Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Mei 2019

24 Mei – 27 Mei 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
11. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
12. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
13. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
14. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
15. Notasi $\dbinom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
16. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.

(d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

(e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

17. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

19. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

20. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

21. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

22. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Selamat datang di KTO Mei 2019! Soal ini mungkin menjadi mimpi buruk bagi kalian namun ... Misalkan A_n adalah jawaban soal ke - n (Bagian ke-A) pada kontes KTO Mei 2019 ini.

   Tentukan nilai dari $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \cdots \cdot A_{16}$

2. Bilangan asli n disebut bilangan peima jika untuk setiap bilangan bulat k yang lebih dari $\sqrt{n}$ dan k kurang dari n, k tidak habis membagi n. Berapakah banyak bilangan peima yang lebih kecil dari 100?

3. Terdapat suatu papan ukuran 3×3 yang terbentuk dari 9 buah papan ukuran 1×1. Harry melempar tiga buah dart identik ke papan tersebut lalu mewarnai titik tengah papan ukuran 1×1 tersebut dengan warna merah. Karena memanah tidak termasuk sihir, Harry melempar melempar secara acak ke papan ukuran 3×3 tersebut. Dapat dipastikan bahwa semua lemparan dart dari Harry mengenai bagian dalam (interior) dari salah satu papan ukuran 1×1. Harry menang jika ketiga titik tengah berwarna merah berada dalam satu garis. Jika P adalah peluang Harry menang, berapakah nilai dari $\lfloor 100P \rfloor$?

4. ABC adalah segitiga sama sisi dengan panjang 6. Titik D berada di segmen AB sehingga $AD = 2$. Titik E berada di segmen BC sehingga $BE = k$. Jika $DE^2 = 12$, berapakah nilai dari k?

5. Jika
$$S = \sum_{0 \le i \le j \le 2019} \binom{2019}{j} \binom{j}{i}$$
   , berapakah nilai dari $S \mod 100$?

6. Diberikan polinomial monik $P(x)$ berderajat $n > 0$ dimana seluruh akarnya adalah bilangan bulat. Tentukan bilangan bulat terkecil n sedemikian sehingga terdapat $P(x)$ yang memenuhi kondisi berikut: Untuk setiap bilangan bulat k, $P(k)$ habis dibagi 2019. *Catatan: Suatu polinomial berderajat $n > 0$ dikatakan monik jika dan hanya jika koefisien dari x^n adalah 1.*

7. Pak Petani memiliki lahan persegi panjang $ABCD$. Di tiap pojok lahan, terdapat sebuah ember. Di dalam lahan tersebut, ada sumur yang berbentuk cincin dengan jari-jari dalam sumur 1 meter dan ketebalan 0.03 m. Definisikan suatu titik P di permukaan luar tembok sumur sebagai titik pinggir sumur untuk A jika dan hanya jika AP menyinggung permukaan luar tembok sumur. Definisikan L_X sebagai jarak minimum yang dibutuhkan Pak Petani untuk bergerak dari titik X ke bagian pinggir sumur. Jika $L_A = 25$ m, $L_B = 39$ m dan $L_C = 60$ m, berapakah nilai dari L_D (dalam meter)?

8. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan real sehingga $a+b+c = 12$ dan $ab+bc+ca = 21$. Misalkan M dan m berturut-turut adalah nilai terbesar dan terkecil yang mungkin dari a. Tentukan nilai dari $\lfloor M \rfloor^2 + \lfloor m \rfloor^2$.

9. Untuk setiap bilangan real x, definisikan $\{x\}$ sebagai bagian pecahan dari x (lihat halaman notasi). Misal $a_1, a_2, \cdots a_{101}$ adalah bilangan real sehingga $\{S - a_1\} = \{S - a_2\} = \cdots = \{S - a_{101}\} = \frac{1}{101}$ dengan $S = \sum_{i=1}^{101} a_i$. Misalkan N adalah hasil penjumlahan semua nilai yang mungkin dari $\{S\}$. Berapakah nilai dari $100N$?

10. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi r. Terdapat sembarang titik E dan F pada segmen AB dan BC berturut-turut dimana $E \neq A, B$, $F \neq B, C$, dan $AE = BF$. Misalkan CE dan DF saling berpotongan di titik O. Tentukan bilangan bulat terkecil r supaya kita bisa meletakkan titik E dan F sedemikian rupa sehingga luas dari segiempat $BEOF$ adalah 2019.

11. Di suatu piala bulutangkis, Kampung Durian Terbang mengirimkan 10 atlet, 5 putra dan 5 putri. Ada 5 cabang yang ditandingkan, yaitu tunggal putra, tunggal putri, ganda putra, ganda putri dan ganda campuran. Coach Dalang akan mengatur susunan yang akan diturunkan melawan Kampung Naga Api. Agar pemainnya tidak kelelahan, setiap pemain hanya boleh turun maksimal dua kali. Berapakah susunan yang mungkin diturunkan oleh Coach Dalang? (Tidak semua pemain yang dibawa harus diturunkan)

    Contoh formasi yang valid:

    - Tunggal Putra : Afif
    - Tunggal Putri : Hillary
    - Ganda Putra : Afif / Bedjo
    - Ganda Putri : Ram / Rem
    - Ganda Campuran : Ram / Bedjo

12. Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah polinomial kuadratik dengan koefisien bilangan bulat. Jika $f(g(x)) = 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x - 1$ dan $g(0) = 1$, hitunglah hasil penjumlahan dari semua nilai yang mungkin dari $f(10)$.

