## SOLUSI BAGIAN PERTAMA

1. 13.
2. 931
3. $\frac{4}{9}$
4. $\frac{63}{2}$
5. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$
6. 3996
7. $\frac{1}{203}$
8. $3 + \sqrt{229}$
9. 3
10. $-4$
11. 6
12. 9
13. 231
14. $\frac{383}{8}$
15. 1764
16. 52
17. $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}$
18. 51
19. 8
20. 360

# SOLUSI BAGIAN PERTAMA

**Soal 1.** Misalkan $a$ dan $b$ bilangan real positif berbeda sehingga $a+\sqrt{ab}$ dan $b+\sqrt{ab}$ merupakan bilangan rasional. Buktikan bahwa $a$ dan $b$ merupakan bilangan rasional.

**Jawaban:**

Karena $a+\sqrt{ab}, b+\sqrt{ab}$ rasional positif, maka

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

juga merupakan bilangan rasional positif $q$. Dengan demikian, $a = q^2 b$. Substitusikan ke persamaan awal, maka $a + qb$ dan $b + qb$ bilangan rasional positif. Namun, $b + qb = (q+1)b$ bilangan rasional positif berakibat $b$ bilangan rasional positif. Ini berarti $qb$ juga bilangan rasional positif. Akibatnya $a = (a+qb) - (qb)$ juga merupaka bilangan rasional positif. Terbukti.

**Soal 2.** Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan asli $(a, b, c, d)$ yang memenuhi

$$ab + bc + cd + da = 2016.$$

Catatan: Jawaban dalam bentuk paling sederhana.
**Jawaban:**

Perhatikan bahwa persamaan ekivalen dengan $(a + c)(b + d) = 2016$. Dengan demikian, $a + c \geq 2$ dan $b + d \geq 2$ habis membagi 2016. Dengan demikian, haruslah $a, b, c, d$ memenuhi

$$\begin{aligned} a + c &= k \\ b + d &= \frac{2016}{k} \end{aligned}$$

dengan $k$ bilangan asli yang membagi 2016 dan memenuhi $1 < k < 2016$.
Banyaknya pasangan bilangan asli $a$ dan $c$ yang memenuhi persamaan pertama adalah $k - 1$. Sementara itu, banyaknya pasangan bilangan asli $b$ dan $d$ yang memenuhi persamaan kedua adalah $\frac{2016}{k} - 1$.
Misalkan $S$ adalah himpunan semua pembagi positif dari 2016 yang lebih dari 1 dan kurang dari 2016. Berarti, banyaknya pasangan bilangan asli $(a, b, c, d)$ yang memenuhi sistem persamaan tersebut adalah

$$\begin{aligned} \sum_{k \in S} (k - 1)\left(\frac{2016}{k} - 1\right) &= \sum_{k \in S} 2016 - k - \frac{2016}{k} + 1 \\ &= \sum_{k \in S} 2017 - 2k \end{aligned}$$

di mana persamaan terakhir adalah karena

$$\sum_{k \in S} \frac{2016}{k} = \sum_{k \in S} k.$$

Karena $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$, maka banyaknya anggota $S$ adalah $(5 + 1)(2 + 1)(1 + 1) - 2 = 34$. Hasil jumlah semua anggota $S$ adalah $(2^5 + 2^4 + \cdots + 2 + 1)(3^2 + 3 + 1)(7^1 + 1) - 1 - 2016 = 4535$.
Jadi, banyaknya solusi bilangan asli $a, b, c, d$ yang memenuhi adalah

$$\begin{aligned} \sum_{k \in S} 2017 - 2k &= 2017 \cdot 34 - 2 \cdot 4535 \\ &= 59508. \end{aligned}$$

