Pembahasan Soal

OSK SMA 2017

OLIMPIADE SAINS KABUPATEN SMA 2017

OSK Matematika SMA

(Olimpiade Sains Kabupaten Matematika SMA)

Disusun oleh:

Pak Anang

PEMBAHASAN SOAL
OLIMPIADE SAINS MATEMATIKA SMA
TINGKAT KABUPATEN
14 MARET 2017
By Pak Anang (http://pak-anang.blogspot.com)

1. Diketahui $x - y = 10$ dan $xy = 10$. Nilai dari $x^4 + y^4$ adalah ....

   Pembahasan:
   Perhatikan untuk mencari bentuk $x^4 + y^4$ jalur yang kita tempuh adalah mencari terlebih dahulu bentuk $x^2 + y^2$.

   Perhatikan karena $(x + y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, maka $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$, sehingga
   $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x - y)^2 + 2xy \\ &= (10)^2 + 2(10) \\ &= 100 + 20 \\ &= 120 \end{aligned}$$

   Padahal karena $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, maka $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$, sehingga
   $$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 \\ &= (120)^2 - 2(10)^2 \\ &= 14400 - 200 \\ &= 14200 \end{aligned}$$

2. Empat siswa Adi, Budi, Cokro, dan Dion bertanding balap sepeda. Kita hanya diberikan sebagian informasi sebagai berikut:
   (a) setiap siswa sampai di garis finish pada waktu yang berlainan
   (b) Adi bukan juara pertama
   (c) Cokro kalah dari Budi
   Dengan hanya mengetahui informasi ini saja, banyaknya susunan juara pertama, kedua, ketiga, dan keempat adalah ....

   Pembahasan:
   Perhatikan informasi yang diberikan pada soal adalah sebagai berikut:
   (a) setiap siswa sampai di garis finish pada waktu yang belainan, artinya setiap posisi juara ditempati oleh satu orang saja.
   (b) Adi bukan juara pertama, artinya juara pertama tidak mungkin ditempati oleh Adi. Adi hanya bisa menempati posisi pada juara kedua, ketiga, atau keempat.
   (c) Cokro kalah dari Budi, artinya jika Cokro menjadi juara pertama, maka kemungkinan Budi adalah juara kedua, ketiga, atau keempat. Sedangkan jika Cokro juara kedua, maka kemungkinan Budi hanya menjadi juara ketiga atau keempat saja. Sedang jika Cokro juara ketiga, maka Budi pastilah menjadi juara keempat. Syarat ini tidak memungkinkan untuk Cokro menjadi juara keempat.

   Sehingga, dari informasi tersebut, kita misalkan posisi masing-masing juara sebagai berikut:
   1. Posisi Adi.
      Kemungkinan posisi Adi adalah memilih satu tempat dari 3, sehingga ${}_3P_1$.
   2. Posisi Cokro dan Budi
      Kemungkinan posisi Cokro dan Budi adalah memilih dua tempat dari 3 tempat secara kombinasi, karena posisinya sudah pasti Cokro kalah dari Budi, sehingga ${}_3C_2$.
   3. Posisi Dion.
      Posisi Dion sudah tidak perlu ditentukan karena hanya tersisa satu tempat lagi, sehingga ${}_1P_1$.

   Jadi, banyaknya cara menentukan susunan juara pertama, kedua, ketiga, dan keempat adalah:
   ${}_3P_1 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1P_1 = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$

   Cara Alternatif:
   Manual dengan meletakkan masing-masing orang sesuai dengan informasi pada soal.
   Sehingga diperoleh 9 kemungkinan, yaitu:

No	Juara 1	Juara 2	Juara 3	Juara 4
1.	Cokro	Adi	Budi	Dion
2.	Cokro	Adi	Dion	Budi
3.	Dion	Adi	Cokro	Budi
4.	Cokro	Budi	Adi	Dion
5.	Cokro	Dion	Adi	Budi
6.	Dion	Cokro	Adi	Budi
7.	Cokro	Budi	Dion	Adi
8.	Cokro	Dion	Budi	Adi
9.	Dion	Cokro	Budi	Adi

3. Banyaknya bilangan asli k yang memenuhi $k|(n^7 - n)$ untuk semua bilangan asli n adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan $k|(n^7 - n)$, maksudnya k adalah faktor dari $(n^7 - n)$ dimana n, k adalah bilangan asli.

Pemfaktoran dari bentuk $(n^7 - n)$, diperoleh:

$$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n^6 - 1) \\ &= n(n^3 - 1)(n^3 + 1) \\ &= n(n-1)(n^2 + n + 1)(n+1)(n^2 - n + 1) \\ &= \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\substack{\text{bentuk 3 buah} \\ \text{bilangan asli} \\ \text{berurutan}}}(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) \end{aligned}$$

Mudah diperiksa bahwa bentuk $(n^7 - n)$ memuat bentuk perkalian dari 3 bilangan asli berurutan, dimana 3 bilangan asli berurutan pasti habis dibagi 6.
Sehingga $(n^7 - n)$, untuk semua n bilangan asli pasti juga habis dibagi oleh 6.

Namun, setelah diperiksa lebih lanjut, ternyata 7 juga menjadi faktor dari $n^7 - n$.

Misal $f(n) = n^7 - n$, maka $f(2) = 2^7 - 2 = 126$ dan $f(3) = 3^7 - 3 = 2184$.
Kedua nilai $f(2)$ dan $f(3)$ adalah juga kelipatan 7 karena $FPB(126, 2184) = 42$.

Misal $f(k) = k^7 - k$ adalah kelipatan 7, maka akan dibuktikan $f(k+1) = (k+1)^7 - (k+1)$ adalah juga kelipatan 7.

Perhatikan,

$$\begin{aligned} (k+1)^7 - (k+1) &= \left(\sum_{i=0}^{7} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) - (k+1) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{0} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{5} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) + \left(\sum_{i=6}^{7} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) - k - 1 \\ &= k^7 + \left(\sum_{i=1}^{5} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) + 7k + 1 - k - 1 \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{5} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right)}_{\substack{\text{pasti habis dibagi 7} \\ \text{karena memuat} \\ \text{bentuk } {}_7C_i}} + \underbrace{(k^7 - k)}_{\substack{\text{sudah jelas} \\ \text{bentuk ini} \\ \text{kelipatan 7}}} + \underbrace{7k}_{\text{dapat dibagi 7}} \end{aligned}$$

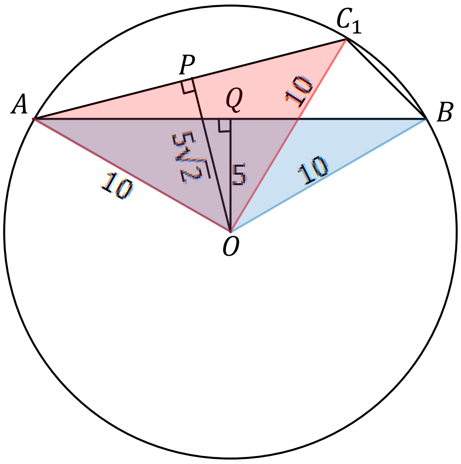
Jadi jelas bahwa 7 adalah salah satu faktor dari $(n^7 - n)$.

Jadi, karena faktor $6 \times 7 = 42$ adalah 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, dan 42, maka terdapat 8 buah bilangan asli$k$ yang merupakan faktor dari $(n^7 - n)$.

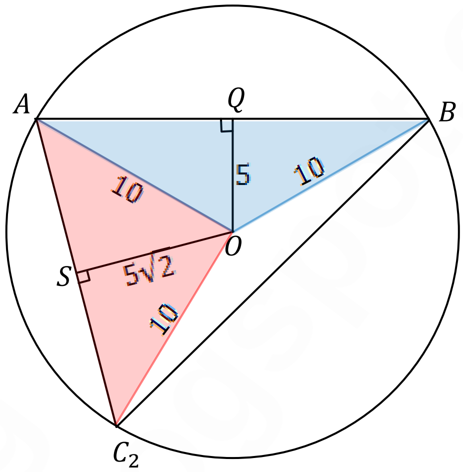
Atau menggunakan rumus banyak faktor bulat positif, maka karena $42 = 2 \times 3 \times 7$, sehingga banyak faktor bulat positif dari 42 adalah $(1+1)(1+1)(1+1) = 8$ buah.

4. Pada sebuah lingkaran dengan pusat O, talibusur AB berjarak 5 dari titik O dan talibusur AC berjarak $5\sqrt{2}$ dari titik O. Jika panjang jari-jari lingkaran 10, maka BC^2 adalah ....

Pembahasan:
Ilustrasi soal terlihat pada gambar berikut:



(i)



(ii)

Ternyata tali busur AC ada dua buah yang sesuai kriteria pada soal, yaitu berjarak $5\sqrt{2}$ dari titik O. Sehingga, titik C kita beri indeks masing-masing untuk membedakannya, yaitu C_1 dan C_2.

Kasus 1.
Pada gambar (i), titik C_1 kita pilih berada “di atas” B.

Perhatikan ΔAOP, misal $\angle OAP = \alpha$, maka:

$$\begin{aligned} \sin\alpha = \frac{OP}{OA} &\Rightarrow \sin\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{10} \\ &\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = 45^\circ \end{aligned}$$

Perhatikan ΔAOQ, misal $\angle OAQ = \beta$, maka:

$$\begin{aligned} \sin\beta = \frac{OQ}{OA} &\Rightarrow \sin\beta = \frac{5}{10} \\ &\Leftrightarrow \sin\beta = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \beta = 30^\circ \end{aligned}$$

Padahal, sudut keliling $\angle BAC_1 = \alpha - \beta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.
Sehingga sudut pusat $\angle BOC_1 = 2\angle BAC_1 = 2(15^\circ) = 30^\circ$.

Jadi, dengan menggunakan aturan cosinus, diperoleh:

$$\begin{aligned} {BC_1}^2 &= OB^2 + {OC_1}^2 - 2 \cdot OB \cdot OC_1 \cdot \cos 30^\circ \\ &= 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= 100 + 100 - 100\sqrt{3} \\ &= 200 - 100\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kasus 2.
Pada gambar (ii), titik C_2 kita pilih berada “di bawah” B.

Perhatikan ΔAOS, misal $\angle OAS = \alpha$, maka:

$$\sin\alpha = \frac{OS}{OA} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{10}$$
$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha = 45°$$

Perhatikan ΔAOQ, misal $\angle OAQ = \beta$, maka:

$$\sin\beta = \frac{OQ}{OA} \Rightarrow \sin\beta = \frac{5}{10}$$
$$\Leftrightarrow \sin\beta = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \beta = 30°$$

Padahal, sudut keliling $\angle BAC_2 = \alpha + \beta = 45° + 30° = 75°$.
Sehingga sudut pusat $\angle BOC_2 = 2\angle ABC_2 = 2(75°) = 150°$.

Jadi, dengan menggunakan aturan cosinus, diperoleh:

$$\begin{aligned} {BC_2}^2 &= OB^2 + {OC_2}^2 - 2 \cdot OB \cdot OC_2 \cdot \cos 150° \\ &= 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ &= 100 + 100 + 100\sqrt{3} \\ &= 200 + 100\sqrt{3} \end{aligned}$$

Komentar terhadap soal:
Menurut pandangan saya, soal ini multitafsir dan cenderung ambigu, karena memiliki dua penyelesaian..... Menurut kabar yang beredar, kuncinya adalah $200 + 100\sqrt{3}$, yang artinya jawabannya tunggal.

