OSP 2019

$2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12$

$6\ 14\ 28\ 36$

1. Tentukan peluang munculnya jumlah mata dadu ~~28~~ 14 dari pelemparan 6 dadu?

$$\boxed{\begin{gathered} x_1 + x_2 + \dots + x_n = r \\ x_1, x_2, \dots x_n \in \text{cacah} \end{gathered}} \Rightarrow \binom{r+(n-1)}{r} = \binom{r+(n-1)}{n-1}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 28 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{gathered} a + b + \dots + f = 22 \\ a, b, \dots, f \le 5 \end{gathered}}$$

$$1 \le x_1, x_2, \dots x_6 \le 6$$

5

PIE

$a = p + 6$

$a \ge 6$

$p \ge 0$

$p + b + c + d + e + f = 16$

$p, b, c, d, e, f \ge 0$

$x_1 = a + 1$

$x_2 = b + 1$

$\vdots$

$$\binom{6}{0}\binom{27}{5} - \binom{6}{1}\binom{21}{5} + \binom{6}{2}\binom{15}{5} - \binom{6}{3}\binom{9}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{13}{5} - \binom{6}{1}\binom{7}{5} = 1161$$

Jumlah mata dadu ~~40~~ dari 9 dadu. $\overbrace{9 \qquad\qquad 54}$

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i = 14 \quad \boxed{23}$$

$$\binom{9}{3}\binom{22}{8} - \binom{9}{1}\binom{16}{8} + \binom{9}{2}\binom{10}{8}$$

//

Soal 1.

Untuk sebarang bilangan real positif a, b, c dengan $a + b + c = 1$, tentukan nilai

$$ab\left(\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}\right) + bc\left(\frac{b^2+c^2}{b^3+c^3}\right) + ca\left(\frac{c^2+a^2}{c^3+a^3}\right) + \frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4+c^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4+a^4}{c^3+a^3}$$

$$\frac{a^4 + a^3b + ab^3 + b^4}{a^3+b^3} = \frac{a^3(a+b) + b^3(a+b)}{a^3+b^3} = \frac{\cancel{(a^3+b^3)}(a+b)}{\cancel{a^3+b^3}}$$

$$= (a+b) + (b+c) + (c+a)$$

$$= 2(a+b+c)$$

$$= 2$$

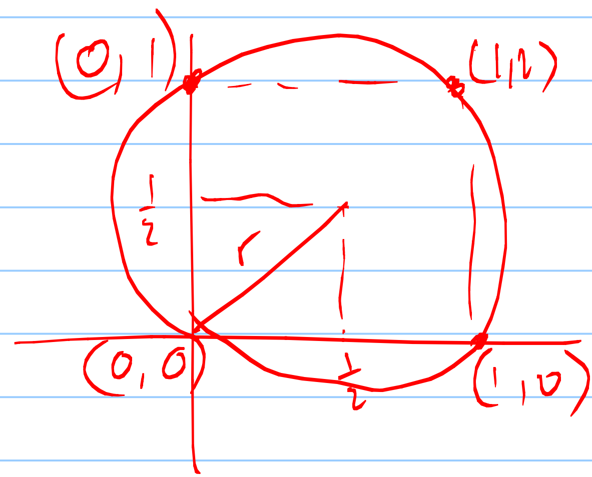
1. Dua bilangan real tidak nol a dan b memenuhi $ab = a - b$. Nilai $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ yang mungkin adalah ...

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} = \frac{\cancel{a^2} + \cancel{b^2} - (\cancel{a^2} - 2ab + \cancel{b^2})}{ab} = \frac{2\cancel{ab}}{\cancel{ab}} = 2$$

1. Banyaknya pasangan terurut bilangan bulat (a, b) sehingga $a^2 + b^2 = a + b$ adalah ....

$$a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{2}$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 \longrightarrow \text{lingkaran } P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$



4 //

2. Banyaknya bilangan bulat n, sehingga $n+1$ merupakan faktor dari n^2+1 adalah .....

$$\frac{n^2+1}{n+1} = \frac{(n^2-1)+2}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)+2}{n+1} = n-1 + \frac{2}{n+1} \rightarrow \pm 1 \quad \pm 2.$$

$n+1 = 1 \Rightarrow n = 0$

$n+1 = -1 \Rightarrow n = -2$

$n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$

$n+1 = -2 \Rightarrow n = -3$

$\Rightarrow 4$ //

Soal 2. Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi

$$ab + bc + cd + da = 2016.$$

Catatan: Jawaban dalam bentuk paling sederhana.

