

KUMPULAN SOAL DAN PENYELESAIAN

PERSIAPAN MENUJU OSN BIDANG MATEMATIKA

DI SUSUN OLEH :

EDDY HERMANTO, ST



**SMA NEGERI 5 BENGKULU
JALAN CENDANA NO 20 BENGKULU KODE POS 38228
TELP. (0736) 21433
TAHUN 2006**

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Penulis ucapkan kepada Allah, SWT atas semua yang yang diberikan-Nya kepada Penulis sehingga Penulis dapat menyelesaikan penulisan buku ini. Buku ini Penulis tulis sebagai kelanjutan dari apa yang pernah Penulis sampaikan pada diskusi dengan guru-guru se-Indonesia dalam acara Simposium Guru III pada kegiatan Olimpiade Sains Nasional Tahun 2005 di Jakarta.

Buku ini dapat digunakan oleh semua pihak dalam mempersiapkan siswa-siswanya menuju Olimpiade Matematika Tingkat Nasional.

Ucapan terima kasih dari Penulis kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian buku ini.

Penulis merasa bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu saran dan kritik dari Pembaca sangat Penulis nantikan.

Akhir kata semoga buku ini dapat memberikan manfaat yang sebesar-besarnya bagi Pembaca sekalian.

Bengkulu, April 2006

EDDY HERMANTO, ST

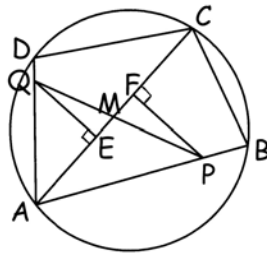
Kumpulan Soal dan Penyelesaian

KUMPULAN SOAL DAN PENYELESAIAN PERSIAPAN MENUJU OSN BIDANG MATEMATIKA

1. Misalkan ABCD adalah segiempat talibusur dan P dan Q berturut-turut adalah titik yang terletak pada sisi AB dan AD sehingga $AP = CD$ dan $AQ = BC$. Misalkan M adalah titik perpotongan AC dan PQ. Buktikan bahwa M adalah titik tengah PQ.

(Sumber : Australian Mathematical Olympiad 1996)

Solusi :



Misalkan $[XYZ]$ menyatakan luas ΔXYZ .

$$\angle QME = \angle PMF$$

$$MQ = QE \operatorname{cosec} \angle QME \text{ dan } MP = PF \operatorname{cosec} \angle PMF$$

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{PF}{QE}$$

AC adalah alas ΔACP dan ΔACQ maka

$$\frac{PF}{QE} = \frac{MP}{MQ} = \frac{[ACP]}{[ACQ]}$$

Misalkan R terletak pada sisi AB atau perpanjangan AB sehingga CR tegak lurus AB. Maka CR merupakan tinggi dari ΔABC dan ΔACP .

$$\frac{[ACP]}{[ABC]} = \frac{AP}{AB}$$

Misalkan T terletak pada sisi AD atau perpanjangan AD sehingga CT tegak lurus AD. Maka CT merupakan tinggi dari ΔACD dan ΔACQ .

$$\frac{[ACQ]}{[ACD]} = \frac{AQ}{AD}$$

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{[ACP]}{[ACQ]} = \frac{AP \cdot AD \cdot [ABC]}{AB \cdot AQ \cdot [ACD]}$$

Misalkan $\angle ABC = \alpha$ maka $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$ (ABCD adalah segiempat tali busur)

$$\sin \angle ABC = \sin \angle ADC = \sin \alpha$$

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{[ACP]}{[ACQ]} = \frac{AP \cdot AD \cdot [ABC]}{AB \cdot AQ \cdot [ACD]} = \frac{AP \cdot AD \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \alpha}{AB \cdot AQ \cdot AD \cdot CD \cdot \sin \alpha}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena $AP = CD$ dan $AQ = BC$ maka

$$\frac{MP}{MQ} = 1 \rightarrow MP = MQ$$

M adalah titik tengah PQ (terbukti)

2. Jika $a, b, c > 0$ dan $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ maka buktikan bahwa :

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

(Sumber : Belarussian Mathematical Olympiad 1999)

Solusi :

Berdasarkan AM-GM didapat bahwa $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $a^2 + c^2 \geq 2ac$ dan $b^2 + c^2 \geq 2bc$

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{1}{1+\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{2}} + \frac{1}{1+\frac{a^2+c^2}{2}}$$

Berdasarkan AM-HM didapat bahwa :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} . \text{ Maka :}$$

$$\frac{1}{1+\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{2}} + \frac{1}{1+\frac{a^2+c^2}{2}} \geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{9}{3+3}$$

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2} \text{ (terbukti)}$$

3. Buktikan bahwa jika x dan y adalah bilangan rasional yang memenuhi persamaan

$$x^5 + y^5 = 2x^2y^2$$

maka $1 - xy$ adalah kuadrat dari suatu bilangan rasional

(Sumber : British Mathematical Olympiad 1990)

Solusi :

- Jika $y = 0$ dan atau $x = 0$

$$1 - xy = 1^2$$

- Jika $y \neq 0$ dan $x \neq 0$

$$x^6 + xy^5 = 2x^3y^2$$

$$x^6 + xy^5 + y^4 = 2x^3y^2 + y^4$$

$$x^6 - 2x^3y^2 + y^4 = y^4(1 - xy)$$

$$(x^3 - y^2)^2 = y^4(1 - xy)$$

$$1 - xy = \left(\frac{x^3 - y^2}{y^2} \right)^2$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena x dan y bilangan rasional maka $\frac{x^3 - y^2}{y^2}$ adalah juga bilangan rasional.

Terbukti bahwa $1 - xy$ adalah kuadrat dari suatu bilangan rasional.

4. Tentukan bilangan enam angka n yang memenuhi (i) n adalah bilangan kuadrat sempurna, (ii) bilangan dibentuk dengan tiga angka terakhir n lebih satu dari tiga angka pertama n . (Sebagai ilustrasi n terlihat seperti 123124 tetapi itu bukan bilangan kuadrat)
(Sumber : British Mathematical Olympiad 1993 Round 1)

Solusi :

Misalkan tiga angka pertama n adalah a , maka $n = 1000a + a + 1 = m^2$

$$m^2 - 1 = 1001a = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a$$

$$100000 \leq m^2 \leq 999999$$

$$316 < m < 1000$$

$$(m + 1)(m - 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a$$

- Jika $m + 1 = 143b$ dan $m - 1 = 7c$ dengan $bc = a$

Karena $317 < m + 1 < 1001$ maka $2 < b < 7$.

$$\text{Karena } m - 1 = 7c \text{ maka } m - 1 \equiv 0 \pmod{7} \rightarrow m \equiv 1 \pmod{7}$$

$$m + 1 \equiv 2 \pmod{7} \rightarrow 143b \equiv 2 \pmod{7}$$

$$143b = 7 \cdot 20b + 3b$$

$$3b \equiv 2 \pmod{7}$$

Karena $2 < b < 7$ maka nilai b yang memenuhi hanya $b = 3$

$$\text{Jika } b = 3 \text{ maka } m = 143 \cdot 3 - 1 = 428 \rightarrow 428 - 1 = 7c \rightarrow c = 61$$

$$a = bc = 183 \rightarrow n = 183184 = 428^2$$

- Jika $m - 1 = 143b$ dan $m + 1 = 7c$ dengan $bc = a$

Karena $315 < m - 1 < 999$ maka $2 < b < 7$.

$$\text{Karena } m + 1 = 7c \text{ maka } m + 1 \equiv 0 \pmod{7} \rightarrow m \equiv -1 \pmod{7}$$

$$m - 1 \equiv -2 \pmod{7} \rightarrow 143b \equiv -2 \pmod{7}$$

$$143b = 7 \cdot 20b + 3b$$

$$3b \equiv -2 \pmod{7} \rightarrow 3b \equiv 5 \pmod{7}$$

Karena $2 < b < 7$ maka nilai b yang memenuhi hanya $b = 4$

$$\text{Jika } b = 4 \text{ maka } m = 143 \cdot 4 + 1 = 573 \rightarrow 573 + 1 = 7c \rightarrow c = 82$$

$$a = bc = 328 \rightarrow n = 328329 = 573^2$$

- Jika $m + 1 = 91b$ dan $m - 1 = 11c$ dengan $bc = a$

Karena $315 < m + 1 < 999$ maka $3 < b < 11$. Nilai b yang mungkin adalah $b = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ atau 10 .

$$\text{Karena } m - 1 = 11c \text{ maka } m - 1 \equiv 0 \pmod{11} \rightarrow m \equiv 1 \pmod{11}$$

$$m + 1 \equiv 2 \pmod{11} \rightarrow 91b \equiv 2 \pmod{11}$$

$$91b = 11 \cdot 8b + 3b$$

$$3b \equiv 2 \pmod{11}$$

Karena $3 < b < 11$ maka nilai b yang memenuhi hanya $b = 4$

$$\text{Jika } b = 8 \text{ maka } m = 91 \cdot 8 - 1 = 727 \rightarrow 727 - 1 = 11c \rightarrow c = 66$$

$$a = bc = 528 \rightarrow n = 528529 = 727^2$$

- Jika $m - 1 = 91b$ dan $m + 1 = 11c$ dengan $bc = a$

Karena $315 < m - 1 < 999$ maka $3 < b < 11$. Nilai b yang memenuhi adalah $b = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ atau 10 .

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena $m + 1 = 11c$ maka $m + 1 \equiv 0 \pmod{11} \rightarrow m \equiv -1 \pmod{11}$

$m - 1 \equiv -2 \pmod{11} \rightarrow 91b \equiv -2 \pmod{11}$

$$91b = 11 \cdot 8b + 3b$$

$3b \equiv -2 \pmod{11} \rightarrow 3b \equiv 9 \pmod{11}$

Karena $3 < b < 11$ maka tidak ada nilai b yang memenuhi.

- Jika $m + 1 = 77b$ dan $m - 1 = 13c$ dengan $bc = a$

Karena $315 < m + 1 < 999$ maka $4 < b < 13$. Nilai b yang memenuhi adalah $b = 5, 6, 7, 8, 9$ atau $10, 11, 12$

Karena $m - 1 = 13c$ maka $m - 1 \equiv 0 \pmod{13} \rightarrow m \equiv 1 \pmod{13}$

$m + 1 \equiv 2 \pmod{13} \rightarrow 77b \equiv 2 \pmod{13}$

$$77b = 13 \cdot 5b + 12b$$

$12b \equiv 2 \pmod{13}$

Karena $4 < b < 13$ maka nilai b yang memenuhi hanya $b = 11$

Jika $b = 11$ maka $m = 77 \cdot 11 - 1 = 846 \rightarrow 846 - 1 = 13c \rightarrow c = 65$

$$a = bc = 715 \rightarrow n = 715716 = 846^2$$

- Jika $m - 1 = 77b$ dan $m + 1 = 13c$ dengan $bc = a$

Karena $315 < m - 1 < 999$ maka $4 < b < 13$. Nilai b yang memenuhi adalah $b = 5, 6, 7, 8, 9$ atau $10, 11, 12$

Karena $m + 1 = 13c$ maka $m + 1 \equiv 0 \pmod{13} \rightarrow m \equiv -1 \pmod{13}$

$m - 1 \equiv -2 \pmod{13} \rightarrow 77b \equiv -2 \pmod{13}$

$$77b = 13 \cdot 5b + 12b$$

$12b \equiv -2 \pmod{13} \rightarrow 12b \equiv 11 \pmod{13}$

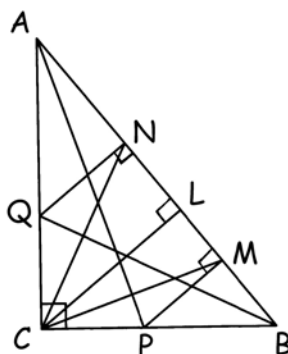
Karena $4 < b < 13$ maka tidak ada nilai b yang memenuhi.

Maka bilangan-bilangan tersebut adalah $183184 = 428^2$, $328329 = 573^2$, $528529 = 727^2$ dan $715716 = 846^2$

5. Segitiga ABC siku-siku di C. Garis bagi dalam sudut BAC dan ABC memotong sisi BC dan CA berturut-turut di titik P dan Q. Titik M dan N masing-masing terletak pada sisi AB sehingga PM dan QN tegak lurus AB. Tentukan besar $\angle MCN$.

(Sumber : British Mathematical Olympiad 1995 Round 1)

Solusi :



Dibuat CL dengan L terletak pada AB sehingga CL tegak lurus AB.

Segitiga-segitiga $\triangle ACB$, $\triangle ANQ$, $\triangle ALC$, $\triangle CLB$ dan $\triangle PMB$ semuanya sebangun.

Misalkan $\angle MCL = x$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena PM sejajar CL maka $\angle MCL = \angle PMC = x$

Pada $\triangle APC$ dan $\triangle APM$, ketiga sudut segitiga tersebut sama serta AP merupakan hipotenusa kedua segitiga sehingga $\triangle APM$ dan $\triangle APC$ kongruen (sama dan sebangun). $\rightarrow PC = PM$

Karena $PC = PM$ maka $\triangle CPM$ sama kaki. $\rightarrow \angle PCM = \angle PMC = \angle MCL = x$

Misalkan $\angle NCL = y$

Karena QN sejajar CL maka $\angle NCL = \angle QNC = y$

Pada $\triangle BQC$ dan $\triangle BQN$, ketiga sudut segitiga tersebut sama serta BQ merupakan hipotenusa kedua segitiga sehingga $\triangle BQN$ dan $\triangle BQC$ kongruen (sama dan sebangun). $\rightarrow QC = QN$

Karena $QC = QN$ maka $\triangle CQN$ sama kaki. $\rightarrow \angle QCN = \angle QNC = \angle NCL = y$

$$\angle MCN = \angle MCL + \angle NCL$$

$$\angle MCN = \frac{1}{2} (\angle BCL + \angle ACL)$$

$$\angle MCN = \frac{1}{2} \angle ACB$$

$$\angle MCN = 45^\circ$$

6. Tentukan pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang memenuhi 2 kondisi berikut :

(a) m dan n keduanya adalah bilangan kuadrat empat angka

(b) dua digit m sama baik nilai maupun posisinya dengan n (satuan dengan satuan, puluhan dengan puluhan, ratusan dengan ratusan, ribuan dengan ribuan) sedangkan dua digitnya lainnya dari m masing-masing kurang satu dari kedua digit n pada masing-masing posisi)

Bilangan tersebut terlihat seperti 1345 dan 1446, 3526 dan 4527 meskipun bilangan-bilangan tersebut bukan bilangan kuadrat

(Sumber : British Mathematical Olympiad 1996 Round 1)

Solusi :

Misalkan $m = 1000a + 100b + 10c + d$ maka $n = 1000a + 100b + 10c + d + 10^p + 10^q$ dengan p dan q adalah bilangan bulat berbeda, $p > q$ dan $0 \leq p, q \leq 3$.

$$\text{Misalkan } m = x^2 \text{ dan } n = y^2$$

$$n - m = (y + x)(y - x) = 10^p + 10^q$$

Jika x genap dan y ganjil atau x ganjil dan y genap maka $y + x$ dan $y - x$ keduanya ganjil $\rightarrow n - m$ ganjil.

Jika x dan y keduanya genap atau keduanya ganjil maka $y + x$ dan $y - x$ keduanya genap $\rightarrow n - m$ adalah bilangan genap habis dibagi 4.

Ada 6 kasus yang akan ditinjau :

- $p = 3$ dan $q = 2$

$$n - m = (y + x)(y - x) = 1100$$

Pasangan $(y + x, y - x)$ yang memenuhi adalah $(550, 2), (50, 22), (110, 10)$

* Jika $y + x = 550$ dan $y - x = 2$ didapat $y = 276$ dan $x = 274 \rightarrow n = 76176$ (tidak 4 angka)

* Jika $y + x = 50$ dan $y - x = 22$ didapat $y = 36$ dan $x = 14 \rightarrow m = 196$ (tidak 4 angka)

* Jika $y + x = 110$ dan $y - x = 10$ didapat $y = 60$ dan $x = 50 \rightarrow n = 3600$ dan $m = 2500$

- $p = 3$ dan $q = 1$

$$n - m = (y + x)(y - x) = 1010$$

Tidak ada nilai x dan y yang memenuhi sebab 1010 tidak habis dibagi 4.

- $p = 3$ dan $q = 0$

$$n - m = (y + x)(y - x) = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Pasangan $(y + x, y - x)$ yang memenuhi adalah $(1001, 1)$, $(143, 7)$, $(91, 11)$, $(77, 13)$

* Jika $y + x = 1001$ dan $y - x = 1$ didapat $y = 501$ dan $x = 500 \rightarrow m = 250000$ (tidak 4 angka)

* Jika $y + x = 143$ dan $y - x = 7$ didapat $y = 75$ dan $x = 68 \rightarrow n = 5625$ dan $m = 4624$

* Jika $y + x = 91$ dan $y - x = 11$ didapat $y = 51$ dan $x = 40 \rightarrow n = 2601$ dan $m = 1600$

* Jika $y + x = 77$ dan $y - x = 13$ didapat $y = 45$ dan $x = 32 \rightarrow n = 2025$ dan $m = 1024$

- $p = 2$ dan $q = 1$

$$n - m = (y + x)(y - x) = 110$$

Tidak ada nilai x dan y yang memenuhi sebab 110 tidak habis dibagi 4.

- $p = 2$ dan $q = 0$

$$n - m = (y + x)(y - x) = 101$$

Pasangan $(y + x, y - x)$ yang memenuhi adalah $(101, 1)$

Jika $y + x = 101$ dan $y - x = 1$ didapat $y = 51$ dan $x = 50 \rightarrow n = 2601$ dan $m = 2500$

- $p = 1$ dan $q = 0$

$$n - m = (y + x)(y - x) = 11$$

Pasangan $(y + x, y - x)$ yang memenuhi adalah $(11, 1)$.

Jika $y + x = 11$ dan $y - x = 1$ didapat $y = 6$ dan $x = 5 \rightarrow y = 36$ (bukan bilangan 4 angka)

Pasangan (m, n) yang memenuhi adalah $(2500, 3600)$, $(4624, 5625)$, $(1600, 2601)$, $(1024, 2025)$, dan $(2500, 2601)$

7. Sebuah fungsi f didefinisikan pada bilangan bulat yang memenuhi $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$ dan $f(1) = 1996$ untuk semua $n > 1$. Hitunglah nilai $f(1996)$.

(Sumber : British Mathematical Olympiad 1996 Round 1)

Solusi :

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1)$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$$

$$(n-1)^2 f(n-1) + f(n) = n^2 f(n)$$

$$(n-1)^2 f(n-1) = (n^2 - 1) f(n)$$

Karena $n \neq 1$ maka :

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{n-1}{n+1}$$

$$\frac{f(1996)}{f(1995)} \cdot \frac{f(1995)}{f(1994)} \cdot \frac{f(1994)}{f(1993)} \cdot \dots \cdot \frac{f(3)}{f(2)} \cdot \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{1995}{1997} \cdot \frac{1994}{1996} \cdot \frac{1993}{1995} \cdot \dots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{f(1996)}{f(1)} = \frac{2 \cdot 1}{1997 \cdot 1996}$$

$$f(1996) = \frac{2}{1997}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

8. Untuk sembarang nilai x , misalkan $\lfloor x \rfloor$ dinyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x . Didefinisikan $q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots$. Tentukan semua bilangan bulat positif n

yang memenuhi $q(n) > q(n+1)$.

(Sumber : British Mathematical Olympiad 1996 Round 1)

Solusi :

$\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ akan bertambah 1 nilainya jika n bergerak dari satu bilangan kuadrat ke bilangan kuadrat berikutnya.

Jika $m^2 \leq n < (m+1)^2$ untuk suatu bilangan asli m maka $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ akan bernilai tetap yaitu $= m$.

Interval di atas akan dibagi menjadi beberapa interval

- Untuk $m^2 \leq n \leq m^2 + m$

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = m$$

- Untuk $m^2 + m \leq n < m^2 + 2m$

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = m+1$$

- Untuk $n = m^2 + 2m$

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = m+2$$

- Untuk $n = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(m+1)^2}{m+1} \right\rfloor = m+1$$

Jika $m = 1$ maka $q(n) = m + 3$ sedangkan jika $n > 1$ maka

Dari persamaan diatas didapat bahwa untuk $n = m^2 + 2m = (m+1)^2 - 1$ dengan m bilangan asli akan membuat $q(n) > q(n+1)$

9. Misalkan a, b dan c adalah bilangan real positif. Buktikan bahwa :

(a) $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$

(b) $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)^3$

(Sumber : British Mathematical Olympiad 1996 Round 1)

Solusi :

- (a) Karena $a, b > 0$ maka $a+b > 0$ dan $(a-b)^2 \geq 0$

$$(a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 \geq 0$$

$$3a^3 + 3b^3 \geq 3a^2b + 3ab^2$$

$$4a^3 + 4b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3 \text{ (terbukti)}$$

- (b) Dari persamaan di atas didapat :

$$4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$4a^3 + 4b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$4(a^3 + c^3) \geq (a + c)^3$$

$$4a^3 + 4c^3 \geq a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$4(b^3 + c^3) \geq (b + c)^3$$

$$4b^3 + 4c^3 \geq b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) + (3)$$

$$8a^3 + 8b^3 + 8c^3 \geq 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2$$

$$7a^3 + 7b^3 + 7c^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

Dari ketidaksamaan AM-GM didapat :

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3}$$

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq 6abc \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$(4) + (5) :$$

$$9a^3 + 9b^3 + 9c^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3 \text{ (terbukti)}$$

10. N adalah bilangan asli 4 angka yang tidak berakhiran dengan angka 0 dan $R(N)$ menyatakan bilangan 4 angka dengan me-*revers* digit-digit N. (Dalam kasus ini *revers* artinya angka pertama N menjadi angka ke-4, angka ke-2 menjadi angka ke-3, angka ke-3 menjadi angka ke-4 dan angka ke-4 menjadi angka pertama). Sebagai contoh adalah $R(3275) = 5723$. Tentukan semua bilangan asli N yang memenuhi $R(N) = 4N + 3$.

(Sumber : British Mathematical Olympiad 1997 Round 1)

Solusi :

Misalkan $N = 1000a + 100b + 10c + d$ maka $R(N) = 1000d + 100c + 10b + a$

$$4N < 10000 \rightarrow N < 2500 \rightarrow a = 1 \text{ atau } 2$$

- Jika $a = 2$

Karena angka satuan $R(N) = 2$ maka angka satuan $4N = 9$ ($4N$ adalah bilangan ganjil)

Padahal $4N$ adalah bilangan genap (kontradiksi)

- Jika $a = 1$

Maka $d = 4, 5, 6$ atau 7 .

Karena angka satuan $R(N) = 1$ maka angka satuan $4N = 8$.

Nilai d yang memenuhi hanya $d = 7 \rightarrow N$ adalah bilangan ganjil.

$$7000 + 100c + 10b + 1 = 4000 + 400b + 40c + 28 + 3$$

$$2970 = 300b + 30c$$

$$99 = 10b + c$$

Hanya dipenuhi jika $b = 9$ dan $c = 9$

N yang memenuhi hanya $N = 1997$.

11. Diketahui x, y, z adalah bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ dan h adalah Faktor

Persekutuan Terbesar dari x, y, z . Buktikan bahwa $hxyz$ adalah bilangan kuadrat sempurna. Buktikan pula bahwa $h(y - x)$ adalah juga bilangan kuadrat sempurna.

(Sumber : British Mathematical Olympiad 1998 Round 2)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

Misalkan $x = ha$; $y = hb$ dan $z = hc$ maka $\text{FPB}(a, b, c) = 1$

Karena $x, y, z > 0$ maka $a, b, c > 0$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad \dots\dots\dots (1) \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \dots\dots\dots (2)$$

Dari persamaan (2) karena $a, b, c > 0$ maka didapat $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ dan $\frac{1}{a} > \frac{1}{c}$ berimplikasi $a < b$ dan $a < c$.

Maka akan ada bilangan asli m dan n yang membuat $b = a + m$ dan $c = a + n$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+m} + \frac{1}{a+n} \rightarrow (a+m)(a+n) = a(2a+m+n)$$

$$a^2 + ma + na + mn = 2a^2 + ma + na$$

$$a^2 = mn \quad \dots\dots\dots (3)$$

Jika $\text{FPB}(m, n) = d$ dengan $d > 1$ maka d juga akan membagi c .

Karena d membagi m dan juga c maka d juga membagi b .

Karena d membagi n dan juga c maka d juga membagi a .

Maka $\text{FPB}(a, b, c) = d$ dengan $d > 1$ (kontradiksi dengan fakta bahwa $\text{FPB}(a, b, c) = 1$)

Maka $\text{FPB}(m, n) = 1$

Dari persamaan (3) didapat m dan n masing-masing adalah bilangan kuadrat sempurna.

$$m = p^2 \text{ dan } n = q^2 \rightarrow a = pq$$

$$b + c = a + m + a + n = 2pq + p^2 + q^2 = (p + q)^2$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{b+c}{bc}$$

Karena a, b dan c bilangan asli maka $b + c = k$ dan $bc = ka$ untuk suatu bilangan asli k .

$$\text{Karena } b + c = (p + q)^2 \text{ maka } bc = (p + q)^2 a$$

$$hxyz = h^4 abc = h^4 a(p+q)^2 a = (h^2 a(p + q))^2 \text{ (terbukti)}$$

$$b - a = a + m - a = m = p^2$$

$$h(y - x) = h^2(b - a) = (hp)^2 \text{ (terbukti)}$$

Terbukti bahwa kedua bilangan $hxyz$ dan $h(y - x)$ adalah bilangan kuadrat sempurna.

12. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n maka $121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$ habis dibagi 2000.

(Sumber : British Mathematical Olympiad 2000 Round 1)

Solusi :

Dasar : $a^n - b^n$ habis dibagi $a - b$ untuk n bilangan asli.

$$121^n - (-4)^n \text{ habis dibagi } 125$$

$$1900^n - 25^n \text{ habis dibagi } 1875 \text{ sedangkan } 125 \mid 1875 \text{ maka } 125 \mid 1900^n - 25^n$$

$$121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n \text{ habis dibagi } 125$$

$$121^n - 25^n \text{ habis dibagi } 96 \text{ sedangkan } 16 \text{ membagi } 96. \text{ Maka } 16 \mid 121^n - 25^n$$

$$1900^n - (-4)^n \text{ habis dibagi } 1904 \text{ sedangkan } 16 \mid 1904. \text{ Maka } 16 \mid 1900^n - (-4)^n$$

$$121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n \text{ habis dibagi } 16.$$

Karena $121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$ habis dibagi 125 dan juga 16 sedangkan 125 dan 16 relatif prima maka $121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$ habis dibagi $125 \cdot 16 = 2000$

Terbukti bahwa $121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$ habis dibagi 2000.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

13. Tentukan semua bilangan bulat positif m, n dengan n bilangan ganjil yang memenuhi :

$$\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}.$$

(Sumber : British Mathematical Olympiad 2001/2002 Round 1)

Solusi :

$$12n + 48m = mn$$

$$(m - 12)(n - 48) = 576 = 3^2 \cdot 2^6$$

Karena n ganjil maka $n - 48$ juga ganjil.

Faktor ganjil dari 576 adalah 1, 3 dan 3^2 .

- Jika $n - 48 = 1$ maka $n = 49$

$$m - 12 = 576 \rightarrow m = 588$$

- Jika $n - 48 = 3$ maka $n = 51$

$$m - 12 = 192 \rightarrow m = 204$$

- Jika $n - 48 = 9$ maka $n = 57$

$$m - 12 = 64 \rightarrow m = 76$$

Pasangan (m, n) yang memenuhi adalah $(49, 588), (51, 204), (57, 76)$

14. Diberikan bahwa $34! = 295\ 232\ 799\ cd9\ 604\ 140\ 847\ 618\ 609\ 643\ 5ab\ 000\ 000$. Tentukan digit a, b, c dan d .

(Sumber : British Mathematical Olympiad 2002/2003 Round 1)

Solusi :

$34! = k \cdot 10^m$ dengan k, m bilangan asli dan k tidak habis dibagi 10.

$$m = \left\lfloor \frac{34}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{34}{5^2} \right\rfloor$$

$$m = 7$$

didapat $b = 0$

$$k = \frac{34!}{10^6}$$

$$k = 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 21 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3$$

Angka satuan k = satuan dari $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3$

Angka satuan $k = 2$

$$a = 2$$

Penjumlahan digit $34! = 2+9+5+2+3+2+7+9+9+c+d+9+6+0+4+1+4+0+8+4+7+6+1+8+6+0+9+6+4+3+5+2$

Penjumlahan digit $34! = 141 + c + d$

$$141 \leq 141 + c + d \leq 159$$

Karena 9 membagi $34!$ Maka 9 membagi $141 + c + d \rightarrow 141 + c + d = 144$ atau $141 + c + d = 153$

Karena 11 membagi $34!$ maka $2-9+5-2+3-2+7-9+9-c+d-9+6-0+4-1+4-0+8-4+7-6+1-8+6-0+9-6+4-3+5-2$ habis dibagi 11.

$19 - c + d$ habis dibagi 11.

$$10 \leq 19 - c + d \leq 28 \rightarrow 19 - c + d = 11 \text{ atau } 19 - c + d = 22$$

- Jika $141 + c + d = 144$

$$c + d = 3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

- * Jika $19 - c + d = 11$
 $d - c = -8$ (2)
 Dari persamaan (1) dan (2) didapat $d = -5/3$ (tidak memenuhi bahwa d bulat)
 - * Jika $19 - c + d = 22$
 $d - c = 3$ (3)
 Dari persamaan (1) dan (3) didapat $c = 0$ dan $d = 3$
 - Jika $141 + c + d = 153$
 $c + d = 12$ (4)
 - * Jika $19 - c + d = 11$
 $d - c = -8$ (5)
 Dari persamaan (4) dan (5) didapat $c = 10$ (tidak memenuhi bahwa $0 \leq c \leq 9$)
 - * Jika $19 - c + d = 22$
 $d - c = 3$ (6)
- Dari persamaan (4) dan (6) didapat $d = 15/2$ (tidak memenuhi bahwa d bulat)
 Maka dapat disimpulkan bahwa $a = 2$; $b = 0$; $c = 0$; $d = 3$

15. Selesaikan persamaan simultan :
 $ab + c + d = 3$, $bc + a + d = 5$, $cd + a + b = 2$, $da + b + c = 6$
 dengan a, b, c dan d adalah bilangan real.
 (Sumber : British Mathematical Olympiad 2003/2004 Round 1)

Solusi :

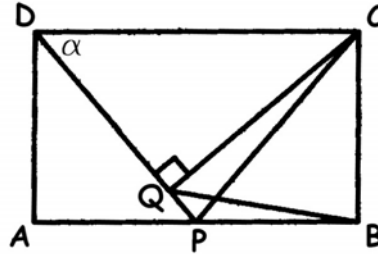
- $ab + c + d = 3$ (1)
 - $bc + a + d = 5$ (2)
 - $cd + a + b = 2$ (3)
 - $da + b + c = 6$ (4)
- $(1) + (2) = (3) + (4) \rightarrow ab + c + d + bc + a + d = cd + a + b + da + b + c$
 $b(a + c) + 2d = d(a + c) + 2b$
 $(b - d)(a + c) = 2(b - d)$
 $(b - d)(a + c - 2) = 0$
 $b = d$ atau $a + c = 2$
- Jika $b = d$
 Persamaan (2) $\rightarrow bc + a + b = 5$
 Persamaan (3) $\rightarrow bc + a + b = 2$
 Kontradiksi maka tidak ada nilai a, b, c dan d yang memenuhi.
 - Jika $a + c = 2$
 $(1) + (2) \rightarrow ab + bc + a + c + 2d = 8$
 $b(a + c) + a + c + 2d = 8$
 $b + d = 3$
 $(2) + (3) \rightarrow bc + cd + 2a + b + d = 7$
 $c(b + d) + 2a + b + d = 7$
 $3c + 2a = 4$
 $3c + 2(2 - c) = 4 \rightarrow c = 0 \rightarrow a = 2$
 Persamaan (2) $\rightarrow b(0) + (2) + d = 5 \rightarrow d = 3 \rightarrow b = 3 - (3) = 0$
 (a, b, c, d) yang memenuhi adalah $(2, 0, 0, 3)$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

16. ABCD adalah persegi panjang. P adalah titik tengah AB dan Q adalah titik pada PD sehingga CQ tegak lurus PD. Buktikan bahwa segitiga BQC sama kaki.

(Sumber : British Mathematical Olympiad 2003/2004 Round 1)

Solusi :



Misalkan $\angle CDP = \alpha$ maka $\angle DPA = \alpha$

Karena $\triangle DPC$ sama kaki maka $\angle PCD = \alpha$

Karena $\angle CQP + \angle CPB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ maka CBPQ adalah segiempat talibusur.

Karena $\angle DPB = 180^\circ - \alpha$ maka $\angle QCB = \alpha$.

$\angle PCB = 90^\circ - \angle DCP = 90^\circ - \alpha$

Karena CBPQ adalah segiempat talibusur maka $\triangle BCK$ sebangun dengan $\triangle KPQ$.

Akibatnya berlaku $\angle PQK = \angle KCB = 90^\circ - \alpha \rightarrow \angle BQC = \alpha$

Karena $\angle QCB = \angle BQC = \alpha$ maka segitiga BQC sama kaki (terbukti)

17. Diketahui x, y dan N adalah bilangan asli. Jika terdapat tepat 2005 pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$$

maka tunjukkan bahwa N adalah bilangan kuadrat.

(Sumber : British Mathematical Olympiad 2005 Round 2)

Solusi :

Karena simetris maka jika $x = a$ dan $y = b$ dengan $a \neq b$ merupakan penyelesaian maka $x = b$ dan $y = a$ adalah juga merupakan penyelesaian.

Karena pasangan (x, y) ada 2005 yang merupakan bilangan genap maka terdapat pasangan (x, y) yang merupakan penyelesaian dan $x = y$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N} \rightarrow N(x + y) = xy \rightarrow (x - N)(y - N) = N^2$$

$(x - N)$ adalah faktor dari N^2 . Karena ada 2005 nilai x maka banyaknya faktor dari N^2 ada 2005.

Karena $2005 = 5 \cdot 401 = 1 \cdot 2005$ maka kemungkinan bentuk N^2 ada 2, yaitu :

- $N^2 = p_1^{2004}$ dengan p_1 bilangan prima
 $N = p_1^{1002}$ yang merupakan bilangan kuadrat sebab 1002 genap
- $N^2 = p_1^4 p_2^{400}$ dengan p_1 dan p_2 bilangan prima
 $N = p_1^2 p_2^{200}$ yang merupakan bilangan kuadrat sebab 2 dan 200 genap.

Terbukti bahwa N adalah bilangan kuadrat.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

18. Misalkan n adalah bilangan bulat lebih dari 6. Buktikan bahwa $n - 1$ dan $n + 1$ keduanya prima maka $n^2(n^2 + 16)$ habis dibagi 720.

(Sumber : British Mathematical Olympiad 2005/2006 Round 1)

Solusi :

$$720 = 5 \cdot 3^2 \cdot 2^4$$

Akan dibuktikan bahwa $n^2(n^2 + 16)$ habis dibagi 5, 9 dan 16.

Karena $n > 6$ maka $n - 1$, n dan $n + 1$ semuanya lebih dari 5.

Sebuah bilangan akan termasuk ke dalam salah bentuk satu dari $5k - 2$, $5k - 1$, $5k$, $5k + 1$ atau $5k + 2$ n tidak mungkin berbentuk $5k - 1$ atau $5k + 1$ karena masing-masing akan menyebabkan $n + 1$ dan $n - 1$ habis dibagi 5.

$$\text{Jika } n = 5k \pm 2 \text{ maka } n^2(n^2 + 16) \equiv (\pm 2)^2((\pm 2)^2 + 16) \pmod{5} \equiv 4(4 + 16) \pmod{5} \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\text{Jika } n = 5k \text{ maka } 5 \mid n^2 \rightarrow n^2(n^2 + 16) \text{ habis dibagi } 5$$

Terbukti bahwa $n^2(n^2 + 16)$ habis dibagi 5

Sebuah bilangan akan termasuk ke dalam salah satu dari $3k - 1$, $3k$ atau $3k + 1$

Jika $n = 3k - 1$ atau $3k + 1$ tidak memenuhi bahwa $n - 1$ dan $n + 1$ keduanya prima.

$$\text{Jika } n = 3k \text{ maka } 9 \mid n^2 \rightarrow n^2(n^2 + 16) \text{ habis dibagi } 9$$

Terbukti bahwa $n^2(n^2 + 16)$ habis dibagi 9

Sebuah bilangan akan termasuk ke dalam salah satu dari $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ atau $4k + 3$

Karena n tidak mungkin ganjil sebab akan menyebabkan $n - 1$ dan $n + 1$ keduanya genap maka $n = 4k$ atau $4k + 2$

$$\text{Jika } n = 4k \text{ maka } 16 \mid n^2 \rightarrow n^2(n^2 + 16) \text{ habis dibagi } 16$$

$$\text{Jika } n = 4k + 2 \text{ maka } (n^2 + 16) \equiv 2^2 + 16 \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4} \text{ dan } n^2 \equiv 2^2 \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4}$$

Karena n^2 dan $n^2 + 16$ keduanya habis dibagi 4 maka $n^2(n^2 + 16)$ habis dibagi 16.

Atau

Karena $n - 1$ dan $n + 1$ keduanya prima lebih dari 5 maka n genap $\rightarrow n^2$ habis dibagi 4. Akibatnya n^2 dan $n^2 + 16$ keduanya habis dibagi 4 $\rightarrow n^2(n^2 + 16)$ habis dibagi $4 \cdot 4 = 16$

Terbukti bahwa $n^2(n^2 + 16)$ habis dibagi 5, 9 dan 16

Maka terbukti bahwa $n^2(n^2 + 16)$ habis dibagi 720.

19. Tunjukkan bahwa jika $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ dan p_1, p_2, p_3 adalah bilangan tak nol, maka

$$\left(\frac{a_1}{b_1} \right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n} \text{ untuk setiap bilangan asli } n.$$

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1969)

Solusi :

$$\text{Karena } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \text{ dan } p_1, p_2, p_3 \text{ bilangan tak nol maka } \left(\frac{a_1}{b_1} \right)^n = \frac{p_1 a_1^n}{p_1 b_1^n} = \frac{p_2 a_2^n}{p_2 b_2^n} = \frac{p_3 a_3^n}{p_3 b_3^n} \text{ dan}$$

$$\text{misalkan } \left(\frac{a_1}{b_1} \right)^n = \frac{p_1 a_1^n}{p_1 b_1^n} = \frac{p_2 a_2^n}{p_2 b_2^n} = \frac{p_3 a_3^n}{p_3 b_3^n} = k.$$

Dari persamaan di atas didapat :

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$kp_1b_1^n = p_1a_1^n \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$kp_2b_2^n = p_2a_2^n \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$kp_3b_3^n = p_3a_3^n \quad \dots\dots\dots (3)$$

Jumlahkan persamaan (1), (2) dan (3) untuk mendapatkan $k = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$. Karena $\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = k$

maka terbukti bahwa $\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$.

20. Tunjukkan yang manakah yang lebih besar $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}$ atau $\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$ untuk $c \geq 1$. Buktikan.
(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1969)

Solusi :

$$4c^2 - 4c + 1 > 4c^2 - 4c \rightarrow (2c-1)^2 > 4(c^2 - c)$$

$$2c-1 > 2\sqrt{c^2 - c} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$c^2 + c = c^2 - c + 1 + 2c - 1$$

Dari ketidaksamaan (1) didapat

$$c^2 + c > c^2 - c + 1 + 2\sqrt{c^2 - c}$$

Dengan menarik akar ketidaksamaan di atas dan mengambil yang positif saja maka :

$$\sqrt{c^2 + c} > \sqrt{c^2 - c} + 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Berdasarkan ketidaksamaan (2) maka :

$$2c+1 - 2\sqrt{c^2 - c} - 2 > 2c+1 - 2\sqrt{c^2 + c}$$

$$c + (c-1) - 2\sqrt{c^2 - c} > (c+1) + c - 2\sqrt{c^2 + c} \quad (\text{Tarik akar dan ambil akar positif})$$

$$\sqrt{c} - \sqrt{c-1} > \sqrt{c+1} - \sqrt{c}$$

21. Misalkan c adalah hipotenusa suatu segitiga siku-siku dengan kedua sisi yang lain adalah a dan b.
Buktikan bahwa $a + b \leq c\sqrt{2}$. Kapan tanda kesamaan terjadi ?

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1969)

Solusi :

Dari persamaan pitagoras didapat $2a^2 + 2b^2 = 2c^2$

Dari ketidaksamaan AM - GM didapat $a^2 + b^2 \geq 2ab$ dengan tanda kesamaan terjadi jika $a = b$. Maka :

$$a^2 + b^2 \leq 2c^2 - 2ab \rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq 2c^2 \rightarrow (a+b)^2 \leq 2c^2$$

$$a+b \leq c\sqrt{2} \quad (\text{terbukti}) \text{ dengan tanda kesamaan terjadi jika } a = b$$

22. Misalkan ABC adalah segitiga sama sisi dan titik P terletak di dalam segitiga tersebut. Dibuat garis PD, PE dan PF yang masing-masing tegak lurus ketiga sisi segitiga dan titik D, E dan F terletak pada

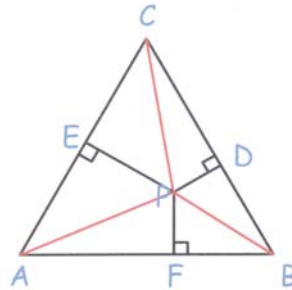
Kumpulan Soal dan Penyelesaian

masing-masing sisi yang berbeda. Tunjukkan bahwa di mana pun titik P akan berlaku

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + BC + CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1969)

Solusi :



Misalkan sisi segitiga ABC adalah s maka $AB = BC = AC = s$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} s^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{4} s^2 \sqrt{3}$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \text{Luas } \triangle ABP + \text{Luas } \triangle ACP + \text{Luas } \triangle BCP = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PD + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot PE + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PF$$

$$\frac{1}{4} s^2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot PD + \frac{1}{2} \cdot s \cdot PE + \frac{1}{2} \cdot s \cdot PF$$

$$\frac{PD + PE + PF}{3s} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

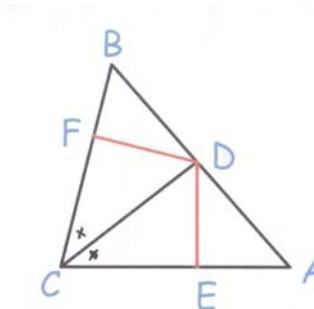
$$\frac{PD + PE + PF}{AB + BC + CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ (terbukti)}$$

23. Misalkan ABC adalah sebuah segitiga dengan sisi-sisinya a, b dan c. Garis bagi yang ditarik dari titik C

memotong AB di D. Buktikan bahwa panjang $CD = \frac{2abc \cos \frac{C}{2}}{a + b}$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1969)

Solusi :



Buat garis DE tegak lurus AC dengan E terletak pada sisi AC sehingga $DE = CD \sin \left(\frac{C}{2} \right)$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Buat garis DF tegak lurus BC dengan F terletak pada sisi BC sehingga $DF = CD \sin \left(\frac{C}{2} \right)$

Luas $\triangle ABC = \text{Luas } \triangle ACD + \text{Luas } \triangle BCD$

$$\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot b \cdot DE + \frac{1}{2} \cdot a \cdot DF = \frac{1}{2} (a + b) CD \sin \left(\frac{C}{2} \right)$$

Dengan mengingat bahwa $\sin C = 2 \sin \left(\frac{C}{2} \right) \cos \left(\frac{C}{2} \right)$ maka :

$$CD = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a + b} \text{ (terbukti)}$$

24. Tentukan penjumlahan $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n!$ dinyatakan dalam n dengan $n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1969)

Solusi :

Misal $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n! = P$

$$P = (2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + (4-1) \cdot 3! + \dots + (n-1) \cdot (n-1)! + (n+1-1) \cdot n!$$

$$P = 2 \cdot 1! + 3 \cdot 2! + 4 \cdot 3! + \dots + n \cdot (n-1)! + (n+1) \cdot n! - (1! + 2! + 3! + \dots + n!)$$

$$P = 2! + 3! + 4! + \dots + (n+1)! - (1! + 2! + 3! + \dots + n!)$$

$$P = (n+1)! - 1!$$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

25. Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat a , b dan c yang memenuhi $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1969)

Solusi :

Semua bilangan bulat pasti termasuk ke dalam satu satu dari bentuk $4k$, $4k+1$, $4k+2$ atau $4k+3$

- Untuk $N = 4k$

$$N^2 = 16k^2 \text{ (habis dibagi 8)}$$

- Untuk $N = 4k+1$

$$N^2 = (4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 \text{ (jika dibagi 8 bersisa 1)}$$

- Untuk $N = 4k+2$

$$N^2 = (4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 16(k^2 + k) + 4 \text{ (jika dibagi 8 bersisa 4)}$$

- Untuk $N = 4k+3$

$$N^2 = (4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 \text{ (jika dibagi 8 bersisa 1)}$$

Dari hal di atas didapat bahwa bilangan kuadrat jika dibagi 8 akan bersisa 0, 1 atau 4.

Sehingga $a^2 + b^2$ jika dibagi 8 akan bersisa 0, 1, 2, 4 atau 5.

$a^2 + b^2 - 8c$ jika dibagi 8 akan bersisa 0, 1, 2, 4 atau 5. Sedangkan ruas kanan jika dibagi 8 akan bersisa 6. Hal yang tidak mungkin terjadi.

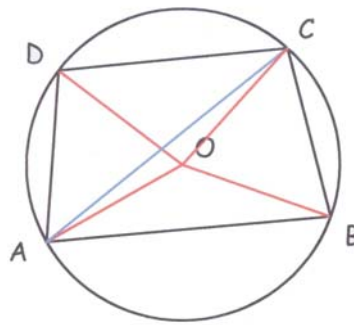
Tidak ada bilangan bulat a , b dan c yang memenuhi $a^2 + b^2 - 8c = 6$ (terbukti)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

26. Tunjukkan bahwa sebarang segiempat tali busur yang digambar pada lingkaran berjari-jari 1, maka panjang sisi yang terpendek tidak akan lebih dari $\sqrt{2}$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1969)

Solusi :



Misalkan ABCD adalah segiempat tali busur tersebut dan O adalah pusat lingkaran. Karena lingkaran tersebut juga merupakan lingkaran luar $\triangle ABC$ maka sesuai dalil sinus :

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R = 2 \quad \text{dengan } R \text{ menyatakan jari-jari lingkaran luar } \triangle ABC$$

Karena $\angle AOB = 2\angle ACB$ maka :

$$AB = 2 \sin \left(\frac{\angle AOB}{2} \right)$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$BC = 2 \sin \left(\frac{\angle BOC}{2} \right)$$

$$CD = 2 \sin \left(\frac{\angle COD}{2} \right)$$

$$AD = 2 \sin \left(\frac{\angle AOD}{2} \right)$$

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle AOD = 360^\circ$$

$$\text{Maka } \min(\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle AOD) \leq 90^\circ$$

Karena untuk $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ nilai $\sin x$ naik maka :

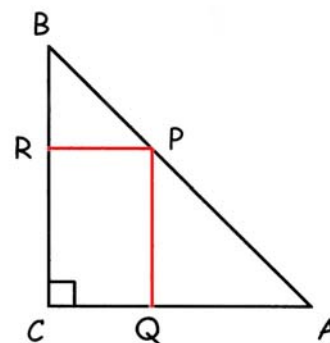
$$\min(AB, BC, CD, DA) \leq 2 \sin \left(\frac{90^\circ}{2} \right)$$

$$\min(AB, BC, CD, DA) \leq \sqrt{2}$$

Maka sisi yang terpendek dari segiempat tali busur tersebut tidak akan lebih dari $\sqrt{2}$ (terbukti)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

27. ABC adalah segitiga siku-siku sama kaki dengan C adalah sudut sikunya. panjang $AC = BC = 1$. P adalah titik yang terletak pada hipotenusa. Titik Q dan R masing-masing terletak pada sisi AC dan BC sehingga PQ dan PR tegak lurus sisi AC dan BC. Buktikan bahwa di manapun titik P berada, maka di antara ketiga luasan APQ, PBR dan QCRP maka yang terluas memiliki luasan sekurangnya $2/9$.



(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1969)

Solusi :

$$\triangle ABC \cong \triangle APQ \cong \triangle BPR$$

- Jika $AP \leq \frac{1}{3} AB$

$$\text{Luas } \triangle BPR = \frac{1}{2} BR \cdot RP \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} BC \right) \left(\frac{2}{3} AC \right)$$

$$\text{Luas } \triangle BPR \geq \frac{2}{9}$$

- Jika $\frac{1}{3} AB \leq AP \leq \frac{2}{3} AB$

$$\text{Luas segiempat QCRP} = PQ \cdot QC = AQ (AC - AQ) = AQ (1 - AQ)$$

$$\text{Karena } \frac{1}{3} AB \leq AP \leq \frac{2}{3} AB \text{ maka } \frac{1}{3} AC \leq AQ \leq \frac{2}{3} AC \rightarrow \frac{1}{3} \leq AQ \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{Luas segiempat QCRP} = -\left(AQ - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{Luas minimum QCRP didapat saat } AQ = 1/3 \text{ atau } AQ = 2/3$$

$$\text{Luas minimum segiempat QCRP} = \frac{2}{9}$$

- Jika $AP \geq \frac{2}{3} AB$

$$\text{Luas } \triangle APQ = \frac{1}{2} AQ \cdot PQ \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} BC \right) \left(\frac{2}{3} AC \right)$$

$$\text{Luas } \triangle APQ \geq \frac{2}{9}$$

Terbukti bahwa di manapun titik P berada, maka di antara ketiga luasan APQ, PBR dan QCRP maka yang terluas memiliki luasan sekurangnya $2/9$.

28. Tentukan semua tripel (x, y, z) yang memenuhi bahwa salah satu bilangan jika ditambahkan dengan hasil kali kedua bilangan yang lain hasilnya adalah 2.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1970)

Solusi :

$$x + yz = 2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y + xz = 2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$z + xy = 2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(1) - (2) \rightarrow x - y + z(y - x) = 0 \rightarrow x - y - z(x - y) = 0$$

$$(z - 1)(x - y) = 0 \rightarrow \text{Maka } z = 1 \text{ atau } x = y$$

- Untuk $z = 1$

$$x + y = 1$$

$$1 + xy = 2$$

$$x(1 - x) = 1 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \text{ (tidak ada penyelesaian real sebab Diskriminan } < 0)$$

- Untuk $x = y$

$$x + xz = 2$$

$$z + x^2 = 2$$

$$x - z + x(z - x) = 0$$

$$(x - 1)(x - z) = 0 \rightarrow x = 1 \text{ atau } x = z$$

- * Untuk $x = 1$

$$y = x = 1 \rightarrow z + 1 = 2 \rightarrow z = 1 \text{ tripel } (x, y, z) \text{ yang memenuhi adalah } (1, 1, 1)$$

- * untuk $x = z$

$$y = x = z \rightarrow x^2 + x = 2 \rightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 1 \text{ atau } x = -2$$

$$\text{tripel yang memenuhi adalah } (1, 1, 1) \text{ dan } (-2, -2, -2)$$

Semua tripel (x, y, z) yang memenuhi adalah $(1, 1, 1)$ dan $(-2, -2, -2)$

29. Tunjukkan bahwa di antara lima bilangan bulat kita dapat memilih tiga di antaranya yang memiliki jumlah habis dibagi 3.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1970)

Solusi :

Sebuah bilangan pasti termasuk ke dalam salah satu bentuk dari $3k_1$, $3k_2 + 1$ atau $3k_3 + 2$ dengan k_1 , k_2 dan k_3 semuanya bilangan bulat.

Jika terdapat tiga bilangan yang masing-masing berbentuk $3k_1$, $3k_2 + 1$ dan $3k_3 + 2$ maka penjumlahan ketiga bilangan tersebut pasti habis dibagi 3.

Jika kelima bilangan tersebut hanya masuk ke dalam dua dari tiga bentuk $3k_1$, $3k_2 + 1$ dan $3k_3 + 2$ maka sesuai dengan *Pigeon Hole Principle* terdapat sedikitnya 3 bilangan dengan bentuk yang sama. Penjumlahan ketiga bilangan ini akan habis dibagi 3.

Terbukti bahwa di antara lima bilangan bulat kita dapat memilih tiga di antaranya yang memiliki jumlah habis dibagi 3.

30. Diberikan polinomial $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ dengan koefisien a_1, a_2, \dots, a_n semuanya bilangan bulat dan ada 4 bilangan bulat berbeda a, b, c dan d yang memenuhi $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$. Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat k yang memenuhi $f(k) = 8$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1970)

Solusi :

Karena $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$ maka $f(x) - 5 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)q(x)$ dengan $q(x)$ adalah polinomial yang memiliki koefisien bilangan bulat.

Jika x sama dengan a, b, c atau d maka $f(x) = 5$ bukan 8.

Jika x bukan a, b, c atau d maka $x - a, x - b, x - c$ dan $x - d$ adalah bilangan bulat berbeda.

Agar ada $f(k) = 8$ maka $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)q(x) = 3$.

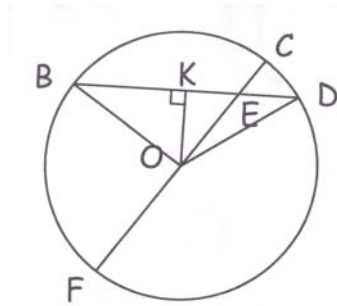
Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Tetapi 3 tidak bisa merupakan perkalian sekurangnya 4 bilangan bulat berbeda.
 Terbukti bahwa tidak ada bilangan bulat k yang memenuhi $f(k) = 8$.

