Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Maret 2020 (Simulasi KSN-P)

20 – 22 Maret 2020

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.

2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.

4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.

5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.

6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.

7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.

8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.

9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.

10. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.

11. Notasi $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terkecil dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_k$. Sebagai contoh, $\min\{4, 1.5, 5\} = 1.5$, $\min\{3.5, \pi, 3, 4\} = 3$, $\min\{-5, 3\} = -5$, dan $\min\{1\} = 1$.

12. Notasi $\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terbesar dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_k$. Sebagai contoh, $\max\{4, 1.5, 5\} = 5$, $\max\{3.5, \pi, 3, 4\} = 4$, $\max\{-5, 3\} = 3$, dan $\max\{1\} = 1$.

13. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.

14. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.

15. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.

16. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.

17. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

18. Pada $\triangle ABC$:

(a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.

(b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.

(c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.

(d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

(e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

19. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

20. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

21. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

22. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

23. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

24. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Diberikan dua buah bilangan real x dan y yang memenuhi $x^2 + y = 202$ dan $x + y = 10$. Tentukan nilai dari $x^3 + x^2y + xy + y^2$.

2. Valen ingin membeli kue ulang tahun untuk Farrel. Di toko terdapat tiga kue *chocolate*, empat kue *vanilla*, enam kue *coconut*, dan dua kue *cinnamon*. Namun, Farrel tidak ingin ada tiga kue yang sama dan Farrel hanya ingin makan paling banyak dua jenis kue. Tentukan banyaknya kombinasi kue yang mungkin Valen beli apabila Valen ingin memuaskan Farrel (Valen minimal membeli satu kue).

3. Untuk setiap bilangan asli n, definisikan $[n]$ adalah himpunan seluruh bilangan yang merupakan hasil permutasi digit-digit dari n (Digit 0 boleh dihilangkan apabila menjadi digit awal). Sebagai contoh, $[2020] = \{22, 202, 220, 2002, 2020, 2200\}$. Tentukan banyaknya bilangan asli n yang kurang dari 10^{2020} sedemikian sehingga semua elemen dari $[n]$ habis dibagi 11.

4. Tentukan banyaknya bilangan bulat nonnegatif kuadrat yang lebih kecil dari 10^6 dan habis dibagi 210.

5. Diberikan sebuah lingkaran dengan jari-jari 5. Lalu, diberikan pula segienam $ABCDEF$ dengan titik A, B, C, D, E, dan F terletak pada lingkaran, $AB = CD = 2\sqrt{5}$, $BC = EF$, dan $DE = FA = 5\sqrt{2}$. Misalkan AD memotong BE dan CF berturut-turut di titik G dan H. Apabila panjang GH dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{\sqrt{p}}{q}$, dimana p dan q adalah bilangan asli serta p tidak habis dibagi oleh kuadrat dari sembarang bilangan prima, tentukan nilai dari $10p + q$.

6. Tentukan banyaknya solusi (a, b, c, d), dimana $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, sedemikian sehingga $ab + cd = 2$ dan $abcd = 1$.

7. Dalam sebuah kelompok yang terdiri dari 20200 pria dan 2020 wanita, akan dipilih sepasang orang secara acak. Pemilihan dilakukan terus-menerus serta orang yang sudah dipilih dikeluarkan dari kelompok dan tidak akan dipilih lagi di pemilihan selanjutnya. Tentukan banyaknya minimal pemilihan yang dilakukan sedemikian sehingga pasti terdapat sepasang orang yang terdiri dari dua pria.

8. Tentukan banyaknya tripel bilangan asli (a, b, c), dimana ketiganya tidak habis dibagi 3, sedemikian sehingga $a + b + c = 60$.

9. Apabila jumlah semua bilangan real a yang memenuhi persamaan
$$\left(\sqrt{a+2} + \sqrt{a-2}\right)\left((a+2)\sqrt{a+2} - (a-2)\sqrt{a-2}\right) = 8a + 6$$
adalah N, tentukan nilai dari $\lfloor 100N \rfloor$.

10. Pada segitiga sembarang ABC dengan $\angle B < 90^\circ$, titik D terletak pada segmen BC sedemikian sehingga $AD \times CD = AC \times BD$. Titik D' merupakan pencerminan titik D terhadap AC sedemikian sehingga $ABCD'$ merupakan segiempat tali busur. Apabila $AB = 4$ dan $AC = 6$, tentukan nilai dari $3BC^2$.

11. Bilangan asli dari 1 sampai 2020 dituliskan di sebuah kertas. Kemudian, beberapa bilangan di antaranya dicoret sedemikian sehingga tidak ada dua bilangan tersisa yang jumlahnya habis dibagi 20. Tentukan minimum banyaknya bilangan yang perlu dicoret.

12. Di dalam segitiga ABC dengan panjang sisi 13, 14, 15, terdapat titik O sedemikian sehingga ketiga lingkaran luar segitiga OAB, OBC, dan OCA memiliki panjang jari-jari yang sama. Apabila jumlah jarak dari titik O ke ketiga sisi segitiga ABC dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$, dimana p dan q adalah dua bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $p + q$.

13. Misalkan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ adalah sebuah fungsi dengan $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3n + 1) = f(3n) = f(n)$, dan $f(3n+2) = f(n)+1$. Tentukan banyaknya bilangan asli $k < 2020$ sedemikian sehingga $f(k) = f(2020)$.

