Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Maret: Simulasi OSP Matematika SMA 2019

22 Maret – 25 Maret 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{FPB}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$ (kadang ditulis $\phi(n)$), menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

(e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Pada suatu desa, terdapat hanya manusia dan kucing. Jumlah manusia adalah setengah dari jumlah kucing. Jumlah kaki dari manusia dan kucing adalah 100. Tentukan banyaknya makhluk hidup di desa tersebut.

2. Misalkan x merupakan bilangan bulat positif kurang dari 2019. Tentukan banyaknya x yang memenuhi $FPB(2019, x) > 1$.

3. Ucok ingin makan es krim. Terdapat 12 pilihan rasa eskrim. Ucok menginginkan es krim yang merupakan campuran dua rasa berbeda. Namun, Ucok tidak mau es krim rasa coklat ataupun vanilla. Banyaknya kombinasi rasa eksrim yang dapat memuaskan Ucok adalah ...

4. Misalkan terdapat tiga segiempat konveks A_1, A_2, A_3. Diketahui A_1 beririsan dengan A_2 dan A_2 beririsan dengan A_3. Diketahui juga kedua daerah irisan tidak beririsan serta A_1 dan A_3 tidak beririsan. Jika luas $A_1 = 16$, luas $A_2 = 8$, luas $A_3 = 9$, luas gabungan ketiga segiempat adalah A, serta $p < A < q$ untuk p dan q bilangan real positif, tentukan nilai minimal dari $q - p$.

5. Misalkan banyak pasangan bilangan asli (a, b, c, d, e, f) sehingga $abc = 2016$ dan $def = 1620$ adalah B. Tentukan sisa pembagian B oleh 10^4.

6. Diberikan segitiga ABC dimana $\angle A = 30°$, $AB = 26$, dan $AC = 52$. Misalkan D dan E terletak pada segmen BC sedemikian sehingga AD dan AE adalah garis bagi dan garis berat berturut-turut. Selain itu, misalkan F terletak pada segmen AC dimana $CF = 13$. Misalkan AE dan DF saling berpotongan di G. Tentukan luas dari segiempat $CEGF$.

7. Diberikan barisan bilangan bulat $U_1, U_2, U_3, \ldots$ dimana $U_i = 1 + 2 + \cdots + i$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots$. Selanjutnya, diberikan barisan bilangan bulat $T_1, T_2, T_3, \ldots$ dimana $T_i = U_1 + U_2 + \cdots + U_i$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots$. Terakhir, diberikan barisan bilangan bulat $S_1, S_2, S_3, \ldots$ dimana $S_i = T_1 + T_2 + \cdots + T_i$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots$. Tentukan nilai dari $S_{27} - S_{25} - S_{23} + S_{21}$.

8. Tentukan jumlah dari semua bilangan bulat n sehingga $\phi(n) = 24$. Dimana $\phi(n)$ adalah banyaknya bilangan asli x yang kurang dari n sehingga $FPB(x, n) = 1$.

9. Leon sedang mencari kartu di dalam sebuah lemari yang berisi 30 kotak, setiap kotak terdiri dari tepat satu buah kartu. Setiap kartu memiliki tepat satu karakter. Diketahui dari kartu-kartu itu, 5 diantaranya adalah kartu bernama Colt, 3 kartu Brock, x kartu Piper, y adalah kartu Penny, dan sisanya adalah kartu Rico (x dan y adalah bilangan bulat nonnegatif). Jika Leon mengambil kotak satu per satu tanpa melihat isi lemari, dan banyak kotak minimal yang perlu diambil Leon untuk menjamin dia mendapatkan 6 kartu yang karakternya sama adalah 23, tentukan banyaknya kombinasi banyaknya kartu-kartu yang mungkin.

10. Diberikan sebuah segitiga ABC dengan $AB = 26, BC = 28, AC = 30$. H adalah titik tinggi segitiga ABC. Misalkan r_1, r_2, r_3, r_4 adalah jari-jari lingkaran luar segitiga ABC, HAB, HBC, HAC secara berturut-turut. Tentukan $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$.

11. Definisikan $f_1(x) = |x - 2019|$ dan $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$. Tentukan nilai dari
$$f_1(1) - f_2(2) + f_3(3) - f_4(4) + \cdots + f_{2019}(2019)$$

12. Untuk setiap bilangan asli $n > 1$, definisikan $S(n)$ adalah jumlah dari seluruh bilangan asli yang tidak lebih dari n dan relatif prima dengan n. Sebagai contoh, kita tahu bahwa bilangan yang tidak lebih dari 6 dan relatif prima dengan 6 adalah 1 dan 5, maka diperoleh $S(6) = 1 + 5 = 6$.
Tentukan sisa pembagian
$$1^{2S(2019)} + 2^{2S(2019)} + 3^{2S(2019)} + \cdots + 2017^{2S(2019)} + 2018^{2S(2019)}$$
oleh 2019.

13. Tentukan nilai dari $\csc(\frac{\pi}{14}) - 4\cos(\frac{2\pi}{7})$.

14. Dua lingkaran Ω_1 dan Ω_2 dengan jari-jari 250 dan 16 saling bersinggungan secara di luar pada titik A. Titik P terletak pada Ω_1 dan ttitk Q terletak pada Ω_2 sehinga $\angle PAQ = 120°$ dan perpotongan antara garis singgung di P dan Q masing-masing terhadap Ω_1 dan Ω_2 terletak pada garis bagi $\angle PAQ$. Hitunglah $\lfloor \frac{AP}{AQ} \rfloor$.