13. Diberikan barisan Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ dimana $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, dan $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ untuk setiap bilangan cacah n. Tentukan bilangan <u>asli</u> terkecil n sehingga F_n dan $F_{n+1} - 1$ habis dibagi F_{2019}.

14. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan real positif yang memenuhi persamaan

    $$36x + 16y + 9z + 12\sqrt{xyz} = 144.$$

    Tentukan nilai maksimum yang mungkin untuk $16\sqrt{xy} + 48\sqrt{z} - 3z\sqrt{z}$.

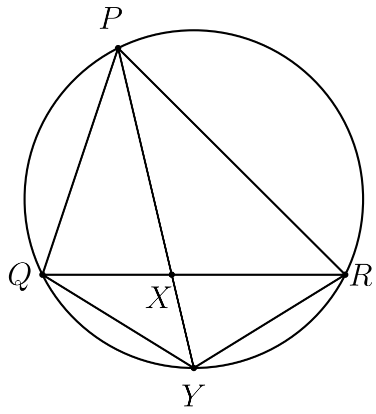
15. Tentukan banyaknya barisan bilangan asli 100 elemen a_i $(i = 1, 2, \ldots, 100)$ sehingga selisih setiap suku yang bersebelahan kurang dari sama dengan 2 dan terdapat i dimana $1 \leq i \leq 100$ sehingga $a_i = 4$ atau $a_i = 5$.

16. Misalkan $\triangle ABC$ dengan $\angle B = 75^\circ$ dan $\angle C = 60^\circ$ memiliki lingkaran dalam ω dan lingkaran luar Ω. Misalkan C_1 adalah lingkaran yang bersinggungan secara internal dengan Ω di titik A dan bersinggungan secara eksternal dengan ω. Misalkan C_2 adalah lingkaran yang bersinggungan secara internal dengan Ω di titik A dan bersinggungan secara internal dengan ω. Jika r_1 dan r_2 menyatakan jari-jari C_1 dan C_2, berturut-turut maka $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{3}$ untuk suatu bilangan asli X, Y dengan $X > Y$. Hitunglah $10X + Y$.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. a. Misalkan garis bagi $\angle P$ dari $\triangle PQR$ memotong QR di titik X dan memotong lingkaran luar $\triangle PQR$ sekali lagi di titik Y.

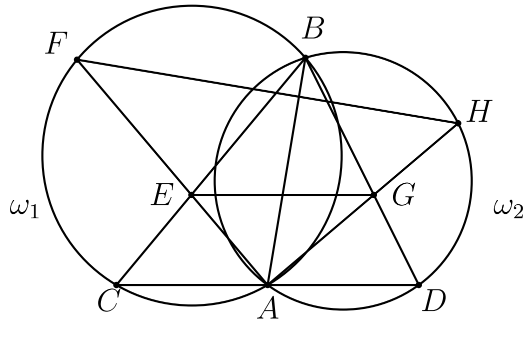


i. Tunjukkan bahwa $\triangle PQX$ sebangun dengan $\triangle PYR$.

ii. Buktikan kesamaan berikut:

$$PQ \times PR = PX \times PY.$$

b. Dua buah lingkaran ω_1 dan ω_2 berpotongan di dua buah titik A dan B. Sebuah garis melalui A memotong ω_1 sekali lagi di titik C dan memotong ω_2 sekali lagi di titik D sedemikian sehingga $AC = AD$. Garis bagi $\angle A$ dari $\triangle CAB$ memotong BC di titik E dan memotong ω_1 sekali lagi di titik F sementara garis bagi $\angle A$ dari $\triangle DAB$ memotong BD di titik G dan memotong ω_2 sekali lagi di titik H.



i. Buktikan $AE \times AF = AG \times AH$.

ii. Buktikan EG sejajar dengan CD.

iii. Buktikan bahwa FH tegak lurus dengan AB.

2. Vettel dan Leclerc akan memainkan sebuah permainan di garis bilangan real tak hingga. Mereka menggunakan 4039 kartu yang bertuliskan 4039 bilangan bulat. Leclerc secara acak mengambil sebuah kartu yang bertuliskan sebuah bilangan bulat, lalu Vettel akan meletakkan bidaknya pada bilangan di garis yang sesuai

dengan bilangan pada kartu yang diambil Leclerc. Selanjutnya, Vettel akan menggerakkan bidaknya dengan ketentuan sebagai berikut: jika bidak terletak pada bilangan genap m, maka Vettel harus menggerakkan bidaknya sejauh $|m|$ bilangan ke kanan; jika bidak terletak pada bilangan ganjil n, maka Vettel harus menggerakkan bidaknya sejauh $|n|$ bilangan ke kiri. Vettel akan memenangkan permainan apabila bidaknya mampu melewati 2019 terlebih dahulu daripada -2019, sedangkan Leclerc akan memenangkan permainan apabila bidak Vettel mampu melewati bilangan -2019 terlebih dahulu daripada 2019 atau tidak mampu untuk bergerak lagi. Anggap permainan telah selesai apabila ada pemain yang sudah memenangkan permainan. Tentukan, dengan bukti, siapa yang memiliki peluang lebih besar untuk menang.

Catatan : Untuk melewati 2019, bidak harus berada di angka r dimana $r \geq 2019$.

3. Diketahui a, b, c adalah bilangan kompleks berbeda yang memenuhi $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a} = 4$ dan $a^2c + abc + ab^2 + bc^2 = a^2b + b^2c + c^2a$. Hitunglah nilai dari

$$\left(\frac{a}{a-b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b-c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c-a}\right)^3$$

4. Apakah terdapat sebuah bilangan asli n sedemikian sehingga

$$n^5 - 5n^3 + 5n + 1 | n!$$