Padahal, dari hasil pengamatan pada soal dan ilustrasi soal pada gambar, dapat ditemukan dua nilai panjang BC yang dimaksud pada soal....

Jadi sebaiknya soal perlu diberi keterangan lebih lanjut agar jawaban benar tunggal dan tidak bias atau ambigu.....

5. Jika $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = -\frac{4}{7}$, maka nilai dari $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$ adalah ....

Pembahasan:
Misal,
$a - b = x$
$c - d = y$

Maka,
$(a-b)+(c-d) = x+y$
Sehingga diperoleh,
$(b-c)+(d-a) = -x-y$

Apabila kedua persamaan dikuadratkan, maka
$\big((a-b)+(c-d)\big)^2 = (x+y)^2 \Rightarrow (a-b)^2 + 2(a-b)(c-d) + (c-d)^2 = (x+y)^2$
dan,
$\big((b-c)+(d-a)\big)^2 = \big(-(x+y)\big)^2 \Rightarrow (b-c)^2 + 2(b-c)(d-a) + (d-a)^2 = (x+y)^2$

Jadi, diperoleh,

$$\begin{aligned}
& (a-b)^2 + 2(a-b)(c-d) + (c-d)^2 = (b-c)^2 + 2(b-c)(d-a) + (d-a)^2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 - 2ab + b^2 + 2(a-b)(c-d) + c^2 - 2cd + d^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2(b-c)(d-a) + d^2 - 2ad + a^2 \\
\Leftrightarrow\ & -2ab - 2cd + 2(a-b)(c-d) = -2bc - 2ad + 2(b-c)(d-a) \\
\Leftrightarrow\ & 2(a-b)(c-d) = 2ab + 2cd - 2bc - 2ad + 2(b-c)(d-a) \\
\Leftrightarrow\ & 2(a-b)(c-d) = 2(ab - ad - bc + cd) + 2(b-c)(d-a) \\
\Leftrightarrow\ & 2(a-b)(c-d) = 2(a-c)(b-d) + 2(b-c)(d-a) \\
\Leftrightarrow\ & (a-b)(c-d) = (a-c)(b-d) + (b-c)(d-a) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(a-b)(c-d)}{(a-b)(c-d)} = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} + \frac{(b-c)(d-a)}{(a-b)(c-d)} \\
\Leftrightarrow\ & 1 = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} + \left(-\frac{7}{4}\right) \\
\Leftrightarrow\ & 1 + \frac{7}{4} = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{11}{4} = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}
\end{aligned}$$

Cara Alternatif:
Perhatikan,

$$\begin{aligned}
\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = -\frac{4}{7} \Rightarrow\ & 7(a-b)(c-d) = -4(b-c)(d-a) \\
\Leftrightarrow\ & 7(ac - ad - bc + bd) = -4(bd - ab - cd + ac) \\
\Leftrightarrow\ & 7ac - 7ad - 7bc + 7bd = -4bd + 4ab + 4cd - 4ac \\
& \text{tambah kedua ruas dengan } (4ac - 4ad - 4bc + 4bd) \\
\Leftrightarrow\ & 11ac - 11ad - 11bc + 11bd = 4ab - 4ad - 4bc + 4cd \\
\Leftrightarrow\ & 11(ac - ad - bc + bd) = 4(ab - ad - bc + cd) \\
\Leftrightarrow\ & 11(a-b)(c-d) = 4(a-c)(b-d) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{11}{4} = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}
\end{aligned}$$

6. Pada suatu kotak ada sekumpulan bola berwarna merah dan hitam yang secara keseluruhannya kurang dari 1000 bola. Misalkan diambil dua bola. Peluang terambilnya dua bola merah adalah p dan peluang terambilnya dua bola hitam adalah q dengan $p - q = \frac{23}{37}$. Selisih terbesar yang mungkin dari banyaknya bola merah dan hitam adalah ....

Pembahasan:
Misal,
$x =$ banyaknya bola merah
$y =$ banyaknya bola hitam

Sehingga, apabila banyak bola merah dan bola hitam secara keseluruhan dimisalkan n dan banyak keseluruhan kurang dari 1000, maka
$x + y < 1000 \Rightarrow n < 1000$

Peluang terambil dua bola merah dan dua bola hitam adalah
$P(2M) = \frac{{}_xC_2}{{}_nC_2} = p \; ; P(2H) = \frac{{}_yC_2}{{}_nC_2} = \frac{{}_{n-x}C_2}{{}_nC_2} = q$

Perhatikan, pada soal diketahui $p - q = \frac{23}{37}$, sehingga:

$$\begin{aligned}
p - q = \frac{23}{37} \Rightarrow \quad & \frac{{}_xC_2}{{}_nC_2} - \frac{{}_{n-x}C_2}{{}_nC_2} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x(x-1) - (n-x)(n-x-1)}{n(n-1)} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(x^2 - x) - (n^2 - nx - n - nx + x^2 + x)}{n(n-1)} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-n^2 - 2nx - 2x}{n(n-1)} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(n-1)(2x-n)}{n(n-1)} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(2x-n)}{n} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2x}{n} - 1 = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2x}{n} = \frac{60}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{37}{30}x = n
\end{aligned}$$

Padahal, $n < 1000$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\frac{37}{30}x < 1000 \Rightarrow \; & 37x < 30000 \\
\Leftrightarrow \quad & x < \frac{30000}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & x < 810\frac{30}{37}
\end{aligned}$$

Jadi, nilai terbesar x adalah $x = 810$,
Sedangkan karena $x + y < 1000$, jadi jumlah terbesar $x + y = 999$, maka diperoleh $y = 189$.

Sehingga selisih terbesar yang mungkin dari banyaknya bola merah dan hitam adalah

$$x - y = 810 - 189 = 621$$

Cara Alternatif:
Misal,
$x =$ banyaknya bola merah
$y =$ banyaknya bola hitam

Peluang terambil dua bola merah dan dua bola hitam adalah
$P(2M) = \frac{{}_{x}C_2}{{}_{(x+y)}C_2} = p\ ;\ P(2H) = \frac{{}_{y}C_2}{{}_{(x+y)}C_2} = q$

Perhatikan, pada soal diketahui $p - q = \frac{23}{37}$, sehingga:

$$
\begin{aligned}
p - q = \frac{23}{37} \Rightarrow \quad & \frac{{}_{x}C_2}{{}_{(x+y)}C_2} - \frac{{}_{y}C_2}{{}_{(x+y)}C_2} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x(x-1) - (y)(y-1)}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x^2 - x - y^2 + y}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(x^2 - y^2) - (x - y)}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(x-y)(x+y) - (x-y)}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(x-y)(x+y-1)}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x-y}{x+y} = \frac{23}{37}
\end{aligned}
$$

Padahal, banyak keseluruhan bola adalah kurang dari 1000, maka
$x + y < 1000$

Sehingga, dengan sedikit manipulasi dari $\frac{x-y}{x+y} = \frac{23}{37}$ dapat diperoleh,

$$
\begin{aligned}
\frac{x-y}{x+y} = \frac{23}{37} \Rightarrow \quad & \frac{x-y}{x+y} = \frac{23}{37} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x-y}{x+y} = \frac{23}{37} \cdot \frac{27}{27} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x-y}{x+y} = \frac{621}{999}
\end{aligned}
$$

Jadi, diperoleh $x + y = 999 < 1000$ sedangkan selisih terbesar yang mungkin dari banyaknya bola merah dan hitam adalah $x - y = 621$.

7. Misalkan $s(n)$ menyatakan faktor prima terbesar dari n dan $t(n)$ menyatakan faktor prima terkecil dari n. Banyaknya bilangan asli $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ sehingga $t(n) + 1 = s(n)$ adalah ....

Pembahasan:
Karena $t(n) + 1 = s(n) \Rightarrow s(n) - t(n) = 1$, maka dua bilangan prima yang selisihnya 1 adalah bilangan 2 dan 3.
Jadi jelas bahwa $s(t) = 3$ dan $t(n) = 2$

Sehingga, bilangan yang dimaksud adalah $n = 2^p \times 3^q$, dengan p dan q adalah bilangan asli.
Padahal bilangan $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$, maka
- untuk $p = 1$, diperoleh tiga buah nilai q yang mungkin adalah $q = \{1, 2, 3\}$
- untuk $p = 2$, diperoleh dua buah nilai q yang mungkin adalah $q = \{1, 2\}$
- untuk $p = 3$, diperoleh dua nilai q yang mungkin adalah $q = \{1, 2\}$
- untuk $p = 4$, diperoleh satu nilai q yang mungkin adalah $q = \{1\}$
- untuk $p = 5$, diperoleh satu nilai q yang mungkin adalah $q = \{1\}$

Jadi, ada 9 buah bilangan asli n yang memenuhi.

Cara Alternatif:
Dicoba dengan cara manual, karena $t(n) + 1 = s(n) \Rightarrow s(n) - t(n) = 1$, maka dua bilangan prima yang selisihnya 1 adalah bilangan 2 dan 3.
Jadi jelas bahwa $s(t) = 3$ dan $t(n) = 2$

Sehingga, bilangan yang dimaksud adalah $n = 2^p \times 3^q$, dengan p dan q adalah bilangan asli.

Jadi, bilangan tersebut adalah:
- $2 \times 3 = 6$
- $2 \times 3^2 = 18$
- $2 \times 3^3 = 54$
- $2^2 \times 3 = 12$
- $2^2 \times 3^2 = 36$
- $2^3 \times 3 = 24$
- $2^3 \times 3^2 = 72$
- $2^4 \times 3 = 48$
- $2^5 \times 3 = 96$

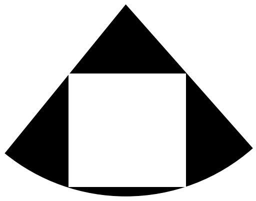
Jadi, ada 9 buah bilangan asli n yang memenuhi.

TRIK SUPERKILAT:
Perhatikan jelas bahwa $n = 2^p \times 3^q$, dengan p, q bilangan asli.
Maka n adalah bilangan kelipatan 2 dan 3 yang tidak habis dibagi bilangan prima r, dimana $r < \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor$, jadi $r = \{5, 7, 11, 13\}$.
Sehingga misal banyaknya n adalah $n(n)$ dapat dirumuskan sebagai:

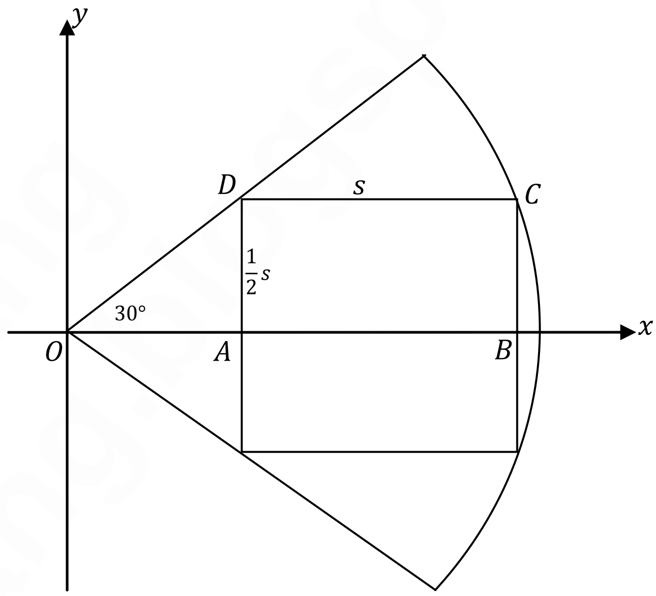
$$n(n) = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{66} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{78} \right\rfloor \right) = 16 - (3 + 2 + 1 + 1) = 16 - 7 = 9$$

Jadi, ada 9 buah bilangan asli n yang memenuhi.

