Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan Juni 2018

22–25 Juni 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Suatu fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi $f(2017x + 2018) = x^2 + 2x + 4$. Tentukan nilai dari $f(2018)$.

2. Sebuah bilangan tiga digit mempunyai digit ratusan lebih besar dari digit puluhan dan digit ratusan sama dengan digit satuan. Diketahui bahwa selisih bilangan tersebut dengan bilangan yang diperoleh dengan menukar digit satuan dan puluhan bilangan tersebut adalah 72. Jika jumlah digit-digit bilangan tersebut adalah 19, tentukan bilangan tersebut.

3. Pada masa lebaran, Ani membantu ibunya membuat kue kering. Kue-kue tersebut akan diletakkan pada sejumlah toples. Ani menyadari bahwa jika kue tersebut diletakkan ke toples sehingga tiap toples berisi 13 kue, maka terdapat 1 toples kosong yang tersisa. Ani juga menyadari bahwa jika kue tersebut diletakkan ke toples sehingga tiap toples berisi 10 kue, maka terdapat 8 kue tersisa. Tentukan banyak kue yang dibuat oleh Ani.

4. Segitiga ABC adalah segitiga yang siku-siku di C dengan panjang $CA = 15, CB = 36$. Diketahui titik O terletak di antara C dan B, serta jarak titik O ke grais AB sama dengan jarak titik O ke titik C. Tentukan panjang BO.

5. Diberikan bilangan real a, b, c, dan d yang memenuhi $20a^2 + b^2 + c^2 + 18d^2 = 10$. Tentukan nilai maksimum dari $20a + b + c + 18d$.

6. Tentukan banyaknya bilangan asli n yang kurang dari 2018 sehingga
$$-1 + \frac{n^2}{2!} - \frac{n^4}{4!} + \frac{n^6}{6!}$$
merupakan bilangan bulat.

7. Diketahui lingkaran C_1 dan C_2 berpotongan di A dan B. Misalkan garis l adalah salah satu garis singgung persekutuan luar lingkaran C_1 dan C_2, sehingga A lebih dekat ke l dibanding B. Misalkan juga l menyinggung C_1 dan C_2 berturut-turut di P dan Q dengan $PQ = 60$ dan N pada C_1 sehingga $PN = 90$. Jika AB sejajar PN, dan N, B, Q segaris, tentukan panjang AB.

8. Diketahui
$$S = \sum_{k=1}^{1009} \sum_{r=0}^{k} \binom{1010}{r} \binom{1009}{1009 + r - k}.$$
Tentukan sisa pembagian S oleh 1009.

9. Terdapat 4 rasa eskrim yaitu Vanilla, Stroberi, Mocca, dan Coklat. Anda memberikan 6 orang anak masing-masing 1 eskrim. Jika ternyata terdapat 4 orang anak diantaranya mendapatkan rasa eskrim yang berbeda-beda, tentukan banyaknya kemungkinan Anda membagikan eskrim tersebut kepada anak-anak.

10. Diberikan
$$S = \sum_{i=1}^{179} \sin i^\circ \text{ dan } P = \prod_{j=1}^{179} \sin j^\circ.$$
Jika $S = \tan a^\circ$, di mana a adalah bilangan real positif terkecil yang memenuhi persamaan di atas, dan $P = \frac{b}{2^c}$, di mana b dan c adalah bilangan asli dengan b ganjil, tentukan nilai dari $2a + b + c$.

11. Diberikan sebuah fungsi f yang memetakan himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan bulat, sehingga f memenuhi
$$f(n) = \left\lfloor \frac{2^{1009} + 2^{n+1}}{2^{n+2}} \right\rfloor.$$
Tentukan bilangan bulat m terbesar sehingga 2^m membagi $f(1)+f(2)+\ldots+f(2018)$.

12. Diberikan segitiga ABC dengan $BC = 20\sqrt{3}$ dan $\angle BAC = 60^\circ$. Titik D terletak pada BC sehingga AD tegak lurus BC dan $\angle BAD = 45^\circ$. Jika H adalah titik tinggi segitiga ABC dan luas segitiga BHC dapat dinyatakan dalam $a - b\sqrt{c}$ di mana a, b, c bilangan asli dengan c tidak habis dibagi bilangan kuadrat selain 1. Tentukan $a + b - c$.

