LuMaT

Lomba Unik Matematika ala Tobi

Solusi Final LuMaT

Hari Pertama

1. Jawab: Tidak ada.

   Andai ada, maka pada tiap tiga suku berurutan berlaku sifat diskriminan

   $$a_{k+1}^2 \geq 4a_k a_{k+2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}.$$

   Suatu saat, seluruh rasio $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ untuk k cukup besar. Jadi barisan a_k suatu saat akan turun tegas. Namun tidak ada barisan bilangan bulat positif yang turun tegas.

2. Jawab: Empat solusi. $(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_2, 0, x_4, 0, 0 \cdots, 0)$; $x_2, x_4 \in \{0, 1\}$.

   Lemma. $k^2 < 2^k$ untuk $k \geq 5$.

   Karena $x_i \in \{0, 1\}$, penyebut ruas kanan harus berbentuk 2^k. Selanjutnya, perhatikan bahwa tidak ada bilangan yang lebih kecil dari $N = 2^k$ yang habis dibagi oleh 2^k. Apabila k indeks terbesar sehingga $x_k \neq 0$, dan $k \geq 5$, maka penyebut ruas kanan habis dibagi 2^k, sedangkan penyebut ruas kiri (KPK bilangan2 yang tidak habis dibagi 2^k) tidak. Maka $k = 1, 2, 3, 4$. Bagi kasus.

3. Segitiga AQB_1 sama kaki karena

   $$\angle AB_1Q = \widehat{AB} - \widehat{CQ_1} = \widehat{CA} - \widehat{CQ_1} = \widehat{Q_1A} = \angle Q_1Q_0A = \angle Q_0AB_1.$$

   Tulis T_A, T_Q, T_C titik singgung lingkaran dalam segitiga AQC terhadap sisi-sisinya. Perhatikan bahwa

   $$BT_A = T_AB_1 = QB_1 - QT_A = QA - QT_C = AT_C = AT_Q$$
   $$\Leftrightarrow BC = BT_A + T_AC = AT_Q + T_QC = AC.$$

   Maka T_A titik tengah BB_1 jika dan hanya jika $AC = BC$; jika dan hanya jika ABC sama sisi; jika dan hanya jika $AB = BC$; maka titik tengah CC_1 terletak pada lingkaran dalam APB.

4. Jawab. Seluruh pasangan bilangan bulat yang paritasnya sama (entah n_i seluruhnya ganjil atau seluruhnya genap).

   Syarat ini **perlu** karena apabila awalnya seluruh m_i paritasnya sama maka fungsi a, b, c tidak merubah paritas.

   Syarat ini juga **cukup**. Kita pandang bilangan-bilangan $m_1, \cdots, m_{2018}$ sebagai bola dengan warna i pada posisi m_i dan prosedur sebagai gerakan memindahkan bola-bola tersebut di garis bilangan. Tujuannya adalah menggeser bola-bola tersebut sampai ke posisi WLOG $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_{2018}$.

Lemma A. Seluruh translasi adalah prosedur.

Bukti. Ada prosedur $x \mapsto x-1$. Lakukan prosedur b sampai seluruh bola tersebut berada pada bagian positif garis bilangan, lakukan c, lakukan b sampai seluruhnya positif lagi dan cukup besar, lakukan c. Kemudian lakukan b untuk menggeser sampai posisi yang dikehendaki. Urutan warna bola masih sama.

Untuk lemma berikut, kita label bola dari paling kiri "1" dan paling kanan "k". Andai jarak bola-$j-1$ ke bola-j adalah g, dan jarak bola-j ke bola-k adalah r.

Lemma B. Andaikan $g > 2r$ maka untuk setiap bilangan bulat berbentuk $g' = g - 2r - 2l$ ada prosedur yang mempertahankan jarak antara dua bola bersebelahan, kecuali jarak bola-$j-1$ ke bola-j menjadi g'.

$$\boxed{1, \cdots, j\text{-}1}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{g \mapsto g'}\boxed{j, \cdots, k}$$

Bukti. Translasikan hingga posisi bola-j adalah l. Lakukan c.

$$\boxed{1, \cdots, j\text{-}1}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{g-r-2l}\boxed{k, \cdots, j}$$

Translasi hingga posisi bola-k adalah 0. Lakukan c.

$$\boxed{1, \cdots, j\text{-}1}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{g-2r-2l}\boxed{j, \cdots, k}$$

Lemma C. Untuk setiap bilangan genap $g_1, \cdots, g_{k-1}$ dan setiap posisi awal bola ada prosedur yang membuat jarak dua bola bersebelahan g_i.

