Kumpulan Soal Kompetisi Terbuka Olimpiade Matematika (KTOM)

Tubagus Dhafin Rukmanda

1 2015 - Juni

1. Pada sebuah papan catur 8×8, setiap barisnya diberi label bilangan 1 sampai 8 dan setiap kolomnya diberi label huruf A sampai H. Hitunglah banyaknya kotak pada papan catur yang berada pada baris berlabel bilangan prima dan kolom berlabel huruf vokal.

2. Tentukan semua bilangan bulat n sehingga $\frac{n+3}{n-1}$ merupakan bilangan bulat.

3. Sebanyak 2015 koin dibagi menjadi 10 tumpukan. Tentukan banyak koin minimum pada tumpukan yang paling besar.

4. Diketahui bilangan bulat positif n merupakan hasil jumlah 2015 bilangan bulat berurutan. Tentukan nilai terkecil yang mungkin untuk n.

5. Diberikan segi-8 beraturan $ABCDEFH$. Tentukan besar sudut $\angle BCH$.

6. Diberikan sebuah segitiga dengan panjang sisi $BC = 20, CA = 24$, dan $AB = 12$. Titik D pada segmen BC dengan $BD = 5$. Lingkaran luar dari segitiga ABD memotong CA di E. Hitung panjang DE.

7. Diberikan dua buah dadu. Dadu pertama berbentuk kubus dengan sisi berangka 1 hingga 6 dan peluang muncul setiap sisi adalah sama. Dadu kedua berbentuk limas dengan sisi berangka 1 hingga 4 dan peluang muncul setiap sisi adalah sama. Kedua buah dadu dilemparkan bersamaan. Berapakah peluang jumlah bilangan yang muncul genap?

8. Misalkan $a > b > c > d$ bilangan real sehingga $a+b+c+d = 1$ dan $ab+bc+cd+da = -1$. Tentukan nilai $a - b + c - d$.

9. Pada Sae Games 2015, setiap keping emas bernilai 4 poin, perak bernilai 2 poin dan perunggu bernilai 1 poin. Negara Anggrek mendapatkan poin 420. Total medali yang diraih negara Anggrek adalah 150. Misalkan N menyatakan banyaknya medali emas

yang mungkin diperoleh negara Anggrek jika diketahui informasi tersebut. Tentukan banyaknya nilai yang mungkin untuk N.

10. Diberikan jajar genjang $ABCD$ yang luasnya 4 satuan. Misalkan E titik tengah CD dan F titik tengah AB. Garis AE memotong garis DF di K. Garis AC memotong garis DF dan BE berturut-turut di L dan M. Hitunglah luas $EKLM$.

11. Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}$ menyatakan akar-akar dari persamaan
$$x^{2015} + 2x^{2014} + 3x^{2013} + \cdots + 2015x + 2016 = 0.$$
Tentukan nilai $\displaystyle\sum_{k=0}^{2015}\sum_{n=1}^{2015}(x_n)^k$.

12. Diberikan segilima siklis $ABCDE$ yang kelilingnya 36 satuan. Segitiga ABD merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi 10 satuan. Diketahui $CE = 8$ satuan. Jika F merupakan titik potong AC dan BE, hitunglah panjang $FA + FB$.

13. Tentukan semua bilangan prima p sedemikian sehingga terdapat bilangan bulat n yang memenuhi $n(n-1)(n-2)(n-3)-1678 \leq p^2 \leq n(n-1)(n-2)(n-3)-1656$. Empat kakak beradik (kakak pria dan adik wanita) dengan nama Andi, Bayu, Candika, Danang, Ellena, Fanny, Gina, Hani mengikuti acara kencan buta. Diketahui bahwa:

    (a) Ellena berkencan dengan kakaknya Gina
    (b) Hani berkencan dengan kakaknya Ellena
    (c) Fanny berkencan dengan Andi
    (d) Bayu berkencan dengan adiknya Candika
    (e) Candika berkencan dengan adiknya Andi.

    Sebut teman kencan Gina sebagai X. Tentukan adik dari X.

14. Diketahui $a, b \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $a + \frac{1}{a+2015} = b - 4030 + \frac{1}{b-2015}$ dan $|a - b| > 5000$. Tentukan nilai dari $\frac{ab}{2015} - a + b$. (Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.)

15. Diberikan sebuah segitiga dengan panjang sisi $BC = 9, CA = 10$, dan $AB = 11$. Misalkan titik I adalah pusat lingkaran dalam dari segitiga ABC. Misalkan pula I_B adalah pusat lingkaran excircle terhadap B yang menyinggung segmen CA dan sinar garis AB dan BC. Hitunglah panjang II_B.

16. Suatu tumpukan kartu terdiri dari 2016 kartu yang dinomori $1, 2, \ldots, 2016$. Tumpukan kartu ini dikocok sehingga urutan awal kartu-kartu tidak diketahui. Sebuah permainan dimainkan yang melakukan dua langkah berikut bergantian hingga semua kartu habis:

(a) kartu paling atas dipindahkan ke paling bawah tumpukan,

(b) kartu paling atas dikeluarkan dari tumpukan.

Setelah semua kartu keluar dari tumpukan, ternyata urutan kartu yang dikeluarkan adalah $1, 2, \ldots, 2016$. Tentukan kartu mana yang berada di atas tumpukan pada urutan awal kartu tersebut.

17. Diberikan sebuah fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dengan $f(1) = \frac{3}{2}$

$$f(x+y) = \left(1 + \frac{y}{x+1}\right) f(x) + \left(1 + \frac{x}{y+1}\right) f(y) + x^2y + xy + xy^2.$$

Tentukan nilai $f(20)$. (Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat positif dan $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.)

18. Misalkan (a, b, c) merupakan pasangan bilangan asli yang memenuhi persamaan

$$a^2 + 2b^2 + 4c^2 = k(a + b + c).$$

Carilah nilai k terkecil sehingga persamaan tersebut memiliki minimal dua solusi.

19. Misalkan a_i adalah koefisien dari x^i pada penjabaran $(1 + 3x)^{2015}$ untuk setiap bilangan bulat i dengan $0 \leq i \leq 2015$. Carilah banyak nilai k di mana $0 \leq k \leq 2014$ sedemikian sehingga $a_k < a_{k+1}$.

20. Misalkan x, y, z bilangan real yang memenuhi $x + y + z = 0$ dan $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Carilah nilai maksimum dari $|(x - y)(y - z)(z - x)|$.

2 2015 - Juli

1. Diberikan segitiga siku-siku ABC di mana M adalah titik tengah sisi miring AC. Titik P, Q, R, S, T, U diberikan di luar segitiga ini demikian sehingga $ABPQ, BCRS$, dan $CATU$ merupakan bujur sangkar. Diketahui bahwa hasil jumlah luas ketiga bujur sangkar ini adalah 968. Tentukan panjang MB.

2. Tentukan banyaknya bilangan asli di dalam himpunan$\{1, 2, \ldots, 1000\}$ yang hasil jumlah digit-digitnya habis dibagi 3. Sebagai contoh, bilangan 12 jumlah digitnya habis dibagi 3, sementara 20 tidak.

3. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran dalam I. Diketahui bahwa $\angle BIC = 110^\circ$. Tentukan besar $\angle BAC$.

4. Misalkan r, s, t adalah akar-akar dari polinom $p(x) = x^3 - x - 127$. Tentukan nilai dari

$$\left(r + \frac{1}{s}\right)\left(s + \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{r}\right).$$

5. Di Banjarmasin, nomor plat kendaraan diawali dengan huruf DA, diikuti dengan sebuah bilangan 4 digit yang tidak diawali dengan angka 0, dan diakhiri dengan 2 huruf dengan syarat: (i) bilangan dari 4 digit tersebut tidak habis dibagi 5 dan (ii) dua huruf terakhir tidak boleh konsonan keduanya. Misalkan banyaknya kemungkinan nomor plat kendaraan adalah N. Tentukan $\lceil \frac{n}{1000} \rceil$. Catatan: Notasi $\lceil x \rceil$ adalah yang menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x. Contoh: $\lceil \pi \rceil = 2, \lceil 69 \rceil = 69$.

6. Misalkan $ABCD$ merupakan sebuah persegi dengan titik pusat O. Titik P diberikan di dalam persegi $ABCD$ sehingga $\angle OPB = 45^\circ$. Diketahui $PO = 40\sqrt{2}$ dan $PA = 20$. Tentukan panjang PB.

7. Suatu segitiga memiliki panjang sisi berupa bilangan bulat positif. Diketahui bahwa 5 dan 10 merupakan panjang salah dua dari sisinya dan s merupakan panjang sisi yang satu lagi. Tentukan hasil jumlah semua nilai s yang mungkin.

8. Terdapat 17 kota yang dapat dituju dari kota Jakarta dengan Olim Air. Diketahui bahwa jika terdapat k orang yang akan berangkat dari kota Jakarta ke 17 kota tujuan ini, pasti ada dua kota tujuan yang banyak penumpangnya sama (bisa jadi tidak terdapat penumpang sama sekali; dalam hal ini banyaknya penumpang adalah 0). Tentukan nilai terbesar k yang mungkin.

9. Diberikan persegi $ABCD$. Garis singgung dari titik C terhadap lingkaran luar segitiga ACD bertemu dengan perpanjangan garis AB di E, dan titik F adalah titik pertemuan kedua lingkaran luar segitiga BCD dengan garis DE. Tentukan nilai $EF \times DF$, jika diketahui $|EC| = 21$.

10. Misalkan x merupakan bilangan real sehingga $2^x + 4^x + 8^x = 1$. Tentukan nilai dari $2^{x+1} - 2^{4x}$.

11. Bilangan asli k disebut *keras* jika memenuhi sifat bahwa: tidak terdapat bilangan asli a, b sehingga $a + b + ab = k$. Tentukan banyaknya bilangan keras di dalam himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

12. Di toko buah Piade Mart, Anda ingin membeli 35 buah. Toko buah tersebut menjual 5 macam buah: pepaya, nanas, semangka, apel, melon. Ada aturan-aturan ketika melakukan pembelian.

    - pepaya yang dibeli harus sebanyak kelipatan 5,
    - nanas yang dibeli maksimal 4,
    - semangka yang dibeli harus berjumlah genap,
    - apel yang dibeli maksimal 1.

Berapa banyak cara membeli buah-buahan jika semua aturan di atas terpenuhi?

13. Diberikan titik $P(-2,r)$ dan $R(4,4)$ pada bidang-xy dengan r suatu bilangan real positif. Jika titik Q terletak pada sumbu-x, maka nilai terkecil yang mungkin untuk $|PQ|+|QR|$ adalah 10. Tentukan hasil jumlah semua nilai r yang mungkin.

14. Pada sebuah segitiga ABC, titik D, E dipilih pada segmen garis BC sehingga $AD = AE$ dengan titik D, E dalam urutan B, D, E, C. Diketahui $AB = 43, AC = 27$, dan $BD - CE = 20$. Tentukan panjang BC.

15. Sebuah turnamen tenis diikuti 6 pemain sehingga setiap pemain berhadapan satu sama lain tepat sekali. Untuk setiap permainan, pasti salah satu pemain menang dan yang satu lagi kalah. Misalkan N adalah banyaknya kemungkinan hasil semua pertandingan sehingga tidak ada pemain yang tidak terkalahkan. Tentukan tiga digit terakhir dari N.

16. Ada 21 petak yang berurutan dari kiri ke kanan, bernomor $0, 1, \ldots, 20$. Seekor kelinci, mulai dari petak ke-0, ingin mencapai petak ke-20, dimana ia hanya dapat melompat 1 atau 2 petak ke depan saja. Misalkan n banyaknya cara kelinci tersebut mencapai petak ke-20, tanpa menginjak petak ke-15. Hitung sisa n ketika dibagi 1000.

17. Diberikan sebuah kertas berukuran persegi panjang. Jika kertas tersebut dilipat terhadap diagonalnya, akan terbentuk suatu segi-lima yang luasnya $\frac{11}{16}$ dari luas persegi panjang awal. Jika lebar dari persegi panjang tersebut adalah 13, tentukan luas persegi panjang tersebut.

18. Diberikan suatu himpunan $S = \{1, 11, 111, 1111, \ldots\}$, yaitu himpunan semua bilangan asli yang digit-digitnya adalah 1. Suatu bilangan disebut bersifat kuat jika bilangan tersebut membagi habis setidaknya satu dari anggota himpunan S. Ada berapakah bilangan kuat yang merupakan anggota himpunan$\{1, 2, \ldots, 1000\}$?

