

Soal Pos 2

Semifinal ITB Mathematics Olympiad 2022

Panitia ITBMO 2022

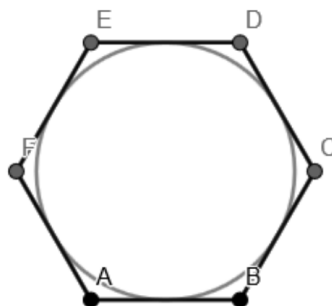
5 Maret 2022

1. Terdapat suatu barisan bilangan real yang memenuhi $a_{n+2} - a_n = 0$, $\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_n a_{n+1}} = k$, dan $a_n \neq 0$ untuk setiap bilangan asli n , dengan k adalah sebuah konstanta real. Carilah semua nilai yang mungkin dari k .
2. Persamaan Diophantine adalah persamaan polinomial yang solusinya dibatasi pada bilangan bulat saja. Persamaan Diophantine yang paling sederhana adalah persamaan Diophantine linear, yang contohnya sebagai berikut.

Misalkan ada 3 bilangan yang berbeda yakni M, C, F yang memenuhi $M + C + F = 32$, dengan syarat bahwa $0 \leq M \leq C \leq F$ dan M, C, F adalah bilangan bulat. Maka banyaknya pasangan M, C, F yang memenuhi adalah

3. Heksagon adalah salah satu bentuk yang paling mendasar di alam, sebagai contoh lihat saja sarang lebah dan salju. Hal ini dikarenakan sifat dari heksagon yang mengisi area dengan efektif dan kekuatan strukturalnya.

Misalkan terdapat heksagon beraturan yang di dalamnya terdapat lingkaran yang menyinggung heksagon tersebut. Diambil titik sebarang pada lingkaran tersebut, terkecuali titik-titik yang menyinggung heksagon tersebut. Kemudian titik sebarang yang diambil tersebut dihubungkan ke titik A, B, C, D, E , dan F . Misalkan titik X adalah titik yang didapatkan. Carilah jumlah area dari segitiga XAB, XDC , dan XEF , bila panjang AB adalah 6 cm.



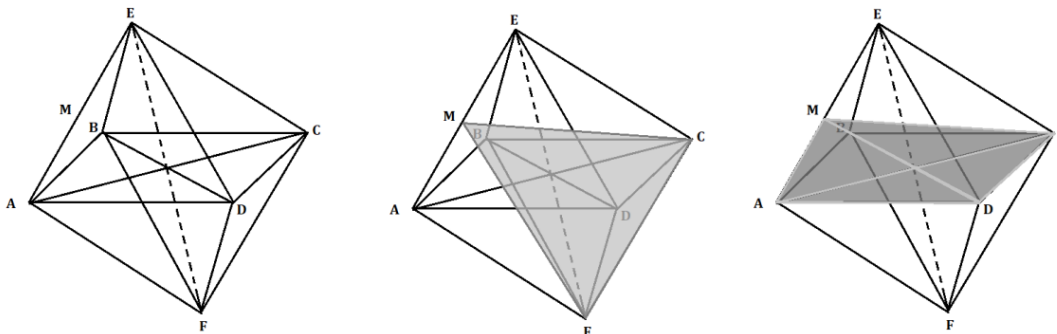
4. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan b bilangan bulat tak nol dan a bilangan bulat yang relatif prima dengan b . Tahukah kamu, bahwa kuadrat dari bilangan rasional tak bulat adalah bilangan rasional tak bulat juga. Akibatnya jika n^2 merupakan bilangan bulat, maka n merupakan bilangan bulat juga atau irasional.

Diberikan bilangan bulat k sehingga $3(k-2)/(3k+16)$ merupakan kuadrat dari bilangan rasional. Tentukan jumlah dari nilai-nilai k berbeda yang memenuhi!

5. Suatu turnamen matematika diikuti oleh 2022 peserta. Setiap pertandingan mempertemukan 2 orang dan hanya satu peserta dari setiap pertandingan yang menang dan lolos ke babak selanjutnya (peserta yang kalah dalam suatu pertandingan langsung tereliminasi dari turnamen). Turnamen dilakukan dari mulai babak penyisihan hingga babak final. Diasumsikan tidak ada pertandingan yang berakhir seri dan jika dalam satu babak banyak peserta ganjil, maka ada peserta yang tidak bertanding pada babak tersebut. Tentukan banyak minimum babak yang diperlukan untuk menentukan pemenang!

6. Oktahedron adalah bangun ruang yang memiliki 8 sisi, 12 rusuk, dan 6 titik sudut. Bentuk oktahedron banyak muncul di alam pada struktur kristal, misalnya berlian. Oktahedron beraturan berbentuk seperti dua limas segiempat yang alasnya direkatkan satu sama lain dan semua rusuknya sama panjang.

Misalkan terdapat suatu oktahedron beraturan E.ABCD.F dengan E.ABCD dan F.DCBA masing-masing merupakan limas segiempat. Panjang rusuk AB adalah 1 satuan. Misalkan M titik tengah rusuk EA. Luas bagian segitiga MCF yang tidak berada pada tetrahedron (limas segitiga) DMCA adalah ...



7. Leonardo da Pisa atau dikenal sebagai Fibonacci adalah matematikawan Italia yang mencetuskan barisan bilangan Fibonacci untuk memodelkan pertumbuhan kelinci. Barisan bilangan Fibonacci didefinisikan sebagai $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, dan $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ untuk $n > 2$ dengan x_n menyatakan suku ke- n dalam barisan Fibonacci. Enam suku pertama dari barisan ini adalah 1, 1, 2, 3, 5, dan 8.

Misalkan x_k menyatakan suku ke- k dalam barisan Fibonacci, carilah bilangan asli k terkecil sehingga x_k habis dibagi 2, 3, 5, dan 8.