Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Januari 2021

22 – 25 Januari 2021

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan riil yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan riil.
7. Notasi $\sum_{i=1}^{k} a_i$ menyatakan nilai dari $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, sedangkan notasi $\prod_{i=1}^{k} a_i$ menyatakan nilai dari $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k$.
8. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
9. Untuk setiap bilangan riil x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
10. Untuk setiap bilangan riil x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
11. Untuk setiap bilangan riil x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
12. Notasi $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ menyatakan bilangan riil terkecil dari kumpulan bilangan riil $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Sebagai contoh, $\min\{4, 1.5, 5\} = 1.5$, $\min\{3.5, \pi, 3, 4\} = 3$, $\min\{-5, 3\} = -5$, dan $\min\{1\} = 1$.
13. Notasi $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ menyatakan bilangan riil terbesar dari kumpulan bilangan riil $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Sebagai contoh, $\max\{4, 1.5, 5\} = 5$, $\max\{3.5, \pi, 3, 4\} = 4$, $\max\{-5, 3\} = 3$, dan $\max\{1\} = 1$.
14. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.
15. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.
16. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan riil a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

17. Rata-rata geometrik dari dua bilangan riil a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

18. Rata-rata harmonik dari dua bilangan riil a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

19. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.

20. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a-b|$.

21. Notasi $\text{fpb}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ menyatakan bilangan asli terbesar yang merupakan faktor bagi seluruh bilangan asli $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Sebagai contoh, $\text{fpb}(24, 36) = 12$, $\text{fpb}(15, 7, 30) = 1$, $\text{fpb}(18, 13) = 1$, dan $\text{fpb}(15, 3, 27) = 3$.

22. Notasi $\text{kpk}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ menyatakan bilangan asli terkecil yang merupakan kelipatan bagi seluruh bilangan asli $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Sebagai contoh, $\text{kpk}(24, 36) = 72$, $\text{kpk}(15, 7, 30) = 210$, $\text{kpk}(18, 13) = 234$, dan $\text{kpk}(15, 3, 27) = 135$.

23. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* apabila $\text{fpb}(a, b) = 1$.

24. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyak bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.

25. Notasi $\dbinom{n}{k}$ menyatakan nilai dari $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

26. Pada suatu himpunan S, notasi $|S|$ menyatakan banyak elemen dari S.

27. Pada $\triangle ABC$:

    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.

    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.

    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.

    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

    (f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

    (g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

28. Pada segmen AB, notasi $\overline{AB}$ menyatakan panjang segmen AB.

29. Notasi $AB \parallel CD$ menyatakan garis AB sejajar dengan garis CD.

30. Notasi $AB \perp CD$ menyatakan garis AB tegak lurus dengan garis CD.

31. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat nonnegatif.

1. Kelas 12-K yang terdiri dari lima belas siswa laki-laki dan sepuluh siswa perempuan sedang memilih pasangan ketua dan wakil ketua. Diketahui ketua dan wakil ketua harus berbeda jenis kelamin. Diketahui juga Susi, salah satu siswa perempuan di kelas tersebut, adalah ketua tahun lalu. Apabila ketua tahun lalu tidak boleh menjadi ketua lagi, namun dia masih boleh menjadi wakil ketua, tentukan banyak cara bagi kelas 12-K untuk memilih ketua dan wakil ketua mereka.

2. Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $A_n = 3 + 33 + \cdots + \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ buah angka } 3}$. Sebagai contoh, $A_1 = 3$, $A_2 = 3 + 33 = 36$, dan $A_3 = 3 + 33 + 333 = 369$. Tentukan banyak bilangan asli k yang tidak lebih dari 2021 sehingga digit terakhir dari A_k adalah 1.

3. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 2. Misalkan terdapat lingkaran dengan titik pusat D dan jari-jari 2 serta lingkaran dengan diameter BC, dimana kedua lingkaran tersebut saling bertemu di titik C dan K. Apabila luas dari segitiga ABK dapat dinyatakan dalam pecahan sederhana $\frac{p}{q}$, dengan p dan q adalah bilangan asli, tentukan nilai dari $p^q + q^p$.