31. DEB adalah tali busur suatu lingkaran dengan $DE = 3$ dan $EB = 5$. Misalkan O adalah pusat lingkaran. Hubungkan OE dan perpanjangan OE memotong lingkaran di titik C . Diketahui $EC = 1$. Tentukan radius lingkaran tersebut.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1971)

Solusi :



Misalkan radius lingkaran tersebut = r

Alternatif 1 :

Perpanjang OC sehingga memotong lingkaran di titik F . Maka CF adalah diameter lingkaran.

Segi empat $CBFD$ adalah segiempat tali busur dengan E adalah perpotongan kedua diagonal maka berlaku :

$$CE \cdot EF = DE \cdot EB$$

$$CE \cdot (2r - CE) = DE \cdot EB$$

$$1 \cdot (2r - 1) = 3 \cdot 5$$

$$r = 8$$

Alternatif 2 :

Karena BD adalah tali busur sedangkan O pusat lingkaran maka $BK = KD = 4$

$$OK^2 = OB^2 - BK^2 = OE^2 - KE^2$$

$$r^2 - 4^2 = (r - 1)^2 - (5 - 4)^2$$

$$r^2 - 16 = r^2 - 2r + 1 - 1$$

$$r = 8$$

Maka radius lingkaran tersebut = 8

32. Diketahui x dan y adalah bilangan real positif yang memenuhi $x + y = 1$. Buktikan bahwa

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1971)

Solusi :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{x+y}{xy} + \frac{1}{xy} = 1 + \frac{2}{xy}$$

Berdasarkan ketidaksamaan AM-GM

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Karena x dan y keduanya bilangan real positif maka :

$$\frac{1}{4} \geq xy \rightarrow \frac{2}{xy} \geq 8$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9 \text{ (terbukti)}$$

33. ABCD adalah segiempat dengan AD = BC. Jika $\angle ADC$ lebih besar dari $\angle BCD$, buktikan bahwa panjang $AC > BD$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1971)

Solusi :

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 AD CD \cos \angle ADC$$

$$BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2 CD BC \cos \angle BCD$$

Karena AD = BC maka :

$$AC^2 - BD^2 = 2 BC CD (\cos \angle BCD - \cos \angle ADC)$$

Karena $\angle ADC > \angle BCD$ maka untuk $0^\circ < x < 180^\circ$ berlaku $\cos \angle ADC < \cos \angle BCD$.

$$AC^2 - BD^2 > 0 \rightarrow AC^2 > BD^2$$

$AC > BD$ (terbukti)

34. Tentukan semua bilangan real a yang memenuhi bahwa dua polinomial $x^2 + ax + 1$ dan $x^2 + x + a$ memiliki sedikitnya satu akar yang sama.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1971)

Solusi :

Misalkan p adalah akar yang sama maka $p^2 + ap + 1 = 0$ dan $p^2 + p + a = 0$

Dengan mengurangkan kedua persamaan didapat :

$$ap + 1 - p - a = 0$$

$$(a - 1)(p - 1) = 0 \rightarrow a = 1 \text{ atau } p = 1$$

- Untuk $a = 1$

Kedua polinomial akan sama yaitu $x^2 + x + 1$. Namun diskriminan polinomial kurang dari 0. Maka tidak ada akar real.

- Untuk $p = 1$

$$x^2 + ax + 1 = (x - 1)(x - k)$$

Nilai $k = 1$ maka $a = -2$

$$x^2 + x + a = (x - 1)(x - a) = x^2 - (a + 1)x + a$$

$$1 = -(a + 1) \rightarrow a = -2$$

Nilai a yang memenuhi adalah $a = -2$

35. Diberikan polinomial $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ dengan koefisien a_1, a_2, \dots, a_n semuanya bilangan bulat. Jika $p(0)$ dan $p(1)$ keduanya bilangan ganjil, tunjukkan bahwa $p(x)$ tidak mempunyai akar bilangan bulat.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1971)

Solusi :

Karena $p(0)$ ganjil maka a_n merupakan bilangan ganjil

Karena $p(1)$ ganjil maka $1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ merupakan bilangan ganjil.

- Jika x adalah bilangan genap

Karena a_n ganjil maka $p(x)$ untuk x genap akan bernilai ganjil.

Sehingga berapa pun nilai x tidak akan didapat $p(x) = 0$ yang berakibat tidak mungkin bilangan genap merupakan akar persamaan $p(x) = 0$

- Jika x adalah bilangan ganjil

Maka paritas $p(x)$ akan sama dengan $p(1)$.

Berakibat berapa pun nilai x tidak akan didapat $p(x) = 0$ yang berakibat tidak mungkin ada bilangan ganjil yang merupakan akar persamaan $p(x) = 0$

Terbukti bahwa $p(x)$ tidak mempunyai akar bilangan bulat.

36. Untuk n bilangan bulat, tunjukkan bahwa $n^2 + 2n + 12$ bukan merupakan kelipatan 121.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1971)

Solusi :

Untuk bentuk $n = 11k, 11k + 1, 11k + 2, 11k + 3, 11k + 4, 11k + 5, 11k + 6, 11k + 7, 11k + 8, 11k + 9$ maka nilai $n^2 + 2n + 1$ tidak ada yang habis dibagi 11. (Bisa dibuktikan dengan memasukkan ke dalam persamaan tersebut). Hanya bentuk $11k + 10$ saja yang membuat $n^2 + 2n + 1$ habis dibagi 11.

Untuk $n = 11k + 10$ maka $n^2 + 2n + 12 = 121k^2 + 242k + 132 = 121(k^2 + 2k + 1) + 11$ maka :

$n^2 + 2n + 12$ jika dibagi 121 bersisa 11.

Terbukti bahwa $n^2 + 2n + 12$ bukan merupakan kelipatan 121.

37. Misalkan n adalah bilangan lima angka dan m adalah bilangan empat angka yang didapat dengan menghapus angka yang ada di tengah dari bilangan n . Tentukan semua nilai n yang memenuhi bahwa n/m adalah bilangan bulat.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1971)

Solusi :

Misalkan bilangan semula adalah $n = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$

$m = 1000a + 100b + 10d + e$

$10000a + 1000b + 100c + 10d + e = k(1000a + 100b + 10d + e)$ dengan $k \in \text{bilangan asli}$

- Untuk $k > 10$ maka $k_{\min} = 11$

$$1000a(k - 10) + 100b(k - 10) + 10d(k - 1) + e(k - 1) = 100c$$

$$\text{Nilai minimal ruas kiri} = 1000(1)(1) + 100(1)(1) + 10(1)(1) + 1(1) > 1000$$

$$\text{Nilai maksimal ruas kanan} = 100(9) = 900$$

Sehingga tidak ada nilai $k > 10$ yang memenuhi

- Untuk $k < 10$ maka $k_{\max} = 9$

$$1000a(10 - k) + 100b(10 - k) + 100c = 10d(k - 1) + e(k - 1)$$

$$\text{Nilai minimal ruas kiri} = 1000(1)(1) + 100(1)(1) + 100(1) > 1000$$

$$\text{Nilai maksimal ruas kanan} = 10(9)(8) + 9(8) < 1000$$

Sehingga tidak ada nilai $k > 10$ yang memenuhi

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

- Untuk $k = 10$
 $10000a + 1000b + 100c + 10d + e = 10000a + 1000b + 100d + 10e$
 $100c = 9(10d + e)$
 Karena 9 tidak membagi 100 maka c harus habis dibagi 9 $\rightarrow c = 0$ atau $c = 9$
 Untuk $c = 9$ tidak mungkin sebab $9(10d + e) \leq 9(90 + 9) < 900 \rightarrow$ maka $c = 0$
 Karena $c = 0$ maka $10d + e = 0$ yang berakibat $d = 0$ dan $e = 0$
 Maka $n = 10000a + 1000b$
 Nilai-nilai n yang memenuhi adalah 10000, 11000, 12000, 13000, ..., 99000

38. Diketahui bahwa masing-masing n orang mengetahui tepat 1 buah informasi yang saling berbeda. Jika salah seorang katakan A menelepon B maka A akan memberitahukan semua informasi yang dimilikinya kepada B sedangkan B tidak memberitahukan satu pun informasi yang diketahuinya kepada A. Berapakah panggilan telepon minimum yang diperlukan sehingga setiap orang tersebut akan mengetahui n informasi tersebut? Buktikan bahwa jawaban tersebut adalah yang paling minimum.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1971)

Solusi :

Orang ke- k akan menerima telepon setelah sedikitnya terjadi $k - 2$ telepon. Maka orang terakhir akan menerima panggilan yang pertama sedikitnya setelah terjadi $n - 2$ telepon. Setelah orang ke- n menerima telepon berarti sedikitnya telah terjadi $n - 1$ telepon. Semua informasi yang didapat oleh orang ke- n akan disebar kepada seluruh orang selain dirinya. Sedikitnya dibutuhkan $n - 1$ telepon.

Maka panggilan telepon minimum yang diperlukan sehingga setiap orang akan mengetahui n informasi adalah $2(n - 2)$

39. Buktikan bahwa persamaan $x^3 + 11^3 = y^3$ tidak memiliki solusi bilangan asli x dan y .

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1972)

Solusi :

Karena $x^3 + 11^3 = y^3$ maka $x^3 \equiv y^3 \pmod{11}$

Tetapi $0^3, 1^3, 2^3, \dots, 10^3 \equiv 0, 10, 3, 6, 2, 7, 4, 9, 5, 8, 1 \pmod{11}$ yang berarti semua sisanya berbeda.

Maka harus dipenuhi bahwa $x \equiv y \pmod{11}$ yang berarti harus dipenuhi $y = x + 11k$.

$$y^3 - x^3 = (x + 11k)^3 - x^3 = 3 \cdot 11k \cdot x^2 + 3(11k)^2x + 11k^3 > 11k^3 \geq 11^3.$$

Terbukti bahwa persamaan $x^3 + 11^3 = y^3$ tidak memiliki solusi bilangan asli x dan y .

40. Misalkan a dan b adalah bilangan real berbeda. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat m dan n yang memenuhi $am + bn < 0$ dan $bm + an > 0$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1972)

Solusi :

- Untuk $a > b$

Masukkan nilai $m = 1$ dan $n = -1$ maka $am + bn = a - b > 0$ dan $bm + an = b - a < 0$

- Untuk $a < b$

Masukkan nilai $m = -1$ dan $n = 1$ maka $am + bn = -a + b > 0$ dan $bm + an = -b + a < 0$

Terbukti bahwa terdapat bilangan bulat m dan n yang memenuhi $am + bn < 0$ dan $bm + an > 0$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

41. Buktikan bahwa jika p dan $p + 2$ keduanya bilangan prima lebih besar dari 3, maka 6 merupakan faktor dari $p + 1$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1973)

Solusi :

Karena merupakan tiga bilangan bulat berurutan maka salah satu dari p , $p + 1$ dan $p + 2$ pasti ada yang habis dibagi 3. Karena semuanya lebih dari 3 dan p serta $p + 2$ adalah bilangan prima maka dapat dipastikan $p + 1$ merupakan bilangan kelipatan 3.

Karena merupakan dua bilangan bulat berurutan maka salah satu dari $p + 1$ dan $p + 2$ pasti habis dibagi 2. Karena $p + 2$ bilangan prima maka $p + 1$ habis dibagi 2.

Karena $p + 1$ habis dibagi 2 dan juga habis dibagi 3 serta 2 dan 3 relatif prima maka $p + 1$ akan habis dibagi $2 \cdot 3 = 6$.

Terbukti bahwa 6 adalah faktor dari $p + 1$.

42. Untuk setiap bilangan asli n diketahui berlaku $h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Sebagai contoh, $h(1) = 1$,

$h(2) = 1 + \frac{1}{2}$, $h(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Buktikan bahwa untuk $n = 2, 3, 4, \dots$ maka berlaku persamaan berikut

$n + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(n-1) = nh(n)$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1973)

Solusi :

Dengan cara induksi matematika

- Untuk $n = 2$

$$2 + h(1) = 2 + 1 = 3$$

$$2h(2) = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 3 \text{ (memenuhi)}$$

- Andaikan benar untuk $n = k$ maka :

$$k + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(k-1) = kh(k)$$

- Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$ yaitu $(k + 1) + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(k) = (k + 1)h(k + 1)$

$$(k + 1) + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(k) = k + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(k) + 1 = kh(k) + h(k) + 1$$

$$(k + 1) + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(k) = (k + 1)h(k) + 1$$

$$(k + 1) + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(k) = (k + 1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} \right) + 1$$

$$(k + 1) + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(k) = (k + 1) \left(h(k+1) - \frac{1}{k+1} \right) + 1$$

$$(k + 1) + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(k) = (k + 1)h(k+1) - 1 + 1$$

$$(k + 1) + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(k) = (k + 1)h(k+1) \text{ (terbukti)}$$

Terbukti bahwa persamaan $n + h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(n-1) = nh(n)$ berlaku untuk $n = 2, 3, 4, \dots$

43. Misalkan ABCD adalah persegi panjang dengan $BC = 3AB$. Tunjukkan bahwa jika P, Q adalah titik yang terletak pada sisi BC sehingga $BP = PQ = QC$ maka $\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1974)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

Misalkan $AB = p$ maka $BC = 3p \rightarrow BP = PQ = QC = p$

Alternatif 1 :

$$\operatorname{tg} \angle DBC = \frac{1}{3} \quad ; \quad \operatorname{tg} \angle DPC = \frac{1}{2} \quad ; \quad \operatorname{tg} \angle DQC = 1$$

$$\operatorname{tg} (\angle DBC + \angle DPC) = \frac{\operatorname{tg} \angle DBC + \operatorname{tg} \angle DPC}{1 - \operatorname{tg} \angle DBC \cdot \operatorname{tg} \angle DPC}$$

$$\operatorname{tg} (\angle DBC + \angle DPC) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1 = \operatorname{tg} \angle DQC$$

$$\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC$$

Alternatif 2 :

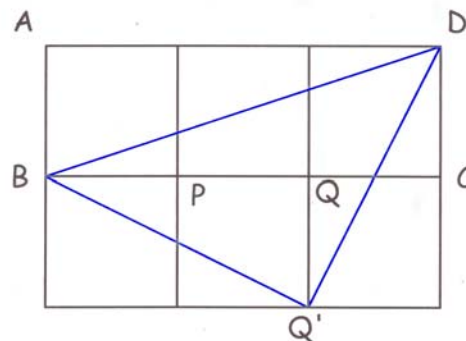
$$\angle DBQ' = \angle DBC + \angle Q'BC = \angle DBC + \angle DPC$$

$$BQ' = \sqrt{5}p \quad Q'D = \sqrt{5}p \quad DB = \sqrt{10}p$$

Karena $(BQ')^2 + (Q'D)^2 = (DB)^2$ dan $BQ' = Q'D$ maka $\triangle BQ'D$ adalah segitiga siku-siku sama kaki.

$$\angle DBC + \angle DPC = 45^\circ$$

$$\therefore \angle DBC + \angle DPC = \angle DQC$$



44. Tentukan nilai $\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + n \cdot 3n \cdot 9n} \right)^{1/3}$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1975)

Solusi :

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + n \cdot 3n \cdot 9n} \right)^{1/3} = \left(\frac{(2^3)(1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + \dots + n \cdot n \cdot n)}{(3^3)(1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + \dots + n \cdot n \cdot n)} \right)^{1/3}$$

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + n \cdot 3n \cdot 9n} \right)^{1/3} = \frac{2}{3}$$

45. Barisan a_1, a_2, a_3, \dots memenuhi $a_1 = \frac{1}{2}$ dan $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2 a_n$ untuk $n \geq 1$. Tentukan nilai a_n .

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1975)

Solusi :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2 a_n \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = n^2 a_n - a_n$$

$$(n-1)^2 a_{n-1} = (n^2 - 1) a_n = (n-1)(n+1) a_n$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1} \rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{2 \cdot 1}{(n+1) \cdot n}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

46. Pada sebuah bilangan positif 3,27, angka 3 merujuk pada bagian bulat dari bilangan dan ,27 merujuk pada bagian desimal. Tentukan bilangan positif yang memenuhi bagian desimal, bagian bulat dan bilangan itu sendiri membentuk barisan geometri.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1975)

Solusi :

Misalkan bilangan tersebut adalah x , bagian bulat = $\lfloor x \rfloor = n$ dan desimal = y

n tidak mungkin 0 maka $x \geq 1$

Karena y , n dan x merupakan barisan geometri maka $n^2 = xy$

$$x = n + y \rightarrow n^2 = (n + y)y = ny + y^2$$

$$\left(n - \frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{5}{4}y^2$$

- Untuk $n \geq 2$

$$\text{Karena } 0 \leq y < 1 \text{ maka nilai minimal ruas kiri} = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{Nilai maksimal ruas kanan} = \frac{5}{4}$$

Maka tidak ada nilai $n \geq 2$ yang memenuhi

- Untuk $n = 1$

$$1^2 = y + y^2$$

$$y^2 + y - 1 = 0$$

$$\text{Ambil akar positif maka } y = \frac{-1 + \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = n + y = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Bilangan positif tersebut adalah } \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

47. (i) 15 kursi diatur melingkar dengan terdapat nama pada kursi tersebut yang disediakan untuk 15 tamu. Para tamu tidak mengetahui nama pada kursi tersebut sampai dengan mereka duduk. Jika tidak ada satupun di antara ke-15 tamu tersebut yang duduk pada kursi yang sesuai dengan namanya, maka buktikan bahwa kita dapat memutar kursi sedemikian sehingga sedikitnya 2 orang tamu akan duduk pada kursi yang sesuai dengan namanya.
- (ii) Berikan contoh sebuah susunan sehingga hanya satu orang tamu yang duduk pada kursi yang sesuai dengan namanya dan bila kursi tersebut diputar tidak akan ada tamu yang duduk sesuai namanya lebih dari satu orang.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1975)

Solusi :

Ada 15 kemungkinan posisi kursi.

Andaikan bahwa dalam setiap kemungkinan paling banyak orang yang duduk pada kursi yang sesuai dengan namanya hanya 1 orang. Maka dalam masing-masing putaran harus ada tepat satu orang yang duduk pada kursi yang sesuai dengan namanya.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Tetapi 1 dari 15 kemungkinan posisi kursi sudah jelas bahwa tidak ada satupun orang yang duduk pada kursi yang sesuai dengan namanya.

Karena tinggal terdapat 14 kemungkinan posisi kursi sedangkan posisi orang yang duduk pada kursi yang sesuai dengan namanya masih 15 kemungkinan maka sesuai dengan *Pigeon Hole Principle* terbukti ada cara kita memutar kursi sehingga sedikitnya 2 orang tamu akan duduk pada kursi yang sesuai dengan namanya.

Contoh susunan yang dimaksud adalah :

Kursi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Orang	1	9	2	10	3	11	4	12	5	13	6	14	7	15	8

Bagaimanapun kita memutar kursi tersebut hanya ada paling banyak satu orang yang duduk pada kursi yang sesuai dengan namanya.

48. Fungsi $f(x)$ dikatakan *periodik* bila terdapat bilangan positif p yang memenuhi $f(x + p) = f(x)$ untuk semua nilai x . Sebagai contoh, $\sin x$ periodik dengan perioda 2π . Apakah fungsi $\sin(x^2)$ periodik ? Buktikan.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1975)

Solusi :

$\sin(x^2) = 0$ saat $x = \sqrt{k\pi}$ dan ini bukan bentuk barisan aritmatika. Maka $\sin(x^2)$ tidak periodik.

49. Diberikan empat buah benda dengan berat masing-masing membentuk barisan geometri dan sebuah neraca (*balance*). Penggunaan neraca adalah dengan menaruh satu atau beberapa benda pada salah satu ujungnya dan satu atau beberapa benda pada ujung yang lainnya. Timbangan ini hanya untuk mengetahui bagian mana yang lebih berat. Tunjukkan bagaimana caranya untuk menentukan benda yang terberat dengan hanya menggunakan neraca tersebut sebanyak dua kali. Buktikan jawaban Anda.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1976)

Solusi :

Misalkan berat benda tersebut adalah w , wr , wr^2 dan wr^3 dengan $r > 1$. Maka wr^3 adalah benda terberat.

Karena $r > 1$ maka $r^2(r-1) > (r-1) \rightarrow wr^2(r-1) > w(r-1)$

$$wr^3 + w > wr^2 + wr$$

Dari persamaan di atas kita dapatkan bahwa bila benda terberat digabungkan dengan benda mana pun akan lebih berat dari penggabungan dua benda yang lain.

Maka langkah yang akan dilakukan adalah :

- membagi keempat benda menjadi dua bagian dengan masing-masing terdiri dari dua benda, lalu menimbanginya. Benda yang terberat di antara keempat benda tersebut akan termasuk ke dalam bagian yang lebih berat.
- Dua benda yang termasuk ke dalam bagian yang lebih berat kembali ditimbang, maka benda yang lebih berat adalah merupakan benda yang terberat di antara keempat benda tersebut.

50. Dua orang siswa kelas tujuh mengikuti suatu kompetisi catur dengan seluruh peserta selain mereka adalah siswa kelas delapan. Masing-masing peserta akan bertemu tepat satu kali dengan masing-masing lawan dengan ketentuan penilaian : 1 jika menang, setengah jika remis sedangkan jika kalah 0.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Total nilai yang diperoleh kedua siswa kelas tujuh adalah 8 sedangkan semua siswa kelas delapan memperoleh nilai yang sama. Berapa banyak siswa kelas delapan yang mengikuti kompetisi ?

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1976)

Solusi :

Misalkan jumlah siswa kelas delapan = n maka banyaknya pertandingan = $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ = nilai total.

Misalkan masing-masing nilai siswa kelas delapan = k maka

$$8 + nk = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \rightarrow n^2 - (2k-3)n - 14 = 0.$$

Karena k adalah bilangan asli maka penjumlahan kedua nilai n merupakan bilangan bulat.

Karena hasil kali kedua nilai $n = -14$ maka kedua nilai n pasti bulat.

Maka kemungkinan kedua nilai n adalah $(1, -14)$, $(2, -7)$, $(7, -2)$ dan $(14, -1)$ yang masing-masing jika dijumlahkan secara berurutan akan diperoleh $-13, -5, 5, 13$.

* Untuk $2k - 3 = -13 \rightarrow k = -5$ (tidak memenuhi)

* Untuk $2k - 3 = -5 \rightarrow k = -1$ (tidak memenuhi)

* Untuk $2k - 3 = 5 \rightarrow k = 4$

* Untuk $2k - 3 = 13 \rightarrow k = 8$

Akan dicek kedua kemungkinan nilai k tersebut.

- Jika $k = 4$

nilai n positif yang memenuhi adalah 7. Nilai total = $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36$. Maka nilai total ketujuh siswa kelas delapan = $36 - 8 = 28$ yang berarti masing-masing siswa kelas delapan memperoleh nilai 4.

- Jika $k = 8$

nilai n positif yang memenuhi adalah 14. Nilai total = $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 = 120$. Maka nilai total keempat belas siswa kelas delapan = $120 - 8 = 112$ yang berarti masing-masing siswa kelas delapan memperoleh nilai 8.

51. Buktikan bahwa sebuah bilangan bulat positif yang merupakan penjumlahan sedikitnya dua bilangan asli berurutan hanya dapat dipenuhi jika dan hanya jika bilangan tersebut bukan berbentuk 2^k dengan k bilangan asli.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1976)

Solusi :

Ada dua hal yang harus dibuktikan yaitu :

- jika sebuah bilangan yang merupakan penjumlahan sedikitnya dua bilangan asli maka bilangan tersebut bukan berbentuk 2^k .
- jika suatu bilangan bukan berbentuk 2^k maka bilangan tersebut merupakan penjumlahan sedikitnya dua bilangan asli.

$$\text{Jika } N = (m+1) + (m+2) + (m+3) + \dots + (m+n) = \frac{1}{2}n(2m+n+1) \text{ dengan } n \geq 2$$

Jika $n \geq 2$ maka $2m+n+1$ dan n akan berbeda paritas sehingga N akan mempunyai faktor bilangan ganjil sehingga tidak mungkin N akan berbentuk 2^k .

Terbukti bahwa jika sebuah bilangan yang merupakan penjumlahan sedikitnya dua bilangan asli maka bilangan tersebut bukan berbentuk 2^k .

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Andaikan N tidak berbentuk 2^k maka dapat ditulis $2N = ab$ dengan $a > b > 1 \in$ bilangan asli serta a dan b berbeda paritas. Jika $a = n + 2m + 1$ dan $b = n$ maka $m = \frac{1}{2}(a - b - 1)$. Karena a dan b berbeda paritas maka $a - b - 1$ genap yang berarti m dan n adalah bilangan asli. Karena $b > 1$ maka $n \geq 2$. Maka kita dapat membuat $N = (m + 1) + (m + 2) + (m + 3) + \dots + (m + n)$ yang merupakan penjumlahan sedikitnya dua bilangan asli.

Terbukti bahwa jika suatu bilangan bukan berbentuk 2^k maka bilangan tersebut merupakan penjumlahan sedikitnya dua bilangan asli.

Dapat dibuktikan bahwa bahwa sebuah bilangan bulat positif yang merupakan penjumlahan sedikitnya dua bilangan asli berurutan hanya dapat dipenuhi jika dan hanya jika bilangan tersebut bukan berbentuk 2^k dengan a bilangan asli.

52. Misalkan $P(x, y)$ adalah polinomial dengan dua variabel x, y yang memenuhi $P(x, y) = P(y, x)$ untuk setiap x, y (sebagai contoh polinomial $x^2 - 2xy + y^2$ memenuhi kondisi demikian). Jika $(x - y)$ adalah faktor dari $P(x, y)$, maka tunjukkan bahwa $(x - y)^2$ adalah faktor dari $P(x, y)$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1976)

Solusi :

Karena $(x - y)$ adalah faktor dari $P(x, y)$ maka $P(x, y) = (x - y) q(x, y)$

Karena $P(x, y) = P(y, x)$ maka $(x - y) q(x, y) = (y - x) q(y, x) \rightarrow q(y, x) = -q(x, y)$

Akibatnya $q(x, x) = 0 \rightarrow q(x, y)$ mempunyai faktor $(x - y) \rightarrow q(x, y) = (x - y) f(x, y)$

$P(x, y) = (x - y)^2 f(x, y)$

Terbukti bahwa $(x - y)^2$ adalah faktor dari $P(x, y)$.

53. Jika $f(x) = x^2 + x$, buktikan bahwa persamaan $4f(a) = f(b)$ tidak mempunyai solusi a dan b bilangan asli. (Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1977)

Solusi :

Persoalan di atas sama dengan membuktikan bahwa tidak ada solusi a dan b bilangan asli yang memenuhi $4a^2 + 4a = b^2 + b$.

Anggap bahwa terdapat bilangan asli a dan b yang memenuhi $4a^2 + 4a = b^2 + b$.

- Jika $b > 2a$

Karena a dan b bilangan asli maka $b + 1 \geq 2a + 2$

$b(b + 1) > 2a(2a + 2)$

$b^2 + b > 4a^2 + 4a$ yang berarti tidak ada bilangan asli a dan b yang memenuhi $4a^2 + 4a = b^2 + b$

- Jika $b < 2a$

Karena a dan b bilangan asli maka $b + 1 \leq 2a$

$b(b + 1) < 2a \cdot 2a \rightarrow b(b + 1) < 4a^2$

$b(b + 1) < 4a^2 + 4a$ yang berarti tidak ada bilangan asli a dan b yang memenuhi $4a^2 + 4a = b^2 + b$

- Jika $b = 2a$

$b(b + 1) = 2a(2a + 1) = 4a^2 + 2a$ yang tidak sama dengan $4a^2 + 4a$ untuk a bilangan asli.

Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli a dan b yang memenuhi $4a^2 + 4a = b^2 + b$.

54. Misalkan $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ dan $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0$ adalah dua polinomial dengan koefisien-koefisiennya bilangan bulat. Diketahui bahwa semua koefisien

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

hasil kali $p(x) \cdot q(x)$ adalah bilangan genap tetapi tidak semua habis dibagi 4. Tunjukkan bahwa satu dari $p(x)$ dan $q(x)$ mempunyai koefisien bilangan genap dan polinomial yang lainnya memiliki sedikitnya satu koefisien bilangan ganjil.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1977)

Solusi :

Andaikan masing-masing polinomial memiliki sedikitnya satu koefisien bilangan ganjil.

Misalkan a_i adalah koefisien bilangan ganjil dari $p(x)$ dengan i adalah nilai terkecil dan b_j adalah koefisien bilangan ganjil dari $q(x)$ dengan j adalah nilai terkecil.

Mengingat bilangan genap \times bilangan bulat menghasilkan bilangan genap maka $a_x b_r$ dan $b_y a_s$ dengan $x < i$ dan $y < j$ akan menghasilkan koefisien genap.

Koefisien x^{i+j} dari perkalian $p(x) \cdot q(x)$ merupakan penjumlahan koefisien $a_h b_k$ dengan $h + k = i + j$.

Jika $h > i$ maka $k < j$ dan sebaliknya jika $k > i$ maka $h < i$ yang mengakibatkan semua koefisien $a_h b_k$ kecuali untuk $h = i$ dan $k = j$ merupakan bilangan genap. Akibatnya koefisien x^{i+j} merupakan bilangan ganjil. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa semua koefisien $p(x) \cdot q(x)$ merupakan bilangan genap. Maka sedikitnya satu dari kedua polinomial memiliki koefisien yang semuanya bilangan genap.

Tanpa mengurangi keumuman soal anggap bahwa $p(x)$ memiliki koefisien-koefisien yang semuanya bilangan genap $\rightarrow a_h$ genap untuk $0 \leq h \leq n$.

Jika $q(x)$ juga memiliki koefisien yang semuanya merupakan bilangan genap maka $a_h b_k$ untuk $0 \leq h \leq n$ dan $0 \leq k \leq m$ semuanya akan merupakan bilangan yang habis dibagi 4. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa tidak semua koefisien $p(x) \cdot q(x)$ habis dibagi 4. Maka sedikitnya satu dari koefisien-koefisien $q(x)$ adalah bilangan ganjil.

Terbukti bahwa satu dari $p(x)$ dan $q(x)$ mempunyai koefisien bilangan genap dan polinomial yang lainnya memiliki sedikitnya satu koefisien bilangan ganjil.

55. n adalah bilangan bulat. Jika angka puluhan n^2 adalah tujuh, apakah angka satuan dari n^2 ?

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1978)

Solusi :

Angka satuan dari bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Tetapi 70 dan 74 jika dibagi 4 bersisa 2 yang membuat bilangan dengan dua angka terakhir 70 dan 74 tidak mungkin bilangan kuadrat.

Karena 71, 75 dan 79 jika dibagi 4 bersisa 3 maka bilangan dengan dua angka terakhir 71, 75 dan 79 tidak mungkin bilangan kuadrat.

Karena 576 merupakan bilangan kuadrat maka angka satuan dari n adalah 6.

56. Tentukan semua pasangan bilangan asli a dan b yang memenuhi persamaan $2a^2 = 3b^3$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1978)

Solusi :

b harus habis dibagi 2 akibatnya b^3 habis dibagi 8 sehingga $2a^2$ juga habis dibagi 8. Maka 2 membagi a . a harus habis dibagi 3 akibatnya a^2 habis dibagi 9 sehingga 9 membagi $3b^3$. Maka 3 membagi b yang berakibat 81 membagi $3b^3 \rightarrow 81$ membagi $2a^2 \rightarrow 9$ membagi a .

Karena 2 dan 9 membagi a serta 2 dan 9 relatif prima maka 18 membagi a . Misalkan $a = 18k$

Karena 2 dan 3 membagi b serta 2 dan 3 relatif prima maka 6 membagi b . Misalkan $b = 6m$

$$2(18k)^2 = 3(6m)^3 \rightarrow 648k^2 = 648m^3 \rightarrow k^2 = m^3$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Maka k adalah bilangan kubik yang akan kita dapatkan $a = 18(n^3) = 18n^3$
 m adalah bilangan kuadrat yang akan kita dapatkan $b = 6(n^2) = 6n^2$
 Pasangan (a, b) yang memenuhi adalah $(18n^3, 6n^2)$ dengan n adalah bilangan asli.

57. Tentukan nilai terbesar z yang memenuhi $x + y + z = 5$ dan $xy + yz + xz = 3$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1978)

Solusi :

$$(x + y + z)^2 = 5^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 25 \rightarrow x^2 + y^2 = 19 - z^2$$

$$x + y = 5 - z$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25 - 10z + z^2$$

$$19 - z^2 + 2xy = 25 - 10z + z^2$$

$$\text{Mengingat bahwa } 2xy \leq x^2 + y^2$$

$$19 - z^2 + 2xy \leq 19 - z^2 + x^2 + y^2$$

$$25 - 10z + z^2 \leq 19 - z^2 + 19 - z^2$$

$$3z^2 - 10z - 13 \leq 0$$

$$(3z - 13)(z + 1) \leq 0$$

$$-1 \leq z \leq \frac{13}{3}$$

$$z_{\text{maks}} = \frac{13}{3} \text{ yang didapat saat } x = y = \frac{1}{2} \left(5 - \frac{13}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

58. Diberikan 3 buah data (i) $a, b > 0$; (ii) a, A_1, A_2, b adalah barisan aritmatika ; (iii) a, G_1, G_2, b adalah barisan geometri. Tunjukkan bahwa $A_1 A_2 \geq G_1 G_2$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1979)

Solusi :

Misalkan a, A_1, A_2, b adalah barisan aritmatika dengan beda d maka

$$b - a = 3d \rightarrow A_1 = a + d \text{ dan } A_2 = a + 2d$$

$$A_1 A_2 = (a + d)(a + 2d) = a^2 + 3ad + 2d^2$$

Karena a, G_1, G_2, b adalah barisan geometri maka $G_1 G_2 = ab$

$$G_1 G_2 = a(a + 3d) = a^2 + 3ad \leq a^2 + 3ad + 2d^2 \text{ karena } d^2 \geq 0$$

Terbukti bahwa $A_1 A_2 \geq G_1 G_2$

(Catatan : tanda kesamaan terjadi bila $d = 0$ yang berakibat $a = A_1 = A_2 = b = G_1 = G_2$)

59. Misalkan a, b, c, d, e adalah bilangan bulat yang memenuhi $1 \leq a < b < c < d < e$. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16} \text{ dengan } [m, n] \text{ menyatakan Kelipatan Persekutuan Terkecil dari } m$$

dan n . Contoh $[4, 6] = 12$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1979)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

* Untuk $a = 1$

- Jika $b = 2$

- Untuk $c = 3$

$[b, c] = 6$

- Jika $d = 4$

$[c, d] = 12$

$[d, e] \geq 8$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $e = 8$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{48}{96} + \frac{16}{96} + \frac{8}{96} + \frac{12}{96} = \frac{14}{16}$$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16}$$

- Jika $d \geq 5$

$[c, d] \geq 6$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $d = 6$

$[d, e] \geq 10$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $e = 10$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{15}{30} + \frac{5}{30} + \frac{5}{30} + \frac{3}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16}$$

- Untuk $c = 4$

$[b, c] = 4$

- Jika $5 \leq d \leq 7$

$[c, d] \geq 12$ dengan tanda kesamaan didapat bila $c = 4$ dan $d = 6$

$[d, e] \geq 10$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $d = 5$ dan $e = 10$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} = \frac{30}{60} + \frac{15}{60} + \frac{5}{60} + \frac{6}{60} = \frac{56}{60} = \frac{14}{15}$$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16}$$

- Jika $d \geq 8$

$[c, d] \geq 8$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $c = 4$ dan $d = 8$

$[d, e] \geq 16$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $d = 8$ dan $e = 16$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16}$$

- Jika $c \geq 5$

$[b, c] \geq 6$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $b = 2$ dan $c = 6$

$[c, d] \geq 10$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $c = 5$ dan $d = 10$

$[d, e] \geq 12$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $d = 6$ dan $e = 12$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{30}{60} + \frac{10}{60} + \frac{6}{60} + \frac{5}{60} = \frac{51}{60} = \frac{17}{20}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16}$$

- Jika $b \geq 3$

$[a, b] \geq 3$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $a = 1$ dan $b = 3$

$[b, c] \geq 6$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $b = 3$ dan $c = 6$

$[c, d] \geq 8$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $c = 4$ dan $d = 8$

Karena $a < b < c < d < e$ maka $d \geq 5$

$[d, e] \geq 10$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $d = 5$ dan $e = 10$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{40}{120} + \frac{20}{120} + \frac{15}{120} + \frac{12}{120} = \frac{87}{120} < \frac{88}{120} = \frac{11}{15}$$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16}$$

- * Jika $a \geq 2$

$[a, b] \geq 6$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $a = 2$ dan $b = 3$

$[b, c] \geq 6$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $b = 3$ dan $c = 6$

Karena $a < b < c < d < e$ maka $c \geq 4$

$[c, d] \geq 8$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $c = 4$ dan $d = 8$

$[d, e] \geq 10$ dengan tanda kesamaan terjadi bila $d = 5$ dan $e = 10$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{20}{120} + \frac{20}{120} + \frac{15}{120} + \frac{12}{120} = \frac{67}{120} < \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16}$$

Terbukti bahwa jika a, b, c, d, e adalah bilangan bulat yang memenuhi $1 \leq a < b < c < d < e$ maka

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16}$$

60. Jika $a679b$ adalah bilangan lima angka yang habis dibagi 72, tentukan nilai a dan b .

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1980)

Solusi :

$72 = 9 \cdot 8$. Karena 9 dan 8 relatif prima maka $a679b$ harus habis dibagi 8 dan 9. Karena $a679$ habis dibagi 8 maka $79b$ habis dibagi 8. Agar $790 + b$ habis dibagi 8 maka $b = 2$.

Karena $a6792$ habis dibagi 9 maka $a + 6 + 7 + 9 + 2$ habis dibagi 9. Nilai a yang memenuhi hanya 3.

Jadi bilangan tersebut adalah 36792.

61. Angka 1 sampai 50 masing-masing ditulis pada satu kartu. Kelima puluh kartu tersebut disusun secara acak dalam sepuluh kolom yang masing-masing terdiri dari 5 baris. Pada masing-masing baris angka-angka tersebut disusun secara naik dari kiri ke kanan. Pada masing-masing kolom angka-angka tersebut juga disusun secara naik dari atas ke bawah. Pada akhirnya, apakah susunan pada masing-masing baris tetap bertambah ? Buktikan.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1980)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

Setelah masing-masing baris disusun maka misalkan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ adalah bilangan-bilangan pada baris pertama, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{10}$ adalah bilangan-bilangan pada baris kedua dan seterusnya sampai $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{10}$ adalah bilangan-bilangan pada baris kelima.

Setelah masing-masing kolom disusun kita akan dapatkan bilangan x_i pada kolom ke- i baris ke- k (dengan x adalah salah satu dari a, b, c, d , atau e) dan y_j pada kolom ke- j baris ke- k (dengan y adalah salah satu dari a, b, c, d , atau e).

Ada lima pasang untuk $x = y$ yaitu $(a_i, a_j), (b_i, b_j), (c_i, c_j), (d_i, d_j), (e_i, e_j)$.

Banyaknya bilangan bilangan yang berada pada kolom ke- j baris ke- k dan di atasnya ditambah banyaknya bilangan pada kolom ke- i baris ke- k dan dibawahnya adalah selalu 6. Karena kemungkinan x maupun y cuma dari 5 yaitu $(a, b, c, d$ atau $e)$ maka akan terdapat bilangan yang berada pada kolom ke- j baris ke- k dan di atasnya ditambah bilangan pada kolom ke- i baris ke- k dan dibawahnya yang memiliki sifat $x = y$ katakan $x = y = z$ dengan z salah satu dari $(a, b, c, d$ atau $e)$.

Karena $j > i$ maka $z_j > z_i$.

Pada kolom ke- i karena z_i pada baris ke- k atau di bawahnya maka $z_i \geq x_i$

Pada kolom ke- j karena z_j pada baris ke- k atau di atasnya dan $z_j \leq y_j$

Maka dapat dibuktikan bahwa terpenuhi $x_i \leq z_i < z_j \leq y_j \rightarrow x_i < y_j$ yang berlaku pada baris mana pun .

Dapat disimpulkan bahwa susunan pada masing-masing baris tetap bertambah.

62. Sebuah segitiga ABC memiliki sifat (i) sudut A tetap (ii) Dapat dibuat lingkaran dalam pada segitiga ABC yang berjari-jari tetap sebesar r . Tentukan syarat agar segitiga tersebut memiliki keliling sekecil-kecilnya.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1980)

Solusi :

Misalkan O adalah pusat lingkaran maka AO, BO dan CO masing-masing akan membagi sudut A, B dan C secara berurutan menjadi dua bagian sama besar.

$$A + B + C = 180^\circ \rightarrow B + C = 180^\circ - A$$

Karena A tetap maka $B + C$ juga tetap.

$$\text{Keliling } \triangle ABC \text{ adalah } 2r \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$$

Karena $2r$ dan $\cot \frac{A}{2}$ tetap maka agar keliling $\triangle ABC$ minimal maka $\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$ harus minimal.

$$\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \frac{\cos\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{B}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)}$$

Karena $B + C$ tetap maka agar $\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$ minimal maka $\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$ harus maksimal.

$$\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{B-C}{4}\right) - \cos\left(\frac{B+C}{4}\right) \right)$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena $B + C$ tetap maka $\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$ akan maksimal bila $\cos\left(\frac{B-C}{4}\right)$ juga maksimal yang didapat bila $B = C$.

63. Untuk sembarang bilangan real t , $\lfloor t \rfloor$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan t . Sebagai contoh : $\lfloor 8 \rfloor = 8$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ dan $\lfloor -5/2 \rfloor = -3$. Tunjukkan bahwa persamaan $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor + \lfloor 32x \rfloor = 12345$ tidak mempunyai solusi x real.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1981)

Solusi :

Misalkan $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor + \lfloor 32x \rfloor$

Jelas bahwa semakin besar x maka nilai $f(x)$ akan semakin besar.

$f(196) = \lfloor 196 \rfloor + \lfloor 392 \rfloor + \lfloor 784 \rfloor + \lfloor 1568 \rfloor + \lfloor 3136 \rfloor + \lfloor 6272 \rfloor = 12348 > 12345$.

Jika $x < 196$ maka masing-masing $\lfloor x \rfloor$, $\lfloor 2x \rfloor$, $\lfloor 4x \rfloor$, $\lfloor 8x \rfloor$, $\lfloor 16x \rfloor$ dan $\lfloor 32x \rfloor$ akan berkurang nilainya sedikitnya satu dari nilai saat $x = 196$.

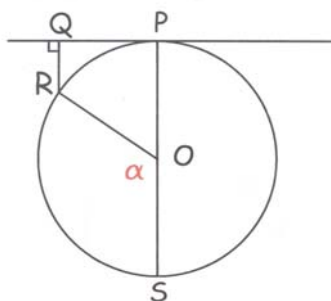
Maka untuk $x < 196$ maka $f(x) \leq 12348 - 6 = 12342 < 12345$.

Terbukti bahwa persamaan $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor + \lfloor 32x \rfloor = 12345$ tidak mempunyai solusi x real.

64. Diberikan sebuah lingkaran berjari-jari r dan sebuah garis ℓ yang menyinggung lingkaran di titik P . Dari sebuah titik R yang terletak pada lingkaran dibuat garis RQ tegak lurus garis ℓ dengan titik Q terletak pada garis ℓ . Tentukan luas maksimum dari segitiga PQR .

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1981)

Solusi :



Anggap O adalah pusat lingkaran. Dibuat garis PS melalui O sehingga PS adalah diameter lingkaran. Maka garis PS akan tegak lurus ℓ dan akan membuat PS sejajar RQ .

Misalkan $\angle SOR = \alpha$. Baik untuk $RQ \geq r$ maupun $RQ \leq r$ pasti berlaku $PQ = r \sin \alpha$.

$RQ = r + r \cos \alpha$ dengan $RQ \leq r$ jika $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ dan $RQ \geq r$ jika $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$

Luas $\Delta PQR = \frac{1}{2} (r \sin \alpha) (r + r \cos \alpha)$

Luas ΔPQR akan maksimum bila turunan pertama $\frac{1}{2} (r \sin \alpha) (r + r \cos \alpha) = 0$

$\frac{1}{2} r \cos \alpha (r + r \cos \alpha) + \frac{1}{2} (r \sin \alpha) (-r \sin \alpha) = 0$

$\cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$

$2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$

$(2 \cos \alpha - 1) (\cos \alpha + 1) = 0$

$\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha = 180^\circ$ (tidak memenuhi)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\text{Luas } \Delta PQR_{\text{maks}} = \frac{1}{2} (r \sin 60^\circ) (r + r \cos 60^\circ)$$

$$\text{Luas } \Delta PQR_{\text{maks}} = \frac{3}{8} r^2 \sqrt{3}$$

65. Tunjukkan bahwa ketiga akar $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ semuanya berbeda.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1982)

Solusi :

Misalkan akar-akar $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ adalah x_1, x_2 dan x_3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad ; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1 \quad \text{dan} \quad x_1x_2x_3 = 1$$

Andaikan bahwa ketiganya tidak semuanya berbeda maka sedikitnya ada dua akar yang sama.

Misalkan kedua akar yang sama adalah a dan akar ketiga b dengan a bisa sama dengan b .

Dari penjumlahan ketiga akar didapat $2a + b = 1$.

$$\text{Dari } x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1 \text{ didapat } a^2 + 2ab = -1 \rightarrow a^2 + 2a(1 - 2a) = -1$$

$$3a^2 - 2a - 1 = 0 \rightarrow (3a + 1)(a - 1) = 0$$

- Jika $a = -\frac{1}{3}$ maka $b = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$.

$$\text{Tetapi } x_1x_2x_3 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{27} \neq 1$$

- Jika $a = 1$ maka $b = 1 - 2(1) = -1$

$$\text{Tetapi } x_1x_2x_3 = (1)(1)(-1) = -1 \neq 1$$

Terbukti bahwa ketiga akar $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ semuanya berbeda.

66. Tentukan semua bilangan asli w, x, y dan z yang memenuhi $w! = x! + y! + z!$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1983)

Solusi :

Karena w, x, y dan z bilangan asli maka jelas bahwa $w > x, y, z$ yang berakibat $w \geq 2$

Tanpa mengurangi keumuman soal misalkan $x \geq y \geq z$.

Maksimum $x! + y! + z! = 3(x!)$ atau jika ditulis dalam bentuk lain $3(x!) \geq x! + y! + z!$

$$w! = w((w-1)!) = x! + y! + z!$$

$$\text{Karena } x \leq w - 1 \text{ maka untuk } w > 3 \rightarrow w! > 3((w-1)!) \geq 3(x!) \geq x! + y! + z!$$

$$w! > x! + y! + z! \text{ maka tidak ada nilai } w > 3 \text{ yang memenuhi} \rightarrow w = 3 \text{ atau } 2$$

- Jika $w = 2$

$$\text{Maka } x = 1 \rightarrow y = z = 1$$

Tetapi $2! \neq 1! + 1! + 1!$ Yang berakibat $w = 2$ tidak memenuhi

- Jika $w = 3$

$$x = 2 \rightarrow y = 2 \text{ dan } z = 2 \text{ yang memenuhi}$$

$$3! = 2! + 2! + 2! = 6$$

Bilangan w, x, y dan z yang memenuhi $w! = x! + y! + z!$ adalah $w = 3$ dan $x = y = z = 2$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

67. Buktikan bahwa penjumlahan 1984 bilangan asli berurutan bukan merupakan bilangan kuadrat.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1984)

Solusi :

Misalkan $N = (m + 1) + (m + 2) + (m + 3) + \dots + (m + 1984)$.

$$N = \frac{1984}{2}((m + 1) + (m + 1984)) = 992(2m + 1985)$$

$992 = 31 \cdot 32$. Bilangan $2m + 1985$ adalah bilangan ganjil.

Maka nilai k tertinggi yang membuat 2^k membagi N adalah 5. Karena 5 adalah bilangan ganjil maka tidak mungkin N merupakan bilangan kuadrat.

68. Sebuah bilangan bulat disebut *habis dibagi secara digital* jika tidak ada digit-digitnya angka nol dan bilangan tersebut habis dibagi oleh penjumlahan semua digit-digitnya. Sebagai contoh 322 adalah *habis dibagi secara digital*. Tunjukkan bahwa ada tak terhingga banyaknya bilangan bulat *habis dibagi secara digital*.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1984)

Solusi :

Teori yang dapat digunakan adalah bahwa jika suatu bilangan habis dibagi 3 jika dan hanya jika penjumlahan digitnya habis dibagi 3.

Perhatikan bilangan dengan seluruh digitnya satu dengan banyaknya digit $3k$ dengan $k \in$ bilangan asli.

Penjumlahan digit $= 3k$ yang berarti habis dibagi 3 untuk k bilangan asli.

Terbukti bahwa ada tak terhingga banyaknya bilangan bulat *habis dibagi secara digital*.

69. Diberikan 7 bilangan real. Buktikan bahwa terdapat dua di antaranya katakan x dan y yang memenuhi

$$0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1984)

Solusi :

Semua bilangan real dapat diekspresikan sebagai $\tan \alpha$ dengan $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Bagi batasan $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ menjadi 6 batasan dengan masing-masing batasan berselang 30° .

Karena ada 7 bilangan real maka akan juga terdapat 7 nilai α . Sesuai Pigeon Hole Principle, karena terdapat 7 bilangan dengan 6 batasan maka akan terdapat 2 bilangan real katakan x dan y yang diekspresikan dengan $x = \tan \alpha_1$ dan $y = \tan \alpha_2$ dengan α_1 dan α_2 berada dalam satu batasan yang sama serta $\alpha_1 > \alpha_2$ dan $0^\circ \leq \alpha_1 - \alpha_2 \leq 30^\circ$.

$$\text{Akibatnya } 0 \leq \tan(\alpha_1 - \alpha_2) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 0 \leq \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Terbukti bahwa terdapat dua di antaranya katakan x dan y yang memenuhi $0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

70. Panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 6, 8 dan 10. Buktikan bahwa terdapat tepat satu garis lurus yang akan membagi luas dan keliling segitiga tersebut menjadi dua bagian sama besar.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1985)

Solusi :

Misalkan segitiga tersebut adalah ABC yang siku-siku di C dengan AC = 6, BC = 8 dan AB = 10

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

$$\text{Keliling } \triangle ABC = 6 + 8 + 10 = 24$$

Ada 3 kemungkinan garis tersebut yaitu :

- Garis tersebut melalui sisi AC dan BC

Misalkan garis tersebut memotong AC di P dan BC di Q dengan CQ = x dan CP = y

$$\text{Luas } \triangle CPQ = \frac{1}{2} x y$$

$$\text{Luas } \triangle CPQ = \frac{1}{2} \text{ Luas } \triangle ABC \rightarrow xy = 24 \quad \dots\dots (1)$$

$$x + y = 12 \rightarrow x(12 - x) = 24$$

$$x^2 - 12x + 24 = 0$$

$$\text{Didapat } x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 96}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{3}.$$

* Jika $x = 6 + 2\sqrt{3}$ maka $x = 6 + 2\sqrt{3} > 6 + 2 = 8 = BC$ (tidak memenuhi)

* Jika $x = 6 - 2\sqrt{3}$ maka $y = 6 + 2\sqrt{3} > 6 = AC$ (tidak memenuhi)

- Garis tersebut melalui sisi BC dan AB

Misalkan garis tersebut memotong AB di R dan BC di Q dengan BQ = x dan BR = z

$$\text{Luas } \triangle BRQ = \frac{1}{2} x z \sin \angle RBQ = \frac{1}{2} x z \frac{6}{10} = \frac{3}{10} x z$$

$$\text{Luas } \triangle BRQ = \frac{1}{2} \text{ Luas } \triangle ABC \rightarrow xz = 40 \quad \dots\dots (1)$$

$$x + z = 12 \rightarrow x(12 - x) = 40$$

$$x^2 - 12x + 40 = 0$$

$$\text{Diskriminan} = 12^2 - 4(1)(40) = -16 < 0 \rightarrow \text{tidak ada } x \text{ real yang memenuhi.}$$

- Garis tersebut melalui sisi AC dan AB

Misalkan garis tersebut memotong AC di P dan AB di Q dengan AP = x dan AQ = y

$$\text{Luas } \triangle APQ = \frac{1}{2} x y \sin \angle CAB = \frac{1}{2} x y \frac{8}{10} = \frac{2}{5} x y$$

$$\text{Luas } \triangle APQ = \frac{1}{2} \text{ Luas } \triangle ABC \rightarrow xy = 30 \quad \dots\dots (1)$$

$$x + y = 12 \rightarrow x(12 - x) = 30$$

$$x^2 - 12x + 30 = 0$$

$$\text{Didapat } x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 120}}{2} = 6 \pm \sqrt{6}.$$

$$x \leq AC \rightarrow x \leq 6 \text{ maka tidak mungkin } x = 6 + \sqrt{6}. \text{ Akibatnya } x = 6 - \sqrt{6}$$

$$\text{Jika } x = 6 - \sqrt{6} \text{ maka } y = 6 + \sqrt{6} < 6 + 4 = 10 = AC$$

71. Buktikan atau berikan bantahan bahwa ada bilangan bulat yang menjadi dua kali nilai semula jika angka pertama dipindahkan menjadi angka terakhir.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1985)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

Misalkan bilangan tersebut adalah m yang terdiri dari k digit dengan angka pertama bilangan tersebut adalah a dan bilangan selanjutnya adalah N .

$$m = a \cdot 10^{k-1} + N$$

$$10N + a = 2m = 2a \cdot 10^{k-1} + 2N$$

$$8N = a(2 \cdot 10^{k-1} - 1)$$

Karena $2 \cdot 10^{k-1} - 1$ adalah bilangan ganjil maka 8 membagi $a \rightarrow a = 8 \rightarrow N = 2 \cdot 10^{k-1} - 1$

Akibatnya N terdiri dari k digit sedangkan N seharusnya merupakan bilangan yang terdiri dari $k - 1$ digit.

