

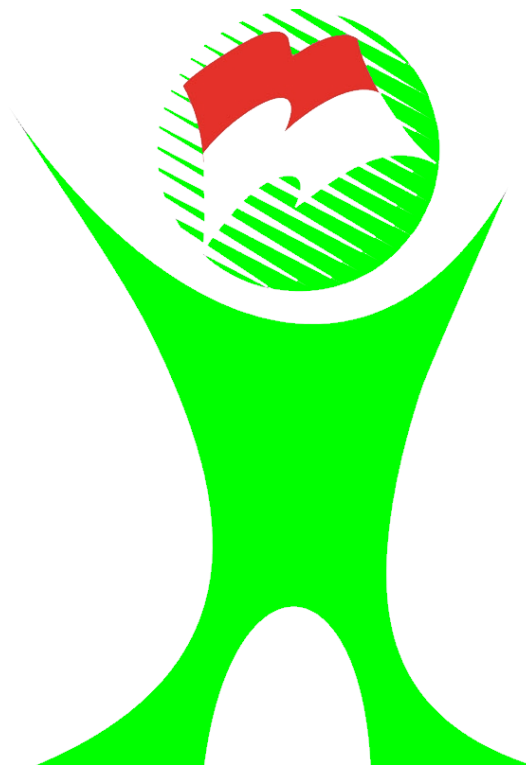


# SOLUSI OSN

**MATEMATIKA SMP - BAGIAN B : ISIAN SINGKAT**

**TINGKAT KABUPATEN/KOTA**

**Sabtu, 07 Maret 2015**



**KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN  
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR  
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH PERTAMA  
TAHUN 2015**

**BAGIAN B: ISIAN SINGKAT**

1. Misal  $x$  adalah suatu bilangan bulat dan  $x^2 + 5x + 6$  adalah suatu bilangan prima, maka nilai  $x$  adalah ...

**Jawab:**

Misal  $p$  adalah bilangan prima

$$x^2 + 5x + 6 = p$$

$$(x+3)(x+2) = p \quad \text{pemfaktoran}$$

Dari sini kita dapat melihat bahwa  $(x+3)$  dan  $(x+2)$  merupakan faktor dari  $p$  (bilangan prima)

Ingat bahwa bilangan prima adalah bilangan yang hanya mempunyai dua faktor yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

Untuk menemukan nilai  $x$ , kita cukup mengasumsikan salah satu faktorannya adalah 1

$$\text{Jika } x+3=1 \text{ maka } x=-2$$

Jelas untuk  $x=-2$  tidak memenuhi. (**mengapa?**)

$$\text{Jika } x+2=1 \text{ maka } x=-1$$

Jadi, nilai  $x$  yang memenuhi adalah  $-1$  dengan bilangan primanya yaitu 2.

Padahal  $x=-4$  juga memenuhi terhadap suatu bilangan prima tersebut (**mengapa?**)

2. Parabola  $y = ax^2 + bx + c$  melalui titik  $(-2, 6)$  dan mempunyai sumbu simetri  $x = -1$ . Jika  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  merupakan bilangan genap positif berurutan, maka nilai  $a+b+c$  adalah ...

**Jawab:**

Persamaan parabola  $y = ax^2 + bx + c$

$$x = 1 \rightarrow x_c = -1$$

$$x_c = -\frac{b}{2a} \rightarrow -1 = -\frac{b}{2a} \rightarrow 2a = b$$

Substitusikan  $b = 2a$  ke  $y = ax^2 + bx + c$

$$6 = a(-2)^2 + (2a)(-2) + c$$

$$6 = 4a - 4a + c$$

$$c = 6$$

Maka:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$6 = a(-2)^2 + b(-2) + 6$$