Bukti. Lakukan prosedur a hingga seluruh jarak antara bola bertetangga $> 2\sum g_i$. Aplikasikan lemma B dari kanan ke kiri, dengan memperbaiki jarak bola-k dan bola-$k-1$. Kemudian, memperbaiki jarak bola-$k-1$ dan bola-$k-2$, dan seterusnya. Ini mungkin dilakukan karena jarak $> 2\sum g_i \geq 2\sum_{i \geq j} g_i$.

Lemma D. Ada prosedur yang mengatur urutan warna bola.

Bukti. Induksi. Andai kita ingin warna-1 paling kiri dan warna-k paling kanan. Pilih bola warna-1. Atur sehingga bola warna-1 terletak pada 0 dan jarak antar bola memungkinkan melakukan operasi c (sehingga tidak ada tabrakan). Lakukan c. Sekarang bola warna-1 terletak paling kanan. Geser hingga bola terkiri pada 0. Lakukan c.

Langkah induksi. Andai pada sisi kiri sudah punya $i-1$ bola warnanya benar. Pilih bola warna-i. Atur jarak dan posisi kemudian lakukan c sehingga bola tersebut paling kanan. Atur jarak dan posisi, lakukan c sehingga bola warna-i terletak di kanan dan bertetangga dengan bola warna-$i-1$.

Balik ke soal asli. Kini gunakan Lemma D atur warna bola sehingga benar. Kemudian dengan Lemma C atur jarak antar bola. Bila $n_i = n_{i+1}$ aplikasikan lemma B untuk $g' = 0$ (bisa kejadian karena g genap). Lakukan Lemma A untuk mengatur posisi. Maka ada prosedur sesuai permintaan soal.

Hari Kedua

5. Label $A,B,C,D,E = A_1,A_2,A_3,A_4,A_5$. Tulis ω_i lingkaran luar $A_iA_{i+1}P$, dengan pusat O_i. Tulis X_i,Y_i titik singgung ω_{i-1},ω_i pada sisi PA_i. Karena $\angle O_{i-1}PX_i = \angle Y_iPO_i$ dan $O_{i-1}X_i = Y_iO_i$ maka $PX_i = PY_i$. Jadi ω_{i-1} dan ω_i menyinggung garis PA_i di titik yang sama. Refleksi terhadap garis PA_i membawa ω_{i-1} ke ω_i; membawa PA_{i-1} ke PA_{i+1}; dan membawa $A_{i-1}A_i$ ke $A_{i+1}A_i$. Maka $PA_{i-1}A_i$ kongruen $PA_{i+1}A_i$ kongruen $PA_{i+1}A_{i+2}$, $\cdots$, kongruen $PA_{i+5}A_{i+4} = PA_iA_{i-1}$. Karena PA_iA_{i-1} kongruen dengan $PA_{i-1}A_i$, maka $PA_{i-1}A_i$ harus sama kaki. Maka seluruh sudut segilima sama besar, dan seluruh sisinya sama panjang.

---

6. Jawab. [Satu sisi kelipatan p dan sisi lainnya genap] atau [satu sisi kelipatan $2p$ dan sisi lainnya ganjil $\geq p$.]

   Karena luas $= ab$ merupakan kelipatan $2p$, dan persegi panjang $2\times p$ dapat dibentuk, seluruh persegi panjang yang disebutkan di atas dapat ditutupi. Maka kasus yang tersisa adalah membuktikan $2pk \times l$ dengan $l < p$, l ganjil tidak dapat ditutupi oleh p-mino.

   Warnai kolom ganjil oren dan kolom genap hijau. Maka ada $\frac{l+1}{2}$ kolom oren dan $\frac{l-1}{2}$ kolom hijau, dan ada $2pk$ kotak oren lebih banyak dari kotak hijau. Kita sebut p-mino tipe1 jika menutupi $\frac{p+1}{2}$ kotak oren dan tipe2 jika menutupi $\frac{p+1}{2}$ kotak hijau. Tidak ada p-mino lain selain dua tipe ini. Maka

   $$\text{tipe1} - \text{tipe2} = 2pk.$$

   Meninjau luas, $p\cdot(\text{tipe1}+\text{tipe2}) = 2pkl \Rightarrow$

   $$\text{tipe1} + \text{tipe2} = 2kl.$$

   Namun $l < p$. Kontradiksi.