19. Diketahui suatu bilangan real a, b, c, d memenuhi $\frac{a-b}{c-d} = 2$ dan $\frac{a-c}{b-d} = 3$. Tentukan hasil jumlah semua nilai yang mungkin untuk $\frac{|a-d|}{|b-c|}$.

20. Diberikan segitiga ABC dengan $BC = 20$ dan misalkan D merupakan titik tengah BC. Lingkaran dalam segitiga ABC memotong segmen garis BD menjadi tiga potong yang sama panjang. Misalkan a merupakan luas dari segitiga ABC. Tentukan tiga digit terakhir dari a^2.

21. Tentukan hasil penjumlahan dari semua bilangan asli n yang memenuhi $n-\varphi(n) = 15$. Notasi $\varphi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang kurang dari n dan relatif prima dengan n. Sebagai contoh,$\varphi(12) = 4$.

3 2015 - Agustus

1. Diketahui p, q, r bilangan prima yang memenuhi $p+q = r$. Jika p anggota $\{1, 2, \cdots, 100\}$ tentukan nilai terbesar p yang mungkin.

2. Diberikan bilangan real positif a, b, c yang memenuhi
$$\begin{aligned} ab + a + b &= 5 \\ ac + a + c &= 9 \\ bc + b + c &= 14. \end{aligned}$$
Carilah nilai $a + b + c$.

3. Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan asli (k, l, m) demikian sehingga $k + 2l + m = 2k + l - 2m = 2015$.

4. Jika a merupakan bilangan real terbesar yang memenuhi persamaan
$$x^2 + \frac{1}{x} = 2,$$
tentukanlah nilai $a^2 + a + 1$.

5. Diberikan persegi $ABCD$. Misalkan E dan F berturut-turut titik tengah dari sisi AD dan A dan misalkan pula G merupakan titik potong antara garis CE dan DF. Diketahui bahwa luas segitiga DEG adalah 1. Hitung luas persegi $ABCD$.

6. Fungsi f memenuhi persamaan
$$f(2^x) + xf(2^{-x}) = 1$$
untuk sembarang bilangan real x. Hitunglah nilai
$$\frac{1}{f(2^{1+\sqrt{2}})} + \frac{1}{f(2^{3+\sqrt{7}})}.$$

7. Diberikan segitiga ABC dengan A_1, B_1, C_1 berturut-turut merupakan titik tengah sisi BC, CA, dan AB. Misalkan D adalah kaki tegak lurus dari titik A ke sisi BC di mana D terletak di antara B dan A_1. Diketahui bahwa B_1D tegak lurus dengan A_1C_1. DIketahui bahwa $A_1C_1 = 10$ dan luas segitiga ABC adalah 150. Tentukan luas segitiga A_1C_1D.

8. Tentukan banyaknya pasangan terurut (a, b, c) demikian sehingga
$$\begin{aligned} a - bc^2 &\equiv 1 \pmod{13} \\ ac + b &\equiv 4 \pmod{13} \end{aligned}$$
di mana $0 \geq a < 13, 0 \geq b < 13$ dan $0 \geq c < 13$.

9. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Tentukan banyaknya fungsi $f : A \to A$ yang memenuhi $f(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in A$.

10. Definisikan barisan a_n sebagai $a_n = \lceil (9 + \sqrt{69})^n \rceil$. Tentukan banyak bilangan dari $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ yang habis dibagi 9.

11. Misalkan $ABCD$ merupakan trapesium demikian sehinggaA, B, C, D terletak pada sebuah lingkaran dan sisi A sejajar sisi CD. Diagonal AC dan BD berpotongan di titik M dan $\angle AMD = 60°$. Diketahui $MO = 10$. Diketahui bahwa selisih panjang AB dan CD apat ditulis dalam bentuk $m\sqrt{n}$ di mana m, n adalah bilangan asli dan n tidak habis dibagi oleh kuadrat suatu bilangan prima. Hitunglah nilai $m + n$.

12. Tentukanlah banyaknya permutasi $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ dari $1, 2, 3, \ldots, 10$ yang memenuhi $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \cdots + |a_{10} - 10| = 4$.

13. Misalkan N bilangan asli terbesar yang tidak dapat dinyatakan sebagai $2^a + 11b$, dimana a dan b bilangan bulat nonnegatif. Tentukan $\lfloor \frac{N}{10} \rfloor$.

14. Misalkan I adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC dan O adalah titik pusat excircle terhadap titik B. Jika $BI = 12, OI = 18$ dan $BC = 15$, hitunglah panjang AB.

4 2015 - September

1. Sebuah kue berbentuk persegi panjang akan dipotong beberapa kali secara horizontal dan beberapa kali secara vertikal dengan jarak setiap dua potongan berdekatan adalah sama (sehingga menghasilkan potongan-potongan kue yang sama besar). Kue ini dipotong menjadi tepat 2015 potongan kue. Tentukan banyak potongan minimal yang diperlukan. Tentukan tiga digit terakhir dari

$$\frac{1 + n^2 + n^4}{1 + n + n^2}$$

   untuk $n = 2015$.

2. Diadakan sebuah turnamen yang diikuti oleh 74 peserta. Pada mulanya, setiap peserta memiliki kesempatan 3 kali kalah. Turnamen ini dilakukan dengan mempertandingkan dua buah peserta yang masih bertahan di turnamen; di setiap pertandingan, tepat satu peserta kalah. Jika seorang peserta telah kalah tiga kali, ia keluar dari turnamen. Diketahui bahwa setelah mengadakan tepat N pertandingan, hanya tersisa 1 orang pemain dan ia dinobatkan sebagai pemenang. Tentukan nilai terkecil yang mungkin untuk N.

3. Diketahui bahwa $A(20, 10)$ dan $C(-18, 2)$ adalah dua buah titik sehingga AC merupakan diagonal dari suatu persegi $ABCD$. Titik B dan D berturut-turut memiliki koordinat $(-p, q)$ dan $(r, -s)$ di mana p, q, r, s merupakan bilangan asli. Hitunglah $p + q + r + s$.

4. Diketahui bahwa terdapat sebanyak n garis pada bidang di mana setiap garis memotong tepat 20 garis lainnya. Tentukan hasil jumlah semua kemungkinan nilai n.

5. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) demikian sehingga $a \times b = 15^{15}$.

6. Pada sebuah pesta, akan hadir 1000 tamu. Setiap tamu mengenal tepat 40 tamu lainnya dengan asumsi bahwa jika A mengenal B, B mengenal A. Diketahui bahwa dari n tamu pertama yang hadir, tidak ada dari mereka yang saling mengenal. Tentukan nilai terbesar n yang mungkin.

7. C_1 dan C_2 adalah dua buah lingkaran yang bersinggungan luar dengan diameter AB dan BC, titik pusat D dan E, berturut-turut. Misalkan F adalah titik potong antara garis singgung C_2 dari A dan garis singgung C_1 dari C di mana kedua garis singgung berada pada sisi yang sama terhadap garis AC. Jika $BD = BE = \sqrt{2}$, maka luas segitiga AFC dapat ditulis dalam bentuk $m\sqrt{n}$ di mana m dan n adalah bilangan asli dan n tidak habis dibagi oleh kuadrat suatu bilangan prima. Hitunglah $m + n$.

8. Barisan $a_1, a_2, \ldots$ didefinisikan dengan $a_k = (k^2 + k + 1)k!$ untuk $k = 1, 2, \ldots$. Misalkan
$$\frac{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{24}}{a_{25}} = \frac{m}{n}$$
dengan m, n adalah bilangan asli yang relatif prima. Hitunglah $m + n$.

9. Diberikan segitiga ABC demikian sehingga $AB = 1, AC = \sqrt{2}$, dan $BC = \sqrt{3}$. Diberikan titik P dan Q demikian sehingga $PB = QB = 1, PC = QC = 2$ dan $PA > QA$. Nilai $\frac{PA}{QA}$ dapat ditulis dalam bentuk $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ di mana m dan n merupakan bilangan asli yang tidak habis dibagi kuadrat suatu bilangan prima. Hitunglah $m+n$.

10. Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $t(n)$ menyatakan pembagi ganjil terbesar dari n. Sebagai contoh, $t(48) = 3$ dan $t(49) = 49$. Hitunglah tiga digit terakhir dari hasil jumlah
$$\sum_{k=1}^{128} t(k).$$

11. Diketahui bahwa untuk setiap bilangan real x, berlaku $ax^2 + bx + c \geq 0$ di mana a, b, c merupakan bilangan real yang tidak semuanya 0 dan $a < b$. Tentukan nilai terkecil yang mungkin dari
$$\frac{a + 5b + 3c}{b - a}.$$

12. Misalkan E, F, G adalah titik-titik pada sisi AB, BC, CD dari sebuah persegi panjang $ABCD$, berturut-turut, demikian sehingga $BF = FG, \angle FGE = 90°, BC = \frac{4}{5}\sqrt{3}$, dan $EF = \sqrt{5}$. Panjang BF dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c}$ di mana a, b, c merupakan bilangan asli dengan a dan b tidak habis dibagi kuadrat suatu bilangan prima. Hitunglah nilai $a + b + c$.

13. Misalkan
$$N = \left\lfloor \frac{7}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7^2}{5} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{7^{2015}}{5} \right\rfloor$$
dan misalkan M adalah sisa pembagian 7^{2016} oleh N. Tuliskan tiga digit terakhir dari M.

5 2015 - Oktober

1. Untuk setiap bilangan real a, nyatakan $\lfloor a \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari a. Sebagai contoh, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$ dan $\lfloor 2 \rfloor = 2$. Jika sebuah bilangan real x memenuhi $x + \lfloor 2x \rfloor = 3.14$, tentukan nilai dari $100x$.

2. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat (m, n) yang memenuhi persamaan
$$4(n^2 + m) = mn.$$

3. Tentukan banyaknya cara mengacak huruf-huruf K, K, T, T, O, dan O sedemikian rupa sehingga huruf-huruf K, T, dan O tidak terletak bersebelahan dalam urutan tersebut.

4. Misalkan $ABCD$ adalah sebuah segiempat konveks yang memenuhi $AB = 10, CD = 3\sqrt{6}, \angle ABD = 60°, \angle BDC = 45°$, dan $BD = 13 + 3\sqrt{3}$. Tentukan panjang AC.

5. Diberikan sebuah polinomial $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{14} - x^{15}$. Tentukanlah tiga digit (angka) terakhir dari koefisien x^4 pada polinomial $P(x - 1)$.

6. Misalkan N adalah banyaknya tuple bilangan bulat terurut (a, b, c, d) dengan $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ yang memenuhi $ab - cd$ habis dibagi 11. Tentukan tiga digit (angka) pertama dari N.

7. Misalkan E adalah sebuah titik yang terletak di luar sebuah bujur sangkar $ABCD$. Jika jarak E ke AC adalah 6, jarak E ke BD adalah 17, dan jarak E ke titik sudut bujur sangkar yang terdekat adalah 10, tentukanlah luas terkecil yang mungkin bagi bujur sangkar tersebut.

8. Nilai terbesar untuk $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-51} + \sqrt{199-3x}$ di interval $\frac{153}{6} \leq x \leq \frac{398}{6}$ adalah s; nilai tersebut terjadi pada saat x bernilai t. Hitunglah $s + t$.

9. Tentukan banyaknya pasangan terurut $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ dengan $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ demikian sehingga

$$a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 + a_4 \cdot 5^4 + a_5 \cdot 5^5 + a_6 \cdot 5^6$$

bernilai positif.

10. Misalkan C dan D adalah titik-titik pada lingkaran dengan titik pusat O dan diameter AB, di mana C dan D berada pada sisi yang berbeda terhadap diameter AB. Misalkan H adalah kaki tegak lurus dari B ke CD. Jika $AO = 13, AC = 24$, dan $HD = 12$, tentukanlah besar $\angle DCB$ dalam derajat.

11. Sebuah bilangan asli disebut spesial jika bilangan tersebut habis dibagi oleh tiap-tiap digit (angka)-nya yang bukan 0. Ada berapa paling banyak bilangan-bilangan berurutan yang semuanya spesial?

12. Misalkan E adalah sebuah titik di dalam sebuah belah ketupat $ABCD$ demikian sehingga $AE = EB, \angle EAB = 12°$, dan $\angle DAE = 72°$.

