SOLUSI

OLIMPIADE SAINS TINGKAT PROPINSI 2018

BIDANG MATEMATIKA SMA

MIFTAH MATHEMATICS REVOLUTION (MMR)

SURABAYA

2018

SOLUSI OSP SMA 2018

Oleh : Miftahus Saidin

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya pasangan terurut bilangan bulat (a, b) sehingga $a^2 + b^2 = a + b$ adalah.....

Jawaban : 4

$$a^2 + b^2 = a + b$$

Jika kedua ruas dikalikan 4 maka diperoleh

$$4a^2 + 4b^2 = 4a + 4b$$
$$4a^2 - 4a + 4b^2 - 4b = 0$$
$$4a^2 - 4a + 1 + 4b^2 - 4b + 1 = 2$$
$$(2a - 1)^2 + (2b - 1)^2 = 2$$

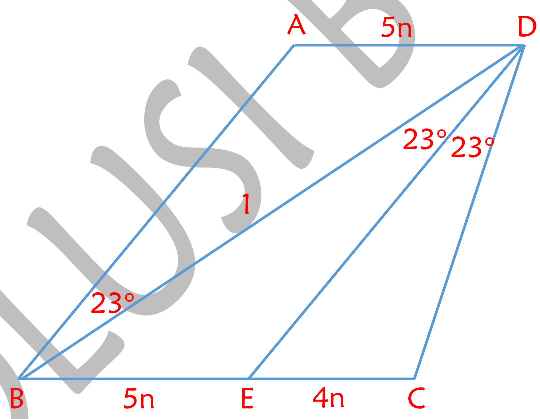
Karena a, b bilangan bulat maka $(2a - 1)$ dan $(2b - 1)$ bilangan ganjil, sehingga kemungkinan-kemungkinannya hanyalah $2a - 1 = \pm 1$ dan $2b - 1 = \pm 1$.

Jadi, ada 4 pasangan bilangan bulat (a, b) yang memnuhi, yaitu $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$, dan $(1, 1)$

2. Diberikan trapesium ABCD, dengan AD sejajar BC. Diketahui BD = 1, ∠DBA = 23°, dan ∠BDC = 46°. Jika perbandingan BC : AD = 9 : 5, maka panjang sisi CD adalah ...

Jawaban : $\frac{4}{5}$

Perhatikan gambar berikut !



Ambil titik E pada BC sehingga DE sejajar AB. Karena AD sejajar BE maka ADEB jajargenjang. Akibatnya, ∠EDB = ∠DBA = 23°. Berarti ED garis bagi ∠BDC sehingga berlaku :

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BD}{CD}$$
$$\frac{5n}{4n} = \frac{1}{CD}$$

Diperoleh CD = $\frac{4}{5}$

3. Misalkan $a > 0$ dan $0 < r_1 < r_2 < 1$ sehingga $a + ar_1 + ar_1^2 + \ldots$ dan $a + ar_2 + ar_2^2 + \ldots$ adalah deret geometri tak hingga dengan jumlah berturut-turut r_1 dan r_2. Nilai dari $r_1 + r_2$ adalah ...

Jawaban : 1

Perhatikan bahwa :

$$a + ar_1 + ar_2 + \ldots = \frac{a}{1 - r_1}$$

$$r_1 = \frac{a}{1 - r_1}$$

$$a = r_1 - r_1^2$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

$$a = r_2 - r_2^2$$

Dengan demikian,

$$r_1 - r_1^2 = r_2 - r_2^2$$

$$(r_1^2 - r_2^2) - (r_1 - r_2) = 0$$

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) - (r_1 - r_2) = 0$$

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2 - 1) = 0$$

Karena $r_1 \neq r_2$ maka $r_1 + r_2 = 1$.

4. Diketahui $S = \{10, 11, 12, \ldots, N\}$. Suatu unsur di S dikatakan *trubus* jika jumlah digit-digitnya merupakan pangkat tiga dari suatu bilangan asli. Jika S memiliki tepat 12 *trubus*, maka nilai terbesar N yang mungkin adalah ...

Jawaban : **124**

Perhatikan bahwa :

- Untuk bilangan 2 digit

  $1^3 = 1 + 0$ --------> ada 1

  $2^3 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2 = 7 + 1 = 8 + 0$ --------> ada 8

- Untuk bilangan 3 digit

  $1^3 = 1 + 0 + 0$ --------> ada 1

  $2^3 = 1 + 0 + 7 = 1 + 1 + 6$ --------> ada 2

  Bilangan berikutnya yang jumlah digit-digitnya sama dengan 2^3 adalah 125

Jadi, nilai terbesar N yang mungkin adalah 125−1 = 124.

5. Bilangan asli terkecil n sehingga $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ habis dibagi 30 adalah ....

Jawaban : 8

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n!\,(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ (2n-1)(2n)}{(\boldsymbol{n}!)(\boldsymbol{n}!)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ (2n)}{1\times 2\times 3\times \ldots \times n}$$

Faktorisasi dari $30 = 2\times 3\times 5$, supaya $30|\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ maka $(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ (2n)$ harus memiliki faktor prima 2, 3 dan 5. Jadi, $n\geq 4$.

Untuk $n=4$ maka $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(5)(6)(7)(8)}{(1)(2)(3)(4)} = 70$ (tidak habis dibagi 30)

Untuk $n = 5, 6, 7$ -----> $(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ (2n)$ dan $1\times 2\times 3\times \ldots \times n$ sama- sama mempunyai tepat satu faktor 5. Jadi tidak memenuhi.

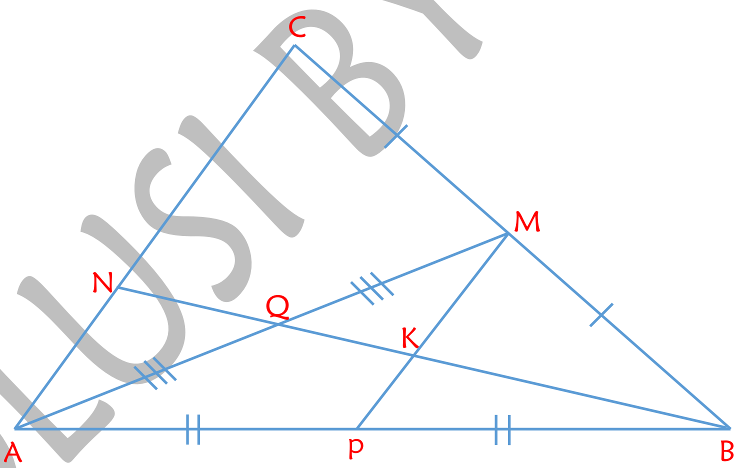
Untuk $n=8$ -----> $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)}{(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)} = 12870$ (habis dibagi 30)

Jadi, n terkecil yang memenuhi adalah 8.

6. Diberikan segitiga tak sama kaki ABC dengan M titik tengah BC. Misalkan K adalah titik berat ABM. Titik N pada sisi AC sehingga luas segiempat KMCN setengah dari luas ABC. Nilai $\frac{AN}{NC}$ adalah ....

Jawaban : $\frac{1}{2}$

Perhatikan gambar berikut !



