



**PEMBAHASAN
OSN MATEMATIKA SMP 2015 TINGKAT KABUPATEN
BAGIAN B : ISIAN SINGKAT**

BAGIAN B : ISIAN SINGKAT

1. Jawaban : $x = \{-4, -1\}$

Pembahasan :



x adalah bilangan bulat

$x^2 + 5x + 6$ adalah bilangan prima



$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3)$$



Karena $(x + 2) < (x + 3)$ maka untuk bilangan prima $= \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ berlaku :



Untuk bilangan prima $= 2$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3) = 2 = 1 \cdot 2 = (-2) \cdot (-1)$$

Ini menunjukkan bahwa :



$$\text{Untuk : } (x + 2) \cdot (x + 3) = 1 \cdot 2$$

$$x + 2 = 1 \quad \text{dan} \quad x + 3 = 2$$

$$x = 1 - 2 \quad \text{dan} \quad x = 2 - 3$$

$$x = -1 \quad \text{dan} \quad x = -1 \quad (\text{memenuhi karena nilai } x \text{ sama})$$



$$\text{Untuk : } (x + 2) \cdot (x + 3) = (-2) \cdot (-1)$$

$$x + 2 = -2 \quad \text{dan} \quad x + 3 = -1$$

$$x = -2 - 2 \quad \text{dan} \quad x = -1 - 3$$

$$x = -4 \quad \text{dan} \quad x = -4 \quad (\text{memenuhi karena nilai } x \text{ sama})$$



Untuk bilangan prima $= 3$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3) = 3 = 1 \cdot 3 = (-3) \cdot (-1)$$

Ini menunjukkan bahwa :



$$\text{Untuk : } (x + 2) \cdot (x + 3) = 1 \cdot 3$$

$$x + 2 = 1 \quad \text{dan} \quad x + 3 = 3$$

$$x = 1 - 2 \quad \text{dan} \quad x = 3 - 3$$

$$x = -1 \quad \text{dan} \quad x = 0 \quad (\text{tidak memenuhi karena nilai } x \text{ tidak sama})$$



$$\text{Untuk : } (x + 2) \cdot (x + 3) = (-3) \cdot (-1)$$

$$x + 2 = -3 \quad \text{dan} \quad x + 3 = -1$$

$$x = -3 - 2 \quad \text{dan} \quad x = -1 - 3$$

$$x = -5 \quad \text{dan} \quad x = -4 \quad (\text{tidak memenuhi karena nilai } x \text{ tidak sama})$$



Untuk bilangan prima $= 5$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3) = 5 = 1 \cdot 5 = (-5) \cdot (-1)$$

Ini menunjukkan bahwa :



$$\text{Untuk : } (x + 2) \cdot (x + 3) = 1 \cdot 5$$



$$\begin{aligned}x + 2 &= 1 & \text{dan} & & x + 3 &= 5 \\x &= 1 - 2 & \text{dan} & & x &= 5 - 3 \\x &= -1 & \text{dan} & & x &= 2 \quad (\text{tidak memenuhi karena nilai } x \text{ tidak sama})\end{aligned}$$



Untuk : $(x + 2) \cdot (x + 3) = (-5) \cdot (-1)$

$$\begin{aligned}x + 2 &= -5 & \text{dan} & & x + 3 &= -1 \\x &= -5 - 2 & \text{dan} & & x &= -1 - 3 \\x &= -7 & \text{dan} & & x &= -4 \quad (\text{tidak memenuhi karena nilai } x \text{ tidak sama})\end{aligned}$$



Dari perhitungan diatas menunjukkan pola bahwa untuk bilangan prima ≥ 3 tidak memenuhi karena diperoleh nilai x yang tidak sama

Jadi nilai $x = \{-4, -1\}$

2. Jawaban : 12

Pembahasan :