13. Tentukanlah besar $\angle CDE$ dalam derajat. Pada sebuah papan berukuran 3×3, dua kotak diwarnai biru dan dua kotak lainnya diwarnai merah demikian sehingga dua kotak yang sama warna selalu tidak sekolom maupun sebaris. Tentukan banyak pewarnaan yang demikian.

14. Untuk setiap dua bilangan real x dan y dengan $xy = 1$, berlaku ketaksamaan

$$((x+y)^2 + 4)((x+y)^2 - 2) \geq A(x-y)^2.$$

Tentukan nilai terbesar bagi A yang mungkin.

6 2015 - November

1. Misalkan a, b, c, d, e adalah lima suku berturutan dari sebuah barisan aritmetika dan $a + b + c + d + e = 30$. Ada tepat satu variabel dari a, b, c, d, e yang nilainya bisa ditentukan hanya dengan informasi ini. Tentukanlah nilai tersebut.

2. Suatu grup paduan suara terdiri dari beberapa anak laki-laki dan perempuan mengamen untuk menggalang dana untuk mendanai kegiatan konser mereka. Pada mulanya, 40% grup ini adalah anak laki-laki. Namun, setelah dua anak laki-laki keluar dari grup dan dua anak perempuan masuk ke grup, anak laki-laki menjadi 30% grup. Tentukan banyak anak laki-laki pada mulanya.

3. Diberikan sebuah persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 10. Diberikan segitiga sama kaki ABK dengan alas $AK = BK$ sehingga luas daerah bersama segitiga ABK dan persegi $ABCD$ ini adalah 80. Tentukan jarak titik K ke sisi AB.

4. Tentukan banyaknya bilangan asli $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ yang memenuhi 7 habis membagi $n^2 + 5$.

5. Panjang sisi sebuah segi-n beraturan adalah 1 dan rasio nilai keliling dan luasnya adalah $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Tentukanlah nilai n.

6. Pada sebuah kotak terdapat 2 apel, 3 mangga, 3 jambu, dan 4 melon. Dari kotak tersebut akan dipilih 4 buah secara acak. Peluang bahwa di antara buah-buah yang terpilih terdapat dua buah yang sama jenis dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dengan m dan n adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Hitunglah nilai dari $m + n$.

7. Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan real (a, b, c) yang memenuhi
$$a^4 + b^4 + c^4 + 1 = 4abc.$$

8. Tentukan dua digit terakhir dari penulisan basis 4 untuk bilangan $2015^{2015^{2015}}$.

9. Tentukan banyaknya bilangan asli n sehingga suku banyak (polinomial) $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ habis membagi polinomial $x^{1000} - 1$.

10. Misalkan $ABCD$ adalah sebuah segiempat konveks sehingga $\angle ABD = 40°, \angle DBC = 70°, \angle BDA = 80°$, dan $\angle BDC = 50°$. Tentukan besar $\angle CAD$ dalam derajat.

11. Tentukan banyaknya bilangan kuadrat sempurna yang habis membagi
$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 8! \cdot 9!.$$

12. Jajar genjang yang dibatasi oleh garis $y = ax + c, y = ax + d, y = bx + c, y = bx + d$ memiliki luas 18. Jajar genjang yang dibatasi oleh garis $y = ax + c, y = ax - d, y = bx + c, y = bx - d$ memiliki luas 72. Diketahui bahwa a, b, c, d merupakan bilangan asli. Tentukan nilai terkecil yang mungkin untuk $a + b + c + d$.

13. Fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ memenuhi sifat bahwa
$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$
untuk semua bilangan real positif x dan y. Hasil jumlah semua nilai yang mungkin untuk $f(10)$ dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dengan m, n merupakan bilangan asli yang relatif prima. Hitunglah nilai dari $m + n$.

14. Pada segitiga ABC, diketahui $\angle ABC = 45°$. Titik D terletak pada sisi BC sedemikian sehingga $CD = 2BD$ dan $\angle DAB = 15°$. Carilah besar sudut $\angle ACB$ dalam derajat.

7 2015 - Desember

1. Suatu bilangan asli dua digit bernilai $\frac{9}{2}$ kali lebih besar jika dibaca dari kanan ke kiri. Tentukan bilangan asli dua digit ini.

2. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 100. Titik E terletak pada sisi BC sehingga luas segitiga ABE adalah adalah $\frac{1}{4}$ dari luas trapesium $ADCE$. Tentukan panjang BE.

3. Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan asli (a, b, c) sehingga
$$abc + ab + ac = 24.$$

4. Suatu palindrom adalah sebuah bilangan yang sama jika dibaca dari kiri maupun dari kanan, misalnya 202 adalah palindrom. Misalkan N adalah sebuah bilangan asli tiga digit palindrom sehingga $N + 32$ merupakan bilangan empat digit palindrom. Tuliskan nilai N ini.

5. Pada sebuah papan catur berukuran 5×5 akan diletakkan 3 buah benteng secara acak pada 3 kotak berbeda. Diketahui bahwa tidak ada dua benteng yang menempati satu kotak yang sama. Peluang bahwa setiap benteng berada di kolom dan baris yang berbeda-beda dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$ di mana m dan n adalah bilangan asli yang berbeda-beda. Hitung $m + n$.

6. Diberikan sebuah segiempat konveks $ABCD$ dengan $AB = 3, BC = 4, CD = 13, AD = 12$, dan $\angle ABC = 90°$. Berapakah luas segiempat $ABCD$ ini?

7. Tentukan banyaknya bilangan bulat n sehingga $n^3 + 8$ memiliki tidak lebih dari 3 buah pembagi positif.

8. Misalkan f adalah fungsi dengan $f(2x-1) = x^4+x^3+x^2+x+1$ untuk setiap bilangan real x. Diketahui bahwa berlaku $f(x - 2) = ax^2 + bx + c$ untuk suatu bilangan real a, b, c. Tentukan nilai $a + b + c$.

9. Titik E terletak di luar persegi $ABCD$. Jika jarak dari E ke AC adalah 6, ke BD adalah 17, dan ke titik sudut $ABCD$ terdekat adalah 10, berapakah luas persegi $ABCD$?

10. Misalkan $P(x)$ merupakan polinomial kubik sehingga $P(0) = 10, P(1) = 20 dan P(2) = 30$. Hitung $P(2) + P(-2)$.

11. Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukanlah
$$\sum_{X \subseteq S} \sum_{Y \subseteq S} |X \cap Y|,$$
yaitu hasil jumlah semua kardinalitas dari irisan setiap pasang subhimpunan dari S.

12. Pada segitiga ABC, diketahui $AB = 86$ dan $AC = 97$. Sebuah lingkaran dengan pusat A dan radius AB memotong segmen garis $\overline{BC}$ di titik B dan X. Lebih jauh, segmen garis $\overline{BX}$ dan $\overline{CX}$ memiliki panjang bilangan bulat. Tentukan panjang BC.

13. Cheryl akan menaiki 12 buah anak tangga. Setiap kali melangkah, Cheryl akan menaiki satu, dua, atau tiga anak tangga. Namun, Cheryl tidak boleh menaiki satu anak tangga dua kali berturut-turut. Tentukan banyak cara Cheryl dapat menaiki 12 buah anak tangga ini.

14. Jika diketahui bahwa
$$\frac{1}{99^2} = 0.\overline{b_0 b_1 \ldots b_{n-1}}$$
di mana $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ merupakan digit-digit 0 hingga 9 dan n merupakan panjang terkecil untuk ekspansi desimal yang berulang. Hitung $b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}$.

8 2016 - Januari (Simulasi OSK)

1. Tentukan banyaknya akar real dari polinomial
$$p(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 2.$$

2. Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan asli (a, b) sehingga $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2016}$.

3. Tentukan nilai x dengan $0 < x < 90$ yang memenuhi $\tan x^\circ = \frac{\sin 12^\circ + \sin 24^\circ}{\cos 12^\circ + \cos 24^\circ}$.

4. Anda dan Banda masing-masing tinggal di kamar yang berbeda dalam sebuah apartemen dengan 10 kamar di setiap lantainya. Sistem penomoran kamar pada apartemen tersebut adalah sebagai berikut: kamar nomor 1–10 berada di lantai 1, kamar nomor 11-20 berada di lantai 2, dan seterusnya. Diketahui bahwa nomor kamar Anda sama dengan nomor lantai dari kamar Banda. Jika n adalah jumlah nomor kamar Anda dan nomor kamar Banda, tentukan banyaknya nilai yang mungkin untuk n dengan syarat $1 \leq n \leq 1000$.

5. Misalkan $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan banyaknya fungsi $f : S \to S$ demikian sehingga $n + f(n)$ merupakan bilangan genap.

6. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 memiliki jari-jari 6 dan 8, berturut-turut. Jarak kedua titik pusat lingkaran adalah 10. Lingkaran Γ_3 menyinggung Γ_1 dan Γ_2 di dalam, dan juga menyinggung garis yang menghubungkan pusat lingkaran Γ_1 dan Γ_2. Misalkan panjang jari-jari lingkaran Γ_3 dapat dinyatakan sebagai $a\sqrt{b} + c$, di mana a, b, dan c adalah bilangan bulat, $b > 0$, dan b tidak habis dibagi oleh kuadrat sempurna apa pun selain 1. Tentukan nilai dari $|a + b + c|$.

7. Sebuah bilangan asli disebut trouple bila digit pertamanya adalah 2 dan jika digit pertama tersebut (digit 2) dipindahkan ke paling belakang, bilangan yang dihasilkan bernilai 3 kali bilangan semula. Tentukan 3 digit terakhir dari bilangan trouple terkecil.

8. Misalkan ABC adalah segitiga dengan panjang sisi $AB = 7, BC = 8$, dan $CA = 9$. Titik D dan E terletak pada sisi BC dan CA, berturut-turut, sehingga AD dan BE adalah garis bagi $\angle A$ dan $\angle B$, berturut-turut. Proyeksi titik C ke garis AD dan BE adalah X dan Y, berturut-turut. Hitung panjang XY.

9. Jika a, b, dan c adalah akar-akar dari polinomial $f(x) = x^3 - 3x + 1$, hitunglah nilai dari $(a + b + ab)(b + c + bc)(c + a + ca)$.

10. Diberikan segitiga ABC dengan panjang $AB = 5, BC = 12$, dan $CA = 13$. Titik-titik $B_0, B_1, B_2, \ldots$ pada sisi BC dan titik-titik $A_0, A_1, A_2, \ldots$ pada sisi AC didefinisikan dengan cara sebagai berikut: $A_0 = A, B_0 = B$. Untuk $n \geq 0, B_{n+1}$ adalah perpotongan garis bagi $\angle B_nA_nC$ dengan sisi BC dan A_{n+1} adalah perpotongan garis tegak lurus BC yang melewati B_{n+1} dengan sisi AC. Hitung nilai dari $\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_nB_{n+1}\right)^2$.

11. Misalkan $N = \underbrace{201620162016\ldots2016}_{\text{2016 angka 2016}}$. Tentukan tiga digit terakhir dari N^N.

12. Misalkan $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k}(1 + 2x)^k$. Jika a_k adalah koefisien x^k dari $f(x)$, hitunglah nilai $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$.

13. Misalkan $ABCD$ adalah persegi dengan panjang sisi 6, dan titik E terletak di luar persegi sehingga $DE = EC$. Jika titik E dan A terletak berseberangan terhadap sisi CD dan panjang jari-jari lingkaran yang melewati titik A, B, dan E adalah 6, tentukan kuadrat dari luas segitiga CDE.

14. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat nonnegatif (a, b) sehingga $a + b^2$ dan a^2+b keduanya merupakan bilangan kuadrat sempurna dan kondisi berikut terpenuhi: $0 \leq a + b^2 \leq a^2 + b \leq 2016$.

15. Diberikan sebuah papan catur berukuran 5×5. Setiap petak akan diisi dengan bilangan asli $1, 2, 3, \ldots, 25$ masing-masing satu kali sehingga untuk setiap subpapan catur berukuran 3×3, hasil jumlah bilangan di dalamnya tidak lebih dari k. Tentukan nilai k terkecil yang mungkin.

16. Suatu bilangan asli k disebut *luar biasa* jika dapat ditulis dalam bentuk $x^2 - x + 1$ untuk suatu bilangan rasional x. Tentukan banyaknya bilangan asli *luar biasa* dalam himpunan $\{1, 2, \ldots, 999, 1000\}$.