Karena M titik tengah BC maka

$$[ACM] = \frac{1}{2}[ABC]$$

$$[CMQN] + [QNA] = \frac{1}{2}[ABC]$$

Perhatikan bahwa :

$$[KMCN] = \frac{1}{2}[ABC]$$

$$[CMQN] + [QKM] = [CMQN] + [QNA]$$

$$[QKM] = [QNA]$$

Karena P titik tengah AB dan M titik tengah BC maka PM sejajar AC, akibatnya $\angle KMQ = \angle NAQ$.

$$\frac{[QKM]}{[QNA]} = 1$$

$$\frac{QM \times KM}{QA \times AN} = 1$$

$$KM = AN$$

akibatnya QKM kongruen dengan QNA, sehingga B, K, Q, N segaris dan berlaku *dalil manaluase*

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{QM}{QA} \cdot \frac{BC}{BM} = 1$$

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

Diperoleh $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$

7. Di dalam suatu kotak terdapat n kelereng merah dan m kelereng biru. Diambil 5 kelereng sekaligus. Jika peluang terambilnya 3 kelereng merah dan 2 kelereng biru adalah $\frac{25}{77}$ maka nilai terkecil dari $m^2 + n^2$ yang mungkin adalah ....

<u>Jawaban :</u> **61**

$$P(3 \text{ merah}, 2 \text{ biru}) = \frac{\binom{n}{3}\binom{m}{2}}{\binom{m+n}{5}}$$

$$\frac{5}{154} = \frac{n(n-1)(n-2)m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)(m+n-4)}$$

Perhatikan bahwa :

$A = (m+n)(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)(m+n-4)$ adalah perkalian dari 5 bilangan asli berurutan. Karena $154 = 7 \times 2 \times 11$, maka A pasti habis dibagi 7 dan 11. Karena yang akan dicari $m^2 + n^2$ terkecil maka nilai A terkecil yang memenuhi yaitu

$$A = 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11$$

Jika $A = 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11$ maka $m + n = 11$. Karena pembilang dari peluang sama dengan 5, maka maka salah satu dari $m!$ atau $n!$ habis dibagi 5. Oleh karena 7 membagi penyebut dari peluang maka $m, n < 7$, sehingga diperoleh pasangan (m, n) yang memenuhi kondisi tersebut, yaitu $(5, 6)$ atau $(6, 5)$. Untuk $(m, n) = (6,5)$ tidak memenuhi jika disubtitusikan ke soal.

Jadi, satu-satunya pasangan (m, n) yang memnuhi kondisi tersebut adalah $(5, 6)$.

Nilai dari $m^2 + n^2 = 61$.

8. Misalkan $P(x)$ suatu polinom (suku banyak) *tak konstan* dengan koefisien bilangan bulat tak negatif yang memenuhi $P(10) = 2018$. Misalkan m dan M berturut-turut dalah nilai minimum dan maksimum yang mungkin dari $P(1)$. Nilai $m + M$ dadalah ...

Jawaban : 2020

Mislakan $P(x)$ polinom berderajat n mak dapat ditulis

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ \dots\ + ax^n$$

- Jika $n = 1$ maka $P(x) = a_0 + a_1x$

  $P(10) = 2018 = a_0 + 10a_1$ ------> $1 \leq a_1 \leq \frac{2018 - a_0}{10} = 201{,}8$

  $$P(1) = a_0 + a_1 = 2018 - 9a_1$$

  $$2018 - 9(201) = 209 \leq P(1) \leq 2018 - 9(1) = 2009$$

  $P(1) = 209$ terjadi jika $a_1 = 201$ dan $a_0 = 2008$ ----> $P(x) = 201x + 8$

  $P(1) = 2009$ terjadi jika $a_1 = 1$ dan $a_0 = 2008$ ----> $P(x) = x + 2008$

- Jika $n = 2$ maka $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

  $P(10) = 2018 = a_0 + 10a_1 + 100a_2$ ------> $1 \leq a_2 \leq \frac{2018 - a_0 - 10a_1}{100} = 20{,}18$

  Jika $a_2 = 20$ maka $0 \leq a_1 = \frac{2018 - a_0 - 2000}{10} = \frac{18-a_0}{10} \leq 1{,}8$

  $$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 2018 - 9a_1 - 99a_2$$

  $$2018 - 9(1) - 99(20) = 29 \leq P(1) \leq 2018 - 999(1) = 1919$$

  $P(1) = 29$ terjadi jika $a_2 = 20,\ a_1 = 1$ dan $a_0 = 8$ ----> $P(x) = 20x^2 + x + 8$

  $P(1) = 1919$ terjadi jika $a_1 = 1, a_1 = 0$ dan $a_0 = 1918$ ----> $P(x) = x^2 + 1918$

- Jika $n = 3$ maka $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

  $P(10) = 2018 = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3$ ---> $1 \leq a_3 \leq \frac{2018 - a_0 - 10a_1 - 100a_3}{1000} = 2{,}018$

  Jika $a_3 = 2$ maka $0 \leq a_2 = \frac{18-a_0-10a_1}{100} \leq \frac{18}{100} = 0{,}18$ diperoleh $a_2 = 0$

  Jika $a_3 = 2$ dan $a_2 = 0$ maka $0 \leq a_1 = \frac{18-a_0}{10} \leq \frac{18}{100} = 1{,}8.$

  $$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2018 - 9a_1 - 99a_2 - 999a_3$$

  $$2018 - 999(2) - 99(0) - 9(1) = 11 \leq P(1) \leq 2018 - 999(1) = 1019$$

  $P(1) = 11$ terjadi jika $a_3 = 2\ , a_2 = 0,\ a_1 = 1$ dan $a_0 = 8$ ----> $P(x) = 2x^3 + x + 8$

  $P(1) = 1019$ terjadi jika $a_3 = 1,\ a_2 = 0,\ a_1 = 0$ dan $a_0 = 1918$ ----> $P(x) = x^3 + 19$

- Jika $n \geq 4$ maka $a_4 = a_5 = \ \dots\dots\dots\ = 0$, sehingga $P(x)$ berderajat kurang dari 4.

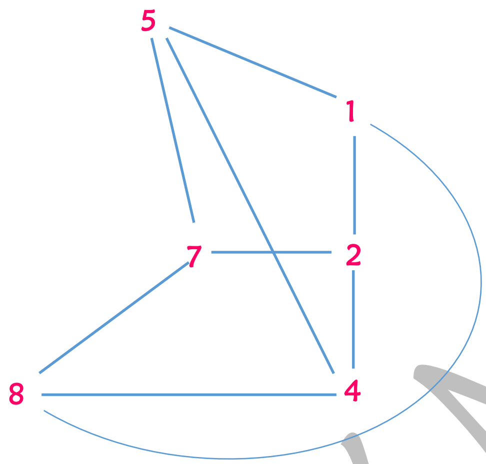
Jadi, diperoleh $m = 11$ dengan persamaan $P(x) = 2x^3 + x + 8$ dan $M = 2009$ dengan persamaan $P(x) = x + 2008$.

Nilai dari $m + M = 2009 + 11 = 2020$.

9. Sebuah propinsi terdiri dari 9 kota yang diberi nama 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dari kota a terdapat jalan langsung ke kota b jika dan hanya jika $\overline{ab}$ dan $\overline{ba}$ merupakan bilangan dua digit yang habis dibagi 3. Dua buah kota berbeda a_1 dan a_n dikatakan terhubung jika terdapat barisan kota-kota $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sehingga terdapat jalan langsung dari a_i ke a_{i+1} untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Banyaknya kota yang terhubung dengan kota 4 adalah ...

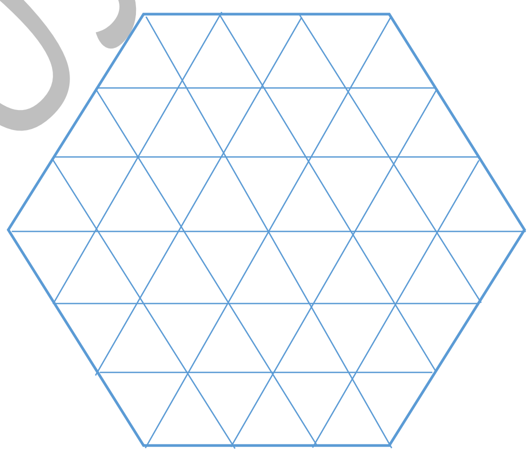
Jawaban : 5

Pehatikan graf berikut !



