

**Kompetisi Sains Nasional 2020**  
**Hari Kedua**  
**Sekolah Menengah Atas**

14 Oktober 2020

**Soal 5.** Suatu himpunan  $A$  memuat tepat  $n$  bilangan bulat yang masing-masing lebih besar dari 1 dan setiap faktor primanya kurang dari 10. Tentukan  $n$  terkecil sehingga  $A$  pasti memuat dua anggota berbeda  $a$  dan  $b$  dengan  $ab$  adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat.

**Soal 6.** Diberikan segiempat talibusur  $ABCD$ . Misalkan  $X$  titik pada sisi  $BC$  ( $X \neq C$ ) sehingga garis  $AX$  tegak lurus dengan garis bagi  $\angle CBD$ , dan  $Y$  titik pada sisi  $AD$  ( $Y \neq D$ ) sehingga  $BY$  tegak lurus dengan garis bagi  $\angle CAD$ . Buktikan bahwa  $XY$  sejajar dengan  $CD$ .

**Soal 7.** Tentukan semua polinomial dengan koefisien bilangan real  $P(x)$  yang memenuhi

$$P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$$

untuk setiap bilangan real  $x$ .

**Soal 8.** Tentukan bilangan asli terkecil  $n > 2$ , atau buktikan bahwa tidak ada bilangan asli  $n$  yang memenuhi sifat berikut: Terdapat bilangan asli  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sehingga

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left( \frac{1}{\gcd(a_k, a_{k+1})} + \frac{1}{\gcd(a_k, a_{k+2})} + \dots + \frac{1}{\gcd(a_k, a_n)} \right)}_{n-k \text{ suku}}$$

**Catatan:**  $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$  adalah faktor persekutuan terbesar dari  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .