Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan Juli 2018

27–30 Juli 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Pada saat Master Sanjaya ingin melakukan tes mengemudi, nomor antrean tesnya memiliki keunikan, yaitu: nomor antreannya terdiri dari 4 digit angka, di mana setiap nomor antrean yang dikeluarkan terdapat tepat 1 angka 4. Tentukan banyaknya kemungkinan nomor antrean yang diterima Master Sanjaya.

2. Jika a dan b dengan $a > b$ adalah dua faktor positif berbeda dari 2018 dan $a + b = 3027$, maka nilai dari $a - b$ adalah...

3. Diketahui bilangan real a memenuhi $a^3 = a + 1$, tentukan nilai dari $a^7 - a^6 - a^5 + a^3$.

4. Misalkan ABC adalah segitiga lancip dengan titik pusat lingkaran luar O. Diketahui panjang sisi $AB = 224$ dan $\triangle BOC$ merupakan segitiga sama sisi. Tentukan panjang garis tinggi dari B dari $\triangle ABC$.

5. Definisikan $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebuah bilangan x dibulatkan ke $\lceil x \rceil$ jika $\{x\} \geq 0.5$, dan dibulatkan ke $\lfloor x \rfloor$ jika $\{x\} < 0.5$. Tentukan banyak bilangan bulat n sehingga $\sqrt{n}$ dibulatkan ke 2018.

6. Tentukan bilangan asli ganjil terkecil $n > 1$ sehingga untuk semua p bilangan prima yang membagi n, $p - 2$ dan $p + 2$ juga membagi n.

7. Gian Sanjaya dan Stephen Sanjaya sedang latihan fisik berupa lari sepanjang lintasan lurus sambil meletakkan kok (bola bulu tangkis) untuk mempersiapkan pertandingan bulu tangkis mereka. Pada awalnya, Gian dan Stephen berdiri pada ujung yang berbeda dari lintasan tersebut. Kemudian, mereka mulai berlari lurus. Gian meletakkan kok setiap 6 meter, sedangkan Stephen meletakkan kok setiap 14 meter. Mereka tidak meletakkan kok pada awal mereka berlari. Apabila panjang lintasan lari tersebut adalah 1000 meter, tentukan banyaknya kok yang terletak berpasangan.

8. Diberikan segitiga ABC sama sisi dengan P pada busur BC yang tidak mengandung A. Jika jari-jari lingkaran luar segitiga ABC adalah 7, tentukan $PA^2 + PB^2 + PC^2$.

9. Definisikan $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) yang keduanya tak lebih besar dari 31, sehingga persamaan $\{x\}^2 + a\{x\} = b$ memiliki solusi x real.

10. Diberikan sebuah garis k. Titik A, B, dan C adalah tiga titik di garis k dengan urutan tersebut dan $AB = \sqrt{6}$ serta $BC = \sqrt{28}$. Titik D adalah titik tengah segmen BC. Buat persegi $ABFG$, $BDHI$, dan $DCJH$ di sisi yang sama dari garis k. Titik T adalah perpotongan segmen garis GC dan AH. Tentukan besar sudut $\angle GTA$ dalam derajat.

11. Diketahui bahwa

$$S = \sum_{k=0}^{2018} k(2k-1)\binom{4036}{2k} 4^{2k-2}.$$

Hitunglah $S \mod 2017$.

12. Diketahui bilangan bulat x dan y yang keduanya relatif prima dengan 7, sehingga $5x+4y$ habis dibagi 7. Tentukan banyaknya pasangan (a,b) dengan a dan b adalah bilangan asli tidak lebih dari 100, sehingga $ax+by$ habis dibagi 7.

13. Diketahui n adalah bilangan asli terkecil sedemikian hingga dua digit terakhir dari 5^n pada basis 2016 adalah 01. Tentukan tiga digit terakhir n pada basis 10.

14. Diberikan ABC segitiga dengan panjang sisi $AB = 12, AC = 16$ dan $BC = 14$. Titik D merupakan titik yang memenuhi $\frac{DB}{DC} = \frac{3}{4}$ serta $2\angle DAB + \angle BAC = 270°$. Apabila $AD^2 = a - b\sqrt{c}$ dimana a, b dan c adalah bilangan asli dan c tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat selain 1, tentukan $a+b+c$.