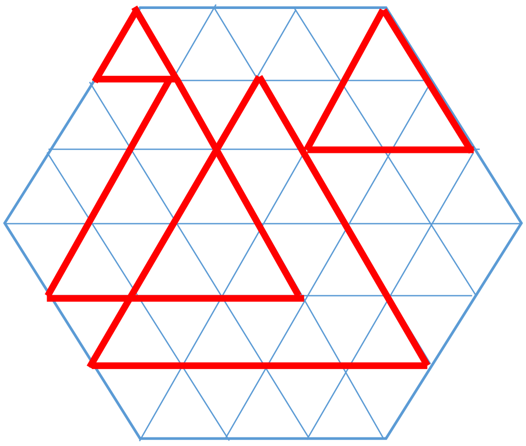
Banyaknya kota yang yang terhubung dengan 4 adalah 5.

10. Diberikan 37 titik seperti pada gambar sehingga setiap dua titik yang bertetangga berjarak satu satuan. Dari sertiap tiga titik berbeda digambar segitiga merah. Banyaknya semua kemungkinan panjang sisi segitiga merah yang sama sisi adalah ....



Jawaban : 4

Ada 4 kemungkinan panjang, yaitu 1 satuan, 2 satuan, 3 satuan, dan 4 satuan seperti pada gambar berikut



11. Diambil secara acak bilangan bulat positif k dengan $k \leq 2018$. Peluang k^{1009} bersisa 2 jika dibagi 2018 adalah ....

Jawaban : $\frac{1}{2018}$

Karena faktorisasi prima $2018 = 2 \times 1009$, maka mod 2018 dibagi menjadi 2 kasus, yaitu mod 2 dan mod 1009.

- Untuk kasus mod 2, maka $k^{1009} \equiv 2 \pmod 2 \equiv 0 \pmod 2$. Jelas bahwa k adalah bilangan genap.
- Untuk kasus mod 5, karena 1009 bilangan prima, maka berdasarkan *teorema fermat*, untuk $1009 \nmid k$ berlaku.

$$k^{1008} \equiv 1 \pmod{1009}$$
$$k^{1009} \equiv k \pmod{1009} \equiv 2 \pmod{1009}$$

Jika $1009|k$ maka $k^{2009} \equiv 0 \pmod{1009}$ (tidak memenuhi).

Jadi, k genap dan $k \equiv 2 \pmod{1009}$ sehingga hanya ada 1 nilai k yang memenuhi, yaitu $k = 2$.

Peluang k^{1009} bersisa 2 jika dibagi 2018 adalah $\frac{1}{2018}$.

12. Diberikan bilangan riil tak negatif a, b, c, d, e dengan $ab + bc + cd + de = 2018$. Nilai minimum dari $a + b + c + d + e$ adalah ...

Jawaban : $2\sqrt{2018}$

Perhatikan bahwa :

$$\frac{(a+c+e)+(b+d)}{2} \overset{AM-GM}{\geq} \sqrt{ab+bc+cd+de+be+ad}$$

Karea $a, b, d, e \geq 0$ maka

$$a+b+c+d+e \geq 2\sqrt{ab+bc+cd+de} = 2\sqrt{2018}$$

13. Banyaknya himpunan bagian (termasuk himpunan kosong) dari $X = \{1, 2, 3, \dots, 2017, 2018\}$ yang tidak memiliki dua unsur x dan y sehingga $xy = 2018$ ada sebanyak $m2^n$ dengan m ganjil. Nilai $m + n$ adalah …

<u>Jawaban :</u> **2023**

Perhatikan bahwa :

$$2018 = 1 \times 2018 = 2 \times 1009$$

Banyaknya himpunan bagian dari $X = 2^{2018}$

Banyaknya himpunan bagian dari X yang memuat bilangan 1 dan 2018 $= 2^{2016}$

Banyaknya himpunan bagian dari X yang memuat bilangan 2 dan 1009 $= 2^{2016}$

Banyaknya himpunan bagian dari X yang memuat bilangan 1, 2, 1009, dan 2018 $= 2^{2014}$

Banyaknya himpuna bagian dari X yang tidak memuat x dan y sehingga $xy = 2018$ adalah

$= 2^{2018} - 2^{2016} - 2^{2016} + 2^{2014}$

$= 2^{2014}(2^4 - 2^2 - 2^2 + 1)$

$= 9 \times 2^{2014}$

diperoleh $m = 9$ dan $n = 2014$.

Nilai $m + n$ adalah 2023.

14. Misalkan $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Diketahui ada tepat 1001 pasangan (a, b, c, d) dengan $a, b, c, d \in S$ dan $a < b < c < d$ sehingga a, b, c, d barisan aritmatika. Nilai n adalah …

<u>Jawaban :</u> **79**

Barisan aritmatika dengan beda 1

$$\left.\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 4, & 5, & 6 \\ & \vdots & & \\ n-3, & n-3, & n-1, & n \end{matrix}\right\}$$

Ada sebanyak $n - 3$ barisan

Barisan aritmatika dengan beda 2

$$\left.\begin{matrix} 1, & 3, & 5, & 7 \\ 2, & 4, & 6, & 8 \\ 3, & 5, & 7, & 9 \\ & \vdots & & \\ n-6, & n-4, & n-2, & n \end{matrix}\right\}$$

Ada sebanyak $n - 6$ barisan

Barisan aritmatika dengan beda 3

$$\left.\begin{matrix} 1, & 3, & 5, & 7 \\ 2, & 4, & 6, & 8 \\ 3, & 5, & 7, & 9 \\ & \vdots & & \\ n-9, & n-6, & n-3, & n \end{matrix}\right\}$$

………………… dan seterusnya

Ada sebanyak $n - 6$ barisan

Total ada tetap 1001 barisan, maka

$$(n-3) + (n-6) + (n-9) + \dots + \left(n - 3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right) = 1001$$

$$n\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-3\left(1+2+3+\ \dots\ +\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)=1001$$

$$\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor n-\frac{3}{2}\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+1\right)=1001$$

$$\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\left(2n-3\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+1\right)\right)=2002$$

Karena n bilangan asli maka dapat ditulis $n=3k+r$, dengan $r=0,1,2$ dan k sebarang bilangan asli sehingga

$$k\big(2(3k+r)-3(k+1)\big)=2002$$

$$k(3k+2r-3)=2002$$

- Untuk $r=0$, maka $k(3k-3)=2002$ (tidak memenuhi sebab k bukan bilangan asli)
- Untuk $r=1$, maka $k(3k-1)=2002$ ---> $3k^2-k-2002=0$ ---> $(3k-77)(k-26)=0$

  Diperoleh $k=26$ dan $n=3\times 26+1=79$.
- Untuk $r=2$, maka $k(3k+1)=2002$ (tidak memenuhi sebab k bukan bilangan asli)

Jadi, nilai n adalah 79.

15. Banyaknya bilangan asli n sehingga

$$n^4-5n^3+5n^2+4n+10$$

merupakan bilangan prima adalah ....

<u>Jawaban:</u> **1**

Perhatikan bahwa :

$A=n^4-5n^3+5n^2+4n+10=n^4+n^3+n^2-6(n^3+n^2+n)+10(n^2+n+1)$

$A=n^2(n^2+n+1)-6n(n^2+n+1)+10(n^2+n+1)=(n^2-6n+10)(n^2+n+1)$

Agar A merupakan bilangan prima maka $n^2+n+1=1$ atau $n^2-6n+10=1$.