Maka tidak ada bilangan bulat yang menjadi dua kali nilai semula jika angka pertama dipindahkan menjadi angka terakhir.

72. Sebuah segitiga ABC dengan $\angle B = 90^\circ$. Titik D terletak pada perpanjangan AC sedemikian sehingga $\angle CBD = 30^\circ$. Panjang $AB = CD = 1$. Tentukan panjang AC.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1986)

Solusi :

Misalkan $\angle ACB = x \rightarrow BC = AC \cos x$;

$$AB = AC \sin x = CD = BC / \sin 30^\circ \rightarrow BC = \cot x$$

$$\angle BCD = 180^\circ - x$$

$$\angle CDB = 180^\circ - 30^\circ - (180^\circ - x) = x - 30^\circ$$

Pada segitiga BCD berlaku :

$$\frac{BC}{\sin \angle CDB} = \frac{CD}{\sin 30^\circ} = 2$$

$$BC = 2 \sin (x - 30^\circ) = \cot x$$

$$2 \sin x \cos 30^\circ - 2 \sin 30^\circ \cos x = \cot x$$

$$\sin^2 x \sqrt{3} = \cos x + \cos x \sin x$$

$$3 \sin^4 x = (1 - \sin^2 x)(1 + \sin x)^2 = 1 + \sin^2 x + 2 \sin x - \sin^2 x - \sin^4 x - 2 \sin^3 x$$

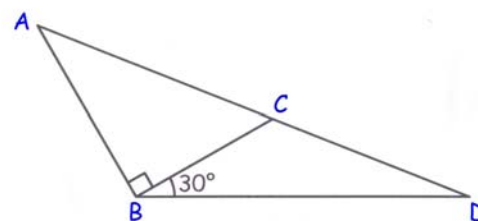
$$4 \sin^4 x + 2 \sin^3 x - 2 \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin^3 x - 1)(2 \sin x + 1) = 0$$

Karena x ada di antara 0° sampai 90° maka $\sin x = -\frac{1}{2}$ tidak memenuhi. Maka $\sin x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$$AC \sin x = 1$$

$$AC = \sqrt[3]{2}$$



73. Kompetisi Mathlon memperlombakan M buah cabang atletik dengan peserta yang mengikuti lomba hanya A, B dan C. Pada masing-masing cabang nilai p_1 diberikan kepada juara pertama, p_2 untuk juara kedua dan p_3 untuk juara ketiga dengan $p_1 > p_2 > p_3 > 0$ dan p_1, p_2, p_3 adalah bilangan bulat. Nilai akhir A adalah 22, B memiliki nilai 9 dan C juga 9. Diketahui B memenangi cabang lari 100 meter. Berapakah nilai M dan siapakah yang menjadi juara kedua cabang lompat tinggi.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1986)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

$$\text{Total nilai} = 22 + 9 + 9 = 40 \rightarrow 40 = M(p_1 + p_2 + p_3)$$

Maka M dan $(p_1 + p_2 + p_3)$ masing-masing adalah faktor dari 40.

Karena B pernah menjadi juara 1 maka $M > 1 \rightarrow (p_1 + p_2 + p_3) < 40$

$(p_1 + p_2 + p_3)_{\text{minimum}} = 3 + 2 + 1 = 6 \rightarrow$ Kemungkinan nilai $(p_1 + p_2 + p_3)$ adalah 8, 10 atau 20.

- Jika $(p_1 + p_2 + p_3) = 20$ maka $M = 2$

Karena B pernah menjadi juara 1 maka $p_1 + p_2 = 9$ atau $p_1 + p_3 = 9$ yang berarti $p_2 = 11$ atau $p_3 = 11$.

Hal ini kontradiksi dengan $p_1 > p_2 > p_3$.

- Jika $(p_1 + p_2 + p_3) = 10$ maka $M = 4$

$$M p_1 > 22 \rightarrow p_1 > 5 \rightarrow p_{1 \text{ minimum}} = 6$$

$$\text{Berdasarkan nilai B maka } p_{3 \text{ maks}} = \frac{\text{Nilai B} - p_{1 \text{ min}}}{n - 1} = \frac{9 - 6}{4 - 1} = 1. \text{ Nilai } p_3 \text{ yang memenuhi hanya } p_3 = 1$$

$$\text{yang berakibat } p_1 = p_{1 \text{ minimum}} = 6 \rightarrow p_2 = 10 - p_1 - p_3 = 3.$$

Maksimum nilai $A = 3 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = 3(6) + 1(3) = 21 < 22$ (kontradiksi dengan kenyataan)

- Maka $(p_1 + p_2 + p_3) = 8$ dan $M = 5$

$$M p_1 > 22 \rightarrow p_1 > 4 \rightarrow p_{1 \text{ minimum}} = 5$$

$$\text{Berdasarkan nilai B maka } p_{3 \text{ maks}} = \frac{\text{Nilai B} - p_{1 \text{ min}}}{n - 1} = \frac{9 - 5}{5 - 1} = 1. \text{ Nilai } p_3 \text{ yang memenuhi hanya } p_3 = 1$$

$$\text{yang berakibat } p_1 = p_{1 \text{ minimum}} = 5 \rightarrow p_2 = 8 - p_1 - p_3 = 2.$$

Akibatnya B harus 1 kali meraih juara 1 dan 4 kali meraih juara 3 (a)

Maksimum nilai $A = 3 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = 4(5) + 1(2) = 22$. Karena maksimum nilai A sama dengan kenyataan yang ada maka A harus 4 kali menjadi juara 1 dan 1 kali menjadi juara 2 (b)

Berdasarkan (a) dan (b) maka C harus 4 kali menjadi juara 2 dan 1 kali menjadi juara 3.

$$\text{Cek nilai C} \rightarrow 4 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = 4(2) + 1(1) = 9 \text{ (memenuhi)}$$

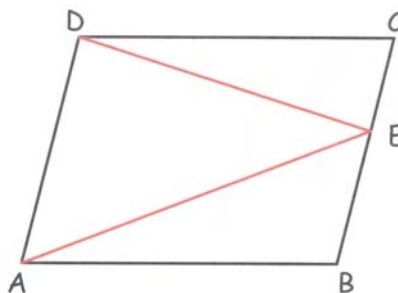
Karena A hanya gagal 1 kali menjadi juara 1 maka yang menjadi juara 2 cabang lari 100 meter harus A yang berakibat juara 2 cabang lompat tinggi harus C.

Banyaknya cabang yang dilombakan = 5 dan yang menjadi juara 2 cabang lompat tinggi adalah C.

74. ABCD adalah jajaran genjang dan E adalah titik yang terletak pada ruas garis BC. Jika segitiga DEC, BED dan BAD semuanya sama kaki, berapakah nilai sudut DAB yang mungkin ?

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1987)

Solusi :



Pada $\triangle CDE$ pasangan sudut yang sama dapat terjadi pada $\angle DCE$ dan $\angle CDE$, $\angle CDE$ dan $\angle CED$ atau $\angle DCE$ dan $\angle CED$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

- Jika $\angle DCE = \angle CDE = \alpha$
Maka $\angle BED = 2\alpha$ dan $\angle BAD = \alpha$.
Pada $\triangle BDE$ sudut yang sama dapat terjadi beberapa kemungkinan.
 - untuk $\angle BED = \angle BDE$
 $\angle BED = \angle BDE = 2\alpha$
 Karena BD diagonal maka $\angle DBA = \angle BDC = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$
 $\alpha \neq 0$ maka $\alpha \neq 3\alpha \rightarrow$ Agar $\triangle ABD$ sama kaki maka $\angle DAB = \angle DBA$ atau $\angle DBA = \angle ADB$
 - * Jika $\angle DAB = \angle DBA = \alpha \rightarrow \alpha + \alpha + 3\alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = 36^\circ \rightarrow \angle DAB = 36^\circ$
 - * Jika $\angle DBA = \angle ADB = 3\alpha \rightarrow \alpha + 3\alpha + 3\alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{7} \rightarrow \angle DAB = \frac{180^\circ}{7}$
 - untuk $\angle BDE = \angle EBD = \beta$
 $\beta + \beta + 2\alpha = 180^\circ \rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$
 $\angle ADB = \angle EBD = 90^\circ - \alpha$
 - * Jika $\angle BAD = \angle ADB \rightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \rightarrow \alpha = 45^\circ \rightarrow \angle DAB = 45^\circ$
 - * Jika $\angle BAD = \angle DBA = \alpha \rightarrow \alpha + \alpha + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ$ (tidak memenuhi)
 - * Jika $\angle ADB = \angle DBA = 90^\circ - \alpha \rightarrow \alpha + (90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ \rightarrow \alpha = 0^\circ$ (tidak memenuhi)
 - untuk $\angle BED = \angle EBD = 2\alpha$
 $\angle ADB = \angle EBD = 2\alpha$
 $\alpha \neq 0$ maka $\alpha \neq 2\alpha \rightarrow$ Agar $\triangle ABD$ sama kaki maka $\angle DAB = \angle DBA$ atau $\angle DBA = \angle ADB$
 - * Jika $\angle DAB = \angle DBA = \alpha \rightarrow \alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = 45^\circ \rightarrow \angle DAB = 45^\circ$
 - * Jika $\angle DBA = \angle ADB = 2\alpha \rightarrow \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = 36^\circ \rightarrow \angle DAB = 36^\circ$
- Jika $\angle CDE = \angle CED$
Maka $\angle BED = 2\alpha$ dan $\angle BAD = \alpha$.
Pada $\triangle BDE$ sudut yang sama dapat terjadi beberapa kemungkinan.
 - untuk $\angle BED = \angle BDE$
 $\angle BED = \angle BDE = 2\alpha$
 Karena BD diagonal maka $\angle DBA = \angle BDC = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$
 $\alpha \neq 0$ maka $\alpha \neq 3\alpha \rightarrow$ Agar $\triangle ABD$ sama kaki maka $\angle DAB = \angle DBA$ atau $\angle DBA = \angle ADB$
 - * Jika $\angle DAB = \angle DBA = \alpha \rightarrow \alpha + \alpha + 3\alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = 36^\circ \rightarrow \angle DAB = 36^\circ$
 - * Jika $\angle DBA = \angle ADB = 3\alpha \rightarrow \alpha + 3\alpha + 3\alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{7} \rightarrow \angle DAB = \frac{180^\circ}{7}$
 - untuk $\angle BDE = \angle EBD = \beta$
 $\beta + \beta + 2\alpha = 180^\circ \rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$
 $\angle ADB = \angle EBD = 90^\circ - \alpha$
 - * Jika $\angle BAD = \angle ADB \rightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \rightarrow \alpha = 45^\circ \rightarrow \angle DAB = 45^\circ$
 - * Jika $\angle BAD = \angle DBA = \alpha \rightarrow \alpha + \alpha + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ$ (tidak memenuhi)
 - * Jika $\angle ADB = \angle DBA = 90^\circ - \alpha \rightarrow \alpha + (90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ \rightarrow \alpha = 0^\circ$ (tidak memenuhi)
 - untuk $\angle BED = \angle EBD = 2\alpha$
 $\angle ADB = \angle EBD = 2\alpha$
 $\alpha \neq 0$ maka $\alpha \neq 2\alpha \rightarrow$ Agar $\triangle ABD$ sama kaki maka $\angle DAB = \angle DBA$ atau $\angle DBA = \angle ADB$
 - * Jika $\angle DAB = \angle DBA = \alpha \rightarrow \alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = 45^\circ \rightarrow \angle DAB = 45^\circ$
 - * Jika $\angle DBA = \angle ADB = 2\alpha \rightarrow \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = 36^\circ \rightarrow \angle DAB = 36^\circ$
- Jika $\angle DCE = \angle CED$ (lanjutkan sendiri ya, capek)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

75. Pada sebuah lapangan n orang berada pada posisi sehingga jarak masing-masing orang saling berbeda. Masing-masing orang memiliki pistol air yang digunakan untuk menembak hanya orang yang berada paling dekat dengannya. Jika n ganjil, tunjukkan bahwa ada sedikitnya satu orang tidak akan basah. Apakah ini juga berlaku bila jumlah orang genap ?

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1987)

Solusi :

Penyelesaian dapat dilakukan dengan induksi matematika.

- Untuk $n = 3$
Misalkan orang-orang tersebut adalah A, B dan C. Tanpa mengurangi keumuman soal, misalkan AB adalah jarak yang terpendek di antara AB, AC dan BC maka A dan B akan saling menembak. Meskipun tidak mempengaruhi pembuktian C akan menembak salah satu di antara A dan B. Akibatnya C tidak akan basah.
- Andaikan benar untuk n ganjil
Kita menganggap bahwa kita bisa menyusun orang-orang sebanyak n sehingga ada sedikitnya satu orang tidak akan basah.
- Akan dibuktikan juga benar untuk $n + 2$
Jika dua orang di antara $n + 2$ ini katakan A dan B adalah sepasang yang terdekat maka A dan B akan saling menembak.
Jika ada di antara n orang yang lain menembak salah satu di antara A dan B maka jumlah tembakan yang sudah dilepaskan ada 3 yang berarti jumlah tembakan yang belum dilepaskan adalah $n - 1$. Jumlah orang yang masih belum basah masih n orang. Sesuai Pigeon Hole Principle maka akan ada sedikitnya satu orang tidak akan basah.
Jika tidak ada n orang yang lain yang menembak A atau B maka akan ada n orang lagi dan sesuai dengan anggapan semula akan ada sedikitnya satu orang tidak akan basah (terbukti).
Terbukti bahwa untuk n ganjil maka dapat dibuktikan ada sedikitnya satu orang tidak basah.
Jika n genap maka kita dapat mengisolasi masing-masing 2 orang yang akan saling menembak sehingga seluruh n orang akan basah \rightarrow Hal ini tidak berlaku untuk n genap.

76. Untuk nilai b yang mana persamaan $1988x^2 + bx + 8891 = 0$ dan $8891x^2 + bx + 1988 = 0$ mempunyai akar persekutuan ?

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1988)

Solusi :

Misalkan akar persekutuannya adalah p maka berlaku :

$$1988p^2 + bp + 8891 = 0$$

$$8891p^2 + bp + 1988 = 0$$

$$-6903p^2 + 6903 = 0 \rightarrow p^2 = 1 \rightarrow p = 1 \text{ atau } p = -1$$

- untuk $p = 1$

$$\text{Untuk persamaan (1)} \rightarrow 1988(1)^2 + b(1) + 8891 = 0 \rightarrow b = -10879$$

$$1988x^2 - 10879x + 8891 = 0 \rightarrow (8891x - 1988)(x - 1) = 0$$

$$\text{Untuk persamaan (2)} \rightarrow 8891(1)^2 + b(1) + 1988 = 0 \rightarrow b = -10879$$

$$8891x^2 - 10879x + 1988 = 0 \rightarrow (1988x - 8891)(x - 1) = 0$$

memenuhi untuk $p = 1$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

- untuk $p = -1$

Untuk persamaan (1) $\rightarrow 1988(-1)^2 + b(-1) + 8891 = 0 \rightarrow b = 10879$
 $1988x^2 + 10879x + 8891 = 0 \rightarrow (8891x + 1988)(x + 1) = 0$

Untuk persamaan (2) $\rightarrow 8891(-1)^2 + b(-1) + 1988 = 0 \rightarrow b = 10879$
 $8891x^2 + 10879x + 1988 = 0 \rightarrow (1988x + 8891)(x + 1) = 0$

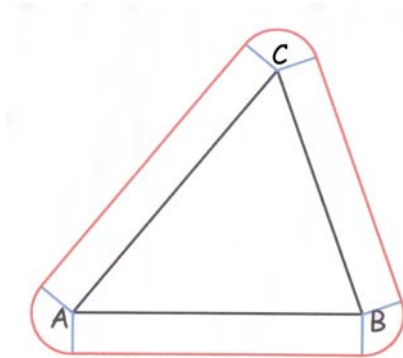
memenuhi untuk $p = -1$

maka nilai b yang memenuhi adalah -10879 atau 10879

77. Sebuah rumah bagian alasnya mempunyai bentuk segitiga dengan keliling P meter dan luas A meter persegi. Taman rumah tersebut merupakan bidang yang merupakan kumpulan titik-titik dengan jarak 5 meter dari tepi rumah terdekat. Tentukan luas taman beserta rumah tersebut.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1988)

Solusi :



Misalkan segitiga dengan keliling P meter dan luas A adalah ABC .

Daerah taman beserta rumah akan terdiri dari :

- segitiga ABC .
- 3 persegi panjang yang memiliki luas masing-masing $s_i \cdot 5$ meter persegi dengan s_i adalah panjang sisi-sisi segitiga ABC .
- 3 buah juring dengan pusat masing-masing pada titik A , B dan C yang kalau digabung akan membentuk lingkaran berjari-jari 5 sebab

$$\begin{aligned} \text{jumlah sudut} &= (360^\circ - 180^\circ - A) + (360^\circ - 180^\circ - B) + (360^\circ - 180^\circ - C) \\ &= 540^\circ - (A + B + C) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Luas rumah dan taman} = A + (5s_1 + 5s_2 + 5s_3) + \pi(5)^2 = A + 5(s_1 + s_2 + s_3) + 25\pi$$

$$\text{Luas rumah dan taman} = A + 5P + 25\pi$$

78. Misalkan $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dengan anggotanya merupakan bilangan bulat. Untuk masing-masing himpunan tak kosong A yang merupakan himpunan bagian S kita definisikan $p(A)$ adalah hasil kali semua anggota A . Misalkan $m(S)$ adalah rata-rata aritmatik $p(A)$ untuk semua himpunan tak kosong A yang merupakan himpunan bagian S . Jika $m(S) = 13$ dan jika $m(S \cup \{a_{n+1}\}) = 49$ untuk semua bilangan bulat positif a_{n+1} , tentukan nilai a_1, a_2, \dots, a_n dan a_{n+1} .

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1988)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari $S = 2^n - 1$

$$m(S) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_1a_2a_3 + \cdots + a_{n-2}a_{n-1}a_n + \cdots + a_1a_2a_3 \cdots a_{n-1}a_n}{2^n - 1}$$

$$m(S) = \frac{(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots (a_n + 1) - 1}{2^n - 1}$$

$$13(2^n - 1) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots (a_n + 1) - 1$$

$$13 \cdot 2^n - 12 = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots (a_n + 1) \quad \text{..... (1)}$$

Misalkan $R = S \cup \{a_{n+1}\}$

Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari R adalah $2^{n+1} - 1$

$$m(R) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} + a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_n a_{n+1} + a_1a_2a_3 + \cdots + a_{n-3}a_n a_{n+1} + \cdots + a_1a_2a_3 \cdots a_n a_{n+1}}{2^{n+1} - 1}$$

$$m(R) = \frac{(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots (a_n + 1)(a_{n+1} + 1) - 1}{2^{n+1} - 1}$$

$$49(2^{n+1} - 1) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots (a_n + 1)(a_{n+1} + 1) - 1$$

$$98 \cdot 2^n - 48 = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots (a_n + 1)(a_{n+1} + 1) \quad \text{..... (2)}$$

Dari persamaan (1) didapat :

$$98 \cdot 2^n - 48 = (13 \cdot 2^n - 12)(a_{n+1} + 1) \quad \text{..... (3)}$$

Jika $(a_{n+1} + 1) \leq 7$ maka $(13 \cdot 2^n - 12)(a_{n+1} + 1) \leq 7(13 \cdot 2^n - 12)$

$$(13 \cdot 2^n - 12)(a_{n+1} + 1) \leq 91 \cdot 2^n - 84$$

$$(13 \cdot 2^n - 12)(a_{n+1} + 1) \leq 98 \cdot 2^n - 48$$

Tidak mungkin kesamaan pada persamaan (3) dapat terjadi. \rightarrow Tidak mungkin $(a_{n+1} + 1) \leq 7$

$$(13 \cdot 2^n - 12)(a_{n+1} + 1) \geq 104 \cdot 2^n - 96.$$

$$(13 \cdot 2^n - 12)(a_{n+1} + 1) - 98 \cdot 2^n - 48 \geq 6 \cdot 2^n - 48$$

Untuk $n > 3$ maka $(13 \cdot 2^n - 12)(a_{n+1} + 1) - 98 \cdot 2^n - 48 > 0$. Tanda kesamaan tidak mungkin terajadi.

Maka $n = 1, 2$ atau 3 .

- Jika $n = 1$

Dari persamaan (3) akan didapat $\rightarrow 196 - 48 = 14(a_{n+1} + 1)$

Karena $148/14$ tidak bulat maka tidak ada nilai a_{n+1} yang memenuhi

- Jika $n = 2$

Dari persamaan (3) akan didapat $\rightarrow 392 - 48 = 40(a_{n+1} + 1)$

Karena $344/40$ tidak bulat maka tidak ada nilai a_{n+1} yang memenuhi

- Jika $n = 3$

Dari persamaan (3) akan didapat $\rightarrow 784 - 48 = 92(a_{n+1} + 1) \rightarrow a_{n+1} = 7$

Didapat $n = 3$ dan $a_{n+1} = 7$ dan dari persamaan (1) didapat :

$$92 = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1)$$

Karena a_1, a_2, a_3 bilangan asli maka 92 harus merupaaqn perkalian 3 bilangan asli yang masing-masing > 1 .

$$\text{Karena } 92 = 2 \cdot 46 = 2 \cdot 2 \cdot 23$$

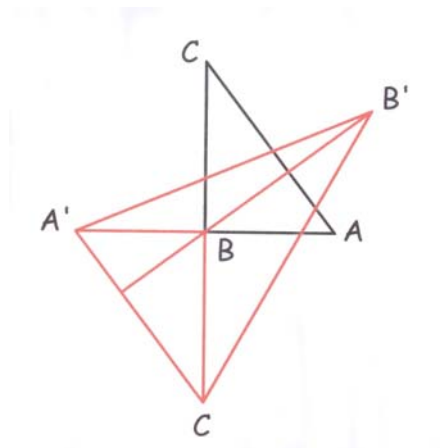
Karena masing-masing sudah merupakan bilangan prima maka nilai tripel (a_1, a_2, a_3) yang memenuhi hanya $(1, 1, 22)$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

79. Misalkan ABC adalah segitiga siku-siku dengan luas 1. Misalkan A' , B' dan C' adalah titik-titik yang didapat dengan mencerminkan titik A , B dan C berurutan terhadap sisi di hadapannya. Tentukan luas $\Delta A'B'C'$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1989)

Solusi :



Tanpa mengurangi keumuman soal misalkan ABC siku-siku di B .

A' didapat dengan mencerminkan A terhadap BC . Karena $BC \perp AB$ maka ABA' adalah garis lurus.

C' didapat dengan mencerminkan C terhadap AB . Karena $BC \perp AB$ maka CBC' adalah garis lurus.

Titik B adalah pertengahan garis ABA' dan CBC' $\rightarrow A'C'$ sejajar dengan AC .

Garis tinggi dari B ke $A'C'$ akan sama panjang dengan garis tinggi dari B ke AC . Karena B dicerminkan terhadap sisi AC maka garis tinggi dari B ke AC akan sama panjang dengan garis tinggi dari B' ke AC .

Akibatnya adalah garis tinggi dari B' ke sisi $A'C'$ adalah tika kali garis tinggi dari B ke AC . Maka luas $\Delta A'B'C'$ akan tiga kali luas ΔABC

Luas $\Delta A'B'C' = 3$

80. Didefinisikan $\{a_n\}_{n=1}$ sebagai berikut : $a_1 = 1989^{1989}$; $a_n, n > 1$ adalah penjumlahan digit-digit dari a_{n-1} . Apakah nilai a_5 ?

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1989)

Solusi :

Kita mempunyai $1989^{1989} < (10^4)^{1989}$. Jelas bahwa banyaknya digit dari $1989^{1989} < 4 \cdot 1989 = 7956$. Akibatnya nilai $a_2 < 7956 \cdot 9 = 71604$.

Karena $71604 < 99999$ maka $a_3 < 5 \cdot 9 = 45$ Maka $a_4 \leq 12$. Tanda kesamaan didapat jika $a_3 = 39$.

1989^{1989} habis dibagi 9. Berakibat a_5 juga akan habis dibagi 9.

Jelas bahwa $a_n > 0$ untuk $n > 0$ maka $a_5 = 9$

81. Sebuah kompetisi terdiri dari $n \geq 2$ pemain yang berlangsung selama k hari. Pada masing-masing hari, para pemain akan memperoleh skor 1, 2, 3, ..., n yang tidak ada dua pemain atau lebih yang memiliki skor yang sama. Pada akhir kompetisi (setelah berlangsung selama k hari), ternyata nilai total masing-masing pemain tepat 26. Tentukan pasangan (n, k) yang mungkin.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1990)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

Total nilai dalam satu hari = $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Setelah berlangsung k hari maka $\frac{1}{2}n(n+1) \cdot k = 26 \cdot n$

$k(n+1) = 52 \rightarrow n+1$ adalah faktor dari 52. Karena $n \geq 2$ maka $n+1 \geq 3$

Nilai $n+1$ yang memenuhi adalah 4, 13, 26 dan 52.

- Untuk $n+1 = 4$ maka $n = 3$ dan $k = 13$

Untuk $n = 3$ dan $k = 13$ dapat dipenuhi. Contoh nilainya adalah

Hari ke-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pemain 1	1	2	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
Pemain 2	2	3	1	3	1	3	3	3	1	3	1	3	1
Pemain 3	3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

- Untuk $n+1 = 13$ maka $n = 12$ dan $k = 4$

Untuk $n = 12$ dan $k = 4$ dapat dipenuhi. Contoh nilainya adalah

Pemain	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hari ke-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hari ke-2	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Hari ke-3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hari ke-4	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

- Untuk $n+1 = 26$ maka $n = 25$ dan $k = 2$

Untuk $n = 25$ dan $k = 2$ dapat dipenuhi. Yaitu hari 1 pemain 1 dapat nilai 1 dan hari ke-2 dapat nilai 25. Pemain ke-2 hari pertama mendapat nilai 2 dan hari ke-2 mendapat nilai 24. Pemain ke-3 hari pertama mendapat nilai 3 dan hari ke-2 mendapat nilai 23. Dan seterusnya.

- Untuk $n+1 = 52$ maka $n = 51$ dan $k = 1$

Untuk $n = 51$ dan $k = 1$ tidak memenuhi sebab pasti ada pemain yang mendapat nilai tidak 26.

Pasangan (n, k) yang mungkin adalah $(3, 13)$, $(12, 4)$ dan $(25, 2)$

82. Sejumlah $\frac{1}{2}n(n+1)$ bilangan berbeda disusun secara acak pada susunan berbentuk segitiga seperti pada susunan berikut :

```

      X
     X X
    X X X
   ⋮ ⋮ ⋮
  X X ⋯ ⋯ X X
    
```

Misalkan M_k adalah bilangan terbesar pada baris ke- k dihitung dari atas. Tentukan besarnya peluang bahwa $M_1 < M_2 < M_3 < \dots < M_n$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1990)

Solusi :

Misalkan p_n adalah peluang $M_1 < M_2 < M_3 < \dots < M_n$ terjadi.

Jelas bahwa nilai terbesar dari $\frac{1}{2}n(n+1)$ bilangan tersebut harus berada di bawah. Peluang ini terjadi

adalah $\frac{n}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2}{n+1}$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Pada baris 1 sampai baris ke-(n-1) terdapat bilangan sebanyak $\frac{1}{2}(n-1)(n)$. Bilangan terbesar di antara bilangan-bilangan ini harus berada di baris ke-(n-1). Peluang ini terjadi adalah $\frac{n-1}{\frac{1}{2}(n-1)(n)} = \frac{2}{n}$.

Demikian seterusnya.

$$p_n = \frac{2}{n+1} p_{n-1}$$

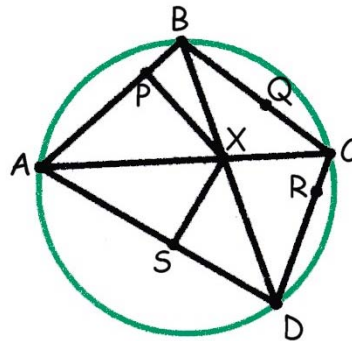
$$p_1 = 1 = \frac{2}{2} \rightarrow p_2 = \frac{2}{3} p_1 = \frac{2}{3} \rightarrow p_3 = \frac{3}{1+2+3} p_2 = \frac{2}{4} p_3 \text{ dan seterusnya}$$

$$p_n = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdots \frac{2}{2} = \frac{2^n}{(n+1)!}$$

83. ABCD adalah segiempat tali busur. Diagonal AC dan BD saling berpotongan di titik X. Dari titik X ditarik garis tegak lurus sisi AB, BC, CD, DA yang masing-masing memotong keempat sisi tersebut secara berurutan di titik P, Q, R, S. Buktikan bahwa panjang $PS + QR = PQ + SR$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1990)

Solusi :



Misalkan titik A, B, C dan D melalui sebuah lingkaran berjari-jari R.

Karena $\angle XPA = 90^\circ$ dan $\angle XSA = 90^\circ$ maka segiempat XSPA adalah segiempat tali busur yang juga terletak pada suatu lingkaran yang dapat dianggap berjari-jari r_1 .

Karena $\angle XPA = 90^\circ$ dengan titik P terletak pada lingkaran berjari-jari r_1 maka AX adalah diameter lingkaran tersebut $\rightarrow AX = 2r_1$.

Sesuai dalil sinus pada $\triangle PAS$ maka $\frac{PS}{\sin \angle PAS} = 2r_1 = AX \quad \dots\dots\dots (1)$

Sesuai dalil sinus pada $\triangle BAD$ maka $\frac{BD}{\sin \angle PAS} = 2R \quad \dots\dots\dots (2)$

Dari (1) dan (2) didapat $\frac{PS}{BD} = \frac{AX}{2R} \quad \dots\dots\dots (3)$

Karena $\angle XQC = 90^\circ$ dan $\angle XRC = 90^\circ$ maka segiempat QXRC adalah segiempat tali busur yang juga terletak pada suatu lingkaran yang dapat dianggap berjari-jari r_2 .

Karena $\angle QRC = 90^\circ$ dengan titik R terletak pada lingkaran berjari-jari r_2 maka CX adalah diameter lingkaran tersebut $\rightarrow CX = 2r_2$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Sesuai dalil sinus pada $\triangle CQR$ maka $\frac{QR}{\sin \angle RCQ} = 2r_{21} = CX \dots\dots\dots (4)$

Sesuai dalil sinus pada $\triangle CDB$ maka $\frac{BD}{\sin \angle RCQ} = 2R \dots\dots\dots (5)$

Dari (4) dan (5) didapat $\frac{QR}{BD} = \frac{CX}{2R} \dots\dots\dots (6)$

Dari (3) dan (6) didapat $\frac{PS + QR}{BD} = \frac{AX + CX}{2R} \rightarrow PS + QR = \frac{AC \cdot BD}{2R}$

Dengan cara yang sama akan didapatkan $PQ + SR = \frac{AC \cdot BD}{2R}$

Terbukti bahwa $PS + QR = PQ + SR$

84. Tunjukkan bahwa persamaan $x^2 + y^5 = z^3$ mempunyai tak hingga penyelesaian untuk bilangan bulat x, y, z dengan $xyz \neq 0$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1991)

Solusi :

Dapat dihitung bahwa $10^2 + 3^5 = 7^3$.

Karena $\text{KPK}(2, 3, 5) = 30$ maka

$$10^2 n^{30} + 3^5 n^{30} = 7^3 n^{30}$$

$(10n^{15})^2 + (3n^6)^5 = (7n^{10})^3$ yang berlaku untuk semua nilai n .

Terbukti bahwa persamaan $x^2 + y^5 = z^3$ mempunyai tak hingga penyelesaian untuk bilangan bulat x, y, z dengan $xyz \neq 0$.

85. Misalkan C adalah lingkaran dan titik P terletak pada bidang. Dibuat garis-garis melalui P dan masing-masing memotong lingkaran di dua titik dengan ruas garis kedua titik ini sering disebut busur. Tunjukkan bahwa titik tengah busur-busur ini terletak pada satu lingkaran.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1991)

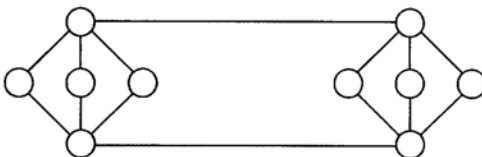
Solusi :

Misalkan O adalah pusat lingkaran dan M adalah titik tengah busur.

$$\angle OMP = 90^\circ$$

Karena $\angle OMP = 90^\circ$ maka M akan terletak pada suatu lingkaran dengan diameter OP . (Terbukti)

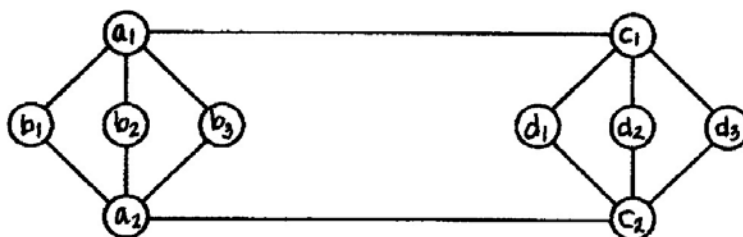
86. Sepuluh bilangan berbeda diambil dari bilangan-bilangan $\{0, 1, 2, \dots, 13, 14\}$ untuk melengkapi lingkaran pada diagram di bawah. Selisih positif dari dua bilangan yang dihubungkan dengan garis harus saling berbeda. Apakah hal tersebut mungkin ? Berikan alasan.



(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1991)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :



Ada 4 bilangan di antara 10 bilangan tersebut yang berhubungan dengan tepat 4 buah bilangan lain. Misalkan bilangan-bilangan tersebut adalah a_1 , a_2 , c_1 dan c_2 . Sedangkan 6 buah bilangan akan berhubungan dengan tepat 2 bilangan lain. Misalkan bilangan-bilangan tersebut adalah b_1 , b_2 , b_3 , d_1 , d_2 dan d_3 .

Akan didapatkan 14 kemungkinan selisih positif bilangan tersebut yaitu $|a_1 - b_1|$, $|a_1 - b_2|$, $|a_1 - b_3|$, $|a_2 - b_1|$, $|a_2 - b_2|$, $|a_2 - b_3|$, $|c_1 - d_1|$, $|c_1 - d_2|$, $|c_1 - d_3|$, $|c_2 - d_1|$, $|c_2 - d_2|$, $|c_2 - d_3|$, $|a_1 - c_1|$ dan $|a_2 - c_2|$.

Andaikan mungkin bahwa selisih positif dari dua bilangan yang dihubungkan dengan garis lurus akan saling berbeda.

Dari bilangan-bilangan $\{0, 1, 2, 3, \dots, 14\}$ hanya bisa didapat 14 kemungkinan selisih positif yaitu 1, 2, 3, 4, \dots , 14. Maka selisih positif keempat belas $|a_1 - b_1|$, $|a_1 - b_2|$, $|a_1 - b_3|$, $|a_2 - b_1|$, $|a_2 - b_2|$, $|a_2 - b_3|$, $|c_1 - d_1|$, $|c_1 - d_2|$, $|c_1 - d_3|$, $|c_2 - d_1|$, $|c_2 - d_2|$, $|c_2 - d_3|$, $|a_1 - c_1|$ dan $|a_2 - c_2|$ harus memuat selisih positif dari 1 sampai 14.

Akibatnya di antara keempat belas $|a_1 - b_1|$, $|a_1 - b_2|$, $|a_1 - b_3|$, $|a_2 - b_1|$, $|a_2 - b_2|$, $|a_2 - b_3|$, $|c_1 - d_1|$, $|c_1 - d_2|$, $|c_1 - d_3|$, $|c_2 - d_1|$, $|c_2 - d_2|$, $|c_2 - d_3|$, $|a_1 - c_1|$ dan $|a_2 - c_2|$ harus memuat tepat 7 buah ganjil dan 7 buah genap.

- Jika a_1 dan a_2 memiliki paritas yang sama (sama-sama genap atau sama-sama ganjil) dan c_1 dan c_2 juga memiliki paritas yang sama
 Kedua $|a_1 - c_1|$ dan $|a_2 - c_2|$ akan ganjil atau keduanya tidak ada yang ganjil.
 Kedua $|a_1 - b_i|$ dan $|a_2 - b_i|$ untuk $i = 1, 2, 3$ akan ganjil atau keduanya tidak ada yang ganjil.
 Kedua $|c_1 - d_j|$ dan $|c_2 - d_j|$ untuk $j = 1, 2, 3$ akan ganjil atau keduanya tidak ada yang ganjil.
 Akibatnya akan terdapat sejumlah genap di antara keempat belas $|a_1 - b_1|$, $|a_1 - b_2|$, $|a_1 - b_3|$, $|a_2 - b_1|$, $|a_2 - b_2|$, $|a_2 - b_3|$, $|c_1 - d_1|$, $|c_1 - d_2|$, $|c_1 - d_3|$, $|c_2 - d_1|$, $|c_2 - d_2|$, $|c_2 - d_3|$, $|a_1 - c_1|$ dan $|a_2 - c_2|$ yang ganjil. Kontradiksi.
- Jika a_1 dan a_2 memiliki paritas berbeda dan c_1 dan c_2 juga memiliki paritas yang berbeda.
 Kedua $|a_1 - c_1|$ dan $|a_2 - c_2|$ akan ganjil atau keduanya tidak ada yang ganjil.
 Kedua $|a_1 - b_i|$ dan $|a_2 - b_i|$ untuk $i = 1, 2, 3$ akan terdapat satu yang ganjil sedangkan satunya lagi akan genap. Akibatnya akan terdapat tepat 3 di antara $|a_1 - b_1|$, $|a_1 - b_2|$, $|a_1 - b_3|$, $|a_2 - b_1|$, $|a_2 - b_2|$, $|a_2 - b_3|$ yang ganjil.
 Kedua $|c_1 - d_i|$ dan $|c_2 - d_i|$ untuk $i = 1, 2, 3$ akan terdapat satu yang ganjil sedangkan satunya lagi akan genap. Akibatnya akan terdapat tepat 3 di antara $|c_1 - d_1|$, $|c_1 - d_2|$, $|c_1 - d_3|$, $|c_2 - d_1|$, $|c_2 - d_2|$, $|c_2 - d_3|$ yang ganjil.
 Akibatnya akan terdapat sejumlah genap di antara keempat belas $|a_1 - b_1|$, $|a_1 - b_2|$, $|a_1 - b_3|$, $|a_2 - b_1|$, $|a_2 - b_2|$, $|a_2 - b_3|$, $|c_1 - d_1|$, $|c_1 - d_2|$, $|c_1 - d_3|$, $|c_2 - d_1|$, $|c_2 - d_2|$, $|c_2 - d_3|$, $|a_1 - c_1|$ dan $|a_2 - c_2|$ yang ganjil. Kontradiksi.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

- Jika a_1 dan a_2 memiliki paritas yang sama dan c_1 dan c_2 memiliki paritas yang berbeda.
Salah satu dari $|a_1 - c_1|$ dan $|a_2 - c_2|$ akan ganjil dan yang lainnya genap.
Kedua $|a_1 - b_i|$ dan $|a_2 - b_i|$ untuk $i = 1, 2, 3$ akan ganjil atau keduanya tidak ada yang ganjil.
Kedua $|c_1 - d_i|$ dan $|c_2 - d_i|$ untuk $i = 1, 2, 3$ akan terdapat satu yang ganjil sedangkan satunya lagi akan genap. Akibatnya akan terdapat tepat 3 di antara $|c_1 - d_1|, |c_1 - d_2|, |c_1 - d_3|, |c_2 - d_1|, |c_2 - d_2|, |c_2 - d_3|$ yang ganjil.
Akibatnya akan terdapat sejumlah genap di antara keempat belas $|a_1 - b_1|, |a_1 - b_2|, |a_1 - b_3|, |a_2 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_2 - b_3|, |c_1 - d_1|, |c_1 - d_2|, |c_1 - d_3|, |c_2 - d_1|, |c_2 - d_2|, |c_2 - d_3|, |a_1 - c_1|$ dan $|a_2 - c_2|$ yang ganjil. Kontradiksi.
- Jika a_1 dan a_2 memiliki paritas yang berbeda dan c_1 dan c_2 memiliki paritas yang sama.
Karena simetris maka pembuktian ini akan sama dengan pembuktian jika a_1 dan a_2 memiliki paritas yang sama dan c_1 dan c_2 memiliki paritas yang berbeda.

87. Buktikan bahwa hasil kali n bilangan asli pertama habis dibagi penjumlahan n bilangan asli pertama jika dan hanya jika $n + 1$ bukan bilangan prima.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1992)

Solusi :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

Ada dua hal yang harus dibuktikan :

- Jika $n!$ habis dibagi $\frac{1}{2}n(n + 1)$ maka $n + 1$ bukan bilangan prima
 Karena $\frac{1}{2}n(n + 1)$ membagi $n!$ maka $\frac{1}{2}(n + 1)$ harus membagi $(n - 1)!$.
 Jika $n + 1$ bilangan prima maka $n + 1$ tidak habis dibagi 2 untuk $n > 1$.
 Karena 1, 2, 3, 4, ..., $n - 1$ semuanya kurang dari $n + 1$ dan $n + 1$ bilangan prima maka tidak ada di antara 1, 2, 3, ..., $n - 1$ yang merupakan faktor dari $n + 1 \rightarrow n!$ tidak habis dibagi $\frac{1}{2}n(n + 1)$.
 Jika $n + 1$ bilangan prima maka $n!$ tidak habis dibagi $\frac{1}{2}n(n + 1)$.
 Pembuktian jika $n + 1$ bilangan prima maka $n!$ tidak habis dibagi $\frac{1}{2}n(n + 1)$ sama dengan pembuktian jika $n!$ habis dibagi $\frac{1}{2}n(n + 1)$ maka $n + 1$ bukan bilangan prima (pembuktian dengan kontraposisi)
 - Jika $n + 1$ bukan bilangan prima maka $n!$ habis dibagi $\frac{1}{2}n(n + 1)$
 Jika $n + 1$ bukan bilangan prima maka $n + 1 = ab$ dengan $a, b \in$ bilangan asli dan $a, b \geq 2$.
 Untuk $n = 1$ maka $n! = 1$ dan $\frac{1}{2}n(n + 1) = 1$ serta 1 membagi 1.
 Untuk $n > 1$ maka $2n > n + 1 \rightarrow n > \frac{1}{2}(n + 1)$
 - Jika n ganjil
 Maka $\frac{1}{2}(n + 1)$ merupakan bilangan bulat.
 Karena $n > \frac{1}{2}(n + 1)$ maka $\frac{1}{2}(n + 1)$ merupakan salah satu dari 1, 2, 3, 4, 5, ..., atau $n - 1$.
 Maka $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ habis dibagi $\frac{1}{2}n(n + 1)$
 - Jika n genap
 Maka $\frac{1}{2}n, a, b$ semuanya kurang dari n . Karena $n + 1$ ganjil maka a dan b keduanya ganjil.
 Karena a, b ganjil > 1 maka $a, b \leq \frac{1}{3}(n + 1) \rightarrow a, b \leq \frac{1}{3}n$ maka $a, b < \frac{1}{2}n$
 Karena $3a, 3b \leq n$ maka a, b dan $\frac{1}{2}n$ masing-masing adalah salah satu dari 1, 2, 3, 4, ..., n .
 Akibatnya $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ habis dibagi $\frac{1}{2}n(n + 1)$
 Terbukti jika $n + 1$ bukan bilangan prima maka $n!$ habis dibagi $\frac{1}{2}n(n + 1)$
- Terbukti bahwa hasil kali n bilangan asli pertama habis dibagi penjumlahan n bilangan asli pertama jika dan hanya jika $n + 1$ bukan bilangan prima.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

88. Selesaikan persamaan $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1992)

Solusi :

$$x^2(x+1)^2 + x^2 = 3(x+1)^2$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 = 3x^2 + 6x + 3$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$(x^2 - x - 1)(x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$x^2 + 3x + 3 = 0 \text{ atau } x^2 - x - 1 = 0$$

- Untuk $x^2 + 3x + 3 = 0$

$$\text{Disk} = 3^2 - 4(1)(3) = -3 < 0$$

Tidak ada akar real yang memenuhi

- Untuk $x^2 - x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ atau } x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Maka nilai x yang memenuhi persamaan $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$ adalah $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ atau $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

89. Tunjukkan bahwa bilangan x adalah rasional jika dan hanya jika terdapat tiga bilangan berbeda yang merupakan barisan geometri yang dipilih dari $x, x+1, x+2, x+3, \dots$

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1993)

Solusi :

Ada dua hal yang harus dibuktikan :

- Jika x adalah bilangan rasional maka terdapat tiga bilangan berbeda yang merupakan barisan geometri yang dipilih dari $x, x+1, x+2, x+3, \dots$

Karena x bilangan rasional maka $x = \frac{m}{n}$ dengan $m, n \in$ bilangan asli.

$$xn = m \rightarrow xmn = m^2 \rightarrow (x+m)^2 = x^2 + m^2 + 2xm = x^2 + xmn + 2xm = x(x+mn+2m)$$

Karena berlaku $(x+m)^2 = x(x+mn+2m)$ maka $x, x+m$ dan $x+mn+2m$ merupakan barisan geometri. (terbukti)

- Jika terdapat tiga bilangan berbeda yang merupakan barisan geometri yang dipilih dari $x, x+1, x+2, x+3, \dots$ maka x adalah bilangan rasional

Misalkan terdapat $x+a, x+b$ dan $x+c$ merupakan barisan geometri maka $(x+b)^2 = (x+a)(x+c)$

$$x^2 + 2bx + b^2 = x^2 + (a+c)x + ac \rightarrow x(2b-a-c) = ac-b^2.$$

$$x = \frac{ac-b^2}{2b-a-c} \text{ merupakan bilangan rasional untuk } a, b, c \in \text{bilangan asli dan } 2b-a-c \neq 0.$$

(terbukti)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

90. Beberapa sekolah mengikuti turnamen tenis. Tidak ada dua pemain yang berasal dari satu sekolah bertanding satu dengan lainnya. Setiap dua pemain dari sekolah yang berbeda bertanding tepat satu kali dengan yang lainnya. Pertandingan antara dua pemain putra maupun dua pemain putri dinamakan *single* dan pertandingan antara pemain putra melawan pemain putri disebut dengan *mixed single*. Total jumlah pemain putra memiliki selisih dengan pemain putri paling banyak satu. Total pertandingan *single* dengan total pertandingan *mixed single* paling banyak juga satu. Tentukan jumlah sekolah maksimal yang dapat mengirimkan sejumlah pemain yang merupakan bilangan ganjil.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1993)

Solusi :

Misalkan banyaknya sekolah yang mengikuti turnamen tenis ada n . Sekolah ke- i akan mengirim kan pemain putra sebanyak B_i dan pemain putri sebanyak G_i .

$$\text{Jumlah seluruh pemain putra} = B = B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n = \sum_{i=1}^n B_i$$

$$\text{Jumlah seluruh pemain putri} = G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n = \sum_{i=1}^n G_i$$

Dari soal kita dapat $|B - G| = 1$

$$\begin{aligned} \text{Banyaknya pertandingan } single &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n B_i(B - B_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G_i(G - G_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n B_i B - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n B_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G_i G - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(B^2 - \sum_{i=1}^n B_i^2 + G^2 - \sum_{i=1}^n G_i^2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Banyaknya pertandingan } mixed\ single = \sum_{i=1}^n B_i(G - G_i) = BG - \sum_{i=1}^n B_i G_i$$

Karena total pertandingan *single* dengan total pertandingan *mixed single* paling banyak juga satu, maka:

$$\frac{1}{2} \left(B^2 - \sum_{i=1}^n B_i^2 + G^2 - \sum_{i=1}^n G_i^2 \right) - BG + \sum_{i=1}^n B_i G_i = 0 \text{ atau } \pm 1$$

$$B^2 - 2BG + G^2 - \sum_{i=1}^n B_i^2 - \sum_{i=1}^n G_i^2 + \sum_{i=1}^n B_i G_i = 0 \text{ atau } \pm 2$$

$$(B - G)^2 - \sum_{i=1}^n (B_i - G_i)^2 = 0 \text{ atau } \pm 2$$

Karena $(B - G) = 1$ maka $\sum_{i=1}^n (B_i - G_i)^2 = -1, 1 \text{ atau } 3$.

$\sum_{i=1}^n (B_i - G_i)^2$ tidak mungkin negatif.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$|B_i - G_i| \leq 1$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ sebab jika sedikitnya 1 dari $1, 2, 3, \dots, n$ terdapat $|B_i - G_i| \geq 2$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ maka $\sum_{i=1}^n (B_i - G_i)^2 \geq 4$.

Jika $|B_i - G_i| = 1$ maka jelas bahwa sekolah ke- i tersebut mengirimkan pemain dalam jumlah ganjil sedangkan jika $|B_j - G_j| = 0$ maka sekolah ke- j tersebut mengirimkan pemain dalam jumlah genap.

$n_{\text{maks}} = 3$ yaitu jika terdapat tepat 3 di antara $1, 2, 3, \dots, n$ yang memenuhi $|B_i - G_i| = 1$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Jumlah sekolah maksimal yang dapat mengirimkan sejumlah pemain yang merupakan bilangan ganjil adalah 3.

91. Tentukan jumlah $\sum_{n=1}^{1994} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!}$. Jawaban boleh dinyatakan dalam faktorial.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1994)

Solusi :

$$\text{Misalkan } S = \sum_{n=1}^{1994} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!}$$

$$S = \sum_{i=1}^{1994} (-1)^n \left(\frac{n}{(n-1)!} + \frac{n+1}{n!} \right)$$

$$S = \sum_{i=1}^{1994} (-1)^n \left(\frac{n}{(n-1)!} \right) + \sum_{i=1}^{1994} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n!} \right)$$

$$S = \sum_{i=0}^{1993} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!} + \sum_{i=1}^{1994} (-1)^n \frac{n+1}{n!}$$

$$S = \left(-\frac{1}{0!} + \frac{2}{1!} - \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} - \dots - \frac{1993}{1992!} + \frac{1994}{1993!} \right) + \left(-\frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} - \frac{4}{3!} + \frac{5}{4!} - \dots - \frac{1994}{1993!} + \frac{1995}{1994!} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{1994} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!} = -1 + \frac{1995}{1994!}$$

92. Misalkan $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Tentukan jumlah $f\left(\frac{1}{1996}\right) + f\left(\frac{2}{1996}\right) + f\left(\frac{3}{1996}\right) + \dots + f\left(\frac{1995}{1996}\right)$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1995)

Solusi :

$$f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$$

$$f(1-x) = \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} = \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} \cdot \frac{9^x/3}{9^x/3} = \frac{3}{3 + 9^x}$$

$$f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{3}{3 + 9^x} = 1$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$f\left(\frac{1}{1996}\right) + f\left(\frac{2}{1996}\right) + f\left(\frac{3}{1996}\right) + \dots + f\left(\frac{1995}{1996}\right) = \left(f\left(\frac{1}{1996}\right) + f\left(\frac{1995}{1996}\right)\right) + \dots + \left(f\left(\frac{997}{1996}\right) + f\left(\frac{999}{1996}\right)\right) + f\left(\frac{998}{1996}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{1996}\right) + f\left(\frac{2}{1996}\right) + f\left(\frac{3}{1996}\right) + \dots + f\left(\frac{1995}{1996}\right) = 1 \cdot 997 + f\left(\frac{1}{2}\right) = 997 + \frac{3}{3+3}$$

$$f\left(\frac{1}{1996}\right) + f\left(\frac{2}{1996}\right) + f\left(\frac{3}{1996}\right) + \dots + f\left(\frac{1995}{1996}\right) = \frac{1995}{2}$$

93. Jika α , β dan γ adalah akar-akar persamaan $x^3 - x - 1 = 0$ tentukan $\frac{1+\alpha}{1-\beta} + \frac{1+\beta}{1-\alpha} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1996)

Solusi :

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{B}{A} = 0$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{C}{A} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{D}{A} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} &= \frac{(1+\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) + (1+\beta)(1-\alpha)(1-\gamma) + (1+\gamma)(1-\alpha)(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \\ &= \frac{3 - (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + 3\alpha\beta\gamma}{1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - \alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{3 - (0) - (-1) + 3(1)}{1 - (0) + (-1) - (1)} \\ &= -7 \end{aligned}$$

94. Tentukan semua penyelesaian sistem persamaan berikut. Hati-hati dengan jawaban Anda.

$$\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \frac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \frac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1996)

Solusi :

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka :

$$0 \leq 4p^2 < 1 + 4p^2$$

$$0 \leq \frac{4t^2}{1+4t^2} < 1 \rightarrow 0 \leq x < 1 ; 0 \leq y < 1 ; 0 \leq z < 1$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

- Jika $x = 0$

Dari pers (1) didapat $y = 0 \rightarrow z = 0$

Begitu juga jika $y = 0$ dan $z = 0$

Didapat penyelesaian sistem persamaan (x, y, z) adalah $(0, 0, 0)$

- Jika tidak ada satu pun $x, y, z = 0$

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} + \frac{4y^2}{1+4y^2} + \frac{4z^2}{1+4z^2} = x + y + z$$

$$\frac{4x^3 + x - 4x^2}{1+4x^2} + \frac{4y^3 + y - 4y^2}{1+4y^2} + \frac{4z^3 + z - 4z^2}{1+4z^2} = 0$$

$$\frac{x(2x-1)^2}{1+4x^2} + \frac{y(2y-1)^2}{1+4y^2} + \frac{z(2z-1)^2}{1+4z^2} = 0$$

Karena persamaan kuadrat tidak mungkin negatif dan telah dibuktikan sebelumnya bahwa $x, y, z > 0$ maka persamaan di atas hanya dapat dipenuhi jika :

$$(2x-1)^2 = 0 \quad ; \quad (2y-1)^2 = 0 \quad \text{dan} \quad (2z-1)^2 = 0$$

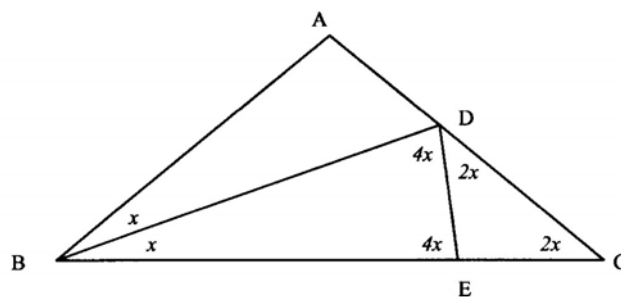
$$x = y = z = \frac{1}{2}$$

Penyelesaian tripel (x, y, z) sistem persamaan di atas adalah $(0, 0, 0)$ dan $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

95. Segitiga ABC adalah segitiga sama kaki dengan $AB = AC$. Garis bagi dari titik B memotong AC di D dan diketahui bahwa $BC = BD + AD$. Tentukan besar $\angle A$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1996)

Solusi :



Dibuat titik E yang terletak pada sisi BC sehingga $BE = BD \rightarrow AD = EC$

Karena BD adalah garis bagi $\triangle ABC$ maka : $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$$

Karena $\triangle ABC$ sama kaki maka :

$$\frac{CE}{CD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{CA}{BC}$$

Pada $\triangle CED$ dan $\triangle CAB$ berlaku $\angle DCE = \angle ACB$ dan $\frac{CE}{CD} = \frac{CA}{BC}$ yang membuat $\triangle CED \cong \triangle CAB$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Maka $\angle DCE = \angle ACB$; $\angle CDE = \angle ABC$ dan $\angle CED = \angle CAB$

Misalkan $\angle ABC = 2x$ maka $\angle CDE = \angle DCE = 2x \rightarrow \angle DEC = 180^\circ - 4x \rightarrow \angle DEB = 4x$

Karena $\angle BDE$ sama kaki maka $\angle BDE = \angle DEB = 4x$

Karena BD adalah garis bagi sudut B maka $\angle DBE = x$

Pada $\angle BDE$ berlaku : $x + 4x + 4x = 180^\circ \rightarrow x = 20^\circ$

$\angle A = 180^\circ - 4x$

$\angle A = 100^\circ$

96. Berapa banyak pasangan bilangan bulat positif x, y dengan $x \leq y$ yang memenuhi $\text{FPB}(x, y) = 5!$ dan $\text{KPK}(x, y) = 50!$. Tanda "!" menyatakan faktorial.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1997)

Solusi :

Misalkan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{12}$ adalah bilangan prima antara 7 sampai 47

$$5! = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot p_1^0 \cdot p_2^0 \cdot \dots \cdot p_{12}^0$$

$$50! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot p_1^{m_4} \cdot p_2^{m_5} \cdot \dots \cdot p_{12}^{m_{15}}$$

$2^4, 3^2, 5^2, p_1^{m_4}, p_2^{m_5}, \dots, p_{12}^{m_{15}}$ semuanya membagi $50!$. Maka pangkat prima dari $5!$ Dan $50!$ semuanya berbeda.

$$\text{Misalkan } x = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot p_1^{n_4} \cdot p_2^{n_5} \cdot \dots \cdot p_{12}^{n_{15}}$$

$$y = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot 5^{m_3} \cdot p_1^{m_4} \cdot p_2^{m_5} \cdot \dots \cdot p_{12}^{m_{15}}$$

Maka maks $(n_i, m_i) =$ pangkat prima dari $50!$ Dan min $(n_i, m_i) =$ pangkat prima dari $5!$.