8. Semua titik sudut suatu persegi dengan panjang sisi s terletak pada batas dari juring lingkaran berjari-jari r yang sudut pusatnya $60°$. Jika persegi diletakkan secara simetris dalam juring, maka nilai $\frac{r^2}{s^2}$ adalah ....



Pembahasan:
Perhatikan gambar disamping,



Misal,
$r =$ jari-jari lingkaran
$s =$ sisi persegi

Perhatikan ΔAOD,

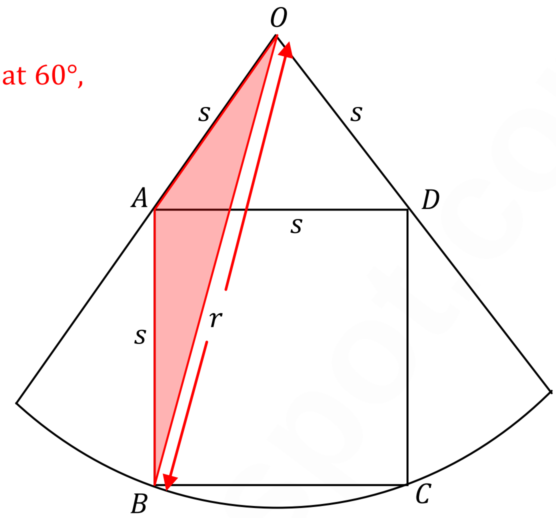
$$\tan \angle AOD = \frac{AD}{AO} \Rightarrow AO = \frac{AD}{\tan 30°}$$
$$\Leftrightarrow AO = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{1}{3}\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow AO = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow AO = \frac{1}{2}\sqrt{3}s$$

Sehingga diperoleh koordinat $A\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}s, 0\right)$.
Dan karena $AB = s$, maka koordinat $C\left(\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})s, \frac{1}{2}s\right)$.

Pandang persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ yang melalui $C\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})s, \frac{1}{2}s\right)$ adalah $x^2 + y^2 = r^2$, maka

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}(12+\sqrt{3})s\right)^2 + \left(\frac{1}{2}s^2\right) = r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})s^2 + \frac{1}{4}s^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left((7+4\sqrt{3})+1\right)s^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(8+4\sqrt{3})s^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(8+4\sqrt{3}) = \frac{r^2}{s^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2+\sqrt{3} = \frac{r^2}{s^2}$$

TRIK SUPERKILAT:
Perhatikan gambar disamping,



Jika persegi berada di dalam juring dengan sudut pusat 60°, maka ΔAOD adalah segitiga sama sisi.
Sehingga, $AO = AD = OD = s$.

Perhatikan, ΔAOB,
$\angle OAB = \angle BAD + \angle OAD = 90° + 60° = 150°$
Pada ΔAOB berlaku aturan kosinus sebagai berikut:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos 150°$$
$$\Leftrightarrow \quad r^2 = s^2 + s^2 - 2 \cdot s \cdot s \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad r^2 = s^2 + s^2 - 2 \cdot s \cdot s \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad r^2 = 2s^2 + s^2\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad r^2 = s^2\left(2 + \sqrt{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{r^2}{s^2} = 2 + \sqrt{3}$$

9. Misalkan a, b, c bilangan real positif yang memenuhi $a + b + c = 1$. Nilai minimum dari $\frac{a+b}{abc}$ adalah ....

Pembahasan:
Misal, $a + b = d$
$a + b + c = 1 \Rightarrow d + c = 1$

Berdasarkan ketaksamaan $AM \geq GM$ diperoleh:
$$\frac{d+c}{2} \geq \sqrt{dc} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{dc}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq dc$$
Tanda kesamaan terjadi saat $d = c$, sehingga $d = \frac{1}{2}$ dan $c = \frac{1}{2}$

Padahal $d = a + b$, sehingga $a + b = \frac{1}{2}$
Berdasarkan ketaksamaan $AM \geq GM$ diperoleh:
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{1}{4} \geq \sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} \geq ab$$
Tanda kesamaan terjadi saat $a = b$, sehingga $a = \frac{1}{4}$ dan $b = \frac{1}{4}$

Sehingga, nilai minimum dari $\frac{a+b}{abc}$ adalah
$$\min\left(\frac{a+b}{abc}\right) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{1} = 16$$

10. Sebuah hotel mempunyai kamar bernomor 000 sampai dengan 999. Hotel tersebut menerapkan aturan aneh sebagai berikut: jika suatu kamar berisi tamu, dan sembarang dua digit nomor kamar tersebut dipertukarkan tempatnya, maka diperoleh nomor kamar yang sama atau nomor kamar yang tidak berisi tamu. Maksimal banyak kamar yang berisi tamu adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan aturan aneh pada hotel tersebut: “Jika suatu kamar berisi tamu, dan sembarang dua digit nomor kamar tersebut dipertukarkan tempatnya”, maka diperoleh:

- **nomor kamar yang sama.**
  Jika nomor kamarnya sama, maka sudah pasti nomor kamar tersebut berisi tamu.
- **nomor kamar yang tidak berisi tamu.**
  Artinya, permutasi dari digit kamar menghasilkan nomor kamar yang tidak berisi tamu.

Padahal, kamar hotel bernomor 000 sampai dengan 999. Artinya ada 1000 buah kamar hotel.
Kamar hotel tersebut dapat diklasifikasikan berdasarkan jenis digitnya, yaitu:

- **Nomor kamar yang ketiga digitnya sama.**
  Maka nomor kamar tersebut adalah aaa.
  Karena $a = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, maka ada sebanyak 10 buah kamar yang tiga digitnya sama.
  Karena apabila dipertukarkan dua digitnya mendapat nomor kamar yang sama, maka ada 10 buah kamar yang berisi tamu.

- **Nomor kamar dengan dua digit yang sama.**
  Maka nomor kamar tersebut adalah abb, bab, bba.
  Karena $a = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ dan misal dipilih $a = 0$, maka $b = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, maka ada sebanyak $3 \times 10 \times 9 = 270$ buah kamar.

  Perhatikan tabel berikut:

Jenis nomor kamar	Tamu		
	Ditukar 2 digitnya	Ada	Tidak
abb	⧎	√	
bab			√
bba			√

  Sehingga ada $\frac{1}{3} \times 270 = 90$ kamar yang berisi tamu.

- **Nomor kamar yang ketiga digitnya berbeda.**
  Maka nomor kamar tersebut adalah abc.
  Karena $a = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ dan misal dipilih $a = 0$, maka $b = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ dan misal dipilih $b = 1$, maka $c = \{2, 3, 4, \dots, 9\}$, maka ada sebanyak $10 \times 9 \times 8 = 720$ buah kamar

  Perhatikan tabel berikut:

Jenis nomor kamar	Tamu			Tamu			Tamu		
	Ditukar 2 digitnya	Ada	Tidak	Ditukar 2 digitnya	Ada	Tidak	Ditukar 2 digitnya	Ada	Tidak
abc	⧎	√							
acb			√			√			√
bac			√			√			√
bca				⧎	√				
cab							⧎	√	
cba			√			√			√

  Berarti, ada tiga kamar yang terisi tamu, yaitu abc, bca, cab.
  Sehingga ada $\frac{1}{2} \times 720 = 360$ kamar yang berisi tamu.

Jadi, maksimal banyak kamar yang berisi tamu adalah $10 + 90 + 360 = 460$ buah kamar.

11. Fungsi f memetakan himpunan bilangan bulat tak negatif. Fungsi tersebut memenuhi $f(1) = 0$ dan untuk setiap bilangan asli berbeda m, n dengan $m \mid n$, berlaku $f(m) < f(n)$. Jika diketahui $f(8!) = 11$, maka nilai dari $f(2016)$ adalah ....

    Pembahasan:
    Perhatikan bahwa untuk setiap bilangan asli berbeda m, n dengan $m \mid n$, maka berlaku $f(m) < f(n)$.

    Perhatikan, pandang bentuk $= a^p \times b^q$.
    Jika untuk setiap bilangan asli berbeda m, n dengan $m \mid n$, maka diperoleh
    $m_x = \{m_0, m_1, m_2, \dots, m_p, m_{p+1}, m_{p+2}, \dots m_{p+q-1}, m_{p+q}\}$, dimana:

    $m_0 = a^0 \times b^0$
    $m_1 = a^1 \times b^0$
    $m_2 = a^2 \times b^0$
    ...
    $m_p = a^p \times b^0$
    $m_{p+1} = a^p \times b^1$
    $m_{p+2} = a^p \times b^2$
    ...
    $m_{p+q-1} = a^p \times b^{q-1}$
    $m_{p+q} = a^p \times b^q$

    Sehingga apabila m diurutkan dari kecil ke besar diperoleh
    $$m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_p < m_{p+1} < m_{p+2} < \cdots < m_{p+q-1} < m_{p+q}$$

    Dan apabila x, y bilangan asli dimana $x < y$, maka $m_x \mid m_y$.
    Jadi, akan berlaku
    $$f(m_0) < f(m_1) < f(m_2) < \cdots < f(m_{p+q-1}) < f(m_{p+q})$$

    Nah, sekarang perhatikan bentuk faktorisasi prima dari 2016 adalah $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$
    Serta pandang bentuk faktorisasi prima dari 8! adalah $8! = 2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7$
    Juga pada soal diketahui $f(1) = 0$ dan $f(8!) = 11$

    Untuk $n = 8! = 2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7$, maka diperoleh salah satu alternatif susunan m_x, yaitu:

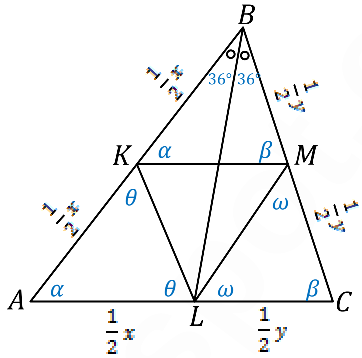
    $m_0 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
    $m_1 = 2^1 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
    $m_2 = 2^2 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
    $m_3 = 2^3 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
    $m_4 = 2^4 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
    $m_5 = 2^5 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
    $m_6 = 2^5 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0$
    $m_7 = 2^5 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^0$
    $m_8 = 2^5 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^1 = 2016$
    $m_9 = 2^5 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$
    $m_{10} = 2^6 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$
    $m_{11} = 2^7 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 8!$

    Dan karena $m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_{11}$ maka berlaku $f(m_0) < f(m_1) < f(m_2) < \cdots < f(m_{11})$.
    Perhatikan juga karena $f(m_0) = f(1) = 0$ dan $f(m_{11}) = f(8!) = 11$, artinya $f(m_x) = x$.

    Dari alternatif susunan m_x di atas maka dengan mudah dapat dilihat $f(2016) = f(m_8) = 8$.

12. Diberikan segitiga ABC dengan $AC = \frac{1}{2}(AB + BC)$. Misalkan K dan M berturut-turut titik tengah AB dan BC. Titik L terletak pada sisi AC sehingga BL adalah garis bagi sudut ABC. Jika $\angle ABC = 72°$, maka besarnya sudut KLM sama dengan ....

Pembahasan:
Perhatikan ilustrasi segitiga pada gambar di samping!