Jika $n^2+n+1=1$ maka $n^2+n=0$ --> $n(n+1)=0$ diperoleh $n=0$ atau $n=-1$ (tidak memenuhi, sebab n bukan bilangan asli).

Jika $n^2-6n+10=1$ maka $n^2-6n+9=0$ --> $(n-3)^2=0$ diperoleh $n=3$.

Untuk $n=3$ maka $A=13$ (bilangan prima)

Jadi, ada 1 nilai n yang memnuhi, yaitu $n=3$.

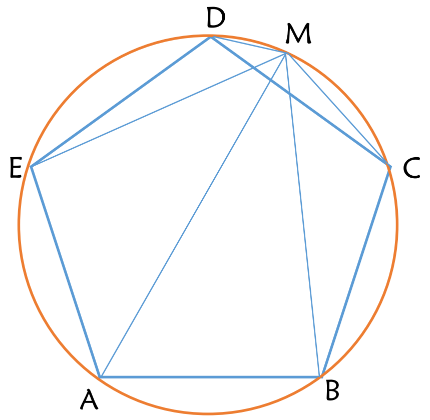
16. Titik M terletak pada lingkaran luar segilima beraturan ABCDE. Nilai terbesar

$$\frac{MB+ME}{MA+MC+MD}$$

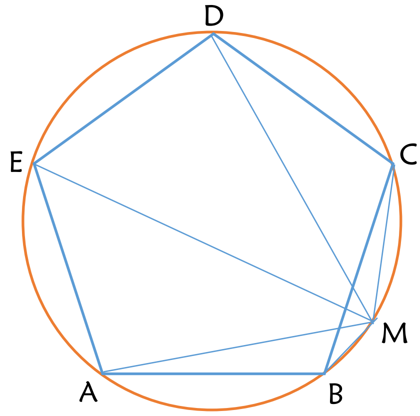
yang mungkin adalah ...

Jawaban : 1

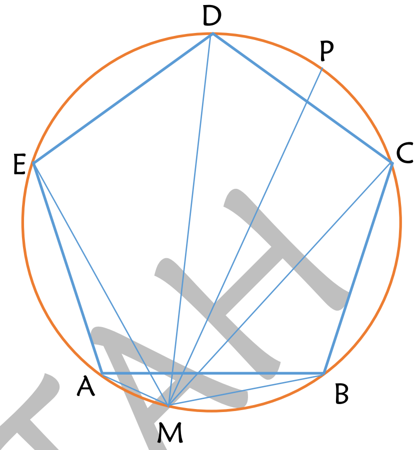
Perhatikan gambar berikut !



Gambar 1



Gambar 2



Gambar 3

Karena ABCDE segilima beraturan maka AB = BC = CD = DE = EA, AC = AD = BD = BE = CE = CA = DA = DB = EB = EC, dan $\angle BMC = \angle CMD = \angle DME = \angle EMA = 36°$.

- **Kasus 1 :** Titik M terletak pada busur kecil CD (termasuk titik C dan D) (**Gambar 1)**

  Dengan aturan cosinus ΔDAM dan ΔCAM, maka :

$$DA^2 = MD^2 + MA^2 - 2MD \cdot MA \cos 72°$$
$$CA^2 = MC^2 + MA^2 - 2MC \cdot MA \cos 72° \quad -$$
$$0 = (MD^2 - MC^2) - 2(MD - MC)MA \cos 72°$$

  $(MD - MC)(MD + MC - 2MA\cos 72°) = 0$, diperoleh $MD = MC$ atau $MC + MD = 2MA\cos 72°$.

  Dengan aturan cosinus ΔMEA dan ΔMBA, maka :

$$AE^2 = ME^2 + MA^2 - 2ME \cdot MA \cos 36°$$
$$AB^2 = MB^2 + MA^2 - 2MB \cdot MA \cos 36° \quad -$$
$$0 = (ME^2 - MB^2) - 2(ME - MB)MA \cos 36°$$

  $(ME - MB)(ME + MB - 2MA\cos 36°) = 0$, diperoleh $ME = MB$ atau $ME + MB = 2MA\cos 36°$.

  - Jika $MD = MC$ maka, $MB = ME = MA\cos 36°$ dan $MD = MC = MA\cos 72°$ sehingga

$$\frac{MB + ME}{MA + MC + MD} = \frac{2MA\cos 36°}{MA(1 + 2\cos 72°)} = \frac{2\cos 36°}{1 + 2\cos 72°} = \frac{2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)}{1 + 2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)} = 1$$

  - Jika $MC + MD = 2MA\cos 72°$ dan $ME + MB = 2MA\cos 36°$, maka

$$\frac{MB + ME}{MA + MC + MD} = \frac{2MA\cos 36°}{MA(1 + 2\cos 72°)} = \frac{2\cos 36°}{1 + 2\cos 72°} = 1$$

- **Kasus 2 :** Titik M terletak pada busur kecil BC (termasuk titik B tetapi tidak termasuk titik C). Hal ini ekivalen dengan titik M terletak pada busur kecil DE (termasuk tetapi titik E tidak termasuk titik D) **(Gambar 2)**

Dengan aturan cosinus ΔDAM dan ΔCAM, maka :

Ingat bahwa

$\cos 108° = -\cos 72°$

$$\begin{array}{rl} DA^2 = MD^2 + MA^2 - 2MD \cdot MA \cos 72° & \\ CA^2 = MC^2 + MA^2 - 2MC \cdot MA \cos 108° & - \\ \hline 0 = (MD^2 - MC^2) - 2(MD + MC)MA \cos 72° & \end{array}$$

$(MD + MC)(MD - MC - 2MA \cos 72°) = 0$, karena $MD + MC \neq 0$ maka diperoleh :

$$MC + MD = 2MC + 2MA \cos 72°$$

Perhatikan bahwa :

$$2MC > ME \cos 72° > MA \cos 72°$$

$$MC + MD = 2MC + 2MA \cos 72° > 3MA \cos 72°$$

Dengan aturan cosinus ΔMEA dan ΔMBA, maka :

$$\begin{array}{rl} AE^2 = ME^2 + MA^2 - 2ME \cdot MA \cos 36° & \\ AB^2 = MB^2 + MA^2 - 2MB \cdot MA \cos 36° & - \\ \hline 0 = (ME^2 - MB^2) - 2(ME - MB)MA \cos 36° & \end{array}$$

$(ME - MB)(ME + MB - 2MA \cos 36°) = 0$, karena $ME \neq MB$ maka diperoleh

$$ME + MB = 2MA \cos 36°.$$

$$\frac{MB + ME}{MA + MC + MD} < \frac{2MA \cos 36°}{MA + 3MA \cos 72°} = \frac{2MA \cos 36°}{MA(1 + 3 \cos 72°)} = \frac{2 \cos 36°}{1 + 3 \cos 72°} < 1.$$

- **Kasus 3 :** Titik M terletak pada busur kecil AB (termasuk titik A dan B). Hal ini ekivalen dengan titik M terletak pada busur kecil AE (termasuk titik A dan E (Gambar 3)

  Misalkan X titik tengah busur CD, maka $\angle CMP = \angle DMP = 18°$, $BP = EP$, dan $CP = DP$.