Karena n_i dan m_i keduanya berbeda maka ada 2 kemungkinan nilai n_i maupun m_i .

Banyaknya kemungkinan nilai x dan y masing-masing adalah 2^{15} .

Karena tidak ada nilai x dan y yang sama dan karena diinginkan $x < y$ maka hanya ada setengah kemungkinan dari nilai x dan y yang mungkin.

Banyaknya pasangan (x, y) yang memenuhi dengan $x < y$ adalah $\frac{2^{15}}{2} = 2^{14}$

97. Buktikan bahwa $\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1997)

Solusi :

$$\text{Misal } P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{1997}{1998} \text{ dan } Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{1998}{1999}$$

$$PQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{1997}{1998} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{1998}{1999} = \frac{1}{1999}$$

$$P < Q \rightarrow P^2 < PQ$$

$$P^2 < \frac{1}{1999} < \frac{1}{44^2} \rightarrow P < \frac{1}{44}$$

$$P > \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \dots \frac{1997}{1999} = \frac{1}{1999}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Maka didapat $\frac{1}{1999} < P < \frac{1}{44}$

$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44} \quad (\text{terbukti})$$

98. Tentukan bilangan real x yang memenuhi $x = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/2}$.

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1998)

Solusi :

Akar dari suatu bilangan tidak mungkin negatif. Karena $x \neq 0$ maka $x > 0$.

$$x^2 = x - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$x^3 = x^2 + x - 2 + 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$(x^3 - x^2 - x + 1) - 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} + 1 = 0$$

Mengingat bahwa $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$ maka

$$\left(\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} - 1\right)^2 = 0$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 1 \rightarrow x^3 - x^2 - x = 0$$

Karena $x \neq 0$ maka $x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{memenuhi bahwa } x > 0) \quad \text{atau} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (\text{tidak memenuhi bahwa } x > 0)$$

Cek ke persamaan semula :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 1 - 2\sqrt{5} \cdot 1} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} = x$$

Nilai x yang memenuhi adalah $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

99. Tentukan semua penyelesaian real dari persamaan $4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51 = 0$ dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x .

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 1999)

Solusi :

$$x \geq \lfloor x \rfloor > x - 1$$

$$4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51 = 0 \rightarrow 4x^2 + 51 = 40\lfloor x \rfloor$$

Maka persamaan di atas harus berlaku :

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

(a) $4x^2 + 51 \leq 40x$
 $4x^2 - 40x + 51 \leq 0$
 $(2x - 17)(2x - 3) \leq 0$
 $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}$ (1)

(b) $4x^2 + 51 > 40(x - 1)$
 $4x^2 - 40x + 91 > 0$
 $(2x - 13)(2x - 7) > 0$
 $x < \frac{7}{2}$ atau $x > \frac{13}{2}$ (2)

Dari batas-batas (1) dan (2) didapat $\frac{3}{2} \leq x < \frac{7}{2}$ atau $\frac{13}{2} < x \leq \frac{17}{2}$

- Untuk $\frac{3}{2} \leq x < \frac{7}{2}$

Nilai $\lfloor x \rfloor$ yang memenuhi adalah 1, 2 dan 3

- * Jika $\lfloor x \rfloor = 1$

$$4x^2 - 40x + 51 = 0 \rightarrow 4x^2 = -11 \text{ (tidak ada } x \text{ real memenuhi)}$$

- * Jika $\lfloor x \rfloor = 2$

$$4x^2 - 80x + 51 = 0 \rightarrow 4x^2 = 29 \rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{16}}{2} \leq \frac{\sqrt{29}}{2} < \frac{\sqrt{36}}{2} \rightarrow 2 \leq \frac{\sqrt{29}}{2} < 3 \text{ yang memenuhi } \left\lfloor \frac{\sqrt{29}}{2} \right\rfloor = 2$$

- * Jika $\lfloor x \rfloor = 3$

$$4x^2 - 120x + 51 = 0 \rightarrow 4x^2 = 69 \rightarrow x = \frac{\sqrt{69}}{2}$$

$$\text{Tetapi } \frac{\sqrt{69}}{2} > \frac{\sqrt{64}}{2} = 4 \text{ yang tidak memenuhi } \left\lfloor \frac{\sqrt{69}}{2} \right\rfloor = 3$$

- Untuk $\frac{13}{2} < x \leq \frac{17}{2}$

Nilai $\lfloor x \rfloor$ yang memenuhi adalah 6, 7 dan 8

- * Jika $\lfloor x \rfloor = 6$

$$4x^2 - 240x + 51 = 0 \rightarrow 4x^2 = 189 \rightarrow x = \frac{\sqrt{189}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{144}}{2} \leq \frac{\sqrt{189}}{2} < \frac{\sqrt{196}}{2} \rightarrow 6 \leq \frac{\sqrt{189}}{2} < 7 \text{ yang memenuhi } \left\lfloor \frac{\sqrt{189}}{2} \right\rfloor = 6$$

- * Jika $\lfloor x \rfloor = 7$

$$4x^2 - 280x + 51 = 0 \rightarrow 4x^2 = 229 \rightarrow x = \frac{\sqrt{229}}{2}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\frac{\sqrt{196}}{2} \leq \frac{\sqrt{229}}{2} < \frac{\sqrt{256}}{2} \rightarrow 7 \leq \frac{\sqrt{229}}{2} < 8 \text{ yang memenuhi } \left\lfloor \frac{\sqrt{229}}{2} \right\rfloor = 7$$

* Jika $\lfloor x \rfloor = 8$

$$4x^2 - 320 + 51 = 0 \rightarrow 4x^2 = 269 \rightarrow x = \frac{\sqrt{269}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{256}}{2} \leq \frac{\sqrt{269}}{2} < \frac{\sqrt{324}}{2} \rightarrow 8 \leq \frac{\sqrt{269}}{2} < 9 \text{ yang memenuhi } \left\lfloor \frac{\sqrt{269}}{2} \right\rfloor = 8$$

Nilai x yang memenuhi persamaan $x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51 = 0$ adalah $\left(\frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{189}}{2}, \frac{\sqrt{229}}{2}, \frac{\sqrt{269}}{2} \right)$

100. Tomi sedang mencoba menerka umur Tanya dan keponakannya. Tanya menulis persamaan kuadrat yang tidak diketahui Tomi dengan akar-akarnya adalah merupakan umurnya dan keponakannya serta merupakan bilangan asli. Diketahui bahwa jumlah ketiga koefisien persamaan kuadrat tersebut merupakan bilangan prima. Tomi mencoba menerka umur Tanya dengan suatu bilangan bulat tertentu (variabel persamaan kuadrat tersebut diganti dengan terkaan Tomi). Setelah dihitung oleh Tanya hasilnya adalah -55 .

(a) Buktikan bahwa keponakan Tanya berumur 2 tahun

(b) Tentukan umur Tanya

(Sumber : Canadian Mathematical Olympiad 2001 dengan perubahan redaksional)

Solusi :

Misal T adalah umur Tanya dan K adalah umur keponakannya.

Persamaan kuadrat tersebut adalah $a(x - T)(x - K) = ax^2 - a(T + K)x + aTK$

Jumlah koefisien adalah $a - a(T + K) + aTK = a(T - 1)(K - 1)$

Karena penjumlahan koefisiennya adalah bilangan prima maka 2 di antara a , $(T - 1)$ dan $(K - 1)$ sama dengan 1.

Karena $T > K$ maka $(T - 1) \neq 1$ yang berakibat $a = 1$ dan $K - 1 = 1 \rightarrow K = 2$ (terbukti)

Persamaan kuadrat $f(x) = (x - T)(x - 2)$

Karena $T > 2$ maka $x - T < 0$ sebab jika $x - T > 0$ maka $x - 2 > 0$ yang perkaliannya tidak akan menghasilkan bilangan negatif.

Karena $(x - T)(x - 2) = -55$ maka kemungkinannya adalah :

* $x - 2 = 1$ dan $x - T = -55$ yang menghasilkan $x = 3$ dan $T = 58 \rightarrow T - 1 = 57$ (bukan prima)

* $x - 2 = 5$ dan $x - T = -11$ yang menghasilkan $x = 7$ dan $T = 18 \rightarrow T - 1 = 17$ (prima)

* $x - 2 = 11$ dan $x - T = -5$ yang menghasilkan $x = 13$ dan $T = 18 \rightarrow T - 1 = 17$ (prima)

* $x - 2 = 55$ dan $x - T = -1$ yang menghasilkan $x = 57$ dan $T = 58 \rightarrow T - 1 = 57$ (bukan prima)

Umur Tanya adalah 18 tahun.

101. Bilangan a , b , c adalah digit-digit dari suatu bilangan yang memenuhi $49a + 7b + c = 286$. Apakah bilangan tiga angka $(100a + 10b + c)$?

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 1996)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

286 jika dibagi 7 akan bersisa 6

$49a + 7b$ habis dibagi 7.

Karena ruas kanan jika dibagi 7 bersisa 6 maka $c = 6$.

$$49a + 7b + 6 = 286 \rightarrow 7a + b = 40$$

karena $0 \leq b \leq 9$ maka $31 \leq 7a \leq 40$ maka $a = 5 \rightarrow b = 5$

$$100a + 10b + c = 556$$

102. Jika ${}^{2n}\log(1944) = {}^n\log(486\sqrt{2})$, tentukan nilai n^6 .

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 1996)

Solusi :

Misalkan ${}^{2n}\log(1944) = {}^n\log(486\sqrt{2}) = k$ maka :

$$1944 = (2n)^k \text{ dan } 486\sqrt{2} = n^k$$

$$\left(\frac{2n}{n}\right)^k = \frac{1944}{486\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \rightarrow 2^k = 2^{\frac{3}{2}} \rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$n^6 = (n^k)^4 = (486\sqrt{2})^4$$

$$n^6 = 3^{20} \cdot 2^6$$

103. Dua dadu dengan sisinya dicat merah atau biru. Dadu pertama terdiri dari 5 sisi merah dan 1 sisi biru. Ketika kedua dadu tersebut dilempar, peluang munculnya sisi dadu berwarna sama adalah $\frac{1}{2}$. Ada berapa banyak sisi dadu kedua yang berwarna merah ?

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 1997)

Solusi :

Misalkan Banyaknya sisi dadu kedua yang berwarna merah = x maka sisi dadu birunya = $6 - x$

$$\text{Peluang munculnya sisi dadu berwarna sama} = \frac{5}{6} \cdot \frac{x}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6-x}{6}$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{x}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6-x}{6} = \frac{1}{2}$$

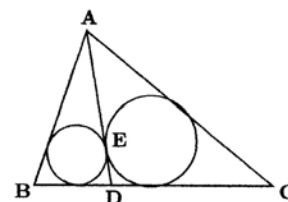
$$5x + 6 - x = 18$$

$$x = 3$$

Banyaknya sisi dadu kedua yang berwarna merah = 3

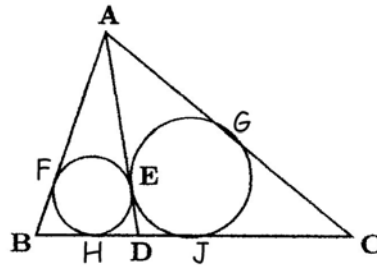
104. Segitiga ABC memiliki sisi $AB = 137$, $AC = 241$ dan $BC = 200$. Titik D terletak pada sisi BC sehingga lingkaran dalam $\triangle ABD$ dan lingkaran dalam $\triangle ACD$ menyinggung sisi AD di titik yang sama, yaitu E. Tentukan panjang CD.

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 1997)



Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :



Misalkan garis AB menyinggung lingkaran di F dan G. Garis BC menyinggung lingkaran di H dan J.

Panjang $AF = x \rightarrow AE = AF = x$ dan $BF = 137 - x \rightarrow AG = AE = x \rightarrow BH = BF = 137 - x$

Panjang $GC = 241 - x \rightarrow CJ = CG = 241 - x$

Misalkan panjang $DE = y \rightarrow DH = DJ = DE = y$

$BC = BH + HD + DJ + CJ = 137 - x + y + y + 241 - x = 378 + 2y - 2x$

$200 = 378 + 2y - 2x \rightarrow x - y = 89$

$BD = 137 - x + y = 137 - 89 = 48$

$CD = CJ + DJ \rightarrow CD = 241 - x + y \rightarrow CD = 241 - (x - y)$

$CD = 241 - 89$

$CD = 152$

105. Tentukan bilangan real x , y dan z yang memenuhi sistem persamaan :

$$x - \sqrt{yz} = 42$$

$$y - \sqrt{xz} = 6$$

$$z - \sqrt{xy} = -30$$

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 1997)

Solusi :

Misal $x = a^2$, $y = b^2$ dan $z = c^2$

$$a^2 - bc = 42 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$b^2 - ac = 6 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$c^2 - ab = -30 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$a^2 - bc + (c^2 - ab) - 2(b^2 - ac) = 0$$

$$a^2 + c^2 + 2ac - 2b^2 - ab - bc = 0$$

$$(a + c)^2 - b(a + c) - 2b^2 = 0$$

$$((a + c) + b)((a + c) - 2b) = 0$$

• Jika $a + c + b = 0$

$$(b + c)^2 - bc = 42 \rightarrow b^2 + c^2 + bc = 42 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$b^2 - (-b - c)c = 6 \rightarrow b^2 + c^2 + bc = 6 \quad \dots\dots\dots (5)$$

Dari persamaan (4) dan (5) maka tidak ada nilai a , b dan c yang memenuhi.

• Jika $a + c - 2b = 0$

$$a^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)c = 42$$

$$2a^2 - ac - c^2 = 84 \quad \dots\dots\dots (6)$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$c^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)a = -30$$

$$2c^2 - ac - a^2 = -60 \dots\dots\dots (7)$$

$$3a^2 - 3c^2 = 144 \rightarrow (a+c)(a-c) = 48 \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{1}{4}(a+c)^2 - ac = 6 \rightarrow (a-c)^2 = 24 \dots\dots\dots (9)$$

* Jika $a - c > 0$ maka $a - c = 2\sqrt{6} \rightarrow a + c = 4\sqrt{6} \rightarrow a = 3\sqrt{6}$ dan $c = \sqrt{6} \rightarrow b = 2\sqrt{6}$
 $x = a^2 = 96$; $y = b^2 = 24$; $z = c^2 = 6$

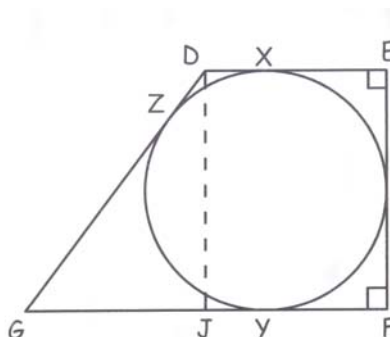
* Jika $a - c < 0$ maka $a - c = -2\sqrt{6} \rightarrow a + c = -4\sqrt{6} \rightarrow a = -3\sqrt{6}$ dan $c = -\sqrt{6} \rightarrow b = -2\sqrt{6}$
 $x = a^2 = 96$; $y = b^2 = 24$; $z = c^2 = 6$

Tripel (x, y, z) yang memenuhi (96, 24, 6)

106. Sebuah trapesium DEFG dengan sebuah lingkaran dalam menyinggung keempat sisinya dan berjari-jari 2 serta berpusat di C. Sisi DE dan GF adalah sisi yang sejajar dengan $DE < GF$ dan $DE = 3$. Diketahui bahwa $\angle DEF = \angle EFG = 90^\circ$. Tentukan luas trapesium.

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 1999)

Solusi :



Misalkan garis DG menyinggung lingkaran di titik Z dan Garis GF menyinggung lingkaran di titik Y maka $GZ = GY$ dan $FY = 2$.

Misalkan garis DE menyinggung lingkaran di titik X maka $DX = 3 - 2 = 1 \rightarrow DZ = DX = 1$

Tarik garis dari titik D tegak lurus GF memotong GF di titik J maka $DJ = 4$.

Dengan menganggap $GZ = GY = k$ maka pada $\triangle DGJ$ berlaku :

$$(k+1)^2 = (k-1)^2 + 4^2 \rightarrow k = 4$$

$$GF = GY + YF = 4 + 2 = 6$$

$$\text{Luas trapesium} = \frac{6+3}{2} \cdot 4 = 18.$$

107. Tentukan bilangan asli terkecil k sehingga pecahan $\frac{14k+17}{k-9}$ dapat disederhanakan menjadi $\frac{pd}{qd}$

dengan p, q, d adalah bilangan asli, p dan q relatif prima serta tidak ada satu pun di antara q atau d bernilai 1.

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 1999)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

Alternatif 1 :

$$\frac{14k + 17}{k - 9} = 14 + \frac{143}{k - 9}$$

$k - 9 = qd$. Agar k minimal maka q dan d harus minimal dengan d adalah faktor dari 143.

Karena $143 = 11 \cdot 13$ maka nilai d minimal dengan $d \neq 1$ adalah 11. Karena q harus relatif prima dengan 13 maka nilai minimal q adalah 2.

$$k_{\min} - 9 = 2 \cdot 11 \rightarrow k_{\min} = 31.$$

Alternatif 2 :

$$\text{Karen } d \mid k - 9 \text{ dan } d \mid 14k + 17 \text{ maka } d \mid 14k + 17 - 14(k - 9) \rightarrow d \mid 143$$

Karena $d \neq 1$ maka nilai d minimal = 11.

$14k + 17$ adalah bilangan ganjil $\rightarrow p$ adalah bilangan ganjil \rightarrow Agar FPB(p, q) = 1 maka $q_{\min} = 2$.

$$k_{\min} - 9 = 2 \cdot 11 \rightarrow k_{\min} = 31.$$

108. Jika $(bd + cd)$ adalah bilangan ganjil, tunjukkan bahwa polinomial $x^3 + bx^2 + cx + d$ tidak dapat diekspresikan ke dalam bentuk $(x + r)(x^2 + px + q)$ dengan b, c, d, r, p , dan q semuanya adalah bilangan bulat.

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 1999)

Solusi :

Andaikan polinomial $x^3 + bx^2 + cx + d$ dapat diekspresikan ke dalam bentuk $(x + r)(x^2 + px + q)$ dengan b, c, d, r, p , dan q semuanya adalah bilangan bulat, maka :

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x + r)(x^2 + px + q) = x^3 + (p + r)x^2 + (pr + q)x + qr$$

$$p + r = b \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$pr + q = c \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$qr = d \quad \dots\dots\dots (3)$$

Jika $bd + cd = d(b + c)$ adalah bilangan ganjil maka d dan $b + c$ keduanya ganjil.

Karena d ganjil berdasarkan persamaan (3) maka q dan r keduanya ganjil.

Dari persamaan (1) dan (2) didapat :

$$b + c = p + r + pr + q$$

$$b + c = p(r + 1) + r + q$$

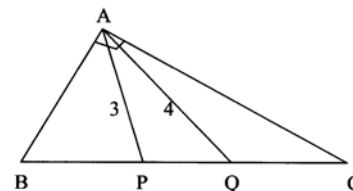
Ruas kiri bernilai ganjil. Karena r ganjil maka $p(r + 1)$ genap sedangkan $r + q$ genap untuk q ganjil.

Maka ruas kanan genap (kontradiksi)

Jika $(bd + cd)$ adalah bilangan ganjil maka polinomial $x^3 + bx^2 + cx + d$ tidak dapat diekspresikan ke dalam bentuk $(x + r)(x^2 + px + q)$ dengan b, c, d, r, p , dan q semuanya adalah bilangan bulat (terbukti).

109. Segitiga ABC siku-siku di A. Titik P dan Q keduanya terletak pada sisi BC sehingga $BP = PQ = QC$. Jika diketahui $AP = 3$ dan $AQ = 4$, tentukan panjang masing-masing sisi $\triangle ABC$.

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 1999)



Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

Misalkan $BP = PQ = QC = p$ dan panjang sisi ketiga $\triangle ABC$ adalah a, b dan $c \rightarrow a = 3p$

Pada $\triangle ABP$ berlaku : $3^2 = c^2 + p^2 - 2cp \cos \angle ABC$ dengan $\cos \angle ABC = \frac{c}{a} = \frac{c}{3p}$

$$9 = \frac{1}{3}c^2 + p^2 \dots\dots\dots (1)$$

Pada $\triangle ACQ$ berlaku : $4^2 = b^2 + p^2 - 2bp \cos \angle ACB$ dengan $\cos \angle ACB = \frac{b}{a} = \frac{b}{3p}$

$$16 = \frac{1}{3}b^2 + p^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) \rightarrow 25 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) + 2p^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2 = 9p^2 \rightarrow 25 = 5p^2 \rightarrow p = \sqrt{5} \rightarrow BC = a = 3\sqrt{5}$$

Subtitusikan hasil di atas ke persamaan (1) dan (2) didapat $AB = c = 2\sqrt{3}$ dan $AC = b = \sqrt{33}$

110. Pada segitiga ABC, titik D, E dan F secara berurutan terletak pada sisi BC, CA dan AB yang memenuhi $\angle AFE = \angle BFD$, $\angle BDF = \angle CDE$ dan $\angle CED = \angle AEF$.

(a) Buktikan bahwa $\angle BDF = \angle BAC$

(b) Jika $AB = 5$, $BC = 8$ dan $CA = 7$, tentukan panjang BD

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 2000)

Solusi :

(a) Misal $\angle AFE = \angle BFD = x$

$\angle BDF = \angle CDE = y$

$\angle CED = \angle AEF = z$

Maka $\angle FAE = 180^\circ - x - z$

$\angle FBD = 180^\circ - x - y$

$\angle ECD = 180^\circ - y - z$

Pada $\triangle ABC$ berlaku $\angle FAE + \angle DBD + \angle ECD = 180^\circ$

$$180^\circ - x - z + 180^\circ - x - y + 180^\circ - y - z = 180^\circ$$

$$x + y + z = 180^\circ$$

$$\angle FAE = 180^\circ - (180^\circ - y) = y$$

$$\angle BDF = \angle FAE = \angle BAC \text{ (terbukti)}$$

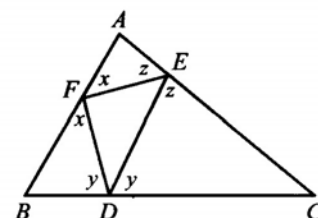
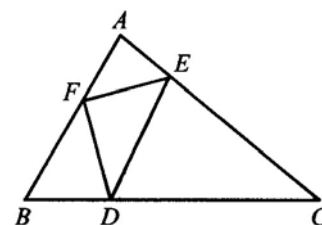
(b) Berdasarkan hitungan sebelumnya maka $\angle ABC = z$ dan $\angle ACB = x$

Karena kesamaan sudut maka $\triangle ABC \cong \triangle DBF \cong \triangle DEC \cong \triangle AEF$

$$\frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{8} \rightarrow \text{Jika } BD = 5k \text{ maka } BF = 8k$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} = \frac{7}{8} \rightarrow \text{Jika } CD = 7p \text{ maka } CE = 8p$$

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \rightarrow \text{Jika } AE = 5m \text{ maka } AF = 7m$$



Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Maka $5k + 7p = 8$

$7m + 8k = 5$

$5m + 8p = 7$

Dari ketiga persamaan di atas akan didapat $k = \frac{1}{2}$

Maka $BD = 5k = \frac{5}{2}$

111. (a) Jika $f(x) = x^2 + 6x + c$ dengan c bilangan bulat, buktikan bahwa $f(0) + f(-1)$ ganjil
 (b) Misalkan $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ dengan p, q dan r bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $g(0)$ dan $g(-1)$ keduanya ganjil maka tidak mungkin ketiga akar persamaan $g(x) = 0$ semuanya bilangan bulat.

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 2001)

Solusi :

(a) $f(0) + f(-1) = c + 1 + 6 + c = 2c + 7$

Karena $2c$ adalah genap maka $f(0) + f(-1)$ ganjil (terbukti)

(b) Andaikan bahwa $g(x) = 0$ mempunyai tiga akar yang semuanya bulat, yaitu a, b dan c . Maka :

$$g(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = x^3 + px^2 + qx + r$$

Karena $g(0)$ ganjil maka r ganjil \rightarrow Karena $r = -abc$ maka a, b dan c semuanya ganjil.

$$g(-1) = (1 - a)(1 - b)(1 - c)$$

Karena a ganjil maka $(1 - a)$ genap $\rightarrow g(-1)$ genap (kontradiksi)

Maka jika $g(0)$ dan $g(-1)$ keduanya ganjil maka tidak mungkin ketiga akar persamaan $g(x) = 0$ semuanya bilangan bulat.

112. Sebuah bilangan dipilih secara acak dari bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 999, 1000. Peluang bilangan yang terpilih merupakan pembagi M dengan M adalah bilangan asli kurang dari atau sama dengan 1000 adalah 0,01. Tentukan nilai maksimum dari M ?

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 2002)

Solusi :

Kalau $p = 0,01$ maka banyaknya faktor positif dari $M = 10$

Karena $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$ maka M harus berbentuk p_1^9 atau $p_1 \cdot p_2^4$ dengan p_1 dan p_2 adalah bilangan prima.

- Jika $M = p_1^9$

$$p_1^9 < 1000 \text{ maka } p_{1 \text{ maks}} = 2$$

$$M_{\text{maks}} = 2^9 = 512$$

- Jika $M = p_1 \cdot p_2^4$

$$\text{Karena } p_1 \geq 2 \text{ maka } p_2^4 \leq 500 \rightarrow p_2 = 2 \text{ atau } 3$$

$$* \text{ Jika } p_2 = 2$$

$$M = 16p_1 \leq 1000 \rightarrow M_{\text{maks}} = 976 \text{ didapat jika } p_1 = 61$$

$$* \text{ Jika } p_2 = 3$$

$$M = 81p_1 \leq 1000 \rightarrow M_{\text{maks}} = 891 \text{ didapat jika } p_1 = 11$$

Maka nilai maksimum dari M adalah 976

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

113. (a) Misalkan A dan B adalah digit suatu bilangan (artinya A dan B adalah bilangan bulat terletak antara 0 dan 9). Jika hasil kali bilangan tiga angka 2A5 dan 13B habis dibagi 36, tentukan empat kemungkinan pasangan (A, B)
- (b) Sebuah bilangan bulat n dikatakan kelipatan 7 jika $n = 7k$ untuk nilai k bulat.
- (i) Jika a dan b bulat serta $10a + b = 7m$ untuk m bulat, buktikan bahwa $a - 2b$ kelipatan 7
- (ii) Jika c dan d bulat serta $5c + 4d$ kelipatan 7, buktikan bahwa $4c - d$ juga kelipatan 7.

(Sumber : Canadian Open Mathematics Challenge 2002)

Solusi :

(a) $36 = 4 \cdot 9$

Karena 2A5 adalah bilangan ganjil maka kemungkinannya adalah $36 \mid 13B$ atau $3 \mid 2A5$ dan $12 \mid 13B$ atau $9 \mid 2A5$ dan $4 \mid 13B$.

- Jika $36 \mid 13B$

Karena $4 \cdot 36 = 144 > 139$ dan $3 \cdot 36 = 108 < 130$ maka tidak ada B memenuhi $36 \mid 13B$

- Jika $3 \mid 2A5$ dan $12 \mid 13B$

Maka $3 \mid 2 + A + 5 \rightarrow 2 \mid 7 + A \rightarrow$ Nilai A yang memenuhi adalah 2, 5 atau 8.

$12 \cdot 10 = 120 < 130$ dan $12 \cdot 12 = 144 > 139$ maka $12 \mid 13B$ hanya dipenuhi untuk $13B : 12 = 11 \rightarrow B=2$

Pasangan (A, B) yang memenuhi adalah (2,2), (5, 2) dan (8, 2)

- Jika $9 \mid 2A5$ dan $4 \mid 13B$

Maka $9 \mid 2 + A + 5 \rightarrow 2 \mid 7 + A \rightarrow$ Nilai A yang memenuhi adalah 2.

Karena $4 \mid 13B$ maka $4 \mid 10 + B \rightarrow$ Nilai B yang memenuhi adalah 2 dan 6.

Pasangan (A, B) yang memenuhi adalah (2,2), (2, 6).

Pasangan (A, B) yang memenuhi (2A5)(13B) habis dibagi 36 adalah (2, 2), (5, 2), (8, 2) dan (2, 6).

- (b) (i) **Alternatif 1 :**

$$10p + q = 7m$$

$$p - 2q = 50p - 49p + 5q - 7q = 5(10 + q) - 7(7p + q)$$

$$p - 2q = 5 \cdot 7m - 7(7p + q)$$

$$p - 2q = 7(5m - 7p - q)$$

Terbukti $p - 2q$ habis dibagi 7.

Alternatif 2 :

$$\text{Karena } 10p + q = 7m \text{ maka } q = 7m - 10p$$

$$p - 2q = p - 2(7m - 10p) = 7(3p - 2m)$$

Terbukti $p - 2q$ habis dibagi 7.

- (ii) Karena $5c + 4d$ habis dibagi 7 maka $5c + 4d = 7k$ (1)

Alternatif 1 :

$$4c - d = 14c - 10c + 7d - 8d = 7(2c + d) - 2(5c + 4d)$$

$$4c - d = 7(2c + d) - 2 \cdot 7k$$

$$4c - d = 7(2c + d - 2k)$$

Terbukti $4c - d$ habis dibagi 7

Alternatif 2 :

$$\text{Dari (1) didapat : } d = \frac{7k - 5c}{4} \rightarrow 4c - d = 4c - \frac{7k - 5c}{4} = \frac{7}{4}(3c - k)$$

Karena $4c - d$ bulat dan 7 relatif prima dengan 4 maka $3c - k$ harus habis dibagi 4.

$$3c - k = 4p \rightarrow 4c - d = 7p$$

Terbukti $4c - d$ habis dibagi 7.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

114. Misalkan a, b, c dan p adalah bilangan real dengan a, b dan c semuanya berbeda dan memenuhi

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p$$

Tentukan semua kemungkinan nilai p dan buktikan bahwa $abc + p = 0$

(Sumber : Dutch Mathematical Olympiad 1983)

Solusi :

Dari persamaan di atas didapat $ac + 1 = ap \rightarrow apc + p = ap^2 \dots\dots\dots (1)$

$bc + 1 = cp \dots\dots\dots (2)$

Substitusikan persamaan (2) ke (1) :

$$a(bc + 1) + p = ap^2$$

$$a(p^2 - 1) = abc + p \dots\dots\dots (3)$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$b(p^2 - 1) = abc + p \dots\dots\dots (4)$$

$$c(p^2 - 1) = abc + p \dots\dots\dots (5)$$

$$(3) - (4) \rightarrow (a - b)(p^2 - 1) = 0$$

Karena $a \neq b$ maka $p = \pm 1$

Dari persamaan (3) karena $p = \pm 1$ maka $abc + p = 0$ (terbukti)

115. Buktikan bahwa jika a dan b ($a > b$) adalah bilangan prima terdiri dari sedikitnya 2 angka, maka $a^4 - b^4$ habis dibagi 240.

(Sumber : Flanders Mathematics Olympiad 1990 Babak Final)

Solusi :

$$\text{Misal } n = a^4 - b^4$$

Karena $240 = 3 \cdot 5 \cdot 16$ dan 3, 5, 16 saling relatif prima maka akan dibuktikan bahwa n habis dibagi 3, 5 dan 16.

- Akan dibuktikan n habis dibagi 3

Sebuah bilangan prima > 3 akan berbentuk $3k + 1$ atau $3k + 2$

Karena $(3k + 1)^4 \equiv 1^4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$ dan $(3k + 2)^4 \equiv 2^4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$ maka a^4 dan b^4 keduanya bersisa 1 jika dibagi 3.

$$a^4 - b^4 \equiv 0 \pmod{3}$$

- Akan dibuktikan n habis dibagi 5

Bilangan prima > 5 akan termasuk ke dalam salah satu dari $5k + 1, 5k + 2, 5k + 3$ atau $5k + 4$ (atau bisa juga masuk ke dalam $5k \pm 1$ atau $5k \pm 2$. Lihat pada pembuktian habis dibagi 16 alternatif 2)

$$(5k + 1)^4 \equiv 1^4 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$(5k + 2)^4 \equiv 2^4 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$(5k + 3)^4 \equiv 3^4 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$(5k + 4)^4 \equiv 4^4 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$$

Sehingga a^4 dan b^4 keduanya bersisa 1 jika dibagi 5

$$a^4 - b^4 \text{ habis dibagi } 5.$$

- Akan dibuktikan n habis dibagi 16

Alternatif 1 :

Bilangan kuadrat akan termasuk ke dalam $4k$ atau $4k + 1$. Karena a dan b prima maka a^2 dan b^2 akan berbentuk $4k + 1$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Misal $a^2 = 4m + 1$ dan $b^2 = 4n + 1$

$$a^4 - b^4 = (4m + 1)^2 - (4n + 1)^2 = 16m^2 + 8m - 16n^2 - 8n = 8m(m + 1) - 8n(n + 1)$$

$m(m + 1)$ dan $n(n + 1)$ adalah bilangan genap, maka $8m(m + 1)$ dan $8n(n + 1)$ keduanya habis dibagi 16.

$a^4 - b^4$ habis dibagi 16

Alternatif 2 :

Sebuah bilangan prima akan masuk ke dalam salah satu dari $16k \pm 1$, $16k \pm 3$, $16k \pm 5$ atau $16k \pm 7$.

$$(16k \pm 1)^4 \equiv (\pm 1)^4 \pmod{16} \equiv 1 \pmod{16}$$

$$(16k \pm 3)^4 \equiv (\pm 3)^4 \pmod{16} \equiv 81 \pmod{16} \equiv 1 \pmod{16}$$

$$(16k \pm 5)^4 \equiv (\pm 5)^4 \pmod{16} \equiv 625 \pmod{16} \equiv 1 \pmod{16}$$

$$(16k \pm 7)^4 \equiv (\pm 7)^4 \pmod{16} \equiv 2401 \pmod{16} \equiv 1 \pmod{16}$$

Sehingga a^4 dan b^4 keduanya bersisa 1 jika dibagi 16

$a^4 - b^4$ habis dibagi 16.

Karena $a^4 - b^4$ habis dibagi 3, 5 dan 16 maka $a^4 - b^4$ habis dibagi 240.

116. Pada bulan Desember, masing-masing 20 orang siswa dalam satu kelas yang sama megirimkan 10 kartu ucapan selamat kepada kawan-kawannya yang lain yang juga berada dalam satu kelas yang sama. Kelas tersebut hanya berisi ke-20 orang siswa tersebut. Buktikan bahwa terdapat sedikitnya satu pasang siswa yang saling mengirim kartu.

Misalkan sebuah kelas terdiri dari n siswa masing-masing megirimkan m kartu ucapan selamat kepada m orang kawan-kawannya yang lain yang juga berada dalam satu kelas yang sama. Bagaimanakah hubungan m dan n sedikitnya satu pasang siswa yang saling mengirim kartu

(Sumber : Flanders Mathematics Olympiad 1993 Babak Final)

Solusi :

Andaikan bahwa di antara dua orang siswa tidak ada keduanya saling mengirim kartu. Maka maksimal banyaknya kartu yang beredar = ${}_{20}C_2 = 190$.

Jumlah kartu yang beredar = $20 \cdot 10 = 200 > 190$ (kontradiksi)

Terbukti bahwa terdapat sedikitnya satu pasang siswa yang saling mengirim kartu.

Andaikan bahwa di antara dua orang siswa tidak ada keduanya saling mengirim kartu. Maka maksimal banyaknya kartu yang beredar = ${}_nC_2 = n(n - 1)/2$.

Jumlah kartu yang beredar = mn

Maka $mn > n(n - 1)/2$

$2m > n - 1$

117. Tentukan semua penyelesaian (a, b, c) yang memenuhi persamaan $(a + \sqrt{c})^2 + (b + \sqrt{c})^2 = 60 + 20\sqrt{c}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $c \leq 94$.

(Sumber : Flanders Mathematics Olympiad 1994 Babak Final)

Solusi :

Syarat persamaan tersebut adalah $c \geq 0$

$$a^2 + b^2 + 2c + 2(a + b)\sqrt{c} = 60 + 20\sqrt{c}$$

$$a^2 + b^2 + 2c = 60 \quad \dots\dots\dots (1) \quad \text{dan} \quad a + b = 10 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Dari persamaan (1) didapat $a^2 \leq 60$ dan $b^2 \leq 60 \rightarrow -7 \leq a \leq 7$ dan $-7 \leq b \leq 7$

Karena $a + b = 10$ maka pasangan (a, b) yang memenuhi adalah $(3, 7)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$ dan $(7, 3)$

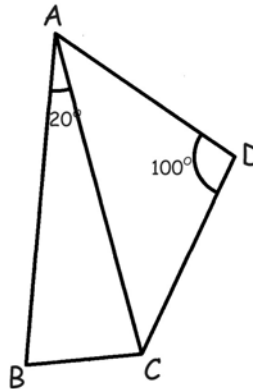
Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Dari persamaan (1) dapat dihitung nilai c

- Jika $a = 3$ dan $b = 7$ maka $c = 1$
- Jika $a = 4$ dan $b = 6$ maka $c = 4$
- Jika $a = 5$ dan $b = 5$ maka $c = 5$
- Jika $a = 6$ dan $b = 4$ maka $c = 4$
- Jika $a = 7$ dan $b = 3$ maka $c = 1$

Penyelesaian (a, b, c) yang memenuhi adalah $(3, 7, 1)$, $(4, 6, 4)$, $(5, 5, 5)$, $(6, 4, 4)$ dan $(7, 3, 1)$.

118. Misalkan $\triangle ABC$ dan $\triangle DAC$ adalah dua buah segitiga sama kaki dengan $AB = AC$ dan $AD = DC$. Pada $\triangle ABC$ besar $\angle BAC = 20^\circ$ sedangkan pada $\triangle ADC$ berlaku $\angle ADC = 100^\circ$. Buktikan bahwa $AB = BC + CD$.



(Sumber : Flanders Mathematics Olympiad 1996 Babak Final)

Solusi :

Karena $\angle ADC = 100^\circ$ maka $\angle DAC = \angle DCA = 40^\circ$

Karena $\angle BAC = 20^\circ$ maka $\angle ACB = \angle ABC = 80^\circ$

$\angle BAD = 60^\circ$ dan $\angle BCD = 120^\circ$

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 BC \cdot CD \cos 120^\circ$$

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + BC \cdot CD \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 AB \cdot AD \cos 60^\circ$$

$$BD^2 = AB^2 + CD^2 - AB \cdot CD \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$BC^2 + CD^2 + BC \cdot CD = AB^2 + CD^2 - AB \cdot CD$$

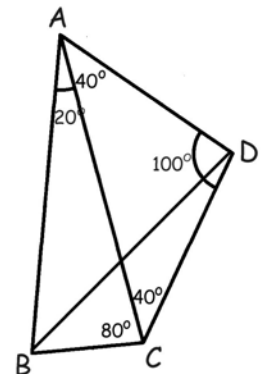
$$AB^2 - BC^2 = CD \cdot (AB + BC)$$

$$(AB + BC) (AB - BC) = CD \cdot (AB + BC)$$

Karena $AB + BC \neq 0$ maka :

$$AB - BC = CD$$

$$AB = BC + CD \text{ (terbukti)}$$



119. Tentukan semua 3×3 *magic square*.

Definisi : Sebuah $n \times n$ *magic square* adalah sebuah matriks dengan ukuran $n \times n$ yang elemennya adalah bilangan bulat - bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, n^2$ dan memenuhi jumlah elemen pada masing-masing baris, masing-masing kolom dan kedua diagonal utama sama.

Contoh 4×4 *magic square* adalah :

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

(Sumber : Flanders Mathematics Olympiad 1998 Babak Final)

Solusi :

Misalkan 3×3 *magic square* adalah :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Karena $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 = 45$ maka jumlah elemen dalam masing-masing baris, masing-masing kolom dan kedua diagonal utama masing-masing = 15.

Penjumlahan-penjumlahan elemen tersebut adalah :

$$\begin{array}{llll} a + b + c = 15 & d + e + f = 15 & g + h + i = 15 & a + d + g = 15 \\ b + e + h = 15 & c + f + i = 15 & a + e + i = 15 & c + e + g = 15 \end{array}$$

Elemen yang muncul 4 kali adalah e, yang muncul 3 kali adalah a, c, g, i sedangkan yang muncul 2 kali adalah b, d, f dan h.

Kombinasi penjumlahan bilangan-bilangan yang menghasilkan nilai 15 :

$$\begin{array}{llll} 1 + 5 + 9 = 15 & 1 + 6 + 8 = 15 & 2 + 4 + 9 = 15 & 2 + 5 + 8 = 15 \\ 2 + 6 + 7 = 15 & 3 + 4 + 8 = 15 & 3 + 5 + 7 = 15 & 4 + 5 + 6 = 15 \end{array}$$

Bilangan yang muncul 4 kali adalah 5, yang muncul 3 kali adalah 2, 4, 6, 8 sedangkan yang muncul 2 kali adalah 1, 3, 7 dan 9.

Maka $e = 5$. Kemungkinan nilai a ada 4 yaitu 2, 4, 6 atau 8. Jika nilai a telah ditentukan maka pilihan nilai i hanya ada 1. Nilai c ada 2 kemungkinan jika a telah ditentukan dan i harus dipilih. Akibatnya pilihan nilai g hanya ada 1.

Jika a, c, e, g dan i telah ditentukan maka nilai b, d, f dan h masing-masing hanya ada 1 pilihan.

Maka banyaknya 3×3 *magic square* ada $4 \times 2 = 8$.

2	9	4	2	7	6	4	9	2	4	3	8
7	5	3	9	5	1	3	5	7	9	5	1
6	1	8	4	3	8	8	1	6	2	7	6
6	7	2	6	1	8	8	3	4	8	1	6
1	5	9	7	5	3	1	5	9	3	5	7
8	3	4	2	9	4	6	7	2	4	9	2

120. Tentukan semua bilangan asli terdiri dari 6 angka, misalkan abcdef, dengan $a \neq 0$ dan $d \neq 0$ yang memenuhi $abcdef = (def)^2$.

(Sumber : Flanders Mathematics Olympiad 1999 Babak Final)

Solusi :

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f = (100d + 10e + f)^2$$

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f = d^2 \cdot 10^4 + e^2 \cdot 10^2 + f^2 + 2de \cdot 10^3 + 2df \cdot 10^2 + 2ef \cdot 10$$

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f = 10000d^2 + 100e^2 + f^2 + 2000de + 200df + 20ef$$

Angka satuan ruas kiri = f

Angka satuan ruas kanan = angka satuan f^2

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Nilai f yang memenuhi adalah 0, 1, 5 atau 6

Angka puluhan ruas kiri = e

Angka puluhan ruas kanan = angka satuan $2ef$ + angka puluhan f^2

- Jika $f = 0$

Angka puluhan ruas kanan = $0 + 0 = 0 \rightarrow e = 0$

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d = 10000d^2$$

Angka ratusan ruas kiri = d sedangkan angka ratusan ruas kanan = $0 \rightarrow d = 0$ (tidak memenuhi)

- Jika $f = 1$

Angka puluhan ruas kanan = $2e + 0 = 2e$.

Karena angka puluhan ruas kiri = e maka nilai e yang memenuhi adalah $e = 0$

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 1 = 10000d^2 + 1 + 200d$$

Angka ratusan ruas kiri = d sedangkan angka ratusan ruas kanan = $2d \rightarrow d = 0$ (tidak memenuhi)

- Jika $f = 5$

Angka puluhan ruas kanan = Angka satuan $10e$ + Angka puluhan $5^2 = 0 + 25 = 25 \rightarrow e = 2$

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 25 = (100d + 25)^2 = 10000d^2 + 5000d + 625$$

$$\text{Angka ratusan ruas kanan} = 6 \rightarrow d = 6 \rightarrow 625^2 = 390625$$

- Jika $f = 6$

Angka puluhan ruas kanan = Angka satuan $12e$ + Angka puluhan $6^2 = (Angka\ satuan\ 2e) + 3$

Angka puluhan ruas kiri = $e \rightarrow$ Nilai e yang memenuhi adalah $e = 7$

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 76 = (100d + 76)^2 = 10000d^2 + 15200d + 5776$$

Angka ratusan ruas kiri = d

$$\text{Angka ratusan ruas kanan} = (Angka\ satuan\ 2d) + 7 \rightarrow d = 3 \rightarrow 376^2 = 141376$$

Nilai $abcdef$ yang memenuhi adalah $390625 = 625^2$ dan $141376 = 376^2$

121. Sebuah bilangan asli n terdiri dari 7 digit berbeda dan habis dibagi oleh masing-masing digitnya. Tentukan ketiga digit yang tidak termasuk ke dalam digit dari n .

(Sumber : Flanders Mathematics Olympiad 2000 Babak Final)

Solusi :

Karena hanya ada tiga digit yang tidak masuk ke dalam digit-digit dari n maka sesuai dengan Pigeon Hole Principle maka sedikitnya satu dari 2, 4, 6 atau 8 adalah digit dari n . Akibatnya n genap.

Karena 0 tidak membagi bilangan manapun maka 0 tidak termasuk digit dari n .

Andaikan 5 adalah digit dari n maka angka satuan dari n harus 0 atau 5. Karena 0 tidak termasuk digit dari n maka angka satuan n adalah 5. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa n genap. Maka 5 tidak termasuk digit dari n .

Andaikan 9 tidak termasuk digit dari n maka penjumlahan digit $n = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 = 31$.

Karena 3 termasuk digit dari n maka penjumlahan digit n harus habis dibagi 3. Tetapi 31 tidak habis dibagi 3. Maka 9 termasuk digit dari n .

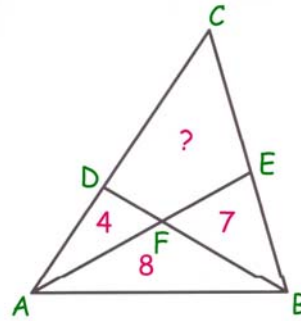
$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 \equiv 4 \pmod{9}. \text{ Maka 4 harus dibuang dari digit-digit } n.$$

Maka ketiga digit yang tidak termasuk ke dalam digit dari n adalah 0, 4 dan 5.

(Catatan : Contoh bilangan tersebut adalah 9231768)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

122. Dua garis lurus membagi sebuah segitiga menjadi empat bagian dengan luas tertulis seperti pada gambar. Tentukan luas keempat.



(Sumber : Flanders Mathematics Olympiad 2001 Babak Final)

Solusi :

Misalkan luas $\triangle CDF = x$ dan luas $\triangle CEF = y$

$\triangle CDF$ dan $\triangle DAF$ memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{CD}{DA} = \frac{x}{4} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$\triangle CDB$ dan $\triangle BDA$ memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{CD}{DA} = \frac{x + y + 7}{4 + 8} \quad \dots\dots\dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) didapat :

$$12x = 4x + 4y + 28$$

$$2x = y + 7 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$\triangle BEF$ dan $\triangle CEF$ memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{BE}{EC} = \frac{7}{y} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$\triangle BAE$ dan $\triangle EAC$ memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{BE}{EC} = \frac{7 + 8}{x + y + 4} \quad \dots\dots\dots (5)$$

Dari persamaan (4) dan (5) didapat :

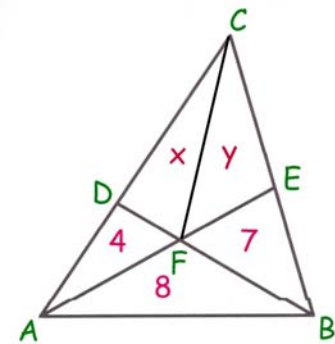
$$7x + 7y + 28 = 15y$$

$$8y = 7x + 28 \quad \dots\dots\dots (6)$$

Dari persamaan (3) dan (6) didapat : $x = \frac{28}{3}$ dan $y = \frac{35}{3}$

Luas bagian keempat = $x + y$

Luas bagian keempat = 21



123. Pada suatu hari tiga orang sahabat, Maradona, Pele dan Ronaldo sedang bermain sepakbola dengan satu gawang. Mereka membuat peraturan sebagai berikut : Permainan dimulai dengan salah satu dari mereka akan berperan sebagai penjaga gawang dan yang lainnya sebagai penyerang yang berusaha mencetak gol ke gawang. Permainan dihentikan manakala ada penyerang yang mencetak gol. Saat itu dihitung sebagai satu permainan. Permainan baru dimulai lagi dengan penyerang yang mencetak gol

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

menjadi penjaga gawang sedangkan penjaga gawang pada permainan sebelumnya menjadi penyerang. Permainan dihentikan jika ada penyerang yang mencetak gol. Itu juga dianggap sebagai satu permainan. Demikian seterusnya. Sampai suatu saat permainan benar-benar dihentikan sesaat setelah ada seorang penyerang yang mencetak gol. Setelah dihitung ternyata Maradona 12 kali menjadi penyerang sedangkan Pele 21 kali menjadi penyerang. Ronaldo menjadi penjaga gawang sebanyak 8 kali. Siapakah yang mencetak gol pada permainan keenam ? Buktikan jawaban Anda.

(Sumber : Flanders Mathematics Olympiad 2003 Babak Final dengan perubahan redaksional soal tanpa mengubah inti persoalan)

Solusi :

Karena Ronaldo menjadi penjaga gawang sebanyak 8 kali maka Maradona menjadi penyerang bersama-sama dengan Pele juga sebanyak 8 kali.

Maradona menjadi penyerang bersama-sama dengan Ronaldo sebanyak $12 - 8 = 4$ kali. Maka Pele menjadi penjaga gawang sebanyak 4 kali. Jumlah permainan ada sebanyak $21 + 4 = 25$ kali.

Maradona menjadi penyerang sebanyak 13 kali.

Seorang pemain tidak akan mungkin menjadi penjaga gawang pada dua permainan secara berurutan.

Karena jumlah permainan sebanyak 25 kali sedangkan Maradona menjadi penjaga gawang sebanyak 13 kali maka Maradona akan menjadi penjaga gawang pada permainan yang ke-ganjil.

Karena Maradona menjadi penjaga gawang pada permainan ke-7 maka Maradona harus mencetak gol pada permainan keenam.

124. Sebuah bilangan terdiri dari 3 digit. Jumlah lima bilangan lain yang dibentuk dari ketiga digit ini adalah 2003. Tentukan bilangan tersebut.