15. Diketahui $-1 \leq x, y, z \leq 1$ dan $x+y+z = 0$. Jika M dan m berturut-turut adalah nilai maksimum dan minimum yang mungkin dari

$$\sqrt{xy+2x+y+2} + \sqrt{yz+2y+z+2} + \sqrt{zx+2z+x+2},$$

tentukan nilai dari $\lfloor (M+m)^2 \rfloor$.

16. Sebuah persegi berukuran 98×98 dibagi menjadi persegi satuan. Definisikan pusat sebuah persegi satuan sebagai perpotongan kedua diagonalnya. Tentukan k terkecil sehingga apabila sembarang k persegi satuan dipilih, akan selalu didapat empat diantaranya yang pusatnya membentuk jajar genjang.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Tripel bilangan asli (x, y, z) disebut tripel *Sanjaya* apabila FPB (faktor persekutuan terbesar) dari x, y, dan z adalah 1, dan persamaan ini terpenuhi:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Misalkan (x, y, z) adalah tripel Sanjaya. Misalkan juga $FPB(x, y) = d$.

(a) Buktikan bahwa jika $FPB(x, y) = d$, maka $x = da$ dan $y = db$ untuk suatu bilangan asli a dan b di mana $FPB(a, b) = 1$.

(b) Buktikan bahwa $FPB(ab, a+b) = 1$. (Petunjuk: buktikan bahwa $FPB(a, a+b) = 1$ terlebih dahulu).

(c) Buktikan $FPB(d, z) = 1$ dan $z(a + b) = dab$.

(d) Buktikan bahwa $x-z$, $y-z$, $x+y$, dan xyz adalah bilangan kuadrat sempurna. (Petunjuk: gunakan fakta jika a dan b adalah bilangan asli yang memenuhi $a|b$ dan $b|a$, maka $a = b$.

2. Tinjau permainan *menara Hanoi*. Anda diberikan tiga buah tiang dan n buah cakram yang semua ukurannya berbeda pada salah tiang yang pertama (sehingga tidak ada cakram pada tiang yang lain di awal permaian). Anda diminta untuk memindahkan seluruh cakram dari tiang pertama ke tiang ketiga sehingga seluruh cakram pada tiang ketiga tersusun dari bawah ke atas dari yang paling besar ke yang paling kecil. Pada setiap langkah, Anda hanya diperbolehkan memindahkan cakram satu persatu dan tidak ada cakram yang berada tepat di atas cakram lain yang ukurannya lebih kecil selama permainan berlangsung. Untuk n buah cakram, permianan menara Hanoi dapat diselesaikan dalam $2^n - 1$ langkah. (Untuk referensi lebih lanjut, silahkan kunjungi situs `https://id.wikipedia.org/wiki/Menara_Hanoi`).

Sanjaya memodifikasi permainan tersebut menjadi permainan *menara Sanjaya*. Tujuan permainan ini sama dengan tujuan permainan menara Hanoi, tetapi selama permainan diperbolehkan suatu cakram di atas cakram yang lebih kecil asalkan cakram terbesar pada tiang tersebut berada di posisi paling bawah. Tentukan banyaknya langkah paling sedikit untuk menyelesaikan permainan menara Sanjaya apabila anda diberikan 5 keping cakram yang semua ukurannya berbeda. Jangan lupa melakukan verifikasi bahwa banyak langkah yang Anda lakukan adalah yang paling sedikit.

3. Sanjaya memilih tiga buah bilangan real a, b, c yang memenuhi $abc = a+b+c = \frac{1}{2018}$ dan $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} > \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}$. Buktikan bahwa ketaksamaan ini juga terpenuhi:

$$\frac{a^4}{c} + \frac{b^4}{a} + \frac{c^4}{b} > \frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} + \frac{a^4}{b}$$

4. Diketahui segitiga lancip ABC tidak sama kaki, dengan H dan O beturut-turut merupakan titik tinggi dan titik pusat lingkaran luar $\triangle ABC$. Proyeksikan B ke AC di B_0, dan proyeksikan C ke AB di C_0. Lingkaran luar AHO memotong lingkaran luar ABC, AB, AC, CC_0, dan BB_0 berturut-turut di K_A, C_1, B_1, C_2, dan B_2 dengan $C_1 \neq A$, $B_1 \neq A$, $B_2 \neq H$, $C_2 \neq H$, dan $K_A \neq A$. Kemudian, C_2B_2 memotong C_1B_1 di T_A. Definisikan titik-titik K_B, T_B, K_C, dan T_C dengan cara yang serupa. Buktikan bahwa ketiga garis K_AT_A, K_BT_B, dan K_CT_C berpotongan di satu titik.