Misal,
$AB = x;\ BC = y;\ \angle BAC = \alpha;\ \angle BCA = \beta$

Karena garis BL membagi sudut B sama besar, sehingga
$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow AL = LC\left(\frac{x}{y}\right)$$

Padahal $AC = \frac{1}{2}(AB + BC) \Rightarrow AC = \frac{1}{2}(x + y)$

Sehingga,
$$\begin{aligned} AC = AL + LC \Rightarrow \frac{1}{2}(x+y) &= LC\left(\frac{x}{y}\right) + LC \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+y) &= LC\frac{(x+y)}{y} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}y &= LC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AL = LC\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow AL &= \frac{1}{2}y\left(\frac{x}{y}\right) \\ \Leftrightarrow AL &= \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Padalah K dan M merupakan titik tengah berturut-turut sisi AB dan BC, sehingga
$$AK = BK = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AK = BK = \frac{1}{2}x = AL$$
$$BM = CM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BM = CM = \frac{1}{2}y = LC$$

Sehingga, karena $AL = AK$, maka ΔALK adalah segitiga sama kaki.
Misal $\angle ALK = \angle AKL = \theta$
Diperoleh $\alpha + 2\theta = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 2\theta$

Begitu pula karena $LC = CM$, maka ΔCLM adalah segitiga sama kaki.
Misal $\angle LMC = \angle LCM = \omega$
Diperoleh $\beta + 2\omega = 180° \Rightarrow \beta = 180° - 2\omega$

Perhatikan ΔABC, berlaku
$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 72° = 180° \Rightarrow \qquad \alpha + \beta &= 108° \\ \Leftrightarrow (180° - 2\theta) + (180° - 2\omega) &= 108° \\ \Leftrightarrow \qquad 360° - 2(\theta + \omega) &= 108° \\ \Leftrightarrow \qquad 360° - 108° &= 2(\theta + \omega) \\ \Leftrightarrow \qquad 252° &= 2(\theta + \omega) \\ \Leftrightarrow \qquad 126° &= \theta + \omega \end{aligned}$$

Jadi, $\angle KLM$ dapat ditemukan dengan memandang bahwa ALC adalah suatu garis lurus.
$$\begin{aligned} \angle ALK + \angle KLM + \angle MLC = 180° \Rightarrow\ \theta + \angle KLM + \omega &= 180° \\ \Leftrightarrow\ \angle KLM + 126° &= 180° \\ \Leftrightarrow\ \angle KLM &= 180° - 126° \\ \Leftrightarrow\ \angle KLM &= 54° \end{aligned}$$

Komentar terhadap soal:
Perhatikan, aturan kosinus pada ΔABC:

$$
\begin{aligned}
& AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{1}{2}(x+y)\right)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \angle ABC \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}xy = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \angle ABC \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2) - 2xy \cdot \cos \angle ABC - \frac{1}{2}xy \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}xy(4 \cos \angle ABC + 1) = \frac{3}{4}(x^2 + y^2) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2}{3}xy(4 \cos \angle ABC + 1) = (x^2 + y^2)
\end{aligned}
$$

Mengingat, dari $AM - GM$ diperoleh $x^2 + y^2 \geq 2xy$, maka

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow & \frac{2}{3}xy(4 \cos \angle ABC + 1) \geq 2xy \\
\Leftrightarrow \quad & 4 \cos \angle ABC^\circ + 1 \geq 3 \\
\Leftrightarrow \quad & 4 \cos \angle ABC^\circ \geq 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \cos \angle ABC^\circ \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Sehingga,

$$\cos \angle ABC^\circ \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \angle ABC \leq 60^\circ$$

Padahal $0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$.
Sehingga, untuk $0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$ soal di atas akan menjadi benar dan nyata apabila memenuhi $0 < \angle ABC \leq 60^\circ$.

Faktanya, pada soal $\angle ABC > 60^\circ$, yaitu 72°.

Kesimpulannya soal tersebut memang dapat dikerjakan secara benar dengan konsep dan mendapatkan hasil yang seolah-olah benar. Namun, apabila dicermati lebih lanjut maka bentuk segitiganya tidak dapat digambarkan....

13. Misalkan $P(x)$ suatu polinom berderajat 4 yang memiliki nilai maksimum 2018 di $x = 0$ dan $x = 2$. Jika $P(1) = 2017$, maka nilai $P(3)$ adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, nilai maksimum $P(x)$ di $x = 0$ dan $x = 2$, artinya $P'(0) = 0$ dan $P'(2) = 0$.
Karena $P(x)$ suatu polinom berderajat 4, maka $P'(x)$ adalah suatu polinom berderajat 3 yang memuat faktor x dan $(x-2)$, serta satu faktor yang lain, misal $(x-p)$.
Jadi, $P'(x) = a\big(x(x-2)(x-p)\big) = a(x^3 - (p+2)x^2 + 2px)$

$P(x)$ dapat ditentukan dengan menggunakan anti-turunan dari $P'(x)$, sehingga

$$\begin{aligned} P(x) &= \int P'(x)\ dx \\ &= \int a(x^3 - (p+2)x^2 + 2px)\,dx \\ &= a\int (x^3 - (p+2)x^2 + 2px)\,dx \\ &= a\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(p+2)x^3 + px^2\right) + c \end{aligned}$$

Padahal $P(x)$ memiliki nilai maksimum 2018 di $x = 0$, artinya $P(0) = 2018$, maka

$$\begin{aligned} P(0) = 2018 \Rightarrow\ & a\left(\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{3}(p+2)(0)^3 + p(0)^2\right) + c = 2018 \\ \Leftrightarrow\ & c = 2018 \end{aligned}$$

Sehingga, karena $c = 2018$ maka diperoleh $P(x) = a\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(p+2)x^3 + px^2\right) + 2018$

$P(x)$ juga memiliki nilai maksimum 2018 di $x = 2$, artinya $P(2) = 2018$, maka

$$\begin{aligned} P(2) = 2018 \Rightarrow\ & a\left(\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{3}(p+2)(2)^3 + p(2)^2\right) + 2018 = 2018 \\ \Leftrightarrow\ & a\left(4 - \frac{8}{3}(p+2) + 4p\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4 - \frac{8}{3}p - \frac{16}{3} + 4p = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 12 - 8p - 16 + 12p = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4p - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4p = 4 \\ \Leftrightarrow\ & p = 1 \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh $P(x) = a\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right) + 2018$
Maka, nilai a dapat ditentukan menggunakan $P(1) = 2017$

$$\begin{aligned} P(1) = 2017 \Rightarrow\ & a\left(\frac{1}{4}(1)^4 - (1)^3 + (1)^2\right) + 2018 = 2017 \\ \Leftrightarrow\ & a\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = 2017 - 2018 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4}a = -1 \\ \Leftrightarrow\ & a = -4 \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh $P(x) = -4\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right) + 2018 = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2018$
Jadi,

$$\begin{aligned} P(3) &= -(3)^4 + 4(3)^3 - 4(3)^2 + 2018 \\ &= -81 + 108 - 36 + 2018 \\ &= 2009 \end{aligned}$$

Cara Alternatif:
Misal, $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
maka, $P'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Karena $P'(0) = 0$, maka $d = 0$.
Karena $P'(2) = 0$, maka $32a + 12b + 4c + 0 = 0 \Rightarrow 8a + 3b + c = 0$.........(1)

Karena $P(0) = 2018$, maka $e = 2018$
Karena $P(2) = 2018$, maka $16a + 8b + 4c + 0 + 2018 = 2018 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$.......(2)
Karena $P(1) = 2017$, maka $a + b + c + 0 + 2018 = 2017 \Rightarrow a + b + c = -1$.......(3)

Sehingga, dari eliminasi c pada persamaan (1) dan (2), diperoleh
$4a + b = 0$.......(4)

Dari eliminasi c pada persamaan (2) dan (3) diperoleh
$3a + b = 1$.......(5)

Dari eliminasi b pada persamaan (4) dan (5) diperoleh
$a = -1$, sehingga $b = 4$

Substitusi $a = -1$ dan $b = 4$ ke persamaan (3) diperoleh

$$\begin{aligned} a + b + c = -1 \Rightarrow\ (-1) + 4 + c &= -1 \\ \Leftrightarrow \qquad 3 + c &= -1 \\ \Leftrightarrow \qquad c &= -4 \end{aligned}$$

Sehingga, karena $a = -1, b = 4,\ c = -4, d = 0$, dan $e = 2018$, diperoleh:
$P(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2018$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } P(3) &= -(3)^4 + 4(3)^3 - 4(3)^2 + 2018 \\ &= -81 + 108 - 36 + 2018 \\ &= 2009 \end{aligned}$$

TRIK SUPERKILAT:
Karena grafik dari fungsi pangkat 4 simetris, maka apabila diperhatikan, ambil dua titik puncak $P(0) = 0$ dan $P(2) = 0$, maka fungsi tersebut adalah $f(x) = a(x^2(x-2)^2)$, sehingga karena nilai $P(0) = 2018$ dan $P(2) = 2018$, maka fungsi tersebut adalah $f(x) = a(x^2(x-2)^2) + 2018$.

Uji titik (1,2017), maka diperoleh:
$a + 2018 = 2017 \Rightarrow a = -1$

Sehingga fungsi tersebut adalah $f(x) = -1(x^2(x-2)^2) + 2018$.

Jadi, $f(3) = -1(3^2(3-2)^2) + 2018 = -9 + 2018 = 2009$.

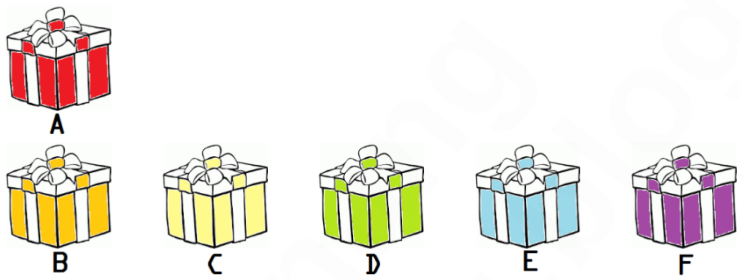
14. Terdapat 6 anak, A, B, C, D, E, dan F, akan saling bertukar kado. Tidak ada yang menerima kadonya sendiri, dan kado dari A diberikan kepada B. Banyaknya cara membagikan kado dengan cara demikian adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, mula-mula setiap anak membawa kadonya sendiri-sendiri

A	B	C	D	E	F

Kado dari A pasti diberikan kepada B, sehingga ilustrasinya sebagai berikut

A	B	C	D	E	F



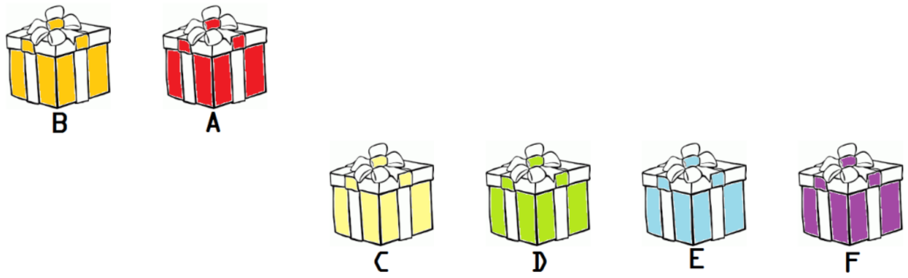
Sehingga, sekarang B harus memberikan kadonya ke salah satu dari 5 anak yang lain.