(Sumber : Flanders Mathematics Olympiad 2003 Babak Final)

Solusi :

Misalkan bilangan tersebut $n = 100a + 10b + c$ maka :

$$(100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) = 2003$$

$$(100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) + n = 2003 + n$$

$$222(a + b + c) = 2003 + (100a + 10b + c)$$

$$2003 < 2003 + (100a + 10b + c) \leq 2003 + 999$$

$$2003 < 222(a + b + c) \leq 3002$$

$$9 < a + b + c \leq 13$$

- Jika $a + b + c = 10$

$$222 \cdot 10 = 2003 + (100a + 10b + c) \rightarrow 100a + 10b + c = 217 \rightarrow a = 2, b = 1, c = 7$$

$$a + b + c = 2 + 1 + 7 = 10 \text{ (memenuhi)}$$

- Jika $a + b + c = 11$

$$222 \cdot 11 = 2003 + (100a + 10b + c) \rightarrow 100a + 10b + c = 439 \rightarrow a = 4, b = 3, c = 9$$

$$a + b + c = 4 + 3 + 9 = 16 \text{ (tidak memenuhi)}$$

- Jika $a + b + c = 12$

$$222 \cdot 12 = 2003 + (100a + 10b + c) \rightarrow 100a + 10b + c = 661 \rightarrow a = 6, b = 6, c = 1$$

$$a + b + c = 6 + 6 + 1 = 13 \text{ (tidak memenuhi)}$$

- Jika $a + b + c = 13$

$$222 \cdot 13 = 2003 + (100a + 10b + c) \rightarrow 100a + 10b + c = 883 \rightarrow a = 8, b = 8, c = 3$$

$$a + b + c = 8 + 8 + 3 = 19 \text{ (tidak memenuhi)}$$

Jadi bilangan tersebut adalah 217

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

125. Tunjukkan bahwa untuk sembarang bilangan real x maka

$$x^2 \sin x + x \cos x + x^2 + \frac{1}{2} > 0$$

(Sumber : Regional Mathematical Olympiad 1995)

Solusi :

Misalkan $y = x^2 \sin x + x \cos x + x^2 + \frac{1}{2} = (1 + \sin x)x^2 + x \cos x + \frac{1}{2}$

Maka y merupakan persamaan kuadrat dalam x .

$$\text{Diskriminan} = \cos^2 x - 2(1 + \sin x)$$

$$\text{Diskriminan} = 1 - \sin^2 x - 2 - 2\sin x$$

$$\text{Diskriminan} = -(\sin x + 1)^2 - 1 < 0$$

$$1 + \sin x > 0$$

Karena diskriminan dari $y < 0$ sedangkan koefisien $x^2 > 0$ maka $x^2 \sin x + x \cos x + x^2 + \frac{1}{2}$ definit positif.

Terbukti bahwa $x^2 \sin x + x \cos x + x^2 + \frac{1}{2} > 0$

(Catatan : Regional Mathematical Olympiad mungkin seperti Olimpiade Matematika di India pada tingkat provinsi)

126. Jika A adalah himpunan beranggotakan 50 unsur yang merupakan himpunan bagian dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ dan bersifat bahwa tidak ada dua bilangan di dalam A yang jumlahnya 100. Tunjukkan bahwa A mengandung suatu bilangan kuadrat murni.

(Sumber : Regional Mathematical Olympiad 1996)

Solusi :

Banyaknya pasangan bilangan asli yang jumlahnya 100 adalah 49 pasang yaitu $(1,99), (2,98), (3,97), (4,96), \dots, (49,51)$.

Asumsikan bahwa A tidak mengandung bilangan kuadrat murni.

Agar hal tersebut terjadi maka paling banyak 1 dari sepasang bilangan tersebut yang merupakan unsur A .

Tetapi pasangan $(36, 64)$ keduanya merupakan bilangan kuadrat yang berarti keduanya tidak dapat menjadi anggota A .

100 adalah bilangan kuadrat yang tidak termasuk pasangan yang disebutkan sebelumnya.

Maksimal banyaknya anggota $A = 100 - 49 - 1 - 1 = 49$ (kontradiksi dengan fakta bahwa banyaknya anggota A adalah 50 unsur).

Terbukti bahwa A mengandung bilangan kuadrat murni.

127. Tentukan pasangan bilangan bulat positif x dan n yang memenuhi persamaan $x^2 + 615 = 2^n$.

(Sumber : KRMO 1996)

Solusi :

Karena $n > 0$ maka 2^n genap yang berarti x bilangan ganjil.

Bilangan kuadrat jika dibagi 3 akan bersisa 0 atau 1.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

615 habis dibagi 3.

$$2^n = (3 - 1)^n \rightarrow 2^n \equiv (-1)^n \pmod{3}$$

Jika n ganjil maka $2^n \equiv -1 \pmod{3} \equiv 2 \pmod{3}$. Tidak akan ada kesamaan.

Jika n genap maka $2^n \equiv 1 \pmod{3}$. Maka n genap \rightarrow Misal $n = 2p$

$$x^2 + 615 = (2^p)^2$$

$$615 = 5 \cdot 3 \cdot 41 \cdot (2^p + x)(2^p - x)$$

Banyaknya faktor dari 615 adalah 8. Maka ada 4 kasus yang akan ditinjau.

- Jika $2^p + x = 615$ dan $2^p - x = 1$
Didapat $x = 307$ dan $2^p = 308$ (tidak ada nilai p asli yang memenuhi)
- Jika $2^p + x = 205$ dan $2^p - x = 3$
Didapat $x = 101$ dan $2^p = 104$ (tidak ada nilai p asli yang memenuhi)
- Jika $2^p + x = 123$ dan $2^p - x = 5$
Didapat $x = 59$ dan $2^p = 64 \rightarrow p = 6$
 $n = 12$
- Jika $2^p + x = 41$ dan $2^p - x = 15$
Didapat $x = 13$ dan $2^p = 28$ (tidak ada nilai p asli yang memenuhi)

Pasangan nilai x dan n yang memenuhi hanya $x = 59$ dan $n = 12$

128. Jika $a^2 = 7b + 51$ dan $b^2 = 7a + 51$ dengan a dan b bilangan real berbeda, tentukan hasil kali ab.
(Sumber : KRMO 1996)

Solusi :

$$a^2 - b^2 = 7(b - a) \rightarrow (a - b)(a + b) = 7(b - a)$$

Karena $a \neq b$ maka $a + b = -7$

$$a^2 + b^2 = 7(a + b) + 102 \rightarrow (a + b)^2 - 2ab = 7(a + b) + 102$$

$$(-7)^2 - 2ab = 7(-7) + 102$$

$$ab = -2$$

129. Diketahui sekuens bilangan bulat positif naik a_1, a_2, a_3, \dots bersifat bahwa $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$. Diketahui bahwa $a_7 = 169$. Berapa nilai-nilai $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ dan a_8 ?

(Sumber : Pra Seleksi Olimpiade Matematika Indonesia 1996)

Solusi :

$$a_7 = a_5 + 2a_6$$

$$a_6 = \frac{1}{2}(a_7 - a_5) \dots\dots (1)$$

$$a_6 = a_4 + 2a_5$$

$$\frac{1}{2}(a_7 - a_5) = a_4 + 2 \cdot a_5$$

$$a_7 - a_5 = 2a_4 + 4a_5$$

$$a_5 = \frac{1}{5}(a_7 - 2a_4) \dots\dots\dots (2)$$

$$a_5 = a_3 + 2a_4$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$a_7 - 2a_4 = 5a_3 + 10a_2$$

$$a_4 = \frac{1}{12}(a_7 - 5a_3) \dots\dots\dots (3)$$

$$a_4 = a_2 + 2a_3$$

$$\frac{1}{12}(a_7 - 5a_3) = a_2 + 2a_3$$

$$a_3 = \frac{1}{29}(a_7 - 12a_2) \dots\dots\dots (4)$$

$$a_3 = a_1 + 2a_2$$

$$\frac{1}{29}(a_7 - 12a_2) = a_1 + 2a_2$$

$$\frac{1}{5}(a_7 - 2a_4) = a_3 + 2a_2$$

$$a_2 = \frac{1}{70}(169 - 29a_1) \dots\dots\dots (5)$$

Karena a_2 bulat maka $(169 - 29a_1)$ bilangan genap sebab bilangan genap dibagi bilangan genap memungkinkan menjadi bilangan bulat. Sehingga a_1 harus bilangan ganjil. Selain itu, karena a_2 positif maka $29a_1 \leq 169$. Akibatnya, nilai a_1 yang mungkin adalah 1, 3 atau 5.

$$a_1 = 1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{70}(169 - 29) = 2 \text{ (memenuhi syarat sebab } a_2 \text{ bulat positif)}$$

$$a_1 = 3 \rightarrow a_2 = \frac{1}{70}(169 - 87) = \frac{41}{35} \text{ (tidak memenuhi syarat sebab } a_2 \text{ tidak bulat positif)}$$

$$a_1 = 5 \rightarrow a_2 = \frac{1}{70}(169 - 145) = \frac{12}{35} \text{ (tidak memenuhi syarat sebab } a_2 \text{ tidak bulat positif)}$$

Jadi $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$

$$a_3 = a_1 + 2a_2$$

$$a_3 = 1 + 2(2)$$

$$a_3 = 5 \dots\dots\dots (6)$$

$$a_4 = a_2 + 2a_3$$

$$a_4 = 2 + 2(5)$$

$$a_4 = 12 \dots\dots\dots (7)$$

$$a_5 = a_3 + 2a_4$$

$$a_5 = 5 + 2(12)$$

$$a_5 = 29 \dots\dots\dots (8)$$

$$a_6 = a_4 + 2a_5$$

$$a_6 = 12 + 2(29)$$

$$a_6 = 70 \dots\dots\dots (9)$$

$$a_7 = 169 \dots\dots\dots (10)$$

$$a_8 = a_6 + 2a_7$$

$$a_8 = 70 + 2(169)$$

$$a_8 = 408 \dots\dots\dots (11)$$

Jadi $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 12$, $a_5 = 29$, $a_6 = 70$ dan $a_8 = 408$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

130. Dua buah lingkaran yang masing-masing berjari-jari a dan b saling bersinggungan. Dibuat sebuah garis yang menyinggung kedua lingkaran tersebut, misalkan garis tersebut adalah garis m . Lingkaran ketiga dengan jari-jari c dibuat menyinggung kedua lingkaran tersebut dan juga menyinggung garis m . Buktikan bahwa :

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$$

(Sumber : Pra Seleksi Olimpiade Matematika Indonesia 1996)

Solusi :

Pada gambar garis CK sejajar dengan PQ sehingga $KP = c$. CS sejajar dengan PQ sehingga $SQ = c$. BT juga sejajar dengan PQ sehingga $TP = b$.

$$(PR)^2 = (CK)^2 = (AC)^2 - (AK)^2$$

$$(PR)^2 = (AM + MC)^2 - (AP - KP)^2$$

$$(PR)^2 = (a + c)^2 - (a - c)^2$$

$$(PR)^2 = a^2 + c^2 + 2ac - a^2 - c^2 + 2ac$$

$$PR = 2\sqrt{ac}$$

$$(RQ)^2 = (CS)^2 = (BC)^2 - (BS)^2$$

$$(RQ)^2 = (BN + NC)^2 - (BQ - SQ)^2$$

$$(RQ)^2 = (b + c)^2 - (b - c)^2$$

$$(RQ)^2 = b^2 + c^2 + 2bc - b^2 - c^2 + 2bc$$

$$RQ = 2\sqrt{bc}$$

$$(PQ)^2 = (BT)^2 = (AB)^2 - (AT)^2$$

$$(PQ)^2 = (AL + LB)^2 - (AP - TP)^2$$

$$(PQ)^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$(PQ)^2 = a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 + 2ab$$

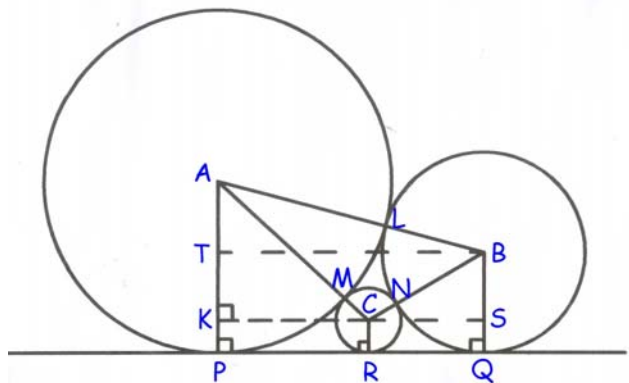
$$PQ = 2\sqrt{ab}$$

$$PQ = PR + RQ$$

$$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$$

Bagi kedua ruas dengan $2\sqrt{abc}$ maka

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$$



131. Jika m dan n saling relatif prima, buktikan bahwa $\frac{\log m}{\log n}$ bukan bilangan rasional.

(Sumber : Pra Seleksi Olimpiade Matematika Indonesia 1996)

Solusi :

Andaikan bahwa $\frac{\log m}{\log n}$ bilangan rasional maka $\frac{\log m}{\log n} = \frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan asli.

Maka berlaku $m^b = n^a$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena m dan n relatif prima maka tidak ada a dan b bilangan asli yang memenuhi (kontradiksi)

Terbukti bahwa jika m dan n saling relatif prima, maka $\frac{\log m}{\log n}$ bukan bilangan rasional.

132. Tentukan semua pasangan bilangan bulat tak negatif (x, y) yang memenuhi $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$.
(Sumber : Pra Seleksi Olimpiade Matematika Indonesia 1997)

Solusi :

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2 \rightarrow (xy)^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2 \rightarrow (xy)^2 - 12xy + 36 + 13 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(xy - 6)^2 + 13 = (x + y)^2 \rightarrow 13 = (x + y + xy - 6)(x + y - xy + 6)$$

Karena 13 prima maka ada dua kasus yang mungkin :

- $x + y + xy - 6 = 1$ dan $x + y - xy + 6 = 13$

$$2(x + y) = 14 \rightarrow x + y = 7$$

$$xy = 0 \rightarrow x = 0 \text{ atau } y = 0$$

$$\text{Jika } x = 0 \text{ maka } y = 7$$

$$\text{Jika } y = 0 \text{ maka } x = 7$$

- $x + y + xy - 6 = 13$ dan $x + y - xy + 6 = 1$

$$2(x + y) = 14 \rightarrow x + y = 7$$

$$7 + xy - 6 = 13 \rightarrow xy = 12$$

$$x + \frac{12}{x} = 7 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

$$\text{Jika } x = 3 \text{ maka } y = 4$$

$$\text{Jika } x = 4 \text{ maka } y = 3$$

Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah $(0, 7), (3, 4), (4, 3), (7, 0)$

133. Sisi-sisi AB, BC dan CA segitiga ABC masing-masing panjangnya sama dengan c, a dan b satuan sedangkan c, a dan b masing-masing adalah bilangan asli. Diketahui pula bahwa c, a dan b masing-masing adalah pembagi keliling segitiga ABC . Buktikan bahwa segitiga ABC sama sisi.

(Sumber : Pra Seleksi Olimpiade Matematika Indonesia 1997)

Solusi :

Tanpa mengurangi keumuman soal, misalkan $a \leq b \leq c$

$$a + b + c = mc \text{ untuk suatu bilangan asli } m$$

$$a + b > c$$

diketahui pula bahwa $a + b \leq c + c = 2c$ maka :

$$c < a + b \leq 2c$$

$$c < (m - 1)c \leq 2c$$

$$1 < m - 1 \leq 2$$

Nilai m yang memenuhi hanya $m = 3$ maka :

$$a + b = 2c$$

$$a < b + c$$

$$a + b + c < 2(b + c)$$

$$3c < 2(b + c)$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$c < 2b$$

Karena b merupakan pembagi keliling segitiga maka $a + b + c = nb$ untuk suatu bilangan asli n

$$a + b + c < b + b + 2b$$

$$nb < 4b \rightarrow n < 4$$

$$\text{Karena } b < a + c \text{ maka } 2b < a + b + c = nb \rightarrow 2 < n$$

$$\text{Maka } 2 < n < 4 \rightarrow \text{Nilai } n \text{ yang memenuhi hanya } n = 3$$

$$\text{Karena } a + b + c = mc = nb \text{ sedangkan } m = n = 3 \text{ maka } b = c$$

$$a + b + c = 3c \rightarrow a + b + b = 3b \rightarrow a = b$$

Maka $a = b = c$ atau segitiga ABC sama sisi.

134. Sebanyak n orang pengurus sebuah organisasi akan dibagi ke dalam empat komisi mengikuti ketentuan berikut : (i) setiap anggota tergabung kedalam tepat dua komisi, dan (ii) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama. Berapakah n ?

(Sumber : Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi 2002 Bagian Pertama)

Solusi :

(a) setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi

(b) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama

Misal keempat komisi tersebut adalah A, B, C dan D dengan jumlah anggota masing-masing k , maka berdasarkan (a) didapat $\rightarrow 2n = 4k$

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) \\ + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)$$

Berdasarkan (a) dan (b) maka :

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n$$

$$n(A) = n(B) = n(C) = n(D) = k$$

$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(A \cap D) = n(B \cap C) = n(B \cap D) = n(C \cap D) = 1$$

$$n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B \cap D) = n(A \cap C \cap D) = n(B \cap C \cap D) = 0$$

$$n(A \cap B \cap C \cap D) = 0$$

maka

$$n = k + k + k + k - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 0 + 0 + 0 + 0 - 0$$

$$n = 4k - 6$$

$$n = 2n - 6$$

$$n = 6$$

Banyaknya pengurus agar memenuhi syarat tersebut adalah 6

135. Berapakah sisa pembagian 43^{43} oleh 100 ?

(Sumber : Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi 2002 Bagian Pertama)

Solusi :

Alternatif 1 :

Dua digit terakhir dari 43^1 adalah 43

Dua digit terakhir dari 43^2 adalah 49

Dua digit terakhir dari 43^3 adalah 07

Dua digit terakhir dari 43^4 adalah 01

Dua digit terakhir dari 43^5 adalah 43 dst.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena $43 = 4 \cdot 10 + 3$ maka 2 digit terakhir dari 43^{43} sama dengan dua digit terakhir dari 43^3 yaitu 07. Sehingga $43^{43} = \dots 07 = 100t + 7 = 4k + 7$ dengan t dan k adalah bilangan bulat.

$$43^{43} = 43^{4k+7} = 43^{4k} \cdot 43^7 = (43^4)^k \cdot 43^7$$

Karena dua digit terakhir dari 43^4 adalah 01 maka dua digit terakhir dari $(43^4)^k$ adalah juga 01.

Dua digit terakhir dari 43^7 sama dengan dua digit terakhir dari 43^3 yaitu 07.

Maka dua digit terakhir dari 43^{43} sama dengan dua digit terakhir dari perkalian dua digit terakhir $(43^4)^k$ dengan dua digit terakhir dari 43^7 .

Karena $01 \times 07 = 07$. Maka 2 digit terakhir dari 43^{43} adalah 07.

Alternatif 2 :

$$43^{43} = (4 \cdot 11 - 1)^{43} \rightarrow 43^{43} \equiv (-1)^{43} \pmod{4} \rightarrow 43^{43} \equiv -1 \pmod{4} \text{ atau } 43^{43} \equiv 3 \pmod{4}$$

Berarti $43^{43} = 4k + 3$ dengan k adalah bilangan asli.

$$43^{43} = 43^{4k+3} = (1849)^{2k} \cdot 43^3$$

$$43^{43} \equiv (49)^{2k} \cdot 43^3 \pmod{100}$$

$$43^{43} \equiv (2401)^k \cdot 7 \pmod{100} \text{ sebab } 43^3 \equiv 7 \pmod{100}$$

$$43^{43} \equiv 1^k \cdot 7 \pmod{100}$$

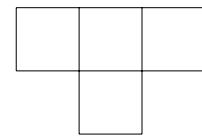
$$43^{43} \equiv 7 \pmod{100}$$

Karena $43^{43} \equiv 7 \pmod{100}$ berarti $43^{43} = 100p + 7$ dengan p adalah bilangan asli.

43^{43} jika dibagi 100 akan bersisa 7

Sisa pembagian 43^{43} oleh 100 adalah 7.

136. Bangun datar pada gambar disebut *tetromino-T*. Misalkan setiap petak tetromino menutupi tepat satu petak pada papan catur. Kita ingin menutup papan catur dengan tetromino-tetromino sehingga setiap petak tetromino menutup satu petak catur tanpa tumpang tindih.

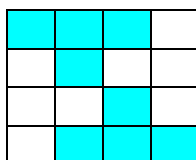


tetromino-T

- (a) Tunjukkan bahwa kita dapat menutup papan catur biasa, yaitu papan catur dengan 8×8 petak, dengan menggunakan 16 tetromino-T.
 (b) Tunjukkan bahwa kita tidak dapat menutup papan 'catur' 10×10 petak dengan 25 tetromino-T.
 (Sumber : Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi 2002 Bagian Kedua)

Solusi :

(a)



Karena petak 4×4 dapat ditutupi oleh 4 buah *tetromino-T*, maka tentunya kita dapat menutup petak catur 8×8 dengan 16 buah *Tetromino-T*.

- (b) Sebuah *tetromino-T* akan menutupi 1 buah petak hitam dan 3 buah petak putih atau 1 buah petak putih dan 3 buah petak hitam pada papan catur.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian



Karena 1 dan 3 bilangan ganjil serta banyaknya *Tetromino-T* ada 25 yang juga merupakan bilangan ganjil maka ke-25 *Tetromino-T* tersebut akan menutupi sejumlah ganjil petak hitam dan sejumlah ganjil petak putih pada papan catur. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa pada papan catur 10×10 terdapat 50 petak hitam dan 50 petak putih.

Terbukti bahwa kita tidak dapat menutup papan 'catur' 10×10 petak dengan 25 *tetromino-T*.

137. Buktikan bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e , dengan $e \geq 2$, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$.

(Sumber : Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi 2004 Bagian Kedua)

Solusi :

Andaikan ada ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e , dengan $e \geq 2$, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$.

Alternatif 1:

Karena persamaan berbentuk $ab = c^d$ dengan $a, b, c, d \in \text{Asli}$, maka a membagi c atau c membagi a .

- * Jika k membagi m

maka $m = p \cdot k^q$ dengan p bukan kelipatan k dan $q \in \text{bilangan bulat positif}$ dan $p \in \text{bilangan asli}$.

Persamaan menjadi $p^3 k^{3q} + p k^q = k^e \rightarrow p^3 k^{2q} + p = k^{e-q} \dots\dots\dots (2)$

- Jika $e > q$

Ruas kanan persamaan (2) adalah sebuah bilangan yang habis dibagi k sedangkan ruas kiri adalah sebuah bilangan yang bersisa p jika dibagi k dengan p bukan bilangan kelipatan k . Maka tanda kesamaan tidak akan mungkin terjadi.

- Jika $e \leq q$

Ruas kanan persamaan (2) bernilai ≤ 1

Karena $p \geq 1$ dan $k \geq 2$ maka $p^3 k^{2q} + p \geq 3$ yang berarti tidak ada nilai p dan k yang memenuhi.

Maka tidak ada nilai $m \in \text{bilangan asli}$ yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan k membagi m .

- * Jika m membagi k

maka $k = rm$ dengan $r \in \text{bilangan asli}$ sebab $k \geq 2$

Persamaan akan menjadi $m(m^2 + 1) = r^e m^e \rightarrow m + \frac{1}{m} = r^e m^{e-2} \dots\dots\dots (3)$

- Jika $m = 1$

Persamaan (3) menjadi $2 = r^e$. Karena $2 = 2^1$ maka persamaan hanya akan dipenuhi jika $r = 2$ dan $e = 1$ yang tidak memenuhi syarat bahwa $e \geq 2$.

- Jika $m > 1$

Ruas kiri persamaan (3) bukan merupakan bilangan bulat sedangkan ruas kanan merupakan bilangan bulat sebab $e \geq 2$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Maka tidak ada nilai $m \in$ bilangan asli yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan m membagi k .

Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e , dengan $e \geq 2$, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$

Alternatif 2 :

Misalkan $m = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n}$ untuk suatu bilangan prima $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ dan bilangan bulat tak negatif $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

maka $m^2 + 1 = (p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n})^2 + 1$

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ semuanya membagi m tetapi $m^2 + 1$ jika dibagi $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ amsing-masing akan bersisa 1. Maka m dan $m^2 + 1$ saling relatif prima.

Persamaan pada soal hanya akan terpenuhi jika m dan $m^2 + 1$ memiliki pangkat yang sama.

Misalkan $m = a^e$ dan $m^2 + 1 = b^e = a^{2e} + 1$.

Karena $(a^2 + 1)^e = {}^eC_0 a^{2e} + {}^eC_1 a^{2(e-1)} + \dots + {}^eC_e 1^e = a^{2e} + e \cdot a^{2(e-1)} + \dots + 1 > a^{2e} + 1 = m^2 + 1$

$(a^2)^e < m^2 + 1 = (a^2)^e + 1 < (a^2 + 1)^e$

Dari ketaksamaan di atas didapat $m^2 + 1$ terletak di antara dua bilangan asli berurutan berpangkat e . Maka tidak mungkin $m^2 + 1$ berbentuk b^e .

Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e , dengan $e \geq 2$, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$

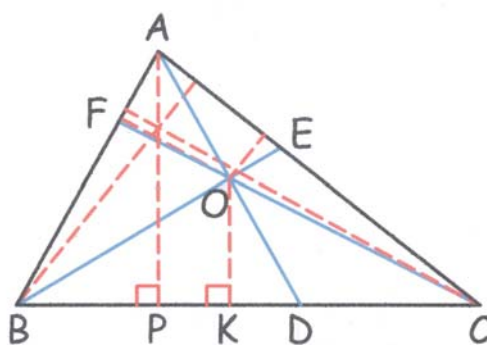
138. Pada segitiga ABC diberikan titik-titik D, E, dan F yang terletak berturut-turut pada sisi BC, CA dan AB sehingga garis-garis AD, BE dan CF berpotongan di titik O. Buktikan bahwa

$$\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 2$$

(Sumber : Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi 2004 Bagian Kedua)

Solusi :

Dibuat garis tinggi pada segitiga ABC dan segitiga BOC yang masing-masing ditarik dari titik A dan O. Garis tinggi ini masing-masing memotong sisi BC di titik P dan K.



$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} (BC)(AP)$$

$$\text{Luas } \triangle BOC = \frac{1}{2} (BC)(OK)$$

$$\frac{\text{Luas } \triangle BOC}{\text{Luas } \triangle ABC} = \frac{OK}{AP} \quad \dots\dots\dots (1)$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$\triangle DAP$ sebangun dengan $\triangle DOK$ sehingga $\frac{OD}{AD} = \frac{OK}{AP}$ (2)

Dari (1) dan (2) didapat $\frac{Luas\triangle BOC}{Luas\triangle ABC} = \frac{OD}{AD}$ (3)

Dengan cara yang sama didapat $\frac{Luas\triangle AOC}{Luas\triangle ABC} = \frac{OE}{BE}$ (4) dan $\frac{Luas\triangle AOB}{Luas\triangle ABC} = \frac{OF}{CF}$ (5)

$Luas\triangle BOC + Luas\triangle AOC + Luas\triangle AOB = Luas\triangle ABC$

$$\frac{Luas\triangle BOC}{Luas\triangle ABC} + \frac{Luas\triangle AOC}{Luas\triangle ABC} + \frac{Luas\triangle AOB}{Luas\triangle ABC} = 1$$

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$$

$$1 - \frac{OA}{AD} + 1 - \frac{OB}{BE} + 1 - \frac{OC}{CF} = 1 \rightarrow \frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$$

Terbukti bahwa $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$

139. Misalkan k, m, n adalah bilangan-bilangan asli demikian, sehingga $k > n > 1$ dan faktor persekutuan terbesar k dan n sama dengan 1. Buktikan bahwa jika $k - n$ membagi $k^m - n^{m-1}$, maka $k \leq 2n - 1$.

(Sumber : Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika 2003)

Solusi :

$$k - n \mid k^m - n^{m-1}$$

$$k - n \mid k^m - n^m + n^m - n^{m-1}$$

$$k - n \mid k^m - n^m + n^{m-1}(n - 1)$$

Untuk $m \in$ bilangan asli maka $k - n$ membagi $k^m - n^m$.

$(n - 1)$ dan n adalah dua bilangan bulat berurutan maka FPB $(n - 1, n) = 1$

Karena FPB $(k, n) = 1$ maka $k - n$ tidak membagi n^{m-1} . Akibatnya $k - n$ harus membagi $n - 1$.

Karena $k - n$ membagi $n - 1$ maka $k - n \leq n - 1$

$$k \leq 2n - 1$$

Terbukti bahwa $k \leq 2n - 1$

140. Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat. Tentukan panjang sisi-sisi segitiga tersebut jika hasil kali dari dua sisi yang bukan sisi miring sama dengan tiga kali keliling segitiga.

(Sumber : Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika 2003)

Solusi :

Misalkan sisi-sisi segitiga tersebut adalah a, b dan c dengan c adalah sisi miring, maka :

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (1)}$$

$$ab = 3(a + b + c) \text{ (2)}$$

Karena a, b dan c adalah bilangan bulat maka sekurang-kurangnya salah satu di antara a atau b adalah kelipatan 3. Misal $a = 3k$ dengan $k \in$ bilangan asli (sama saja jika dimisalkan $b = 3k$) maka :

$$3k\sqrt{c^2 - 9k^2} = 3(3k + \sqrt{c^2 - 9k^2} + c)$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$k\sqrt{c^2 - 9k^2} = (3k + \sqrt{c^2 - 9k^2} + c)$$

$$(k-1)\sqrt{c^2 - 9k^2} = c + 3k$$

$$(k-1)^2(c+3k)(c-3k) = (c+3k)^2$$

$$(k-1)^2(c-3k) = (c+3k)$$

$$(k-1)^2(c-3k) = c - 3k + 6k$$

$$(c-3k)(k^2 - 2k) = 6k$$

$$\text{Karena } k \neq 0 \text{ maka } (c-3k)(k-2) = 6 \quad \dots\dots\dots (3)$$

Karena $c, k \in$ bilangan asli maka $(k-2)$ pasti membagi 6 dan karena $c > 3k$ maka $(k-2) > 0$

Nilai k yang memenuhi adalah 3; 4; 5; 8

$$c = 3k + \frac{6}{k-2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{Untuk } k = 3 \text{ maka } a = 9 \quad \rightarrow \quad c = 15 \quad \rightarrow \quad b = 12 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{Untuk } k = 4 \text{ maka } a = 12 \quad \rightarrow \quad c = 15 \quad \rightarrow \quad b = 9 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{Untuk } k = 5 \text{ maka } a = 15 \quad \rightarrow \quad c = 17 \quad \rightarrow \quad b = 8 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{Untuk } k = 8 \text{ maka } a = 24 \quad \rightarrow \quad c = 25 \quad \rightarrow \quad b = 7 \quad \dots\dots\dots (8)$$

Substitusikan persamaan (5), (6), (7), (8) ke persamaan (2) yang ternyata semuanya memenuhi.

Panjang sisi-sisi segitiga yang memenuhi adalah :

$$* \quad a = 9 \quad b = 12 \quad c = 15$$

$$* \quad a = 12 \quad b = 9 \quad c = 15$$

$$* \quad a = 8 \quad b = 15 \quad c = 17$$

$$* \quad a = 15 \quad b = 8 \quad c = 17$$

$$* \quad a = 7 \quad b = 24 \quad c = 25$$

$$* \quad a = 24 \quad b = 7 \quad c = 25$$

141. Persamaan kuadrat $x^2 + ax + b + 1 = 0$ dengan a, b adalah bilangan bulat, memiliki akar-akar bilangan asli. Buktikan bahwa $a^2 + b^2$ bukan bilangan prima.

(Sumber : Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika 2004)

Solusi :

Misalkan x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2 + ax + b + 1 = 0$ maka :

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$x_1 x_2 = b + 1 \quad \rightarrow \quad b = x_1 x_2 - 1$$

$$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2$$

$$a^2 + b^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 + (x_1 x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 1$$

$$a^2 + b^2 = (x_1 x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1$$

$$a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$$

Karena x_1 dan x_2 keduanya adalah bilangan asli maka $(x_1^2 + 1)$ dan $(x_2^2 + 1)$ keduanya adalah bilangan asli lebih dari 1.

Maka $a^2 + b^2$ adalah perkalian dua bilangan asli masing-masing > 1 yang mengakibatkan $a^2 + b^2$ adalah bukan bilangan prima. (terbukti)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

142. Sebuah lantai berluas 3 m^2 akan ditutupi oleh karpet dengan bermacam bentuk sebanyak 5 buah dengan ukuran @ 1 m^2 . Tunjukkan bahwa ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih lebih dari $1/5 \text{ m}^2$.

(Sumber : Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika 2004)

Solusi :

Misalkan A_i menyatakan karpet ke-i. $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 1$

Berdasarkan Prinsip Inklusi Eksklusi maka :

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - (A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) - (A_1 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3) - (A_2 \cap A_4) - (A_2 \cap A_5) - (A_3 \cap A_4) - (A_3 \cap A_5) - (A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

$$3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - (A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) - (A_1 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3) - (A_2 \cap A_4) - (A_2 \cap A_5) - (A_3 \cap A_4) - (A_3 \cap A_5) - (A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

$$2 + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = (A_1 \cap A_2) + (A_1 \cap A_3) + (A_1 \cap A_4) + (A_1 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3) + (A_2 \cap A_4) + (A_2 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4) + (A_3 \cap A_5) + (A_4 \cap A_5) \dots\dots\dots (1)$$

$(A_a \cap A_b \cap A_c \cap A_d)$ merupakan himpunan bagian dari $(A_a \cap A_b \cap A_c)$ sehingga $(A_a \cap A_b \cap A_c \cap A_d) \leq (A_a \cap A_b \cap A_c)$

$(A_a \cap A_b \cap A_c)$ merupakan himpunan bagian dari $(A_a \cap A_b)$ sehingga $(A_a \cap A_b \cap A_c) \leq (A_a \cap A_b)$

dan seterusnya

Akibatnya :

$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ atau $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_4)$ dan seterusnya
 $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_5)$ atau $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_4)$ dan seterusnya
 $(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_4)$ atau $(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_5)$ dan seterusnya
 $(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_3 \cap A_4)$ atau $(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_3 \cap A_4 \cap A_5)$ dan seterusnya
 $(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_2 \cap A_3 \cap A_5)$ atau $(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ dan seterusnya

Maka ruas kiri persamaan (1) bernilai lebih dari 2.

Karena ada sepuluh irisan di ruas kanan persamaan (1) maka dapat dipastikan sekurang-kurangnya ada 1 di antara 10 irisan 2 karpet tersebut yang memiliki irisan lebih dari $2/10 = 0,2 \text{ m}^2$.

∴ Terbukti ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih lebih dari $1/5 \text{ m}^2$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

143. Diketahui bahwa $p(n)$ adalah hasil kali digit-digit dari n . Tentukan nilai n bilangan asli yang memenuhi $11 \cdot p(n) = n^2 - 2005$.

(Sumber : Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika 2005)

Solusi :

- Jika n terdiri dari k digit dengan $k \geq 3$
 n^2 merupakan bilangan dengan sedikitnya $2k - 1$ digit. Maka $n^2 - 2005$ merupakan bilangan dengan sedikitnya $2k - 2$ digit.
 $11 p(n) \leq 11 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 9 < 10^{k+1}$.
Maka $11 p(n)$ merupakan bilangan dengan sebanyak-banyaknya terdiri dari $k + 1$ digit.
Untuk $k \geq 3 \rightarrow 2k \geq k + 3 \rightarrow 2k - 1 \geq k + 2$
maka $2k - 1 > k + 1 \rightarrow$ tidak ada yang memenuhi $11 \cdot p(n) = n^2 - 2005$
- Jika n terdiri dari 2 digit
Misalkan $n = 10a + b$
 n tidak mungkin genap sebab akan menyebabkan ruas kanan ganjil sedangkan ruas kiri genap.
Karena n ganjil dan $2005 \equiv 1 \pmod{4}$ maka $n^2 - 2005 \equiv 0 \pmod{4}$
Akibatnya salah satu a atau b habis dibagi 4. Karena n ganjil maka $a = 4$ atau 8.
 $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$
 $2005 \equiv 5 \pmod{8}$
Ruas kanan tidak habis dibagi 8 $\rightarrow a = 4$
 $11ab = (10a + b)^2 - 2005$
 $44b = 1600 + 80b + b^2 - 2005$
 $b^2 - 36b - 405 = 0$
 $(b - 9)(b + 45) = 0 \rightarrow b = 9$
Bilangan tersebut adalah $n = 49$
- Jika n terdiri dari 1 digit
Ruas kanan akan bernilai negatif (tidak memenuhi)

144. Diberikan lima titik P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 pada bidang dengan koordinat bilangan bulat. Buktikan bahwa terdapat sedikitnya sepasang titik $(P_i, P_j), i \neq j$, demikian, sehingga ruas garis $P_i P_j$ memuat sebuah titik Q dengan koordinat bilangan bulat selain P_i dan P_j .

(Sumber : Irish Mathematical Olympiad 1993 dan Olimpiade Matematika Indonesia Tk Provinsi 2004)

Solusi :

Misal x_{ij} adalah jarak titik P_i dan P_j dalam arah sumbu X dan Misal y_{ij} adalah jarak titik P_i dan P_j dalam arah sumbu Y.

Jika x_{ij} dan y_{ij} keduanya genap, maka dapat dipastikan bahwa sekurang-kurangnya satu titik letis selain titik P_i dan P_j akan terletak pada ruas garis $P_i P_j$, yaitu pada pertengahan ruas garis $P_i P_j$ yang

akan berjarak $\frac{1}{2} x_{ij}$ pada arah sumbu X dan $\frac{1}{2} y_{ij}$ pada arah sumbu Y terhadap titik P_i maupun P_j

dengan $\frac{1}{2} x_{ij}$ dan $\frac{1}{2} y_{ij}$ adalah juga bilangan bulat.

Sifat penjumlahan berikut juga akan membantu menjelaskan :

Bilangan Genap – Bilangan Genap = Bilangan Genap

Bilangan Ganjil – Bilangan Ganjil = Bilangan Genap.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap, ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).

Jika 2 titik letis mempunyai paritas yang sama maka sesuai sifat penjumlahan maka dapat dipastikan kedua titik letis memiliki jarak mendatar dan jarak vertikal merupakan bilangan genap yang berarti koordinat titik tengah dari garis yang menghubungkan kedua titik letis tersebut juga merupakan bilangan genap.

Karena ada 5 titik letis sedangkan hanya ada 4 paritas titik letis maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka dapat dipastikan sekurang-kurangnya ada dua titik letis yang memiliki paritas yang sama.

Dari penjelasan di atas dapat dibuktikan bahwa jika P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 adalah lima titik letis berbeda pada bidang maka terdapat sepasang titik (P_i, P_j) , $i \neq j$, demikian, sehingga ruas garis $P_i P_j$ memuat sebuah titik letis selain P_i dan P_j .

145. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan :

$$1 + 1996x + 1998y = xy$$

(Sumber : Irish Mathematical Olympiad 1997)

Solusi :

$$xy - 1996x - 1998y + 1996 \cdot 1998 = 1 + 1996 \cdot 1998$$

$$(x - 1998)(y - 1996) = 3988009$$

Karena $1 + (n - 1)(n + 1) = n^2$ maka :

$$(x - 1998)(y - 1996) = 1997^2$$

Karena 1997 bilangan prima maka ada 3 kasus :

- Jika $x - 1998 = 1$ dan $y - 1996 = 3988009$
 $x = 1999$ dan $y = 3990005$
- Jika $x - 1998 = 3988009$ dan $y - 1996 = 1$
 $x = 3990007$ dan $y = 1997$
- Jika $x - 1998 = 1997$ dan $y - 1996 = 1997$
 $x = 3995$ dan $y = 3993$

Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah $(1999, 3990005)$, $(3995, 3993)$ dan $(3990007, 1997)$

146. Tunjukkan bahwa jika x bilangan real tak nol maka :

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$$

(Sumber : Irish Mathematical Olympiad 1998)

Solusi :

$x^8 > 0$ dan $\frac{1}{x^4} > 0$ untuk semua nilai x real tak nol

- Jika $x < 0$

$$\text{Maka } x^5 < 0 \text{ dan } \frac{1}{x} < 0 \rightarrow x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} > 0$$

- Jika $x > 0$

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} = x^5(x^3 - 1) - \frac{1}{x^4}(x^3 - 1) = (x^3 - 1)\left(x^5 - \frac{1}{x^4}\right) = \frac{1}{x^4}(x^3 - 1)(x^9 - 1)$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Alternatif 1 :

Jika $0 < x \leq 1$ maka $x^3 - 1 \leq 0$ dan $x^9 - 1 \leq 0 \rightarrow (x^3 - 1)(x^9 - 1) \geq 0$

Jika $x \geq 1$ maka $x^3 - 1 \geq 0$ dan $x^9 - 1 \geq 0 \rightarrow (x^3 - 1)(x^9 - 1) \geq 0$

$$\frac{1}{x^4}(x^3 - 1)(x^9 - 1) \geq 0$$

$$\text{Terbukti bahwa } x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$$

Alternatif 2 :

$$(x^3 - 1)(x^9 - 1) = (x^3 - 1)(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) = (x^3 - 1)^2(x^6 + x^3 + 1)$$

$$\text{Untuk } x > 0 \text{ maka } (x^3 - 1)^2 \geq 0 \text{ dan } (x^6 + x^3 + 1) \geq 0 \rightarrow \frac{1}{x^4}(x^3 - 1)(x^9 - 1) \geq 0$$

$$\text{Terbukti bahwa } x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$$

147. Tentukan semua bilangan bulat positif n yang mempunyai tepat 16 pembagi positif d_1, d_2, \dots, d_{16} yang memenuhi :

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{16} = n$$

$$d_6 = 18 \text{ dan } d_9 - d_8 = 17$$

(Sumber : Irish Mathematical Olympiad 1998)

Solusi :

Karena $d_6 = 18 = 2 \cdot 3^2$ adalah salah satu faktor dari n maka $n = 2^p \cdot 3^q \cdot k$

Karena $q \geq 2$ maka maksimal banyaknya faktor prima dari n adalah 3 $\rightarrow n = 2^p \cdot 3^q \cdot c^r$ dengan c bilangan prima dan p, q dan r bilangan bulat positif dan $q \geq 2$ dan $p \geq 1$.

Jika $p \geq 2$ maka sedikitnya terdapat 6 faktor dari n yang kurang dari 18, yaitu : 1, 2, 3, 4, 6, 12. Maka $p = 1 \rightarrow n = 2 \cdot 3^q \cdot c^r$

Banyaknya faktor dari $n = (1 + 1)(q + 1)(r + 1) = 16$

Kemungkinan pasangan (q, r) yang memenuhi adalah $(7, 0), (3, 1)$

- Jika $q = 7$ dan $r = 0$

$$n = 2 \cdot 3^7$$

Maka $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 6, d_5 = 9, d_6 = 18, d_7 = 27, d_8 = 54, d_9 = 81, \dots$

Tetapi $d_9 - d_8 = 81 - 54 = 27 \neq 17$.

- Jika $q = 3$ dan $r = 1$

$$n = 2 \cdot 3^3 \cdot c$$

Ke-16 faktor dari n adalah 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, c , $2c$, $3c$, $6c$, $9c$, $18c$, $27c$ dan $54c$

Karena sedikitnya terdapat 5 faktor dari n yang kurang dari 18 maka $c > 18$.

- Jika $18 < c < 27$ maka $36 < 2c < 54, 54 < 3c < 81$

$$d_6 = 18, d_7 = c, d_8 = 27, d_9 = 2c \rightarrow d_9 - d_8 = 17 \rightarrow c = 22 \text{ (tidak memenuhi } c \text{ prima)}$$

- Jika $27 < c < 54$ maka $54 < 2c < 81$

$$d_6 = 18, d_7 = 27, d_8 = c, d_9 = 54 \rightarrow d_9 - d_8 = 17 \rightarrow c = 37 \rightarrow n = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 = 1998$$

- Jika $c > 54$ maka $d_8 = 54$ dan $d_9 = c \rightarrow d_9 - d_8 = 17 \rightarrow c = 71 \rightarrow n = 2 \cdot 3^3 \cdot 71 = 3834$

Nilai n yang memenuhi adalah 1998 dan 3834.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

148. Tunjukkan bahwa jika a, b, c adalah bilangan real positif maka :

$$(i) \quad \frac{9}{a+b+c} \leq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

$$(ii) \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

(Sumber : Irish Mathematical Olympiad 1998)

Solusi :

(i) Berdasarkan ketaksamaan AM-HM maka :

$$\frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}}$$

$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \quad (\text{terbukti})$$

(ii) Berdasarkan ketaksamaan AM-HM maka :

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

dengan cara yang sama didapat :

$$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (\text{terbukti})$$

149. Selesaikan sistem persamaan berikut :

$$y^2 = (x+8)(x^2+2)$$

$$y^2 - (8+4x)y + (16+16x-5x^2) = 0$$

(Sumber : Irish Mathematical Olympiad 1999)

Solusi :

$$y^2 - (8+4x)y + (16+16x-5x^2) = 0$$

Alternatif 1 :

$$(y - (4+5x))(y - (4-x)) = 0$$

$$y = 4+5x \quad \text{atau} \quad y = 4-x$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Alternatif 2 :

$$y_{1,2} = \frac{(8+4x) \pm \sqrt{(8+4x)^2 - 4(1)(16+16x-5x^2)}}{2}$$

$$y_1 = 4 + 5x \text{ atau } y_2 = 4 - x$$

- Jika $y = 4 + 5x$
 $y^2 = (x+8)(x^2+2)$
 $(4+5x)^2 = (x+8)(x^2+2)$
 $x(x-19)(x+2) = 0$
 $x = 0$ atau $x = 19$ atau $x = -2$
 Jika $x = 0$ maka $y = 4 + 5(0) = 4$
 Jika $x = 19$ maka $y = 4 + 5(19) = 99$
 Jika $x = -2$ maka $y = 4 + 5(-2) = -6$
 - Jika $y = 4 - x$
 $(4-x)^2 = (x+8)(x^2+2)$
 $x(x+2)(x+5) = 0$
 $x = 0$ atau $x = -2$ atau $x = -5$
 Jika $x = 0$ maka $y = 4 - (0) = 4$
 Jika $x = -2$ maka $y = 4 - (-2) = 6$
 Jika $x = -5$ maka $y = 4 - (-5) = 9$
- Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah $(-5, 9)$, $(-2, -6)$, $(-2, 6)$, $(0, 4)$, $(19, 99)$

150. Tentukan semua penyelesaian real dari sistem :

$$x + \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = y \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y + \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) = z \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$z + \log(z + \sqrt{z^2 + 1}) = x \quad \dots\dots\dots (3)$$

(Sumber : Israel Mathematical Olympiad 1995)

Solusi :

- Jika $x < 0$
 Maka $0 < x + \sqrt{x^2 + 1} < 1$ yang berakibat $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) < 0$.
 Maka dari persamaan (1) didapat $x > y \rightarrow 0 > x > y$
 Dengan cara yang sama didapat dari persamaan (2) $z < y < 0$ dan dari pers. (3) didapat $x < z < 0$
 Dapat disimpulkan bahwa $x < z < y < x < 0$ (kontradiksi) \rightarrow Tidak ada (x, y, z) yang memenuhi.
- Jika $x > 0$
 Maka $x + \sqrt{x^2 + 1} > 1$ yang berakibat $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) > 0$.
 Maka dari persamaan (1) didapat $x < y \rightarrow 0 < x < y$
 Dengan cara yang sama didapat dari persamaan (2) $z > y > 0$ dan dari pers. (3) didapat $x > z > 0$
 Dapat disimpulkan bahwa $x > z > y > x > 0$ (kontradiksi) \rightarrow Tidak ada (x, y, z) yang memenuhi.
- Jika $x = 0$
 Dari persamaan (1) didapat :
 $0 = y \rightarrow z = 0$
 Maka penyelesaiannya (x, y, z) yang memenuhi adalah $(0, 0, 0)$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

151. Selesaikan sistem persamaan berikut :

$$\sum_{i=1}^{1999} x_i = 1999 \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{1999} x_i^3 = \sum_{i=1}^{1999} x_i^4$$

(Sumber : Malaysian Mathematical Olympiad 1999)

Solusi :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1999} = 1999 \rightarrow (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + \dots + (x_{1999} - 1) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_{1999}^3 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_{1999}^4$$

$$x_1^4 - x_1^3 + x_2^4 - x_2^3 + x_3^4 - x_3^3 + \dots + x_{1999}^4 - x_{1999}^3 = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2) – (1) didapat :

$$(x_1^4 - x_1^3 - x_1 + 1) + (x_2^4 - x_2^3 - x_2 + 1) + (x_3^4 - x_3^3 - x_3 + 1) + \dots + (x_{1999}^4 - x_{1999}^3 - x_{1999} + 1) = 0$$

$$(x_1^3 - 1)(x_1 - 1) + (x_2^3 - 1)(x_2 - 1) + (x_3^3 - 1)(x_3 - 1) + \dots + (x_{1999}^3 - 1)(x_{1999} - 1) = 0$$

$$(x_1 - 1)^2(x_1^2 + x_1 + 1) + (x_2 - 1)^2(x_2^2 + x_2 + 1) + (x_3 - 1)^2(x_3^2 + x_3 + 1) + \dots + (x_{1999} - 1)^2(x_{1999}^2 + x_{1999} + 1) = 0$$

Persamaan $y = x^2 + x + 1$ definit positif sebab diskriminan < 0 dan koefisien $x^2 > 0$.

Maka persamaan di atas hanya dapat dipenuhi jika $x_1 - 1 = x_2 - 1 = x_3 - 1 = \dots = x_{1999} - 1 = 0$

Penyelesaian soal tersebut hanya dapat dipenuhi jika $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{1999} = 1$

152. Tentukan sepasang bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $x^2 + 3y^2 = 1998x$

(Sumber : Polish Mathematical Olympiad 1998 Second Round)

Solusi :

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka $x^2 + 3y^2 \geq 0 \rightarrow 1998x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$.

Jika $x > 1998$ maka $x^2 > 1998x$. Karena $3y^2 > 0$ maka tidak mungkin $x > 1998 \rightarrow x \leq 1998$.

$$0 \leq x \leq 1998$$

Karena $3y^2$ dan $1998x$ keduanya habis dibagi 3 maka x habis dibagi 3 $\rightarrow x^2$ habis dibagi 9.

Karena x^2 dan $1998x$ habis dibagi 9 maka y habis dibagi 3 $\rightarrow y^2$ habis dibagi 9 $\rightarrow 27 \mid 3y^2$.

Karena $3 \mid x$ maka $1998x$ habis dibagi 27 sedangkan $27 \mid 3y^2 \rightarrow$ maka 27 juga harus membagi x^2 .

Akibatnya x habis dibagi 9 $\rightarrow 81 \mid x^2$.

Karena $9 \mid 1998$ dan $9 \mid x$ maka $1998x$ habis dibagi 81.

Karena $81 \mid x^2$ dan $81 \mid 1998x$ maka $27 \mid y^2 \rightarrow 9 \mid y \rightarrow 81 \mid y^2$. Akibatnya $243 \mid 3y^2$. Karena 1998 habis dibagi 27 sedangkan x habis dibagi 9 maka $243 \mid 1998x \rightarrow x^2$ harus habis dibagi 243.

Maka x harus habis dibagi 27. Karena x dan 1998 keduanya habis dibagi 27 maka x^2 dan $1998x$ keduanya habis dibagi 729. Akibatnya $3y^2$ habis dibagi 729 $\rightarrow 27 \mid y^2$

Misalkan $x = 27a$ dan $y = 27b$ maka :

$$(27a)^2 + 3(27b)^2 = 1998(27a)$$

$$a^2 + 3b^2 = 74a$$

Karena $0 \leq x \leq 1998$ maka $0 \leq 27a \leq 1998 \rightarrow 0 \leq a \leq 74$

$$(a - 37)^2 + 3b^2 = 37^2$$

Karena $37^2 \equiv 1^2 \pmod{4} \equiv 1 \pmod{4}$

Jika $(a - 37)^2 \equiv 0 \pmod{4}$ maka $3b^2 \equiv 1 \pmod{4}$

Jika $b^2 \equiv 0 \pmod{4}$ maka $3b^2 \equiv 0 \pmod{4}$ tidak memenuhi

Jika $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$ maka $3b^2 \equiv 3 \pmod{4}$ juga tidak memenuhi $\rightarrow (a - 37)^2 \equiv 1 \pmod{4}$

Maka $a - 37$ ganjil $\rightarrow a$ genap.

