Edisi Kamis, 17 Mei 2018

Menuju 500 Soal

Olimpiade Matematika

Oleh

Agung Aldhi Prastya

SMAN 1 Sragen

Jawa Tengah

1. Diberikan polinomial $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Jika $P(1) = 827$, $P(2) = 1654$, dan $P(3) = 2481$, tentukan nilai dari $\frac{P(9)+P(-5)}{4}$.

2. Carilah semua fungsi $f: R \to R$ sehingga $f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$.

3. Misalkan $P(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + Q(x)$, dimana $Q(x)$ adalah polinom dengan derajat kurang dari 6. Misalkan lagi $P(x)$ dapat difaktorkan menjadi delapan faktor linear $(x - x_i)$, dimana $x_i > 0$. Tentukan semua nilai konstan $Q(x)$.

4. Diberikan suatu bilangan asli n. Tentukan banyaknya polinomial $P(x)$ dengan koefisien-koefisien $0, 1, 2, \dots, 99$ sehingga $P(10) = n$.

5. Cari semua polinomial $p(x)$ dengan koefisien real sehingga
$$(x + 10)p(2x) = (8x - 32)p(x + 6)$$
untuk semua bilangan real x dan $p(1) = 210$.

6. Tentukan semua pasangan (x, y) bilangan real yang memenuhi sistem persamaan
$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2y^5} = 4(y^2 - x^2) \\ 5\sqrt[3]{x^4y} = y^2 + x^2 \end{cases}$$

7. Seorang siswa yang bosan berjalan di ruangan yang terdapat barisan loker tertutup, dinomori 1 sampai 1024. Ia membuka loker nomor 1, kemudian secara bergantian melewati dan membuka loker yang tertutup. Setelah mencapai ujung ruangan, ia berbalik dan mulai lagi. Ia membuka loker pertama yang tertutup, kemudian bergantian melewati atau membuka loker yang tertutup. Ia terus melakukan ini sampai semua loker terbuka. Berapa nomor loker yang terakhir dibuka?

8. Diberikan CD sebuah tali busur pada lingkaran Γ_1 dan AB diameter Γ_1, di mana AB tegak lurus CD di N, sehingga $AN > NB$. Dibuat sebuah lingkaran dengan pusat C dan jari-jari CN, katakan Γ_2. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 berpotongan di P dan Q. Garis PQ dan CD berpotongan di M, dan garis PQ dan AC berpotongan di K. Perpanjangan NK motong Γ_2 di L. Buktikan AL tegak lurus PQ.

9. Carilah semua pasangan bilangan asli (k, n) sehingga $7^k - 3^n$ habis membagi $k^4 + n^2$.

10. Tentukan semua bilangan asli (x, y, z) yang memenuhi
$$x^{2009} + 2009! = y^z$$
dengan y merupakan bilangan prima yang tidak lebih dari 2009.

11. Misalkan a, b, c bilangan real positif sehingga $a^2+b^2+c^2=1$. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{a}^{2}+\frac{1}{b}^{2}+\frac{1}{c}^{2} \geq 3+\frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}.$$

12. Ada n orang di dalam satu ruangan. Setiap orang memilih satu dan hanya satu orang yang paling disukainya. Buktikan bahwa kita bisa mengelompokkan mereka ke dalam tiga kelompok sehingga tidak ada orang yang sekelompok dengan orang yang paling disukainya.

13. Polinomial

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{16}-x^{17}$$

dapat ditulis dalam bentuk

$$a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$$

dimana $y=x+1$ dan a_i adalah konstanta. Tentukan nilai dari a_2.

14. Pada segitiga lancip ABC dibuat setengah lingkaran dengan diameter EF ($BE>BF$) dengan P dan Q berturut-turut terletak pada AC dan BC sehingga P dan Q merupakan titik singgung lingkaran dengan AC dan BC. Misalkan titik R merupakan titik perpotongan EQ dan FP dan titik K terletak pada AB sehingga CK titik tinggi ABC. Buktikan C, R, K segaris.

15. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle C=60^\circ$ dan D merupakan titik tengah BC. Jika $BC=4$, cari nilai maksimum dari $\tan\angle BAD$.

16. Diketahui a dan b bilangan bulat positif. Jika (a^2+b^2) dibagi dengan $(a+b)$ mempunyai hasil bagi q dan sisa r. Tentukan pasangan (a,b) sehingga $q^2+r=1977$.

17. Carilah semua bilangan bulat (a,b) sedemikian sehingga $2a^3+b^3=32+3a^2b$.

18. Diberikan bilangan real positif a, b, c yang memenuhi $a+b+c=abc$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{3}{2}.$$

19. Buktikan untuk setiap x, y, z bilangan real positif berbeda, berlaku

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{xy+yz+zx}.$$

Tentukan kapan kesamaan berlaku.

20. Jika a, b, dan c adalah bilangan real positif dengan $ab + bc + ca = abc$, carilah nilai minimum

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(b+\frac{c}{a}\right)\left(c+\frac{a}{b}\right).$$

21. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 1. Titik P dan Q pada sisi AB dan AD. Jika keliling APQ adalah 2, tentukan besar $\angle PCQ$.

22. Tiga sahabat, A, B, dan C bermain bola. Dua penyerang berusaha mencetak gol. Siapa yang berhasil mencetak gol akan menjadi penjaga gawang. Sampai permainan selesai, A menjadi penyerang 12 kali, B menjadi penyerang 21 kali, C menjadi penjaga gawang 8 kali. Siapa yang mencetak gol keenam?

23. Carilah semua bilangan prima p sehingga sistem persamaan

$$\begin{aligned} p+1 &= 2x^2 \\ p^2+1 &= 2y^2 \end{aligned}$$

memiliki solusi x, y bilangan bulat.

24. Carilah semua pasangan bilangan bulat positif (x, y, z) sedemikian sehingga $x! + y! = z!$.

25. Misalkan $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ memiliki akar-akar a, b, c. Hitunglah nilai dari $a^{2007} + b^{2003} + c^{1999}$.

26. Ada sebuah kode kunci yang terdiri dari 5 digit $abcde$, dengan a, b, c, d, e tidak sama. Kode kunci abcde merupakan bil asli. Digit e merupakan anggota prima terbesar. Kode kunci itu terurut naik.

   a) Tentukan berapa banyak kode kunci yang dapat terbentuk.

   b) Tentukan pula kode terbesar yang mungkin.

27. Di suatu pesta, setiap orang yang hadir mengenal tepat 22 orang lain dalam pesta. Bila X dan Y saling mengenal, maka mereka tidak mengenal satupun orang lain yang sama, dan bila X dan Y tidak saling mengenal, maka mereka mengenali tepat 6 orang yang sama. Tentukan berapa banyaknya orang yang hadir dalam pesta tersebut.

28. Dua persegi panjang memiliki ukuran berbeda tetapi perbandingan panjang dan lebarnya sama. Persegi panjang kecil diletakkan pada yang besar, sehingga pada tiap sisi persegi panjang besar terdapat titik sudut persegi panjang kecil. Tentukan rasio panjang dan lebar persegi panjang itu.

29. Misalkan fungsi $P(n)$ sehingga $P(n) = m$, maka m adalah n dibaca dari kanan ke kiri (reversing its digits). Sebagai contoh, $P(2008) = 8002$, $P(100) = 1$, dan $P(8) = 8$. Misalkan lagi $P_n(x) = P(P(...P(x)..))$ sebanyak n kali. Carilah semua pasangan bilangan bulat positif (x, n) sehingga:

$$x + P(x) + P_2(x) + ... + P_n(x) = A.$$

Jika $A = 7$ dan $A = 66$.

30. Misalkan m, n merupakan bilangan asli berbeda sehinga $A = \frac{mn}{m+n}$ juga bilangan asli.

(i) Haruskah (m, n) habis membagi A?

(ii) Haruskah A membagi $[m, n]$?

(iii) Tentukan semua bilangan asli yang dapat ditulis dalam bentuk A.