$$4a - 2b = 0$$

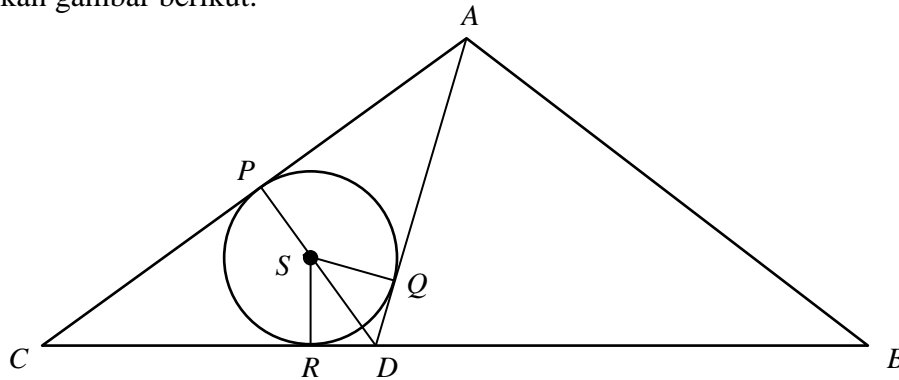
$$2(2a - b) = 0$$

$$2a - b = 0$$

Jika  $a < b < c$  maka ketiga bilangan genap positif berurutan yang mungkin adalah  $a = 2$ ,  $b = 4$ , dan  $c = 6$

Jadi,  $a + b + c = 2 + 4 + 6 = 12$

3. Perhatikan gambar berikut.



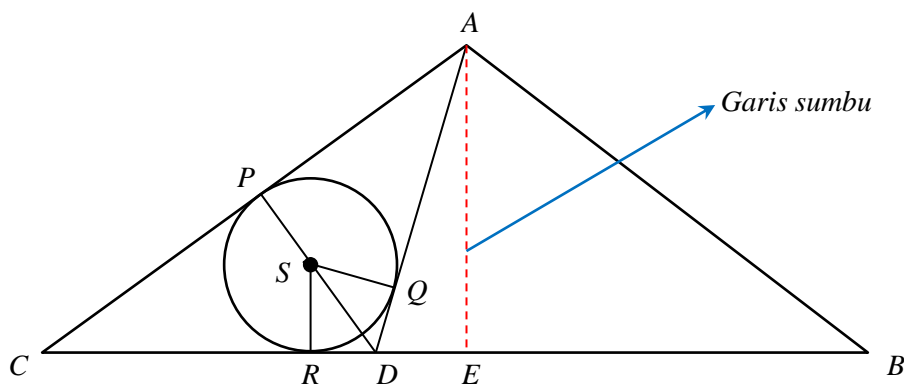
Titik  $P$ ,  $Q$ , dan  $R$  masing-masing adalah titik singgung lingkaran pada sisi-sisi  $\triangle ACD$ .

Diketahui  $\angle SDR = 60^\circ$ , panjang  $SR =$  panjang  $SQ = 1$  cm, dan panjang  $RD = \frac{\sqrt{3}}{3}$  cm.

Jika  $\triangle ABC$  samakaki, maka luas  $\triangle ABC$  adalah ...  $\text{cm}^2$

**Jawab:**

Buatlah garis sumbu  $AE$ . Apa itu garis sumbu?

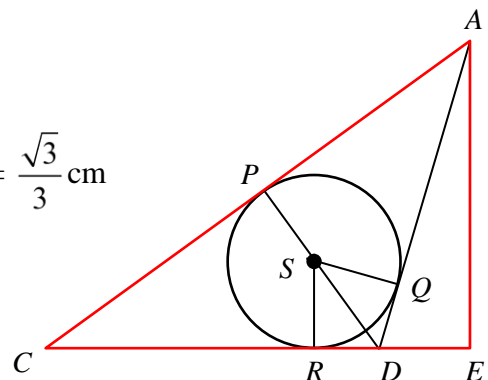


Diketahui:

$\angle SDR = 60^\circ$ , panjang  $SR = 1$  cm, dan panjang  $RD = \frac{\sqrt{3}}{3}$  cm

$\angle ADP = 60^\circ$  dan  $\angle PAD = 30^\circ$  (**mengapa?**)

$\angle ADE = 60^\circ$  dan  $\angle DAE = 30^\circ$  (**mengapa?**)



Sehingga  $\triangle DRS$ ,  $\triangle AEC$ , dan  $\triangle DPA$  merupakan segitiga siku-siku dan ketiganya saling sebangun (**mengapa?**)