Karena a genap maka $3b^2$ genap $\rightarrow b$ genap.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Misalkan $a = 2c$ dan $b = 2d$

$$c^2 + 3d^2 = 37c$$

Jika d ganjil dan c ganjil maka ruas kiri genap sedangkan ruas kanan ganjil

Jika d ganjil dan c genap maka ruas kiri ganjil sedangkan ruas kanan genap

Maka d genap \rightarrow Misalkan $d = 2k$

$$\left(c - \frac{37}{2}\right)^2 + 3d^2 = \left(\frac{37}{2}\right)^2 \rightarrow \left(c - \frac{37}{2}\right)^2 + 12k^2 = \left(\frac{37}{2}\right)^2$$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka $0 \leq 12k^2 < \left(\frac{37}{2}\right)^2$

$$0 \leq 12k^2 \leq 342$$

$$0 \leq k^2 \leq 28$$

Nilai k^2 yang mungkin adalah 0, 1, 4, 9, 16 atau 25.

$$b = 2d = 4k \rightarrow b^2 = 16k^2$$

$$(a - 37)^2 = 37^2 - 3b^2 = 37^2 - 48k^2$$

- Jika $k^2 = 0$
maka $b^2 = 0 \rightarrow y^2 = (27b)^2 = 0$. Nilai $a = 0$ atau 74 $\rightarrow x = 27a \rightarrow x = 0$ atau 1998
- Jika $k^2 = 1$
maka $b^2 = 16 \rightarrow y^2 = (27b)^2 = 108^2$.
Nilai $(a - 37)^2 = 37^2 - 48 = 1321$ (bukan bilangan kuadrat)
- Jika $k^2 = 4$
maka $b^2 = 64 \rightarrow y^2 = (27b)^2 = 216^2$.
Nilai $(a - 37)^2 = 37^2 - 192 = 1177$ (bukan bilangan kuadrat)
- Jika $k^2 = 9$
maka $b^2 = 144 \rightarrow y^2 = (27b)^2 = 324^2$.
Nilai $(a - 37)^2 = 37^2 - 432 = 937$ (bukan bilangan kuadrat)
- Jika $k^2 = 16$
maka $b^2 = 256 \rightarrow y^2 = (27b)^2 = 432^2$.
Nilai $(a - 37)^2 = 37^2 - 768 = 601$ (bukan bilangan kuadrat)
- Jika $k^2 = 25$
maka $b^2 = 400 \rightarrow y^2 = (27b)^2 = 540^2$.
Nilai $(a - 37)^2 = 37^2 - 1200 = 169 = 13^2 \rightarrow a = 24$ atau 50
 $x = 27a \rightarrow x = 648$ atau 1350

Pasangan (x, y) yang memenuhi $(0,0)$, $(1998,0)$, $(648, 540)$, $(648, -540)$, $(1350, 540)$, $(1350, -540)$

153. Sebuah komite mengadakan 40 pertemuan dengan 10 orang anggota komite hadir pada masing-masing pertemuan. Setiap dua orang anggota komite menghadiri pertemuan secara bersamaan paling banyak satu kali. Tunjukkan banyaknya anggota komite tersebut lebih dari 60.

(Sumber : Soviet Union Mathematical Olympiad 1965)

Solusi :

Alternatif 1 :

Masing-masing pertemuan dihadiri oleh 10 orang. Maka banyaknya pasangan berbeda ada ${}_{10}C_2 = 45$ pada masing-masing pertemuan.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Tidak ada dua pasangan yang mengikuti lebih dari satu pertemuan.

Karena ada 40 pertemuan maka sedikitnya ada $40 \cdot 45 = 1800$ pasangan berbeda.

Misalkan banyaknya anggota komite adalah n .

Banyaknya pasangan berbeda yang bisa dibuat adalah ${}_nC_2 = \frac{1}{2} n(n-1)$. Maka :

$$\frac{1}{2} n(n-1) \geq 1800$$

$$\text{Untuk } n = 60 \text{ maka } \frac{1}{2} n(n-1) = 1770 < 1800$$

Maka $n > 60$ (terbukti)

Alternatif 2 :

Masing-masing pertemuan dihadiri oleh 10 orang maka ada $40 \times 10 = 400$ "orang" yang menghadiri seluruh pertemuan.

Andaikan bahwa paling banyaknya anggota komite adalah 60.

Maka terdapat sedikitnya 1 orang anggota komite akan menghadiri paling sedikit $\left\lceil \frac{400}{60} \right\rceil = \left\lceil 6\frac{2}{3} \right\rceil = 7$ pertemuan.

Karena 2 orang anggota komite paling banyak mengikuti satu pertemuan secara bersamaan, maka pada masing-masing pertemuan 1 orang anggota akan bertemu dengan 9 orang anggota komite yang berbeda dengan anggota yang menghadiri pertemuan lainnya.

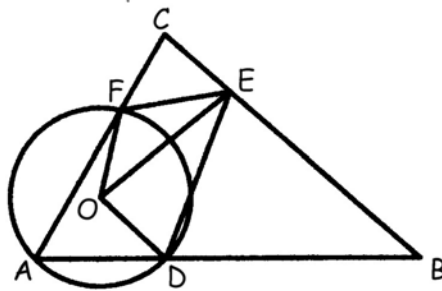
Banyaknya anggota komite paling sedikit $9 \cdot 7 + 1 = 64$ anggota komite (kontradiksi)

Maka banyaknya anggota komite tersebut lebih dari 60 (terbukti)

154. Titik D, E dan F berturut-turut terletak pada sisi AB, BC dan CA dari $\triangle ABC$ sedemikian sehingga $DE = BE$ dan $FE = CE$. Buktikan bahwa pusat lingkaran luar $\triangle ADF$ terletak pada garis bagi $\angle DEF$.

(Sumber : USSR Mathematical Olympiad 1989)

Solusi :



Misalkan pusat lingkaran luar $\triangle ADF$ adalah O.

Misalkan $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ dan $\angle ACB = \gamma$.

Karena $\angle DAF = \alpha$ sedangkan O adalah pusat lingkaran luar maka $\angle DOF = 2\alpha$.

Karena $DE = BE$ maka $\angle EDB = \angle EBD = \beta \rightarrow \angle BED = 180^\circ - 2\beta$

Karena $FE = CE$ maka $\angle EFC = \angle FCE = \gamma \rightarrow \angle FEC = 180^\circ - \gamma$

$$\angle BED + \angle CEF + \angle DEF = 180^\circ \rightarrow 180^\circ - \angle DEF = \angle BED + \angle CEF = 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\gamma = 2\alpha$$

Karena $\angle DEF + 2\alpha = 180^\circ$ maka segiempat DOEF adalah segiempat talibusur

$$\angle ODE = 180^\circ - \angle OFE$$

$$\text{Pada } \triangle OFE \text{ berlaku : } \frac{OE}{\sin \angle OFE} = \frac{OF}{\sin \angle OEF}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Pada $\triangle ODE$ berlaku : $\frac{OE}{\sin \angle ODE} = \frac{OE}{\sin(180^\circ - \angle OFE)} = \frac{OE}{\sin \angle OFE} = \frac{OD}{\sin \angle OED}$

Dari kedua persamaan di atas didapat :

$$\frac{OF}{\sin \angle OEF} = \frac{OD}{\sin \angle OED}$$

Karena $OD = OF$ maka $\sin \angle OEF = \sin \angle OED$

$\angle OEF + \angle OED = 180^\circ$ (tidak memenuhi) atau $\angle OEF = \angle OED$

Karena $\angle OEF = \angle OED$ maka OE adalah garis bagi $\angle DEF$

Terbukti bahwa pusat lingkaran luar $\triangle ADF$ terletak pada garis bagi $\angle DEF$

155. ABCD adalah segiempat dengan $AB = AD$ dan $\angle B = \angle D = 90^\circ$. Titik F dan E berturut-turut terletak pada BC dan CD sedemikian sehingga DF tegak lurus AE. Buktikan bahwa AF tegak lurus BE.

(Sumber : Russian Mathematical Olympiad 1995)

Solusi :

Karena DF tegak lurus AE maka :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AE} &= 0 \\ (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{AE} &= 0 \\ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{DA}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} = 0\end{aligned}$$

Karena $\angle D = 90^\circ$ maka DE tegak lurus DA $\rightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$

Karena $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -|\overrightarrow{AD}|^2$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AD}|^2$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AF} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE}$$

Karena $\angle B = 90^\circ$ maka \overrightarrow{BF} tegak lurus $\overrightarrow{BA} \rightarrow \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = -|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2$$

Karena $AB = AD$ maka :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$$

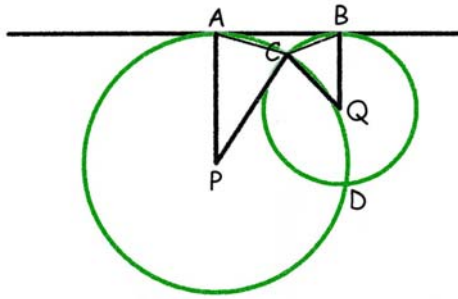
AF tegak lurus BE (terbukti)

156. Dua lingkaran dengan jari-jari R dan r menyinggung garis L berurutan di titik A dan B dan saling memotong di antara kedua lingkaran tersebut di titik C dan D. Buktikan bahwa jari-jari lingkaran luar dari segitiga ABC tidak tergantung pada panjang ruas garis AB.

(Sumber : Russian Mathematical Olympiad 1995)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :



Misalkan $\angle CAB = \alpha$ dan $\angle CBA = \beta$

Misalkan pusat lingkaran berjari-jari R adalah P sedangkan pusat lingkaran berjari-jari r adalah Q.

Karena PA dan QB keduanya tegak lurus AB maka $\angle PAC = 90^\circ - \alpha$ dan $\angle QBC = 90^\circ - \beta$

Karena PA = PC maka $\angle PCA = \angle PAC = 90^\circ - \alpha \rightarrow \angle APC = 2\alpha$

Karena QB = QC maka $\angle QCB = \angle QBC = 90^\circ - \beta \rightarrow \angle BQC = 2\beta$

Dengan dalil sinus untuk $\triangle APC$ dan $\triangle BQC$ maka :

$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

Karena $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ dan $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ maka :

$$AC = 2R \sin \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin 2\beta} = \frac{r}{\sin(90^\circ - \beta)}$$

Karena $\sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$ dan $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$ maka :

$$BC = 2r \sin \beta$$

Untuk mendapatkan $AC = 2R \sin \alpha$ dan $BC = 2r \sin \beta$ dapat ditempuh dengan jalan lain sebagai berikut :

Buat titik E dan F masing-masing pertengahan AC dan BC.

Karena PA = PC dan E pertengahan AC maka PE tegak lurus AC.

$$AC = 2 AE = 2 (PA \cos \angle PAC) = 2R \cos \angle PAC$$

$$AC = 2R \cos(90^\circ - \alpha) = 2R \sin \alpha.$$

Karena QB = QC dan F pertengahan BC maka QF tegak lurus BC.

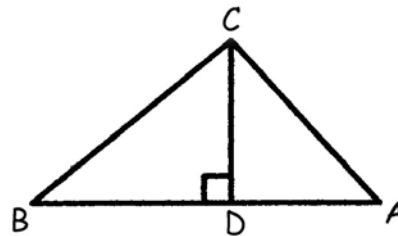
$$BC = 2 BF = 2 (QB \cos \angle QBC) = 2r \cos \angle QBC$$

$$BC = 2r \cos(90^\circ - \beta) = 2r \sin \beta.$$

$$CD = BC \sin \beta = AC \sin \alpha$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{2r \sin \beta}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{r}{R}}$$



Misalkan jari-jari lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah R_1 .

Pada $\triangle ABC$ berlaku dalil sinus :

$$\frac{AC}{\sin \beta} = 2R_1 = \frac{2R \sin \alpha}{\sin \beta} \rightarrow R_1 = R \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = R \sqrt{\frac{r}{R}} = \sqrt{Rr}$$

Terbukti bahwa jari-jari lingkaran luar $\triangle ABC$ tidak tergantung panjang AB.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

157. Tentukan semua bilangan bulat positif n, k yang memenuhi persamaan :

$$9k^2 + 33k - 12nk + 30 + n = 0$$

(Sumber : Singapore International Mathematical Olympiad Committee 2001)

Solusi :

$$9k^2 + 33k - 12nk + 30 + n = 0$$

$$9k^2 + (33 - 12n)k + 30 + n = 0$$

Persamaan di atas adalah persamaan kuadrat dalam k .

$$k_{1,2} = \frac{-(33-12n) \pm \sqrt{(33-12n)^2 - 4(9)(30+n)}}{18} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Diskriminan} = (33 - 12n)^2 - 4(9)(30 + n)$$

$$\text{Diskriminan} = 3^2(11 - 4n)^2 - 9(120 + 4n)$$

$$\text{Diskriminan} = 9(121 + 16n^2 - 88n - 120 - 4n) = 9(16n^2 - 92n + 1)$$

Agar dimungkinkan didapat nilai k bulat maka diskriminan harus berbentuk kuadrat sempurna. Maka $16n^2 - 92n + 1$ harus kuadrat sempurna.

$16n^2 - 92n + 1 = p^2$ untuk suatu bilangan asli p .

$$\left(4n - \frac{23}{2}\right)^2 - \left(\frac{23}{2}\right)^2 + 1 = p^2$$

$$(8n - 23)^2 - 23^2 + 4 = 4p^2$$

$$(8n - 23 + 2p)(8n - 23 - 2p) = 525 = 5^2 \cdot 3 \cdot 7$$

Jelas bahwa $8n - 23 + 2p > 8n - 23 - 2p$. Banyaknya faktor 525 ada 12. Maka ada 6 kasus :

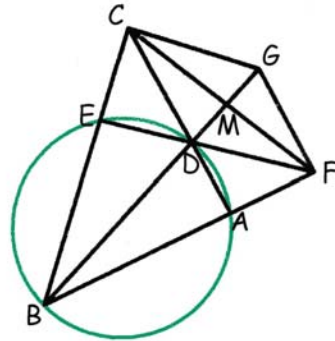
- Jika $8n - 23 + 2p = 525$ dan $8n - 23 - 2p = 1$
 $2(8n - 23) = 525 + 1 = 526 \rightarrow$ tidak ada n bulat yang memenuhi
- Jika $8n - 23 + 2p = 175$ dan $8n - 23 - 2p = 3$
 Nilai yang memenuhi adalah $n = 14$ dan $p = 23$
 Dari persamaan (1) tidak didapat nilai k bulat yang memenuhi.
- Jika $8n - 23 + 2p = 105$ dan $8n - 23 - 2p = 5$
 $2(8n - 23) = 105 + 5 = 110 \rightarrow$ tidak ada n bulat yang memenuhi
 Dari persamaan (1) tidak didapat nilai k bulat yang memenuhi.
- Jika $8n - 23 + 2p = 75$ dan $8n - 23 - 2p = 7$
 Nilai yang memenuhi adalah $n = 14$ dan $p = 23$
 Dari persamaan (1) tidak didapat nilai k bulat yang memenuhi.
- Jika $8n - 23 + 2p = 35$ dan $8n - 23 - 2p = 15$
 Nilai yang memenuhi adalah $n = 14$ dan $p = 23$
 Dari persamaan (1) tidak didapat nilai k bulat yang memenuhi.
- Jika $8n - 23 + 2p = 25$ dan $8n - 23 - 2p = 21$
 Nilai yang memenuhi adalah $n = 14$ dan $p = 23$
 Dari persamaan (1) tidak didapat nilai k bulat yang memenuhi.

158. Misalkan ABC adalah segitiga. Sebuah lingkaran yang melalui A dan B memotong ruas AC dan BC secara berurutan di D dan E. Perpanjangan BA dan ED berpotongan di F sedangkan perpanjangan BD memotong CF di M. Buktikan bahwa $MF = MC$ jika dan hanya jika $MB \cdot MD = MC^2$.

(Sumber : USA Mathematical Olympiad 2003)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :



Perpanjang DM di titik G sehingga FG sejajar CD.

Maka $MF = MC$ jika dan hanya jika CDFG adalah jajaran genjang atau FD sejajar CG.

Karena CDFG adalah jajaran genjang maka $\angle FDC = 180^\circ - \angle GCD$ yang akan menghasilkan $MC = MF$ jika dan hanya jika $\angle GCD = \angle FDA$.

Karena ABDE adalah segiempat talibusur maka $\angle ABE + \angle ADE = 180^\circ \rightarrow \angle ABE = \angle FDA = \angle GCD$

Akibatnya $\angle ABE + \angle CGF = 180^\circ \rightarrow$ CBFG adalah segiempat talibusur.

Karena CBFG adalah segiempat talibusur maka $\triangle BMC$ sebangun dengan $\triangle FMG \rightarrow \angle CBD = \angle MFG$

Akibatnya $\angle CBD = \angle CBM = \angle DCM$ (DFGC adalah jajaran genjang)

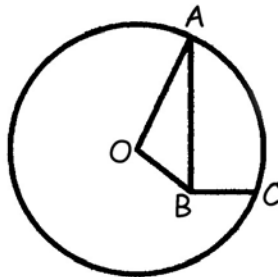
Karena $\angle CMB = \angle DCM$ dan $\angle BMC = \angle DMC$ maka $\triangle BMC$ sebangun dengan $\triangle DMC$ maka :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MC}{MD}$$

$$MB \cdot MD = MC^2$$

Terbukti bahwa $MF = MC$ jika dan hanya jika $MB \cdot MD = MC^2$.

159. A dan C terletak pada sebuah lingkaran berpusat di O dengan radius $\sqrt{50}$. Titik B terletak di dalam lingkaran sehingga $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$ dan $BC = 2$. Tentukan OB.



(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1983)

Solusi :

$$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \rightarrow AC = 2\sqrt{10}$$

$\triangle AOC$ adalah segitiga sama kaki dengan $\angle OAC = \angle OCA$

Buat garis dari O tegak lurus AC. Misalkan garis ini memotong AC di titik D maka :

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$OD^2 = OA^2 - (\frac{1}{2}AC)^2 = 50 - 10 = 40 \rightarrow OD = 2\sqrt{10}$$

$$\tan \angle OAC = \frac{OD}{AD} = 2$$

Karena $\angle OAC = \angle OAB + \angle BAC$ maka :

$$\tan(\angle OAB + \angle BAC) = \frac{\tan \angle OAB + \tan \angle BAC}{1 - \tan \angle OAB \cdot \tan \angle BAC} = 2$$

$$\tan \angle OAB + \frac{1}{3} = 2(1 - \tan \angle OAB \cdot \frac{1}{3}) \rightarrow \tan \angle OAB = 1 \rightarrow \cos \angle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 OA AB \cos \angle OAB$$

$$OB^2 = 50 + 36 - 60$$

$$OB = \sqrt{26}$$

160. w dan z adalah bilangan kompleks yang memenuhi $w^2 + z^2 = 7$ dan $w^3 + z^3 = 10$. Apakah nilai terbesar yang mungkin dari $w + z$?

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1983)

Solusi :

$$(w^2 + z^2)(w + z) = w^3 + z^3 + wz(w + z)$$

$$7(w + z) = 10 + wz(w + z)$$

$$wz = \frac{7(w + z) - 10}{w + z}$$

$$w^2 + z^2 = (w + z)^2 - 2wz$$

$$7 = (w + z)^2 - 2\left(\frac{7(w + z) - 10}{w + z}\right)$$

$$\text{Misal } w + z = x \rightarrow 7x = x^3 - 14x + 20$$

$$x^3 - 21x + 20 = 0$$

$$(x + 5)(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$w + z = -5, w + z = 1 \text{ atau } w + z = 4$$

Nilai terbesar $w + z = 4$

161. Berapakah sisanya jika $6^{83} + 8^{83}$ dibagi 49 ?

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1983)

Solusi :

$$6^{83} + 8^{83} = (7 - 1)^{83} + (7 + 1)^{83}$$

$$6^{83} + 8^{83} = {}_{83}C_0 7^{83} - {}_{83}C_1 7^{82} + \dots - {}_{83}C_{81} 7^2 + {}_{83}C_{82} 7 - 1 + {}_{83}C_0 7^{83} + {}_{83}C_1 7^{82} + \dots + {}_{83}C_{81} 7^2 + {}_{83}C_{82} 7 + 1$$

$$6^{83} + 8^{83} = 49k + 83 \cdot 7 - 1 + 49m + 83 \cdot 7 + 1 = 49p + 1162 = 49p + 49 \cdot 23 + 35$$

Maka $6^{83} + 8^{83}$ jika dibagi 49 akan bersisa 35.

162. Tentukan nilai maksimum dari $\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ untuk $0 < x < \pi$.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1983)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

$$\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x} = 9x \sin x + \frac{4}{x \sin x}$$

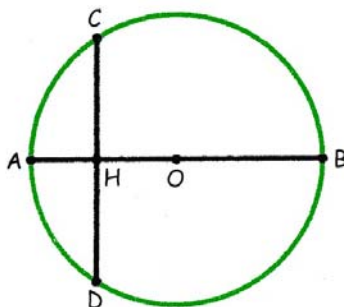
Dengan ketidaksamaan AM-GM maka :

$$\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x} \geq 2\sqrt{9x \sin x \cdot \frac{4}{x \sin x}} = 12$$

Tanda kesamaan terjadi bila $9x \sin x = \frac{4}{x \sin x} \rightarrow x \sin x = \frac{2}{3}$

nilai maksimum dari $\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ adalah 12.

163. Tali busur CD tegak lurus diameter AB dan berpotongan di titik H. Panjang AB dan CD adalah bilangan bulat. Panjang AB merupakan bilangan bulat 2 angka dan panjang CD juga merupakan bilangan 2 angka dengan menukar posisi kedua angka AB. Sedangkan panjang OH merupakan bilangan rasional. Tentukan panjang AB.



(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1983)

Solusi :

Misal panjang AB = ab = 10a + b \rightarrow OC = $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ (10a + b)

Panjang CD = ba = 10b + a \rightarrow CH = $\frac{1}{2}$ (10b + a)

Dengan a dan b adalah bilangan bulat positif dan $0 < a \leq 9$, $0 < b \leq 9$

$$OH = \sqrt{(OC)^2 - (CH)^2}$$

$$OH = \frac{1}{2} \sqrt{(10a + b)^2 - (10b + a)^2}$$

$$OH = \frac{3}{2} \sqrt{11(a + b)(a - b)}$$

Karena OH adalah bilangan rasional dan $a + b > a - b$ maka :

$a + b = 11k$ dan $a - b = k$ dengan k adalah bilangan rasional

Didapat $2a = 12k \rightarrow a = 6k$ dan $2b = 10k \rightarrow b = 5k$

$$\frac{a}{b} = \frac{6k}{5k} = \frac{6}{5}$$

Karena a dan b adalah bilangan bulat dan $0 < a \leq 9$, $0 < b \leq 9$ maka a = 6 dan b = 5

Panjang AB = 65

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

164. Bilangan real x, y, z dan w memenuhi $\frac{x^2}{n^2-1^2} + \frac{y^2}{n^2-3^2} + \frac{z^2}{n^2-5^2} + \frac{w^2}{n^2-7^2} = 1$ untuk $n = 2, 4, 6$ dan

8. Tentukan nilai $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1984)

Solution :

Misal $p = n^2 \rightarrow \frac{x^2}{p-1} + \frac{y^2}{p-9} + \frac{z^2}{p-25} + \frac{w^2}{p-49} = 1$ untuk $p = 4, 16, 36$ dan 64 .

$$p^4 - (84 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2)p^3 + \dots = 0$$

Maka 4, 16, 36 dan 64 adalah akar-akar persamaan polynomial di atas.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = -\frac{B}{A} = 84 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

$$4 + 16 + 36 + 64 = 84 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 36.$$

165. Tentukan bilangan asli terkecil yang memenuhi bahwa semua digit $15n$ adalah 0 atau 8.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1984)

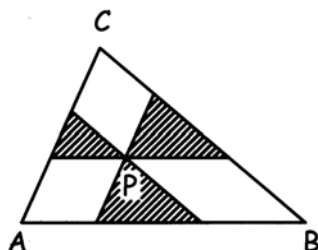
Solusi :

$15n$ habis dibagi 5 maka angka satuan $15n$ adalah 0.

$15n$ juga habis dibagi 3 \rightarrow Penjumlahan digitnya habis dibagi 3 \rightarrow Harus terdapat 3 buah angka 8.

Bilangan terkecil $15n$ adalah 8880

166. P adalah titik yang terletak di dalam segitiga ABC . Tiga buah garis dibuat masing-masing melalui titik P dan sejajar sisi segitiga ABC . Luas tiga segitiga yang terbentuk dengan P adalah salah satu titik sudutnya adalah 4, 9 dan 49. Berapakah luas segitiga ABC ?

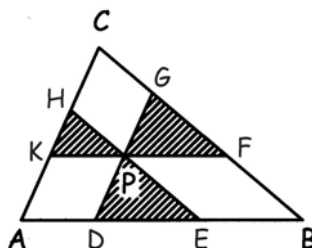


(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1984)

Solusi :

Karena ketiga garis sejajar maka segitiga yang terbentuk akan sebangun dengan segitiga ABC .

Perhatikan gambar. Misalkan $AB = c$, $AC = b$ dan $BC = a$



Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Misalkan $KP = k \cdot AB = kc$. Karena $\triangle KPH$ sebangun dengan $\triangle ABC$ maka $KH = k \cdot AC = kb$
 Misalkan $DE = m \cdot AB = mc$. Karena $\triangle DPE$ sebangun dengan $\triangle ABC$ maka $DP = m \cdot AC = mb$
 Misalkan $PF = n \cdot AB = nc$. Karena $\triangle FPG$ sebangun dengan $\triangle ABC$ maka $PG = n \cdot AC = nb$
 Karena garis DG sejajar AC , EH sejajar BC dan KF sejajar AB maka $PG = HC$, $DP = AK$, $KP = AD$ dan $PF = EB$

$$AD + DE + EB = c \rightarrow KP + DE + PF = c \rightarrow kc + mc + nc = c \rightarrow k + m + n = 1$$

$$\text{Luas } \triangle KPH = \frac{1}{2} \cdot KP \cdot KH \cdot \sin A = \frac{1}{2} k^2 bc \sin A = k^2 \cdot \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{Luas } \triangle KPH = k^2 \text{ Luas } \triangle ABC$$

$$\text{Luas } \triangle DEP = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DP \cdot \sin A = \frac{1}{2} m^2 bc \sin A = m^2 \cdot \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{Luas } \triangle DEP = m^2 \text{ Luas } \triangle ABC$$

$$\text{Luas } \triangle FPG = \frac{1}{2} \cdot PF \cdot PG \cdot \sin A = \frac{1}{2} n^2 bc \sin A = n^2 \cdot \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{Luas } \triangle FPG = n^2 \text{ Luas } \triangle ABC$$

$$\sqrt{\text{Luas } \triangle KPH} + \sqrt{\text{Luas } \triangle DEP} + \sqrt{\text{Luas } \triangle FPG} = (k + m + n) \sqrt{\text{Luas } \triangle ABC}$$

$$2 + 3 + 7 = 1 \cdot \sqrt{\text{Luas } \triangle ABC}$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = 12^2 = 144$$

167. Misalkan $x_1 = 97$, $x_2 = \frac{2}{x_1}$, $x_3 = \frac{3}{x_2}$, $x_4 = \frac{4}{x_3}$, ..., $x_8 = \frac{8}{x_7}$. Tentukan $x_1 x_2 \dots x_8$.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1985)

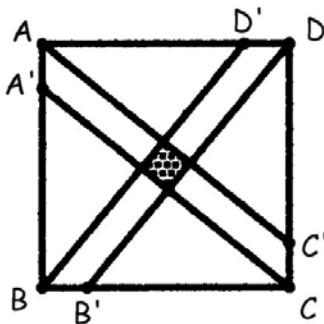
Solusi :

$$\text{Perhatikan bahwa : } x_1 x_2 = 2 \quad ; \quad x_3 x_4 = 4 \quad ; \quad x_5 x_6 = 6 \quad ; \quad x_7 x_8 = 8$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 = 384$$

168. ABCD adalah sebuah persegi dengan panjang sisi 1. Titik A' , B' , C' , D' masing-masing terletak pada sisi AB , BC , CD , DA secara berurutan sedemikian sehingga $\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{CD} = \frac{DD'}{DA} = \frac{1}{n}$. Garis AC' dan $A'C$ beserta garis BD' dan $B'D$ membentuk sebuah persegi yang memiliki luas $\frac{1}{1985}$. Tentukan n .



(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1985)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

$$AA' = BB' = CC' = DD' = \frac{1}{n}$$

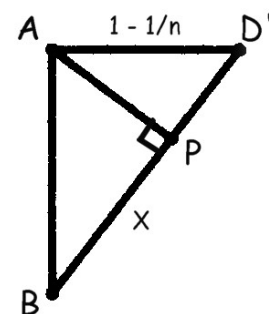
Buat garis dari titik A tegak lurus BD' memotong di titik P

Misalkan panjang BP = x maka AP = $\sqrt{1-x^2}$

$\triangle ABP$ sebangun dengan $\triangle PAD'$ maka :

$$\frac{x}{1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-1/n} \rightarrow x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - x^2$$

$$x^2 \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + 1 \right) = 1 \rightarrow x^2 \left((n-1)^2 + n^2 \right) = n^2$$



Buat garis dari titik A' tegak lurus AP memotong di titik Q, maka $\triangle AA'Q$ sebangun dengan $\triangle ABP$.

Misalkan panjang A'Q = y maka $y^2 = \frac{1}{1985}$

$$\frac{y}{1/n} = \frac{x}{1} \rightarrow n^2 y^2 = x^2 \rightarrow \frac{n^2}{1985} = \frac{n^2}{(n-1)^2 + n^2}$$

$$(n-1)^2 + n^2 = 1985 \rightarrow n^2 - 2n + 1 + n^2 = 1985 \rightarrow n^2 - n - 992 = 0$$

$$(n-32)(n+31) = 0$$

$$n = 32$$

169. Sekuens bilangan bulat a_1, a_2, a_3, \dots memenuhi $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ untuk $n > 0$. Jumlah 1492 bilangan pertama adalah 1985 dan jumlah 1985 bilangan pertama adalah 1492. Tentukan jumlah 2001 bilangan pertama. (Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1985)

Solusi :

Misalkan $a_1 = p$ dan $a_2 = q$ maka :

$$a_3 = q - p ; a_4 = (q - p) - q = -p ; a_5 = -p - (q - p) = -q ; a_6 = -q - (-p) = p - q$$

$$a_7 = p - q - (-q) = p ; a_8 = p - (p - q) = q \dots\dots \text{dst}$$

Tampak bahwa sekuens tersebut periodik dengan perioda 6

$$\text{Jumlah 6 bilangan dalam satu periodik adalah } = (p) + (q) + (q - p) + (-p) + (-q) + (p - q) = 0$$

$$1492 \equiv 4 \pmod{6} ; 1985 \equiv 5 \pmod{6} ; 2001 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1492} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (p) + (q) + (q - p) + (-p) \rightarrow 2q - p = 1985 \dots\dots\dots (1)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1985} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (p) + (q) + (q - p) + (-p) + (-q) \rightarrow q - p = 1492 \dots\dots (2)$$

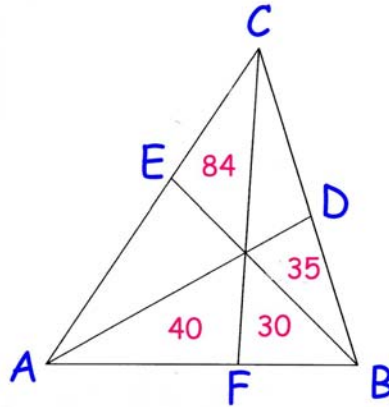
Dari persamaan (1) dan (2) didapat $p = -999$ dan $q = 493$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2001} = a_1 + a_2 + a_3 = (p) + (q) + (q - p) = 2q$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2001} = 986$$

170. Pada segitiga ABC dibuat titik-titik D, E, F sedemikian sehingga garis AD, BE dan CF bertemu di satu titik dan membagi segitiga menjadi 6 bagian dengan 4 bagian telah diketahui luasnya sesuai dengan angka yang tertera pada bagian tersebut (Lihat Gambar). Tentukan luas segitiga tersebut.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian



(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1985)

Solusi :

Misalkan perpotongan ketiga garis adalah titik O

Misal Luas $\triangle AOE = x$ dan Luas $\triangle COD = y$

$\triangle AFC$ dan $\triangle BFC$ memiliki tinggi yang sama. Begitu juga dengan $\triangle AOF$ dan $\triangle BOF$ maka :

$$\frac{AF}{FB} = \frac{84 + x + 40}{y + 35 + 30} = \frac{124 + x}{y + 65} \quad \text{dan} \quad \frac{AF}{FB} = \frac{40}{30} \rightarrow \frac{124 + x}{y + 65} = \frac{40}{30} \rightarrow 112 + 3x = 4y \quad \dots\dots\dots (1)$$

$\triangle CBE$ dan $\triangle ABE$ memiliki tinggi yang sama. Begitu juga dengan $\triangle COE$ dan $\triangle EOA$ maka :

$$\frac{CE}{EA} = \frac{84 + y + 35}{x + 40 + 30} = \frac{119 + y}{x + 70} \quad \text{dan} \quad \frac{CE}{EA} = \frac{84}{x} \rightarrow \frac{119 + y}{x + 70} = \frac{84}{x}$$

$$x \left(119 + \frac{1}{4}(112 + 3x) \right) = 84x + 5880$$

$$476x + 112x + 3x^2 = 336x + 23520$$

$$x^2 + 84x - 7840 = 0 \rightarrow (x - 56)(x + 140) = 0 \rightarrow x = 56$$

$$4y = 112 + 3x = 112 + 168 \rightarrow y = 70$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = 56 + 70 + 84 + 35 + 40 + 30$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = 315$$

171. Tentukan bilangan terbesar n sehingga $n + 10$ membagi $n^3 + 100$.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1986)

Solusi :

$$n + 10 \text{ membagi } n^3 + 10^3 = n^3 + 1000 = n^3 + 100 + 900$$

Karena $n + 10$ membagi $n^3 + 100$ maka $n + 10$ membagi 900

$$n_{\text{maks}} + 10 = 900$$

$$n_{\text{maks}} = 890$$

172. abc adalah bilangan tiga angka. Jika $acb + bca + bac + cab + cba = 3194$, tentukan abc .

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1986)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

Misalkan $m = acb + bca + bac + cab + cba$ dan $n = abc$

$$m + n = 100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10c + a + 100b + 10a + c + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a$$

$$m + n = 222(a + b + c)$$

$$222(a + b + c) = 3194 + (100a + 10b + c)$$

$$3194 + 111 \leq 222(a + b + c) \leq 3194 + 999$$

$$3305 \leq 222(a + b + c) \leq 4193$$

$$15 \leq (a + b + c) \leq 18$$

Nilai $a + b + c$ yang mungkin adalah 15, 16, 17 atau 18.

- Jika $a + b + c = 15$
 $100a + 10b + c = 222 \cdot 15 - 3194 = 136$
Maka $a = 1$ $b = 3$ $c = 6$ yang tidak memenuhi bahwa $a + b + c = 15$
 - Jika $a + b + c = 16$
 $100a + 10b + c = 222 \cdot 16 - 3194 = 358$
Maka $a = 3$ $b = 5$ $c = 8$ yang memenuhi bahwa $a + b + c = 16$
 - Jika $a + b + c = 17$
 $100a + 10b + c = 222 \cdot 17 - 3194 = 580$
Maka $a = 5$ $b = 8$ $c = 0$ yang tidak memenuhi bahwa $a + b + c = 17$
 - Jika $a + b + c = 18$
 $100a + 10b + c = 222 \cdot 18 - 3194 = 802$
Maka $a = 8$ $b = 0$ $c = 2$ yang tidak memenuhi bahwa $a + b + c = 18$
- Maka nilai abc adalah 358

173. Polinomial $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots - x^{15} + x^{16} - x^{17}$ dapat ditulis sebagai polinomial baru dalam variable y dengan membuat $y = x + 1$. tentukan koefisien dari y^2 .

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1986)

Solusi :

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots - x^{15} + x^{16} - x^{17} = \frac{1 - x^{18}}{1 + x} = \frac{1 - (y - 1)^{18}}{y}.$$

Maka koefisien dari y^2 sama dengan koefisien dari y^3 dari $1 - (y - 1)^{18}$.

$$\text{Koefisien } y^3 \text{ dari } 1 - (y - 1)^{18} = -{}_{18}C_3(1)^3(-1)^{15} = 816$$

174. m dan n adalah bilangan bulat yang memenuhi $m^2 + 3m^2n^2 = 30n^2 + 517$. Tentukan $3m^2n^2$.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1987)

Solusi :

$$m^2 + 3m^2n^2 = 30n^2 + 517 \rightarrow (3n^2 + 1)(m^2 - 10) = 507 = 3 \cdot 13^2$$

$3n^2 + 1$ tidak mungkin habis dibagi 3. Maka $m^2 - 10$ habis dibagi 3.

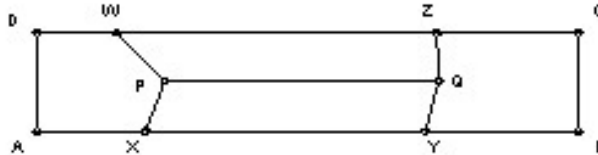
Karena 13 dan 517 bukan bilangan kuadrat maka $m^2 - 10 = 39 \rightarrow m^2 = 49$

$$3n^2 + 1 = 13 \rightarrow n^2 = 4$$

$$3m^2n^2 = 588$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

175. ABCD adalah persegi panjang. Titik P dan Q terletak di dalam persegi panjang dengan PQ sejajar AB. Titik X dan Y terletak pada AB (secara berurutan keempat titik tersebut adalah A, X, Y dan B). Titik W dan Z terletak pada sisi CD (secara berurutan keempat titik tersebut adalah D, W, Z dan C). Lihat gambar. Diketahui bahwa keempat bidang AXPWD, XPQY, BYQZC, WPQZ mempunyai luas yang sama. $BC = 19$, $PQ = 87$, $XY = YB + BC + CZ = WZ = WD + DA + AX$. Tentukan AB.



(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1987)

Solusi :

Misalkan jarak PQ dari XY adalah h maka jarak PQ dari WZ = $19 - h$

Misalkan juga panjang $XY = WZ = p$

$$\text{Luas } XPQY = \text{Luas } WPQZ \rightarrow \frac{h}{2}(PQ + XY) = \frac{(19-h)}{2}(PQ + WZ). \text{ Karena } XY = WZ \text{ maka } 2h = 19.$$

$$\text{Luas } XPQY = \frac{19}{4}(87 + p) \dots\dots\dots (1)$$

$$XY = YB + BC + CZ \rightarrow YB + CZ = p - 19$$

$$WZ = WD + DA + AX \rightarrow WD + AX = p - 19$$

$$YB + CZ + WD + AX = 2p - 38$$

$$AB = AX + YB + XY = AX + YB + p$$

$$CD = WD + CZ + p$$

$$AB = CD \rightarrow 2AB = (2p - 38) + 2p = 4p - 38 \rightarrow AB = CD = 2p - 19$$

$$\text{Luas } ABCD = (2p - 19) \cdot 19$$

$$4 \text{ Luas } XPQY = \text{Luas } ABCD$$

$$19(87 + p) = 19(2p - 19) \rightarrow p = 106 \rightarrow AB = 2p - 19 = 2(106) - 19$$

$$AB = 193$$

176. Ada berapa banyak tripel (a, b, c) sehingga $\text{KPK}(a, b) = 1000$, $\text{KPK}(b, c) = 2000$ dan $\text{KPK}(c, a) = 2000$?

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1987)

Solusi :

$$1000 = 2^3 5^3 \text{ dan } 2000 = 2^4 5^3$$

$$\text{Maka } a = 2^A 5^P, \quad b = 2^B 5^R \text{ dan } c = 2^C 5^T$$

$$\text{Maks } (A, B) = 3, \quad \text{maks } (A, C) = \text{maks } (B, C) = 4 \rightarrow C = 4$$

Sedikitnya satu di antara A dan B harus 3.

- Jika A dan B keduanya 3 hanya ada 1 pilihan
- Jika A = 3 dan B tidak, maka ada 3 pilihan yaitu B = 0, 1 atau 2
- Jika B = 3 dan A tidak, maka ada 3 pilihan yaitu A = 0, 1 atau 2

Total ada 7 pilihan

$$\text{Maks } (P, R) = \text{maks } (P, T) = \text{maks } (R, T) = 3$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Sedikitnya dua di antara P, R dan T harus 3

- Jika P, R dan T ketiganya bernilai 3 maka hanya ada 1 pilihan
- Jika dua di antara P, R, T bernilai 3 dan satu lagi bernilai 0 maka ada 3 pilihan
- Jika dua di antara P, R, T bernilai 3 dan satu lagi bernilai 1 maka ada 3 pilihan
- Jika dua di antara P, R, T bernilai 3 dan satu lagi bernilai 2 maka ada 3 pilihan

Total ada 10 pilihan

Banyaknya memilih A, B, C, P, R dan T ada $7 \cdot 10 = 70$

Banyaknya tripel (a, b, c) yang memenuhi = 70

177. Tentukan bilangan bulat n terbesar sehingga nilai k yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$

hanya ada satu.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1987)

Solusi :

$$\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} \rightarrow 8n + 8k < 15n \rightarrow k < \frac{7n}{8} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{n}{n+k} < \frac{7}{13} \rightarrow 13n < 7n + 7k \rightarrow k > \frac{6n}{7} \quad \dots\dots\dots (2)$$

Maka $\frac{6n}{7} < k < \frac{7n}{8}$

Agar nilai k hanya ada 1 kemungkinan maka $\frac{7n}{8} - \frac{6n}{7} = \frac{n}{56} \leq 2 \rightarrow n \leq 112$

Jika n = 112 maka $96 < k < 98 \rightarrow$ Hanya ada satu nilai k yaitu k = 97

Bilangan n terbesar yang memenuhi adalah n = 112

178. Tentukan nilai terbesar k sehingga 3^{11} merupakan penjumlahan k bilangan asli berurutan.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1987)

Solusi :

Misalkan k bilangan-bilangan tersebut adalah, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, ..., n + k.

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (n+k) = \frac{k((n+1) + (n+k))}{2} = \frac{k(2n+k+1)}{2} = 3^{11}$$

$$k(2n+k+1) = 2 \cdot 3^{11}$$

Karena n > 0 maka k < 2n + k + 1

$$k < \sqrt{2 \cdot 3^{11}} \text{ dan } k \text{ membagi } 2 \cdot 3^{11}$$

Maka nilai terbesar k = $2 \cdot 3^5 = 486$

179. Misalkan f(n) didefinisikan kuadrat dari penjumlahan digit n. Misalkan juga $f^2(n)$ didefinisikan f(f(n)), $f^3(n)$ didefinisikan f(f(f(n))) dan seterusnya. Tentukan $f^{1988}(11)$.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1988)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

$$f(11) = (1 + 1)^2 = 4 \rightarrow f^2(11) = 4^2 = 16 \rightarrow f^3(11) = (1 + 6)^2 = 49 \rightarrow f^4(11) = (4 + 9)^2 = 169$$

$$f^5(11) = (1 + 6 + 9)^2 = 256 \rightarrow f^6(11) = (2 + 5 + 6)^2 = 169$$

$$\text{Maka } f^4(11) = f^6(11) = f^8(11) = \dots = f^{1988}(11) = 169$$

$$f^{1988}(11) = 169$$

180. Diberikan ${}^2\log ({}^8\log x) = {}^8\log ({}^2\log x)$, tentukan $({}^2\log x)^2$.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1988)

Solusi :

Misalkan ${}^2\log x = k$

$${}^2\log \left(\frac{1}{3} \cdot {}^2\log x \right) = {}^8\log ({}^2\log x)$$

$$-{}^2\log 3 + {}^2\log k = {}^8\log k$$

$$\left(1 - \frac{1}{3} \right) {}^2\log k = {}^2\log 3$$

$${}^2\log k^{\frac{2}{3}} = {}^2\log 3 \rightarrow k = 3^{\frac{3}{2}} \rightarrow k^2 = 27$$

$$({}^2\log x)^2 = 27$$

181. Kedua puluh lima elemen pada persegi ukuran 5 x 5 akan diisi dengan bilangan bulat positif sehingga pada masing-masing baris dan kolom akan membentuk barisan aritmatika. Apakah bilangan yang diberi tanda * ?

			*	
	74			
				186
		103		
0				

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1988)

Solusi :

			*	
	74			
				186
	C	103	E	B
0	x		D	A

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Beda pada baris ke-5 adalah x maka $A = 4x$.

Misal beda pada kolom ke-5 = k_5 maka $A = 186 + 2k_5 = 4x \rightarrow k_5 = 2x - 93 \rightarrow B = 186 + k_5 = 93 + 2x$

Misal beda pada baris ke-4 = b_4 maka $B = 103 + 2b_4 \rightarrow b_4 = x - 5 \rightarrow C + b_4 = 103 \rightarrow C = 108 - x$

Misal beda pada kolom ke-2 = k_2 maka $C = 74 + 2k_2 \rightarrow k_2 = 17 - \frac{1}{2}x \rightarrow x = 74 + 3k_2 \rightarrow x = 50$

$D = 3x = 150$

$C = 108 - x = 58$

$b_4 = x - 5 = 45$

$E = 103 + b_4 = 148$

$k_4 = D - E = 2$

$E = * + 3k_4 \rightarrow 148 = * + 3(2)$

$* = 142$

182. $f(m, n)$ didefinisikan untuk bilangan bulat positif m, n dan memenuhi $f(m, m) = m$, $f(m, n) = f(n, m)$

serta $f(m, m+n) = \left(1 + \frac{m}{n}\right)f(m, n)$. Tentukan $f(14, 52)$.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1988)

Solusi :

$$f(14, 52) = f(14, 14 + 38) = \left(1 + \frac{14}{38}\right)f(14, 38) = \frac{26}{19}f(14, 38).$$

$$\begin{aligned} f(14, 52) &= \frac{26}{19}f(14, 38) = \frac{26}{19} \cdot \frac{19}{12}f(14, 24) = \frac{26}{12} \cdot \frac{12}{5}f(14, 10) = \frac{26}{5} \cdot \frac{7}{2}f(10, 4) = \frac{91}{5} \cdot \frac{5}{3}f(4, 6) = \\ &= \frac{91}{3} \cdot 3f(4, 2) = 91 \cdot 2f(2, 2) = 91 \cdot 2 \cdot 2 \\ f(14, 52) &= 364 \end{aligned}$$

183. Tentukan bilangan positif terkecil yang jika dipangkattigakan berakhiran dengan angka 888.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1988)

Solusi :

Misalkan bilangan tersebut adalah m maka $N = m^3$ adalah bilangan yang berakhiran dengan 888.

Karena angka satuan N adalah 8 maka angka satuan dari m yang mungkin hanya 2 maka $m = 10a + 2$.

$$N = (10a + 2)^3 = 1000a^3 + 600a^2 + 120a + 8 \equiv 120a + 8 \pmod{100}$$

Karena angka puluhan N adalah 8 maka angka puluhan $120a$ juga 8. Akibatnya angka satuan $12a$ adalah 8 $\rightarrow a = 4$ atau $9 \rightarrow m = 100b + 42$ atau $m = 100b + 92$

- Jika $m = 100b + 42$

$$N = (100b + 42)^3 = 100^3b^3 + 3 \cdot 100^2b^2 \cdot 42 + 3 \cdot 100b \cdot 42^2 + 42^3$$

$$N \equiv 3 \cdot 100b \cdot 42^2 + 42^3 \pmod{1000}$$

$$N \equiv 529200b + 74088$$

$$N \equiv 200b + 88 \pmod{1000}$$

Karena angka ratusan $N = 8$ maka angka ratusan $200b = 8$ maka angka satuan $2b = 8$

Angka satuan $b = 4$ atau $9 \rightarrow b = 10c + 4$ atau $10c + 9$

$$m = 100b + 42 = 1000c + 442 \text{ atau } m = 1000c + 942$$

Nilai m terkecil dari kedua persamaan di atas adalah $m = 442$ atau 942

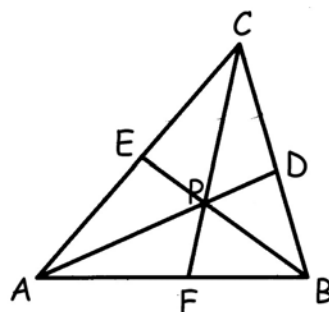
Kumpulan Soal dan Penyelesaian

- Jika $m = 100b + 92$
 $N = (100b + 92)^3 = 100^3b^3 + 3 \cdot 100^2b^2 \cdot 92 + 3 \cdot 100b \cdot 92^2 + 92^3$
 $N \equiv 3 \cdot 100b \cdot 92^2 + 92^3 \pmod{1000}$
 $N \equiv 2539200b + 778688$
 $N \equiv 200b + 688 \pmod{1000}$
 Karena angka ratusan $N = 8$ maka angka ratusan $200b = 2$ maka angka satuan $2b = 2$
 Angka satuan $b = 1$ atau $6 \rightarrow b = 10c + 1$ atau $10c + 6$
 $m = 100b + 92 = 1000c + 192$ atau $m = 1000c + 692$
 Nilai m terkecil dari kedua persamaan di atas adalah $m = 192$ atau 692
 Nilai terkecil dari m adalah 192.

184. P adalah titik di dalam segitiga ABC. Perpanjangan PA memotong BC di D, perpanjangan PB memotong AC di E dan perpanjangan PC memotong AB di F. Jika $PD = PE = PF = 3$ dan $PA + PB + PC = 43$ tentukan $PA \cdot PB \cdot PC$.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1988)

Solusi :



Misal CG adalah garis tegak lurus AB dengan G terletak pada AB dan PH dengan H terletak pada AB sehingga PH tegak lurus AB.

$\triangle ABC$ dan $\triangle APB$ memiliki alas yang sama. Maka $\frac{\text{Luas}\triangle APB}{\text{Luas}\triangle ABC} = \frac{PH}{CG} = \frac{PF}{CF} = \frac{3}{PC+3}$

Dengan cara yang sama didapat $\frac{\text{Luas}\triangle BPC}{\text{Luas}\triangle ABC} = \frac{PD}{AD} = \frac{3}{PA+3}$ dan $\frac{\text{Luas}\triangle APC}{\text{Luas}\triangle ABC} = \frac{PE}{BE} = \frac{3}{PB+3}$

$$\frac{\text{Luas}\triangle APB}{\text{Luas}\triangle ABC} + \frac{\text{Luas}\triangle BPC}{\text{Luas}\triangle ABC} + \frac{\text{Luas}\triangle APC}{\text{Luas}\triangle ABC} = 1$$

$$\frac{3}{PC+3} + \frac{3}{PB+3} + \frac{3}{PA+3} = 1$$

Misalkan $PA = k$, $PB = m$ dan $PC = n$

$$3(PB+3)(PA+3) + 3(PC+3)(PA+3) + 3(PC+3)(PB+3) = (PA+3)(PB+3)(PC+3)$$

$$3(m+3)(k+3) + 3(n+3)(k+3) + 3(n+3)(m+3) = (k+3)(m+3)(n+3)$$

$$3km + 3kn + 3mn + 18k + 18m + 18n + 81 = kmn + 3km + 3kn + 3mn + 9k + 9m + 9n + 27$$

$$9k + 9m + 9n + 54 = kmn$$

$$kmn = 9(k+m+n) + 54 = 9 \cdot 43 + 54 = 441$$

$$PA \cdot PB \cdot PC = 441$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

185. Untuk suatu digit d diketahui $0, d25d25d25\ldots = \frac{n}{810}$ dengan n bilangan bulat positif. Tentukan n .

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1989)

Solusi :

Misal $0, d25d25d25\ldots = m$ maka $1000m = d25, d25d25d25\ldots = 1000m$

$$999m = 100d + 25$$

$$\frac{100d + 25}{999} = \frac{n}{810} \rightarrow 3000d + 750 = 37n$$

$$750(4d + 1) = 37n$$

Karena 37 prima dan 750 tidak membagi 37 maka 750 membagi n . Misal $n = 750k$.

$$37k = 4d + 1 \leq 4 \cdot 9 + 1 = 37$$

Maka yang memenuhi hanya $k = 1$ dan $d = 9$

$$n = 750$$

186. k adalah bilangan bulat positif yang memenuhi $36 + k$, $300 + k$, $596 + k$ adalah kuadrat dari tiga bilangan yang membentuk barisan aritmatika. Tentukan k .

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1989)

Solusi :

Misal ketiga barisan aritmatika tersebut adalah $a - b$, a , $a + b$. Kuadratnya adalah $(a - b)^2$, a^2 , $(a + b)^2$.

$$a^2 + b^2 - 2ab = 36 + k, \quad a^2 = 300 + k \quad \text{dan} \quad a^2 + b^2 + 2ab = 596 + k$$

$$a^2 - (a^2 + b^2 - 2ab) = 300 + k - (36 + k) = 264$$

$$b(2a - b) = 264 \quad \text{..... (1)}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab - a^2 = 596 + k - (300 + k)$$

$$b(2a + b) = 296 \quad \text{..... (2)}$$

$$296(2a - b) = 264(2a + b)$$

$$592a - 296b = 528a + 264b$$

$$64a = 560b$$

$$4a = 35b$$

Dari persamaan (1) didapat

$$b(4a - 2b) = 528 \rightarrow b = \pm 4 \rightarrow a = \pm 35$$

$$(a - b)^2 = 31^2 = 36 + k$$

$$k = 925$$

187. Diberikan bahwa :

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1$$

$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12$$

$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123$$

$$\text{Tentukan } 16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$$

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1989)

Solusi :

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1 \quad \text{..... (1)}$$

$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12 \quad \text{..... (2)}$$

$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123 \quad \text{..... (3)}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\begin{aligned}
 (2) - (1) &\rightarrow 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 13x_6 + 15x_7 = 11 \quad \dots\dots\dots (4) \\
 (3) - (2) &\rightarrow 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 13x_5 + 15x_6 + 17x_7 = 111 \quad \dots\dots\dots (5) \\
 (5) - (4) &\rightarrow 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 100 \quad \dots\dots\dots (6) \\
 (5) + (6) &\rightarrow 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 15x_5 + 17x_6 + 19x_7 = 211 \quad \dots\dots\dots (7) \\
 (3) + (7) &\rightarrow 16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7 = 334 \\
 \text{Maka } 16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7 &= 334
 \end{aligned}$$

188. Diketahui bahwa $133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = k^5$ dengan k bilangan bulat. Tentukan nilai k.
(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1989)

Solusi :

Angka satuan n dan n^5 akan sama.

Angka satuan $k = 3 + 0 + 4 + 7 = 4$

$$133 \equiv 1 \pmod{3} \text{ maka } 133^5 \equiv 1^5 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$110^5 \equiv (-1)^5 \pmod{3} \equiv -1 \pmod{3}$$

$$84^5 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$27^5 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 \equiv 0 \pmod{3}$$

Maka k harus habis dibagi 3.

