LuMaT.

Lomba Unik Matematika ala Tobi

Solusi Penyisihan

11 November 2018

1 Solusi Isian

1.	6	5.	422
2.	1	6.	27/4
3.	136	7.	0
4.	9	8.	55

Pembahasan Isian

1. Barisan **sebut-digit** adalah barisan bilangan bulat positif, dimana setiap suku adalah banyaknya huruf yang diperlukan untuk membaca digit-digit suku sebelumnya dalam bahasa Indonesia. Sebagai contoh, suku setelah 2018, yang dibaca 'dua-nol-satu-delapan', adalah 17.

   Ada pengecualian khusus, dimana barisan tersebut akan berhenti pada suku dengan nilai '5'.

   Jika suku pertama barisan sebut-digit bernilai tak lebih dari 2018, maka berapakah panjang maksimal barisan tersebut?

   Proof. Banyak huruf dari 0 sampai 9 ada kemungkinannya $3, 4, 5, 7, 8$. Karena suku pertama kemungkinan digit pertamanya 'satu' atau 'dua', maka suku kedua nilainya tidak mungkin lebih dari $4 + 8 + 8 + 8 = 28$. Suku kedua formatnya harus

   $$[-/1/2][?]$$

   maka banyak digit suku ketiga kemungkinannya bisa bervariasi dari 3 sampai maksimal 12. Setelah membuat diagram pohon dari nilai-nilai ini, didapat salah satu rantai terpanjang adalah

   $$9 \to 8 \to 7 \to 5.$$

   Maka contoh barisan terpanjang adalah

   $$2018 \to 17 \to 9 \to 8 \to 7 \to 5.$$

   Panjangnya 6. $\square$

2. Sebuah bilangan bulat positif k disebut **lutju** apabila persamaan

$$a+b+c=k^a+k^b+k^c$$

memiliki solusi bulat nonnegatif a,b,c.

Carilah jumlah seluruh bilangan lutju.

Proof. Jelas $k=1$ lutju karena $a=b=c=1$ solusi.

Andaikan $k \geq 2$ lutju maka

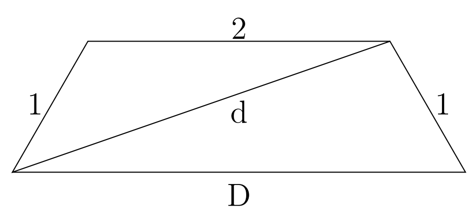
$$k^a \geq 2^a = (1+1)^a \geq 1+a+\cdots \geq 1+a.$$

Maka $k^a+k^b+k^c \geq (1+a)+(1+b)+(1+c) > a+b+c$. Kontradiksi. □

3. Sebuah segienam dengan panjang sisi $1,1,1,1,2,2$ memiliki lingkaran luar dengan radius R.

Tentukanlah nilai dari $\lfloor 100R \rfloor$.

Proof. Perhatikan bahwa urutan sisi tidak akan mempengaruhi nilai R, jadi boleh diasumsikan segienamnya panjang sisinya $1,2,1,1,2,1$, jadi sisi 2 sejajar diameter.



Menurut pitagoras,

$$d^2+1=D^2.$$

Menurut Ptolemy,

$$d^2=2\cdot D+1\cdot 1.$$

Menyelesaikan persamaan nanti didapat $D=\sqrt{3}+1$, maka $R=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. □

4. Carilah digit terakhir dari jumlahan

$$\sum_{k=1}^{2018} \left\lfloor \sqrt{2k} \right\rfloor .$$

Proof. Di interval $[n^2, (n+1)^2)$ banyaknya bilangan genap ada sebanyak $n+1$ atau n, tergantung n genap atau ganjil; dan ini sama banyaknya dengan banyaknya suku yang bernilai n pada jumlahan di atas. Jadi