$(a+c)(b+d) = 2016$

2 1008

1+1 1+1007

2+1006

⋮

1007+1

1007

2 1008

3 672

⋮

1008 . 2

34

1 × 1007

2 × 671

$2016 = 2^5 . 3^2 . 7$

$a+c = 2^{x_1} 3^{y_1} 7^{z_1} = 2$

$b+d = 2^{x_2} 3^{y_2} 7^{z_2} = 2^4 3^2 7$

$(2^{x_1} 3^{y_1} 7^{z_1} - 1)(2^{x_2} 3^{y_2} 7^{z_2} - 1)$

$= 2017 - (2^{x_1} 3^{y_1} 7^{z_1} + 2^{x_2} 3^{y_2} 7^{z_2})$

$\text{total} = 2017 . 34 - 2 \sum 2^{x_1} 3^{y_1} 7^{z_1}$

$= 68578 - 9070$

$= 68578 - 9070 = 59508$

banyaknya faktor $\quad 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = \boxed{(5+1)(2+1)(1+1) = 36}$ $\quad S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

jumlah seluruh faktor $\quad 2^5\, 3^2\, 7$

$$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)(3^0+3^1+3^2)(7^0+7^1) = 2^0 3^0 7^0 + \dots + 2^2 3^1 7^1 + \dots + 2^5 3^2 7$$

$$\frac{2^6-1}{2-1} \cdot \frac{3^3-1}{3-1} \cdot \frac{7^2-1}{7-1} = 63 \cdot 13 \cdot 8 = 6552 - 1 - 2016$$

$$= 6552$$
$$\underline{2017} -$$
$$4535$$

17. Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilan bulat terbesar yang tidak lebih besar daripada x. Diketahui $\{a_i\}_{i\geq 1}$ barisan bilangan real dengan $a_1 = 20,17$. Jika

$$a_1, a_2, \ldots, a_{11}, \quad \text{dan} \quad \lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \ldots, \lfloor a_{10} \rfloor$$

masing-masing merupakan barisan aritmetika; sedangkan $\lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \ldots, \lfloor a_{11} \rfloor$ bukan barisan aritmetika, maka nilai minimum $a_2 - a_1 - \lfloor a_2 - a_1 \rfloor$ adalah ......

$0,083$

$x = \lfloor x \rfloor + \delta$

$0 \leq \delta < 1$

$b = a_2 - a_1 \quad \lfloor b \rfloor = \lfloor a_2 \rfloor - \lfloor a_1 \rfloor =$

18. Barisan $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ didefinisikan dengan $x_0 = 10, x_1 = 5$, dan

$$x_{k+1} = x_{k-1} - \frac{1}{x_k} \quad \times x_k$$

$x_{k+1} = a_n$

$x_k \neq 0$

untuk $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ dan diperoleh $x_n = 0$. Nilai n adalah ... .

$x_{k+1} \cdot x_k = x_k \cdot x_{k-1} - 1$

$a_n = x_n x_{n-1}$

$a_1 = x_1 x_0 = 50$

$a_2 = x_2 x_1 = 49$

$x_2 x_1 = x_1 x_0 - 1$

$\vdots$

$a_{51} = x_{51} x_{50} = 0 \rightarrow \boxed{x_{51} = 0} \vee x_{50} = 0$ (TM)

$n = 51$

13. Diberikan barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dengan $a_0 = 2$, $a_1 = \frac{8}{3}$ dan

$$a_m a_n = a_{m+n} - a_{m-n}$$

untuk setiap bilangan asli m, n dengan $m \geq n$. Banyaknya bilangan asli n yang memenuhi

$$a_n - 3^n > \frac{1}{2015}$$

adalah 3

$a_m a_n = a_{m+n} - a_{m-n}$

$n=1 \Rightarrow \frac{8}{3} a_m = a_{m+1} - a_{m-1} \quad \times 3$

$8a_m = 3a_{m+1} - 3a_{m-1}$

$0 = 3a_{m+1} - 8a_m - 3a_{m-1}$

$\boxed{0 = 3r^2 - 8r - 3}$

$0 = (3r+1)(r-3) \Rightarrow r_1 = -\frac{1}{3} \vee r_2 = 3$

Pers karakteristik

$\boxed{a_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n}$

$= A\left(-\frac{1}{3}\right)^n + B(3)^n$

$n=1 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{3}A + 3B = \frac{8}{3} \quad \times 3$