Disini ada dua pilihan, yaitu
- B memberikan kado ke A
- B memberikan kado ke selain A

Perhatikan ilustrasi berikut:

Kasus 1.1
Misal B memberikan kadonya ke A, maka ilustrasinya sebagai berikut

A	B	C	D	E	F



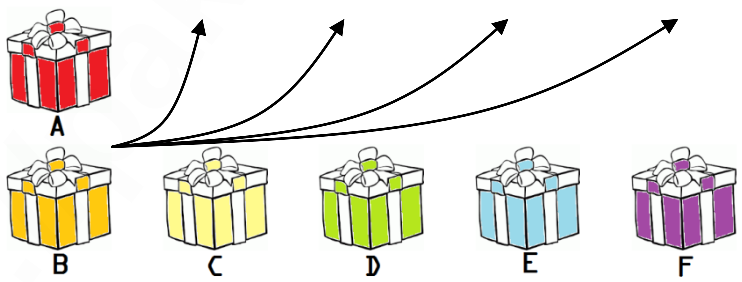
Artinya kita akan mengacak 4 anak agar tidak mendapat kadonya sendiri.

Perhatikan,
- banyak keseluruhan permutasi yang mungkin adalah 4!.
- apabila ada 1 orang yang dibiarkan tetap, maka ada ${}_4C_1$ cara memilih orang dan permutasi yang mungkin adalah sebanyak 3!, sehingga banyak kemungkinan adalah ${}_4C_1 \cdot 3!$.
- apabila ada 2 orang yang dibiarkan tetap, maka ada ${}_4C_2$ cara memilih orang dan permutasi yang mungkin adalah sebanyak 2!, sehingga banyak kemungkinan adalah ${}_4C_2 \cdot 2!$.
- apabila ada 3 orang yang dibiarkan tetap, maka ada ${}_4C_3$ cara memilih orang dan permutasi yang mungkin adalah sebanyak 1!, sehingga banyak kemungkinan adalah ${}_4C_3 \cdot 1!$.
- apabila ada 4 orang yang dibiarkan tetap, maka ada ${}_4C_4$ cara memilih orang dan permutasi yang mungkin adalah sebanyak 0!, sehingga banyak kemungkinan adalah ${}_4C_4 \cdot 0!$

Jadi, menggunakan prinsip inklusi-eksklusi himpunan diperoleh banyak kemungkinannya adalah:
$$\begin{aligned} n(1.1) &= 4! - {}_4C_1 \cdot 3! + {}_4C_2 \cdot 2! - {}_4C_3 \cdot 1! + {}_4C_4 \cdot 0! \\ &= 24 - 24 + 12 - 4 + 1 \\ &= 9 \text{ cara} \end{aligned}$$

Kasus 1.2
Misal B memberikan kadonya ke selain A, maka ilustrasinya sebagai berikut

A	B	C	D	E	F



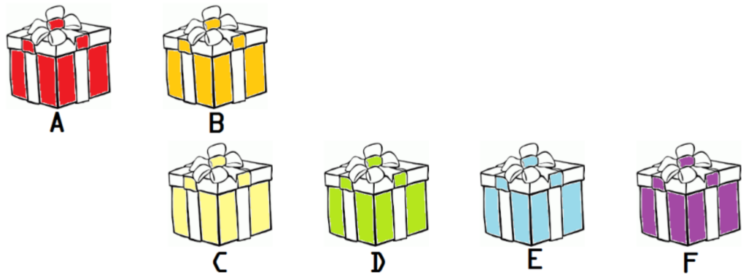
Artinya, kita akan memilih 4 kemungkinan B memberikan kado ke C, D, E atau F?

Jadi, $n(1.2) = 4$ cara

Setelah B memberikan kado ke salah satu dari 4 orang tersebut, misalkan kado B diberikan ke C.

Sehingga ilustrasinya menjadi berikut

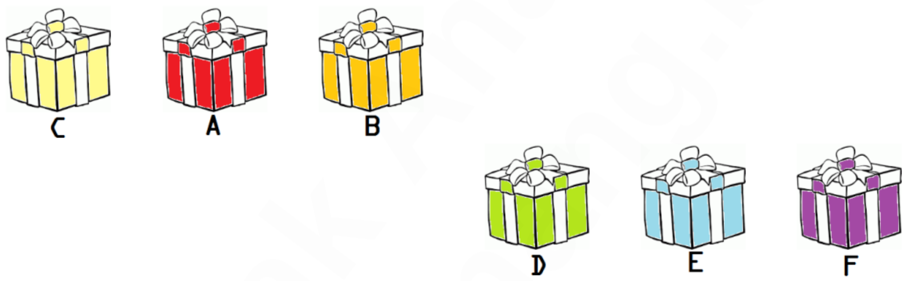
A	B	C	D	E	F



Maka disini akan muncul dua kasus lagi.
Disini ada dua pilihan, yaitu
- C memberikan kado ke A
- C memberikan kado ke selain A

Kasus 2.1
Misal C memberikan kadonya ke A, maka ilustrasinya sebagai berikut

A	B	C	D	E	F



Artinya, kita akan mengacak 3 anak agar tidak mendapat kadonya sendiri.

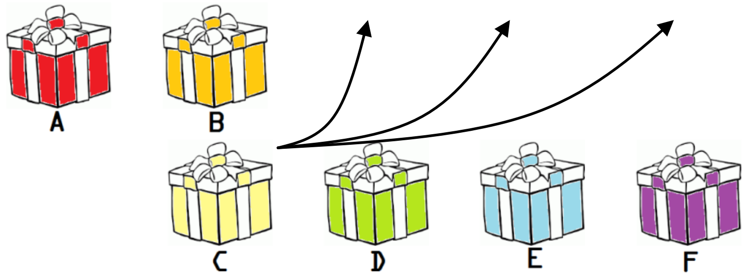
Perhatikan,
- banyak keseluruhan permutasi yang mungkin adalah3!.
- apabila ada 1 orang yang dibiarkan tetap, maka ada ${}_3C_1$ cara memilih orang dan permutasi yang mungkin adalah sebanyak 2!, sehingga banyak kemungkinan adalah ${}_3C_1 \cdot 2!$.
- apabila ada 2 orang yang dibiarkan tetap, maka ada ${}_3C_2$ cara memilih orang dan permutasi yang mungkin adalah sebanyak 1!, sehingga banyak kemungkinan adalah ${}_3C_2 \cdot 1!$.
- apabila ada 3 orang yang dibiarkan tetap, maka ada ${}_3C_3$ cara memilih orang dan permutasi yang mungkin adalah sebanyak 0!, sehingga banyak kemungkinan adalah ${}_3C_3 \cdot 0!$.

Jadi, menggunakan prinsip inklusi-eksklusi himpunan diperoleh banyak kemungkinannya adalah:

$$\begin{aligned} n(2.1) &= 3! - {}_3C_1 \cdot 2! + {}_3C_2 \cdot 1! - {}_3C_3 \cdot 0! \\ &= 6 - 6 + 3 - 1 \\ &= 2 \text{ cara} \end{aligned}$$

Kasus 2.2
Misal C memberikan kadonya ke selain A, maka ilustrasinya sebagai berikut

A	B	C	D	E	F



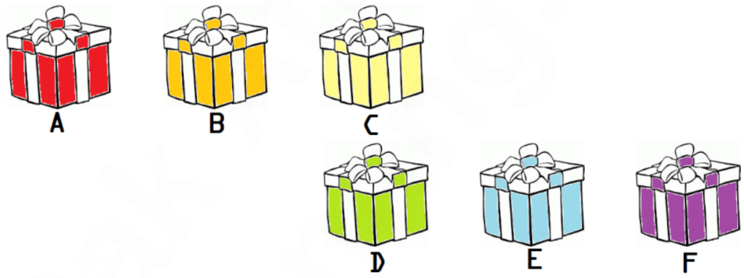
Artinya, kita akan memilih 3 kemungkinan C memberikan kado ke D, E atau F?

Jadi, $n(2.2) = 3$ cara

Setelah C memberikan kado ke salah satu dari 3 orang tersebut, misalkan kado C diberikan ke D.

Sehingga ilustrasinya menjadi berikut

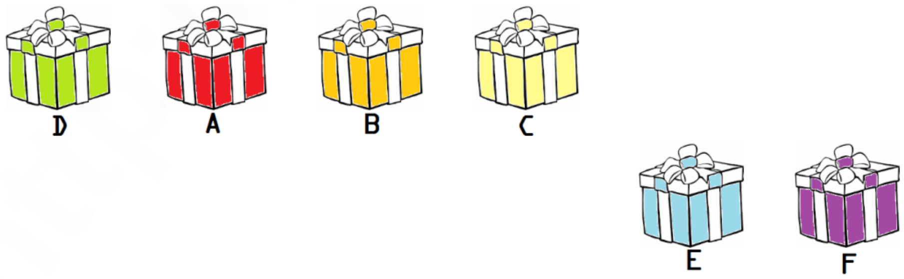
A	B	C	D	E	F



Maka disini akan muncul dua kasus lagi.
Disini ada dua pilihan, yaitu
- D memberikan kado ke A
- D memberikan kado ke selain A

Kasus 3.1
Misal D memberikan kadonya ke A, maka ilustrasinya sebagai berikut

A	B	C	D	E	F



Artinya, kita akan mengacak 2 anak agar tidak mendapat kadonya sendiri.

Perhatikan,
- banyak keseluruhan permutasi yang mungkin adalah2!.
- apabila ada 1 orang yang dibiarkan tetap, maka ada ${}_2C_1$ cara memilih orang dan permutasi yang mungkin adalah sebanyak 1!, sehingga banyak kemungkinan adalah ${}_2C_1 \cdot 1!$.
- apabila ada 2 orang yang dibiarkan tetap, maka ada ${}_3C_2$ cara memilih orang dan permutasi yang mungkin adalah sebanyak 0!, sehingga banyak kemungkinan adalah ${}_2C_2 \cdot 0!$.

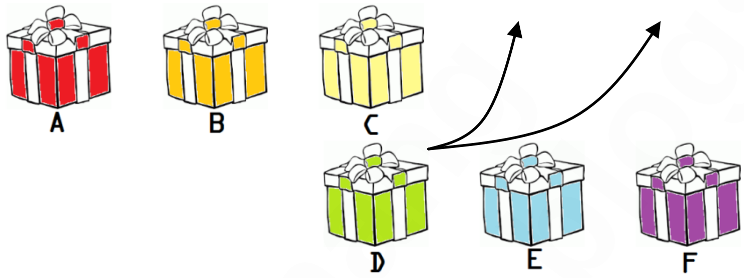
Jadi, menggunakan prinsip inklusi-eksklusi himpunan diperoleh banyak kemungkinannya adalah:

$$\begin{aligned} n(3.1) &= 2! - {}_2C_1 \cdot 1! + {}_2C_2 \cdot 0! \\ &= 2 - 2 + 1 \\ &= 1 \text{ cara} \end{aligned}$$

Kasus 3.2

Misal D memberikan kadonya ke selain A, maka ilustrasinya sebagai berikut

A	B	C	D	E	F



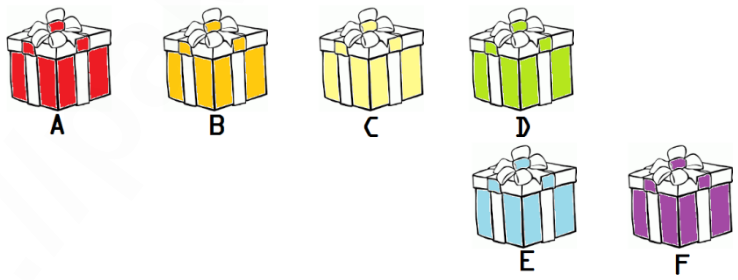
Artinya, kita akan memilih 2 kemungkinan D memberikan kado ke E atau F?