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2018} \left\lfloor \sqrt{2k} \right\rfloor \\
&\quad = 1 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 4 + 5 \times 5 + \cdots + 63 \times 62 + 34 \times 63. \\
&\quad = (1^2 + 2^2 + \cdots + 62^2) + (2 + 4 + \cdots + 62) + 2 \pmod{10} \\
&\quad = \frac{62 \cdot 63 \cdot 125}{6} + 31 \cdot 32 + 2 \pmod{10} \\
&\quad = 5 + 2 + 2 = 9 \pmod{10}.
\end{aligned}$$

$\square$

5. Tiga dadu duapuluh-sisi yang adil dilempar secara bersamaan, kemudian hasilnya dijumlahkan modulo 19. Misalkan nilai peluang tertinggi untuk mendapatkan suatu nilai modulo 19 adalah x.

   Berapakah nilai $8000x$?

   Proof. Misalkan P menandakan ruang sampel dadu tanpa hasil $(1,1,1)$. Misalkan Q menandakan ruang sampel dadu tanpa hasil $(20,20,20)$. Kita dapat mengasosiasikan ruang sampel Q ke P dengan aturan:

$$\begin{aligned}
(a,b,c) &\mapsto (a+1,b,c) \text{ jika } a \neq 20,\\
(a,b,c) &\mapsto (a,b+1,c) \text{ jika } a,b \neq 20,\\
(a,b,c) &\mapsto (a,b,c+1) \text{ sisanya.}
\end{aligned}$$

   Dengan asosiasi di atas, sampel di Q dengan jumlahan modulo k akan dibawa ke sampel di P dengan jumlahan modulo $k+1$. Maka dalam modulo k, banyak sampel setiap modulo sama, ada 19 modulo dan total sampel P adalah $20^3 - 1$; maka setiap sampel memiliki anggota sebanyak

$$\frac{20^3 - 1}{19} = 421.$$

   Dan ingat bahwa sampel P mengekslusi kemungkinan $(1,1,1)$. Dengan mengembalikan sampel $(1,1,1)$ maka ada satu modulo dengan peluang tertinggi, yaitu $3 \mod 19$, dengan banyak sampel 422. $\square$

6. Untuk setiap x, y bilangan real positif, carilah nilai minimal dari bentuk
$$\frac{(x+y)^6}{x^2y^2(y+2x)^2}.$$

Proof. Perhatikan bahwa
$$\begin{aligned}(x+y)^6 = (x^2+2xy+y^2)^3 &= (x^2 + \frac{1}{2}y(y+2x) + \frac{1}{2}y(y+2x))^3 \\ (AM-GM) &\geq 27((x^2)(\frac{1}{2}y(y+2x))(\frac{1}{2}y(y+2x)) \\ &= \frac{27}{4}x^2y^2(y+2x)^2.\end{aligned}$$

Maka nilai minimal soal adalah $\frac{27}{4}$. Kesamaan bisa terjadi misal $x = \sqrt{2}+1, y = 1$. □

7. Carilah banyak solusi bulat nonnegatif (a, b) yang memenuhi persamaan
$$a^3 + b^2 + 1 = 7ab.$$

Proof. Perhatikan bahwa persamaan soal adalah persamaan kuadrat dalam variabel b,
$$b^2 - (7a)b + (a^3+1) = 0.$$

Agar persamaan ini memiliki solusi, nilai diskriminan adalah bilangan bulat kuadrat, jadi
$$D = (7a)^2 - 4(a^3+1) = m^2$$

untuk suatu m. Karena bilangan kuadrat nonnegatif, $49a^2 \geq 4a^3 + 4 \geq 4a^3 \Rightarrow \frac{49}{4} = 12.25 > a$. Karena bilangan kuadrat modulo 7 bersisa $0, 1, 2, 4$ dan bilangan kubik modulo 7 bersisa $0, 1, -1$. Maka $a^3 \equiv -1 \mod 7$ maka $a \equiv 3, 5, 6 \mod 7$, jadi $a = 3, 5, 6, 10, 11$. Tinjau modulo 3 ke persamaan diskriminan, maka
$$D \equiv a^2 - a - 1 \mod 3.$$