$n=0 \Rightarrow a_0 = A + B = 2$

$-A + 9B = 8$

$10B = 10$

$B = 1$

$A = 1$

$a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3^n$

$a_n - 3^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n > \frac{1}{2015}$

n genap

$\left(\frac{1}{3}\right)^n > \frac{1}{2015}$

$3^n < 2015$

$n = \{2, 4, 6\}$

1. Jumlah dari semua bilangan real x yang memenuhi

$$x^2 - 2x = 2 + x\sqrt{x^2 - 4x}$$

adalah .....

$$x^2 - 2x - 2 = x\sqrt{x^2 - 4x}$$

kuadrat

$$(x^2 - 2x - 2)^2 = \left(x\sqrt{x^2 - 4x}\right)^2$$

$$\cancel{x^4} + \cancel{4x^2} + 4 - \cancel{4x^3} - \cancel{4x^2} + 8x = \cancel{x^4} - \cancel{4x^3}$$

$$4 + 8x = 0$$

$$8x = -4$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

//

8. Banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi persamaan

$$x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$

$x - 2\sqrt{xy} + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy}$

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = (1 - \sqrt{x})(\sqrt{y} - 1) + 1 \geq 0$

$(1 - \sqrt{x})(\sqrt{y} - 1) \geq -1$

$(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{y} - 1) \leq 1$

$(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{y} - 1) = 0 \quad \vee \quad (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{y} - 1) = 1$

$x = 1$, $y = 4$ $\vee$ $y = 1$, $x = 4$

$\sqrt{x} - 1 = 1$

$x = 4 \Rightarrow y = 4$

$y = 4$, $x = 4$

$\sqrt{x} - 1 = -1$

$\sqrt{x} = 0$

$(1,4)\ (4,1)\ (4,4)$

3

1. Misalkan a, b, c tiga bilangan asli yang memenuhi $2^a + 2^b + 2^c = 100$. Nilai dari $a + b + c$ adalah ... .

$64 + 36$

$64 + 32 + 4$

$2^6 + 2^5 + 2^2$

$a + b + c = 13$

6. Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi

$$n^2 - 660$$

merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah... (4)

$n^2 - 660 = k^2$

$n^2 - k^2 = 660$

$(n+k)(n-k) = 660$

2 2

$n+k = 330$

$n-k = 2$

(4)

$660 = \cancel{2^2} \cdot \boxed{3 \cdot 5 \cdot 11}$

$3 \times 2 \times 2 \times 2$

660 = 2 · 330, 330 = 2 · 165, 165 = 3 · 55, 55 = 5 · 11

8

pasangan

k n k

18. Semua bilangan bulat n sehingga

$$\frac{9n+1}{n+3}$$

merupakan kuadrat suatu bilangan rasional adalah .... -11

$(3n + \frac{14}{3})^2$

$2 \mid 3n \quad 28 = 28n$

$n \neq -3$

$(9n+1)(n+3) = k^2$

$\boxed{} + \boxed{D} = k^2$

$\boxed{}^2 - k^2 = \boxed{}$

$(+)(-)$

bentuk sekawan

$9n^2 + 28n + 3 = k^2$

$81n^2 + 252n + 27 = k^2$

$(9n+14)^2 - 13^2 = k^2$

$(9n+14)^2 - k^2 = 13^2$

$(9n+14+k)(9n+14-k) = 169$

169	1
13	13
-1	-169
-13	-13

$9n+14+k = 169$

$9n+14-k = 1$

$18n + 28 = 170$ +

$\boxed{n = -11}$

16. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = \frac{3}{4}$$

adalah ......

10. Diberikan a dan b bilangan bulat positif dengan

$$\frac{53}{201} < \frac{a}{b} < \frac{4}{15}.$$

Nilai b terkecil yang mungkin adalah.......

$a = 9$

$b = 34$

$3 + \frac{3}{4} < \frac{b}{a} < 3 + \frac{42}{53}$

$\frac{b}{a} = 3 + \frac{c}{a}$

$\frac{3}{4} < \frac{c}{a} < \frac{42}{53}$

$1 + \frac{11}{42} < \frac{a}{c} < 1 + \frac{1}{3}$

$\frac{a}{c} = 1 + \frac{d}{c}$

$\frac{11}{42} < \frac{d}{c} < \frac{1}{3}$

$3 < \frac{c}{d} < 3 + \frac{9}{11}$

$\frac{c}{d} = 3 + \frac{e}{d}$

$0 < \frac{e}{d} < \frac{9}{11}$

$\frac{d}{e} > \frac{11}{9} = 2$

$\frac{e}{d} = \frac{1}{2}$

4. Pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi

$$\frac{xy^2}{x+y}$$

bilangan prima adalah...