Jadi, $n(3.2) = 2$ cara

Setelah D memberikan kado ke salah satu dari 2 orang tersebut, misalkan kado D diberikan ke E.

Sehingga ilustrasinya menjadi berikut

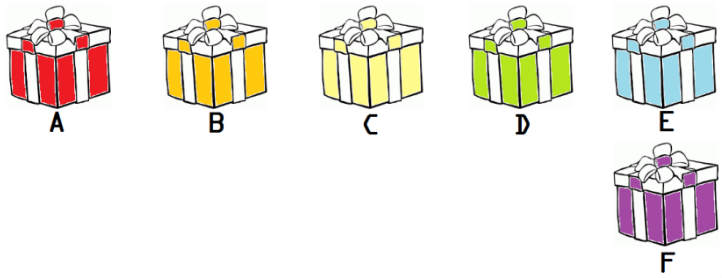
A	B	C	D	E	F



Maka disini hanya akan muncul satu kasus saja, yaitu E memberikan kado ke F.

Kasus 4.1
Maka E pasti memberikan kadonya ke F.
Mengapa?
Karena tidak mungkin E memberikan kado ke A, karena F akan mendapatkan kadonya sendiri.
Sehingga ilustrasinya sebagai berikut

A	B	C	D	E	F

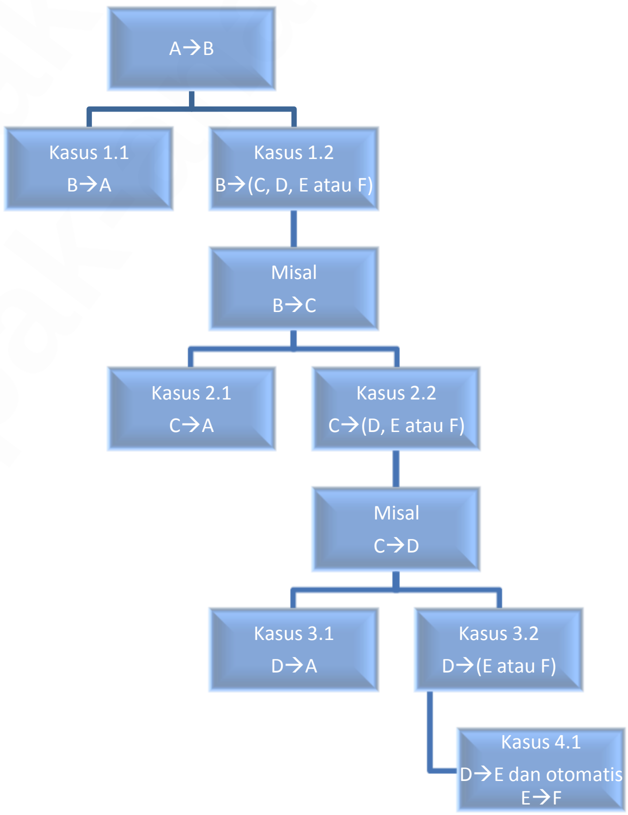


Dan otomatis, F akan member kadonya ke A.
Sehingga ilustrasinya sebagai berikut

A	B	C	D	E	F

Jadi, $n(4.1) = 1$ cara

Secara sederhana berikut bagannya dari awal sampai akhir proses pengacakan ini.



Berarti sampai disini kasus sudah berhenti dan mari kita menghitung ulang seluruh kemungkinan yang terjadi, yaitu:

$$
\begin{aligned}
n &= n(1.1) + n(1.2) \cdot \Big[n(2.1) + n(2.2) \cdot \big[n(3.1) + n(3.2) \cdot [n(4.1)]\big]\Big] \\
&= 9 + 4\Big(2 + 3\big(1 + 2(1)\big)\Big) \\
&= 9 + 4\big(2 + 3(1 + 2)\big) \\
&= 9 + 4\big(2 + 3(3)\big) \\
&= 9 + 4(2 + 9) \\
&= 9 + 4(11) \\
&= 9 + 44 \\
&= 53
\end{aligned}
$$

Jadi, banyaknya cara membagikan kado adalah 53 cara.

Cara Alternatif:
Dengan cara manual kita dapat mencari banyaknya cara membagi kado.
Tanpa mengikutkan B yang sudah pasti mendapatkan kado dari A, maka hasil pengacakan yang mungkin dapat dilihat seperti berikut:

Kemungkinan pertama, B memberikan kado ke A, sehingga terjadi pengacakan pada keempat orang lain yaitu C, D, E, dan F sehingga menghasilkan bentuk sebagai berikut:

24 permutasi yang mungkin dari CDEF adalah sebagai berikut:

CDEF	DCEF	ECDF	FCDE
CDFE	DCFE	ECFD	FCED
CEDF	DECF	EDCF	FDCE
CEFD	DEFC	EDFC	FDEC
CFDE	DFCE	EFCD	FECD
CFED	DFEC	EFDC	FEDC

Maka diperoleh 9 buah kemungkinan pengacakan yang diperbolehkan yaitu yang bertanda biru.

Kemungkinan kedua, B memberikan kado ke selain A, berarti ada 4 kemungkinan, yaitu memberikan kado tersebut ke C, D, E atau F.
Anggap B memberikan kado ke C, berarti ada 24 permutasi yang mungkin dari CDEF yang akan diletakkan pada ADEF, yaitu:

CDEF	DCEF	ECDF	FCDE
CDFE	DCFE	ECFD	FCED
CEDF	DECF	EDCF	FDCE
CEFD	DEFC	EDFC	FDEC
CFDE	DFCE	EFCD	FECD
CFED	DFEC	EFDC	FEDC

Maka diperoleh 11 buah kemungkinan pengacakan yang diperbolehkan yaitu yang bertanda biru.
Sehingga, banyaknya kemungkinan adalah $4 \times 11 = 44$ cara.

Jadi banyak kemungkinan seluruhnya adalah $9 + 44 = 53$ cara.

TRIK SUPERKILAT:
Banyak cara membagikan kado adalah derangement (pengacakan) dengan ada tempat terlarang. Dengan prinsip inklusi-eksklusi dapat dihitung sebagai

$$\begin{aligned} n &= 5! - {}_4C_1 \cdot 4! + {}_4C_2 \cdot 3! - {}_4C_3 \cdot 2! + {}_4C_4 \cdot 1! \\ &= 120 - 4(24) + 6(6) - 4(2) + 1(1) \\ &= 120 - 96 + 36 - 8 + 1 \\ &= 53 \text{ cara.} \end{aligned}$$

15. Bilangan asli terbesar n sehingga $n!$ dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian dari $n-4$ bilangan asli berurutan adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan, $n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n \text{ buah faktor}}$

Ide untuk menjadikan $n!$ menjadi $n-a$ perkalian bilangan asli berurutan adalah dengan memotong beberapa perkalian bilangan asli berurutan pertama.

Pandang bahwa $n!$ adalah perkalian dari $n-a$ bilangan asli berurutan, maka bilangan terbesar n dapat diperoleh dengan memotong $a+1$ buah perkalian bilangan asli pertama, yaitu

$$n! = \left\{ \underbrace{\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots}_{n-a-1 \text{ buah faktor}} \cdot \underbrace{\ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}_{a \text{ buah faktor}} \cdot 1}_{n \text{ buah faktor}} \right\} = \underbrace{x \cdot \left\{ \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots}_{n-a-1 \text{ buah faktor}} \right\}}_{n-a \text{ buah faktor}}$$

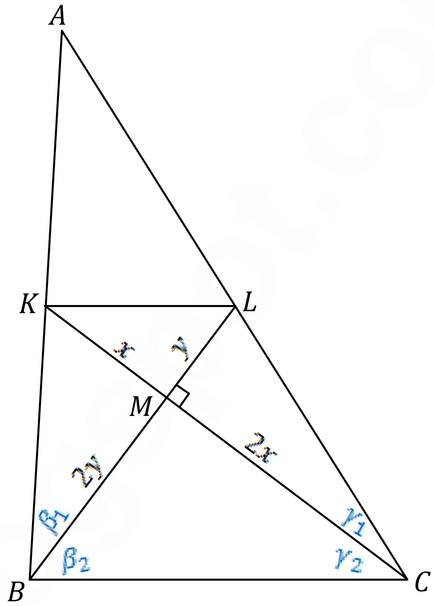
dimana, x adalah hasil perkalian dari beberapa perkalian bilangan asli pertama yang terpotong.

Sehingga, karena $119! = \underbrace{119 \cdot 118 \cdot 117 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{=120}}_{119 \text{ buah faktor}} = \underbrace{120 \cdot 119 \cdot 118 \cdot \ldots \cdot 6}_{115 \text{ buah faktor}}$

Jadi, diperoleh bahwa bilangan asli terbesar n sehingga $n!$ dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian dari $n-4$ bilangan asli berurutan adalah 119.

16. Pada segitiga ABC titik K dan L berturut-turut adalah titik tengah AB dan AC. Jika CK dan BL saling tegak lurus, maka nilai minimum $cotB + cotC$ adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan gambar di samping.



Karena K dan L berturut-turut titik tengah AB dan AC, maka
$$\frac{KL}{BC}=\frac{AK}{AB}\Rightarrow\frac{KL}{BC}=\frac{1}{2}$$

Perhatikan, ΔKLM dan ΔBCM sebangun dan $\frac{KL}{BC}=\frac{1}{2}$, maka
$$\frac{KM}{MC}=\frac{LM}{MB}=\frac{KL}{CB}=\frac{1}{2}$$

Misal,
$KM=x$
$LM=y$
maka,
$$\frac{KM}{MC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x}{MC}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow MC=2x \quad \text{dan} \quad \frac{LM}{MB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{y}{MB}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow MB=2y$$

Perhatikan, ΔKBC, maka diperoleh
misal, $\angle KBC=\beta$; $\angle KBM=\beta_1$; $\angle MBC=\beta_2$
maka
$$\begin{aligned}\cot\beta&=\cot(\beta_1+\beta_2)\\&=\frac{1}{\tan(\beta_1+\beta_2)}\\&=\frac{1-\tan\beta_1\cdot\tan\beta_2}{\tan\beta_1+\tan\beta_2}\\&=\frac{1-\frac{x}{2y}\cdot\frac{2x}{2y}}{\frac{x}{2y}+\frac{2x}{2y}}\\&=\frac{2y^2-x^2}{3xy}\end{aligned}$$

Perhatikan, ΔBCL, maka diperoleh
misal, $\angle BCL=\gamma$; $\angle BCM=\gamma_1$; $\angle MCL=\gamma_2$
maka
$$\begin{aligned}\cot\gamma&=\cot(\gamma_1+\gamma_2)\\&=\frac{1}{\tan(\gamma_1+\gamma_2)}\\&=\frac{1-\tan\gamma_1\cdot\tan\gamma_2}{\tan\gamma_1+\tan\gamma_2}\\&=\frac{1-\frac{y}{2x}\cdot\frac{2y}{2x}}{\frac{y}{2x}+\frac{2y}{2x}}\\&=\frac{2x^2-y^2}{3xy}\end{aligned}$$