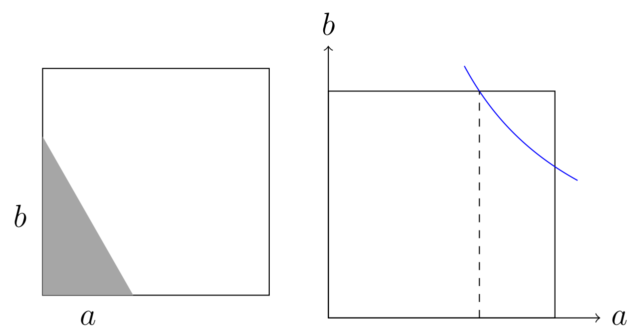
Maka $a \not\equiv 0, 1 \mod 3$. Maka $a = 5, 11$. Namun untuk nilai a yang demikian nilai diskriminannya adalah 721 dan 601, keduanya tidak ada yang bilangan kuadrat. □

8. Dua titik P, Q dipilih secara acak pada keliling persegi satuan $ABCD$. Misalnya kemungkinan luas segitiga APQ tidak lebih dari $\frac{1}{3}$ adalah p. Tentukanlah nilai dari $\lfloor 100p \rfloor$.

Proof. Kita tabel, dimana kolom menandakan sisi lokasi titik P dan baris sisi lokasi titik Q. Ada beberapa probabilitas yang sama, kita sementara notasikan dengan x dan y.

	AB	BC	CD	DA
AB	0	x	$\frac{2}{3}$	x
BC	x	0	y	$\frac{2}{3}$
CD	$\frac{2}{3}$	y	0	x
DA	x	$\frac{2}{3}$	x	0

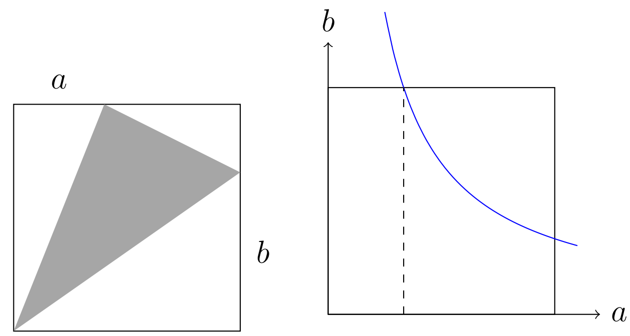
Dalam kasus yang bernilai x, konfigurasi titik ekivalen dengan mencari kemungkinan $ab \leq \frac{2}{3}$, dengan $0 \leq a, b \leq 1$ seperti gambar berikut:



Setelah digrafik, ini ekivalen dengan mencari area yang dibatasi persegi satuan dan dibawah kurva $b = \frac{2}{3a}$. Maka luasnya adalah

$$\frac{2}{3} + \int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{2}{3t} dt = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(\ln \frac{3}{2}) \sim 0.937.$$

Dengan cara yang sama, dalam kasus yang bernilai y, konfigurasi titik ekivalen dengan mencari kemungkinan $1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}(1-a)(1-b) = \frac{1}{2} - \frac{ab}{2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow ab \geq \frac{1}{3}$, dengan $0 \leq a, b \leq 1$ seperti gambar berikut:



Setelah digrafik, ini ekivalen dengan mencari area yang dibatasi persegi satuan dan diatas kurva $b = \frac{1}{3a}$. Maka luasnya adalah

$$\frac{2}{3} - \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{3t} dt = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\ln 3) \sim 0.300.$$

Maka total kemungkinan adalah

$$p = \frac{1}{16}\left(4 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot 0.937 + 2 \cdot 0.300\right) \sim 0.555$$

$\square$

2 Solusi Esai

1. Apakah ada bilangan asli palindrom yang habis dibagi oleh

$$\underbrace{111\cdots11104}_{2018\text{ digit}}?$$

Jawab: Ada.