Misal $p \in$ prima $\Rightarrow \dfrac{xy^2}{x+y} = p \Rightarrow xy^2 = p(x+y) \Rightarrow p \mid x$ dan $p \mid y$

untuk $p \mid y \Rightarrow$ misal $y = pb$, $b \in$ bulat, sehingga $xb^2p^2 = px + bp^2$

$xb^2 = \dfrac{x}{p} + b \Rightarrow p \mid x \Rightarrow$ misal $x = ap$, $a \in$ bulat, sehingga $apy^2 = ap^2 + py$

$ay^2 = ap + y$

$y^2 = p + \dfrac{y}{a} \Rightarrow a \mid y$

Perhatikan, $ay^2 = ap + y$

$ay^2 - y = ap$

$y(ay-1) = ap \Rightarrow (ay-1) \mid p$.

Karena $p \in$ prima $\Rightarrow 1 \mid p \vee p \mid p$, sehingga $ay - 1 = 1 \vee ay - 1 = p$

* $ay - 1 = 1$

  $ay = 2$

  $a \mid y \Rightarrow a = 1, \boxed{y=2} \Rightarrow p = 2 \Rightarrow \boxed{x=2}$

* $ay - 1 = p \Rightarrow yp = ap$

  $y = a \Rightarrow y^2 = p + 1$

  $p = (y+1)(y-1) \Rightarrow \boxed{y=2}, p = 3$

  $\Rightarrow \boxed{x=6}$

Jadi $(x,y) = \{(2,2),(6,2)\}$ //

9. Banyaknya tripel bilangan prima (p, q, r) yang memenuhi $15p + 7pq + qr = pqr$ adalah ... 3

$qr = pqr - 15p - 7pq$

$qr = p(qr - 15 - 7q)$

$p \mid qr \rightarrow p = q \Rightarrow \cancel{q}r = \cancel{p}(qr - 15 - 7q)$

$(q-1)(r-7) = 22$

$1 \mid 22$

$2 \mid 11$

$q - 1 = 1 \quad r - 7 = 22$

$q = 2 \quad r = 29$

$(p, q, r) = (2, 2, 29)$

$p = r \rightarrow q\cancel{p} = \cancel{p}(qr - 15 - 7q)$

$q = qr - 15 - 7q$

$15 = qr - 8q$

$15 = q(r-8)$

$3 \mid 5$

$q = 3 \quad r - 8 = 5$

$r = 13$

$(p, q, r) = (13, 3, 13)$

$q = 5 \quad r - 8 = 3$

$r = 11$

$(p, q, r) = (11, 5, 11)$

15. Banyaknya bilangan asli n sehingga

$$n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n + 10$$

merupakan bilangan prima adalah .... $\boxed{1}$

$(n^2 + an + \quad)(n^2 + bn + \quad)$

$(n^2 + n + 1)(n^2 - 6n + 10) = p$.

$n^2 + n + \cancel{1} = \cancel{1}$

$n = 0 \vee n = -1$

TM

$n^2 + n + 1 = -1$

$n^2 + n + 2 = 0$

TM

$n^2 - 6n + 10 = 1$

$n^2 - 6n + 9 = 0$

$(n-3)^2 = 0$

$\boxed{n = 3}$

$n^2 - 6n + 10 = -1$

$n^2 - 6n + 11 = 0$

TM

Soal 1. Misalkan a dan b bilangan real positif berbeda sehingga $a + \sqrt{ab}$ dan $b + \sqrt{ab}$ merupakan bilangan rasional. Buktikan bahwa a dan b merupakan bilangan rasional.

Soal 2. Untuk sebarang bilangan real x, didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Tentukan banyak bilangan asli $n \leq 1.000.000$ sehingga

$$\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor < \frac{1}{2013}.$$

$n = a^2 \Rightarrow \sqrt{n} = a, \ \lfloor \sqrt{n} \rfloor = a$

$n = (a+1)^2 \Rightarrow \sqrt{n} = a+1, \ \lfloor \sqrt{n} \rfloor = a+1$

$\lfloor \sqrt{n} \rfloor = a$ untuk $a^2 \leq n < (a+1)^2$

$a^2 \leq n < a^2 + 2a \cancel{+1}$

$a^2 \leq n \leq a^2 + 2a$

misal $n = a^2 + b$, b bulat: $0 \leq b \leq 2a$

$\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor < \frac{1}{2013}$

$\sqrt{a^2+b} - a < \frac{1}{2013}$

$n \leq 10^6$

$a \leq 10^3$

$\sqrt{a^2+b} < a + \frac{1}{2013}$

$\cancel{a^2} + b < \cancel{a^2} + \frac{2a}{2013} + \frac{1}{2013^2}$

$b < \frac{2a}{2013} + \frac{1}{2013^2}$

$b < \frac{2000}{2013} + \frac{1}{2013^2}$

$b < 1$

$b = 0$

semua n bil kuadrat memenuhi

$n \leq 1000000$

ada 1000 bil n

14. Untuk bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar dari x; sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil dari x. Bilangan real x yang memenuhi

$$\lfloor x \rfloor^2 - 3x + \lceil x \rceil = 0$$

adalah ......