13. Tentukan jumlah semua nilai $x \in \mathbb{N}$ yang memenuhi persamaan
$$\left\lfloor \frac{x}{1!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3!} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{20!} \right\rfloor = 1009.$$

14. Diberikan sebuah barisan $\{a_i\}$ dengan $a_1 = 2$ dan $a_{n+1} = a_n + \lfloor \log_2 a_n \rfloor$. Tentukan N terbesar yang memenuhi $a_N \leq 999$.

15. Diberikan segitiga lancip tak sama kaki ABC, di mana H, G, O masing-masing merupakan titik tinggi, berat dan pusat lingkaran luar ABC. Misalkan X, Y, Z masing-masing merupakan titik tengah AB, BC, CA, N ialah titik pusat lingkaran luar XYZ, dan G' ialah refleksi dari G terhadap garis BC. Jika $AN \parallel HG'$, hitunglah $\frac{\tan B + \tan C}{\tan A}$.

16. Di Desa Konoha, terdapat 20 tim Genin yang mengikuti ujian Chunin tahap pertama yang merupakan ujian tertulis. Masing-masing tim terdiri dari 3 orang. Jika setiap 2 orang dalam 1 tim menjawab paling banyak 3 soal yang sama di mana keduanya benar atau keduanya salah dan setiap 2 orang dari tim yang berbeda menjawab paling banyak 1 soal yang sama di mana keduanya benar atau keduanya salah, tentukan banyaknya soal maksimal dalam ujian Chunin tahap pertama.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Pada sebuah kompetisi yang berlangsung selama k hari, terdapat sebanyak n peserta dimana $n \geq 2$. Diketahui bahwa setiap harinya, poin yang diperoleh para peserta tersebut merupakan permutasi dari $1, 2, \ldots, n$. Jika setelah k hari, total poin dari masing-masing peserta adalah 10.

   (a) Misalkan jumlah dari total poin semua peserta adalah S. Buktikan bahwa $S = k \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. Di sisi lain, buktikan pula $S = 10n$.

   (b) Dengan menggunakan nilai dari S pada bagian (a), tentukan semua pasangan (n, k) yang mungkin.

   (c) Buktikan bahwa $k \neq 1$.

   (d) Tunjukan sebuah konfigurasi poin yang diperoleh para peserta tersebut selama k hari kompetisi dari semua pasangan (n, k) yang mungkin. Lalu, simpulkan semua pasangan (n, k) yang mungkin.

2. Di papan tulis terdapat polinom $Ax^2 + Bx + C$. Otto dan Gian bermain menggunakan papan tulis tersebut. Pertama, Otto menuliskan satu buah bilangan real positif di papan. Lalu, Gian melakukan hal yang sama. Kemudian, Otto menuliskan bilangan real positif ketiga. Sekarang, Gian menang jika Gian dapat mengubah A, B, C menjadi ketiga bilangan yang baru saja ditulis sehingga polinom ini punya akar real. Apakah Gian bisa memastikan kemenangannya? Contohnya, jika Otto menulis 2, Gian menulis 3, lalu Otto menulis 6, Gian menang karena $3x^2 + 6x + 2$ punya akar real.

3. Pada segitiga ABC, titik D dan E terletak berturut-turut pada sinar CB dan CA sehingga $CD = CE = \dfrac{AC + BC}{2}$. Misalkan P merupakan titik tengah busur AB dari lingkaran luar $\triangle ABC$ yang tidak mengandung titik C. Buktikan bahwa $CDPE$ siklis dengan PC sebagai diameter.

4. Diketahui barisan bilangan asli $a_1 > a_2 > \ldots > a_u$ dengan $a_1 \equiv 5 \pmod 8$. Buktikan bahwa jika $2^{u-4} \geq \sum_{i=1}^{u} a_i$, maka

$$a_2! a_3! \cdots a_u! + 1 \neq a_1^m$$

   untuk semua $m \in \mathbb{N}$.