  Dengan aturan cosinus ΔBPM dan ΔEPM, maka :

$$\begin{array}{rl} BP^2 = MB^2 + MP^2 - 2MB \cdot MP \cos 54° & \\ EP^2 = ME^2 + MP^2 - 2ME \cdot MP \cos 54° & - \\ \hline 0 = (MB^2 - ME^2) - 2(MB - ME)MP \cos 54° & \end{array}$$

  $(MB - ME)(MB + ME - 2MP \cos 54°) = 0$, karena $MB \neq ME$ maka diperoleh :

$$MB + ME = 2MP \cos 54°$$

  Dengan aturan cosinus ΔCPM dan ΔDPM, maka :

$$\begin{array}{rl} CP^2 = MC^2 + MP^2 - 2MC \cdot MP \cos 18° & \\ DP^2 = MD^2 + MP^2 - 2MD \cdot MP \cos 18° & - \\ \hline 0 \ = (MC^2 - MD^2) - 2(MC - MD)MP \cos 18° & \end{array}$$

  $(MC - MD)(MC + MD - 2MX \cos 36°) = 0$, karena $MC \neq MD$, maka diperoleh

$$MC + MD = 2MP \cos 18°$$

$$\frac{MB + ME}{MA + MC + MD} = \frac{2MP \cos 54°}{MA + 2MP \cos 18°} < \frac{2MP \cos 54°}{2MP \cos 18°} < 1$$

Jadi, nilai terbesar dari $\frac{MB+ME}{MA+MC+MD}$ adalah 1.

17. Untuk x, y bilangan riil tak nol, jumlah nilai maksimum dan nilai minimum

$$\frac{xy - 4y^2}{x^2 + 4y^2}$$

adalah ....

Jawaban : -1

Perhatikan bahwa :

$$\frac{xy - 4y^2}{x^2 + 4y^2} = \frac{\frac{y}{x} - 4\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{a - 4a^2}{1 + 4a^2} = F(a)$$

Agar F maksimum atau minimum maka

$$F'(a) = \frac{(1 - 8a)(1 + 4a^2) - (a - 4a^2)(8a)}{(1 \mp 4a^2)^2} = 0$$

$$4a^2 + 8a - 1 = 0$$

$$(2a + 2)^2 = 5$$

$$a_1 = \frac{-2 - \sqrt{5}}{2} \text{ atau } a_2 = \frac{-2 + \sqrt{5}}{2}$$

Untuk $a = \frac{-2-\sqrt{5}}{2}$ maka $F = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{4}$ (minimum)

Untuk $a = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}$ maka $F = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$ (maksimum)

Jumlah nilai maksimum dan minimum dari F adalah -1

18. Suatu ras alien mempunyai suatu bahasa yang unik yang hanya terdiri dari dua huruf X dan Z. Dalam bahasa ini, setiap kata paling sedikit terdiri dari satu huruf dan tidak lebih dari 11 huruf. Untuk setiap dua kata, jika kata pertama dan kedua ditulis berdampingan maka hasilnya bukan merupakan kata. Sebagai contoh jika XXZ dan ZZZZX adalah kata, maka XXZZZZZX bukan kata. Maksimal banyaknya kata dalam bahasa ini adalah ....

Jawaban : 4032

Misalkan H_i adalah himpunan semua kata yang terdiri dari tepat i huruf. Agar banyaknya kata maksimum maka i harus diatur sebesar mungkin.

Akan tetapi perlu diingat bahwa jika H_k dan H_l adalah dua himpunan kata, maka H_{k+l} bukan himpunan kata.

$$n(H_{11}) = 2^{11} < n(H_{10}) = 2^{10} < \dots \dots \dots < n(H_2) = 2^2 < n(H_1) = 2^1$$

Jika anggota H_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan anggota H_j, $j = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ dimasukkan sebagai kata maka ada H_j yang dibuang sebab gabungan H_i dan H_j menghasilkan kata yang termasuk anggota H_j.

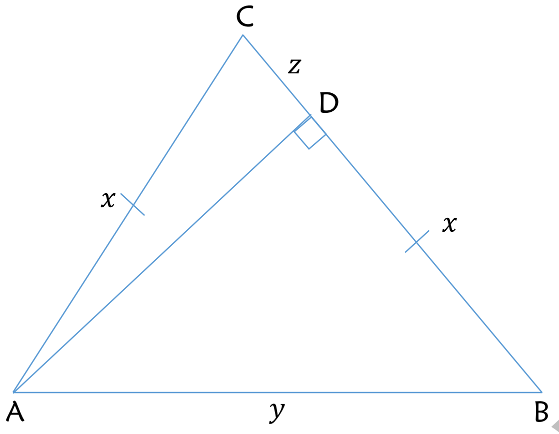
Jadi, supaya banyaknya kata yang ada maksimum maka himpunan-himpunan kata yang terjadi adalah $H_{11}, H_{10}, H_9, H_8, H_7, H_6$ (tidak ada gabungan 2 kata anggota H_j yang juga termasuk angoota H_j)

Maksimal banyaknya kata dalam bahasa tersebut adalah $2^{11} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 = 4032$.

19. Suatu segitiga lancip ABC memiliki panjang sisi bilangan bulat. Diketahui AC = BD dengan D adalah titik pada garis BC sehingga AD tegak lurus BC. Nilai terkecil panjang sisi BC yang mungkin adalah ..

<u>Jawaban :</u> 6

Perhatikan gambar berikut !



Dengan pythagoras ΔBAD dan ΔCAD maka diperoleh

$$y^2 - x^2 = AD^2 = x^2 - z^2$$
$$2x^2 = y^2 + z^2$$

Jelas $2|(x^2 + y^2)$ sehingga x dan y memiliki paritas yang sama

Dengan ketaksamaan segitiga -----> $x + y > x + z \quad \Leftrightarrow \quad y > z$.

Karena x dan y memiliki paritas yang sama dan $y > z$ maka ketika z ditambah suatu bilangan genap maka tidak akan merubah paritas dari x dan y. Misalkan $y = z + 2m$, untuk suatu bilangan asli m, maka

$$2x^2 = (z + 2m)^2 + z^2$$
$$2x^2 = 4m^2 + 4mz + 2z^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2m^2 + 2mz + z^2$$
$$x^2 = (m + z)^2 + m^2$$

Bentuk diatas merupakan triple pythagoras. Untuk mencari x terkecil maka dipilih triple pythagoras terkecil, yaitu 5, 4, dan 3 sehingga diperoleh :

$x = 5$, $m = 3$, $m + z = 4$ -----> $z = 1$, dan $y = z + 2m = 7$.

Jadi, nilai terkecil dari panjang sisi BC yang mungkin adalah $x + z = 6$.

20. Untuk sebarang bilangan riil x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Bilangan asli terbesar n sehingga

$$50\lfloor x \rfloor - \lfloor x\lfloor x \rfloor \rfloor = 100n - 27\lceil x \rceil$$

memiliki solusi riil x adalah ...