4. Misalkan S adalah himpunan triplet bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi persamaan $|x| + |y| + |z| = 2021$. Apabila didefinisikan $g(x, y, z) = x + y + z$ untuk setiap bilangan riil x, y, dan z, hitunglah nilai dari
$$\sum_{(x,y,z)\in S} g(x, y, z).$$

5. Diberikan segitiga siku siku sama kaki ABC dengan $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$. Misalkan titik X adalah titik tengah AC. Apabila titik D terletak pada sinar BX sehingga $\angle BDC = 90°$, tentukan nilai dari $\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DA}$.

6. Aji mempunyai dua buah dadu identik yang tidak setimbang. Kedua dadu tersebut kemudian dilempar dan Aji menghitung jumlah kedua mata dadu yang menghadap ke atas. Diketahui peluang jumlah kedua mata dadu bernilai 12 dan 11 berturut-turut adalah $\frac{1}{25}$ dan $\frac{1}{20}$. Apabila peluang sebuah dadu menunjukkan mata dadu bernilai lima atau enam dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b adalah dua bilangan asli yang saling relatif prima, tentukan nilai dari $a + b$.

7. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan $f(x)^3 + (5x - 1)f(x)^2 + (6x^2 - 5x)f(x) - 6x^2 = 0$ untuk setiap bilangan riil x. Tentukan jumlah semua kemungkinan nilai dari $|f(10)|$.

8. Untuk setiap bilangan asli n, definisikan $\phi(n)$ adalah banyak bilangan asli yang tidak lebih dari n dan relatif prima dengan n. Sebagai contoh, $\phi(3) = 2$, $\phi(6) = 2$, dan $\phi(10) = 4$. Tentukan bilangan asli terbesar k yang mungkin sehingga semua bilangan asli $\phi(n)$, $\phi(n+1)$, $\ldots$, dan $\phi(n+k-1)$ merupakan bilangan prima untuk suatu bilangan asli n.

9. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (a, b) sehingga seluruh akar dari polinomial $x^3 + ax^2 + bx + 210$ merupakan bilangan bulat.

10. Sebuah bilangan riil positif r disebut *peko* apabila terdapat bilangan riil positif x yang memenuhi persamaan $\lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor \lceil \sqrt[3]{x} \rceil = r$. Tentukan banyak bilangan peko yang tidak lebih dari 2021.

11. Pada suatu koordinat kartesius, Henry yang berada pada titik $(0, 0)$ hendak pergi ke titik $(5, 5)$ untuk bertemu dengan Charles. Namun, pada setiap langkah, Henry hanya diperbolehkan untuk memilih tepat satu dari tiga cara berikut untuk melangkah.

    - Apabila Henry berada pada titik (x, y), dengan x dan y adalah bilangan bulat, Henry melangkah ke titik $(x + 1, y)$.
    - Apabila Henry berada pada titik (x, y), dengan x dan y adalah bilangan bulat, Henry melangkah ke titik $(x, y + 1)$.
    - Apabila Henry berada pada titik (x, y), dengan x dan y adalah bilangan bulat, Henry melangkah ke titik $(x + 1, y + 1)$.

    Tentukan banyak cara bagi Henry untuk melangkah.

12. Diberikan dua lingkaran Γ_1 dan Γ_2 dengan panjang jari-jari R_1 dan R_2 berturut-turut yang saling bersinggungan luar di titik A. Diketahui l adalah salah satu garis singgung luar dari kedua lingkaran tersebut, dimana l menyinggung Γ_1 dan Γ_2 berturut-turut di titik A_1 dan A_2. Misalkan garis AA_1 memotong Γ_2 lagi di titik B_2, sedangkan garis AA_2 memotong Γ_1 lagi di titik B_1. Apabila $\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} = 16\sqrt{3}$, tentukan nilai minimum yang mungkin dari $R_1 + R_2$.