Perhatikan bahwa segitiga  $SRD$  merupakan segitiga siku-siku (**mengapa?**). Dengan teorema pythagoras diperoleh:

$$SD = \sqrt{SR^2 + RD^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3+1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$PD = PS + SD = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

Dengan menggunakan perbandingan segitiga siku-siku khusus (istimewa), panjang  $AP$ :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}{AP}$$

$$AP = \frac{(3+2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$AP = \frac{3\sqrt{3} + 6}{3}$$

$$AP = 2 + \sqrt{3}$$

$$AC = 2AP = 2(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3} \text{ (mengapa?)}$$

$\triangle AEC$  segitiga siku-siku, dengan teorema pythagoras

$$CE = \sqrt{AC^2 - AE^2}$$

$$CE = \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})^2 - (2 + \sqrt{3})^2}$$

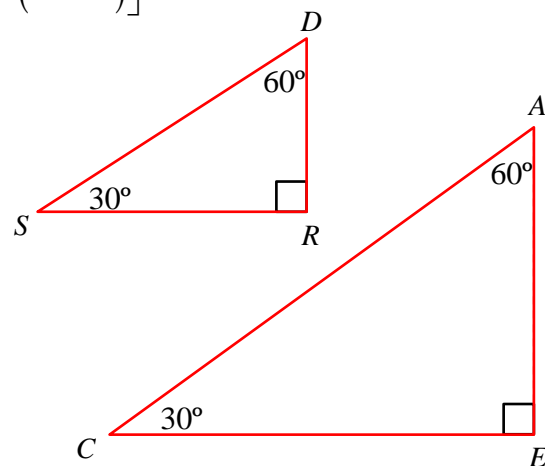
$$CE = \sqrt{[(4 + 2\sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})] \times [(4 + 2\sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})]}$$

$$CE = \sqrt{(6 + 3\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$$

$$CE = \sqrt{12 + 12\sqrt{3} + 9}$$

$$CE = \sqrt{21 + 12\sqrt{3}}$$

$$CE = 2\sqrt{3} + 3$$



Dengan menggunakan perbandingan

$$\frac{CE}{SR} = \frac{AE}{RD} \rightarrow CE = \frac{AE \times SR}{RD}$$

$$CE = \frac{(2 + \sqrt{3}) \times 1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$CE = (2 + \sqrt{3}) \times \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$CE = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$CE = \frac{6\sqrt{3} + 9}{3}$$

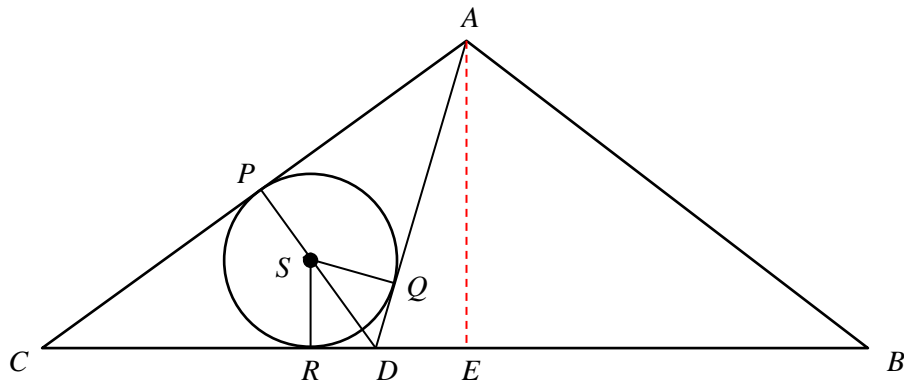
$$CE = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\frac{AE}{RD} = \frac{AC}{SD} \rightarrow AE = \frac{AC \times RD}{SD}$$

$$AE = \frac{(4 + 2\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$AE = \frac{(4 + 2\sqrt{3})\sqrt{3}}{\cancel{2\sqrt{3}}} \times \frac{\cancel{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$AE = \frac{(2 + \sqrt{3})2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \rightarrow AE = 2 + \sqrt{3}$$



$$\text{Luas } \triangle ABC = 2 \times \text{Luas } \triangle AEC$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = 2 \times \frac{CE \times AE}{2}$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = CE \times AE$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = (2\sqrt{3} + 3) \times (2 + \sqrt{3})$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = 6 + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 6$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = 12 + 7\sqrt{3}$$