$\sqrt{x^2} = |x|$

x bulat

$x^2 - 3x + x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0 \vee x = 2$

x tidak bulat: $x = \lfloor x \rfloor + \delta$, $0 < \delta < 1$

$0 < 3\delta < 3 < 2^2$

$\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$

$\lfloor x \rfloor^2 - 3x + \lceil x \rceil = 0$

$\lfloor x \rfloor^2 - 3(\lfloor x \rfloor + \delta) + \lfloor x \rfloor + 1 = 0$

$\lfloor x \rfloor^2 - 3\lfloor x \rfloor - 3\delta + \lfloor x \rfloor + 1 = 0$

$\lfloor x \rfloor^2 - 2\lfloor x \rfloor + 1 = 3\delta$

$0 < (\lfloor x \rfloor - 1)^2 = 3\delta < 2^2$ akar

$0 < |\lfloor x \rfloor - 1| < 2$

$0 < \lfloor x \rfloor - 1 < 2$

$1 < \lfloor x \rfloor < 3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2$

$-2 < \lfloor x \rfloor - 1 < 0$

$-1 < \lfloor x \rfloor < 1$

$\lfloor x \rfloor = 0$

* $\lfloor x \rfloor = 2$

$(2-1)^2 = 3\delta$

$\frac{1}{3} = \delta$

$x = 2\frac{1}{3}$

* $\lfloor x \rfloor = 0$

$(0-1)^2 = 3\delta$

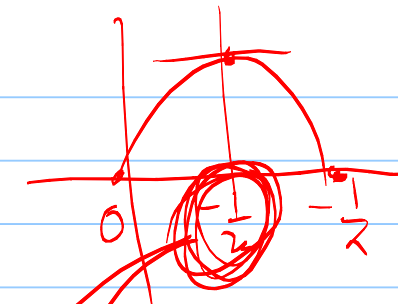
$\frac{1}{3} = \delta$

$x = \frac{1}{3}$

$x = \{0, 2, \frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}\}$

2. Jika n bilangan asli dan $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{n}$ merupakan bilangan bulat, maka pembagi positif dari n sebanyak ...

5. Diberikan fungsi f dengan $f(x) = \sqrt{ax^2 + x}$. Semua nilai a yang mungkin sehingga domain dan daerah hasil f sama adalah ...



$a = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D_f = \{x \mid x \geq 0\}$, $R_f = \{x \mid x \geq 0\}$ ✓

$a > 0 \Rightarrow D_f$: $ax^2 + x \geq 0$

$x(ax+1) \geq 0$

$x = 0 \lor x = -\frac{1}{a}$

$\boxed{x \leq -\frac{1}{a}} \lor x \geq 0$

$R_f \neq D_f$

$a < 0$ $\quad D_f$: $ax^2 + x \geq 0$

$x = 0 \lor x = -\frac{1}{a}$

$0 \leq x \leq -\frac{1}{a}$

R_f: $0 \leq x \leq \sqrt{d/(4a)}$ $\quad \frac{1}{4a^2}$ $\quad \frac{1}{2a}$

$0 \leq x \leq \sqrt{-\frac{1}{4a}}$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2\sqrt{-a}}$

$-\frac{1}{a} = \frac{1}{2\sqrt{-a}}$ (kuadrat)