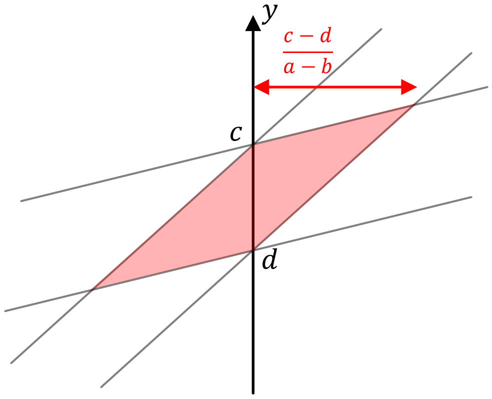
Sehingga,
$$\cot\beta+\cot\gamma=\frac{2y^2-x^2}{3xy}+\frac{2x^2-y^2}{3xy}=\frac{x^2+y^2}{3xy}$$

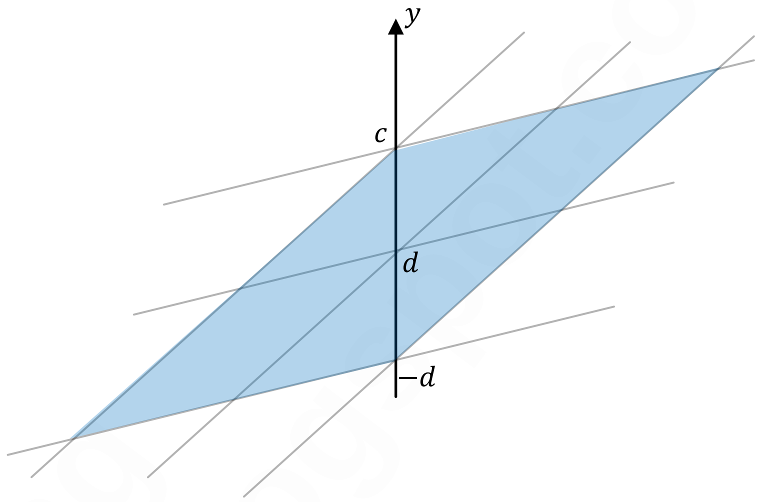
Mengingat, dari $AM-GM$ diperoleh $x^2+y^2\geq 2xy$
$$x^2+y^2\geq 2xy\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{2xy}\geq 1 \quad \left(\text{kalikan kedua ruas dengan}\,\frac{2}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2}{3xy}\geq\frac{2}{3}$$

Jadi, nilai minimum $\cot\beta+\cot\gamma=\frac{2}{3}$

17. Misalkan a, b, c, dan d bilangan-bilangan bulat positif. Jajargenjang yang dibatasi oleh garis-garis $y = ax + c$, $y = ax + d$, $y = bx + c$, dan $y = bx + d$ mempunyai luas 18. Jajargenjang yang dibatasi oleh garis-garis $y = ax + c$, $y = ax - d$, $y = bx + c$, dan $y = bx - d$ mempunyai luas 72. Nilai terkecil yang mungkin untuk $a + b + c + d$ adalah ....

Pembahasan:





Secara grafik, kita dapat melihat dengan mudah bahwa titik potong dengan sumbu Y untuk keempat garis adalah:
1. Untuk jajargenjang dengan luas 18, adalah di $(0, c)$ dan $(0, d)$.
2. Untuk jajargenjang dengan luas 72, adalah di $(0, c)$ dan $(0, -d)$.

Perhatikan bahwa luas jajargenjang menjadi 4 kali lebih besar, maka dengan prinsip kesebangunan dan perbandingan, maka ukuran panjang sisi jajargenjang menjadi 2 kali lebih besar dari semula.

Sehingga,
Perhatikan jarak $(0, c)$ ke $(0, d)$ adalah $(c - d)$.
Perhatikan jarak $(0, c)$ ke $(0, -d)$ adalah $(c + d)$.

Padahal, ukuran sisi jajargenjang menjadi 2 kali lebih besar dari semula, sehingga
$c + d = 2(c - d) \Rightarrow c = 3d$

Secara grafik, kita juga dapat melihat dengan mudah bahwa jajargenjang dipisahkan menjadi dua bagian sama besar oleh sumbu Y.
Perhatikan luas bagian sebelah kanan sumbu Y adalah 9, sehingga:

$$\begin{aligned} y &= ax + d \\ y &= bx + c \\ \hline 0 &= (a - b)x + (d - c) \\ \Leftrightarrow \frac{c - d}{a - b} &= x \end{aligned}$$

Jadi, $t = \dfrac{c - d}{a - b}$

Sehingga diperoleh, $L = \dfrac{1}{2}at \Rightarrow$

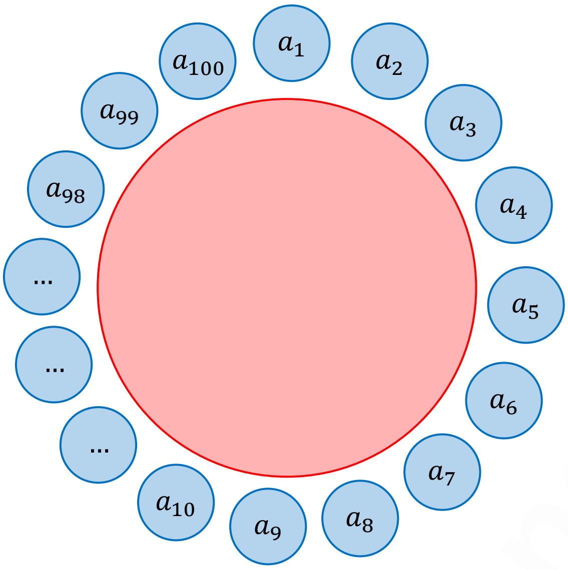
$$\begin{aligned} 9 &= \frac{1}{2}(c - d)\left(\frac{c - d}{a - b}\right) \\ \Leftrightarrow \quad 9 &= \frac{1}{2}2d\left(\frac{2d}{a - b}\right) \\ \Leftrightarrow \quad 9 &= \frac{2d^2}{a - b} \\ \Leftrightarrow 9(a - b) &= 2d^2 \end{aligned}$$

Perhatikan, bahwa $d^2 = 9 \Rightarrow d = 3$, sehingga dari hubungan $c = 3d$ juga dapat diperoleh $c = 9$.
Dan pandang bentuk $a - b = 2$ dengan a, b bilangan positif, maka nilai a, b terkecil adalah masing-masing $a = 3$ dan $b = 1$

Sehingga, diperoleh penyelesaian $\min(a, b, c, d) = (3,1,9,3)$.
Jadi, nilai minimum $a + b + c + d = 3 + 1 + 9 + 3 = 16$.

18. Seratus bilangan bulat disusun mengelilingi lingkaran sedemikian sehingga (menurut arah jarum jam) setiap bilangan lebih besar daripada hasil penjumlahan dua bilangan sebelumnya. Maksimal banyaknya bilangan bulat positif yang terdapat pada lingkaran tersebut adalah ....

Pembahasan:



Perhatikan ilustrasi di atas.

Terdapat 100 buah bilangan bulat yang mengelilingi lingkaran, sedemikian hingga menurut arah jarum jam, setiap bilangan lebih besar dari hasil penjumlahan dua bilangan seterusnya.

Sehingga dapat dipahami bahwa pada susunan bilangan melingkar tersebut berlaku:

$$\begin{aligned} a_1 &> a_{99} + a_{100} \\ a_2 &> a_{100} + a_1 \\ a_3 &> a_1 + a_2 \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ a_{99} &> a_{97} + a_{98} \\ a_{100} &> a_{98} + a_{99} \end{aligned} \quad +$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} > 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}) \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} < 0$$

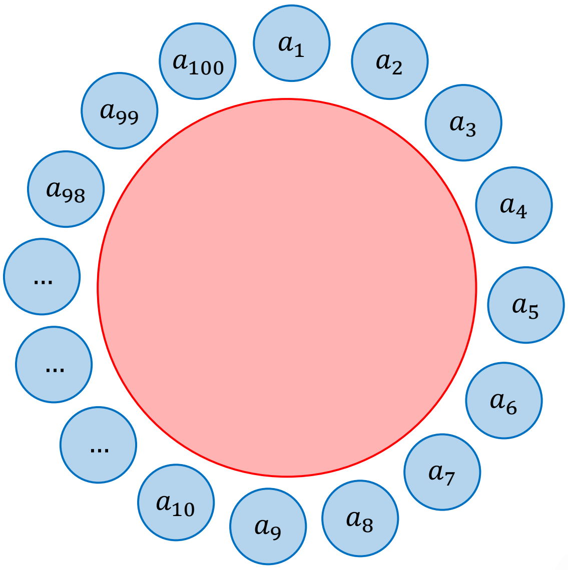
Perhatikan pernyataan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} < 0$
Artinya, paling tidak ada satu buah nilai diantara $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ yang bernilai negatif.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a_1 < 0$, perhatikan bahwa $a_1 > a_{99} + a_{100}$ berarti paling tidak ada satu nilai a yang negatif diantara a_{99} atau a_{100}.
Misalkan juga $a_{100} < 0$, maka akibatnya paling tidak juga ada satu nilai a yang negatif diantara a_{98} atau a_{99}. Agar bilangan negatif minimum, maka $a_{98} < 0$.
Proses tersebut berulang sampai $a_2 < 0$.

Sehingga, diperoleh $a_1, a_2, a_4, a_6, \dots, a_{100} < 0$ dan $a_3, a_5, a_7, a_9, \dots, a_{99} > 0$.

Jadi, banyaknya bilangan positif ada sebanyak 49 buah.

Cara Alternatif 1:



Perhatikan ilustrasi di atas.

Dan ingat sifat barisan Fibonacci, yang nilai sukunya sama dengan jumlah dua suku sebelumnya. Padahal di soal ini nilai suku lebih dari jumlah suku sebelumnya.

Barisan Fibonacci, misalkan saja 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... adalah barisan yang monoton naik. Artinya, nilainya akan terus menerus membesar. Padahal di soal ini, bilangan tersebut disusun melingkar, sehingga nilai paling ujung di akhir barisan akan bertemu dengan nilai di awal barisan. Jelas apabila barisan tersebut monoton naik, ataupun monoton turun tidak mungkin terpilih sebagai barisan yang dimaksudkan pada soal.

Sehingga pola barisan pada soal seharusnya adalah bertanda selang-seling. Positif, negatif, positif, negatif. Dan kita pilih suku positifnya adalah bilangan bulat positif terkecil, yaitu 1.

Misal barisan tersebut adalah
$-1001, 1, -999, 1, -997, 1, -995, \dots$

Sehingga diperoleh $U_2 = U_4 = U_6 = \cdots = U_{98} = 1$ sedangkan $U_{2n-1} = -1001 + (n-1)2$.
Jadi, diperoleh
$U_{97} = -905$
$U_{98} = 1$
$U_{99} = -903$
$U_{100} = ?$
$U_1 = -1001$
$U_2 = 1$

Pertanyaannya kini adalah, "Apakah U_{100} juga bernilai 1?"
Agar berlaku $U_{100} > U_{98} + U_{99}, U_1 > U_{99} + U_{100}$ dan $U_2 > U_{100} + U_1$ maka
$$U_{100} > 1 - 903 \Rightarrow U_{100} > -902$$
$$-1001 > -903 + U_{100} \Rightarrow U_{100} < -7$$
$$1 > U_{100} - 1001 \Rightarrow U_{100} < 1002$$
Jadi, dari ketiga pertidaksamaan tersebut, jelas sekali bahwa $U_{100} < 0$.

Maka bilangan positif yang mungkin $U_2 = U_4 = U_6 = \cdots = U_{98} = 1$ yaitu sebanyak 49 buah.

19. Untuk sebarang bilangan asli n, misalkan $S(n)$ adalah jumlah digit-digit dari n dalam penulisan desimal. Jika $S(n) = 5$, maka nilai maksimum dari $S(n^5)$ adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan,
Misal, $n = 10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e$, maka untuk semua a, b, c, d, e bilangan bulat non negatif jumlah digit-digit dari n adalah 5.