Jadi,  $\text{Luas } \triangle ABC = (12 + 7\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

4. Dua botol yang berukuran sama berisi penuh dengan larutan gula. Rasio kandungan gula dan air pada botol pertama adalah 2 : 11 dan pada botol kedua adalah 3 : 5. Jika isi kedua botol tersebut dicampurkan, maka rasio kandungan gula dan air hasil campurannya adalah ...

**Jawab:**

$$x = \frac{2}{11} \text{ dan } y = \frac{3}{5}$$

$$x + y = \frac{2}{11} + \frac{3}{5}$$

$$x + y = \frac{10 + 33}{55}$$

$$x + y = \frac{43}{55}$$

Jadi, rasio kandungan gula dan air hasil campurannya adalah 43 : 55

5. Misalkan  $f(x) = 209 - x^2$ . Jika terdapat dua bilangan bulat positif  $a$  dan  $b$  dengan  $a < b$

sehingga  $f(ab) = f(a + 2b) - f(a - 2b)$ , maka  $\frac{b}{a} \dots$

**Jawab:**

$$f(ab) = 209 - (ab)^2$$

$$f(a+2b) = 209 - (a+2b)^2 \quad f(a+2b) = 209 - (a^2 + 4ab + b^2)$$

$$f(a-2b) = 209 - (a-2b)^2 \quad f(a-2b) = 209 - (a^2 - 4ab + b^2)$$

Sehingga:

$$f(ab) = f(a+2b) - f(a-2b)$$

$$209 - (ab)^2 = 209 - (a^2 + 4ab + b^2) - [209 - (a^2 - 4ab + b^2)]$$

$$209 - (ab)^2 = 209 - a^2 - 4ab - b^2 - 209 + a^2 - 4ab + b^2$$

$$209 - (ab)^2 = -8ab$$

$$209 = -8ab + (ab)^2$$

$$(ab)^2 - 8ab = 209$$

$$(ab-8)ab = 209$$

Dari sini kita dapat melihat bahwa  $(ab-8)$  dan  $ab$  merupakan faktoran dari 209 (faktor dari 209 adalah 11 dan 19).

$$(ab-8)ab = 209$$

$$(19-8) \cdot 19 = 209$$

$$(11) \cdot 19 = 209$$

Karena  $ab = 19$  dengan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat positif  $a < b$  maka  $a = 1$  dan  $b = 19$ ,

$$\text{sehingga } \frac{b}{a} = \frac{19}{1} = 19$$

$$\text{Jadi, } \frac{b}{a} = 19$$

6. Jika jumlah 4 suku pertama suatu barisan aritmatika adalah 70 dan jumlah 12 suku berikutnya adalah 690, maka suku ke- 2015 barisan tersebut adalah ...

**Jawab:**

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$S_4 = \frac{4}{2}(2a + (4-1)b)$$

$$70 = 2(2a + 3b)$$

$$2a + 3b = 35 \quad \dots \text{pers. (1)}$$

$$690 = S_{16} - S_4$$

$$690 = \left[ \frac{16}{2}(2a + (16-1)b) \right] - 70$$

$$8(2a + 15b) = 690 + 70$$

$$16a + 120b = 760 \text{ ... pers. (2)}$$

Eliminasi pers. (2) dan (1)

$$\begin{array}{rcl} 16a + 120b = 760 & \times 1 & 16a + 120b = 760 \\ 2a + 3b = 35 & \times 8 & 16a + 24b = 280 \\ \hline & & 96b = 480 \\ & & b = \frac{480}{96} \\ & & b = 5 \end{array}$$