Jawaban : 15

$$50\lfloor x\rfloor - \lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor = 100n - 27\lceil x\rceil$$

- Jika $0 < \{x\} < 1$ maka

$$50\lfloor x\rfloor - \lfloor(\lfloor x\rfloor + \{x\})\lfloor x\rfloor\rfloor = 100n - 27(\lfloor x\rfloor + 1)$$

$$50\lfloor x\rfloor - \lfloor\lfloor x\rfloor^2 + \lfloor x\rfloor\{x\}\rfloor = 100n - 27\lfloor x\rfloor - 27$$

Karena $\lfloor x\rfloor$ bilangan bulat maka

$$50\lfloor x\rfloor - \left(\lfloor x\rfloor^2 + \lfloor\lfloor x\rfloor\{x\}\rfloor\right) = 100n - 27\lfloor x\rfloor - 27$$

$$\lfloor\lfloor x\rfloor\{x\}\rfloor = -\lfloor x\rfloor^2 + 77\lfloor x\rfloor + 27 - 100n$$

Untuk $\lfloor x\rfloor \geq 0$ maka

$$-\lfloor x\rfloor^2 + 77\lfloor x\rfloor + 27 - 100n \geq 0$$

Karena $y = -\lfloor x\rfloor^2 + 77\lfloor x\rfloor + 27 - 100n$ bukan definit negatif maka $D \geq 0$

$$77^2 - 4(-1)(27 - 100n) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \leq 15{,}0925$$

Untuk $\lfloor x\rfloor < 0$, karena $0 < \{x\} < 1$ maka

$$\lfloor\lfloor x\rfloor\{x\}\rfloor \geq -\lfloor x\rfloor^2$$

$$-\lfloor x\rfloor^2 + 77\lfloor x\rfloor + 27 - 100n \geq -\lfloor x\rfloor^2$$

$$77\lfloor x\rfloor + 27 - 100n \geq 0$$

Tidak ada nilai bilangan asli n yang memenuhi

- Jika $\{x\} = 0$ maka $\lfloor x\rfloor = \lceil x\rceil = x$ dan $\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor = x^2$ sehingga

$$50x - x^2 = 100n - 27x$$

$$x^2 - 77x + 100n = 0$$

Karena x bilangan bulat maka $D \geq 0$

$$(-77)^2 - 400n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \leq 14{,}8$$

Jadi, bilangan asli terbesar n yang memenuhi adalah 15. Sebagai contoh jika diambil $x = 36{,}1$ maka akan memnuhi persamaan pada soal.

BAGIAN KEDUA

1. Sejumlah n siswa duduk mengelilingi suatu meja bundar. Diketahui siswa laki-laki sama banyak dengan siswa perempuan. Jika banyaknya pasangan 2 orang yang duduk bersebelahan dihitung, ternyata perbandingan antara pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin sama dan pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin berbeda dalah 3 : 2. Tentukan n terkecil yang mungkin.

   Jawaban : 10

   Misalkan banyaknya pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin sama adalah a, sedangkan banyaknya pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin berbeda adalah b, maka

$$a : b = 3 : 2$$

   Dapat ditulis $a = 3k$ dan $b = 2k$ untuk suatu bilangan asli k.

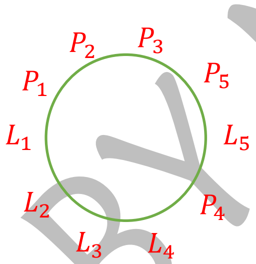
   Misalkan banyaknya siswa laki-laki = banyaknya siswa perempuan = c, maka $n = 2c$.

   Jika ada n siswa duduk melingkar maka ada sebanyak n pasangan yang berdekatan, sehingga

$$n = a + b = 5k$$

   Jelas bahwa n genap dan habis dibagi 5, maka $10|n$ sehingga diperoleh $n \geq 10$

   Jadi, nilai n terkecil yang mungkin adalah 10. Berikut contoh susunan yng memenuhi



2. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan bulat sehingga

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$$

   Buktikan bahwa c adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat.

   Jawaban : Terbukti

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b} = a + \frac{b^2 - a}{ab}$$

$$(c - a)ab = b^2 - a$$

   Mislakan FPB $(a, b) = x > 0$ maka $a = dx$, $b = ex$, dan FPB $(d, e) = 1$.

$$(c - dx)dex^2 = e^2x^2 - dx$$

$$c - dx = \frac{e^2x - d}{dex}$$

   Karena $(c - dx)$ bilangan bulat maka $x|(e^2x - d)$, berakibat $x|d$.

   Dengan alasan yang sama maka $d|(e^2x - d)$, berakibat $d|x$.

   Karena $x|d$ dan $d|x$ serta $x > 0$ maka satu-satunya yang memenuhi hanyalah $x = d$.

Jika $x = d$ maka $c - d^2 = \frac{e^2-1}{de}$. Karena $(c - d^2)$ bilangan bulat maka $e|e^2 - 1$, berakibat $e|1$ diperoleh $e = 1$ atau $e = -1$.

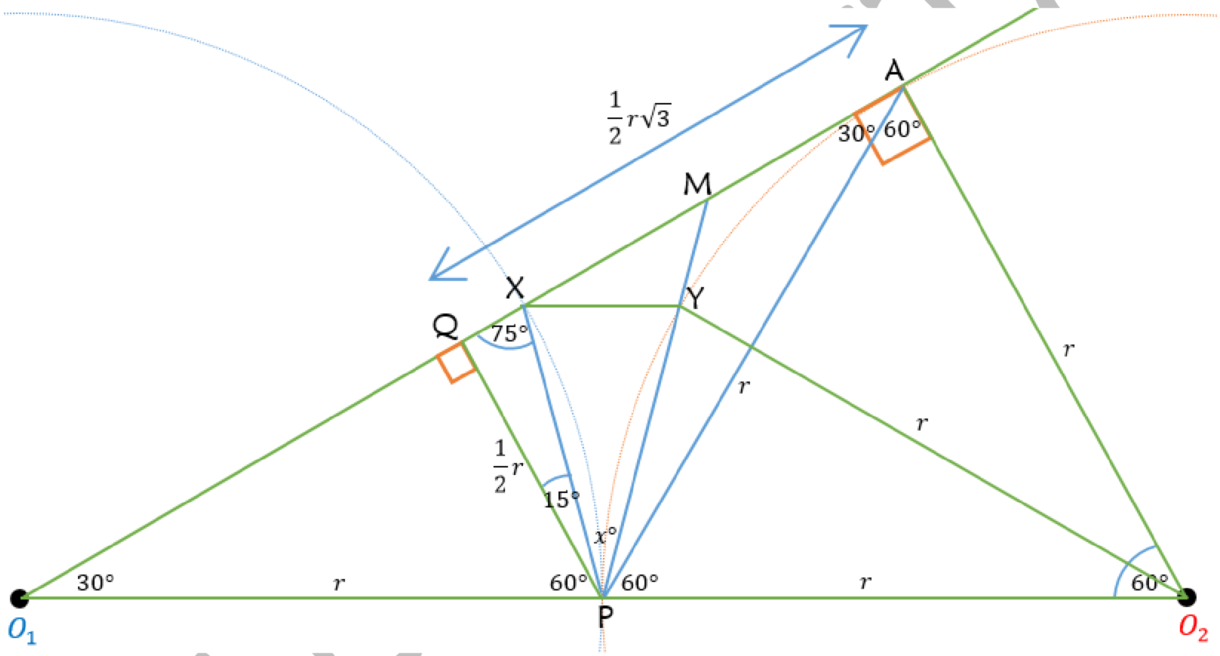
Jika $x = 1$ atau $x = -1$ maka $c - d^2 = 0$, diperoleh $c = d^2$ (kuadrat dari suatu bilangan bulat)

Jadi, terbukti bahwa c adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat.

3. Misalkan Γ_1 dan Γ_2 lingkaran berbeda dengan panjang jari-jari sama dan berturut-turut berpusat di titik O_1 dan O_2 lingkaran Γ_1 dan Γ_2 bersinggungan di titik P. Garis ℓ melalui O_1 menyinggung Γ_2 di titik A. Garis ℓ memotong Γ_1 di titik X dengan X di antara A dan O_1. Misalkan M titik tengah AX dan Y titik potong PM dengan Γ_2 dengan Y ≠ P. Buktikan XY sejajar O_1O_2.