Contohnya,
Apabila $a = 1, b = 2, c = 0, d = 1, e = 3$, maka diperoleh:
$n = 10^1 + 10^2 + 10^0 + 10^1 + 10^3 = 10 + 100 + 1 + 10 + 1000 = 1121$
Sehingga, jumlah digit-digit dari 1121 adalah $1 + 1 + 2 + 1 = 5$.
Terbukti, $S(n) = 5$.

Jadi diperoleh bentuk $n^5 = \left(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e\right)^5$ yang apabila dijabarkan akan menjadi,

$$\begin{aligned} n^5 &= (10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)^5 \\ &= k_1 \underbrace{(10^{5a} + 10^{5b} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_1 \text{ suku}} + k_2 \underbrace{(10^{4a+b} + 10^{4a+c} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_2 \text{ suku}} + k_3 \underbrace{(10^{3a+2b} + 10^{3a+2c} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_3 \text{ suku}} + k_4 \underbrace{(10^{3a+b+c} + 10^{3a+b+d} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_4 \text{ suku}} \\ &\quad + k_5 \underbrace{(10^{2a+2b+c} + 10^{2a+2b+d} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_5 \text{ suku}} + k_6 \underbrace{(10^{2a+b+c+d} + 10^{2a+b+c+e} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_6 \text{ suku}} + k_7 \underbrace{(10^{a+b+c+d+e})}_{\text{sebanyak } n_7 \text{ suku}} \end{aligned}$$

Sehingga, terdapat 7 bentuk suku yang dapat dikelompokkan berdasarkan pangkat dari 10^x, yaitu:

Cara penjumlahan menghasilkan bentuk 5	Bentuk 10^x	Koefisien	Banyak suku yang terbentuk
5	$10^{5a} + 10^{5b} + \cdots$	$k_1 = \frac{5!}{5!} = 1$	$n_1 = {}_5P_1 = 5$
$4 + 1$	$10^{4a+b} + 10^{4a+c} + \cdots$	$k_2 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$	$n_2 = {}_5P_2 = 20$
$3 + 2$	$10^{3a+2b} + 10^{3a+2c} + \cdots$	$k_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$	$n_3 = {}_5P_2 = 20$
$3 + 1 + 1$	$10^{3a+b+c} + 10^{3a+b+d} + \cdots$	$k_4 = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20$	$n_4 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$
$2 + 2 + 1$	$10^{2a+2b+c} + 10^{2a+2b+d} + \cdots$	$k_5 = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$	$n_5 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$
$2 + 1 + 1 + 1$	$10^{2a+b+c+d} + 10^{2a+b+c+e} + \cdots$	$k_6 = \frac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!} = 60$	$n_6 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_3 = 20$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$10^{a+b+c+d+e}$	$k_7 = \frac{5!}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 120$	$n_7 = {}_5C_5 = 1$

Keterangan:
Pandang bentuk $(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)^5$ sebagai perkalian berulang sebagai berikut:

$$\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ pertama}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ kedua}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ ketiga}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ keempat}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ kelima}$$

maka,

- Koefisien dari 10^{3a+b+c} adalah berapa banyak cara 10^{3a+b+c} dapat terbentuk dari perkalian berulang sebanyak lima kali, dengan mengacak bentuk $10^a \cdot 10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c$ yaitu

  $10^a \cdot 10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c$
  $10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^a \cdot 10^c$
  $10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c \cdot 10^a$
  dan seterusnya...

  Sehingga, koefisien dapat dihitung dengan konsep permutasi n unsur dengan ada unsur yang sama. Diperoleh koefisien dari 10^{3a+b+c} adalah $k_4 = \frac{5!}{3!1!1!} = 20$.
- Banyak suku yang terbentuk dari $3a + b + c, 3a + b + d$, dst adalah berapa banyak cara pangkat dari 10^x dapat terbentuk dari huruf-huruf yang tersedia yaitu a, b, c, d, e.

  Yaitu, memilih sebuah huruf secara permutasi untuk dipasangkan dengan 3, dan memilih dua huruf yang lain dipasangkan dengan 1 dari dua huruf yang tersisa secara kombinasi. Sehingga, $n_4 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$ buah suku.

Lalu pandang lagi, bahwa apabila dua digit dijumlahkan dan lebih dari 10, maka jumlah digit mereka akan lebih kecil dari jumlah kedua digit tersebut.

Perhatikan, sebagai contohnya misalkan saja ada dua bilangan yaitu 8 dan 9.
Maka, jumlah kedua digit adalah $8 + 9 = 17$. Sedangkan, apabila kedua digit dijumlahkan $8 + 9 = 17$, maka jumlah digit dari 17 adalah $1 + 7 = 8$. Jelas bahwa $8 < 17$.

Sehingga, jumlah digit-digit dari $n^5 = \left(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e\right)^5$ adalah akan maksimum apabila setiap bentuk 10^x memiliki bentuk pangkat x yang tidak sama . Artinya:
$5a \neq 4a + b \neq 3a + 2b \neq 3a + b + c \neq 2a + 2b + c \neq 2a + b + c + d \neq a + b + c + d + e$
sehingga seluruh bentuk 10^x adalah bentuk berbeda nilainya.

Maka, bilangan n^5 yang menghasilkan jumlah digit terbesar adalah:
$(k_1 \cdot n_1) \times 10^{x_1} + (k_2 \cdot n_2) \times 10^{x_2} + \cdots + (k_7 \cdot n_7) \times 10^{x_7}$ dengan $x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_7$ dan $k_1, k_2, \ldots, k_7$ hanya dilihat jumlah digitnya saja (contoh: 20 hanya dilihat sebagai $2 + 0 = 2$)

Jadi, jumlah digit maksimum dari n^5 adalah:

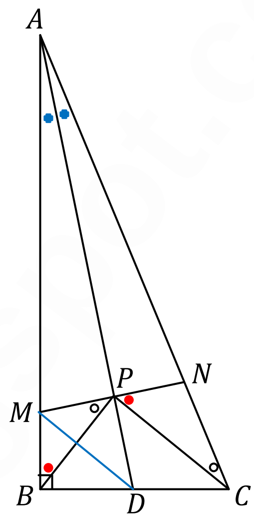
Bentuk 10^x	**Koefisien**	**Banyak suku yang terbentuk**	**Jumlah digit**
$10^{5a} + 10^{5b} + \cdots$	$k_1 = \frac{5!}{5!} = 1$	$n_1 = {}_5P_1 = 5$	$1 \times 5 = 5$
$10^{4a+b} + 10^{4a+c} + \cdots$	$k_2 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$	$n_2 = {}_5P_2 = 20$	$5 \times 20 = 100$
$10^{3a+2b} + 10^{3a+2c} + \cdots$	$k_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$	$n_3 = {}_5P_2 = 20$	$(1 + 0) \times 20 = 20$
$10^{3a+b+c} + 10^{3a+b+d} + \cdots$	$k_4 = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20$	$n_4 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$	$(2 + 0) \times 30 = 60$
$10^{2a+2b+c} + 10^{2a+2b+d} + \cdots$	$k_5 = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$	$n_5 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$	$(3 + 0) \times 30 = 90$
$10^{2a+b+c+d} + 10^{2a+b+c+e} + \cdots$	$k_6 = \frac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!} = 60$	$n_6 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_3 = 20$	$(6 + 0) \times 20 = 120$
$10^{a+b+c+d+e}$	$k_7 = \frac{5!}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 120$	$n_7 = {}_5C_5 = 1$	$(1 + 2 + 0) \times 1 = 3$
Jumlah maksimum dari digit-digit n^5			398

Jadi, jumlah maksimum dari digit-digit n^5 adalah
$S(n^5) = 5 + 100 + 20 + 60 + 90 + 120 + 3 = 398$

20. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 12, BC = 5$ dan $AC = 13$. Misalkan P suatu titik pada garis bagi $\angle A$ yang terletak di dalam ABC dan misalkan M suatu titik pada sisi AB (dengan $A \neq M \neq B$). Garis AP dan MP memotong BC dan AC berturut-turut di D dan N. Jika $\angle MPB = \angle PCN$ dan $\angle NPC = \angle MBP$, maka nilai $\frac{AP}{PD}$ adalah ....

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi ΔABC berikut.



Karena AD membagi sudut A sama besar, maka menurut sifat garis bagi berlaku:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow BD = \frac{12}{5} \text{ dan } CD = \frac{13}{5}$$

Perhatikan,

Misal, $\angle MPB = \angle PCN = x°$ dan $\angle NPC = \angle MBP = y°$, maka

Dengan menggunakan sudut luar segitiga diperoleh:

$\angle PMA = \angle PNA = (x + y)°$

Perhatian sekali lagi pada ΔAMP dan ΔANP, berlaku

- $AP = AP$ (kedua sisi berhimpit)
- $\angle MAP = \angle NAP$ (sifat garis bagi sudut)
- $\angle PMA = \angle PNA$ (sifat sudut luar segitiga)

Jadi, dengan prinsip si-su-su maka ΔAMP kongruen dengan ΔANP, sehingga, $AM = AN$

Perhatikan, karena ΔAMN adalah segitiga sama kaki, maka AP selain merupakan garis bagi, maka AP juga merupakan garis berat, dan garis tinggi ΔAMN.

Oleh karena itu, $AP \perp MN$ dan $MP = PN$.

Perhatikan, $\angle MBD = \angle MPD = 90°$, sehingga

misal, $MB = y \Rightarrow NC = y + 1$ dan $MP = x$

maka,

$$MD^2 = MB^2 + BD^2 \Rightarrow MD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

$$MD^2 = MP^2 + PD^2 \Rightarrow MD^2 = x^2 + PD^2$$

Dengan menggunakan kesamaan pada kedua persamaan diatas, maka diperoleh:

$$y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = x^2 + PD^2 \Rightarrow PD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 - x^2$$

Padahal, ΔBMP sebangun ΔPNC, sehingga

$$\frac{BM}{MP} = \frac{PN}{NC} \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{x}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y^2 + y$$

Substitusikan $x^2 = y^2 + y$ ke $PD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 - x^2$, sehingga diperoleh:

$$PD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 - (y^2 + y) \Rightarrow \ PD^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 - y$$

$$\Leftrightarrow PD^2 = \frac{144}{25} - y$$

Perhatikan, pada ΔAPM berlaku,

$$\begin{aligned}
AP^2 = AM^2 - MP^2 \Rightarrow\ & AP^2 = (12-y)^2 - x^2 \\
\Leftrightarrow\ & AP^2 = 144 - 24y + y^2 - (y^2 + y) \\
\Leftrightarrow\ & AP^2 = 144 - 25y \\
\Leftrightarrow\ & AP^2 = 25\left(\frac{144}{25} - y\right) \\
\Leftrightarrow\ & AP^2 = 25 \cdot PD^2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{AP^2}{PD^2} = 25 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{AP}{PD} = 5
\end{aligned}$$

Pembahasan soal OSK Matematika SMA 2017 ini sangat mungkin jauh dari sempurna mengingat keterbatasan penulis. Saran, koreksi dan tanggapan sangat diharapkan demi perbaikan pembahasan soal OSN ini.

Untuk download pembahasan soal SBMPTN, UNAS, Olimpiade, dan rangkuman materi pelajaran serta soal-soal ujian yang lainnya, silahkan kunjungi http://pak-anang.blogspot.com.

Terima kasih.
Pak Anang