Substitusikan  $b = 5$  ke  $2a + 3b = 35$

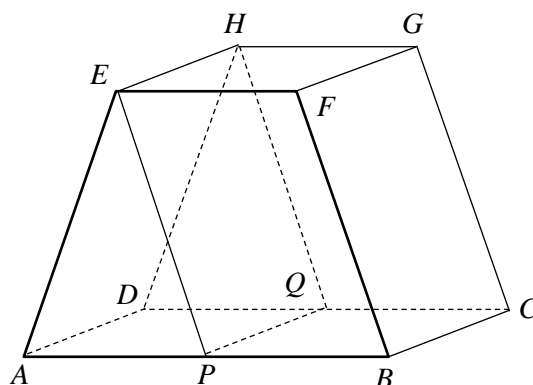
$$\begin{aligned} 2a + 3(5) &= 35 \\ 2a + 15 &= 35 \\ 2a &= 35 - 15 \\ a &= \frac{20}{2} = 10 \end{aligned}$$

Sehingga:

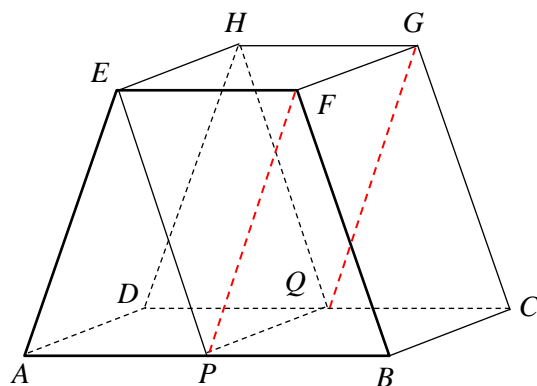
$$\begin{aligned} U_n &= a + (n-1)b \\ U_{2015} &= a + (2015-1)b \\ U_{2015} &= a + 2014b \\ U_{2015} &= 10 + 2014(5) \\ U_{2015} &= 10 + 10.070 \\ U_{2015} &= 10.080 \end{aligned}$$

Jadi, suku ke- 2015 barisan tersebut adalah 10.080

7. Diketahui sebuah prisma yang dibentuk oleh bidang-bidang sisi berupa dua trapesium yang kongruen  $ABFE$  dan  $DCGH$ . Jika  $AB$  sejajar  $EF$ , panjang  $AE =$  panjang  $BF$ , panjang  $AB = 2$  kali panjang  $EF$ , panjang  $AP =$  panjang  $PB =$  panjang  $DQ =$  panjang  $QC$ ,  $AD \perp AB$  dan  $EH \perp EF$ , maka perbandingan volume prisma  $APE.DQH$  dan prisma  $PBFE.QCGH$  adalah ...



**Jawab:**



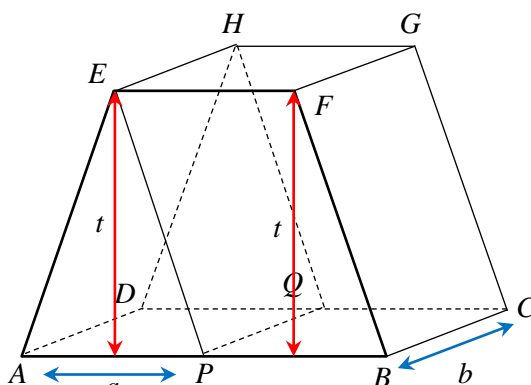
Berdasar gambar dapat dilihat bahwa:

Prisma  $APE.DQH = \text{Prisma } EFP.HGQ = \text{Prisma } PBF.QCG$  (**mengapa?**)

Diperoleh perbandingan volume prisma  $APE.DQH$  dan prisma  $PBFE.QCGH$  adalah 1 : 2

**Alternatif penyelesaian:**

Perhatikan bahwa prisma  $APE.DQH$  adalah prisma dengan alas berbentuk segitiga dan prisma  $PBFE.QCGH$  adalah prisma dengan alas berbentuk jajargenjang



Volume prisma  $APE.DQH = \text{Luas alas} \times \text{tinggi}$

$$\text{Volume prisma } APE.DQH = \frac{a \times t}{2} \cdot b = \frac{abt}{2}$$

Volume prisma  $PBFE.QCGH = \text{Luas alas} \times \text{tinggi}$

$$\text{Volume prisma } PBFE.QCGH = (a \times t) \cdot b = abt$$

$$\frac{\text{Volume prisma } APE.DQH}{\text{Volume prisma } PBFE.QCGH} = \frac{\frac{abt}{2}}{abt} = \frac{abt}{2} \times \frac{1}{abt} = \frac{1}{2}$$