$y = ax^2 + bx + c$ melalui titik $(-2, 6)$

sumbu simetrinya $x = -1$

a, b , dan c merupakan bilangan genap positif berurutan



$$\begin{aligned}\left(\begin{matrix} -2 \\ x \end{matrix}, \begin{matrix} 6 \\ y \end{matrix}\right) &\rightarrow y = ax^2 + bx + c \\6 &= a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\6 &= 4a - 2b + c \\4a - 2b + c &= 6 \quad \dots (1)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{Sumbu simetri } x &= -1 \rightarrow x = -\frac{b}{2a} \\-1 &= -\frac{b}{2a} \\-2a &= -b \\b &= 2a \quad \dots (2)\end{aligned}$$



Substitusikan persamaan (2) ke (1) :

$$\begin{aligned}4a - 2b + c &= 6 \\4a - 2 \cdot (2a) + c &= 6 \\4a - 4a + c &= 6 \\c &= 6\end{aligned}$$



Diperoleh $c = 6$, $b = 2a$ dan karena a, b , dan c merupakan bilangan genap positif berurutan maka berlaku :

$$\begin{matrix} 2 \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} 4 \\ b=2a \end{matrix}, 6$$

Jadi $a + b + c = 2 + 4 + 6 = 12$

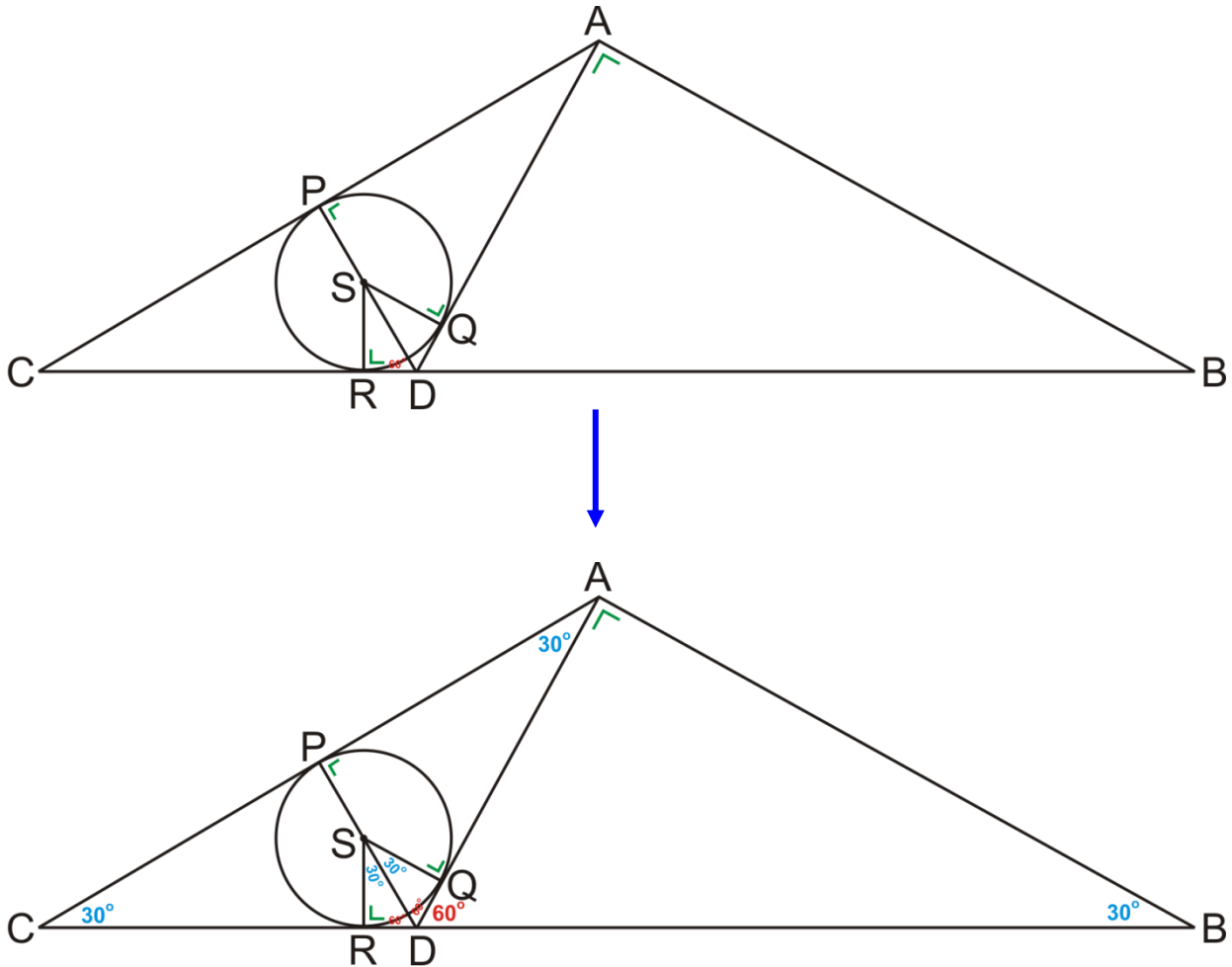


3. Jawaban : $(7\sqrt{3} + 12) \text{ cm}^2$

Pembahasan :



Perhatikan gambar berikut :



P, Q dan R adalah titik singgung lingkaran pada sisi – sisi segitiga ACD , sehingga :

$$\angle APD = \angle CPD = \angle DRS = \angle CRS = \angle AQS = \angle DQS = 90^\circ$$

Segitiga ABC adalah segitiga sama kaki $\rightarrow AB = AC$

$$SR = SQ = PS = 1$$

$$RD = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$\angle SDR = 60^\circ$$



Perhatikan segitiga siku – siku DRS :

$$\angle DSR = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$