Jawaban : Terbukti

Perhatikan gambar berikut !



$$QX = \frac{1}{2}r\tan 15° = r - \frac{1}{2}r\sqrt{3},$$ karena M titik tengah AX maka XM = MA sehingga

$$XM = \frac{AQ - QX}{2} = \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{3} - \left(r - \frac{1}{2}r\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{1}{2}r\sqrt{3} - \frac{1}{2}r$$

$$QM = QX + XM = \frac{1}{2}r = QP$$

Karena QM = QP maka ΔPQM siku-siku sama kaki sehingga diperoleh $x° = 30°$,

$$\angle O_2PY = 180° - 60° - 60° - x° = 180° - 60° - 15 - 30° = 75° = \angle O_2YP$$

Dengan demikian, ΔO_2PY kongruen dengan ΔO_1PX, akibatnya PX = PY.

$$\angle PXY = \frac{180° - x°}{2} = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$$

$$\angle YXM = 180° - 75° - \angle PXY = 180° - 75° - 75° = 30° = \angle O_2O_1M$$

Karena $\angle YXM = \angle O_2O_1M$ maka terbukti bahwa O_1O_2 sejajar dengan XY.

4. Mialkan a, b, c bilangan riil positif dengan $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Buktikan bahwa

$$a+b+c+\frac{4}{1+(abc)^{\frac{2}{3}}} \geq 5$$

Jawaban : Terbukti

Perhatikan bahwa :

$$1+(abc)^{\frac{2}{3}} \overset{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{(abc)^{\frac{2}{3}}} = 2(abc)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{1+(abc)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{2(abc)^{\frac{1}{3}}}$$

$$1-\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{1+(abc)^{\frac{2}{3}}} \geq 1-\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{2(abc)^{\frac{1}{3}}}$$

Perhatikan bahwa :

$$(abc)^{1/3} \overset{GM-AM}{\leq} \frac{1}{3}(a+b+c)$$

$$-(abc)^{\frac{1}{3}} \geq -\frac{1}{3}(a+b+c)$$

Perhatikan juga bahwa :

$$\frac{1}{3}(a+b+c) \overset{AM-HM}{\geq} \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

Dengan demikian,

$$a+b+c+\frac{4}{1+(abc)^{\frac{2}{3}}} = a+b+c+4\left(1-\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{1+(abc)^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$\geq a+b+c+4\left(1-\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{2(abc)^{\frac{1}{3}}}\right) = a+b+c+4-2(abc)^{\frac{1}{3}}$$

$$\geq a+b+c+4-\frac{2}{3}(a+b+c) = 4+\frac{1}{3}(a+b+c)$$

$$\geq 4+\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = 4+\frac{3}{3} = 5$$

(terbukti)

5. Pada papan catur berukuran 200 x 200 persegi satuan diletakkan kelereng merah atau biru sehingga setiap persegi satuan memiliki paling banyak 1 buah kelereng. Dua kelereng dikatakan segaris jika mereka terletak pada baris atau kolom yang sama. Diketahui untuk setiap kelereng merah ada tepat 5 kelereng biru yang segaris dan untuk setiap kelereng biru ada tepat 5 kelereng merah yang segaris. Tentukan maksimum banyaknya kelereng yang mungkin pada papan catur tersebut !

Jawaban : 3800

Misalkan banyakanya kelereng pada papan catur adalah n buah.

Berikut contoh pengaturan susunan kelereng agar banyaknya kelereng pada papan catur maksimum.

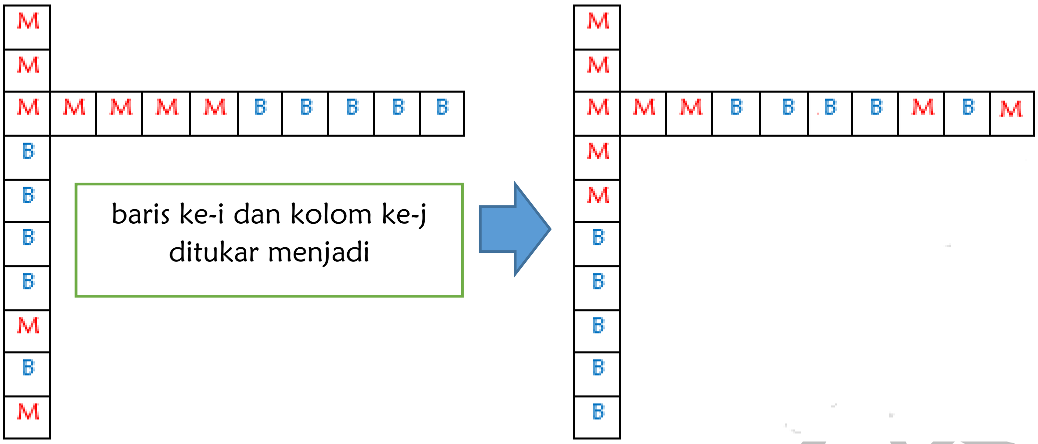
M	M	M	M	M	B	B	B	B	B				
M	M	M	M	M	B	B	B	B	B				
M	M	M	M	M	B	B	B	B	B				
M	M	M	M	M	B	B	B	B	B				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮				
M	M	M	M	M	B	B	B	B	B				
										M	M	...	M
										M	M	...	M
										M	M	...	M
										M	M	...	M
										M	M	...	M
										B	B	...	B
										B	B	...	B
										B	B	...	B
										B	B	...	B
										B	B	...	B

$n_{maksimum} = 190 \times 10 + 10 \times 190 = 3800.$

Andaikan $n > 3800$.

Setiap baris atau kolom yang memuat 2 kelereng yang berbeda warna maka banyaknya kelereng pada baris atau kolom tesebut ≤ 10 (Gambar 1)

Jika baris ke-i dan kolom ke-j ditukar banyaknya kelereng pada kolom dan banyaknya kelereng masing-masing warna pada baris tidak berubah.



Misalkan pada baris ke-1 sampai baris ke-k, pada masing-masing baris diisi kelereng dengan 2 jenis warna. Sebut saja daerah ini A. Pada baris ke-(k+1) sampai baris ke-200, pada masing-masing baris diisi Kelereng yang warnanya sama semua atau tidak diisi kelereng. Sebut saja daerah ini B.

Misalkan banyaknya kelereng pada daerah A adalah a, banyaknya kelereng pada daerah B tetapi ada kelereng di daerah A pada kolom yang sama adalah b, banyaknya kelereng pada daerah B tetapi tidak ada kelereng di daerah A pada kolom yang sama adalah c.