17. Diberikan 3 buah gelas. Gelas pertama memiliki kapasitas 5 liter dan berisi air 3 liter. Gelas kedua memiliki kapasitas 7 liter dan berisi air 4 liter. Gelas ketiga memilkiki kapasitas 9 liter dan berisi air 5 liter. Definisikan satu langkah penuangan sebagai berikut: memilih gelas A dan menuang isinya ke gelas B hingga salah satu kondisi ini terpenuhi: i) air di gelas A habis, atau ii) air di gelas B penuh. Berapa banyak langkah penuangan minimal yang diperlukan untuk mendapatkan dua buah gelas yang masing-masing berisi air 6 liter?

18. Diketahui sebuah fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang memenuhi $m+f(m+f(n+f(m))) = n+f(m)$ untuk setiap bilangan bulat m dan n. Jika $f(6) = 6$, tentukan 3 digit terakhir dari $f(-2016)$.

19. Diberikan sebuah papan catur berukuran 100×100 dan 25 warna cat berbeda. Dua buah petak dikatakan bersebelahan jika dua buah petak tersebut berbagi sisi yang sama. Sebuah pion dalam satu langkah dapat berpindah dari satu petak ke petak lain yang bersebelahan. Didefinisikan jarak dua buah petak di papan catur tersebut sebagai banyak langkah minimal yang diperlukan bagi sebuah pion untuk berpindah dari petak yang satu ke petak yang lain. Kevin ingin mewarnai semua petak di papan catur masing-masing dengan satu warna sehingga dua buah petak berwarna sama memiliki jarak minimal k. Tentukan nilai k terbesar yang mungkin.

20. Misalkan ABC adalah segitiga lancip. Titik D, E, dan F terletak pada sisi BC, CA, dan AB, berturut-turut, sedemikian sehingga AD, BE, dan CF adalah garis tinggi segitiga ABC. Titik H adalah titik tinggi segitiga ABC. Jika $DE = 4, DF = 3$, dan $EF = 5$ tentukan kuadrat dari panjang AH.

9 2016 - Februari (Simulasi OSP)

1. 1. Susan ingin menyusun 4 bola merah, 6 bola biru, dan n bola kuning pada keliling sebuah lingkaran sehingga setiap bola yang sama warna tidak bersebelahan. Tentukan jumlah semua nilai n yang menyebabkan hal ini mungkin untuk dilakukan.

2. Misalkan fungsi f mempunyai aturan bahwa untuk setiap bilangan bulat x, berlaku

$$f(x) + f(x-1) = x^2$$

Jika $f(20) = 2016$, tentukan 3 digit terakhir dari $f(100)$.

3. Tentukan jumlah semua nilai n sehingga ada himpunan n bilangan asli berurutan yang memiliki jumlah anggota 2016.

4. Keliling dari segitiga yang memiliki tiga buah garis tinggi dengan panjang 2,3,4 dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, dengan a dan c adalah bilangan asli yang relatif prima

dan b adalah bilangan asli yang tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat apa pun selain 1. Hitunglah nilai dari $a + b + c$.

5. Misal $f(n)$ menyatakan pembagi terbesar kedua dari n. Tentukan banyaknya bilangan asli n yang tidak lebih dari 100000 sehingga dapat ditemukan bilangan prima p dan bilangan asli m yang memenuhi $n + f(n) = p^m$.

6. Sebelas garis horizontal dan sebelas garis vertikal dari sebuah papan catur berukuran 10×10 membentuk r segiempat, di mana s di antaranya adalah persegi. Tentukan tiga angka terakhir dari $r + s$.

7. Misalkan PQ adalah segmen garis dengan panjang 10. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang masing-masing berpusat di P dan Q dan berjari-jari 10 berpotongan di titik R dan S, berturut-turut. Garis PQ memotong Γ_1 sekali lagi di titik T. Lingkaran yang berpusat di T dengan jari-jari TQ memotong Γ_2 sekali lagi di titik U sehingga U dan S terletak pada sisi yang berbeda terhadap garis PQ. Misalkan US memotong PQ di titik V. Jika panjang PV dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{A} - B$, dengan A dan B keduanya bilangan asli, hitungah $A \times B$.

8. Hitunglah nilai dari

$$\frac{1}{1331} \sum_{a=1}^{11} \sum_{b=1}^{11} \sum_{c=1}^{11} (abc + ab + bc + ca + a + b + c).$$

9. Dua puluh langkah dibutuhkan untuk berjalan dari titik $(-5, -5)$ ke titik $(5, 5)$ di mana setiap langkah hanya boleh menambah absis atau ordinat sebesar 1. Tentukan banyaknya jalan sedemikian sehingga setiap titik yang dilalui jalan tersebut terletak di luar ataupun pada persegi yang dibatasi oleh $-2 \leq x \leq 2$ dan $-2 \leq y \leq 2$.

10. Himpunan bilangan real x sehingga

$$\frac{1}{x - 2015} + \frac{1}{x - 2016} + \frac{1}{x - 2017} \geq 1$$

merupakan gabungan dari beberapa interval dalam bentuk $a < x \leq b$. Jumlah dari panjang interval-interval ini adalah...

11. Misalkan a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima dan memenuhi persamaan

$$12a\,(24a + 1) = b\,(b + 1)$$

Tentukan nilai dari $a + b$.

12. Misalkan ABC adalah segitiga dengan $AB = 9, BC = 20$, dan $CA = 16$. Titik D terletak pada segmen BC sehingga $DB = DA$. Garis bagi luar $\angle BAC$ memotong perpanjangan BC di titik E. Misalkan F adalah titik tengah DE. Jika panjang FA dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$, dengan p dan q adalah bilangan asli yang relatif prima, hitung nilai dari$p + q$.

13. Misalkan a, b, dan c adalah akar-akar real dari persamaan kubik $x^3 - 3x + 1 = 0$, di mana $a > b > c$. Tentukan nilai dari
$$T = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

14. Misalkan H adalah himpunan yang berisi semua faktor positif dari 2016^{2016}, dan R adalah banyaknya tripel (a, b, c) yang memenuhi $a|b$ dan $b|c$, dengan $a, b, c \in H$. Tentukan tiga angka terakhir dari R.

15. Misalkan ABC adalah segitiga dengan $BC = 9$ dan $AB = 7$. Titik D terletak pada BC dan E pada AC sehingga AD adalah garis berat dan BE adalah garis bagi dalam $\angle ABC$. Jika $EA = ED$ dan keliling segitiga ABC dapat dinyatakan dalam bentuk $p + \sqrt{q}$ dengan p dan q adalah bilangan asli, tentukan nilai dari $p + q$.

16. Tentukan sisa pembagian $1^1 + 3^3 + 5^5 + 7^7 + .. + 1023^{1023}$ oleh 1024.

17. Misalkan $|X|$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X, dan $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Cari banyaknya pasangan himpunan (A, B) yang memenuhi
$$A \cup B = S, A \cap B = \emptyset, (|A| + |B|) \in A, (|A| - |B|) \in B.$$

18. Perumahan Ampera memiliki $n < 1000$ rumah yang disusun secara berjajar dan dinomori secara berurutan dengan nomor $1, 2, 3, \ldots, n$. Kantor kelurahan setempat berencana meletakkan patok pembatas di antara dua rumah di perumahan tersebut, sebut saja rumah bernomor m dan $m + 1$, sehingga rumah bernomor 1 sampai m termasuk dalam wilayah RT 1, dan rumah bernomor $m+1$ sampai n termasuk dalam wilayah RT 2. Ternyata, jumlah semua nomor rumah di RT 1 sama dengan jumlah semua nomor rumah di RT 2. Tentukan nilai terbesar yang mungkin untuk n.

19. Diketahui bahwa 8 buah bilangan real $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \geq a_7 \geq a_8 > 0$ memiliki jumlah 2012. Selain itu, diketahui pula bahwa rataan geometrik dari kedelapan bilangan tersebut adalah 247. Misalkan S adalah nilai maksimum dari $\sqrt{a_1} - \sqrt{a_8}$ dari semua 8-tuple yang memenuhi syarat di atas, dan misalkan pula U dan V adalah nilai dari a_1 dan a_8 saat nilai maksimum tersebut tercapai. Tentukan nilai dari $S + U + V$.

20. Empat buah titik berbeda A, B, C, dan D terletak pada sebuah garis lurus dalam urutan tersebut sehingga lingkaran yang berpusat di A dengan jari-jari AC dan lingkaran yang berpusat di D dengan jari-jari DB bepotongan di dua buah titik. Misalkan E adalah salah satu dari kedua titik perpotongan tersebut. Selanjutnya, misalkan F adalah titik potong lingkaran luar segitiga ABE dan lingkaran luar segitiga DCE yang tidak sama dengan E. Diketahui $BC = 6$ dan $\angle AEB = 150°$. Jika panjang EF dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ dengan a dan b adalah bilangan asli, hitunglah nilai dari $a + b$.

10 2016 - Maret (Simulasi OSP)

1. Misalkan p dan q adalah bilangan real sehingga untuk setiap bilangan real a dan b,

$$2a, \quad 3b - a, \quad pa + qb$$

   membentuk barisan aritmetika. Tentukan nilai dari $p^2 + q^2$.

2. Misalkan $\triangle OAB, \triangle OBC$, dan $\triangle OCD$ adalah segitiga-segitiga sama kaki dengan $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCD = 90°$. Jika luas $\triangle OCD$ adalah 2016, tentukan luas $\triangle OAB$.

3. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) yang memenuhi kedua syarat berikut secara bersamaan: $a + b \leq 2016$ dan $(a + \frac{1}{b}) = 10(b + \frac{1}{a})$.

4. Tentukan banyaknya cara empat pasang suami-istri dapat duduk pada meja bundar dengan 10 kursi identik sedemikian sehingga setiap pasang suami-istri duduk bersebelahan.

5. Suatu bujur sangkar yang berpusat di $(0, 10)$ memiliki dua titik sudut yang bertetangga (bersebelahan) pada sumbu-x. Jika diketahui bahwa dua titik sudut lainnya terletak pada grafik fungsi $f(x) = c - x^2$, tentukan nilai dari c.

6. Diketahui $\triangle ABC$ yang memiliki titik pusat lingkaran dalam I. Misalkan perkalian panjang AB dan AC adalah 48 dan $\cos \angle BAC = \frac{7}{8}$. Jika panjang $AI = \frac{4\sqrt{15}}{3}$, tentukan keliling $\triangle ABC$.

7. Tentukan bilangan asli terbesar $n < 120$ yang memenuhi syarat berikut: jika sebarang bilangan m dipilih dari himpunan $\{1, 2, \ldots, 120\}$, peluang bahwa m membagi n adalah $\frac{1}{10}$.

8. Terdapat dua buah dadu berbentuk kubus, yang tentu saja mempunyai 6 buah sisi, tetapi angka-angka yang tertulis pada dadu ini mengikuti aturan:

(a) Dadu pertama mempunyai satu buah sisi dengan angka 1, satu buah sisi dengan angka 2, tiga buah sisi dengan angka a, dan satu buah sisi dengan angka $2a$.

(b) Dadu kedua mempunyai satu sisi dengan angka 1, tiga buah sisi dengan angka 3, satu buah sisi dengan angka a, dan satu buah sisi dengan angka $2a$. Diketahui a adalah bilangan asli, dan apabila kedua dadu di atas dilempar bersamaan, peluang bahwa hasil penjumlahan dua angka pada dadu tersebut sama dengan 10 adalah $\frac{1}{4}$. Tentukan nilai dari a.

9. Barisan bilangan real $a_1, a_2, \ldots$ memenuhi sifat

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} - 1, \quad n = 1, 2, \ldots, k-1$$

dan $a_k = 0$ untuk suatu bilangan asli k. Misalkan $a_1 = \frac{m}{n}$ untuk suatu bilangan asli m dan n yang relatif prima. Tentukan banyaknya nilai yang mungkin bagi m di himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$.

10. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 5$ dan $AC = \sqrt{24}$. Titik D terletak pada segmen BC sedemikian sehingga $BD = \sqrt{7}$ dan $DC = \sqrt{6}$. Garis tinggi segitiga ABC dari titik B memotong AD di titik E. Jika panjang CE adalah x, tentukan nilai dari $30x^2$.

11. Misalkan $f(x) = \frac{x}{x^2+34}$, dan a adalah bilangan takbulat yang memenuhi $f(a) = f(\lfloor a \rfloor)$. Jika a dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dengan m dan n adalah dua bilangan bulat yang relatif prima dan memenuhi $n > 0$, tentukan nilai dari $m + n$.

