

# **Seleksi III Tim KSN dan KSM Tahun 2022**

PEMBINA MATEMATIKA MAN 2 KOTA MALANG

28 Januari 2022

# 1 Kemampuan Dasar

1. Misalkan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  merupakan bilangan bulat ( $n > 1$ ) yang memenuhi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 2022.$$

Tentukan nilai terkecil dari  $n$ .

2. Kiara memiliki dua tumpukan kartu. Tumpukan pertama terdiri dari 8 kartu dengan huruf-huruf “D U A D A S A R”. Tumpukan kedua terdiri dari 7 kartu dengan huruf-huruf “B U K A N K L”. Jika banyak cara Kiara menyusun kartu dari tumpukan pertama dan kedua secara berurutan adalah  $p$  dan  $q$ . Tentukan nilai dari  $p - q$ .

3. Tentukan nilai  $a$  yang memenuhi persamaan

$$\sum_{k=1}^{22} (k^2 + k + a) = 4092.$$

4. Diberikan segitiga  $ABC$  yang memiliki panjang sisi  $a, b$ , dan  $c$ . Misalkan  $R$  dan  $r$  berturut-turut adalah panjang jari-jari lingkaran luar dan jari-jari lingkaran dalam dari segitiga  $ABC$ . Jika  $Rr = \frac{1}{2022}$ , nilai dari  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$  adalah . . .

5. Di dalam bungkus snack “Stun Seed Special” terdapat salah satu dari 4 potongan puzzle, masing-masing dengan kemungkinan  $\frac{1}{4}$ . Jika berhasil mendapatkan 4 jenis potongan puzzle secara lengkap, kamu bisa menukarkannya dengan sebungkus “Stun Seed Original”. Jika Risu membeli 7 bungkus “Stun Seed Special”, berapa peluang Risu mendapatkan 4 jenis potongan puzzle itu?

6. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan panjang  $AB = 10, BC = 8$ , dan  $CA = 6$  serta  $O$  merupakan titik pusat lingkaran luar  $ABC$ . Lingkaran berdiameter  $AO$  memotong  $AC$  di titik  $D$  dan  $D'$  adalah bayangan dari pencerminan titik  $D$  terhadap  $O$ . Jika panjang dari  $BD'$  adalah  $s$ , nilai dari  $20s$  adalah . . .

7. Misalkan  $a_0 = 1, a_1 = 2$ , dan  $a_n = (a_{n-1})^2 + a_{n-2}$  untuk  $n > 1$ . Tentukan sisa pembagian  $a_{2022}$  oleh 7.

8. Diketahui  $a, b, c$  adalah bilangan real positif dengan  $a + b + c = 22$ . Tentukan nilai minimum dari

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2.$$

9. Diberikan segiempat  $ABCD$  dengan panjang  $AB = 4, BC = 3$ , dan  $CD = 12$  serta  $\angle ABC = \angle ACD = 90$ . Diagonal dari segiempat  $ABCD$  berpotongan di titik  $E$ . Jika jarak titik  $E$  dengan  $DA$  dapat dinyatakan dalam bentuk  $\frac{a}{b}$  di mana  $a, b$  bilangan asli yang relatif prima, nilai dari  $a + b$  adalah . . .

10. Jika  $m$  adalah bilangan asli tidak lebih dari 1000 dan pecahan  $\frac{m+5}{m^2+9}$  merupakan bentuk pecahan paling sederhana, Tentukan banyaknya nilai  $m$  yang mungkin.

# 2 Kemampuan Lanjut

1. Diketahui  $f(x)$  adalah fungsi polinomial kuadrat monik sehingga terdapat barisan aritmatika  $a < b < c < d$  dengan  $|f(a)| = |f(b)| = |f(c)| = |f(d)| = 2000$ . Tentukan selisih kedua akar dari  $f(x)$ .
2. Amelia dan Watson memiliki mesin waktu. Suatu hari mereka menggunakannya untuk pergi ke tahun 1984. Di sana dunia dikuasai oleh Bung Besar, seorang pemimpin yang sangat kejam. Dia tidak ingin dunianya diganggu oleh kekuatan lain. Dengan alasan keamanan, Amelia Watson harus meninggalkan masa itu tidak lebih dari 70 hari. Sayangnya mesin waktunya rusak dan harus diperbaiki 10 kali, masing-masing sehari. Supaya tidak dicurigai Si Bung Besar, mereka bersiasat:
  - Jika salah satu memperbaiki, maka yang lainnya mengalihkan perhatian Si Bung Besar.
  - Tidak ada dua kali perbaikan dalam 7 hari.
  - Satu orang yang sama tidak memperbaiki dua kali dalam 10 hari.