**Soal 3.** Untuk bilangan asli $k$, kita katakan persegi panjang berukuran $1 \times k$ atau $k \times 1$ sebagai pita. Suatu persegi panjang berukuran $2016 \times n$ dipotong menjadi pita-pita yang semua ukurannya berbeda. Tentukan bilangan asli $n \leq 2016$ terbesar sehingga kita bisa melakukan hal tersebut.
Catatan: Pita $1 \times k$ dan $k \times 1$ dianggap berukuran sama.
**Jawaban:**
Luas dari persegi panjang tersebut adalah $2016n$. Karena $n \leq 2016$, luas pita terbesar yang dapat digunakan adalah 2016. Karena beberapa pita dengan luas $1, 2, \ldots, 2016$ dengan ukuran berbeda-beda harus menutupi daerah seluas $2016n$, maka

$$1 + 2 + \cdots + 2016 \geq 2016n.$$

Ini berakibat $n \leq \frac{2017}{2}$ sehingga $n \leq 1008$.
Sekarang, kita buktikan bahwa persegi panjang berukuran $2016 \times n$ dapat ditutupi oleh pita-pita berukuran berbeda. Perhatikan bahwa ada 1008 kolom. Untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, 1007$, kolom ke-$i$ dapat ditutup oleh pita berukuran $i \times 1$ dan $(1008 - i) \times 1$. Kolom ke-1008 ditutup oleh sebuah pita berukuran $1008 \times 1$.

**Soal 4.** Misalkan $PA$ dan $PB$ adalah garis singgung lingkaran $\omega$ dari suatu titik $P$ di luar lingkaran. Misalkan $M$ adalah sebarang titik pada $AP$ dan $N$ adalah titik tengah $AB$. Perpanjangan $MN$ memotong $\omega$ di $C$ dengan $N$ di antara $M$ dan $C$. Misalkan $PC$ memotong $\omega$ di $D$ dan perpanjangan $ND$ memotong $PB$ di $Q$. Tunjukkan bahwa $MQ$ sejajar dengan $AB$.

**Jawaban:** Untuk membuktikan $MQ$ sejajar $AB$ kita cukup membuktikan bahwa $MNQ$ sama kaki dengan $MN = NQ$. Hal ini bisa dilakukan salah satunya dengan cara membuktikan bahwa $\angle ANM = \angle BNQ$ (sebab $AN = NB$).

Lemma. Kita punya $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$.
Bukti. Karena segitiga $ACP$ sebangun dengan $DAP$, serta segitiga $BCP$ sebangun dengan $DBP$ maka

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CP}{AP} = \frac{CP}{BP} = \frac{BC}{BD}$$

maka $AC \times BD = AD \times BC$ atau setara dengan yang perlu kita buktikan.
Berikutnya, perpanjang $AD$ sehingga $AA' = 2 \times AD$. Ini berakibat $ND \| BA'$ serta segitiga $AND$ sebangun dengan segitiga $ABA'$. Dari kedua segitiga tersebut serta lemma sebelumnya, bisa diperoleh bahwa

$$\frac{A'D}{BD} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

atau $\frac{A'D}{BD} = \frac{AC}{BC}$Di sisi lain kita punya $\angle ACB = \angle A'DB$ sebab $ACBD$ segiempat siklis. Akibatnya segitiga $ACB$ sebangun dengan $DBA'$.
Tinjau segitiga $AND$ dan segitiga $CBD$. Karena $\angle NAD = \angle BAD = \angle BCD$ serta

$$\angle ADN = \angle DA'B = \angle CAB = \angle CDB$$

maka segitiga $AND$ sebangun dengan segitiga $CBD$.
Dengan cara yang sama segitiga $ACN$ sebangun dengan segitiga $CBD$ (dengan meninjau perpanjangan $AC$ *instead of* $AD$).
Terakhir, dengan menggunakan informasi yang telah kita peroleh, bisa kita hitung bahwa

$$\angle ANM = \angle CNB = \angle CAN + \angle ACN = \angle CDB + \angle BCD = \angle ADN + \angle NAD = \angle BND = \angle BNQ$$

dan kita selesai.