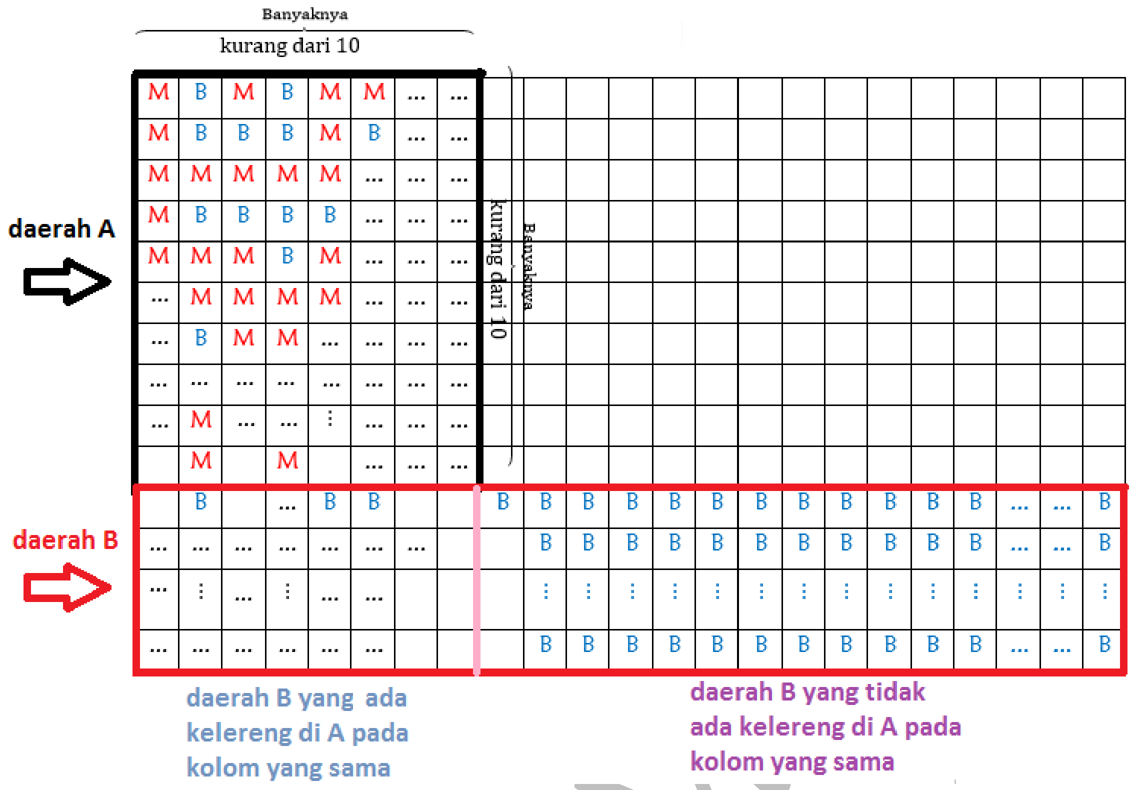
Karena tiap baris memuat 2 kelereng yang berbeda maka banyaknya kelereng pada tiap baris ≤ 10. Jadi, $a \leq 10k$.

- Jika setiap kolom berisi kelereng yang warnanya sama, maka $n = 200 \times 10 = 2000 < 3800$. Contoh seperti pada gambar dibawah ini.

M	M	M	M	M	B	B	B	B	B			
M	M	M	M	M	B	B	B	B	B			
M	M	M	M	M	B	B	B	B	B			
M	M	M	M	M	B	B	B	B	B			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
M	M	M	M	M	B	B	B	B	B			
M	M	M	M	M	B	B	B	B	B			

- Jika setiap kolom berisi kelereng sebarang (ada kolom yang berisi kelereng yang semua warnanya sama, ada juga kolom yang berisi kelereng berbeda warna, atau bisa juga tiap kolom berisi kelereng berbeda warna.

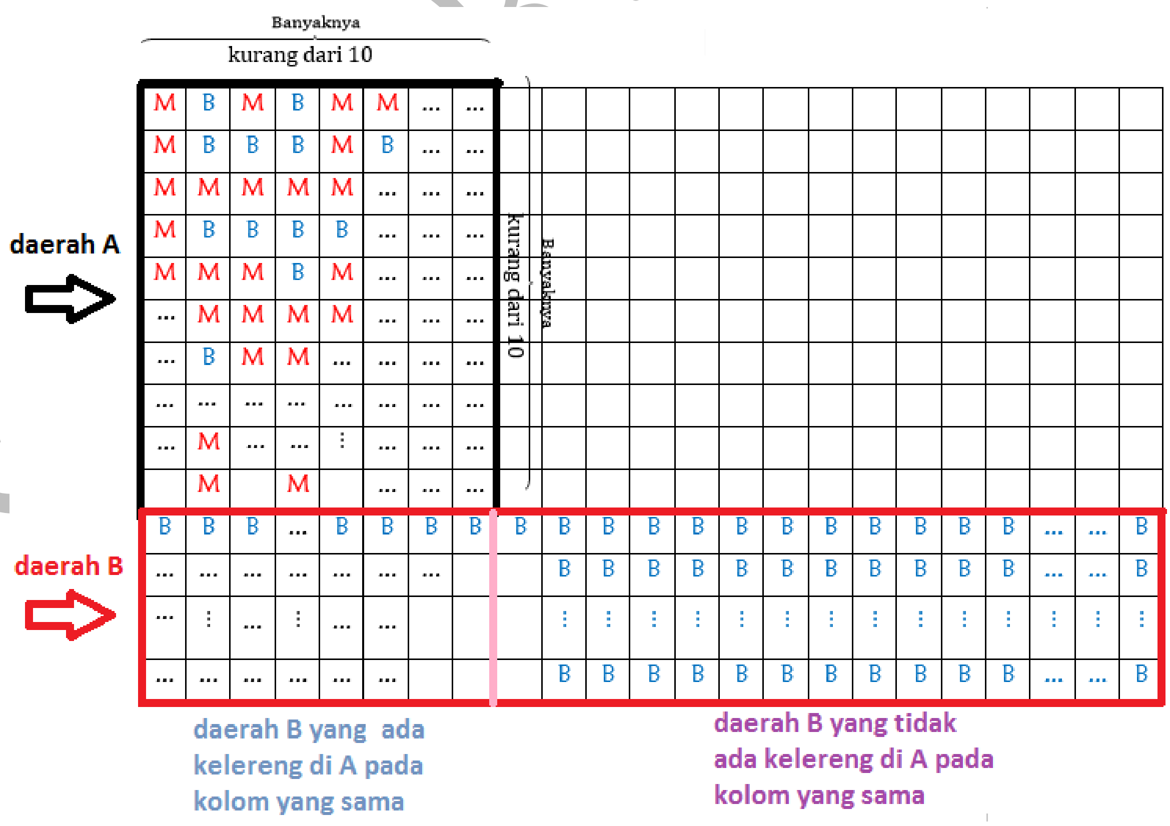
  Sebagai ilustrasi diberikan contoh berikut.



maka $n \leq 10 \times 10 + 200 \times 10 = 2100 < 3800$.

Berarti harus ada baris yang berisi hanya satu jenis warna kelereng.

- Misalkan baris ke-k+1 berisi hanya satu warna kelereng. Sebagai ilustrasi diberikan contoh berikut



Perhatikan kelereng pada daerah B tetapi ada kelreng di daerah pada kolom yang sama dan perhatikan juga masing-masing satu kelereng pada daerah B (misalnya biru) dan daerah A tersebut. Jika keduanya berbeda warna maka kelereng di daerah B akan mengurangi jumlah kelereng pada baris dimana kelereng pada daerah A berada.

Jika keduanya berwarna biru maka harus ada tepat 5 kelereng pada kolom tersebut. Karena setiap baris pada daerah A berisi kelereng dengan 2 jenis warna maka ada kelereng warna merah pada baris dimana kelereng biru tersebut berada di dareah A. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan soal, karena akan ada 6 kelereng yang segaris dengan kelereng biru yang berada didaerah A tersebut.

Jadi, $a + b \leq 10k$.

Jika $c = 0$ maka $n = a + b + c = 10 \times 200 = 2000 < 3800$

Jika $c > 0$ maka ini akan menyebabkan banyaknya baris pada daerah B ≥ 10.

Jadi, $k \leq 190$.

Misalkan m adalah banyaknya kolom yang berisi kelereng pada daerah A.

Jika $m \geq 10$ maka $a + b \leq 10k \leq 11900$ sedangkan $c \leq 10(200 - m)$

$n \leq 1900 + 10(200 - m) = 3800 + 10(10 - m) \leq 3800.$

Jika $m < 10$ maka $a + b \leq km$ sedangkan $c \leq 10(200 - m)$

$n \leq km + 10(200 - m) = 2000 + m(k - 10) < 2000 + 10(190 - 10) = 380.$

Jadi, banyaknya kelereng maksimal adalah 3800.