

# Soal Pos 1

## Semifinal ITB Mathematics Olympiad 2022

Panitia ITBMO 2022

5 Maret 2022

### Bagian Isian

1. Selamat datang dalam permainan biner! Kalian akan bermain dengan aturan sebagai berikut (semua angka yang tertera dalam aturan ditulis dalam biner):
  - Terdapat 1 kartu berlabel angka nol dan 1 kartu berlabel angka satu dalam satu set.
  - Pada ronde ke- $n$ , anda harus memilih salah satu kartu pada tiap set. Banyak set kartu yang disediakan pada ronde ke- $n$  adalah  $n+10$  set. Anda memenangkan ronde tersebut apabila Anda mendapatkan kartu berlabel angka satu sebanyak minimal  $n$  kali. Jika tidak, Anda kalah permainan.
  - Pada ronde ke- $n$ , Anda harus memilih salah satu kartu pada tiap set. Banyak set kartu yang disediakan pada ronde ke- $n$  adalah  $n+10$  set.
  - Setelah Anda memenangkan suatu ronde, Anda lanjut ke ronde berikutnya, kecuali jika Anda telah memenangkan ronde ke-11, yang dalam kasus itu Anda memenangkan permainan tersebut.
2. Konstanta  $a$  dipilih secara acak dari interval tutup  $-40 \leq a \leq 40$  (dengan distribusi seragam). Tentukan peluang bahwa semua akar dari polinomial  $x^4 + (a + 5)x^3 + 3ax^2 + 10x^2 + 12x$  real. Tuliskan dalam pecahan biner!  
(contoh:  $\left(\frac{1}{3}\right)_2 = 0.0101010101 = 0.\overline{01}$ )
3. Diberikan bilangan bulat positif  $x$ . Misalkan  $y$  adalah bilangan bulat positif yang diperoleh dengan cara mengambil representasi biner dari  $x$  sebagai bilangan desimal (contohnya, jika  $x = 13$  dengan representasi biner 1101, maka representasi desimal dari  $y$  adalah 1101; dengan kata lain,  $y$  bernilai seribu seratus satu). Jika diketahui  $2y$  habis dibagi 2022, tentukan bilangan prima terkecil yang pasti membagi  $x$ . (Tuliskan dalam desimal/basis sepuluh, tidak perlu dalam biner)

4. Diberikan segitiga ITB dengan besar sudut IBT adalah  $110000_2$  derajat. Garis bagi TIB memotong sisi TB dan lingkaran luar ITB berturut-turut di titik M dan O. Jika  $\overline{IB} = \overline{IT} + \overline{MO}$ , maka sudut ITB adalah sebesar. . . (jawaban dalam bilangan biner)

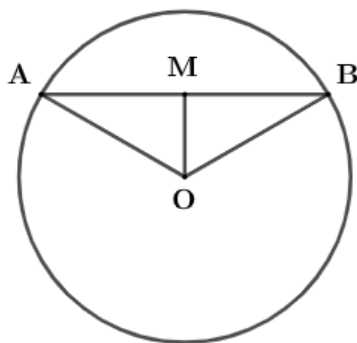
## Bagian Uraian

1. Misalkan  $m, c$ , dan  $f$  merupakan bilangan rasional dan memenuhi persamaan

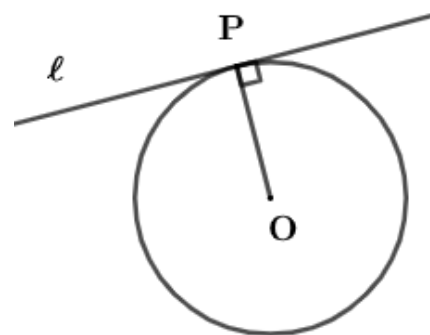
$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{f}$$

Diketahui hanya ada satu kemungkinan nilai  $m + c + f$ . Tentukan nilai tersebut!

2. Perhatikan gambar lingkaran dan unsur-unsurnya di bawah ini. Diketahui  $O$  adalah pusat lingkaran,  $OA$  dan  $OB$  jari-jari lingkaran, dan  $AB$  tali busur pada lingkaran tersebut.
- (a)  $M$  adalah titik yang berada pada tali busur  $AB$ . Buktikan bahwa  $OM$  tegak lurus terhadap  $AB$  jika dan hanya jika  $M$  merupakan titik tengah  $AB$ ! Catatan:  $OM$  disebut apotema dari lingkaran, yaitu garis dari pusat lingkaran yang tegak lurus dan membagi dua tali busur.
- (b) Garis singgung lingkaran adalah garis yang menyinggung lingkaran hanya di satu titik. Salah satu sifat yang umum dari garis singgung lingkaran adalah garis singgung tegak lurus dengan jari-jari. Sebagai ilustrasi, misalkan garis  $\ell$  menyinggung lingkaran berpusat  $O$  di titik  $P$ , maka garis  $\ell$  dan  $OP$  tegak lurus. Buktikan sifat tersebut! Petunjuk: tinjau bagian (a).



Gambar (a)



Gambar (b)