**Soal 5.** Diberikan tripel bilangan asli berbeda $(x_0, y_0, z_0)$ yang memenuhi $x_0 + y_0 + z_0 = 2016$. Setiap jam ke-$i$, dengan $i \geq 1$, dibentuk tripel baru

$$(x_i, y_i, z_i) = (y_{i-1} + z_{i-1} - x_{i-1}, z_{i-1} + x_{i-1} - y_{i-1}, x_{i-1} + y_{i-1} - z_{i-1}).$$

Tentukan bilangan asli $n$ terkecil sehingga pada jam ke-$n$ pasti ditemukan minimal satu di antara $x_n, y_n$, atau $z_n$ merupakan bilangan negatif.

**Jawaban:**
Dari rumus tripel baru, perhatikan bahwa hasil jumlah $x_i + y_i + z_i$ akan selalu sama untuk setiap $i \geq 0$, yaitu selalu 2016.
Misalkan $(x, y, z)$ adalah tripel sehingga salah satu dari $-x + y + z, x - y + z, x + y - z$ negatif mensyaratkan bahwa $x + y + z < 2 \max\{x, y, z\}$. Berarti, kita ingin mencari $n$ terkecil sehingga $\max\{x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}\} \geq 1009$.
Perhatikan bahwa diperoleh juga sifat bahwa

$$\begin{aligned} x_i &= 2016 - 2x_{i-1} \\ y_i &= 2016 - 2y_{i-1} \\ z_i &= 2016 - 2z_{i-1}. \end{aligned}$$

Definisikan $a_i = \max\{x_i, y_i, z_i\}$ dan $b_i = \min\{x_i, y_i, z_i\}$, maka dari sifat terakhir, berlaku

$$\begin{aligned} a_i &= 2016 - 2b_{i-1} \\ b_i &= 2016 - 2a_{i-1}. \end{aligned}$$

Jadi, untuk $i \geq 2$, berlaku sifat

$$\begin{aligned} a_i &= 2016 - 2(2016 - 2a_{i-2}) \\ &= 4a_{i-2} - 2016. \end{aligned}$$

Misalkan $c_i = a_i - 672$, maka diperoleh $c_i = 4c_{i-2}$ untuk setiap $i \geq 2$. Jadi, berlaku $c_{2n} = 4^n c_0$ dan $c_{2n+1} = 4^n c_1$. Perhatikan bahwa

$$c_0 = a_0 - 672 = \max\{x_0, y_0, z_0\} - 672 \geq 673 - 672 = 1$$

dan

$$c_1 = a_1 - 672 = \max\{x_1, y_1, z_1\} - 672 = 1344 - 2\min\{x_0, y_0, z_0\} \geq 1344 - 2 \cdot 2.$$

Syarat pada soal ekivalen dengan mencari $n$ terkecil agar dijamin

$$c_{n-1} = a_{n-1} - 672 \geq 1009 - 672 = 337.$$

Akan ditunjukkan bahwa $n = 10$ cukup. Perhatikan bahwa untuk $n = 10$, berlaku

$$c_9 = 4^4 c_1 \geq 4^4 \cdot 2 \geq 512 > 337$$

dan juga

$$c_{10} = 4^5 \cdot c_0 \geq 4^5 \cdot 1 \geq 1024 > 337.$$

Sekarang, kita cukup berikan contoh tripel $(x_0, y_0, z_0)$ sehingga $x_i, y_i, z_i \geq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, 9$.

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 671 | 672 | 673 |
| 1 | 674 | 672 | 670 |
| 2 | 668 | 672 | 676 |
| 3 | 680 | 672 | 664 |
| 4 | 656 | 672 | 688 |
| 5 | 704 | 672 | 640 |
| 6 | 608 | 672 | 736 |
| 7 | 800 | 672 | 544 |
| 8 | 416 | 672 | 928 |
| 9 | 1184 | 672 | 160 |