Berapa banyak cara mereka dapat keluar dari 1984 dengan selamat?

Catatan: Mereka akan langsung pulang di hari perbaikan ke 10, jadi mereka bisa saja memperbaiki di hari ke 70 dan pulang dengan selamat.

3. Diberikan segitiga  $ABC$  yang memiliki panjang sisi 7, 8, dan 9. Garis tinggi dari segitiga  $ABC$  yang melalui titik  $A$  memotong lingkaran luar segitiga  $ABC$  di titik  $A'$ , di mana  $A \neq A'$ . Definisikan yang sama untuk titik  $B'$  dan titik  $C'$ . Jika luas dari segitiga  $A'B'C'$  dapat dinyatakan dalam bentuk  $\frac{p\sqrt{q}}{r}$  di mana  $p, q$ , dan  $r$  bilangan asli,  $\gcd(p, r) = 1$ , dan  $q$  tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat apapun selain 1, nilai dari  $p + q + r$  adalah . . .
4. tentukan banyaknya bilangan prima  $p$  sedemikian sehingga  $101^p + 1$  merupakan kelipatan  $p$ .
5. Diketahui  $a, b, c$  dan  $d$  adalah akar-akar dari persamaan  $x^4 + x^2 - 1 = 0$ . Jika nilai dari

$$\frac{1}{a^2 - 2a + 3} + \frac{1}{b^2 - 2b + 3} + \frac{1}{c^2 - 2c + 3} + \frac{1}{d^2 - 2d + 3} = \frac{p}{q},$$

dengan  $p$  dan  $q$  adalah dua bilangan bulat positif yang saling prima, maka nilai  $p + q$  adalah ...

6. Selama 2 pekan ini, HoloPark ditutup untuk renovasi dan akan ditambahkan wahana baru, salah satunya adalah "Pertunjukan Teater". Sebagai salah satu manager, A-Chan diminta untuk membuat jadwal dalam seminggu. Ada 4 cerita yang dapat ditampilkan. Pada hari Senin sampai Jumat pertunjukan diadakan sekali per hari, dan pada hari Sabtu dan Minggu diadakan dua kali yaitu pada saat siang dan malam. Supaya pengunjung tidak bosan, tidak boleh ada dua cerita yang ditampilkan di dua hari yang berurutan, dan karena jadwal ini berlangsung seterusnya maka hal ini juga berlaku pada hari Minggu-Senin. Berapa banyak jadwal yang bisa dibuat oleh A-Chan?

7. Misalkan  $a, b$ , dan  $c$  adalah bilangan real dengan  $1 < a < b < c$  dan memenuhi

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a = \frac{31}{6}$$

$$\log_a c + \log_c b + \log_b a = \frac{41}{6}.$$

Jika nilai  $\log_c a$  dapat dinyatakan sebagai  $\frac{p}{q}$  dengan  $p$  dan  $q$  adalah dua bilangan bulat positif yang saling prima, maka nilai  $p + q$  adalah ...

8. Didefinisikan  $f(x) = x^{x^{x^x}}$ . Tentukan dua digit terakhir dari hasil penjumlahan

$$f(17) + f(18) + f(19) + f(20) + f(21).$$

9. Yagoo akan meletakkan 6 koin pada papan catur berukuran  $6 \times 6$  dengan masing-masing baris dan kolom dilabeli 1 sampai 6. Semua koin itu diletakkan sehingga tidak ada dua koin yang berada pada baris yang sama atau kolom yang sama. Setiap kotak memiliki poin yang merupakan penjumlahan dari label baris dan label kolom kotak tersebut. Score suatu konfigurasi adalah poin terkecil yang ditempati oleh koin. Rata-rata score untuk semua konfigurasi yang valid adalah  $\frac{p}{q}$ , dengan  $p, q$  bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai dari  $p + q$ .
10. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan panjang sisi  $AB = 8, BC = 9$ , dan  $CA = 7$ . Misalkan  $H$  dan  $G$  berturut-turut adalah titik tinggi dan titik berat dari segitiga  $ABC$ . Nilai dari  $\cos \angle CHG$  dapat dinyatakan dalam bentuk  $\frac{p\sqrt{q}}{r}$  di mana  $p, q, r$  bilangan asli,  $\gcd(p, r) = 1$ , dan  $q$  tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat sempurna apapun selain 1. Nilai dari  $p + q + r$  adalah . . .