Perhatikan segitiga siku – siku DRS dan segitiga siku – siku DQS yang kongruen :

$$\angle QDS = \angle SDR = 60^\circ$$



Perhatikan segitiga siku – siku CPD :

$$\angle DCP = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$



Perhatikan segitiga siku – siku APD :

$$\angle DAP = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$



Perhatikan segitiga sama kaki ABC :

$$\angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$$



Perhatikan segitiga ABD :

$$\angle ADB = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\angle BAD = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$



Perhatikan segitiga siku – siku DRS :

$$DS = \sqrt{RD^2 + SR^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{9} + 1} = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{9}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$$DP = PS + DS = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



Perhatikan segitiga siku – siku CPD dan segitiga siku – siku DRS yang sebangun :

$$\frac{CP}{SR} = \frac{DP}{RD}$$

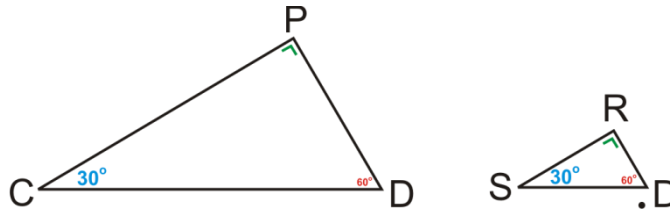
$$\frac{CP}{1} = \frac{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$CP = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$CP = \frac{3}{\sqrt{3}} + 2$$

$$CP = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 2$$

$$CP = \sqrt{3} + 2$$



Perhatikan segitiga siku – siku CPD dan segitiga siku – siku APD yang kongruen :

$$AP = CP = \sqrt{3} + 2$$



Perhatikan segitiga sama kaki ABC :

$$AB = AC = AP + CP = (\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} + 2) = 2\sqrt{3} + 4$$



