnai merah dan n titik diwarnai biru. Buktikan bahwa jumlah jarak dari titik A ke semua titik merah sama dengan jarak dari titik B ke semua titik biru.

2. Kita tambahkan tanda " $+$ " dan " $-$ " ke masing-masing bilangan-bilangan $1, 2, 3, ..., 2005$ sedemikian sehingga jumlahnya tidak negatif dan mencapai nilai minimum. Carilah nilai minimum tersebut

3. Terdapat 1989 titik pada ruang sehingga tidak ada tiga titik segaris. Kemudian dibagi ke dalam 30 grup dengan anggota masing-masing grup berbeda-beda. Sebuah segitiga pelangi dapat dibentuk apabila ketiga titik sudutnya berasal dari grup yang berbeda-beda. Tentukan banyaknya segitiga pelangi yang maksimal.

4. Sebuah papan catur ukuran $m \times m$ dibagi menjadi 7 buah persegi panjang yang memenuhi setiap dua persegi panjang tidak bertumpuk dan panjang sisi dari 14 sisi tersebut berbeda-beda dan bernilai $1, 2, 3, ..., 14$. Carilah nilai m terbesar.

5. Perhatikan permutasi $(a_1, a_2, ..., a_20)$ dari bilangan $1, 2, ..., 20$. Pada permutasi ini kita dapat menukar dua buah bilangan dengan tujuan mengubah $(a_1, a_2, ..., a_20)$ menjadi $(1, 2, ..., 20)$. Misalkan penukaran minimal pada permutasi a adalah k_a. Carilah nilai maksimal dari k_a

6. Terdapat $2n + 1$ pemain $p_1, p_2, ..., p_{2n+1}$ pada sebuah turnamen pingpong dan setiap pemain melawan $2n$ pemain lainnya dan tidak ada hasil seimbang. Misalkan pemain p_i menang sebanyak w_i. Carilah nilai maksimum dan minimum dari $\sum_{i=1}^{2n+1} w_i^2$

10. There's a tape with n^2 cells labeled by $1, 2, \ldots, n^2$. Suppose that x, y are two distinct positive integers less than or equal to n. We want to color the cells of the tape such that any two cells with label difference of x or y have different colors. Find the minimum number of colors needed to do so.

11. Find all function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $a, b \in \mathbb{N}$, $(f(a) + b)f(a + f(b)) = (a + f(b))^2$

✓12. Let ABC be a triangle. Suppose that X, Y are points in the plane such that BX, CY are tangent to the circumcircle of ABC, $AB = BX$, $AC = CY$ and X, Y, A are in the same side of BC. If I be the incenter of ABC prove that $\angle BAC + \angle XIY = 180$.

AICY , AIBX cyclic

AZZAM LABIB HAKIM　　Sesi Malam kau Yasya

Mandiri Malam
Sabtu, 13 Oktober 2018

1. Let B be a point on a circle S_1, and let A be a point distinct from B on the tangent at B to S_1. Let C be a point not on S_1 such that the line segment AC meets S_1 at two distinct points. Let S_2 be the circle touching AC at C and touching S_1 at a point D on the opposite side of AC from B. Prove that the circumcentre of triangle BCD lies on the circumcircle of triangle ABC.

2. The sequence of real numbers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is defined recursively by

$$a_0 = -1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 1.$$

Show that $a_n > 0$ for all $n \geq 1$.

3. Let x and y be integers and let p be a prime number. Suppose that there exist realatively prime positive integers m and n such that

$$x^m \equiv y^n \pmod{p}$$

Prove that there exists an unique integer z modulo p such that

$$x \equiv z^n \pmod{p} \quad \text{and} \quad y \equiv z^m \pmod{p}$$

4. Let $\triangle ABC$ a triangle with circumcircle Γ. Suppose there exist points R and S on sides AB and AC, respectively, such that $BR = RS = SC$. A tangent line through A to Γ meet the line RS at P. Let I the incenter of triangle $\triangle ARS$. Prove that $PA = PI$

5. Let n be a positive integer. Prove that there exists a poisitve integer m such that

$$7^n \mid 3^m + 5^m - 1$$

6. Let a, b and c be positive real numbers. Prove that

$$\sum_{cyc} \frac{a^3 b}{(3a+2b)^3} \geq \sum_{cyc} \frac{a^2 bc}{(2a+2b+c)^3}$$

7. Let p be a prime number. Prove that there exists a prime number q such that for every integer n, the number $n^p - p$ is not divisible by q.

8. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the equation

$$f(x^2 + y^2 + 2f(xy)) = (f(x+y))^2.$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.