Jelas bahwa $k > 133$. Karena angka satuan k adalah 4 dan k habis dibagi 3 maka nilai terkecil k yang mungkin memenuhi adalah 144, dilanjutkan dengan 174 dan seterusnya. Tetapi akan dibuktikan bahwa $k < 174$.

$$11^5 = (10 + 1)^5 = 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1 = 161051 < 200000 = 2 \cdot 10^5$$

$$110^5 < 2 \cdot 10^{10}$$

$$27^5 < 100^5 = 10^{10}$$

$$84^5 < 100^5 = 10^{10}$$

$$133^5 < \left(\frac{1331}{10}\right)^5 = \frac{11^{15}}{10^5} = \frac{1,1^{15} \cdot 10^{15}}{10^5} = 1,1^{15} \cdot 10^{10} < 5 \cdot 10^{10}$$

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = k^5 < 5 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^{10} + 10^{10} + 10^{10} < 10^{11}$$

$$170^2 = 28900 > 28 \cdot 10^3$$

$$170^4 > 28^2 \cdot 10^6 > 78 \cdot 10^7 > 7 \cdot 10^8$$

$$170^5 > 119 \cdot 10^9 > 10^{11}$$

$$k^5 < 10^{11} < 170^5 \rightarrow k < 170$$

Maka nilai k yang memenuhi adalah $k = 144$.

189. Untuk a, b, x dan y bilangan real diketahui

$$ax + by = 3$$

$$ax^2 + by^2 = 7$$

$$ax^3 + by^3 = 16$$

$$ax^4 + by^4 = 42$$

Tentukan nilai S jika

$$S = ax^5 + by^5$$

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1990)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

$$(x + y)(ax^{n-1} + by^{n-1}) = ax^n + by^n + axy^{n-1} + bxy^{n-1}$$

$$ax^n + by^n = (x + y)(ax^{n-1} + by^{n-1}) - xy(ax^{n-2} + by^{n-2}) \dots\dots\dots (1)$$

Berdasarkan persamaan (1) maka :

$$ax^3 + by^3 = (x + y)(ax^2 + by^2) - xy(ax + by)$$

$$16 = 7(x + y) - 3xy \dots\dots\dots (2)$$

$$ax^4 + by^4 = (x + y)(ax^3 + by^3) - xy(ax^2 + by^2)$$

$$42 = 16(x + y) - 7xy \dots\dots\dots (3)$$

Berdasarkan persamaan (2) dan (3) didapat $x + y = -14$ dan $xy = -38$

$$ax^5 + by^5 = (x + y)(ax^4 + by^4) - xy(ax^3 + by^3)$$

$$ax^5 + by^5 = (-14)(42) - (-38)(16)$$

$$ax^5 + by^5 = 20$$

Nilai S yang memenuhi adalah $S = 20$

190. m, n adalah bilangan asli yang memenuhi $mn + m + n = 71$ dan $m^2n + mn^2 = 880$, tentukan $m^2 + n^2$.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1991)

Solusi :

$$mn + m + n = 71$$

$$m^2n + mn^2 = 880 \rightarrow mn(m + n) = 880$$

$$mn + \frac{880}{mn} = 71$$

$$(mn)^2 - 71(mn) + 880 = 0$$

$$(mn - 16)(mn - 55) = 0$$

$$mn = 16 \text{ atau } mn = 55$$

- Jika $mn = 16$ maka $m + n = 71 - 16 = 55$

Nilai (m, n) yang memenuhi $mn = 16$ adalah $(1, 16), (2, 8), (4, 4), (8, 2)$ dan $(16, 1)$ tetapi tidak ada yang memenuhi $m + n = 55$.

- Jika $mn = 55$ maka $m + n = 71 - 55 = 16$

Nilai (m, n) yang memenuhi $mn = 55$ adalah $(1, 55), (5, 11), (11, 5), (55, 1)$.

Yang memenuhi $m + n = 16$ adalah $m = 5$ dan $n = 11$ atau $m = 11$ dan $n = 5$

$$m^2 + n^2 = 5^2 + 11^2 = 146$$

191. Tentukan penjumlahan semua bilangan rasional positif berbentuk $\frac{a}{30}$ (dalam bentuk yang paling sederhana) dan nilainya < 10 .

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1992)

Solusi :

Bilangan rasional yang berbentuk $\frac{a}{30} < 1$ ada 8 yaitu $\frac{1}{30}, \frac{7}{30}, \frac{11}{30}, \frac{13}{30}, \frac{17}{30}, \frac{19}{30}, \frac{23}{30}, \frac{29}{30}$

$$\text{Penjumlahannya} = \frac{1 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29}{30} = 4.$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Bilangan rasional yang berbentuk $\frac{a}{30}$ dengan nilai di antara 1 dan 2 ada 8 yaitu

$$1\frac{1}{30}, 1\frac{7}{30}, 1\frac{11}{30}, 1\frac{13}{30}, 1\frac{17}{30}, 1\frac{19}{30}, 1\frac{23}{30}, 1\frac{29}{30}$$

$$\text{Penjumlahannya} = \frac{1+7+11+13+17+19+23+29}{30} + 8 = 12.$$

Penjumlahan bilangan berbentuk $\frac{a}{30}$ di antara 2 dan 3 = 12 + 8 = 20, dan seterusnya.

Penjumlahan semua bilangan rasional positif berbentuk $\frac{a}{30}$ (dalam bentuk yang paling sederhana) dan nilainya $< 10 = 4 + 12 + 20 + \dots + 76 = 400$

192. Misalkan S adalah himpunan semua bilangan rasional yang dapat ditulis ke dalam bentuk $0,abcabcabc\dots$

(dengan a, b dan c tidak harus berbeda). Jika semua elemen S ditulis ke dalam bentuk $\frac{r}{s}$ dalam

bentuk yang paling sederhana, ada berapa banyak pembilang r yang memenuhi.

(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1992)

Solusi :

$$0,abcabcabc\dots = \frac{abc}{999}.$$

Jika abc bukan merupakan kelipatan 3 atau 37 maka ini merupakan bentuk yang paling sederhana.

Nilai abc yang mungkin ada 999 kemungkinan yaitu 001, 002, 003, ..., 999.

Nilai m bulat yang memenuhi $1 \leq m \leq 999$ yang merupakan kelipatan 3 ada $999/3 = 333$ bilangan.

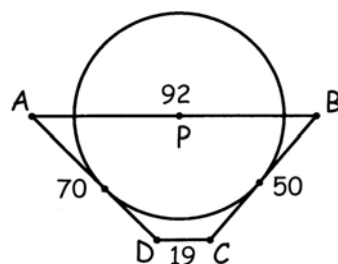
Bilangan m bulat yang memenuhi $1 \leq m \leq 999$ yang merupakan kelipatan 37 ada $\left\lfloor \frac{999}{37} \right\rfloor = 27$.

Bilangan m bulat yang memenuhi $1 \leq m \leq 999$ yang merupakan kelipatan $3 \cdot 37 = 111$ ada 9.

Dengan Prinsip Inklusi Eksklusi, banyaknya bilangan asli ≤ 999 yang bukan merupakan kelipatan 3 atau 37 = $999 - 333 - 27 + 9 = 648$.

193. ABCD adalah trapesium dengan AB sejajar DC, Diketahui panjang AB = 92, BC = 50, CD = 19, DA = 70.

P adalah sebuah titik yang terletak pada sisi AB sehingga dapat dibuat sebuah lingkaran yang berpusat di P yang menyinggung AD dan BC. Tentukan panjang AP.

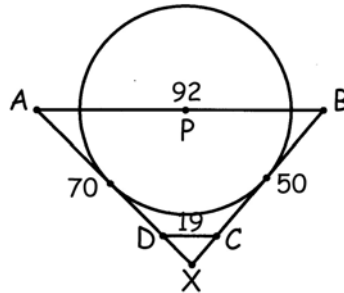


(Sumber : American Invitational Mathematics Examination 1992)

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Solusi :

Misalkan perpanjangan AD dan BC berpotongan di X.



Karena Garis AX dan BX menyinggung lingkaran dengan pusat P maka $\angle AXP = \angle PXB$. Akibatnya XP adalah garis bagi $\triangle AXP$. Maka berlaku :

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AP}{PB}$$

Karena AB sejajar CD maka $\triangle XDC$ sebangun dengan $\triangle XAB$.

$$\frac{XD}{AX} = \frac{XC}{BX}$$

$$\frac{AX}{BX} = \frac{XD}{XC} = \frac{AX - 70}{BX - 50}$$

$$(AX)(BX) - 50(AX) = (AX)(BX) - 70(BX)$$

$$\frac{AX}{BX} = \frac{7}{5} = \frac{AP}{PB} = \frac{AP}{92 - AP}$$

$$7 \cdot 92 - 7(AP) = 5(AP)$$

$$AP = \frac{161}{3}$$

194. Tentukan semua bilangan tiga angka yang merupakan penjumlahan dari faktorial digit-digitnya.

(Sumber : Queensland Association of Mathematics Teacher 2001)

Solusi :

Misalkan bilangan tersebut adalah $100a + 10b + c$ maka $100a + 10b + c = a! + b! + c!$

Karena $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$ dan $7! = 5040$ maka jelas bahwa $a, b, c \leq 6$.

Jika salah satu dari a, b dan $c = 6$ maka $a! + b! + c! > 720$ sedangkan $100a + 10b + c \leq 666$.

Maka $a, b, c \leq 5$.

$$100a + 10b + c = a! + b! + c!$$

$$100a - a! = b! + c! - (10b + c)$$

$$\text{Maksimum } b! + c! - (10b + c) = 5! + 5! = 240$$

- Jika $a = 5$ maka $100a - a! = 380 > 240$ (tidak memenuhi)
- Jika $a = 4$ maka $100a - a! = 376 > 240$ (tidak memenuhi)
- Jika $a = 3$ maka $100a - a! = 294 > 240$ (tidak memenuhi)
- Jika $a = 2$ maka $100a - a! = 198$
 $b! + c! - (10b + c) = 198$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena $4! + 4! = 48 < 198$. Maka sedikitnya salah satu dari b atau $c = 5$

Misalkan $b = 5$

$$b! + c! - (10b + c) = 5! + c! - 50 - c$$

$$198 = 70 + c! - c \rightarrow c! - c = 128. \text{ Tidak ada nilai } c \text{ yang memenuhi.}$$

Jika $c = 5$

$$b! + c! - (10b + c) = b! + 5! - 10b - 5$$

$$198 = 115 + b! - 10b \rightarrow b! - 10b = 83. \text{ Tidak ada nilai } b \text{ yang memenuhi.}$$

- Jika $a = 1$ maka $100a - a! = 99$

$$b! + c! - (10b + c) = 99$$

$$99 - b! + 10b = c! - c$$

Jika $b = 0$ maka $c! - c! = 98$ (tidak ada nilai c memenuhi)

Jika $b = 1$ maka $c! - c! = 108$ (tidak ada nilai c memenuhi)

Jika $b = 2$ maka $c! - c! = 117$ (tidak ada nilai c memenuhi)

Jika $b = 3$ maka $c! - c! = 123$ (tidak ada nilai c memenuhi)

Jika $b = 4$ maka $c! - c! = 115 \rightarrow c = 5$

Jika $b = 5$ maka $c! - c! = 29$ (tidak ada nilai c memenuhi)

Bilangan tersebut adalah 145.

195. Tentukan nilai dari :

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{1999^2} + \frac{1}{2000^2}}$$

(Sumber : USA Mathematical Talent Search 1999-2000 Round 4)

Solusi :

$$S = \sum_{a=1}^{1999} \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$$

$$S = \sum_{a=1}^{1999} \sqrt{\frac{a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1}{a^2(a+1)^2}}$$

$$S = \sum_{a=1}^{1999} \frac{a^2 + a + 1}{a(a+1)}$$

$$S = \sum_{a=1}^{1999} \left(1 + \frac{1}{a(a+1)} \right)$$

$$S = 1999 + \sum_{a=1}^{1999} \frac{1}{a(a+1)}$$

$$S = 1999 + \sum_{a=1}^{1999} \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$$

$$S = 1999 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1999} - \frac{1}{2000} \right) \rightarrow S = 1999 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2000}$$

$$S = 1999 + \frac{1999}{2000}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

196. Hitunglah $1776^{1492!} \pmod{2000}$ dengan kata lain berapakah sisa jika $1776^{1492!}$ Dibagi 2000 ?

(Sumber : USA Mathematical Talent Search 2000-2001 Round 2)

Solusi :

$$1776^1 \equiv 1776 \pmod{2000}$$

$$1776^2 \equiv 176 \pmod{2000}$$

$$1776^3 \equiv 576 \pmod{2000}$$

$$1776^4 \equiv 976 \pmod{2000}$$

$$1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}$$

$$1776^6 \equiv 1776 \pmod{2000}$$

$$1776^7 \equiv 176 \pmod{2000}$$

dan seterusnya.

Karena $1776^6 \equiv 1776^1 \equiv 1776 \pmod{2000}$, maka $1776^n \equiv 1776^{n-5} \pmod{2000}$ untuk $n > 5$.

Jelas bahwa $1492!$ habis dibagi 5.

$$1776^{1492!} \equiv 1776^5 \pmod{2000} \equiv 1376 \pmod{2000}$$

Maka sisa jika $1776^{1492!}$ dibagi 2000 adalah 1376.

197. Selesaikan sistem persamaan berikut :

$$\sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2$$

$$\sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2}$$

(Sumber : Vietnamese Mathematical Olympiad 1996)

Solusi :

Dari persamaan di atas jelas bahwa $x, y > 0$. Akan kita dapatkan :

$$1 + \frac{2}{x+y} + \left(\frac{1}{x+y} \right)^2 = \frac{4}{3x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$1 - \frac{2}{x+y} + \left(\frac{1}{x+y} \right)^2 = \frac{32}{7y} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) - (2) \rightarrow \frac{4}{x+y} = \frac{4}{3x} - \frac{32}{7y}$$

$$21xy = (x+y)(7y - 24x) = 7y^2 - 24x^2 - 17xy$$

$$7y^2 - 24x^2 - 38xy = 0$$

$$(7y + 4x)(y - 6x) = 0$$

Karena $x, y > 0$ maka $y = 6x$

$$\sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{7x} \right) = 2$$

$$7x\sqrt{3x} + \sqrt{3x} = 14x \rightarrow 7x\sqrt{3} - 14\sqrt{x} + \sqrt{3} = 0 \text{ (merupakan persamaan kuadrat dalam } \sqrt{x} \text{)}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\sqrt{x} = \frac{14 + \sqrt{14^2 - 84}}{14\sqrt{3}} = \frac{7 + 2\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} \text{ atau } \sqrt{x} = \frac{14 - \sqrt{14^2 - 84}}{14\sqrt{3}} = \frac{7 - 2\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} \text{ didapat :}$$

$$x = \frac{11 + 4\sqrt{7}}{21} \text{ dan } y = \frac{22 + 8\sqrt{7}}{7} \text{ atau } x = \frac{11 - 4\sqrt{7}}{21} \text{ dan } y = \frac{22 - 8\sqrt{7}}{7}$$

Dengan mengecek $\left(\frac{11 + 4\sqrt{7}}{21}, \frac{22 + 8\sqrt{7}}{7} \right), \left(\frac{11 - 4\sqrt{7}}{21}, \frac{22 - 8\sqrt{7}}{7} \right)$ maka keduanya merupakan penyelesaian.

198. Buktikan bahwa hasil kali 99 bilangan $\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$, $k = 2, 3, 4, \dots, 100$ lebih dari $\frac{2}{3}$.

(Sumber : Baltic Way 1992 Mathematical Team Contest)

Solusi :

Misalkan hasil kali 99 bilangan tersebut = X

$$\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{(k - 1)(k^2 + k + 1)}{(k + 1)(k^2 - k + 1)}$$

Perhatikan bahwa $n^2 + n + 1 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1$. Maka $2^2 + 2 + 1 = 3^2 - 3 + 1$; $3^2 + 3 + 1 = 4^2 - 4 + 1$ dan seterusnya.

$$X = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \dots \frac{99}{101} \cdot \frac{2^2 + 2 + 1}{2^2 - 2 + 1} \cdot \frac{3^2 + 3 + 1}{3^2 - 3 + 1} \cdot \frac{4^2 + 4 + 1}{4^2 - 4 + 1} \dots \frac{100^2 + 100 + 1}{100^2 - 100 + 1}$$

$$X = \frac{1 \cdot 2}{100 \cdot 101} \cdot \frac{100^2 + 100 + 1}{2^2 - 2 + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{100^2 + 100 + 1}{100 \cdot 101}$$

$$X > \frac{2}{3} \cdot \frac{100^2 + 100}{100 \cdot 101} = \frac{2}{3} \cdot \frac{100(100 + 1)}{100 \cdot 101} = \frac{2}{3}$$

$$X > \frac{2}{3} \text{ (terbukti)}$$

199. Tentukan semua bilangan bulat n yang memenuhi

$$\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$$

adalah bilangan bulat

(Sumber : Baltic Way 1993 Mathematical Team Contest)

Solusi :

$$\text{Misal } \sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}} = m$$

Jelas bahwa $m \geq 0$

Dari persamaan di atas didapat $625 \geq 4n \rightarrow n \leq 156$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\frac{25}{2} \geq \sqrt{\frac{625}{4} - n} \rightarrow n \geq 0$$

Maka $0 \leq n \leq 156$

$$\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n} + \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n} + 2\sqrt{\frac{625}{4} - \left(\frac{625}{4} - n\right)} = m^2$$

$$25 + 2\sqrt{n} = m^2$$

Karena $0 \leq n \leq 156$ maka

$$0 \leq 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{156}$$

$$0 \leq m^2 - 25 \leq 2\sqrt{156}$$

Karena $m^2 - 25$ bulat maka :

$$0 \leq m^2 - 25 \leq 24 \rightarrow 5 \leq m \leq 7$$

- Jika $m = 5$
 $25 + 2\sqrt{n} = 5^2 \rightarrow n = 0$
- Jika $m = 6$
 $25 + 2\sqrt{n} = 6^2 \rightarrow 4n = 121 \rightarrow$ tidak ada n bulat yang memenuhi.
- Jika $m = 7$
 $25 + 2\sqrt{n} = 7^2 \rightarrow n = 144$

Nilai n yang memenuhi adalah $n = 0$ atau $n = 144$.

200. Tentukan semua pasangan bulat positif (a, b) yang memenuhi $2^a + 3^b$ adalah bilangan kuadrat sempurna.
 (Sumber : Baltic Way 1994 Mathematical Team Contest)

Solusi :

Misalkan $2^a + 3^b = k^2$

Karena 2^a genap dan 3^b ganjil maka k ganjil.

$$k^2 = 2^a + 3^b = (3 - 1)^a + 3^b \equiv (-1)^a \pmod{3}$$

Karena bilangan kuadrat jika dibagi 3 menghasilkan sisa 0 atau 1 maka a genap.

Karena a genap maka 2^a habis dibagi 4.

$$k^2 = 2^a + (4 - 1)^b \equiv (-1)^b \pmod{4}$$

Karena bilangan kuadrat jika dibagi 4 menghasilkan sisa 0 atau 1 maka b genap

Misalkan $b = 2p$ maka :

$$2^a = k^2 - 3^{2p} = (k + 3^p)(k - 3^p)$$

$$k + 3^p = 2^q \text{ dan } k - 3^p = 2^r \text{ dengan } q + r = a \text{ dan } q > r$$

$$k + 3^p - k + 3^p = 2 \cdot 3^p = 2^q - 2^r = 2^r(2^x - 1) \text{ dengan } r + x = q$$

$$2 \cdot 3^p = 2^r(2^x - 1)$$

Akibatnya $r = 1$

$$3^p = 2^x - 1 = 2^{q-1} - 1$$

Karena $q + r = a$ maka $q + 1 = a$.

Karena a genap maka q ganjil maka $q - 1$ genap.

$$3^p = 2^{q-1} - 1$$

$$3^p = \left(2^{\frac{q-1}{2}} + 1\right) \left(2^{\frac{q-1}{2}} - 1\right)$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena $\left(2^{\frac{q-1}{2}} + 1\right) - \left(2^{\frac{q-1}{2}} - 1\right) = 2$ maka tidak dapat keduanya habis dibagi 3. (Jika m habis dibagi 3 maka $m - n$ habis dibagi 3 jika dan hanya jika n habis dibagi 3)

Akibatnya salah satu dari $\left(2^{\frac{q-1}{2}} + 1\right)$ atau $\left(2^{\frac{q-1}{2}} - 1\right) = 1$ dan lainnya sama dengan 3^p

$$\left(2^{\frac{q-1}{2}} - 1\right) = 1 \rightarrow q = 3$$

$$\left(2^{\frac{q-1}{2}} + 1\right) = 3^p \rightarrow 2 + 1 = 3^p \rightarrow p = 1$$

$$a = q + r = 3 + 1 = 4$$

$$b = 2p = 2$$

Pasangan (a, b) yang memenuhi adalah (4, 2)

201. Tentukan semua tripel bilangan bulat tak negatif yang memenuhi $a \geq b \geq c$ dan

$$1 \cdot a^3 + 9 \cdot b^2 + 9 \cdot c + 7 = 1997$$

(Sumber : Baltic Way 1997 Mathematical Team Contest)

Solusi :

Jika $a = b = c = 10$

$$1 \cdot a^3 + 9 \cdot b^2 + 9 \cdot c + 7 = 1997$$

Maka $a \geq 10$. Karena $13^3 = 2197 > 1997$ maka $10 \leq a < 13$

Karena $1997 \equiv 8 \pmod{9}$ maka $1 \cdot a^3 + 9 \cdot b^2 + 9 \cdot c + 7 \equiv 8 \pmod{9} \rightarrow a^3 \equiv 1 \pmod{9}$

Karena $11^3 \equiv 2^3 \pmod{9} \equiv 8 \pmod{9}$ dan $12^3 \equiv 0 \pmod{9}$ maka a yang memenuhi hanya $a = 10$.

Akibatnya $b = c = 10$

Tripel (a, b, c) yang memenuhi hanya (10, 10, 10)

202. Tentukan sepasang bilangan bulat positif x, y yang memenuhi persamaan $2x^2 + 5y^2 = 11(xy - 11)$

(Sumber : Baltic Way 1998 Mathematical Team Contest)

Solusi :

$$2x^2 + 5y^2 = 11(xy - 11) \rightarrow 121 = 11xy - 2x^2 - 5y^2$$

$$(5y - x)(2x - y) = 121$$

Maka bilangan $(5y - x)$ dan $(2x - y)$ kedua negatif atau keduanya positif.

- Jika kedua bilangan $(5y - x)$ dan $(2x - y)$ negatif

$$5y < x \text{ dan } 2x < y \rightarrow 2x < y < \frac{x}{5} \text{ (tidak mungkin untuk } x \text{ bulat positif sebab } 2x > x/5)$$

- Jika kedua bilangan $(5y - x)$ dan $(2x - y)$ positif

Ada tiga kasus yang mungkin terjadi

- $5y - x = 1$ dan $2x - y = 121$

Dari kedua persamaan di atas didapat $9y = 123$ (tidak memenuhi y bulat)

- $5y - x = 11$ dan $2x - y = 11$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Dari kedua persamaan di atas didapat $9y = 33$ (tidak memenuhi y bulat)

- $5y - x = 121$ dan $2x - y = 1$

Dari kedua persamaan di atas didapat $y = 27$ dan $x = 14$

Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah $(14, 27)$

203. Tentukan semua bilangan real a, b, c dan d yang memenuhi sistem persamaan berikut :

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1$$

$$bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9$$

$$cda + cd + da + ac + c + d + a = 9$$

$$dab + da + ab + bd + d + b + a = 9$$

(Sumber : Baltic Way 1999 Mathematical Team Contest)

Solusi :

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1 \rightarrow (a+1)(b+1)(c+1) = 2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9 \rightarrow (b+1)(c+1)(d+1) = 10 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$cda + cd + da + ac + c + d + a = 9 \rightarrow (c+1)(d+1)(a+1) = 10 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$dab + da + ab + bd + d + b + a = 9 \rightarrow (d+1)(a+1)(b+1) = 10 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$(1)(2)(3)(4) \rightarrow (a+1)^3(b+1)^3(c+1)^3(d+1)^3 = 2000$$

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 10\sqrt[3]{2}$$

$$2(d+1) = 10\sqrt[3]{2}$$

$$d = 5\sqrt[3]{2} - 1$$

$$10(a+1) = 10\sqrt[3]{2}$$

$$a = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$10(b+1) = 10\sqrt[3]{2}$$

$$b = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$10(c+1) = 10\sqrt[3]{2}$$

$$c = \sqrt[3]{2} - 1$$

204. Misalkan a, b, c dan d bilangan prima yang memenuhi $a > 3b > 6c > 12d$ dan $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$.
Tentukan semua kemungkinan nilai dari $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

(Sumber : Baltic Way 1999 Mathematical Team Contest)

Solusi :

Karena 1749 ganjil maka salah satu dari a, b, c atau d bilangan prima genap, yaitu 2.

Tidak mungkin $a = 2$ sebab tidak ada nilai b, c dan d memenuhi $2 > 3b > 6c > 12d$.

Tidak mungkin $b = 2$ sebab tidak ada nilai c yang memenuhi $6c < 3b$.

Tidak mungkin $c = 2$ sebab tidak ada nilai d yang memenuhi $12d < 6c$.

Maka $d = 2$

$$1749 = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 > (3b)^2 - b^2 + (2d)^2 - d^2$$

$$1749 > 8b^2 - 12$$

$$b \leq 14$$

Karena $3b > 12d$ maka $8 < b \leq 14$. Nilai b yang memenuhi adalah 11 atau 13.

$$12d < 6c < 3b$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$4 < c < \frac{b}{2}$$

Karena $b = 11$ atau 13 maka nilai c yang memenuhi hanya $c = 5$.

$$a^2 = 1749 + b^2 - c^2 + d^2$$

Jika $b = 13$ maka $a^2 = 1749 + 13^2 - 5^2 + 2^2 = 1897$ (bukan bilangan kuadrat)

Jika $b = 11$ maka $a^2 = 1749 + 11^2 - 5^2 + 2^2 = 1849 = 43^2$ dan 43 adalah bilangan prima

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 43^2 + 11^2 + 5^2 + 2^2 = 1999$$

205. Buktikan bahwa jika $n^4 + 4^n$ bukan bilangan prima untuk n bilangan asli lebih dari 1.

(Sumber : Jozsef Kurschak Competition in Hungary 1977)

Solusi :

- Jika n bilangan genap

Maka $n^4 + 4^n$ bilangan genap $\rightarrow n^4 + 4^n$ tidak mungkin prima

- Jika n bilangan ganjil

Maka $n + 1$ genap

$$n^4 + 4^n = (n^2)^2 + (2^n)^2 = (n^2 + 2^n)^2 - 2^{n+1}n^2$$

$$n^4 + 4^n = \left(n^2 + 2^n + 2^{\frac{n+1}{2}} n \right) \left(n^2 + 2^n - 2^{\frac{n+1}{2}} n \right)$$

Karena $n + 1$ bilangan genap maka $\frac{n+1}{2}$ merupakan bilangan asli.

$n^4 + 4^n$ adalah perkalian dua bilangan asli lebih dari 1.

Maka $n^4 + 4^n$ bukan bilangan prima.

206. Tentukan semua bilangan bulat positif n yang memenuhi $3^{n-1} + 5^{n-1}$ membagi $3^n + 5^n$.

(Sumber : St. Petersburg City Math Olympiad 1996)

Solusi :

Untuk sembarang nilai n maka :

$$3(3^{n-1} + 5^{n-1}) < 3^n + 5^n < 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$$

Karena $3^{n-1} + 5^{n-1}$ membagi $3^n + 5^n$ maka hanya dapat dipenuhi oleh $3^n + 5^n = 4(3^{n-1} + 5^{n-1})$

$$3^{n-1}(4 - 3) = 5^{n-1}(5 - 4)$$

$$3^{n-1} = 5^{n-1}$$

Karena 3 dan 5 relatif prima maka persamaan tersebut hanya dapat dipenuhi oleh $n = 1$.

Karena $3^0 + 5^0 = 2$ membagi $3^1 + 5^1 = 8$ maka $n = 1$ adalah satu-satunya penyelesaian soal di atas.

Untuk $n = 1$ maka $3^{n-1} + 5^{n-1} = 2$ membagi $3^n + 5^n = 8$

Nilai n bulat positif yang memenuhi $3^{n-1} + 5^{n-1}$ membagi $3^n + 5^n$ hanya $n = 1$

207. Buktikan bahwa sembarang bilangan bulat lebih dari atau sama dengan 7 dapat ditulis sebagai penjumlahan dua bilangan bulat yang saling relatif prima.

(Sumber : Second Bay Area Mathematical Olympiad)

Solusi :

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Misalkan bilangan tersebut adalah n .

n akan termasuk ke dalam salah satu dari bentuk $2k + 1$ atau $4m$ atau $4p + 2$.

- Jika $n = 2k + 1$
 k dan $k + 1$ relatif prima dan $n = (k) + (k + 1)$

- Jika $n = 4m$
 $2m - 1$ dan $2m + 1$ adalah dua bilangan ganjil berurutan, maka $2k - 1$ dan $2k + 1$ relatif prima.
 $n = 4m = (2m + 1) + (2m - 1)$

- Jika $n = 4p + 2$
 $n = (2p + 3) + (2p - 1)$ dengan $2p + 3$ dan $2p - 1$ relatif prima.
 Bukti bahwa $2p + 3$ dan $2p - 1$ relatif prima.
 Andaikan bahwa $2p + 3$ dan $2p - 1$ tidak relatif prima dengan $\text{FPB}(2p + 3, 2p - 1) = k$ dan $k > 1$.
 Maka $2p + 3 = km$ dan $2p - 1 = kn$ untuk suatu bilangan asli k, m, n dan $k > 1$.
 Karena $2p + 3$ dan $2p - 1$ ganjil maka k, m, n semuanya ganjil.
 $(2p + 3) - (2p - 1) = 4 = k(m - n)$
 Karena faktor ganjil dari 4 hanya 1 maka $k = 1$ (kontradiksi dengan kenyataan $k > 1$)
 Terbukti $2p + 3$ dan $2p - 1$ relatif prima

Terbukti bahwa sembarang bilangan bulat lebih dari atau sama dengan 7 dapat ditulis sebagai penjumlahan dua bilangan bulat yang saling relatif prima.

208. Misalkan $a, b, c > 0$ dan $abc = 1$. Tunjukkan bahwa $\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$.

(Sumber : Unsolved Problem in IMO 1996)

Solusi :

$$(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geq 0$$

Jika $a \geq b$ maka $a^3 - b^3 \geq 0$ dan $a^2 - b^2 \geq 0$ maka $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geq 0$ (ketaksamaan di atas terbukti)

Jika $a \leq b$ maka $a^3 - b^3 \leq 0$ dan $a^2 - b^2 \leq 0$ maka $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geq 0$ (ketaksamaan di atas terbukti)

$$a^5 + b^5 \geq a^2 b^2 (a + b)$$

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{a^2 b^2 (a + b) + ab} \cdot \frac{c^2}{c^2}$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $abc = 1$ maka :

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{c}{a + b + c}$$

Dengan cara yang sama didapatkan :

$$\frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a + b + c}$$

$$\frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq \frac{b}{a + b + c}$$

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq \frac{c}{a + b + c} + \frac{a}{a + b + c} + \frac{b}{a + b + c}$$

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1 \text{ (terbukti)}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

209. Tentukan nilai a bulat yang membuat $x^2 - x + a$ membagi $x^{13} + x + 90$.
(Sumber : Putnam 1963)

Solusi :

$$x^{13} + x + 90 = (x^2 - x + a) \cdot q(x)$$

Untuk $x = -1$ didapat $88 = (2 + a) q(-1)$

Untuk $x = 0$ didapat $90 = a \cdot q(0)$

Untuk $x = 1$ didapat $92 = a \cdot q(1)$

Maka a membagi $90 = 2 \cdot 5 \cdot 3^2$ dan juga membagi $92 = 2^2 \cdot 23 \rightarrow a = \pm 1$ atau ± 2

$a + 2$ membagi 88 .

Nilai a yang memenuhi adalah -1 atau 2

210. Jumlah dua bilangan bulat positif adalah 2310. Tunjukkan bahwa hasil kali keduanya tidak habis dibagi 2310.

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 1 Nomor 2)

Solusi :

Misalkan x dan y adalah dua bilangan bulat positif tersebut.

$$x + y = 2310$$

Andaikan bahwa xy habis dibagi 2310 maka $xy = 2310n$ untuk suatu bilangan bulat positif n .

$$y = \frac{2310n}{x} \rightarrow x + \frac{2310n}{x} = 2310$$

$$x^2 - 2310x + 2310n = 0$$

Karena x bulat maka diskriminan persamaan kuadrat tersebut harus kuadrat sempurna.

$$\text{Diskriminan} = (2310)^2 - 4(2310n) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot (1155 - 2n)$$

Maka $1155 - 2n = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot k^2 = 1155k^2$ untuk suatu bilangan asli k .

Maka $1155 - 2n = 1155k^2 \geq 1155$

Maka nilai n yang memenuhi hanya $n = 0$

Tetapi x dan y keduanya bulat positif (kontradiksi)

Maka hasil kali x dan y tidak habis dibagi 2310.

211. Untuk suatu persamaan kuadrat $P(x) = ax^2 + bx + c$ dengan koefisien bilangan real dan memenuhi $|P(x)| \leq 1$ untuk $-1 \leq x \leq 1$. Tentukan b maksimum yang memenuhi hal ini serta temukan persamaan kuadrat dengan koefisien b yang maksimum.

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 1 Nomor 3)

Solusi :

$$P(1) = a + b + c$$

$$P(-1) = a - b + c$$

$$b = \frac{P(1) - P(-1)}{2}$$

$b_{\text{maks}} = 1$ untuk $P(1) = 1$ dan $P(-1) = -1$

Persamaan kuadrat $P(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 1$ memenuhi kondisi tersebut.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

212. Misalkan a , b dan c adalah bilangan positif yang memenuhi persamaan $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Buktikan bahwa $(a - c)(b - c) \leq 0$

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 2 Nomor 4)

Solusi :

$$a^2 + b^2 - ab = a^2 + b(b - a) = c^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b(b - a)}$$

Karena a dan b simetris maka tanpa mengurangi keumuman soal misalkan bahwa $a \leq b$

Maka $a \leq \sqrt{a^2 + b(b - a)}$. Tanda kesamaan terjadi bila $b = a \rightarrow a \leq c$.

Karena $a(b - a) > 0$ maka $\sqrt{b^2 - a(b - a)} \leq b$

Karena $\sqrt{b^2 - a(b - a)} = c$ maka $c \leq b \rightarrow a \leq c \leq b$

$a - c \leq 0$ sedangkan $b - c \geq 0$

Akibatnya $(a - c)(b - c) \leq 0$ (terbukti)

213. Ada berapa banyak himpunan bagian dari himpunan $X = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ yang terdiri dari 3 elemen dan memenuhi bahwa hasil kali ketiga elemen pada himpunan bagian tersebut habis dibagi 4 ?

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 2 Nomor 5)

Solusi :

Banyaknya himpunan bagian 3 elemen = ${}_{20}C_3 = 1140$.

Agar hasil kali ketiga elemen tersebut tidak habis dibagi 4, maka kemungkinannya adalah :

- Ketiga elemen tersebut adalah bilangan ganjil
Banyaknya himpunan bagian dapat dibuat adalah ${}_{10}C_3 = 120$
- Dua dari 3 elemen tersebut bilangan ganjil sedangkan satu lagi adalah bilangan genap tidak habis dibagi 4

Bilangan genap yang tidak habis dibagi 4 ada 5.

Banyaknya himpunan bagian dapat dibuat adalah ${}_{10}C_2 \cdot 5 = 225$

Banyaknya himpunan bagian yang hasil kali ketiga elemennya habis dibagi 4 = $1140 - 120 - 225 = 795$.

214. Adakah bilangan bulat positif n sehingga $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ adalah bilangan rasional ?

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 3 Nomor 2)

Solusi :

Andaikan bahwa $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ adalah bilangan rasional maka $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} = r$ dengan r rasional.

$$n-1 + n+1 + 2\sqrt{n^2-1} = r^2$$

$$\sqrt{n^2-1} = \frac{r^2 - 2n}{2} \text{ yang juga merupakan bilangan rasional.}$$

Misalkan $\sqrt{n^2-1} = \frac{p}{q}$ dengan $p, q \in$ bilangan asli dan $\text{FPB}(p, q) = 1$.

$$p^2 = q^2(n^2 - 1)$$

Maka q membagi p . Karena $\text{FPB}(p, q) = 1$ maka $q = 1 \rightarrow p^2 = n^2 - 1$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$-1 > 1 - 2n$$

Untuk $n > 1$ maka

$$2n > 2 \rightarrow -2n + 1 < -1$$

$$n^2 - 2n + 1 < n^2 - 1 \rightarrow (n - 1)^2 < n^2 - 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$n^2 > n^2 - 1 > (n - 1)^2$$

$$n^2 > a^2 > (n - 1)^2$$

a^2 terletak di antara 2 bilangan kuadrat berurutan (sesuatu yang tidak mungkin).

Maka untuk $n > 1$ tidak ada nilai n yang membuat $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ adalah bilangan rasional.

Untuk $n = 1$ maka $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} = \sqrt{2}$ bukan bilangan rasional.

Maka dapat disimpulkan bahwa tidak ada nilai n bulat positif yang membuat $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ rasional.

215. Misalkan a, b, c adalah bilangan real berbeda yang memenuhi $a^3 = 3(b^2 + c^2) - 25$, $b^3 = 3(c^2 + a^2) - 25$ dan $c^3 = 3(a^2 + b^2) - 25$. Tentukan nilai abc .

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 3 Nomor 2)

Solusi :

Misalkan a, b dan c adalah akar-akar persamaan $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ maka :

$$a + b + c = p$$

$$ab + ac + bc = q$$

$$abc = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = p^2 - 2q \dots\dots\dots (1)$$

$$b^2 + c^2 = p^2 - 2q - a^2$$

$$a^3 = 3(b^2 + c^2) - 25 = 3(p^2 - 2q - a^2) - 25$$

$$a^3 + 3a^2 + (25 + 6q - 3p^2) = 0$$

$$\text{Maka } a \text{ adalah akar-akar polinomial } x^3 + 3x^2 + (25 + 6q - 3p^2) = 0$$

$$\text{Dengan cara yang sama akan didapat bahwa } b \text{ dan } c \text{ juga akar-akar } x^3 + 3x^2 + (25 + 6q - 3p^2) = 0$$

$$\text{Bandingkan } x^3 + 3x^2 + (25 + 6q - 3p^2) = 0 \text{ dengan } x^3 - px^2 + qx - r = 0.$$

$$\text{Didapat } p = -3, q = 0 \text{ dan } 25 + 6q - 3p^2 = -r \rightarrow -2 = -r \rightarrow r = 2$$

$$abc = 2$$

216. Tentukan semua bilangan prima p yang memenuhi $2^p + p^2$ juga prima.

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 3 Nomor 3)

Solusi :

Untuk $p = 2$ maka $2^p + p^2 = 8$ (bukan bilangan prima)

Untuk $p = 3$ maka $2^p + p^2 = 17$ (bilangan prima)

Untuk $p > 3$

Bilangan prima akan berbentuk $p = 3n + 1$ atau $p = 3n - 1$

- Jika $p = 3n + 1$

$$2^p + p^2 = (3 - 1)^p + (3n + 1)^2$$

$$2^p + p^2 \equiv (-1)^p + 1^2 \pmod{3}$$

Karena $p > 3$ maka p adalah bilangan ganjil sehingga $(-1)^p = -1$

$$2^p + p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

- Jika $p = 3n - 1$

$$2^p + p^2 = (3 - 1)^p + (3n - 1)^2$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$2^p + p^2 \equiv (-1)^p + (-1)^2 \pmod{3}$$

Karena $p > 3$ maka p adalah bilangan ganjil sehingga $(-1)^p = -1$

$$2^p + p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

Dapat disimpulkan bahwa untuk $p > 3$ maka $2^p + p^2$ habis dibagi 3 (bukan bilangan prima)

Maka $p = 3$ adalah satu-satunya nilai yang membuat $2^p + p^2$ adalah bilangan prima.

217. Buktikan untuk bilangan real $x, y, z > 0$ maka

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 3 Nomor 3)

Solusi :

$$4x^2 = ((x+y) + (x-y))^2$$

$$4x^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)(x-y) + (x-y)^2$$

$$4x^2 \geq (x+y)^2 + 2(x+y)(x-y)$$

$$\frac{x^2}{x+y} \geq \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2}$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$\frac{y^2}{y+z} \geq \frac{y+z}{4} + \frac{y-z}{2}$$

$$\frac{z^2}{z+x} \geq \frac{z+x}{4} + \frac{z-x}{2}$$

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} + \frac{y+x}{4} + \frac{y-x}{2} + \frac{z+x}{4} + \frac{z-x}{2}$$

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2} \quad (\text{terbukti})$$

218. Tentukan nilai terkecil dari n bilangan asli yang dapat ditulis sebagai penjumlahan 9 bilangan asli berurutan, penjumlahan 10 bilangan asli berurutan dan penjumlahan 11 bilangan asli berurutan.

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 3 Nomor 4)

Solusi :

$$n = a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+8) = 9a + 36 = 9(a+4)$$

$$n = b + (b+1) + (b+2) + \dots + (b+9) = 10b + 45 = 5(2b+9)$$

$$n = c + (c+1) + (c+2) + \dots + (c+10) = 11c + 55 = 11(c+5)$$

n habis dibagi 9, 5 dan 11.

Karena 5, 9 dan 11 semuanya saling relatif prima maka n habis dibagi $5 \cdot 9 \cdot 11 = 495$.

$$n \geq 495.$$

Misalkan $a = 51$, $b = 45$ dan $c = 40$ didapat $n = 495$.

Maka nilai terkecil n yang membuat hal tersebut terjadi adalah $n = 495$.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

219. Tentukan semua pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi :

$$\text{FPB}(a, b) + \text{KPK}(a, b) = a + b + 6$$

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 5 Nomor 4)

Solusi :

Misal $\text{FPB}(a, b) = x$ maka $a = xp$ dan $b = xq$ untuk x, p, q bilangan asli dan $\text{FPB}(p, q) = 1$

$$\text{KPK}(a, b) = xpq$$

$$x + xpq = xp + xq + 6$$

$$x(p-1)(q-1) = 6$$

Ada beberapa kasus :

- $x = 1$; $p-1 = 1$; $q-1 = 6$
 $x = 1, p = 2$ dan $q = 7 \rightarrow (a, b) = (2, 7)$
- $x = 1$; $p-1 = 6$; $q-1 = 1$
 $x = 1, p = 7$ dan $q = 2 \rightarrow (a, b) = (7, 2)$
- $x = 1$; $p-1 = 2$; $q-1 = 3$
 $x = 1, p = 3$ dan $q = 4 \rightarrow (a, b) = (3, 4)$
- $x = 1$; $p-1 = 3$; $q-1 = 2$
 $x = 1, p = 4$ dan $q = 3 \rightarrow (a, b) = (4, 3)$
- $x = 2$; $p-1 = 1$; $q-1 = 3$
 $x = 2, p = 2$ dan $q = 4$ (Tidak memenuhi sebab $\text{FPB}(p, q) \neq 1$)
- $x = 2$; $p-1 = 1$; $q-1 = 3$
 $x = 2, p = 2$ dan $q = 4$ (Tidak memenuhi sebab $\text{FPB}(p, q) \neq 1$)
- $x = 3$; $p-1 = 1$; $q-1 = 2$
 $x = 3, p = 2$ dan $q = 3 \rightarrow (a, b) = (6, 9)$
- $x = 3$; $p-1 = 2$; $q-1 = 1$
 $x = 3, p = 3$ dan $q = 2 \rightarrow (a, b) = (9, 6)$
- $x = 6$; $p-1 = 1$; $q-1 = 1$
 $x = 6, p = 2$ dan $q = 2$ (Tidak memenuhi sebab $\text{FPB}(p, q) \neq 1$).

Pasangan (a, b) yang memenuhi adalah $(2, 7), (3, 4), (4, 3), (6, 9), (7, 2), (9, 6)$.

220. Untuk $a, b, c > 0$ dan $abc = 1$, maka tunjukkan bahwa :

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$$

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 5 Nomor 4)

Solusi :

Dengan ketaksamaan AM-GM maka :

$$\frac{b}{\sqrt{a}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \frac{c}{\sqrt{a}}} = 2\sqrt{\frac{bc}{a}} \text{ maka didapat :}$$

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \left(\sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \right) + \left(\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \right) + \left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \right)$$

Dengan ketaksamaan AM-GM maka :

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2 \left(\sqrt{\frac{a^2bc}{bc}} \right) + 2 \left(\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}} \right) + 2 \left(\sqrt{\frac{abc^2}{ab}} \right) = 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Dengan ketaksamaan AM-GM maka :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc} = 3$$

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3 \text{ (terbukti)}$$

Alternatif soal ini adalah pembuktian $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 6$

221. Misalkan $a, b, c > 0$ dan $abc \leq 1$. Buktikan bahwa :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq a + b + c$$

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 5 Nomor 5)

Solusi :

$$\frac{2a}{c} + \frac{c}{b} = \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2c}{bc^2}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}}$$

$$\frac{2a}{c} + \frac{c}{b} \geq 3a \quad \dots\dots\dots (1)$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$\frac{2b}{a} + \frac{a}{c} \geq 3b \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{2c}{b} + \frac{b}{a} \geq 3c \quad \dots\dots\dots (3)$$

(1) + (2) + (3)

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq a + b + c \text{ (terbukti)}$$

222. Panjang sisi-sisi sebuah segiempat adalah bilangan bulat positif. Panjang masing-masing sisi membagi jumlah ketiga sisi yang lain. Buktikan bahwa dua sisi mempunyai panjang yang sama.

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 6 Nomor 1)

Solusi :

Andaikan bahwa keempat sisi tersebut tidak ada yang sama panjang dengan sisi-sisinya adalah a, b, c dan d dengan $a < b < c < d$.

$$d < a + b + c \text{ dan } a + b + c < 3d \rightarrow d < a + b + c < 3d$$

$$\text{Karena } d \text{ membagi } a + b + c \text{ maka } a + b + c = 2d \rightarrow a + b + c + d = 3d$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena a membagi $b + c + d$ maka a juga membagi $a + b + c + d = 3d$

Karena b membagi $a + c + d$ maka b juga membagi $a + b + c + d = 3d$

Karena c membagi $a + b + d$ maka c juga membagi $a + b + c + d = 3d$

Maka $xa = 3d$; $yb = 3d$; $zc = 3d$ dengan x, y, z adalah bilangan bulat positif.

Karena $z = 3d/c$ dengan $d > c$ maka $z > 3$

Karena $a < b < c$ maka $x > y > z > 3$ berimplikasi $z \geq 4$, $y \geq 5$ dan $x \geq 6$

$$2d = a + b + c = \frac{3d}{x} + \frac{3d}{y} + \frac{3d}{z}$$

$$2d \leq \frac{3d}{6} + \frac{3d}{5} + \frac{3d}{4} < 2d \quad (\text{kontradiksi ketaksamaan})$$

Maka dapat disimpulkan bahwa ada dua sisi segiempat tersebut yang sama (terbukti)

223. Dua puluh delapan bilangan bulat diambil dari himpunan $H = \{104, 105, 106, 107, \dots, 208\}$. Tunjukkan bahwa terdapat dua bilangan yang keduanya mempunyai faktor persekutuan prima.

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 6 Nomor 1)

Solusi :

Dengan prinsip Inklusi Eksklusi akan dicari banyaknya bilangan dari H yang habis dibagi 2, 3, 5 atau 7.

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2 = $A = 53$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 = $B = 35$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 5 = $C = 21$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 7 = $D = 15$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2 dan 3 atau habis dibagi 6 = $A \cap B = 17$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2 dan 5 atau habis dibagi 10 = $A \cap C = 10$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2 dan 7 atau habis dibagi 14 = $A \cap D = 7$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 dan 5 atau habis dibagi 15 = $B \cap C = 7$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 dan 7 atau habis dibagi 21 = $B \cap D = 5$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 5 dan 7 atau habis dibagi 35 = $C \cap D = 3$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2, 3 dan 5 atau habis dibagi 30 = $A \cap B \cap C = 3$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2, 3 dan 7 atau habis dibagi 42 = $A \cap B \cap D = 2$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2, 5 dan 7 atau habis dibagi 70 = $A \cap C \cap D = 1$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3, 5 dan 7 atau habis dibagi 105 = $B \cap C \cap D = 1$

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2, 3, 5 dan 7 atau habis dibagi 210 = $A \cap B \cap C \cap D = 0$

$$A \cup B \cup C \cup D = A + B + C + D - (A \cap B) - (A \cap C) - (A \cap D) - (B \cap C) - (B \cap D) - (C \cap D) + (A \cap B \cap C) + (A \cap B \cap D) + (A \cap C \cap D) + (B \cap C \cap D) - (A \cap B \cap C \cap D)$$

$$A \cup B \cup C \cup D = 53 + 35 + 21 + 15 - 17 - 10 - 7 - 7 - 5 - 3 + 3 + 2 + 1 + 1 - 0 = 82$$

Banyaknya himpunan $H = 105$

Banyaknya bilangan yang tidak habis dibagi 2, 3, 5 atau 7 dari H adalah $105 - 82 = 23$

Karena ada 28 bilangan yang diambil, berdasarkan Pigeon Hole Principle maka ada terdapat sedikitnya 5 bilangan di antaranya yang habis dibagi 2, 3, 5 atau 7.

Karena ada 5 bilangan berdasarkan Pigeon Hole Principle maka terdapat sedikitnya 2 bilangan yang keduanya habis dibagi 2, 3, 5 atau 7.

Dapat disimpulkan bahwa terdapat dua bilangan yang keduanya mempunyai faktor persekutuan prima

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

224. Tentukan Faktor Persekutuan Terbesar dari bilangan-bilangan berbentuk $n^n - n$ untuk $n = 3, 5, 7, \dots$
(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 6 Nomor 4)

Solusi :

Untuk $n = 3 \rightarrow n^n - n = 24$

Maka bilangan terbesar yang membagi $n^n - n$ untuk $n = 3, 5, 7, \dots$ adalah 24.

$$n^n - n = n(n^{n-1} - 1)$$

Karena n ganjil maka $n - 1$ genap.

$$n^n - n = n(n^{2k} - 1) \rightarrow n^{2k} \text{ adalah bilangan genap.}$$

Karena n^{2k} genap maka n^{2k} akan berbentuk $3p$ atau $3p + 1$

Jika $n^{2k} = 3p$ maka 3 membagi $n^{2k} \rightarrow 3$ membagi $n \rightarrow n(n^{2k} - 1)$ habis dibagi 3.

Jika $n^{2k} = 3p - 1$ maka $n^{2k} - 1$ habis dibagi 3 $\rightarrow n(n^{2k} - 1)$ habis dibagi 3.

Maka $n^n - n$ habis dibagi 3.

Karena bilangan kuadrat berbentuk $8q, 8q + 1$, atau $8q + 4$ tetapi n^{2k} tidak mungkin berbentuk $8q$ atau $8q + 4$ sebab n ganjil. Maka n^{2k} berbentuk $8q + 1 \rightarrow n^{2k} - 1$ habis dibagi 8

Maka $n^n - n$ habis dibagi 8.

Karena $n^n - n$ habis dibagi 3 dan 8 maka $n^n - n$ habis dibagi 24.

Faktor Persekutuan Terbesar dari bilangan-bilangan berbentuk $n^n - n$ untuk $n = 3, 5, 7, \dots$ adalah 24.

225. Tentukan semua kemungkinan sisi-sisi segitiga ABC dengan sisi-sisinya membentuk 3 bilangan bulat berurutan serta $\angle C = 2\angle A$.

(Sumber : Mathematical Excalibur Volume 7 Nomor 1)

Solusi :

Misalkan $a = BC$, $b = AC$ dan $c = AB$

$$\sin C = \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\text{Dalil sinus } \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = 2 \cos A \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Dalil cosinus } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \dots\dots\dots (2)$$

Dari (1) dan (2) didapat :

$$c(bc) = a(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$(a - b)(c^2 - a^2 - ab) = 0$$

Karena $C > A$ maka $c > a$

Misalkan ketiga sisi tersebut adalah $n - 1$, n dan $n + 1$ maka ada 3 kasus :

- $a = n - 1$; $b = n$ dan $c = n + 1$
 $(n - 1 - n)((n + 1)^2 - (n - 1)^2 - n(n - 1)) = 0$
 $n^2 - 5n = 0 \rightarrow n = 5$
 $a = 4$; $b = 5$ dan $c = 6$
- $a = n - 1$; $b = n + 1$ dan $c = n$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$(n-1-n-1)(n^2-(n-1)^2-(n-1)(n+1))=0$$

$$-2n^2+4n=0 \rightarrow n=2$$

$a=1$; $b=3$ dan $c=2$ (tidak memenuhi syarat bahwa panjang salah satu selalu kurang dari jumlah kedua sisi yang lain)

- $a=n$; $b=n-1$ dan $c=n+1$

$$(n-n+1)((n+1)^2-n^2-n(n-1))=0$$

$$-n^2+3n+1=0 \text{ (tidak ada } n \text{ bulat yang memenuhi)}$$

Ketiga sisi segitiga (a, b, c) yang memenuhi hanya (4, 5, 6)

226. Diberikan $a, b, c \in$ bilangan real serta a dan $4a+3b+2c$ mempunyai tanda yang sama. Tunjukkan bahwa persamaan $ax^2+bx+c=0$ kedua akarnya tidak mungkin terletak pada interval (1, 2).