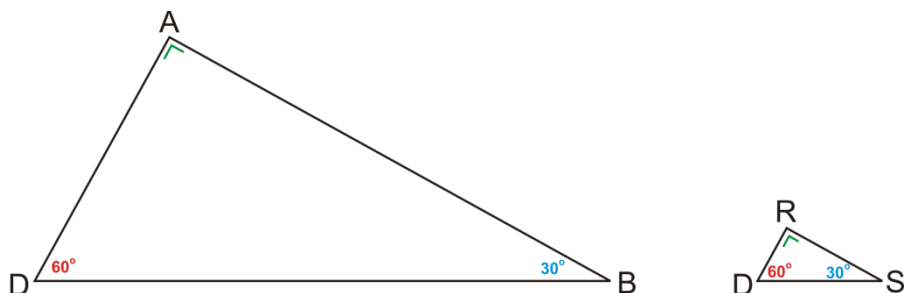
Perhatikan segitiga siku – siku BAD dan segitiga siku – siku DRS yang sebangun :

$$\frac{AD}{RD} = \frac{AB}{SR}$$

$$\frac{AD}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 4}{1}$$

$$AD = (2\sqrt{3} + 4) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$AD = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$





Perhatikan segitiga siku – siku CPD :

$$\begin{aligned} L_{\text{segitiga siku-siku CPD}} &= \frac{1}{2} \cdot DP \cdot CP \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot (\sqrt{3} + 2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3} + 2 + 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} + 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7\sqrt{3}}{3} + 4\right) \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{6} + 2 \end{aligned}$$



Perhatikan segitiga siku – siku CPD dan segitiga siku – siku APD yang kongruen :

$$\begin{aligned} L_{\text{segitiga siku-siku APD}} &= L_{\text{segitiga siku-siku CPD}} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{6} + 2 \end{aligned}$$



Perhatikan segitiga siku – siku BAD :

$$\begin{aligned} L_{\text{segitiga siku-siku BAD}} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3} + 4) \cdot \left(2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(4\sqrt{3} + 8 + 8 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{12\sqrt{3}}{3} + 16 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{28\sqrt{3}}{3} + 16\right) \\ &= \frac{14\sqrt{3}}{3} + 8 \end{aligned}$$



Perhatikan segitiga sama kaki ABC :

$$\begin{aligned} L_{\text{segitiga sama kaki ABC}} &= L_{\text{segitiga siku-siku APD}} + L_{\text{segitiga siku-siku CPD}} + L_{\text{segitiga siku-siku BAD}} \\ &= \left(\frac{7\sqrt{3}}{6} + 2\right) + \left(\frac{7\sqrt{3}}{6} + 2\right) + \left(\frac{14\sqrt{3}}{3} + 8\right) \\ &= \frac{14\sqrt{3}}{6} + 12 + \frac{14\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{3} + 12 + \frac{14\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{21\sqrt{3}}{3} + 12 \\ &= 7\sqrt{3} + 12 \end{aligned}$$

Jadi luas segitiga sama kaki ABC adalah $(7\sqrt{3} + 12) \text{ cm}^2$



4. Jawaban : 55 : 153

Pembahasan :



$$\text{Botol I} \rightarrow G_I : A_I = 2 : 11$$

$$\text{Botol II} \rightarrow G_{II} : A_{II} = 3 : 5$$

Misalkan :

$$V_{\text{botol}} = V$$



Volume Gula dan Air dalam botol I dan botol II sebelum dicampur :

$$G_I = \frac{2}{2+11} \cdot V = \frac{2V}{13}$$

$$A_I = \frac{11}{2+11} \cdot V = \frac{11V}{13}$$

$$G_{II} = \frac{3}{3+5} \cdot V = \frac{3V}{8}$$

$$A_{II} = \frac{5}{3+5} \cdot V = \frac{5V}{8}$$




Volume Gula dan Air setelah botol I dan botol II dicampur :

$$G_{I+II} = G_I + G_{II} = \frac{2V}{13} + \frac{3V}{8} = \frac{16V}{104} + \frac{39V}{104} = \frac{55V}{104}$$

$$A_{I+II} = A_I + A_{II} = \frac{11V}{13} + \frac{5V}{8} = \frac{88V}{104} + \frac{65V}{104} = \frac{153V}{104}$$



$$G_{I+II} : A_{I+II} = \frac{G_{I+II}}{A_{I+II}} = \frac{\frac{55V}{104}}{\frac{153V}{104}} = \frac{55V}{104} \cdot \frac{104}{153V} = \frac{55}{153} = 55 : 153$$

