



Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Juni 2020 : Simulasi KSN Matematika SMA/MA 2020

Hari Kedua : 21 Juni 2020

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi \mathbb{N} menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi \mathbb{Z} menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi \mathbb{Q} menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi \mathbb{R} menyatakan himpunan semua bilangan riil.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \dots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x . Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 0$.
11. Notasi $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terkecil dari kumpulan bilangan real a_1, a_2, \dots, a_k . Sebagai contoh, $\min\{4, 1.5, 5\} = 1.5$, $\min\{3.5, \pi, 3, 4\} = 3$, $\min\{-5, 3\} = -5$, dan $\min\{1\} = 1$.
12. Notasi $\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terbesar dari kumpulan bilangan real a_1, a_2, \dots, a_k . Sebagai contoh, $\max\{4, 1.5, 5\} = 5$, $\max\{3.5, \pi, 3, 4\} = 4$, $\max\{-5, 3\} = 3$, dan $\max\{1\} = 1$.
13. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b .
14. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
15. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
16. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n .
17. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
18. Pada $\triangle ABC$:

- (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
 - (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
 - (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC .
 - (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A , garis berat dari titik B , dan garis berat dari titik C .
 - (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A , garis tinggi dari titik B , dan garis tinggi dari titik C .
 - (f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A , B , dan C .
 - (g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC , CA , dan AB .
19. Luas dari sebuah segi- n dibungkus dengan kurung siku, yakni $[\quad]$. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.
20. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i+1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i . Contohnya, $3, 5, 7, 9, \dots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.
21. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan tak nol (bisa jadi 1) untuk setiap i . Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \dots$ merupakan barisan geometrik.
22. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{a+b}{2}$.
23. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah \sqrt{ab} .
24. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Hari Kedua

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Diberikan sebuah segitiga sembarang ABC dengan titik D , E , dan F adalah titik tengah sisi BC , CA , dan AB berturut-turut. Definisikan lingkaran inori- A sebagai lingkaran yang melewati titik D dan menyinggung CA di titik E . Selain itu, definisikan lingkaran inori- B dan inori- C dengan cara yang sama. Buktikan bahwa ketiga lingkaran inori- A , inori- B , dan inori- C konkuren di satu titik.
2. Diberikan barisan bilangan bulat nonnegatif $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1}a_n + 2 & \text{apabila } n \text{ genap} \\ a_{n+1}a_n - 1 & \text{apabila } n \text{ ganjil} \end{cases}.$$

Apakah ada bilangan bulat nonnegatif a_1 dan a_2 sehingga $a_{2020} + 42$ merupakan bilangan prima?

3. Diberikan bilangan riil positif x , y , dan z yang memenuhi

$$x^2 + y^3 + z^4 = x^4 + y^5 + z^6.$$

Buktikan bahwa

$$\frac{2x^2}{y^4 + 1} + \frac{2y^2}{z^4 + 1} + \frac{2z^2}{x^4 + 1} \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

Selain itu, tentukan semua bilangan riil positif (x, y, z) sehingga kesamaan berlaku.

4. Tomori mempunyai sebuah polinomial $ax^3 + bx^2 + cx + d$, dimana a , b , c , dan d adalah bilangan bulat. Tomori memberikan Hare kebebasan untuk menggunakan algoritma berikut.
 - Mengubah koefisien (a, b, c, d) menjadi $(a^2, -ac, bd, -d^2)$.
 - Mengubah polinomial $P(x)$ menjadi $P(x - 1)$.
 - Mengubah koefisien (a, b, c, d) menjadi (d, c, b, a) .

Apakah Hare dapat menciptakan polinomial $x^3 + x - 2$ suatu saat apabila Tomori memberikannya polinomial $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$?