Proof. Perhatikan bahwa

$$A := \underbrace{111\cdots11104}_{2018\text{ digit}} = 64\times g$$

Untuk suatu bilangan ganjil g, dan g relatif prima dengan 10. Menurut teorema Euler, ada n sehingga

$$g|10^n - 1 = \underbrace{999\cdots999}_{n}\,|\,\underbrace{111\cdots111}_{9n}.$$

Tulis $N = 9n$, maka Maka $A = 64g$ membagi

$$1024\times\underbrace{111\cdots111}_{N} = 113777\cdots777664$$

dan karena $64|10^N$, A juga membagi

$$4201\times\underbrace{111\cdots111}_{N}\times10^{N+3} = 466777\cdots777311\underbrace{000\cdots000}_{N+3}$$

Jumlahan dua bilangan ini adalah

$$466777\cdots777311113777\cdots777664$$

yang merupakan bilangan palindrom. □

2. Sebuah loyang kue berbentuk segitiga samasisi dengan panjang sisi 10. Loyang tersebut akan diisi oleh biskuit-biskuit belahketupat dengan panjang sisi 1. Biskuit tak boleh bertumpuk dan seluruh sisinya harus sejajar dengan sisi loyang.

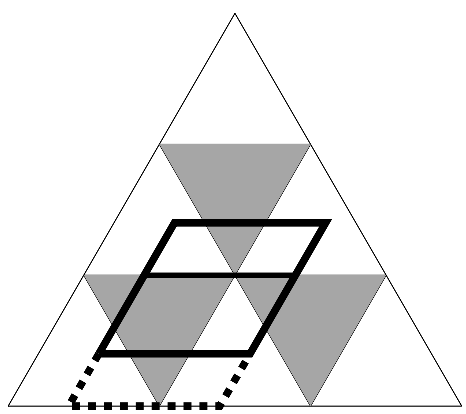
   Berapa maksimal banyak biskuit yang dapat digunakan untuk mengisi loyang tersebut?

Jawab: 45 biskuit.

Proof. Karena sisi-sisi biskuit sejajar dengan sisi loyang, maka sudut biskuit adalah 60° atau 120°. Jadi, setiap biskuit bisa dipandang sebagai gabungan dua segitiga samasisi satuan.

Jelas bahwa konfigurasi 45 biskuit dapat tercapai. Atur saja sehingga seluruh biskuit orientasinya sama dan padat ke salah satu sisi loyang.

Kita membagi loyang menjadi 100 segitiga samasisi satuan dan mewarnainya dengan pola checkerboard seperti biasa. Kita klaim bahwa luas segitiga hitam yang ditutupi setiap biskuit adalah tepat 1.



Perhatikan bahwa pola hitam-putih pada loyang invarian terhadap translasi sepanjang sisi biskuit. Maka, apabila kita memotong biskuit pada garis horizontal, maka luas dan pola hitam-putih pada di atas garis, sama persis dengan luas dan pola hitam-putih di bawah biskuit. Memotong dan menempelkan biskuit tidak akan mengubah luas daerah hitam yang ditutupi biskuit. Setelah pemotongan, didapat biskuit yang menutupi daerah hitam yang sama namun terletak di dalam strip horizontal.

Lakukan ini sekali lagi (kali ini potong terhadap garis yang sejajar dengan sisi biskuit yang miring), agar biskuit yang terpotong tepat menutupi satu segitiga hitam dan satu segitiga putih.