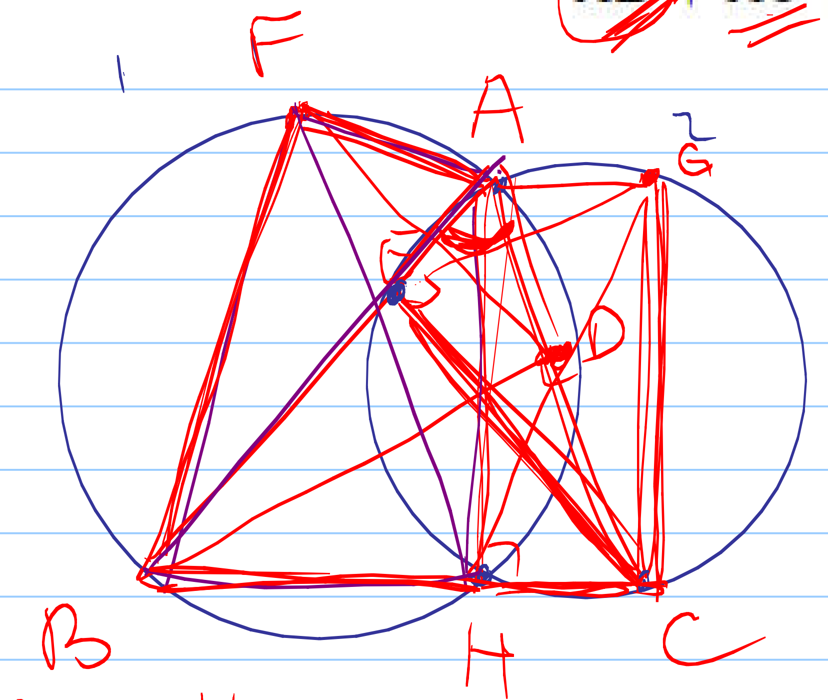
$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{-4a}$

$a = -4$ ✓

$a = \{0, -4\}$

Soal 4. Diberikan segitiga lancip ABC. Titik H menyatakan titik kaki dari garis tinggi yang ditarik dari A. Buktikan bahwa

$$AB + AC \geq BC \cos \angle BAC + 2AH \sin \angle BAC$$



$BH + HC = BC$

Segiempat talibusur.

AHBF: $AB \geq HF$

$AB^2 \geq AB\,HF$

AHCG: $AB^2 \geq BD\,AH + AD\,BH$ $\quad : AB$

$AB \geq \frac{BD}{AB} AH + \frac{AD}{AB} BH$

$AC \geq \frac{EC}{AC} AH + \frac{AE}{AC} HC$ $\quad +$

$\boxed{AB + AC \geq 2\,AH \sin\angle BAC + BC \cdot \cos\angle BAC}$

$AC \cdot GH = AH \cdot GC + HC \cdot AG$

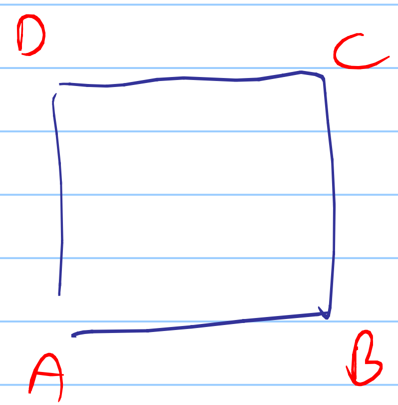
Dalil Ptolemy

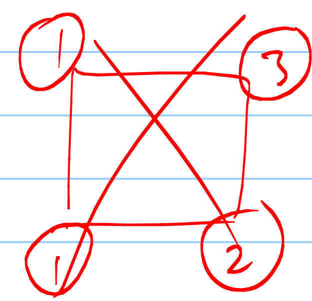
$\boxed{AB \cdot HF = FB \cdot AH + FA \cdot BH}$

$AB\,HF = BD\,AH + AD\,BH$.

4. Diketahui segi empat $ABCD$. Semua titik A, B, C dan D akan diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5 atau 6 sehingga setiap dua titik yang terletak dalam satu sisi empat nomornya berbeda. Banyaknya cara pemberian nomor dengan cara tersebut ada sebanyak ...

$_6P_4$





#1 berbeda $_6C_4 \; _4P_4 = 360$

#2 1 dua yang sama $_6C_3 \; _2C_1 \; _3P_3 = 240$

#3 2 dua yang sama $_6C_2 \cdot {_2C_2} \; _2P_2 = 30$ +

630

6. Banyaknya kemungkinan bilangan asli berbeda a, b, c dan d yang kurang dari 10 dan memenuhi persamaan $a + b = c + d$ ada sebanyak ...

min $1+4 = 2+3 \rightarrow 5$

max $9+6 = 7+8 \rightarrow 15$

5 — 15

6 — 14

7 — 13

8 — 12

9 — 11

10

10 (1,9) (2,8) (3,7), (4,6)

$_4C_2 \cdot 8$

5 (1,4) (2,3)

$_2C_2$ $_2P_2$ $_2P_2$ $_2P_2$

6 (1,5) (2,4)