---

7. Jawab. $P(x,y) = c(x+y)^a(x-y)^b$ untuk setiap $c\in\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$.

   Misalkan $P = \sum c_{ij}x^iy^j$ dan $\deg(P) = d$. Tulis $P(x,y) = Q(x,y)+R(x,y)$ dimana $Q := \sum_{i+j=d} c_{ij}x^iy^j$. Syarat keterbagian menjadi

   $$A(x,y)P(x^2+y^2,2xy) = P^2$$

   $$\Rightarrow \underbrace{A}_{\deg:=a}\cdot\underbrace{Q(x^2+y^2,2xy)}_{\deg=2d} + A\cdot R(x^2+y^2,2xy) = \underbrace{Q^2}_{\deg=2d} + \underbrace{2QR+R^2}_{\deg<2d}.$$

   Deg ruas kiri = deg ruas kanan = $2d$, memaksa $a = 0$. Maka A polinom konstan dan meninjau koefisien utama kedua ruas, $A\equiv 1$. Coret Q^2, didapat

   $$R(x^2+y^2,2xy) = 2QR+R^2 = R(2Q+R).$$

Degree ruas kiri $\le 2\deg(R)$ sedangkan ruas kanan $d+\deg(R)$. Maka $R \equiv 0$. Maka seluruh suku P degreenya d, dan memenuhi **kesamaan**

$$P(x^2+y^2, 2xy) = P(x,y)^2.$$

Mensubsitusi P menjadi $\frac{P(x,y)}{x-y}$ atau $\frac{P(x,y)}{x+y}$ tidak mengubah kesamaan, maka tanpa mengurangi keumuman P tidak habis dibagi $x+y$ maupun $x-y$. Jika P konstan soal beres. Jika tidak, P bisa ditulis $P(x,y) = S(x+y, x-y)$, dengan $S(t,0) \neq 0$, $S(0,t) \neq 0$, dan

$$S(x+y, x-y)^2 = S((x+y)^2, (x-y)^2) \Rightarrow^{(t=x+y, u=x-y)} S(t,u)^2 = S(t^2, u^2).$$

Tulis $S(t,u) = T(\frac{t}{u}) \cdot u^d$. Maka $T(0) \neq 0$ dan

$$\left(T(\frac{t}{u}) \cdot u^d\right)^2 = T(\frac{t^2}{u^2}) \cdot u^{2d} \Rightarrow^{(x=\frac{t}{u})} T(x)^2 = T(x^2) \ldots (\#).$$

Tulis $T(x) = x^d + cx^r + \cdots$. Suku setelah x^{2d} di ruas kiri (#) adalah $2cx^{r+d}$ sedangkan pada ruas kanan suku setelah x^{2d} adalah x^{2r}. Namun $r < d$. Maka tidak boleh ada suku selain x^d. Jadi $T(x) = x^d$, $T(0) = 0$. Kontradiksi.

---

8. Setiap titik latis berkorespondensi dengan bilangan Gauss $(a,b) \mapsto a+bi$. Jadi soal ekivalen dengan: untuk setiap S dengan 2018 anggota ada subset 224 anggota T sehingga $\alpha+\beta=\gamma$ tidak memiliki solusi di T. Himpunan demikian disebut sum-free (SF).

   Pilih prima $p \equiv 7 \mod 12$ cukup besar sehingga $(S \mod p)$ punya 2018 anggota. WLOG seluruh anggota terletak di dalam persegi $[0, p-1] \times [0, p-1]$. Partisi persegi menjadi 9 persegi kecil dengan panjang sisi $q = \frac{p-1}{3}$. Tulis P sebagai himpunan titik-titik pada persegi kecil tengah; himpunan ini SF karena setiap titiknya berbentuk (x,y) dengan $q \le x \le 2q-1$ dan $q \le y \le 2q-1$.

   Apabila X himpunan SF; untuk setiap $g \in (\mathbb{Z}[i] \mod p)^\times$, himpunan $gX := \{gx \mod p | x \in X\}$ juga SF dan $|X| = |gX|$.

   Karena $p \equiv 3 \mod 4$ terdapat elemen primitif g sehingga $(\mathbb{Z}[i] \mod p)^\times = \{g, g^2, \cdots, g^{p-1} = 1\}$. Pandang himpunan-himpunan

   $$gS, g^2S, \cdots, g^{p-1}S.$$

   Setiap elemen $(\mathbb{Z}[i] \mod p)^\times$ muncul tepat 2018 kali. Namun $\frac{1}{9}$ dari keseluruhan adalah anggota P. Maka ada g^kS yang mengandung setidaknya $\frac{2018}{9} = 224$ anggota P. Artinya S mengandung setidaknya 224 anggota $g^{-k}P$, dan $g^{-k}P$ adalah himpunan SF.