Diperoleh perbandingan volume prisma  $APE.DQH$  dan prisma  $PBFE.QCGH$  adalah 1 : 2

Jadi, perbandingan volume prisma  $APE.DQH$  dan prisma  $PBFE.QCGH$  adalah 1 : 2

8. Mulai tahun ini materi OSN SMP bidang Fisika dan Biologi digabung menjadi satu, yaitu IPA, sehingga wakil dari setiap sekolah tahun ini maksimum 3 orang. Diketahui bahwa di Sekolah Teladan terdapat 6 calon siswa yang siap dikirim untuk mengikuti lomba OSN SMP dengan kemampuan sebagai berikut:

Siswa A: Siap mewakili bidang lomba Matematika, IPA, atau IPS

Siswa B dan C: Siap mewakili bidang lomba Matematika atau IPA



Siswa D: Siap mewakili bidang lomba Matematika atau IPS

Siswa E: Siap mewakili bidang lomba IPA atau IPS

Siswa F: Siap mewakili bidang lomba IPS

Siswa A dan B merupakan saudara kandung, sehingga sekolah mengambil kebijakan yakni tidak mengizinkan dua orang bersaudara untuk mewakili sekolah (artinya jika A terpilih maka B tidak terpilih, begitu pula sebaliknya). Jika Sekolah Teladan memutuskan untuk mengirimkan 3 siswa untuk mengikuti semua bidang lomba, maka cara yang mungkin untuk memilih wakil sekolah tersebut ke OSN SMP tahun ini ada sebanyak ...

**Jawab:**

Siswa yang siap pada bidang Matematika adalah *A, B, C, dan D*

Siswa yang siap pada bidang IPA adalah *A, B, C, dan E*

Siswa yang siap pada bidang IPS adalah *A, D, E, dan F*

Sehingga susunannya (cara memilih) adalah sebagai berikut:

Pasangan peserta siswa *A*, siswa *B*, dan siswa *C* adalah 3 cara pilihan

***ACD, CAD, DCA***

Pasangan peserta siswa *A*, siswa *C*, dan siswa *E* adalah 3 cara pilihan

***ACE, CEA, CAE***

Pasangan peserta siswa *A*, siswa *C*, dan siswa *F* adalah 2 cara pilihan

***ACF, CAF***

Pasangan peserta siswa *A*, siswa *D*, dan siswa *E* adalah 3 cara pilihan

***AED, DEA, DAE***

Pasangan peserta siswa *A*, siswa *E*, dan siswa *F* adalah 1 cara pilihan

***AEF***

Pasangan peserta siswa *B*, siswa *C*, dan siswa *D* adalah 2 cara pilihan

***BCD, CBD***

Pasangan peserta siswa *B*, siswa *C*, dan siswa *E* adalah 2 cara pilihan

***BCE, CBE***

Pasangan peserta siswa *B*, siswa *C*, dan siswa *F* adalah 2 cara pilihan

***BCF, CBF***

Pasangan peserta siswa *B*, siswa *D*, dan siswa *E* adalah 2 cara pilihan

***BED, DBE***

Pasangan peserta siswa *B*, siswa *E*, dan siswa *F* adalah 1 cara pilihan

***BEF***

Pasangan peserta siswa *C*, siswa *D*, dan siswa *E* adalah 2 cara pilihan

***CED, DCE***

Pasangan peserta siswa *C*, siswa *E*, dan siswa *F* adalah 1 cara pilihan

***CEF***

Pasangan peserta siswa *A*, siswa *D*, dan siswa *F* adalah 1 cara pilihan

***DAF***

Pasangan peserta siswa *C*, siswa *D*, dan siswa *F* adalah 1 cara pilihan

***DCF***

Pasangan peserta siswa *D*, siswa *E*, dan siswa *F* adalah 1 cara pilihan

***DEF***

Didapat total cara memilih:

$$3+3+2+3+1+2+2+2+2+1+2+1+1+1+1=27$$

Jadi, cara yang mungkin untuk memilih wakil sekolah tersebut ke OSN SMP tahun ini ada sebanyak 27 cara