(Sumber : Diktat Tim Olimpiade Matematika Indonesia 1998 Bab Aljabar)

Solusi :

a dan $4a+3b+2c$ mempunyai tanda yang sama maka :

$$\frac{4a+3b+2c}{a} > 0$$

$$4+3\frac{b}{a}+2\frac{c}{a} > 0$$

Misalkan α dan β adalah akar-akar persamaan $ax^2+bx+c=0$ maka :

$$4-3(\alpha+\beta)+2\alpha\beta > 0$$

$$(\alpha-1)(\beta-2)+(\alpha-2)(\beta-1) > 0$$

Jika α dan β keduanya terletak pada interval (1, 2) maka $(\alpha-1)(\beta-2)$ dan $(\alpha-2)(\beta-1)$ keduanya bernilai negatif (kontradiksi)

Terbukti bahwa persamaan $ax^2+bx+c=0$ kedua akarnya tidak mungkin terletak pada interval (1, 2)

227. Jika $a \neq b$ dan jika persamaan-persamaan $x^2+ax+bc=0$ dan $x^2+bx+ac=0$ mempunyai tepat sebuah akar persekutuan, tunjukkan bahwa akar-akar yang lain dari kedua persamaan tersebut memenuhi persamaan $x^2+cx+ab=0$.

(Sumber : Diktat Tim Olimpiade Matematika Indonesia 1998 Bab Aljabar)

Solusi :

Misalkan akar persekutuan tersebut adalah p , akar yang lain dari $x^2+ax+bc=0$ dan $x^2+bx+ac=0$ masing-masing adalah q dan r maka :

$$p^2+ap+bc=0 \dots\dots\dots (1)$$

$$p^2+bp+ac=0 \dots\dots\dots (2)$$

$$(1)-(2) \rightarrow p(a-b)+c(b-a)=0 \rightarrow p(a-b)=c(a-b)$$

Karena $a \neq b$ maka $p=c$

$$\text{Karena } p+q=-a \text{ maka } q=-a-c \dots\dots\dots (3)$$

$$pq=bc \rightarrow cq=bc \rightarrow q=b \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{Karena } p+r=-b \text{ maka } r=-b-c \dots\dots\dots (5)$$

$$pr=ac \rightarrow cr=ac \text{ maka } r=a$$

$$q+r=b+(-b-c)=-c$$

$$qr=(b)(a)=ab$$

Persamaan kuadrat yang akar-akarnya q dan r adalah $x^2-(q+r)x+qr=0$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$x^2 + cx + ab = 0$$

Terbukti bahwa akar-akar yang lain dari kedua persamaan $x^2 + ax + bc = 0$ dan $x^2 + bx + ac = 0$ memenuhi persamaan $x^2 + cx + ab = 0$.

228. Selesaikan sistem persamaan :

$$x^2 - yz = 3$$

$$y^2 - xz = 4$$

$$z^2 - xy = 5$$

(Sumber : Diktat Tim Olimpiade Matematika Indonesia 1998 Bab Aljabar)

Solusi :

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 12 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 24$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) = 24 \rightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 24 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 - xz - (x^2 - yz) = 1 \rightarrow (y + x)(y - x) + z(y - x) = 1 \rightarrow (y - x)(x + y + z) = 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$z^2 - xy - (y^2 - xz) = 1 \rightarrow (z + y)(z - y) + x(z - y) = 1 \rightarrow (z - y)(x + y + z) = 1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$z^2 - xy - (x^2 - yz) = 2 \rightarrow (z + x)(z - x) + y(z - x) = 2 \rightarrow (z - x)(x + y + z) = 2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left(\frac{1}{x + y + z}\right)^2 + \left(\frac{1}{x + y + z}\right)^2 + \left(\frac{2}{x + y + z}\right)^2 = 24$$

$$(x + y + z)^2 = \frac{1}{4}$$

- Jika $x + y + z = \frac{1}{2}$

Dari persamaan (2), (3) dan (4)

$$y - x = 2$$

$$z - y = 2$$

$$z - x = 4$$

$$x + (2 + x) + z = \frac{1}{2} \rightarrow 2x + z = -\frac{3}{2} \rightarrow 2x + (4 + x) = -\frac{3}{2} \rightarrow x = -\frac{11}{6}$$

$$y = 2 + \left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$z = 4 + \left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{13}{6}$$

- Jika $x + y + z = -\frac{1}{2}$

$$y - x = -2$$

$$z - y = -2$$

$$z - x = -4$$

$$x + (-2 + x) + z = -\frac{1}{2} \rightarrow 2x + z = \frac{3}{2} \rightarrow 2x + (-4 + x) = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{11}{6}$$

$$y = -2 + \left(\frac{11}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$z = -4 + \left(\frac{11}{6}\right) = -\frac{13}{6}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Tripel (x, y, z) yang memenuhi adalah $\left(\left(-\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{13}{6}\right); \left(\frac{11}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{13}{6}\right)\right)$

229. Seorang pemain catur memiliki waktu 11 minggu untuk menyiapkan diri mengikuti sebuah turnamen. Ia memutuskan untuk berlatih sedikitnya satu permainan setiap hari, namun tidak lebih dari 12 permainan selama seminggu. Perhatikan bahwa ada beberapa hari berturut-turut yang selama itu pecatur tersebut berlatih tepat 21 permainan.

(Sumber : Diktat Tim Olimpiade Matematika Indonesia 1998 Bab Kombinatorika)

Solusi :

Misalkan a_r menyatakan banyaknya permainan catur dalam r hari pertama dengan $1 \leq r \leq 77$. Berdasarkan soal maka kita akan membuktikan bahwa terdapat $a_j - a_i = 21$.

Jelas bahwa $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{77}$.

Karena dalam 1 minggu grandmaster memainkan paling banyak 12 permainan maka $a_{77} \leq 12 \cdot 11 = 132$.

$$a_{77} + 21 \leq 153$$

Perhatikan 154 bilangan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, a_3 + 21, \dots, a_{77} + 21$ yang semuanya terletak antara 1 dan 153.

Karena banyaknya bilangan 154 sedangkan kemungkinan nilai bilangan hanya 153 maka berdasarkan Pigeon Hole Principle maka akan terdapat dua bilangan yang sama. Karena a_1, a_2, \dots, a_{77} semuanya berbeda maka akan terdapat a_j dan $a_i + 21$ yang sama.

$$a_j = a_i + 21 \rightarrow a_j - a_i = 21$$

Maka akan terdapat banyaknya total permainan hari ke- $(i + 1)$, $(i + 2)$, \dots , j tepat sama dengan 21.

230. Tunjukkan bahwa $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 99^5 + 100^5$ habis dibagi 10100, namun tidak habis dibagi 3.

(Sumber : Diktat Tim Olimpiade Matematika Indonesia 1998 Bab Teori Bilangan)

Solusi :

$a^n + b^n$ habis dibagi $a + b$ untuk a, b bulat dan n asli ganjil.

$$N = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 99^5 + 100^5 = (1^5 + 100^5) + (2^5 + 99^5) + (3^5 + 98^5) + \dots + (50^5 + 51^5)$$

Maka N habis dibagi 101

$$N = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 99^5 + 100^5 = (1^5 + 99^5) + (2^5 + 98^5) + (3^5 + 97^5) + \dots + (49^5 + 51^5) + 50^5 + 100^5$$

Karena 50^5 dan 100^5 keduanya habis dibagi 100 maka N habis dibagi 100

Karena 100 dan 101 relatif prima maka $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 99^5 + 100^5$ habis dibagi $100 \cdot 101 = 10100$.

$$N = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 99^5 + 100^5 = (2^5 + 100^5) + (3^5 + 99^5) + \dots + (50^5 + 52^5) + 51^5 + 1^5$$

Karena 102 dan 51 keduanya habis dibagi 3 maka $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 99^5 + 100^5$ dibagi 3 bersisa 1.

Terbukti bahwa $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 99^5 + 100^5$ habis dibagi 10100 tetapi tidak habis dibagi 3.

231. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli n dan semua bilangan asli d yang membagi $2n^2$, maka bilangan $n^2 + d$ bukan merupakan bilangan kuadrat sempurna.

(Sumber : www.olimpiadematematika.info)

Solusi :

Karena d membagi $2n^2$ maka $2n^2 = kd$ untuk k bilangan asli.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Andaikan $n^2 + d$ merupakan bilangan kuadrat sempurna maka $n^2 + d = x^2$ dengan $x \in$ bilangan asli.

$$k^2 n^2 + k^2 d = k^2 x^2 \rightarrow k^2 n^2 + 2kn^2 = k^2 x^2 \rightarrow (k^2 + 2k)n^2 = (kx)^2$$

Maka $k^2 + 2k$ haruslah merupakan bilangan kuadrat.

Tetapi $k^2 < k^2 + 2k < k^2 + 2k + 1$ untuk k bilangan asli.

$$k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$$

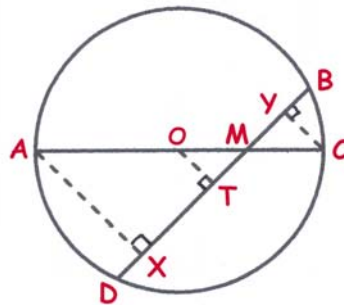
$k^2 + 2k$ berada di antara dua bilangan kuadrat berurutan sehingga tidak mungkin $k^2 + 2k$ bilangan kuadrat sempurna (kontradiksi)

Terbukti bahwa untuk setiap bilangan asli n dan semua bilangan asli d yang membagi $2n^2$, maka bilangan $n^2 + d$ bukan merupakan bilangan kuadrat sempurna.

232. ABCD adalah segiempat talibusur dan AC adalah diameter. Dari A dan C dibuat garis tegak lurus BD dan memotong BD di titik X dan Y dengan titik Y lebih dekat ke B. Buktikan $BY = XD$.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :



Misalkan O adalah pusat lingkaran dan perpotongan garis AC dan BD adalah titik M.

Misalkan juga panjang $OM = a$ maka $MC = r - a$ dengan r adalah jari-jari lingkaran.

Karena O pusat lingkaran dan BD tali busur serta garis melalui O memotong BD tegak lurus di T maka T adalah pertengahan BD.

Misal $\angle BMC = \theta$ maka :

$$YT = YM + MT = MC \cos \theta + OM \cos \theta$$

$$YT = r \cos \theta$$

$$TX = AO \cos \theta = r \cos \theta$$

$$YT = TX$$

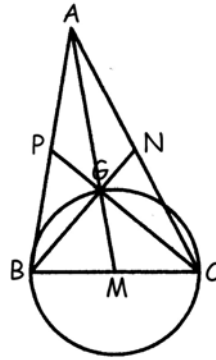
Karena $YT = TX$ sedangkan T adalah pertengahan BD maka $BY = XD$ (terbukti)

233. M adalah titik tengah sisi BC pada suatu $\triangle ABC$. Tunjukkan bahwa jika $AM : BC = 3 : 2$ maka median dari B dan C akan saling tegak lurus.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :

Kumpulan Soal dan Penyelesaian



Misal panjang $BC = 2a$ maka $AM = 3a$.

Misalkan juga titik berat $\triangle ABC$ ada di titik G maka $AG : GM = 2 : 1 \rightarrow GM = a$

Karena G adalah titik berat maka garis median dari titik B dan C akan melalui titik G .

Karena $MG = MB = MC = a$ maka titik B , G dan C terletak pada satu lingkaran dengan diameter $2a$ dan berpusat di M .

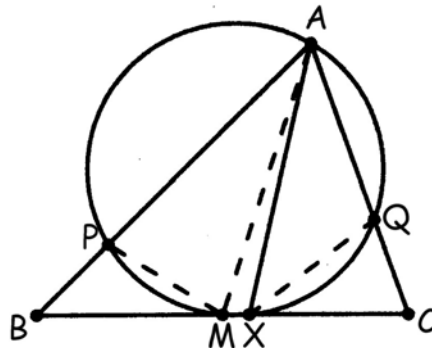
Karena BC adalah diameter dan G terletak pada lingkaran tersebut maka $\angle BGC = 90^\circ$.

Terbukti bahwa median dari titik B dan C akan saling tegak lurus.

234. Pada segitiga ABC , M adalah titik tengah BC dan garis bagi dari sudut A memotong BC di X . Sebuah lingkaran yang melalui titik A , X dan M memotong AB di P dan Q . Buktikan $BP = CQ$.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :



Misalkan $\angle XAC = \alpha$ maka $\angle XAB = \alpha$

Karena $AXMP$ adalah segiempat talibusur maka $\angle XAB + \angle XMP = 180^\circ \rightarrow \angle XAB = \angle PMB = \alpha$

Misalkan $\angle BXA = \beta$ maka karena $AXMP$ segiempat talibusur $\angle BXA + \angle APM = 180^\circ \rightarrow \angle BPM = \beta$

Karena $\angle BPM = \angle BXA$ dan $\angle PMB = \angle XAB$ maka $\triangle BPM$ dan $\triangle BXA$ sebangun.

$$\text{Akibatnya } \frac{BP}{BM} = \frac{BX}{BA}$$

Dengan cara yang sama didapat $\triangle CAM$ sebangun dengan $\triangle CXQ$ maka :

$$\frac{CX}{CQ} = \frac{CA}{CM} \rightarrow \frac{CX}{CA} = \frac{CQ}{CM}$$

Karena AX adalah garis bagi sudut A maka :

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CX} \text{ atau } \frac{BX}{BA} = \frac{CX}{AC} \text{ maka :}$$

$$\frac{BP}{BM} = \frac{CQ}{CM}$$

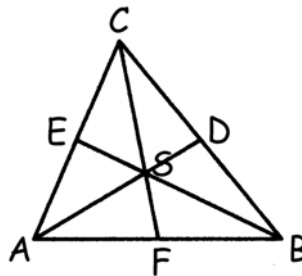
Karena M adalah pertengahan BC maka $BM = CM$. Maka :

$BP = CQ$ (terbukti)

235. S adalah titik yang terletak di dalam segitiga ABC sehingga luas ΔSAB , ΔSBC dan ΔSCA sama. Tunjukkan bahwa S adalah titik berat segitiga ABC.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :



Misalkan luas ΔPQR ditulis dengan $[PQR]$ dan garis AD, BE dan CF ketiganya melalui titik S.

ΔASC dan ΔAFC memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{CS}{CF} = \frac{[SAC]}{[AFC]}$$

ΔBSC dan ΔBFC memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{CS}{CF} = \frac{[SBC]}{[BFC]}$$

Maka
$$\frac{[SAC]}{[AFC]} = \frac{[SBC]}{[BFC]}$$

Karena $[SAC] = [SBC]$ maka $[AFC] = [BFC]$

ΔAFC dan ΔBFC memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{AF}{FB} = \frac{[AFC]}{[BFC]}$$

Karena $[AFC] = [BFC]$ maka $AF = FB$ yang artinya F adalah pertengahan AB. Maka CF adalah median.

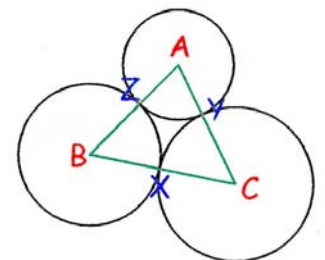
Dengan cara yang sama didapat bahwa BE dan AD keduanya adalah juga median.

Karena AD, BE dan CF berpotongan di titik S maka S adalah titik berat ΔABC .

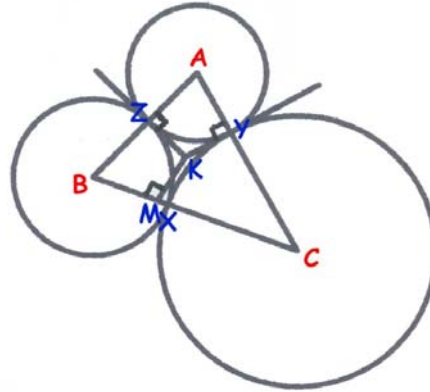
236. Tiga lingkaran dengan pusat di A, B dan C saling bersinggungan sepasang. Ketiga titik singgungnya adalah X, Y dan Z. Buktikan bahwa lingkaran yang melalui X, Y dan Z adalah lingkaran dalam segitiga ABC.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :



Kumpulan Soal dan Penyelesaian



Misalkan garis yang menyinggung lingkaran A dan B di titik Z dan garis yang menyinggung lingkaran A dan C di titik Y bertemu di titik K. Maka jelas bahwa $KZ \perp AB$ dan $KY \perp AC$ serta $KZ = KY$.

Misalkan juga titik M terletak pada BC sehingga $KM \perp BC$.

$$BC = BM + MC$$

$BC = BX + XC = R_B + R_C$. dengan R_B dan R_C masing-masing menyatakan jari-jari lingkaran B dan C.

$$\text{Maka } BC = BX + XC = BZ + CY \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Akibatnya } BM + MC = BZ + CY \dots\dots\dots (2)$$

$$(BM)^2 + (MK)^2 = (BK)^2 = (BZ)^2 + (KZ)^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$(MC)^2 + (MK)^2 = (CK)^2 = (CY)^2 + (KY)^2 = (CY)^2 + (KZ)^2 \dots\dots\dots (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4) didapat :

$$(BM)^2 - (MC)^2 = (BZ)^2 - (CY)^2$$

$$(BM + MC)(BM - MC) = (BZ + CY)(BZ - CY)$$

Karena $BM + MC = BZ + CY$ maka :

$$BM - MC = BZ - CY \dots\dots\dots (5)$$

(2) + (5) maka :

$$2(BM) = 2(BZ) \rightarrow BM = BZ \dots\dots\dots (6)$$

Karena $BZ = BX = R_B$ maka $BM = BX$. Artinya titik M dan K adalah titik yang sama $\rightarrow KX \perp BC$.

$$(KX)^2 = (BK)^2 - (BX)^2 = (BK)^2 - (BZ)^2 = (KZ)^2$$

$$KX = KZ = KY$$

Karena $KX = KZ = KY$ dan masing-masing tegak lurus sisi-sisi $\triangle ABC$ maka K adalah pusat lingkaran dalam $\triangle ABC$.

Terbukti bahwa lingkaran yang melalui X, Y dan X adalah lingkaran dalam segitiga ABC.

237. Buktikan bahwa untuk n bilangan bulat, $n^3 + 11n$ habis dibagi 6.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :

Alternatif 1 :

$$n^3 + 11n = n(n^2 + 11)$$

Jika n ganjil maka $n^2 + 11$ genap. Jika n genap maka $n(n^2 + 11)$ genap. Maka 2 membagi $n^3 + 11n$.

Sebuah bilangan akan masuk ke dalam salah satu dari $3k$, $3k + 1$ atau $3k - 1$.

Jika $n = 3k$ maka $n(n^2 + 11)$ habis dibagi 3

$$\text{Jika } n = 3k + 1 \text{ maka } n^3 + 11n \equiv (1)^3 + 11(1) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Jika } n = 3k - 1 \text{ maka } n^3 + 11n \equiv (-1)^3 + 11(-1) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Maka $n^3 + 11n$ habis dibagi 3

Karena 2 dan 3 relatif prima maka $n^3 + 11n$ habis dibagi $2 \cdot 3 = 6$ (terbukti)

Alternatif 2 :

$$n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = (n - 1)n(n + 1) + 12n$$

Karena $n - 1$, n dan $n + 1$ adalah 3 bilangan asli berurutan maka $(n - 1)n(n + 1)$ habis dibagi $3! = 6$.
 $12n$ habis dibagi 6.

Maka $n^3 + 11n$ habis dibagi 6 (terbukti)]

238. Buktikan bahwa jika p dan q bilangan ganjil maka $p^2 - q^2$ habis dibagi 8.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :

Alternatif 1 :

Bilangan kuadrat akan termasuk ke dalam salah satu dari bentuk $8k$, $8k + 1$ atau $8k + 4$.

Karena p dan q ganjil maka $p^2 = 8k_1 + 1$ dan $q^2 = 8k_2 + 1$

$$p^2 - q^2 = 8k_1 + 1 - (8k_2 + 1) = 8(k_1 - k_2)$$

Terbukti bahwa $p^2 - q^2$ habis dibagi 8.

Alternatif 2 :

$$p^2 - q^2 = (2a + 1)^2 - (2b + 1)^2 = 4a(a + 1) - 4b(b + 1)$$

$a(a + 1)$ dan $b(b + 1)$ keduanya adalah perkalian dua bilangan asli berurutan maka keduanya bilangan genap. Akibatnya $4a(a + 1)$ dan $4b(b + 1)$ keduanya habis dibagi 8.

Terbukti bahwa $p^2 - q^2$ habis dibagi 8.

239. Buktikan bahwa jika n bilangan ganjil maka $n^4 - 18n^2 + 17$ habis dibagi 64.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :

Alternatif 1 :

Bilangan kuadrat akan memenuhi salah satu bentuk $8k$, $8k + 1$ atau $8k + 4$.

Karena n^2 ganjil maka $n^2 = 8k + 1$.

$$n^4 - 18n^2 + 17 = (8k + 1)^2 - 18(8k + 1) + 17$$

$$n^4 - 18n^2 + 17 = 64k^2 + 16k + 1 - 144k - 18 + 17$$

$$n^4 - 18n^2 + 17 = 64k^2 - 128k$$

$$n^4 - 18n^2 + 17 = 64(k^2 - 2k)$$

Alternatif 2 :

Karena n ganjil maka $n = 2k + 1$

$$n^4 - 18n^2 + 17 = (2k + 1)^4 - 18(2k + 1)^2 + 17$$

$$n^4 - 18n^2 + 17 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 1 - 72k^2 - 72k - 18 + 17$$

$$n^4 - 18n^2 + 17 = 16k^4 + 32k^3 - 48k^2 - 64k$$

$$n^4 - 18n^2 + 17 = 16k^2(k^2 - 2k - 3) - 64k$$

$$n^4 - 18n^2 + 17 = 16k^2(k - 3)(k + 1) - 64k$$

Jika k genap maka k^2 habis dibagi 4 maka $64 \mid 16k^2 \rightarrow 64 \mid n^4 - 18n^2 + 17$

Jika k ganjil maka $k - 3$ dan $k + 1$ keduanya genap. Maka $4 \mid (k - 3)(k + 1) \rightarrow 64 \mid n^4 - 18n^2 + 17$.

Terbukti bahwa jika n bilangan ganjil maka $n^4 - 18n^2 + 17$ habis dibagi 64.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

240. Jika n bilangan bulat lebih dari 1, buktikan bahwa $n^6 - n^2$ habis dibagi 60.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :

Alternatif 1 :

$$n^6 - n^2 = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1)$$

$$n^6 - n^2 = n^2(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$$

Karena $n - 1$, n dan $n + 1$ adalah 3 bilangan asli berurutan maka $3! = 6$ membagi $n^6 - n^2$ atau 3 membagi $n^6 - n^2$.

Bilangan kuadrat akan berbetuk $4k$ atau $4k + 1$ maka salah satu dari n^2 atau $n^2 - 1$ habis dibagi 4. Akibatnya $n^6 - n^2$ habis dibagi 4.

Jika $n = 5k$ atau $5k + 1$ atau $5k + 4$ maka 5 akan membagi masing-masing n atau $n - 1$ atau $n + 1$.

$$\text{Jika } n = 5k + 2 \text{ maka } n^2 + 1 \equiv 2^3 + 1 \pmod{5} \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\text{Jika } n = 5k + 3 \text{ maka } n^2 + 1 \equiv 3^3 + 1 \pmod{5} \equiv 0 \pmod{5}$$

Maka 5 membagi $n^6 - n^2$.

Karena $n^6 - n^2$ habis dibagi 3, 4 dan 5 sedangkan 3, 4, 5 masing-masing relatif prima maka $n^6 - n^2$ habis dibagi $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Alternatif 2 :

$$n^6 - n^2 = n^2(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$$

$$n^6 - n^2 = n^2(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4 + 5)$$

$$n^6 - n^2 = n^2(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4) + 5n^2(n - 1)(n + 1)$$

$$n^6 - n^2 = n^2(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) + 5n^2(n - 1)(n + 1)$$

$n - 2$, $n - 1$, n , $n + 1$, dan $n + 2$ adalah 5 bilangan bulat berurutan berurutan maka $5! = 120$ akan membagi $n^2(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$ atau 60 membagi $n^2(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$.

Karena $n - 1$, n dan $n + 1$ adalah 3 bilangan asli berurutan maka $3! = 6$ membagi $n(n - 1)(n + 1)$ atau 3 membagi $5n^2(n - 1)(n + 1)$.

Bilangan kuadrat akan berbetuk $4k$ atau $4k + 1$ maka salah satu dari n^2 atau $n^2 - 1$ habis dibagi 4. Akibatnya $5n^2(n - 1)(n + 1)$ habis dibagi 4.

Karena $5n^2(n - 1)(n + 1)$ habis dibagi 3, 4 dan 5 sedangkan 3, 4, 5 masing-masing relatif prima maka $5n^2(n - 1)(n + 1)$ habis dibagi $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Terbukti bahwa $n^6 - n^2$ habis dibagi 60.

241. Buktikan bahwa $p^2 - 1$ habis dibagi 24 jika p bilangan prima tidak kurang dari 5.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :

Bilangan kuadrat akan termasuk ke dalam salah satu dari bentuk $8k$, $8k + 1$ atau $8k + 4$.

Karena p bilangan prima > 3 yang berarti p ganjil maka $p^2 = 8k + 1$.

$$p^2 - 1 = 8k + 1 - 1 = 8k \rightarrow 8 \mid p^2 - 1$$

$p - 1$, p dan $p + 1$ adalah 3 bulat bilangan berurutan. Salah satunya pasti habis dibagi 3. Karena p prima lebih dari 3 maka 3 tidak membagi p . Akibatnya 3 membagi $p - 1$ atau $p + 1$

$$p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1) \rightarrow 3 \mid p^2 - 1$$

Karena $p^2 - 1$ habis dibagi 3 dan 8 sedangkan 3 dan 8 relatif prima maka $24 \mid p^2 - 1$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

242. Tentukan bilangan dengan tepat memiliki 8 pembagi positif yang hasil kali pembagi-pembaginya sama dengan 331776.

(Sumber : Buku Competition Mathematics)

Solusi :

Misalkan bilangan tersebut = n dengan $d_1, d_2, d_3, \dots, d_8$ adalah pembagi-pembaginya serta berlaku bahwa $d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < \dots < d_8$. Jelas bahwa $d_1 = 1$ dan $d_8 = n$.

Ingat bahwa $d_1 \cdot d_8 = d_2 \cdot d_7 = d_3 \cdot d_6 = d_4 \cdot d_5 = n$. Maka :

$$d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 = n^4 = 331776 = 2^{12} \cdot 3^4$$

$$n = 2^3 \cdot 3$$

Maka bilangan tersebut adalah 24.

243. Jika x, y, z dan n adalah bilangan asli yang memenuhi $x^n + y^n = z^n$ maka buktikan bahwa x, y dan z semuanya lebih dari n .

(Sumber : Buku Problem Primer For The Olympiad)

Solusi :

Tanpa mengurangi keumuman soal andaikan bahwa $y \geq x$.

Jelas bahwa $z > x, y \rightarrow z \geq y + 1$

$$x^n = z^n - y^n = (z - y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + z^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1}) > (1)(y^{n-1} + y^{n-2}y + y^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1}) = n y^{n-1}$$

$$x^n > n y^{n-1} > n x^{n-1} \rightarrow x > n$$

Karena $y \geq x$ dan $z > x$ maka x, y dan z semuanya lebih dari n (terbukti)

244. Diberikan persamaan $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ yang mempunyai empat akar real positif. Buktikan bahwa :

i. $pr - 16s \geq 0$

ii. $q^2 - 36s \geq 0$

dengan tanda kesamaan terjadi bila keempat akarnya sama.

(Sumber : Buku Problem Primer For The Olympiad)

Solusi :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = q$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -r$$

$$x_1x_2x_3x_4 = s$$

$$pr = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$$

$$pr = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right) (x_1x_2x_3x_4) \dots\dots\dots (1)$$

Menurut ketaksamaan AM-GM maka :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}} \dots\dots\dots (3)$$

Tanda kesamaan terjadi bila $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$

Dari persamaan (2) dan (3) didapat :

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right) \geq 16$$

$$pr = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right) (x_1 x_2 x_3 x_4) \geq 16s$$

$$pr - 16s \geq 0 \text{ (terbukti)}$$

Menurut ketidaksamaan AM-GM maka :

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \geq 6 \cdot \sqrt[6]{(x_1 x_2 x_3 x_4)^3} = 6 \cdot (x_1 x_2 x_3 x_4)^{1/2}$$

$$p \geq 6 \cdot s^{1/2}$$

$$p^2 - 36s \geq 0 \text{ (terbukti)}$$

245. Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada bilangan bulat tak negatif. Diketahui bahwa :

i. $x - f(x) = 19 \left\lfloor \frac{x}{19} \right\rfloor - 90 \left\lfloor \frac{f(x)}{90} \right\rfloor$ untuk semua bilangan bulat tak negatif x

ii. $1900 < f(1990) < 2000$

Tentukan semua kemungkinan nilai $f(1990)$. (Di sini tanda $[z]$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan z . Contoh $[3,145] = 3$)

(Sumber : Buku Problem Primer For The Olympiad)

Solusi :

$$1990 - f(1990) = 19 \left\lfloor \frac{1990}{19} \right\rfloor - 90 \left\lfloor \frac{f(1990)}{90} \right\rfloor \quad \dots\dots\dots (1)$$

Misalkan $f(1990) = 90k + c$ dengan $0 \leq c \leq 89$

$$\left\lfloor \frac{90k + c}{90} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{c}{90} \right\rfloor = k \text{ mengingat bahwa } 0 \leq c < 90$$

Persamaan (1) akan menjadi :

$$1990 - 90k - c = 1976 - 90k$$

$$c = 14$$

$$1900 < f(1990) < 2000 \rightarrow 1900 < 90k + 14 < 2000$$

$$1886 < 90k < 1986$$

$$21 \leq k \leq 22$$

$$\text{Jika } k = 21 \text{ maka } f(1990) = 90 \cdot 21 + 14 = 1904$$

$$\text{Jika } k = 22 \text{ maka } f(1990) = 90 \cdot 22 + 14 = 1994$$

Semua nilai $f(1990)$ yang mungkin adalah 1904 atau 1994

246. Jika a , b dan c bilangan bulat tunjukkan bahwa $abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$ habis dibagi 7.

(Sumber : Buku Problem Primer For The Olympiad)

Solusi :

$$\text{Misalkan } N = abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$$

Pangkat tiga dari suatu bilangan bulat jika dibagi 7 akan bersisa 0, 1 atau 6

- Jika salah satu a , b atau c habis dibagi 7 maka N habis dibagi 7 (terbukti)

- Jika tidak ada satupun a , b dan c yang habis dibagi 7.

Maka a^3 , b^3 dan c^3 jika dibagi 7 akan bersisa 1 atau 6.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Karena hanya ada dua kemungkinan jika dibagi 7, maka sesuai *Pigeon Hole Principle* sedikitnya dua di antara a^3 , b^3 dan c^3 memiliki sisa yang sama jika dibagi 7.

Akibatnya sedikitnya satu di antara $(a^3 - b^3)$, $(b^3 - c^3)$ atau $(c^3 - a^3)$ habis dibagi 7.

Maka $N = abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$ habis dibagi 7 (terbukti)

247. Jika $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ dengan a, b, c adalah bilangan asli dan $\text{FPB}(a, b \text{ dan } c) = 1$, buktikan bahwa $a + b$ adalah bilangan kuadrat.

(Sumber : Buku Problem Primer For The Olympiad)

Solusi :

Karena a, b dan c ketiga bilangan asli maka $a > c$ dan $b > c$.

Misalkan $\text{FPB}(a, b) = d$ sehingga $a = da_1$ dan $b = db_1 \rightarrow \text{FPB}(a_1, b_1) = 1$

Karena $\text{FPB}(a, b, c) = 1$ maka $\text{FPB}(da_1, db_1, c) = 1 \rightarrow \text{Maka } \text{FPB}(d, c) = 1$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \rightarrow \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \right) = \frac{1}{c} \rightarrow \frac{a_1 + b_1}{a_1 b_1} = \frac{d}{c}$$

Karena $\text{FPB}(a_1, b_1) = 1$ maka $\text{FPB}(a_1 + b_1, a_1 b_1) = 1 \rightarrow a_1 + b_1 = d$ dan $a_1 b_1 = c$

$$a + b = da_1 + db_1 = d(a_1 + b_1) = d^2$$

Maka $a + b$ merupakan bilangan kuadrat (terbukti).

Lihat juga soal British Mathematical Olympiad 1998 Round 2.

248. Jika a, b dan c adalah bilangan ganjil, buktikan bahwa akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ tidak dapat merupakan bilangan rasional.

(Sumber : Buku Problem Primer For The Olympiad)

Solusi :

Andaikan bahwa terdapat akar yang merupakan bilangan rasional yaitu $\frac{p}{q}$ dengan p dan q relatif prima.

$$a \left(\frac{p}{q} \right)^2 + b \left(\frac{p}{q} \right) + c = 0 \rightarrow ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Karena $bpq + cq^2$ habis dibagi q maka ap^2 juga habis dibagi q . Karena p dan q relatif prima maka a habis dibagi $q \rightarrow a = a_1 q$.

Karena $ap^2 + bpq$ habis dibagi p maka cq^2 juga habis dibagi p . Karena p dan q relatif prima maka c membagi $p \rightarrow c = c_1 p$.

Karena a dan c keduanya ganjil maka a_1, c_1, p dan q semuanya ganjil

$$(a_1 q)p^2 + bpq + (c_1 p)q^2 = 0 \rightarrow a_1 p + b + c_1 q = 0$$

a_1, c_1, p, q dan b semuanya ganjil maka $a_1 p + b + c_1 q$ ganjil sehingga tidak mungkin $a_1 p + b + c_1 q = 0$. Kontradiksi.

Terbukti bahwa akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ tidak dapat merupakan bilangan rasional.

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

249. Jika a dan b bilangan real positif yang memenuhi $a + b = 1$ buktikan bahwa $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

(Sumber : Buku Problem Primer For The Olympiad)

Solusi :

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} + 4 = (a+b)^2 - 2ab + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{2}{ab} + 4$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = 1 - 2ab + \left(\frac{1}{ab}\right)^2 - \frac{2ab}{(ab)^2} + 4 = 5 - 2ab + \frac{1-2ab}{(ab)^2}$$

Dengan AM-GM didapat $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - 2ab \geq 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq 5 - 2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1/4}\right)^2 = 5 - \frac{1}{2} + 8 = \frac{25}{2}$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

250. Diketahui a, b dan c bilangan-bilangan real yang memenuhi $a + b + c = 1$ dan $a, b, c \leq 1$. Buktikan bahwa $a^2 + b^2 + c^2 > abc$.

(Sumber : Jurnal Mahkota Matematika Edisi 1, *Problem Solving*)

Solusi :

Tidak mungkin ketiga bilangan a, b dan c semuanya ≤ 0 sebab tidak akan memenuhi $a + b + c = 1$.

- Jika terdapat tepat satu di antara a, b dan c bernilai ≤ 0
maka $abc \leq 0$
Berdasarkan $a + b + c = 1$ maka tidak mungkin ketiga a, b dan c semuanya 0
Maka $a^2 + b^2 + c^2 > 0$
 $a^2 + b^2 + c^2 > abc$ (terbukti)
- Jika terdapat tepat dua di antara a, b dan c bernilai ≤ 0 maka $a + b + c = 1$ hanya dapat dipenuhi jika salah satu a, b dan $c = 1$ dan yang lainnya = 0. Maka $abc = 0$
 $a^2 + b^2 + c^2 = 1 > abc$ (terbukti)
- Jika ketiga bilangan a, b dan $c \geq 0$

Dengan ketidaksamaan AM-GM

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}(abc)$$

Karena bilangan a, b dan c tidak mungkin ketiganya 0, maka :

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} (abc) \geq 9abc > abc \text{ (terbukti)}$$

251. Misalkan a_1, a_2, \dots, a_n barisan aritmatika di mana a_1 dan a_n adalah bilangan asli dan $n - 1$ adalah bilangan prima. Buktikan bahwa jika a_k bilangan asli untuk suatu k , $2 \leq k \leq n - 1$, maka a_i bilangan asli untuk semua i , $1 \leq i \leq n$.

(Sumber : Jurnal Mahkota Matematika Edisi 1, *Problem Solving*)

Solusi :

Misalkan selisih dua bilangan berurutan adalah b

$$b = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_k - a_1}{k - 1}$$

$$\frac{a_n - a_1}{a_k - a_1} = \frac{n - 1}{k - 1}$$

Karena $n - 1$ prima dan $n \neq k$ maka $\frac{n - 1}{k - 1}$ adalah pecahan yang paling sederhana.

Karena $a_n - a_1$ dan $a_k - a_1$ keduanya bilangan bulat maka $a_n - a_1 = m(n - 1)$ dan $a_k - a_1 = m(k - 1)$ untuk suatu bilangan bulat m .

$$m = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = b$$

Maka selisih dua bilangan berurutan adalah bilangan bulat.

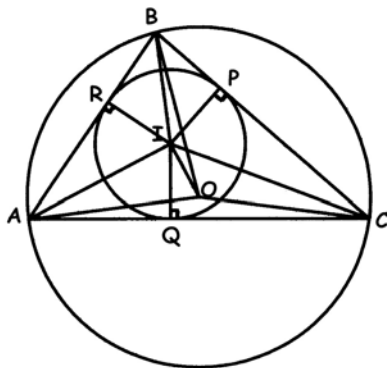
Grafik n terhadap a_n merupakan garis lurus

Karena a_1 dan a_n bilangan asli maka a_i bilangan asli untuk $1 \leq i \leq n$ (terbukti)

252. Misalkan ABC segitiga yang tidak sama kaki. Titik O dan titik I berturut-turut adalah titik pusat lingkaran luar dan lingkaran dalam segitiga ABC . Buktikan bahwa $\angle AIO = 90^\circ$ jika dan hanya jika $AB + AC = 2BC$.

(Sumber : Jurnal Mahkota Matematika Edisi 1, *Problem Solving*)

Solusi :



Misalkan r dan R secara berurutan menyatakan jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar segitiga ABC .

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} r(a + b + c) = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

$$r = \frac{2\text{Luas}\triangle ABC}{a + b + c}$$

$$R = \frac{abc}{4\text{Luas}\triangle ABC}$$

$$2Rr(a + b + c) = abc$$

Ada dua hal yang harus dibuktikan.

- Akan dibuktikan bahwa jika $\angle AIO = 90^\circ$ maka $b + c = 2a$

Alternatif 1 :

Misalkan $\angle OAC = \beta$ maka $\angle AOC = 180^\circ - 2\beta = 2B \rightarrow B + \beta = 90^\circ$

Pada $\triangle AIO$ berlaku

$$\frac{AI}{AO} = \cos\left(\frac{1}{2}A - \beta\right)$$

Syarat $AI \neq AO$ maka $A \neq 2\beta$

$$A \neq 180^\circ - 2B$$

$$180^\circ - B - C \neq 180^\circ - 2B$$

$B \neq C$ ($\triangle ABC$ tidak sama kaki)

$$\frac{r}{R \sin \frac{1}{2}A} = \sin\left(\frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}B\right)$$

$$\frac{r}{R \cos \frac{1}{2}(B + C)} = \cos \frac{1}{2}(B - C)$$

$$\frac{2r}{R} = \cos B + \cos C$$

$$\frac{2r^2}{Rr} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$2\left(\frac{2\text{Luas}\triangle ABC}{a + b + c}\right)^2 \left(\frac{2(a + b + c)}{abc}\right) = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc}$$

Dengan Rumus Heron didapat :

$$2(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) = b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$2(a^2 - (b - c)^2)(b + c - a) = a^2(b + c) + (b^2 - c^2)(c - b)$$

$$2(a^2 - (b - c)^2)(b + c - a) = (b + c)(a^2 - (b - c)^2)$$

$$(a^2 - (b - c)^2)(b + c - 2a) = 0$$

$a = b - c$ dan $a = c - b$ tidak memenuhi sebab akan membuat panjang salah satu sisi segitiga sama dengan jumlah panjang kedua sisi yang lain (kontradiksi)

$b + c = 2a$ (terbukti)

Alternatif 2 :

Misalkan AC terletak pd sb X dengan koordinat $A(0,0)$. Maka $I(r \cot \frac{1}{2}A, r)$ dan $O(R \sin B, R \cos B)$

$$\overrightarrow{AI} = r \cot \frac{1}{2}A \hat{i} + r \hat{j}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\vec{AO} = R \sin B \hat{i} + R \cos B \hat{j}$$

$$\vec{IO} = \left(R \sin B - r \cot \frac{1}{2} A \right) \hat{i} + (R \cos B - r) \hat{j}$$

Misalkan proyeksi vektor \vec{AO} terhadap \vec{AI} adalah \vec{c} maka :

$$\vec{c} = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{AI}}{|\vec{AI}|^2} \vec{AI}$$

$$\vec{c} = \frac{Rr \cot \frac{1}{2} A \sin B + Rr \cos B}{r^2 \left(\cot^2 \frac{1}{2} A + 1 \right)} \vec{AI}$$

$$\vec{c} = \left(\frac{R \sin A \sin B}{2r} + \frac{Rr(1 - \cos A) \cos B}{2r^2} \right) \vec{AI}$$

$$2R \sin A = a ; 2R \sin B = b$$

$$\vec{c} = \left(\frac{ab(a+b+c)}{4abc} + \frac{abc}{4(a+b+c)} \left(\frac{a+b+c}{2Luas\Delta ABC} \right)^2 \left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} \right) \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \right) \right) \vec{AI}$$

$$\vec{c} = \left(\frac{(a+b+c)}{4c} + \frac{(2bc-b^2-c^2+a^2)(a^2+c^2-b^2)}{4c(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \right) \vec{AI}$$

Karena \vec{IO} tegak lurus \vec{AI} maka $\vec{c} = \vec{AI}$.

$$\left(\frac{(a+b+c)}{4c} + \frac{(2bc-b^2-c^2+a^2)(a^2+c^2-b^2)}{4c(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \right) = 1$$

$$\frac{a+b+c}{4c} + \frac{(a^2-(b-c)^2)(a^2+c^2-b^2)}{4c(b+c-a)(a^2-(b-c)^2)} = 1$$

Karena panjang salah satu sisi segitiga tidak akan sama dengan jumlah kedua sisi yang lain maka $a+b-c \neq 0$; $a+c-b \neq 0$; $b+c-a \neq 0$

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a) + (a^2+c^2-b^2) - 4c(b+c-a)}{4c(b+c-a)} = 0$$

$$b^2 + 2bc + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 - 4bc - 4c^2 + 4ac = 0$$

$$4ac = 2bc + 2c^2$$

$$b+c = 2a \text{ (terbukti)}$$

- Akan dibuktikan bahwa jika $b+c = 2a$ maka $\angle AIO = 90^\circ$
 Karena $b+c = 2a$ maka c, a dan b merupakan barisan aritmatika.
 Misal $c = a - k$ dan $b = a + k$ untuk suatu bilangan real k
 Misal $\angle OBC = \alpha$ maka $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha = 2A \rightarrow A + \alpha = 90^\circ$

Alternatif 1 :

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$(AI)^2 = \frac{r^2}{\left(\sin \frac{1}{2} A\right)^2}$$

$$(AI)^2 = \left(\frac{2Luas\Delta ABC}{a+b+c}\right)^2 \left(\frac{2}{1-\cos A}\right)$$

$$(AI)^2 = \left(\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a+b+c}\right) \left(\frac{bc}{2bc-b^2-c^2+a^2}\right)$$

$$(AI)^2 = \left(\frac{(a+2k)(a-2k)a}{3a}\right) \left(\frac{(a^2-k^2)}{2(a^2-k^2)-2a^2-2k^2+a^2}\right)$$

$$(AI)^2 = \frac{a^2-k^2}{3} \dots\dots\dots (1)$$

Alternatif 1a :

Pada $\Delta B I O$ berlaku :

$$(IO)^2 = (BI)^2 + (BO)^2 - 2(BI)(BO) \cos \left(\frac{1}{2} B - \alpha\right)$$

$$(IO)^2 = \left(\frac{r}{\sin \frac{1}{2} B}\right)^2 + R^2 - 2\left(\frac{r}{\sin \frac{1}{2} B}\right) R \sin \left(\frac{1}{2} (A+B) + \frac{1}{2} A\right)$$

$$2\left(\sin \frac{1}{2} B\right)^2 (IO)^2 = 2R^2 \left(\sin \frac{1}{2} B\right)^2 - \left(4Rr \left(\sin \frac{1}{2} B\right) \left(\cos \frac{1}{2} (A-C)\right) - 2r^2\right)$$

$$(1-\cos B)(IO)^2 = R^2 (1-\cos B) - \left(4Rr \left(\cos \frac{1}{2} (A+C)\right) \left(\cos \frac{1}{2} (A-C)\right) - 2r^2\right)$$

$$\left(\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2ac}\right)(IO)^2 = R^2 \left(\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2ac}\right) - \left(2Rr(\cos A + \cos C) - 2r^2\right)$$

$$\left(\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2ac}\right)(IO)^2 = R^2 \left(\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2ac}\right) - \left(\frac{abc}{a+b+c} \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) - 2\left(\frac{2Luas\Delta ABC}{a+b+c}\right)^2\right)$$

Gunakan rumus Heron dan substitusikan $c = a - k$ dan $b = a + k$

$$\left(\frac{a+2k}{2(a-k)}\right)(IO)^2 = R^2 \left(\frac{a+2k}{2(a-k)}\right) - \left(\frac{a^2-k^2}{3} \left(\frac{a^2+2k^2}{2(a^2-k^2)} + \frac{a+4k}{2(a+k)}\right) - \frac{(a+2k)(a-2k)}{6}\right)$$

$$\left(\frac{a+2k}{2(a-k)}\right)(IO)^2 = R^2 \left(\frac{a+2k}{2(a-k)}\right) - \left(\frac{a^2+2k^2+(a+4k)(a-k)-(a^2-4k^2)}{6}\right)$$

$$(IO)^2 = R^2 - \frac{(a^2-k^2)}{3} \dots\dots\dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) serta mengingat $AO = R$ maka

$$(IO)^2 = (AO)^2 - (AI)^2$$

Berdasarkan dalil pitagoras maka $\Delta A I O$ siku-siku di I

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$\angle AIO = 90^\circ$ (terbukti)

Alternativa 1b :

Misalkan AC terletak pada sumbu X dengan koordinat A(0,0). Maka I ($r \cot \frac{1}{2}A$, r) dan O($R \sin B$, $R \cos B$)

$$\overrightarrow{AI} = r \cot \frac{1}{2}A \hat{i} + r \hat{j}$$

$$\overrightarrow{AO} = R \sin B \hat{i} + R \cos B \hat{j}$$

$$\overrightarrow{IO} = \left(R \sin B - r \cot \frac{1}{2}A \right) \hat{i} + (R \cos B - r) \hat{j}$$

$$|\overrightarrow{IO}|^2 = \left(R \sin B - r \cot \frac{1}{2}A \right)^2 + (R \cos B - r)^2$$

$$|\overrightarrow{IO}|^2 = R^2 - 2Rr \sin B \cot \frac{1}{2}A + r^2 \left(1 + \cot^2 \frac{1}{2}A \right) - 2Rr \cos B$$

$$|\overrightarrow{IO}|^2 = R^2 - \left(\frac{abc}{a+b+c} \right) \sin B \cot \frac{1}{2}A + \left(\frac{2\text{Luas}\Delta ABC}{a+b+c} \right)^2 \left(\frac{2}{1-\cos A} \right) - \left(\frac{abc}{a+b+c} \right) \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \right)$$

$$|\overrightarrow{IO}|^2 = R^2 - \left(\frac{abc}{a+b+c} \right) \left(\frac{\sin B \sin A}{1-\cos A} \right) + \left(\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2(a+b+c)(1-\cos A)} \right) - \left(\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2(a+b+c)} \right) \text{ Denga}$$

n mengingat bahwa $2R \sin A = a$; $2R \sin B = b$; serta $R^2 = \left(\frac{abc}{4\text{Luas}\Delta ABC} \right)^2$ maka :

$$|\overrightarrow{IO}|^2 = R^2 - \left(\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4c} \right) \left(\frac{2bc}{2bc-b^2-c^2+a^2} \right) + \left(\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)bc}{(a+b+c)(2bc-b^2-c^2+a^2)} \right) - \left(\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2(a+b+c)} \right)$$

$$|\overrightarrow{IO}|^2 = R^2 - \frac{b(b+c-a)}{2} + \frac{bc(b+c-a)}{a+b+c} - \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2(a+b+c)}$$

Substitusikan $b = a + k$ dan $c = a - k$

$$|\overrightarrow{IO}|^2 = R^2 - \frac{a(a+k)}{2} + \frac{(a^2-k^2)}{3} - \frac{(a+k)(a-4k)}{6}$$

$$(IO)^2 = R^2 - \frac{(a^2-k^2)}{3} \dots\dots\dots (3)$$

Dari persamaan (1) dan (3) serta mengingat $AO = R$ maka

$$(IO)^2 = (AO)^2 - (AI)^2$$

Berdasarkan dalil pitagoras maka ΔAIO siku-siku di I

$\angle AIO = 90^\circ$ (terbukti)

Alternatif 2 :

$$\overrightarrow{AI} = r \cot \frac{1}{2}A \hat{i} + r \hat{j}$$

$$\overrightarrow{AO} = R \sin B \hat{i} + R \cos B \hat{j}$$

$$\overrightarrow{IO} = \left(R \sin B - r \cot \frac{1}{2}A \right) \hat{i} + (R \cos B - r) \hat{j}$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

Misalkan proyeksi vektor \overrightarrow{AO} terhadap \overrightarrow{AI} adalah \vec{c} maka :

$$\vec{c} = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AI}}{|\overrightarrow{AI}|^2} \overrightarrow{AI}$$

$$\vec{c} = \frac{Rr \cot \frac{1}{2} A \sin B + Rr \cos B}{r^2 \left(\cot^2 \frac{1}{2} A + 1 \right)} \overrightarrow{AI}$$

$$\vec{c} = \left(\frac{R \sin A \sin B}{2r} + \frac{Rr(1 - \cos A) \cos B}{2r^2} \right) \overrightarrow{AI}$$

$$2R \sin A = a ; 2R \sin B = b$$

$$\vec{c} = \left(\frac{ab(a+b+c)}{4abc} + \frac{abc}{4(a+b+c)} \left(\frac{a+b+c}{2Luas\Delta ABC} \right)^2 \left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \right) \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right) \right) \overrightarrow{AI}$$

$$\vec{c} = \left(\frac{(a+b+c)}{4c} + \frac{(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{4c(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \right) \overrightarrow{AI}$$

Substitusikan $b = a + k$ dan $c = a - k$

$$\vec{c} = \left(\frac{3a}{4(a-k)} + \frac{(2a^2 - 2k^2 - 2a^2 - 2k^2 + a^2)(a^2 - 4ak)}{4(a-k)(a+2k)(a-2k)(a)} \right) \overrightarrow{AI}$$

$$\vec{c} = \left(\frac{3a}{4(a-k)} + \frac{a-4k}{4(a-k)} \right) \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI}$$

Karena $\vec{c} = \overrightarrow{AI}$ maka OI tegak lurus AI

$\angle AIO = 90^\circ$ terbukti.

253. Misalkan a dan b bilangan asli demikian sehingga a + b habis membagi ab. Buktikan bahwa gcd(a, b) bilangan prima jika dan hanya jika a + b kuadrat dari suatu bilangan prima.

(Sumber : Jurnal Mahkota Matematika Edisi 1, *Problem Solving*)

Solusi :

Karena a + b habis membagi ab maka $m(a + b) = ab$ untuk suatu bilangan asli m

Ada dua hal yang perlu dibuktikan

- Akan dibuktikan bahwa jika FPB(a, b) bilangan prima maka a + b kuadrat suatu bilangan prima

Misal $FPB(a, b) = p$ untuk suatu bilangan prima p

Maka $a = pa_1$ dan $b = pb_1$ dengan $FPB(a_1, b_1) = 1$

Karena $\frac{a_1 + b_1}{a_1} = 1 + \frac{b_1}{a_1}$ tidak bulat untuk $a_1 \neq 1$ sedangkan $\frac{a_1 b_1}{a_1} = b_1$ bulat maka $FPB(a_1 +$

$b_1, a_1 b_1) = 1$

Dari $m(a + b) = ab$ didapat :

$$mp(a_1 + b_1) = p^2 a_1 b_1$$

Kumpulan Soal dan Penyelesaian

$$\frac{a_1 + b_1}{a_1 b_1} = \frac{p}{m}$$

Karena $\text{FPB}(a_1 + b_1, a_1 b_1) = 1$ dan p bilangan prima maka $\frac{a_1 + b_1}{a_1 b_1}$ dan $\frac{p}{m}$ masing-masing adalah

pecahan yang paling sederhana yang hanya akan dipenuhi jika $a_1 + b_1 = p$ dan $a_1 b_1 = m$

$$a + b = p(a_1 + b_1)$$

$$a + b = p^2 \text{ (terbukti)}$$

- Akan dibuktikan bahwa jika $a + b$ kuadrat suatu bilangan prima maka $\text{FPB}(a, b)$ bilangan prima

$$a + b = p^2 \text{ untuk suatu bilangan prima } p$$

$$\text{Misal } \text{FPB}(a, b) = n \text{ maka } a + b = n(a_1 + b_1) = p^2$$

$$\text{Maka } n \text{ membagi } p^2 \rightarrow n = 1, p \text{ atau } p^2$$

Tidak mungkin $n = p^2$ sebab akan membuat $a_1 + b_1 = 1 < 2$

$$\text{Jika } n = 1$$

$$mn(a_1 + b_1) = n^2 a_1 b_1$$

$$m(a_1 + b_1) = a_1 b_1$$

$$m = \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1}$$

Karena $\text{FPB}(a_1 + b_1, a_1 b_1) = 1$ maka tidak mungkin $\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1}$ bulat.

Maka $n = \text{FPB}(a, b) = p$ (terbukti)