Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan November 2016 2016

XX–XX November 2016

Berkas Soal

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Misalkan $P(x) = 4x - 6$ untuk setiap bilangan real x. Tentukan jumlah semua solusi real x yang memenuhi $P(P(P(x))) = x$.

2. Diberikan jajar genjang $ABCD$ dengan M adalah titik tengah BC. Apabila MD memotong AC di E dan $AC = 78$, tentukan panjang AE.

3. Tentukan bilangan asli n terkecil sedemikian sehingga untuk setiap pemilihan n bilangan dari himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$, dapat ditemukan dua buah bilangan yang faktor persekutuan terbesarnya adalah 1.

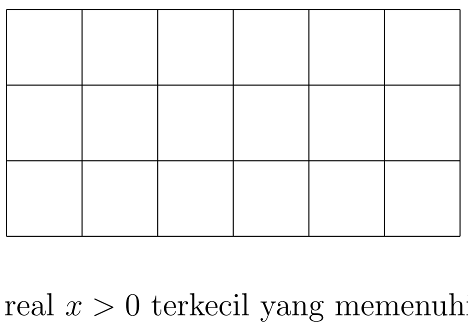
4. Sebuah bilangan asli tiga digit $\overline{abc}$ (a, b, dan c tidak harus saling berbeda) tidak memliki digit nol. Diketahui bahwa 7 habis membagi ketiga bilangan tiga digit $\overline{abc}, \overline{bca}$, dan $\overline{cab}$. Tentukan hasil penjumlahan semua bilangan tiga digit $\overline{abc}$ dengan sifat tersebut.

5. Tentukan jumlah semua akar real dari persamaan
$$x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 32x + 16 = 0.$$

6. Sebuah bilangan asli N hanya memiliki 2 dan 3 sebagai faktor primanya. Jika hasil penjumlahan dari semua pembagi positif dari N adalah 819, tentukan bilangan N tersebut.

7. Diberikan dua lingkaran ω_1 dan ω_2 yang sepusat. Jari-jari ω_1 adalah 4, sedangkan jari-jari ω_2 adalah 6. Tali busur AB dengan panjang 1 dari ω_1 diperpanjang hingga memotong ω_2 di titik C dan D. Tentukan panjang CD.

8. Sebuah papan berukuran 3×6 pada gambar di bawah ini akan ditutupi oleh 15 domino, yaitu papan yang berukuran 1×2 atau 2×1, sedemikian sehingga seluruh papan tertutupi. Tentukan banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut.



9. Tentukan nilai bilangan real $x > 0$ terkecil yang memenuhi
$$a^x + b^x + c^x + d^x \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$
untuk sembarang bilangan real positif a, b, c, dan d yang memenuhi $abcd = 1$.

10. Terdapat 15 buah bola yang diberi nomor $1, 2, 3 \ldots, 15$. Kelima belas bola itu akan dibagi ke dalam tiga buah kotak tidak identik sedemikian sehingga setiap kotak hanya memuat bola benomor ganjil atau bola bernomor genap (suatu kotak boleh saja kosong). Tentukan banyaknnya cara untuk melakukan hal tersebut.

11. Tentukan hasil penjumlahan semua bilangan asli yang kurang dari 2016 dan relatif prima dengan 2016.

12. Diberikan $\triangle ABC$ dengan lingkaran dalam yang berpusat di I dan menyinggung BC, CA, dan AB di titik D, E, F, berturut-turut. Misalkan garis AI memotong DE dan DF di titik X dan Y, berturut-turut. Jika $AB = 200$, $BC = 250$, dan $CA = 300$, tentukan panjang jari-jari lingkaran luar $\triangle DXY$.

13. Untuk setiap bilangan asli n, definisikan $f(n)$ sebagai banyaknya pasangan terurut bilangan asli (x, y) yang saling relatif prima dan memenuhi $x \times y = n$. Sebagai contoh, $f(12) = 4$ karena $12 = 1 \times 12 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 12 \times 1$. Hitunglah nilai dari
$$\sum_{d \in S} f(d),$$
dengan $S = \{d \in \mathbb{N} : d \text{ habis membagi } 2016\}$.

14. Untuk setiap bilangan asli n, definisikan $\varphi(n)$ sebagai banyaknya bilangan asli yang tidak lebih dari n dan relatif prima dengan n. Selanjutnya, definisikan juga $d(n)$ sebagai banyaknya pembagi positif dari n. Tentukan hasil penjumlahan semua bilangan asli n yang memenuhi persamaan
$$\varphi(n) = 2d(n).$$

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Lima puluh siswa mengikuti suatu kompetisi matematika yang terdiri dari lima soal. Jawaban benar pada soal ke-n akan memperoleh n poin, sedangkan jawaban salah (atau kosong) pada soal ke-n akan memperoleh $-n$ poin.

   (a) Buktikan bahwa pasti terdapat dua siswa yang nilainya sama.

   Petunjuk: Manfaatkan Prinsip Sangkar Merpati. Hitung banyaknya kemungkinan jawaban siswa.

   (b) Buktikan bahwa tidak ada dua siswa yang selisih nilainya 5. Secara umum, apakah benar bahwa tidak dua siswa yang selisih nilainya merupakan bilangan ganjil?

   Catatan: Anda tidak bisa menunjukkan pernyataan di atas hanya dengan mencoba-coba untuk membuat kondisi menjadi selisih 5, kemudian mendapatkan bahwa hal tersebut tidak mungkin terjadi, dan langsung menyimpulkan bahwa tidak ada dua siswa yang selisih nilainya 5. Sebaliknya, Anda disarankan untuk mencoba membuktikan hal ini dengan mencari suatu fakta/kondisi yang selalu tetap untuk semua kemungkinan nilai yang didapat oleh sebarang siswa. Kondisi tetap ini umumnya disebut sebagai sebuah invarian.

   (c) Tentukan selisih positif terkecil dan selisih positif terbesar yang mungkin dari nilai sebarang dua peserta.

   (d) Dengan memanfaatkan sifat invarian, kita dapat memperkuat pernyataan bagian (i). Buktikan bahwa terdapat empat siswa yang memiliki nilai sama.

2. Diketahui bahwa suatu bilangan prima p dapat dinyatakan sebagai selisih dua buah bilangan kubik (pangkat tiga). Buktikan bahwa p dapat dinyatakan sebagai penjumlahan empat buah bilangan kuadrat.

3. Tentukan semua tripel bilangan real positif (a, b, c) yang memenuhi

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} = \frac{4}{5}$$

   dan $a + b + c = 9$.

4. Diberikan segitiga lancip ABC. Titik D terletak pada BC sehingga AD adalah garis tinggi segitiga ABC. Titik E dan F adalah titik tengah CA dan AB, berturut-turut. Diketahui bahwa lingkaran luar $\triangle BDF$ dan lingkaran luar $\triangle CDE$ berpotongan sekali lagi di titik X, sedangkan lingkaran luar $\triangle BDE$ dan lingkaran luar $\triangle CDF$ berpotongan sekali lagi di titik Y. Buktikan bahwa D, X, dan Y terletak pada satu garis.