15. Misalkan $f(x)$ adalah banyaknya bilangan asli kurang dari x dan tidak relatif prima dengan x.Jika $S = \sum_{d|10^{1343}} f(d)$, tentukan sisa dari S jika dibagi dengan 2019.

16. Diberikan suatu papan tulis yang bertuliskan bilangan 0. Alan bermain dengan peraturan berikut: Pada giliran ke i, jika papan bertuliskan bilangan n, Alan dapat menggantinya dengan $n + i$ atau $n - 2i$, dengan syarat bilangan baru yang ditulis adalah bilangan bulat non-negatif kurang dari 2019. Permainan selesai ketika Alan tidak dapat melangkah lagi. Tentukan nilai maksimal dari bilangan cacah k sehingga Alan pasti dapat melakukan minimal k langkah. Catatan: Jika Alan masih bisa melangkah, Alan tidak boleh berhenti.

17. Tentukan jumlah dari semua nilai a yang mungkin sehingga untuk bilangan asli a dan b, memenuhi
$$a|b^2, \ b|a^2 + 25$$

18. Diberikan segiempat $ABCD$ yang diagonalnya berpotongan di P. Diketahui $\angle BAC = 30°, \angle CAD = 20°, \angle ABD = 50°$, dan $\angle DBC = 30°$. Hitung $\angle ACD$.

19. Suatu polinomial P berkoefisien real disebut sebagai "*polinom baik*" jika berlaku $P(P(x)) + P(P(y)) + 2P(xy + 1) = P(x^2 + y^2) + 2P(x + y) + 5$ berlaku untuk setiap bilangan real x dan y. Misalkan S adalah hasil perkalian seluruh bilangan real t sehingga terdapat suatu bilangan real c yang memenuhi $P(t) = c$ untuk setiap polinom baik P. Tentukan nilai dari $|S|$.

20. Sebuah balok berukuran $10 \times 11 \times 12$ dibentuk dari kubus kaca dengan panjang sisi 1 satuan. Lalu, balok tersebut akan dilubangi dengan laser melalui salah satu dari diagonal ruang balok tersebut. Setelah balok tersebut dilubangi, balok tersebut dibongkar menjadi kubus-kubus kaca. Tentukan banyakanya kubus kaca yang terkena laser.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Diberikan sebuah segitiga ABC dengan M titik tengah segmen garis BC. D dan E adalah titik pada segmen AB dan AC secara berturut-turut sehingga $MD \perp AB$ dan $ME \perp AC$. Jika $DE \parallel BC$, buktikan bahwa $AB = AC$ atau $\angle A = 90°$.

2. Vettel dan Leclerc masing-masing mempunyai tak hingga bidak. Bidak milik Vettel semuanya identik, begitu juga dengan Leclerc. Namun, bidak milik Vettel berbeda dengan bidak milik Leclerc. Mereka berdua hendak menata beberapa bidak mereka pada sebuah papan catur berukuran 2019×2019 dimana setiap kotak kecil pada papan catur tersebut harus memuat tepat satu bidak. Dalam hal penataan, mereka akan menggunakan ketentuan sebagai berikut.

   - Untuk setiap bidak milik Vettel yang tidak berada di pinggir papan catur (titik sudut maupun sisi), terdapat empat bidak milik Vettel dan empat bidak milik Leclerc yang bertetangga dengan bidak tersebut.
   - Untuk setiap bidak milik Leclerc yang tidak berada di pinggir papan catur (titik sudut maupun sisi), terdapat lima bidak milik Vettel dan tiga bidak milik Leclerc yang bertetangga dengan bidak tersebut.

   Misalkan x dan y berturut-turut adalah banyaknya bidak milik Vettel dan bidak milik Leclerc pada papan catur tersebut. Tentukan, dengan bukti, semua pasangan (x, y) yang mungkin.

3. Notasikan F_n sebagai bilangan fibbonaci ke - n dimana $F_0 = 0$, $F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ apabila $n \geq 2$. Buktikanlah bahwa apabila F_n prima yang bukan sama dengan 3, maka n juga prima.

4. Diberikan bilangan real positif a, b, c yang memenuhi

   $$a + b + c \leq \sqrt{1 + 2(ab + bc + ca)} + 1$$

   Buktikan bahwa
   $$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \geq \frac{3}{2}$$
   dan tentukan kapan kesamaan terjadi.

5. Titik O adalah pusat lingkaran luar segitiga lancip ABC dengan jari-jari R. Lingkaran-lingkaran ω_A, ω_B dan ω_C berturut-turut berpusat di A, B dan C berjari-jari R saling berpotongan di O, D, E, dan F. Notasi γ_{AB} menyatakan luas daerah irisan dari lingkaran ω_A dan ω_B, notasi γ_{BC} dan γ_{AC} didefinisikan dengan cara yang sama. Jika Γ menyatakan luas daerah lingkaran luar DEF dan Δ menyatakan luas segitiga ABC, buktikan bahwa

   $$\Gamma - 2\Delta = \gamma_{AB} + \gamma_{BC} + \gamma_{CA}.$$