31. Tunjukkan untuk setiap bilangan asli n, maka

$$(3 - 2\sqrt{2})(17 + 12\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2})^n - 2$$

adalah bilangan kuadrat sempurna.

32. Apakah ada bilangan asli m dan n yang memenuhi $3n^2 + 3n + 7 = m^3$?

33. Tentukan pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi

$$x^2 - 2009y + 2y^2 = 0.$$

34. Misalkan real positif x, y, z memenuhi $x + y + z = 1$. Buktikan bahwa

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}.$$

35. Jika $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ yang memenuhi $a + b + c + d = 1$ dan $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{3}$, buktikan bahwa

$$\frac{a+b}{b+c} \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

36. Buktikan untuk $a, b, c > 0$ berlaku

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

37. Buktikan untuk setiap x, y, z bilangan real positif berbeda, berlaku

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{xy+yz+zx}.$$

Tentukan kapan kesamaan berlaku.

38. Kawat sepanjang 45 cm dipotong menjadi dua bagian, kemudian masing-masing bagian dibentuk menjadi segitiga sama sisi dan jumlah luas lingkaran luar kedua segitiga itu adalah 39π cm^2. Hitunglah panjang sisi masing-masing segitiga itu.

39. Ada 8 orang siswa akan menyelesaikan 8 buah soal. Tiap soal dapat dijawab oleh paling sedikit 5 orang siswa. Buktikan bahwa kita dapat mengambil 2 orang siswa diantara 8 orang siswa itu sehingga 8 buah soal yg ada dapat diselesaikan oleh paling sedikit 1 orang siswa di antara 2 orang siswa yang diambil.

40. Buktikan bahwa persamaan $\sqrt{x^3+y^3+z^3} = 1969$ tidak memiliki solusi bulat.

41. Suatu segitiga disebut *automedian* jika ketiga garis beratnya bisa membentuk segitiga yang sebangun dengan segitiga itu sendiri.

   a) Buktikan segitiga dengan panjang sisi 7,13, dan 17 *automedian*.
   b) Diketahui segitiga ABC dengan $AB = c, AC = b, BC = a$ dan $a < b < c$ *automedian*. Buktikan $a^2 + c^2 = 2b^2$

42. Tentukan banyak anggota terbesar dari himpunan bagian $H \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ sehingga untuk setiap dua anggota berbeda $x, y \in H$ berlaku $(x-y) \nmid (x+y)$.

43. Diberikan bilangan-bilangan real positif $x_1, x_2, ..., x_n$ dan misalkan $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$; $A = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$; $M = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$; $m = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Buktikan bahwa

$$A - G \geq \frac{\left(\sqrt{M} - \sqrt{m}\right)^2}{n}.$$

44. Dalam ΔABC dengan panjang rusuk $a, b,$ dan c berhadapan dengan sudut $A, B,$ dan C. Buktikan bahwa

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\cot\left(\frac{1}{2}(A+B)\right)}{\cot\left(\frac{1}{2}(A-B)\right)}$$

45. Pada ΔABC, garis-garis berat dari titik sudut B dan titik sudut C berpotongan tegak lurus. Tentukan nilai minimum dari $\cot B + \cot C$.

46. Tentukan banyaknya bilangan positif $n < 1000$ sehingga persamaan
$$\frac{3xy - 1}{x + y} = n$$
mempunyai solusi pasangan bilangan bulat (x, y).

47. Tentukan pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang memenuhi persamaan
$$m^2 - 11 \cdot n! = 3003.$$

48. $P(x)$ adalah sebuah polinom. Jika $\frac{P(2x)}{P(x+1)} = 8 - \frac{56}{x+7}$ untuk $P(1) = 1$, tentukan nilai dari $P(-1)$.

49. Diketahui $x_1 = 6$, $x_2 = 7$, dan $x_{n-1} = (x_{n-1})^2 - (n + 2)x_n$, untuk setiap $n \geq 2$. Tentukan nilai dari x_{2013}.

50. Tentukan banyak bilangan bulat positif x sehingga $\sqrt{x^2 + 4x + 670}$ merupakan bilangan bulat.