$_2C_2$ 8

7 (1,6) (2,5) (3,4)

$_3C_2$ 8

8 (1,7) (2,6) (3,5)

$_3C_2 \cdot 8$

9 (1,8) (2,7) (3,6) (4,5)

$_4C_2 \cdot 8$

$(2(1+1+3+3+6)+6)\,8$

$= 34 \cdot 8$

$= 272$

3. Diketahui empat dadu setimbang dan berbeda, yang masing-masing berbentuk segi delapan beraturan bermata 1, 2, 3, ..., 8. Empat dadu tersebut ditos (dilempar) bersama-sama satu kali. Probabilitas kejadian ada dua dadu dengan mata yang muncul sama sebesar ...

Soal 3. Seorang laki - laki memiliki 6 teman. Pada suatu malam di suatu restoran, dia bertemu dengan masing - masing mereka 11 kali, setiap 2 dari mereka 6 kali, setiap 3 dari mereka 4 kali, setiap 4 dari mereka 3 kali, setiap 5 dari mereka 3 kali, dan semua mereka 10 kali. Dia makan diluar 9 kali tanpa bertemu mereka. Berapa kali dia makan di restoran tersebut secara keseluruhan ?

$$9 + \binom{6}{1}11 - \binom{6}{2}6 + \binom{6}{3}4 - \binom{6}{4}3 + \binom{6}{5}3 - \binom{6}{6}10$$

$$= 9 + 6.11 - 15.6 + 20.4 - 15.3 + 6.3 - 1.10$$

$$= 9 + 66 - 90 + 80 - 45 + 18 - 10$$

$$= 28$$

Derangement (Pengacakan)

11. Ada enam anak TK masing-masing membawa suatu makanan. Mereka akan mengadakan kado silang, yaitu makanannya dikumpulkan dan kemudian dibagi lagi sehingga masing-masing anak menerima makanan yang bukan makanan yang dibawa semula. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah...

$$\binom{6}{0}6! - \binom{6}{1}5! + \binom{6}{2}4! - \binom{6}{3}3! + \binom{6}{4}2! - \binom{6}{5}1! + \binom{6}{6}0!$$

$$!6 = \frac{6!}{0!} - \frac{6!}{1!} + \frac{6!}{2!} - \frac{6}{3!} + \frac{6}{4!} - \frac{6}{5!} + \frac{6}{6!} = 265$$

OSK $\boxed{\text{ABCDEF} \quad A \to B}$ $= \frac{!6}{5} = \frac{265}{5} = 53$

7. Ada 10 orang, lima laki-laki dan lima perempuan, termasuk sepasang pengantin. Seorang tukang foto yang bukan salah satu di antara 10 orang tersebut akan megambil gambar enam orang di antara mereka, termasuk kedua pengantin, dengan tidak ada dua laki-laki maupun dua perempuann yang berdekatan. Banyaknya cara adalah ......

$L_1\ L_2\ L_3\ L_4\ L_p$

$P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_p$

LPLPLP

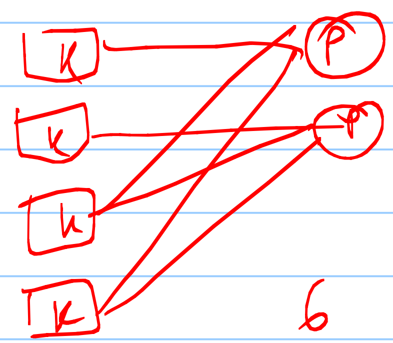
PLPLPL

$2 \cdot {}_4C_2\ {}_4C_2\ {}_3P_3\ {}_3P_3 = 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

$= 2 \cdot 1296$

$= 2592$

11. Misalkan pada suatu laboratorium terdapat 20 komputer dan 15 printer. Kabel digunakan untuk menghubungkan komputer dan printer. Sayangnya, satu printer hanya dapat melayani satu komputer pada suatu waktu bersamaan. Diinginkan 15 komputer selalu dapat menggunakan printer pada waktu bersamaan. Banyaknya kabel yang diperlukan untuk menghubungkan komputer dan printer minimal ada sebanyak ......



6

K_1 — P_1
K_2 — P_2
$\vdots$
K_{15} — P_{15}
K_{16}
$\vdots$
K_{20}

$n \geq 15 + 5 \cdot 15$
≥ 90

2. Tokoh masyarakat di suatu RW, selain Pak RW dan Bu RW, terdapat 5 orang wanita dan 6 orang pria. Kelurahan meminta 6 orang untuk mengikuti seminar di tingkat kota. Dipilih 6 orang sebagai delegasi RW, dengan komposisi 3 orang wanita dan 3 orang pria, yang salah satu di antaranya Pak RW. Banyaknya cara memilih delegasi tersebut adalah ......