12. Sebuah dadu standar dilempar sebanyak 4 kali. Misalkan a, b, c, dan d berturut-turut adalah mata dadu yang muncul pada pelemparan pertama, kedua, ketiga, dan keempat. Jika peluang bahwa $a + b > c + d$ bisa dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$, dengan p dan q adalah bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $p + q$.

13. Misalkan $p(x)$ adalah polinomial yang memenuhi

$$p\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^7 + \frac{1}{x^7}.$$

Tentukan nilai dari $p(-1)$.

14. Misalkan $ABCD$ adalah segiempat tali busur. Diagonal AC dan BD berpotongan di titik E. Jika panjang $BD = 24$, tentukan rata-rata harmonik terbesar yang mungkin untuk panjang AE dan EC. Catatan: rata-rata harmonik dari dua bilangan taknol a dan b adalah $\frac{2ab}{a+b}$.

15. Untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$, misalkan A_n adalah himpunan semua solusi persamaan $x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$. Jika $S = \bigcup_{n \geq 2} A_n$, tentukanlah nilai dari elemen terbesar di S.

16. Putri memiliki 9 kotak berlabel $1, 2, \ldots, 9$ yang disusun berjajar secara berurutan dari kiri ke kanan sesuai label. Pada kotak berlabel k, terdapat satu bola berlabel k. Pertama-tama, bola-bola pada kotak berlabel 1, 2, dan 3 diambil dan dimasukkan kembali secara acak ke kotak berlabel 1, 2, dan 3. Selanjutnya, bola-bola pada kotak berlabel 2, 3, dan 4 diambil dan dimasukkan kembali secara acak ke kotak berlabel 2, 3, dan 4. Proses ini berulang dan diakhiri dengan bola-bola pada kotak berlabel 7, 8, dan 9 diambil dan dimasukkan kembali secara acak ke kotak berlabel 7, 8, dan 9. Setelah proses ini berakhir, Putri menuliskan angka pada kotak-kotak tersebut secara berurutan dari kiri ke kanan, membentuk bilangan dengan sembilan digit. Tentukan banyaknya kemungkinan bilangan yang diperoleh Putri.

17. Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan asli (a, b, c) yang memenuhi $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ demikian sehingga $\left|\log_2 \frac{a}{b}\right| + \left|\log_2 \frac{b}{c}\right| + \left|\log_2 \frac{c}{a}\right|$ merupakan bilangan bulat.

18. Segiempat $ABCD$ adalah segiempat talibusur dengan AC sebagai diameternya. Titik E terletak pada sinar CA sehingga A terletak di antara E dan C, serta $\angle EBA = \angle ABD$. Misalkan $EB = 6, EA = 4, ED = 7$. Diketahui bahwa panjang AC dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima. Hitunglah nilai dari a^b.

19. Misalkan n adalah bilangan asli terbesar yang memenuhi sifat n habis membagi $\binom{20^{16}}{k}$ untuk setiap bilangan asli ganjil k yang kurang dari 20^{16}. Tentukanlah banyaknya faktor positif dari n.

20. Sebuah papan berukuran 5×5 dibagi menjadi 25 bujur sangkar. Bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, dan 5 dituliskan pada bujur sangkar tersebut demikian sehingga setiap baris, setiap kolom, dan setiap diagonal yang mengandung lima bilangan hanya diisi oleh masing-masing dari bilangan tersebut sekali saja. Misalkan S adalah jumlah bilangan pada empat kotak yang terletak di bawah kedua diagonal. Tentukan nilai terbesar dari S.

11 2016 - April

1. Pada sebuah jajaran genjang $ABCD$, titik E terletak di dalam segitiga ABC sehingga luas $\triangle DEA$ dan $\triangle AEB$ berturut-turut adalah 969 dan 696. Tentukan luas $\triangle AEC$.

2. Charmaine memilih secara acak satu bilangan dari himpunan $\{1, -1\}$, lalu menulis bilangan yang dipilihnya di papan tulis. Proses tersebut dilakukan 2016 kali. Jika p adalah peluang di mana hasil kali ke-2016 angka di papan tulis adalah positif, tentukan nilai dari $100p$.

3. Misal a_n dan b_n berturut-turut menyatakan banyaknya digit (angka penyusun) dari 4^n dan 25^n. Tentukan nilai dari $a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} + b_{50} + \cdots + b_1$.

4. Tentukan jumlah semua bilangan real x yang memenuhi persamaan
$$\sqrt[3]{\frac{x-3}{2014}} + \sqrt[3]{\frac{x-2}{2015}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{2016}} = \sqrt[3]{\frac{x-2014}{3}} + \sqrt[3]{\frac{x-2015}{2}} + \sqrt[3]{x-2016}.$$

5. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi BC, CA, dan AB berturut-turut adalah 11, 13, dan 20. Misalkan I adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC. Luas segitiga yang ketiga titik sudutnya adalah titik berat dari $\triangle ABI, \triangle BCI$, dan $\triangle ACI$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai dari $a + b$. Catatan: titik berat suatu segitiga adalah perpotongan ketiga garis berat segitiga tersebut. Garis berat suatu segitiga dari suatu titik sudut adalah garis yang menghubungkan titik sudut tersebut ke titik tengah sisi yang berseberangan dengan titik sudut tersebut.

6. Pada setiap kotak pada sebuah tabel 100×100 tertulis sebuah bilangan. Pada baris paling atas, bilangan-bilangan $0, 1, \ldots, 99$ ditulis dari kiri ke kanan. Pada baris paling kiri, bilangan-bilangan $0, 1, \ldots, 99$ ditulis dari atas ke bawah. Apabila jumlah bilangan-bilangan pada sebuah persegi 2×2 selalu 20, tentukan nilai mutlak dari bilangan yang ditulis di kotak paling bawah kanan.

7. Sebuah bilangan asli disebut tank apabila representasi basis 3 bilangan tersebut jika dibaca dalam basis 10 habis dibagi 7. Sebagai contoh, 21 merupakan bilangan tank karena representasi basis 3 dari 21 adalah $(210)_3$ dan 210 habis dibagi 7. Tentukan banyaknya bilangan tank yang representasi basis tiganya memiliki tepat 9 digit jika dibaca dalam basis 10.

8. Misalkan $X = 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333\cdots333}_{\text{2016 angka 3}}$ dan Y adalah jumlah digit (angka penyusun) dari X. Tentukanlah nilai Y.

9. Diberikan segitiga ABC dengan panjang $BC = 21$. Misalkan D adalah titik tengah BC dan E adalah titik tengah AD. Misalkan pula bahwa F adalah perpotongan BE dengan AC. Jika diketahui bahwa AB menyinggung lingkaran luar segitiga BFC, hitunglah nilai dari kuadrat dari panjang BF.

10. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) dengan $1 \leq a, b \leq 15$ sedemikian sehingga untuk semua bilangan asli k, kita punyai bahwa $(ak + b)^{(ak+b)}$ bukan merupakan bilangan kuadrat sempurna.

11. Carilah jumlah semua akar real dari persamaan
$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2016.$$

12. Negara Apy memiliki 5 kota. Menteri Transportasi negara tersebut berencana untuk membangun 9 jalan identik dengan ketentuan bahwa setiap jalan menghubungkan tepat 2 kota. Jika diketahui bahwa setiap pasang kota terhubung oleh 0, 1, atau 2 buah jalan, tentukan banyaknya konfigurasi pembangunan jalan yang mungkin.

13. Dipunyai segitiga ABC dengan $AB = \sqrt{52}, AC = \sqrt{61}$, dan $BC = 9$. Misalkan γ adalah lingkaran yang melalui A dan menyinggung BC di titik tengahnya. Jika γ memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ di A dan P, tentukan panjang segmen AP.

14. Tentukan banyaknya bilangan prima tiga-angka $\overline{abc}$ yang mana ketiga digitnya (angka penyusunnya) bukan 0(dengan kata lain, $a, b, c \neq 0$) dan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki solusi rasional.

12 2016 - Mei

1.

13 2016 - Juni

1. Nilai dari $\sqrt[4]{2^4 + 2^{11} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{21} + 2^{24}}$ merupakan sebuah bilangan bulat. Tentukan bilangan bulat tersebut.

2. Dani melempar dua dadu biasa. Jika p adalah peluang nilai dadu pertama lebih tinggi daripada nilai dadu kedua, tentukan nilai $\lfloor 100p \rfloor$, di mana $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x.

3. Tentukan bilangan bulat positif terkecil yang bersisa 2 jika dibagi 3, bersisa 4 jika dibagi 5, bersisa 6 jika dibagi 7, dan habis dibagi 11.

4. Dua buah lingkaran dengan jari-jari 4 dan 7 terletak pada satu bidang. Diketahui bahwa kedua lingkaran tersebut memiliki tepat tiga buah garis singgung persekutuan. Tentukan jarak kedua pusat lingkaran tersebut.

5. Titik pusat lingkaran luar segitiga yang ketiga titik sudutnya terletak pada koordinat $(0, 0), (2, 6), (9, 1)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$, dengan a, b, dan c bilangan bulat positif yang memenuhi $\gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1$. Hitunglah nilai dari $a + b + c$. Keterangan: $\gcd(a, b)$ menyatakan faktor persekutuan terbesar dari a dan b.

6. Jacob mempunyai tujuh bola berwarna merah, kuning, hijau, biru, ungu, cokelat, dan putih. Misalkan $P(m)$ menyatakan banyaknya kemungkinan susunan tujuh bola, di mana satu warna bola dapat muncul lebih dari sekali, sedemikian sehingga bola dengan urutan ke-m adalah bola kuning yang pertama pada susunan tersebut. Tentukan nilai dari $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7)$.

7. Tentukan banyaknya pasangan penyelesaian bulat (x,y) dari persamaan $2xy-x+2y = 11$. Catatan: $(4,5)$ dan $(5,4)$ dianggap sebagai pasangan solusi yang berbeda.

8. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli (a,b) sedemikian sehingga a dan b keduanya merupakan pembagi dari 2016, tetapi ab bukan pembagi dari 2016.

9. Misalkan ABC adalah segitiga dengan $\angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$. Titik P terletak di dalam segitiga ABC sedemikian sehingga $\angle PCA = 40^\circ$ dan $AP = BC$. Tentukan besar $\angle PAB$.

10. Untuk setiap bilangan bulat positif m dan n, definisikan $f(m,n)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 1, \\ f(m+1,n) &= f(m,n) + m \\ f(m,n+1) &= f(m,n) - n. \end{aligned}$$

Tentukan nilai $p - q$ terbesar yang memenuhi $f(p,q) = 2016$.

11. Diberikan sebuah petak yang memiliki dimensi 2 baris kali 5 kolom. Masing-masing dari kesepuluh kotak pada petak tersebut akan diisi dengan sebuah bilangan asli dari 1 sampai 2016 secara acak (pengulangan bilangan diperbolehkan). Apabila peluang bahwa hasil kali angka-angka pada setiap dua kotak yang bertetangga (memiliki sisi persekutuan) merupakan bilangan genap adalah $\frac{m}{n}$, dengan m dan n adalah dua bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $m + n$.

12. Tentukan banyaknya bilangan prima p sedemikian sehingga $p | x^3 - 5x^2 - 22x + 56$ untuk kurang dari tiga nilai bulat x yang berbeda pada interval $[0, p-1]$.

13. Definisikan barisan $\{a_n\}$ sebagai berikut: $a_1 = 3, a_2 = 3$, dan untuk $n \geq 2, a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 2016$. Tentukan nilai dari $\left\lfloor \frac{a_{2016}^2 + a_{2015}^2}{a_{2016}a_{2015}} \right\rfloor$, di mana $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x.

14. Diberikan segitiga sama kaki ABC dengan panjang sisi $AB = AC = 2\sqrt{6}$ dan $BC = 6$. Titik M terletak pada segmen BC sedemikian sehingga $BM : MC = 1 : 2$. Definisikan ω sebagai lingkaran yang menyinggung lingkaran luar segitiga ABC dan segmen BC pada titik M. Lingkaran ω menyinggung lingkaran luar segitiga ABC pada titik yang terletak pada busur BC yang tidak memuat A. Jika kuadrat dari jari-jari ω dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dimana a dan b merupakan dua bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai $a + b$.