13. Diberikan barisan bilangan riil $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ dengan $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$, serta untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$, berlaku persamaan

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1} - 2a_{n-2}}{2 - 3a_{n-2} + a_{n-1}a_{n-2}}.$$

    Apabila nilai dari a_{2021} dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b adalah dua bilangan asli yang saling relatif prima, tentukan nilai dari $\left\lceil \sqrt{a + b} \right\rceil$.

14. Diberikan segitiga ABC dengan ketiga panjang sisi AB, BC, dan CA merupakan bilangan asli. Notasikan h_A sebagai garis tinggi dari segitiga ABC yang ditarik dari titik A, m_A sebagai garis berat dari segitiga ABC yang ditarik dari titik A, serta ℓ_A sebagai garis bagi dari segitiga ABC yang ditarik dari titik A. Apabila terdapat $i, j, k \in \{A, B, C\}$ (boleh sama) sehingga ketiga panjang sisi h_i, m_j, dan ℓ_k merupakan bilangan asli, tentukan keliling minimum yang mungkin dari segitiga ABC.

15. Untuk setiap bilangan asli n, definisikan p_n adalah faktor prima terkecil dari $n^8 + 1$. Tentukan sisa dari $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{2021}$ ketika dibagi oleh 16.

16. Enam orang murid bersama dengan kedua orang tuanya akan mengikuti hari keluarga di SD KTOM. Mereka akan dibagi ke dalam enam grup yang berisi satu anak, satu ayah dan satu ibu, namun satu grup tidak boleh terdiri dari satu keluarga. Tentukan banyak cara untuk mengelompokan mereka.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah. Pastikan tidak ada identitas yang tercantum pada lembar jawaban Anda.

1. Diberikan dua persegi $ABCD$ dan $AEFG$ dengan panjang sisi a dan b berturut-turut, dimana $a > b$ dan titik G terletak pada segmen AB. Misalkan DG memotong BE di titik Y serta BD memotong EG di titik X.
   (a) Buktikan bahwa $BD \perp EG$ (hint : Angle Chasing).
   (b) Buktikan bahwa $DG \perp BE$ (hint : Orthocenter).
   (c) Buktikan bahwa kelima titik A, E, F, Y, dan G terletak pada satu lingkaran.
   (d) Buktikan bahwa $\angle BYX = \angle EYF$. Lalu, simpulkan bahwa ketiga titik X, Y, dan F kolinear.
   (e) Buktikan bahwa keempat titik C, X, Y, dan F kolinear.

2. Misalkan A adalah suatu himpunan bilangan asli. Misalkan juga $A + A$ adalah himpunan yang diperoleh dengan menjumlahkan sembarang dua anggota (boleh sama) di A. Sebagai contoh, apabila $A_1 = \{1, 2, 3, 8\}$, diperoleh $A_1 + A_1 = \{1 + 1, 1+2, 1+3, 1+8, 2+2, 2+3, 2+8, 3+3, 3+8, 8+8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 16\}$. Perhatikan bahwa pada kasus ini, apabila $|X|$ menyatakan banyak anggota di X, diperoleh $|A_1| = 4$ dan $|A_1 + A_1| = 9$.
   (a) Misalkan A_4 adalah suatu himpunan bilangan asli yang memiliki empat anggota. Tentukan semua kemungkinan nilai dari $|A_4 + A_4|$.
   (b) Misalkan $A_{5'}$ adalah suatu himpunan bilangan asli yang memiliki lima anggota, dimana setiap anggotanya tidak lebih dari 10. Tentukan nilai minimum yang mungkin dari $|A_{5'} + A_{5'}|$ (misalkan N) serta tentukan semua himpunan $A_{5'}$ sehingga $|A_{5'} + A_{5'}| = N$.

3. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan riil positif a, b, dan c dengan $abc = 1$ dan $ab + bc + ca = 2021$, berlaku pertidaksamaan
$$(a^7 + 2)(b^7 + 2)(c^7 + 2) > 4(a + b + c) + 4051.$$

4. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli x dan y, berlaku persamaan
$$f(x^2 - xy + y^2)(xf(x) + yf(y)) = (x + y)f(x)f(y).$$