14. Aji diberikan sebuah kartu kosong yang berfungsi sebagai spasi dan sepuluh buah kartu bertuliskan huruf-huruf C, E, F, I, I, K, K, R, S, U. Aji diminta untuk menyusun kesebelas kartu tersebut secara acak sehingga membentuk sebuah barisan. Apabila peluang susunan kartu tersebut membentuk sebuah frasa yang terdiri atas dua kata dengan syarat setiap kata harus terdiri atas minimal dua huruf serta tidak boleh ada dua huruf sama yang bersebalahan adalah $\frac{p}{q}$, dimana $\frac{p}{q}$ adalah pecahan yang paling sederhana, tentukan jumlah digit-digit dari $p + q$.
Catatan: Frasa seperti CUI IFKRESK masih memenuhi karena kedua huruf I dipisahkan oleh spasi/kartu kosong.

15. Tentukan banyaknya 5-tupel bilangan real (a, b, c, d, e) yang memenuhi kelima persamaan berikut:

$$\begin{aligned} ab + ac + ad + ae &= -1, \\ ba + bc + bd + be &= -1, \\ ca + cb + cd + ce &= -1, \\ da + db + dc + de &= -1, \text{ dan} \\ ea + eb + ec + ed &= -1. \end{aligned}$$

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

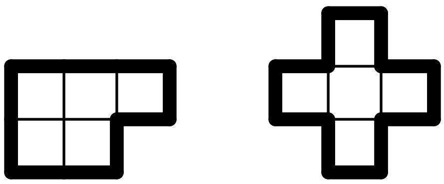
1. Diberikan dua buah lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang saling bersinggungan di luar satu sama lain di titik V. Sebuah garis l menyinggung Γ_2 di titik K dan memotong Γ_1 di titik A dan B. Apabila VK memotong Γ_1 lagi di titik S, buktikan bahwa $SA = SB$.

2. Diberikan bilangan asli a, b, dan c sedemikian sehingga

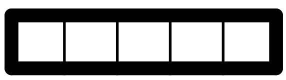
$$a + b + c \text{ dan } abc$$

merupakan perpangkatan dari 2. Buktikan bahwa $ab + bc + ca$ habis dibagi 5.

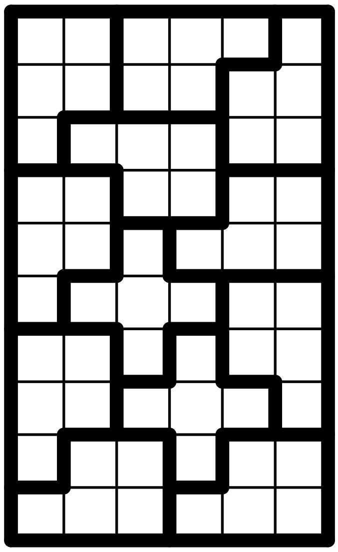
3. Valentio menantang kedua temannya, Joselin dan Jesselyn, dalam sebuah permainan. Pertama, Valentio memberikan Jesselyn tak terhingga banyaknya buah pentamino seperti berikut:



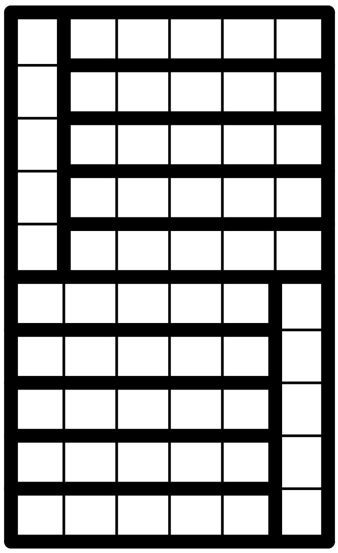
Selanjutnya, Valentio memberikan Joselin tak terhingga banyaknya buah pentamino seperti berikut:



Pertama, salah satu pemain disuruh membuat sebuah papan $m \times n$, dimana $m, n > 1$ sehingga papan itu dapat ditutupi oleh pentamino yang diberikan kepada mereka. Sebagai contoh, Jesselyn pemain pertama. Dia dapat membuat papan berukuran 6×10, sebagai berikut:



Lalu, pemain lawan (dalam hal ini, Joselin) akan ditantang untuk menutupi papan $m \times n$ yang telah dibuat pemain pertama mula mula (dalam hal ini, Jesselyn) dengan menggunakan pentamino yang diberikan kepadanya.
Dalam hal ini, Joselin dapat melakukannya, yaitu sebagai berikut:



Pemain dikatakan kalah apabila dia tidak dapat menutupi papan yang diberi lawan dengan pentamino yang diberikan. Pemain dikatakan menang apabila sebaliknya.

(a.) Apabila Jesselyn memulai permainan, buktikan bahwa Joselin pasti menang bagaimanapun ukuran papan yang diberikan Jesselyn.

(b.) Apabila Joselin memulai permainan, tentukan semua (m, n) sehingga Jesselyn pasti kalah.

4. Tentukan, dengan bukti, nilai dari

$$\sum_{b=5}^{\infty} \frac{15b^2 + 68b + 120}{2^b(b^4 + 64)}.$$

5. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB \neq AC$. Definisikan titik I sebagai titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC serta titik I_A sebagai titik pusat lingkaran singgung luar segitiga ABC yang berhadapan dengan titik A. Selain itu, definisikan pula titik X dan Y sebagai titik pada lingkaran luar segitiga ABC sedemikian sehingga

$$\angle AXI = \angle AYI_A = 90^\circ.$$

Apabila XI menyinggung lingkaran luar segitiga AYI, buktikan bahwa XY menyinggung lingkaran dalam segitiga ABC.