9. Sebuah  $\triangle ABC$  dicerminkan terhadap sumbu  $Y$ , kemudian dicerminkan lagi terhadap garis  $y = 3$  sehingga hasil pencerminannya adalah  $\triangle A'B'C'$ . Jika koordinat titik-titik  $A'(8,0)$ ,  $B'(8,-4)$ ,  $C'(4,0)$ , maka koordinat titik-titik  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  berturut-turut adalah ...

**Jawab:**

Misal koordinat titik-titik  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$

$$A(x_1, y_1) \xrightarrow{\text{sumbu}-y} A'(x'_1, y'_1) \xrightarrow{y=3} A''(x''_1, y''_1)$$

$$A'(x'_1, y'_1) \xrightarrow{y=3} A''(8, 0)$$

$$x''_1 = x'_1 = 8$$

$$y''_1 = 2 \cdot 3 - y'_1$$

$$0 = 6 - y'_1$$

$$y'_1 = 6$$

Ditemukan koordinat titik  $A'(8, 6)$

$$A(x_1, y_1) \xrightarrow{\text{sumbu}-y} A'(8, 6)$$

$$x'_1 = -x_1 \rightarrow 8 = -x_1 \rightarrow x_1 = -8$$

$$y'_1 = y_1 \rightarrow y_1 = 6$$

**Ditemukan koordinat titik  $A(-8, 6)$**

$$B(x_2, y_2) \xrightarrow{\text{sumbu}-y} B'(x'_2, y'_2) \xrightarrow{y=3} B''(x''_2, y''_2)$$

$$B'(x'_2, y'_2) \xrightarrow{y=3} B''(8, -4)$$

$$x''_2 = x'_2 = 8$$

$$y''_2 = 2 \cdot 3 - y'_2$$

$$-4 = 6 - y'_2$$

$$y'_2 = 6 + 4$$

$$y'_2 = 10$$

Ditemukan koordinat titik  $B'(8, 10)$

$$B(x_2, y_2) \xrightarrow{\text{sumbu-y}} B'(8, 10)$$

$$x_2' = -x_2 \rightarrow 8 = -x_2 \rightarrow x_2 = -8$$

$$y_2' = y_2 \rightarrow y_2 = 10$$

Ditemukan koordinat titik  $B(-8, 10)$

$$C(x_3, y_3) \xrightarrow{\text{sumbu-y}} C'(x_3', y_3') \xrightarrow{y=3} C''(x_3'', y_3'')$$

$$C'(x_3', y_3') \xrightarrow{y=3} C''(4, 0)$$

$$x_3'' = x_3' = 4$$

$$y_3'' = 2 \cdot 3 - y_3'$$

$$0 = 6 - y_3'$$

$$y_3' = 6$$

Ditemukan koordinat titik  $C'(4, 6)$

$$C(x_3, y_3) \xrightarrow{\text{sumbu-y}} C'(4, 6)$$

$$x_3' = -x_3 \rightarrow 4 = -x_3 \rightarrow x_3 = -4$$

$$y_3' = y_3 \rightarrow y_3 = 6$$

Ditemukan koordinat titik  $C(-4, 6)$

Jadi, koordinat titik-titik  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  berturut-turut adalah  $A(-8, 6)$ ,  $B(-8, 10)$ ,  $C(-4, 6)$

10. Tini ingin membuat gelang dari bahan manik-manik berwarna-warni yang terdiri dari masing-masing 3 butir manik-manik berwarna merah, kuning, hijau, biru, dan putih. Ia ingin menyusun manik-manik tersebut sedemikian rupa sehingga di antara 2 manik-manik berwarna putih selalu terdapat 4 manik-manik berwarna selain putih. Banyak susunan gelang yang mungkin untuk dibuat adalah ...

**Jawab:**

Di antara 2 manik-manik berwarna putih selalu terdapat 4 manik-manik berwarna. Rangkaiannya dapat seperti pada gambar di bawah.