W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 W_{RW}

P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 $\cancel{P_{RW}}$

P_{RW} __ __

__ __ __

${}_6C_2$, 15

${}_6C_3$ 20 ×

300

13. Dono memiliki enam kartu. Setiap kartunya ditulis satu bilangan bulat positif. Untuk setiap putaran, Dono mengambil 3 kartu secara acak dan menjumlahkan ketiga bilangan yang ada pada kartu-kartu tersebut. Setelah melakukan 20 kemungkinan dalam memilih 3 dari 6 kartu, Dono mendapatkan angka 16 sebanyak 10 kali dan angka 18 sebanyak 10 kali. Bilangan terkecil yang terdapat pada kartu adalah ...

$\boxed{6}+\boxed{6}+\boxed{4}=16$

$\boxed{6}+\boxed{6}+\boxed{6}=18$

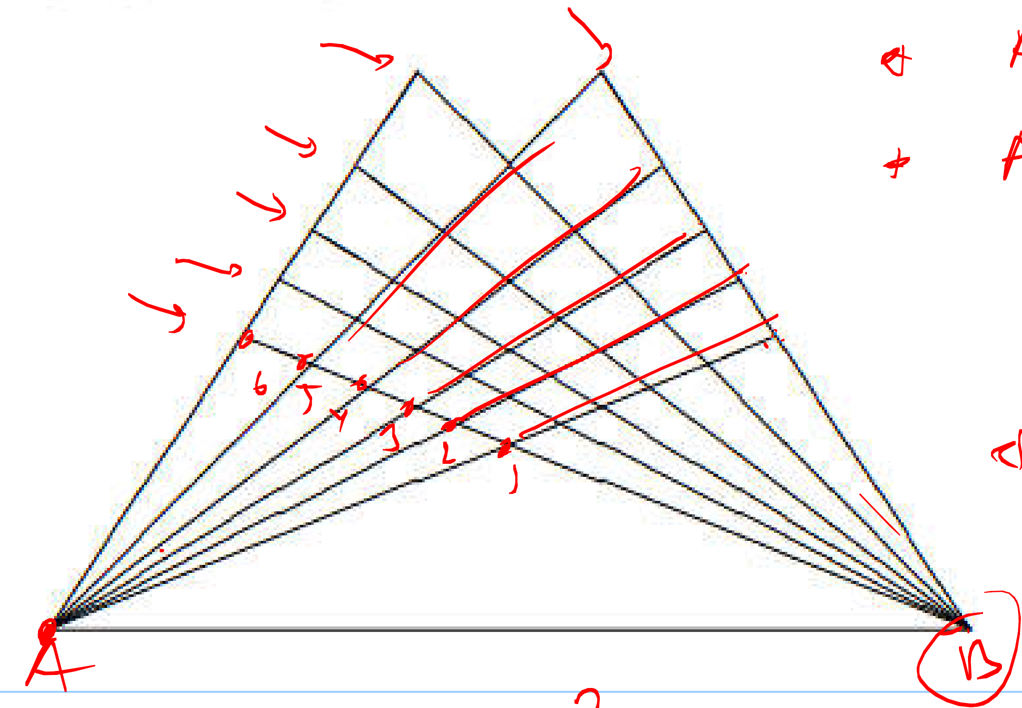
18. Suatu ras alien mempunyai suatu bahasa unik yang hanya terdiri dari dua huruf X dan Z. Dalam bahasa ini, setiap kata paling sedikit terdiri dari satu huruf dan tidak lebih dari 11 huruf. Untuk setiap dua kata, jika kata pertama dan kedua dituliskan berdampingan maka hasilnya bukan merupakan kata. Sebagai contoh jika XXZ dan $ZZZZX$ adalah kata, maka $XXZZZZZX$ bukan kata. Maksimal banyaknya kata dalam bahasa ini adalah ....

$$2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+2^{11} = \frac{2^6(2^6-1)}{2-1} = 2^{12}-2^6$$

kata + kata ≠ kata

$\cancel{x} + \cancel{5x}$ 6

16. Pada gambar terdapat segitiga sebanyak ......



* AB alas 35
* A jamal $5\binom{6}{2}+\binom{5}{2}$

85

* B jamal 85

$$\begin{array}{r} 85 \\ 85 \\ 35 \\ \hline 205 \end{array}$$