14 2016 - Juli

1. Henry, Ilhan, Johan, dan empat orang lainnya mengikuti suatu perlombaan. Pada akhir perlombaan, masing-masing dari ketujuh orang tersebut diberi peringkat dari

$1, 2, \ldots, 7$. Jika diketahui bahwa peringkat Johan lebih tinggi daripada peringkat Ilhan, dan peringkat Ilhan lebih tinggi daripada peringkat Henry, tentukan banyaknya susunan peringkat yang mungkin.

2. Diketahui bahwa jumlah dari 10 buah bilangan prima berurutan adalah x, yang merupakan bilangan ganjil. Tentukan nilai terbesar yang mungkin bagi x.

3. Diberikan sebuah segitiga ABC dengan D adalah titik tengah BC. Diketahui bahwa $\angle ADC = 60°, AB = 10$, dan $AC = 8$. Jika luas segitiga ABC adalah $x\sqrt{y}$, dengan x dan y adalah bilangan asli dan y tidak habis dibagi oleh kuadrat dari bilangan prima apa pun, tentukan nilai dari $x + y$.

4. Tentukan jumlah semua bilangan dua angka yang memenuhi selisih kuadrat bilangan tersebut dengan kuadrat bilangan yang diperoleh dengan membalikkan kedua angka dari bilangan tersebut adalah 1584. (Catatan : $\overline{0a}$ sama dengan bilangan satu angka $\overline{a}$).

5. Diberikan sebuah segitiga ABC dengan BE dan CF adalah dua garis tingginya. Apabila $\angle BAC = 60°$ dan $p(XYZ)$ menyetakan keliling segitiga XYZ, tentukan nilai dari $210 \times \frac{p(AEF)}{p(ABC)}$.

6. Untuk setiap bilangan bulat positif k, misalkan α_k adalah bilangan real positif yang memenuhi persamaan $x^2 - kx - 1 = 0$. Tentukan bilangan bulat positif n terkecil sedemikian sehingga $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geq 2016$.

7. Misalkan P adalah sebuah segi-banyak beraturan dengan $n \geq 4$ sisi. Empat titik sudut berbeda A, B, C, dan D dipilih secara acak dari segi-banyak tersebut (permutasi dihitung berbeda). Misalkan peluang bahwa garis AB dan CD berpotongan di dalam segi-banyak adalah $\frac{a}{b}$, dengan a dan b adalah bilangan asli yang memenuhi $FPB(a, b) = 1$. Tentukan nilai dari $a \times b$.

8. Misalkan ABC adalah sebuah segitiga sama kaki dengan $AB = AC$ dan $\angle A = 100°$. Titik D terletak pada sinar AC sedemikian sehingga $AD = BC$. Tentukan besar $\angle ABD$ (dalam derajat).

9. Misalkan
$$S = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 2016 \cdot 2^{2016}.$$
Jika x adalah bilangan ganjil terbesar yang habis membagi S, dan y adalah bilangan bulat terbesar sedemikian sehingga 2^y habis membagi S, tentukan nilai dari $x + y$.

10. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) dengan $|x| \leq 100$ dan $|y| \leq 100$ yang memenuhi persamaan $x^2 + 4y = 4xy + 1$.

11. Diberikan segitiga lancip ABC dengan panjang diameter lingkaran luar $25. AD, BE$, dan CF adalah garis tinggi dari segitiga tersebut. Jika keliling dari segitiga DEF adalah 32, tentukan luas dari segitiga ABC.

12. Diberikan sebuah bilangan bulat n dengan $3 \leq n \leq 2016$. Sebanyak n bilangan bulat disusun melingkar sedemikian sehingga setiap bilangan lebih besar dari jumlah bilangan yang berada pada urutan pertama dan kedua dari sebelah kanan bilangan tersebut. Misalkan $A(n)$ menyatakan nilai terbesar dari banyaknya bilangan positif di antara n bilangan tersebut. Tentukan banyaknya nilai berbeda untuk $A(n)$, untuk setiap n yang mungkin.

13. Misal $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan yang memenuhi $a_0 = 0, a_1 = 1$, dan $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 0$. Tentukan bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga $61|a_k$.

14. Misalkan x, y, z adalah bilangan real yang memenuhi persamaan
$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz = 2\sqrt{x + y - z} - x - 2y + 2z - \frac{5}{4}.$$
Tentukan nilai dari $100(x + y + z)$.

15 2016 - Agustus

1. Terdapat dua bola merah dan dua bola biru dalam satu kantong. Tontowi mengambil dua bola secara acak dari kantong tersebut dan Liliyana mengambil dua bola sisanya. Jika p menyatakan peluang Liliyana mendapatkan dua bola berwarna sama, tentukan nilai dari $\lfloor 100p \rfloor$. Keterangan: $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

2. Misalkan $ABCD$ adalah sebuah lintasan berbentuk persegi panjang dengan $AB = 20$ dan $BC = 16$. Sebuah kereta kencana, traktor, odong-odong, dan motor bebek terletak pada titik A, B, C, dan D, berturut-turut. Pada suatu waktu, keempat kendaraan mulai bergerak secara serentak mengelilingi lintasan dengan rute $A - B - C - D - A$ (dan seterusnya) dengan kecepatan tetap. Diketahui bahwa perbandingan kecepatan kereta, traktor, odong-odong, dan motor adalah 2:9:11:18. Pada suatu titik di lintasan, keempat kendaraan bertemu untuk pertama kalinya dan langsung berhenti. Tentukan total jarak yang telah ditempuh seluruh kendaraan.

3. Misalkan ABC adalah segitiga dengan panjang sisi BC, CA, dan AB berturut-turut 19, 26, dan 21. Titik D terletak pada AC dan E pada AB sedemikian sehingga BD dan CE adalah garis bagi $\angle B$ dan $\angle C$, berturut-turut. Tentukan nilai dari $\left\lfloor \frac{100AD}{AE} \right\rfloor$.

4. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) sedemikian sehingga $a + b = 2016$ dan a dan b keduanya tidak habis dibagi 3.

5. Terdapat sepuluh murid yang mengikuti ujian matematika. Diketahui bahwa setiap soal dikerjakan oleh tepat tujuh murid. Jika sembilan murid pertama masing-masing mengerjakan empat soal, tentukan banyaknya soal yang dikerjakan murid yang kesepuluh.

6. Sebuah bilangan real positif dituliskan pada setiap sisi sebuah kubus. Selanjutnya, pada setiap titik sudut kubus dituliskan hasil dari perkalian tiga buah bilangan pada sisi-sisi yang memuat titik tersebut. Diketaui bahwa hasil penjumlahan dari semua bilangan yang tertera pada titik-titik sudut kubus adalah 100. Tentukan bilangan bulat terkecil yang mungkin untuk hasil penjumlahan semua angka pada sisi-sisi kubus.

7. Misalkan ABC adalah segitiga dengan sisi-sisi $AB = 2, BC = 3\sqrt{3}$, dan $AC = \sqrt{13}$. Apabila O_1 dan O_2 adalah pusat segitiga sama sisi ABC_1 dan BCA_1, berturut-turut, dengan C_1 terletak pada sisi yang berbeda dengan C terhadap AB dan A_1 terletak pada sisi yang berbeda dengan A terhadap BC, tentukan nilai $3(O_1O_2)^2$.

8. Bona hanya memiliki sepatu berwarna hitam dan putih. Setiap hari, Bona selalu menggunakan sepatu dan hanya menggunakan satu jenis warna sepatu. Tentukan banyaknya cara Bona memilih sepatu yang dia gunakan dalam sepuluh hari dengan syarat bahwa satu jenis warna sepatu tidak digunakan sebanyak tiga kali berturut-turut.

9. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan
$$xy^2 - xy - y + x^2 = 1.$$

10. Misalkan ABC adalah segitiga lancip dengan lingkaran luar Γ. Misalkan pula ℓ adalah garis singgung Γ di titik B. Garis bagi sudut A memotong BC, Γ, dan ℓ di titik $D, E, danF$, berturut-turut, sehingga A, D, E, dan F terletak pada satu garis dalam urutan tersebut. Jika $AE = EF, BD = 7$ dan $CD = 9$, hitunglah nilai dari AD^2.

11. Barisan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ didefinisikan dengan $a_1 = 2, a_2 = 2016$, dan $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$. Misalkan
$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{2a_{i-1}}{a_i^2 - a_{i-1}^2} = \frac{p}{q},$$
dengan p dan q adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Hitunglah nilai dari $p + q$.

12. Sebuah bilangan asli empat-angka dikatakan *ktom* jika saat bilangan tersebut difaktorisasi prima, jumlah faktor-faktor primanya sama dengan jumlah eksponennya (pangkatnya). Sebagai contoh, 2000 adalah bilangan ktom karena $2000 = 2^4 5^3$ dan $2 + 5 = 4 + 3$. Tentukan hasil jumlah semua bilangan ktom.

13. Diberikan sebuah persegi panjang 2×10 yang terdiri atas 20 persegi satuan. Tentukan banyaknya cara mewarnai persegi-persegi satuan tersebut dengan warna hitam atau putih sedemikian sehingga setiap persegi 2×2 mengandung tepat 2 persegi satuan putih dan persegi satuan hitam. Perhatikan bahwa pewarnaan yang diperoleh dari rotasi atau refleksi suatu pewarnaan lain dianggap berbeda dari pewarnaan asalnya.

14. Misalkan γ adalah lingkaran dalam segitiga ABC dan D titik pada segmen BC. Misalkan pula X adalah perpotongan AD dengan γ di mana X lebih dekat ke A dibandingkan ke D. Jika jari-jari γ adalah 1 dan $AX : XD : DC = 1 : 3 : 10$, tentukan besar $p + q + r$ jika panjang XD adalah $\frac{p\sqrt{q}}{r}$ dalam bentuk yang paling sederhana.

16 2016 - September

1.

17 2016 - Oktober

1.

18 2016 - November

1.

19 2016 - Desember

1. Misalkan $ABCD$ adalah persegi panjang dengan $AB = 12$ dan $AD = 14$. Misalkan M adalah titik tengah AD dan N adalah titik tengah CD. Tentukan luas $BCNM$.

2. Diberikan dua polinomial $P(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 30x - 24$ dan $Q(x) = x^3 - x^2 - 14x + 8$. Katakan sebuah akar real dari $P(x)$ atau $Q(x)$ *unik* bila akar tersebut hanya dimiliki oleh tepat satu dari $P(x)$ dan $Q(x)$. Tentukan hasil kali semua akar unik dari $P(x)$ dan $Q(x)$.

3. Adi memiliki sebuah kotak ajaib. Jika suatu bilangan dua-angka dimasukkan ke dalam kotak tersebut, kotak tersebut akan mengubah bilangan tersebut dengan cara

meletakkan angka 0 di antara angka puluhan dan satuan bilangan tersebut. Sebagai contoh, ketika dimasukkan angka 18, kotak ajaib tersebut akan mengeluarkan angka 108.

Sebuah bilangan dimasukkan ke dalam kotak ajaib. Diketahui bahwa jumlah bilangan yang dimasukkan dan bilangan yang keluar adalah 666. Tentukan bilangan yang dimasukan ke dalam kotak ajaib.

4. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Definisikan m sebagai banyaknya himpunan bagian tak-kosong dari A yang hasil penjumlahan setiap elemennya adalah bilangan genap dan n adalah banyaknya himpunan bagian tak-kosong dari A yang hasil perkalian setiap elemennya adalah bilangan genap. Tentukan nilai dari $m + n$.

5. Diberikan tiga bilangan real x, y, dan z yang memenuhi persamaan
$$\frac{x}{3y - 2z} = \frac{x + y}{z} = \frac{y}{3x} = r,$$
di mana r adalah bilangan real positif. Tentukan jumlah semua nilai yang mungkin untuk r.

6. Titik D, E, dan F terletak pada sisi BC, CA, dan AB dari $\triangle ABC$, berturut-turut, sehingga AD, BE, dan CF adalah garis berat. Titik X, Y, dan Z terletak pada segmen AD, BE, dan CF, berturut-turut, sehingga $AX : XD = 1 : 1, AY : YE = 1 : 3$, dan $AZ : ZF = 1 : 4$. Misalkan
$$\frac{\text{luas } \triangle ABC}{\text{luas } \triangle XYZ} = \frac{m}{n},$$
dengan m dan n adalah bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai dari $m + n$.