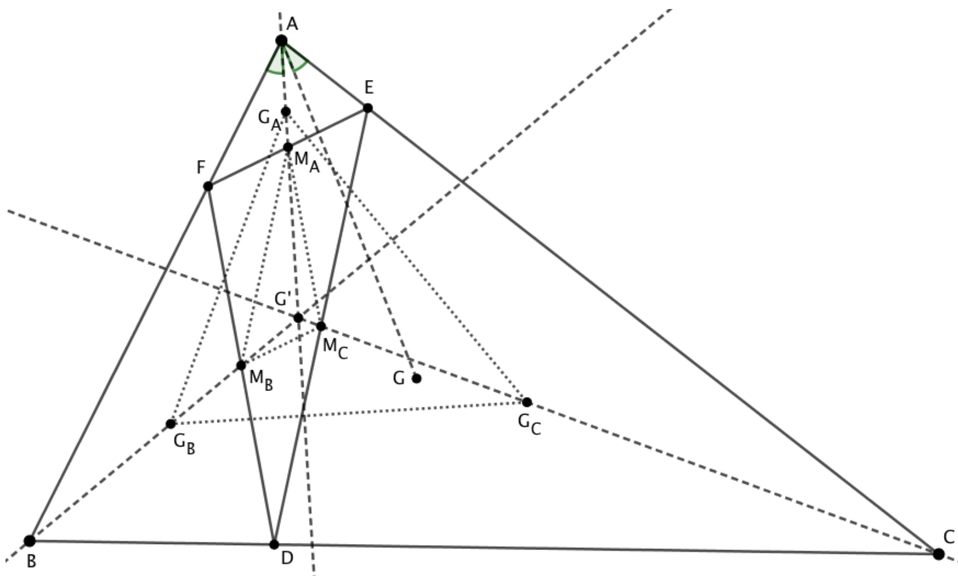
Karena loyang hanya memiliki 45 segitiga hitam (dan 55 segitiga putih), dan setiap biskuit menutupi daerah hitam dengan luas 1, maka dapat disimpulkan loyang muat paling banyak 45 biskuit. $\square$

3. Pada segitiga lancip ABC, titik D, E, F beturut-turut merupakan kaki tinggi A, B, C terhadap sisi di seberangnya. Tulis G_A, G_B, G_C sebagai centroid (titik berat) dari segitiga AEF, BFD, CDE. Andaikan

$$\angle G_A G_B G_C = \angle ABC \text{ dan } \angle G_B G_C G_A = \angle BCA.$$

Buktikan bahwa ABC merupakan segitiga sama sisi.

Proof. Andaikan G adalah centroid ABC. Klaim bahwa AG_A, BG_B, CG_C konkuren.



Bukti klaim: dengan mencari sudut, mudah didapatkan bahwa $AEF \sim ABC$; karena G centroid ABC, dan G_A centroid AEF, maka kita punya $\angle GAC = \angle FAG_A$. Dengan cara yang sama, kita punya banyak pasangan sudut yang besarnya sama. Maka hasil kali rasio

$$\frac{\sin(\angle BAG_A)}{\sin(\angle G_A AC)} \cdot \frac{\sin(\angle ACG_C)}{\sin(\angle G_C CB)} \cdot \frac{\sin(\angle CBG_B)}{\sin(\angle G_B BA)}$$

$$= \frac{\sin(\angle GAC)}{\sin(\angle GAB)} \cdot \frac{\sin(\angle ABG)}{\sin(\angle GBC)} \cdot \frac{\sin(\angle BCG)}{\sin(\angle(GCA)} = 1.$$

Menurut Ceva Sinus, kita punya AG_A, BG_B, CG_C konkuren.

Sebut titik potong tiga cevian tadi G'. Kita definisikan tiga konstan berikut ini:

$$\lambda_A = \frac{G'A}{G'G_A},\ \lambda_B = \frac{G'B}{G'G_B},\ \lambda_C = \frac{G'C}{G'G_C}.$$

Andaikan konstan tersebut ada yang berbeda nilainya, WLOG, λ_A adalah konstan terkecil. Maka suatu dilatasi (scaling) dengan rasio λ_A terhadap segitiga $G_AG_BG_C$ dan pusat G' membawa G_A ke A, dan G_B, G_C berturut[2] ke G^*_B, G^*_C di **segmen** $G'B, G'C$. Jadi

$$\angle G^*_B A G^*_C \leq \angle BAC.$$

Padahal dari syarat soal kita mengetahui bahwa $G_AG_BG_C$ sebangun ABC, maka $\angle BAC = \angle G_BG_AG_C$. Ini memaksa $G^*_B = B$ dan $G^*_C = C$, maka $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C$. Kita boleh melepaskan indeks dan tulis konstan ini sebagai λ.

