

Tantangan Mingguan

Soal E dan Jawaban

Latihan Membuat Sempurna

Pertanyaan

Klub Piano pada sebuah sekolah menengah seni memiliki 30 siswa sebagai anggota, beberapa dari kelas 11 dan sisanya dari kelas 12. Setiap siswa dalam klub tersebut harus bermain piano berduet secara bergantian selama proses belajar mengajar sepanjang tahun ajaran. Ketika dua siswa kelas 11 bermain bersama, mereka membutuhkan waktu 2 jam untuk berlatih. Ketika siswa kelas 11 dan siswa kelas 12 bermain bersama, mereka membutuhkan waktu 3 jam berlatih. Ketika dua siswa kelas 12 bermain bersama, mereka membutuhkan waktu 4 jam untuk berlatih. Secara keseluruhan, siswa membutuhkan 1392 jam untuk berlatih. Berapa banyak siswa kelas 11 yang menjadi anggota klub berisi 30 orang siswa tersebut?

Jawaban

Pertama-tama kita buat catatan berikut:

Jika 3 siswa $\{A, B, C\}$ berada pada level yang sama, maka akan ada $3 \times 2 \div 2 = 3$ pasangan duet, yaitu $\{AB\}$, $\{AC\}$, dan $\{BC\}$. Juga, jika 3 siswa $\{A, B, C\}$ berada pada level yang sama dan 2 siswa $\{D, E\}$ berada di level yang lain, maka akan ada $3 \times 2 = 6$ pasangan duet, yaitu $\{AD\}$, $\{AE\}$, $\{BD\}$, $\{BE\}$, $\{CD\}$, dan $\{CE\}$.

Sekarang, misalkan a merupakan jumlah siswa kelas 11 dalam klub dan $(30 - a)$ merupakan jumlah siswa kelas 12 dalam klub.

Secara umum, karena terdapat a siswa di kelas 11 dan masing-masing harus bermain duet dengan setiap siswa lain di kelas 11, terdapat $a \times (a - 1) \div 2$ duet yang melibatkan siswa kelas 11 saja. Sama halnya, karena terdapat $(30 - a)$ siswa di kelas 12 dan masing-masing harus bermain dengan setiap siswa di kelas 12, maka terdapat $(30 - a) \times (30 - a - 1) \div 2 = (30 - a) \times (29 - a) \div 2$ duet yang melibatkan siswa kelas 12 saja. Karena masing-masing siswa kelas 11 harus bermain duet dengan setiap siswa kelas 12, akan ada $a \times (30 - a)$ duet yang melibatkan satu siswa dari masing-masing level.

Untuk menentukan jumlah total waktu latihan yang diperlukan, ambil jumlah pasangan siswa dan kalikan dengan jumlah jam latihan yang dibutuhkan untuk masing-masing tipe pasangan.

Jumlah Waktu = Waktu Psgn Kelas 11 + Waktu Psgn Kelas 12 + Waktu Psgn Kelas 11/12

$$1392 = 2 \left[\frac{a \times (a - 1)}{2} \right] + 4 \left[\frac{(30 - a) \times (29 - a)}{2} \right] + 3[a \times (30 - a)]$$

$$1392 = a^2 - a + 2(870 - 59a + a^2) + 3(30a - a^2)$$

$$1392 = a^2 - a + 1740 - 118a + 2a^2 + 90a - 3a^2$$

$$1392 = -29a + 1740$$

$$29a = 348$$

$$a = 12$$

Maka, 12 siswa dalam klub tersebut adalah siswa kelas 11.

Problem of the Week

Problem E and Solution

Practice Makes Perfect

Problem

The Fine Arts High School Piano Club has 30 student members, some from Grade 11 and the remainder from Grade 12. Each pair of students from the club must play a piano duet together over the course of the year. When two grade 11 students play together, they need 2 hours of practice time. When a grade 11 and a grade 12 student play together, they need 3 hours of practice time. When two grade 12 students play together, they need 4 hours of practice time. In total, the students need 1392 hours of practice time. How many of the 30 members of the club are Grade 11 students?

Solution

First we note the following:

If 3 students $\{A, B, C\}$ are in the same grade, then there will be $3 \times 2 \div 2 = 3$ duet pairings, namely $\{AB\}$, $\{AC\}$, and $\{BC\}$. Also, if 3 students $\{A, B, C\}$ are in one grade and 2 students $\{D, E\}$ are in the other grade, then there will be $3 \times 2 = 6$ duet pairings, namely $\{AD\}$, $\{AE\}$, $\{BD\}$, $\{BE\}$, $\{CD\}$, and $\{CE\}$.

Now, let a represent the number of Grade 11 students in the club and $(30 - a)$ represent the number of Grade 12 students in the club.

In general, since there are a students in Grade 11 and each must play a duet with every other student in Grade 11, there will be $a \times (a - 1) \div 2$ duets involving only Grade 11 students. Similarly, since there are $(30 - a)$ students in Grade 12 and each must play a duet with every other student in Grade 12, there will be $(30 - a) \times (30 - a - 1) \div 2 = (30 - a) \times (29 - a) \div 2$ duets involving only Grade 12 students. Since every Grade 11 student must play a duet with every Grade 12 student, there will be $a \times (30 - a)$ duets involving one student from each grade.

To determine the total amount of practice time required, take the number of students in each type of pairing and multiply by the number of hours of practice time required for each pairing type.

$$\begin{aligned}
 \text{Total Time} &= \text{Time for Gr. 11 Pairs} + \text{Time for Gr. 12 Pairs} + \text{Time for Gr. 11/12 Pairs} \\
 1392 &= 2 \left[\frac{a \times (a - 1)}{2} \right] + 4 \left[\frac{(30 - a) \times (29 - a)}{2} \right] + 3[a \times (30 - a)] \\
 1392 &= a^2 - a + 2(870 - 59a + a^2) + 3(30a - a^2) \\
 1392 &= a^2 - a + 1740 - 118a + 2a^2 + 90a - 3a^2 \\
 1392 &= -29a + 1740 \\
 29a &= 348 \\
 a &= 12
 \end{aligned}$$

Therefore, 12 of the students in the club are in Grade 11.