7. Seseorang ingin membagikan 20 buah buku identik kepada keempat anaknya sehingga setiap anak memeproleh minimal 1 buah buku dan setiap anak memperoleh jumlah buku yang berbeda. Tentukan banyaknya cara untuk membagikan kedua puluh buku tersebut.

8. Sebanyak 100 bilangan asli yang semuanya berbeda memiliki jumlah 8064. Misalkan m dan n berturut-turut menyatakan banyak maksimum dan minimum bilangan ganjil yang mungkin dari 100 bilangan tersebut. Tentukan nilai dari $m - n$.

9. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan real taknol yang memenuhi kedua persamaan berikut:
$$(x + y)(y + z)(z + x) = 24xyz, (x + 2y)(y + 2z)(z + 2x) = 60xyz$$
Jika $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{m}{n}$ untuk bilangan asli m dan n yang relatif prima, tentukan nilai dari $m + n$.

10. Misalkan S adalah hasil penjumlahan semua bilangan berbentuk $2^x 3^y 5^z$ dengan x, y, dan z adalah bilangan bulat taknegatif yang memenuhi persamaan $x + y + z = 20$. Tentukan sisa pembagian S oleh 1001.

11. Diberikan segitiga ABC dengan D titik tengah BC. Jika panjang $AC = 12, \angle DAC = 78° dan \angle DAB = 51°$, tentukan panjang AD.

12. Misalkan x dan y adalah bilangan real yang memenuhi persamaan $x + y = 2$. Jika nilai minimum dari $\sqrt{16 + 3x^2} + 2\sqrt{73 + 3y^2}$ adalah m, tentukan nilai dari m^2.

13. Misalkan titik D adalah titik tengah busur BC yang memuat titik A di lingkaran luar $\triangle ABC$. Misalkan $\angle ABC = 2\angle ACB pada \triangle ABC$. Misalkan juga garis tegak lurus AC yang melewati titik D memotong AC di titik E. Diketahui panjang $CE = 100$ dan $\sin \angle ACB = \frac{1}{3}$. Jika panjang jari-jari lingkaran luar $\triangle ABC$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{1}{23}\left(a\sqrt{2} - b\right)$ dengan a dan b adalah bilangan asli, tentukan nilai dari $a + b$.

14. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan asli sehingga
$$(x^2 + 2)(y^2 + 3)(z^2 + 21) = 120xyz.$$
Misalkan S adalah himpunan semua nilai xyz yang mungkin Tentukan hasil penjumlahan semua anggota S.

20 2017 - Januari

1. Tentukan bilangan asli dengan empat digit terkecil yang memiliki banyak faktor yang sama dengan banyak faktor dari 2017.

2. Diberikan segitiga ABC yang siku-siku di C dengan $CA = 3$ dan $CB = 4$. Titik D terletak pada AB sehingga CD tegak lurus terhadap AB. Titik E terletak pada CA sehingga DE tegak lurus terhadap CA. Jika panjang DE dinyatakan dalam bentuk $\frac{m^2}{n^2}$, dengan m dan n adalah bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $m + n$.

3. Misalkan x dan y bilangan real yang memenuhi $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 4 = 0$. Tentukan nilai dari $x^4 + y^4$.

4. Sebuah bilangan asli disebut mantap jika penulisannya dalam basis 7 berakhir dengan angka 5.Sebuah bilangan disebut jiwa jika penulisannya dalam basis 13 berakhir dengan angka 4. Sebuah bilangan dikatakan mantap jiwa jika bilangan tersebut mantap sekaligus jiwa. Tentukan bilangan mantap jiwa terbesar yang terdiri dari tiga angka.

5. Misalkan $ABCD$ adalah segiempat dengan $AB = BC = CD = DA$ dan $\angle ABC < 90°$. Diketahui bahwa terdapat titik E dan F pada segmen BC dan CD, berturut-turut, sehingga $AB = AE = AF = FE$(E terletak di antara B dan C, dan F terletak di antara C dan D). Misalkan besar $\angle BEF$ adalah p dalam satun derajat. Tentukan nilai p.

6. Andi dan Budi sedang bermain. Diberikan 2017 kartu dengan 901 diantaranya berwarna merah dan sisanya berwarna biru. Sebuah ronde permainan didefinisikan sebagai berikut: dua kartu diambil secara bersamaan; jika kartu yang terambil pertama berwarna merah dan kedua berwarna biru, Andi menang dan ronde selesai; jika kartu yang terambil pertama berwarna biru dan kedua berwarna merah, Budi menang dan ronde selesai; jika kedua kartu yang terambil berwarna sama, permainan berlanjut (kartu yang sudah terambil tidak dikembalikan lagi). Misalkan x adalah peluang Andi memenangkan sebuah ronde permainan. Tentukan nilai dari $2016x$.

7. Berapakah sisa dari $20^{2017} + 01^{2017} + 17^{2017} + 72^{2017}$ ketika dibagi dengan 2017?

8. Andi dan Budi sedang bermain. Terdapat sebuah kantong yang berisi 2016 kelereng merah dan 2017 kelereng biru. Andi mengambil sejumlah kelereng secara acak dari kantong tersebut. Andi menang jika banyaknya kelereng merah lebih banyak dari banyaknya kelereng biru; sebaliknya, Budi menang. Untuk memaksimalkan peluang Andi menang, tentukan jumlah kelereng yang harus diambilnya.

9. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang $AB = 25, BC = 34$, dan $CA = 39$. Misalkan P adalah sebuah titik di dalam segitiga dan titik-titik X, Y, dan Z adalah proyeksi titik P ke sisi BC, CA, dan AB berturut-turut. Diketahui bahwa ketia segiempat $AZPY, BXPZ$, dan $CYPX$ semuanya memiliki lingkaran dalam. Jika $PX + PY + PZ = \frac{m}{n}$ untuk suatu bilangan asli m dan n yang relatif prima. Hitunglah $m + n$. Catatan : lingkaran dalam dari sebuah segiempat adalah sebuah lingkaran di dalam segiempat yang menyinggung keempat sisi dari segiempat tersebut.

10. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungis tak-konstan (hal ini berarti terdapat dua bilangan real a dan b sehingga $f(a) \neq f(b)$) yang memenuhi persamaan $f(x)f(x + y) = f(2x + y) - xf(x + y) + x$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Tentukan $f(-99)$.

11. Satria sedang bermain sebuah game dengan 3 (tiga) level. Kemungkinan ia memenangkan level pertama, kedua dan ketiga adalah $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, dan $\frac{1}{3}$, berturut-turut. Satria mulai dari level pertama. Setiap kali Satria memenangkan sebuah level, ia maju ke level selanjutnya; sedangkan setiap kali Satria kalah pada sebuah level, ia truun ke level sebelumnya. Jika Satria memenangkan level ketiga, ia memenangkan permainan dan permainan selesai. Sebaliknya, jika Satria kalah pada level pertama, ia dianggap kalah dalam permainan dan permainan juga selesai. Misalkan kemungkinan Satria

memenangkan permainan pertama adalah $\frac{a}{b}$, di mana a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai dari $a+b$.

12. Misalkan x dan y adalah bilangan bulat sehingga

$$(x^3-1)(y^3-1)=3(x^2y^2+2)$$

Tentukan nilai dari x^2+y^2.

13. Misalkan $\triangle ABC$ memiliki I sebagai titik pusat lingkaran dalamnya. Lingkaran berdiameter AI memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ sekali lagi di titik X (hal ini berarti $X \neq A$). Misalkan Y adalah titik tengah busur BC yang tidak memuat A pada lingkaran luar $\triangle ABC$. Misalkan XY memotong BC di titik Z. Jika $BZ=7$ dan $AC=35$, tentukan keliling $\triangle ABC$.

14. Andi memiliki 3 tiket. Setiap hari, sebuah tiket diambil. Terdapat $\frac{2}{5}$ kemungkinan bahwa tiket yang terambil tersebut dikembalikan, dan terdapat $\frac{3}{5}$ kemungkinan bahwa Andi akan mendapat kembalian 2 tiket (jadi, banyak tiket yang dmiliki Andi bertambah 1 tiket). Kejadian ini dilakukan terus menerus. Jika peluang suatu saat tiket Andi habis adalah x, tentukan $999x$.

21 2017 - Februari

1. Misalkan a dan b adalah bilangan real sedemikian sehingga kurva $x-2y^2-ay-b=0$ menyinggung sumbu-y. Tentukan nilai dari a^2-8b.

2. Diberikan segitiga ABC dengan $CA=5, CB=7$, dan $AB=8$. Misal PQ adalah garis yang sejajar dengan AB dan menyinggung lingkaran dalam segitiga ABC, di mana P terletak pada AC dan Q terletak pada BC. Bila panjang PQ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m dan n merupakan bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $m+n$.

3. Tentukan banyaknya cara membagi 11 orang ke dalam kelompok-kelompok yang hanya beranggotakan 4 atau 3 orang.

4. Diketahui bahwa

$$20!+17!=24332576x560473yz00.$$

Carilah nilai dari $100x+10y+z$.

5. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan real positif yang memenuhi $abc=\frac{1}{8}$. Tentukan nilai minimum dari

$$16a^2+16b^2+16c^2+32a^2b^2+32b^2c^2+32c^2a^2.$$

6. Titik E adalah titik tengah sisi AB dari persegi $ABCD$. Lingkaran yang melalui B dengan pusat A memotong segmen EC di titik F. Apabila $\frac{EF}{FC}$ dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $a+b$.

7. Diketahui bahwa suatu barisan aritmetika memiliki suku pertama 1, beda k, dan mengandung angka 2016. Jika $0 < k < 1000$ dan k adalah bilangan bulat, hitunglah jumlah dari semua nilai k yang mungkin.

8. Sebuah dadu bersisi 6 (sisi-sisinya mengandung angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6) dan sebuah dadu bersisi 4 (sisi-sisinya mengandung angka 1, 2, 3, dan 4) dilempar. Jika peluang angka pada dadu bersisi 4 lebih besar dari angka pada dadu bersisi 6 adalah n, tentukan nilai dari $100n$.

9. Tentukan jumlah semua nilai θ (dalam derajat) yang memenuhi persamaan $\sqrt{3}\lfloor \sin\theta \rfloor = 2\cos\theta$ dengan $-360° \leq \theta \leq 360°$.

10. Terdapat sekelompok orang. Diketahui bahwa setiap laki-laki di kelompok itu memiliki teman perempuan tiga kali lipat banyaknya teman laki-laki, dan setiap perempuan di kelompok itu memiliki teman perempuan dua kali lipat banyaknya teman laki-laki. Tentukan banyaknya orang di kelompok tersebut. (Asumsikan bahwa setiap dua orang yang berbeda di kelompok tersebut adalah teman).

11. Misalkan ABC adalah segitiga sama sisi dan titik P terletak di dalamnya. Misalkan D, E, dan F adalah proyeksi titik P terhadap sisi BC, CA, dan AB, berturut-turut. Misalkan $BD = 4, CE = 5$, dan $AF = 6$. Tentukan kuadrat dari luas $\triangle ABC$.

12. Diberikan sebuah bilangan asli m yang memenuhi m^{53} bersisa 31 apabila dibagi dengan 143. Tentukan sisa pembagian m oleh 143.

13. Diberikan segitiga ABC dengan P adalah titik singgung lingkaran dalam segitiga dengan sisi AB. Misalkan $AP = 23, BP = 27$, dan jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah 21. Tentukan keliling segitiga ABC.

14. Diberikan sebuah barisan bilangan bulat$x_1, x_2, \cdots$ sehingga untuk setiap $n \geq 1$ berlaku $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 4x_{n+1} + 8x_n dan x_1 = 296, x_2 = 219, x_3 = 144$. Carilah bilangan bulat positif n terkecil sedemikian sehingga untuk semua bilangan bulat $m \geq n$, berlaku $x_m \geq 0$.

15. Misalkan N adalah banyaknya 6-tupel bilangan bulat terurut (a, b, c, d, e, f) sedemikian sehingga
$$|a| + |b| + |c| + |d| + |e| + |f| \leq 19.$$
Tentukan sisa pembagian N oleh 17.