Untuk $X \in \{A, B, C\}$, tulis M_X sebagai perpotongan XG_X terhadap sisi segitiga ortik di depannya. Maka XM_X adalah garis median segitiga tersebut, dan $G_XX = 2 \cdot G_XM_X$. Perhatikan bahwa nilai

$$\frac{G'M_X}{G'X} = \frac{G'G_X - M_XG_X}{G'X} = \frac{G'G_X - \frac{1}{2}(G'X - G'G_X)}{G'X}$$

adalah konstan yang tidak bergantung pada pemilihan indeks X. Maka dapat disimpulkan $M_AM_BM_C \sim ABC$. Namun $M_AM_BM_C \sim DEF$, jadi $ABC \sim DEF$. Menghitung sudut, didapat

$$\angle DEF = 180^\circ - 2\angle CBA = \angle CBA \Rightarrow \angle CBA = 60^\circ.$$

Dengan cara yang sama seluruh sudutnya dapat dicari dan nilainya harus 60°, maka ABC segitiga sama sisi. $\square$

4. Apakah terdapat fungsi takterbatas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga

$$f(x+y) \leq f(x) \cdot \cos(y) + f(y) \cdot \cos(x)$$

berlaku untuk setiap bilangan real x dan y?

Jawab: Tidak ada.

Proof. Andaikan f adalah fungsi takterbatas yang memenuhi syarat ketaksamaan soal. Kita akan menyimpulkan sebuah kontradiksi.

Subs $y = 0$ untuk mendapatkan

$$f(x) \leq f(x) + f(0) \cdot \cos(x) \Rightarrow 0 \leq f(0) \cdot \cos(x)\, \forall x.$$

Subs $x = 0$ dan $x = -\pi$; didapat $0 \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Perhatikan bahwa fungsi $\sin(x)$ memenuhi kesamaan

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \sin(y) \cdot \cos(x).$$

Definisikan fungsi baru

$$f_0(x) = f(x) - f(\frac{\pi}{2}) \cdot \sin(x).$$

Ini adalah fungsi f yang digeser sebanyak nilai beberapa kelipatan $\sin(x)$. Karena f takterbatas, demikian juga f_0. Terlebih lagi, $f_0(0) = 0$ dan $f_0(\frac{\pi}{2}) = 0$, dan f_0 tetap memenuhi ketaksamaan pada soal. Jadi peran f bisa diambil alih oleh f_0; maka tanpa mengurangi keumuman, kita selalu dapat menambahkan asumsi $f(\frac{\pi}{2}) = 0$

Subs $y = \pi/2$, didapat

$$f(x + \frac{\pi}{2}) \leq f(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(x) = 0$$

Jadi f nonpositif. Karena f takterbatas, maka f mempunyai nilai negatif.

Subs $y = -x$ maka $0 = f(0) \leq (f(x) + f(-x)) \cdot \cos(x)$. Jadi apabila $\cos(x) > 0$ maka $f(x) + f(-x) \geq 0$ tapi karena f nonpositif, maka haruslah $f(x) = f(-x) = 0$.

Subs $y = \frac{\pi}{4}$. Perhatikan bahwa $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ karena paragraf di atas. Maka

$$f(x + \frac{\pi}{4}) \leq f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|f(x)|}{\sqrt{2}} \leq |f(x + \frac{\pi}{4})|.$$

Ekivalensi terakhir karena f nonpositif.

Maka, jika $|f(x)|$ taknol, demikian juga dengan $|f(x + \frac{\pi}{4})|$. Namun diantara

$$\theta, \theta + \frac{\pi}{4}, \theta + \frac{2\pi}{4}, \theta + \frac{3\pi}{4}, \theta + \pi,$$

pasti ada salah satu yang nilai cos nya positif, maka nilai f disitu 0. Kontradiksi. $\square$

Lomba Unik Matematika ala Tobi