16. Suatu barisan a_n didefinisikan sebagai $a_n = n$ untuk $n = 0, 1, 2, 3, 4$ dan untuk setiap $i \geq 5, a_i$ adalah sisa pembagian $a_{i-1} + a_{i-5}$ dengan 5. Hitunglah nilai dari

$$1000 \times a_2 + 100 \times a_{20} + 10 \times a_{201} + a_{2017}.$$

17. Diberikan $\triangle ABC$ lancip dengan M sebagai titik tengah BC dan $\sin A = \frac{1}{3}$. Misalkan BE dan CF adalah garis tinggi $\triangle ABC$ yang berpotongan di titik H (titik E dan F pada CA dan AB, berturut-turut). Jika

$$(\cos \angle EMF)^2 + (\cos \angle MFE)^2 + (\cos \angle FEM)^2 = \frac{p}{q}$$

untuk suatu bilangan asli p dan q yang relatif prima, hitunglah nilai dari $p + q$.

18. Tentukan banyaknya bilangan asli n dengan $2 \leq n \leq 1000$ sehingga $n!$ habis dibagi oleh 2^{n-2}.

19. Misalkan p dan q adalah bilangan asli sedemikian sehingga

$$\prod_{k=1}^{14} \cos{(6k)^\circ} = \frac{\sqrt{p}}{q}.$$

Jika p adalah bilangan yang tidak habis dibagi bilangan kuadrat apa pun selain 1, tentukan sisa pembagian $p + q$ oleh 1000.Catatan: Notasi $\prod_{k=1}^{m} f(k)$ menyatakan perkalian $f(1), f(2)$, sampai dengan $f(k)$.

20. Terdapat n titik di dalam persegi berukuran 3×3 (titik-titik tersebut boleh terletak pada sisi ataupun sudut persegi tersebut). Tentukan nilai terkecil yang mungkin untuk n sehingga pasti dapat ditemukan 2 titik dengan jarak kurang dari 2.

22 2017 - Maret

1. Pada sebuah kantong terdapat 9 keping uang pecahan Rp200,00, 4 keping uang pecahan Rp500,00, dan 8 keping uang Rp1000,00. Seseorang mengambil dua buah koin dari kantong tersebut secara acak (tanpa pengembalian). Jika peluang didapatkan uang dengan jumlah paling sedikit Rp1000,00 adalah $\frac{m}{n}$, dengan m dan n adalah dua bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $100m + n$. (Asumsikan bahwa setiap koin diasumsikan memiliki peluang yang sama untuk terambil.)

2. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{log_{81}x} - \frac{1}{log_{225}x} + \frac{1}{log_{625}x} = 2$$

3. Tentukan banyaknya bilangan asli n sehingga sisa pembagian 2018 oleh n sama dengan sisa pembagian n oleh 2.

4. Diberikan $\triangle ABC$ dengan titik D pada segmen BC. Misalkan E dan F terletak pada sisi AC dan AB sehingga DE sejajar dengan AB dan DF sejajar dengan AC. Apabila $CE = 7, DE = 20, DF = 21 dan EF = 29$, tentukan luas $\triangle ABC$.

5. Tentukan banyaknya tripel bilangan asli (a, b, c) sehingga $1 \leq a < b+2 < c+4 \leq 12$.

6. Misalkan r adalah bilangan real positive yang kurang dari 1 sehingga

$$\frac{1 + (r^2 + r^3) + (r^5 + r^6) + (r^8 + r^9) + \ldots}{1 + r + r^2 + r^3 + \ldots} = \frac{62}{63}$$

Tentukan nilai dari $r + \frac{1}{r}$

7. Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan bulat (x, y) sehingga

$$x^2 + 20x = y^2 + 20.$$

8. Misalkan $ABDC$ adalah segiempat konveks dengan $\angle ABD = \angle ADC = 90°, AB = 4, BD = 3$, dan $AD = CD$. Misalkan lingkaran luar segitiga ADC memotong AB di E. Jika panjang CE dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, di mana b adalah bilangan asli yang tidak habis dibagi oleh suatu bilangan kuadrat sempurna bukan satu serta a dan c adalah dua bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $a + b + c$.

9. Untuk setiap bilangan asli n, definisikan $f(n)$ sebagai banyaknya cara meletakkan n buah benteng pada papan catur 6×6 sehingga setiap benteng hanya menyerang paling banyak satu benteng lainnya. Hitunglah nilai dari $f(7) + f(8) + f(9) + f(10)$.

10. Barisan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ didefinisikan sebagai $a_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$ dan

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n^2 - 2a_n + 1} + \frac{1}{2}$$

untuk setiap $n \geq 1$. Tentukan 3 digit terakhir dari $\lfloor a_{2017} \rfloor$.

11. Misalkan AB dan CD merupakan tali busur lingkaran ω yang saling tegak lurus. Panjang AB adalah $20\sqrt{5}$ dan panjang CD adalah $4\sqrt{19}.AB$ dan CD berpotongan di dalam lingkaran di titik E. Apabila garis tinggi segitiga EAD dari E memotong BC di M dan garis tinggi segitiga EBC dari E memotong AD di N, Tentukan panjang MN.

12. Diketahui 4 bilangan real positif x, y, z, dan w yang memenuhi persamaan

$$xyzw = 1, x^{100} + 100y = 100z + w^{100}, \mathrm{dan} 100x + y^{100} = z^{100} + 100w$$

Tentukan nilai minimum yang mungkin untuk $x + y + z + w$.

13. Untuk setiap bilangan asli n, definisikan $\tau(n)$ sebagai hasil penjumlahan semua pembagi positif dari n, sebagai contoh, $\tau(6) = 12$ dan $\tau(14) = 24$. Definisikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sebagai
$$f(n) = \frac{1}{\tau(n^2)}$$
untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan
$$S = \frac{f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + ...}{f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + ...}$$
Hitunglah nilai dari $\lfloor S \rfloor$.

14. Diberikan $\triangle ABC$ dengan luas 2000 dan $BC = 80$. Lingkaran dalam $\triangle ABC$ berpusat di I dan menyinggung sisi BC di titik X. Misalkan Y adalah titik tengah busur BC dari lingkaran luar $\triangle ABC$ yang tidak memuat A. Misalkan pula Z adalah kaki tegak lurus $\triangle ABC$ dari A ke sisi BC. Jika XY memotong AZ di titik P dan $AP - IX = 13$, hitunglah nilai dari $AI^2 - PX^2$.

23 2017 - April

1. Tentukan banyaknya bilangan asli yang tidak lebih dari 2017 dan memuat sebanyak genap digit ganjil dalam representasi desimalnya.

2. Akar - akar persamaan kuadrat $4x^2 + ax + b = 0$ adalah tiga kali akar - akar persamaan kuadrat $2x^2 + cx + d = 0$. Tentukan nilai dari $\frac{b}{d}$.

3. Pada segitiga sama sisi ABC dengan panjang sisi $90\sqrt{2}$ dibuat lingkaran yang berpusat di A dengan jari - jari $AB = AC$. Titik D terletak pada lingkaran tersebut pada sisi yang berbeda dengan C terhadap AB sedemikian hingga $\angle ABD = 75°$. Tentukan panjang CD.

4. Tentukan banyak kuadruplet bilangan asli (x, y, z, k) sedemikian sehingga
$$x! + y! + z! = 3^k.$$

5. Tentukan nilai x positif yang memenuhi persamaan
$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{5\sqrt{2} + x} + \sqrt[3]{5\sqrt{2} - x}} = \sqrt{2}.$$

6. Afif ingin menyimpan lima permen dengan rasa berbeda - beda ke tiga kotak berwarna berbeda sedemikian sehingga tidak ada kotak yang kosong. Tentukan banyak cara Afif menyimpan permennya

7. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 6, AC = \sqrt{26}$, dan $BC = 5\sqrt{2}$. Dibuat sebuah persegi $ABPQ$ dengan titik P dan Q berada pada sisi yang berbeda dengan C terhadap AB. Apabila M adalah titik tengah PQ dan panjang CM dapat ditulis dalam bentuk $p\sqrt{q}$, dengan p dan q adalah bilangan bulat dan q tidak habis dibagi oleh suatu kuadrat bilangan asli, tentukan nilai dari $p + q$.

8. Definisikan s_i sebagai bilangan yang hanya terdiri dari i buah angka 1; jadi $s_1 = 1, s_2 = 11, s_3 = 111$, dan seterusnya. Hitunglah sisa dari $s_1 + s_2 + ... + s_{2015}$ ketika dibagi 2016.

9. Misalkan P adalah polinomial monik (polinomial yang mana koefisien suku dengan pangkat terbesarnya adalah 1) berkoefisien bilangan bulat dengan derajat terkecil yang memenuhi
$$P(1 - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 0$$
Tentukan nilai $P(2)$.

10. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi ketiga kondisi berikut secara bersamaan :
$$\begin{aligned} 1 \leq x, y, z &\leq 10 \\ x &< z \\ y &< z \end{aligned}$$

11. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 7, BC = 9$, dan $CA = 10$. Misalkan titik pusat lingkaran dalam segitiga tersebut adalah I. Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung BC, CA dan AB di titik $D, E, danF$, berturut - turut. Apabila K merupakan hasil pencerminan dari titik D terhadap titik I dan DE memotong FK pada titik S, tentukan nilai dari AS^2.

12. Misalkan N ialah banyaknya pasangan bilangan taknegatif (x, y, z) yang memenuhi
$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2017}$$
Tentukan sisa pembagian dari N oleh 1000.

13. Diketahui polinomial $P(x)$ memenuhi $P(0) = -2$ dan untuk sembarang bilangan real taknol x dan y dipenuhi persamaan
$$xP(\frac{y}{x}) + yP(\frac{x}{y}) = x + y$$
Tentukan nilai dari $P(100)$.

14. Tentukan banyaknya bilangan asli n yang kurang dari 2017 dengan sifat sebagai berikut : apabila p adalah bilangan prima terkecil yang membagi $n, p^2 - p + 1$ juga habis membagi n.

15. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 10. Titik E, F, G dan H merupakan titik tengah sisi BC, CD, DA, dan AB, berturut - turut. Apabila AE memotong BF di M dan CG memotong DH di N, tentukan nilai dari MN^2.

16. Sebuah persegi dengan panjang sisi 8 satuan akan dibagi menjadi 64 persegi satuan (persegi dengan panjang sisi 1). Kemudian, persegi satuan ini diwarnai dengan warna hitam atau putih. Tentukan banyaknya cara mewarnai persegi tersebut sedemikian sehingga setiap persegi dengan panjang sisi 2 satuan yang dibentuk oleh 4 persegi satuan yang bertetangga memuat tepat 2 persegi satuan dengan warna hitam dan 2 persegi satuan dengan warna putih. (persegi bertetangga adalah persegi yang mempunyai sisi yang sama).

17. Misalkan ABC adalah segitiga dengan panjang sisi $BC = 35, CA = 42$, dan $AB = 49$. Misalkan BE dan CF adalah garis tinggi segitiga ABC dan EF yang memotong lingkaran luar ABC di P dan Q, berturut - turut, di mana P terletak pada busur AB yang tidak memuat C dan Q terletak pada busur AC yang tidak memuat B. Apabila panjang PQ dapat ditulis dalam bentuk $m\sqrt{n}$, di mana m dan n adalah bilangan bulat positif dan n tidak habis terbagi oleh kuadrat dari bilangan prima apa pun, tentukan nilai dari $m + n$.

18. Misal
$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{199 \cdot 200}$$
dan
$$B = \frac{1}{101 \cdot 200} + \frac{1}{102 \cdot 199} + ... + \frac{1}{200 \cdot 101}$$
Tentukan nilai dari $\frac{2A}{B}$.

19. Misalkan S adalah himpunan semua bilangan asli n yang kurang dari 2017 sehingga n dapat ditulis sebagai perkalian semua bilangan tiga pembagi terkecilnya yang tidak sama dengan 1 (dengan kata lain, $n = xyz$ dengan $1 < x < y < z$ dan x, y, dan z merupakan tiga buah pembagi terkecil dari n). Tentukan banyaknya anggota S.

20. Pada ekspresi berikut :
$$\Diamond 1 \Diamond 2 \Diamond 3 \Diamond 4 \Diamond 5 \Diamond 6 \Diamond 8 \Diamond 9 \Diamond 10$$
terdapat 10 buah simbol $\Diamond$. Setiap simbol $\Diamond$ pada ekspresi tersebut akan diganti dengan tanda $+$ atau tanda $-$ (tidak keduanya) sehingga ekspresi tersebut menghasilkan sebuah bilangan. Tentukan banyaknya cara mengganti simbol - simbol $\Diamond$ sehingga bilangan yang dihasilkan dari ekspresi tersebut habis dibagi 5.

24 2017 - Mei

1.

25 2017 - Juni

1.