Jadi rasio kandungan gula dan air hasil campurannya adalah **55 : 153** 

5. **Jawaban : 19**

Pembahasan :



$$f(x) = 209 - x^2$$

$f(ab) = f(a + 2b) - f(a - 2b)$ dimana : a, b adalah bilangan bulat positif dan $a < b$



$$f(ab) = f(a + 2b) - f(a - 2b)$$

$$209 - (ab)^2 = (209 - (a + 2b)^2) - (209 - (a - 2b)^2)$$

$$209 - a^2b^2 = (209 - (a^2 + 4ab + 4b^2)) - (209 - (a^2 - 4ab + 4b^2))$$

$$209 - a^2b^2 = (209 - a^2 - 4ab - 4b^2) - (209 - a^2 + 4ab - 4b^2)$$

$$209 - a^2b^2 = 209 - a^2 - 4ab - 4b^2 - 209 + a^2 - 4ab + 4b^2$$

$$209 - a^2b^2 = -8ab$$

$$209 = a^2b^2 - 8ab$$

$$19 \cdot 11 = ab \cdot (ab - 8) \rightarrow ab = 19$$

$$ab - 8 = 11$$



Diperoleh $ab = 19$ yang merupakan **bilangan prima**, dan karena $a < b$ maka berlaku :

$$ab = 19$$

$$ab = 1 \cdot 19 \rightarrow a = 1$$

$$b = 19$$

$$\text{Jadi nilai } \frac{b}{a} = \frac{19}{1} = 19 \quad \img alt="Small logo" data-bbox="338 823 361 848"/>$$



6. Jawaban : 10080

Pembahasan :



$$\begin{array}{rcl} U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 70 & \rightarrow & S_4 = 70 \\ U_5 + U_6 + \dots + U_{16} = 690 & & \\ \hline U_1 + U_2 + \dots + U_{16} = 760 & + & \\ S_{16} = 760 & & \end{array}$$



$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} \cdot (2a + (n-1) \cdot b) \\ S_4 &= \frac{4}{2} \cdot (2a + (4-1) \cdot b) = 70 \\ 2 \cdot (2a + 3b) &= 70 \\ 2a + 3b &= \frac{70}{2} \\ 2a + 3b &= 35 \quad \dots (1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} \cdot (2a + (n-1) \cdot b) \\ S_{16} &= \frac{16}{2} \cdot (2a + (16-1) \cdot b) = 760 \\ 8 \cdot (2a + 15b) &= 760 \\ 2a + 15b &= \frac{760}{8} \\ 2a + 15b &= 95 \quad \dots (2) \end{aligned}$$



Eliminasi persamaan (2) dan (1):

$$\begin{array}{rcl} 2a + 15b = 95 & & \\ 2a + 3b = 35 & - & \\ \hline 12b = 60 & & \\ b = \frac{60}{12} & & \\ b = 5 & \rightarrow & (1): \\ 2a + 3b = 35 & & \\ 2a + 3 \cdot (5) = 35 & & \\ 2a + 15 = 35 & & \\ 2a = 35 - 15 & & \\ 2a = 20 & & \\ a = \frac{20}{2} & & \\ a = 10 & & \end{array}$$



$$\begin{aligned} U_n &= a + (n-1) \cdot b \\ U_{2015} &= 10 + (2015-1) \cdot 5 \\ &= 10 + 2014 \cdot 5 \\ &= 10 + 10070 \\ &= 10080 \end{aligned}$$

Jadi suku ke – 2015 barisan tersebut adalah 10080





B	C	D, E, F	3
	E	D, F	2
C	A	D, E, F	3
	B	D, E, F	3
	E	A, D, F	3
D	A	E, F	2
	B	E, F	2
	C	A, E, F	3
	E	A, F	2
Total banyak cara penyusunan			28

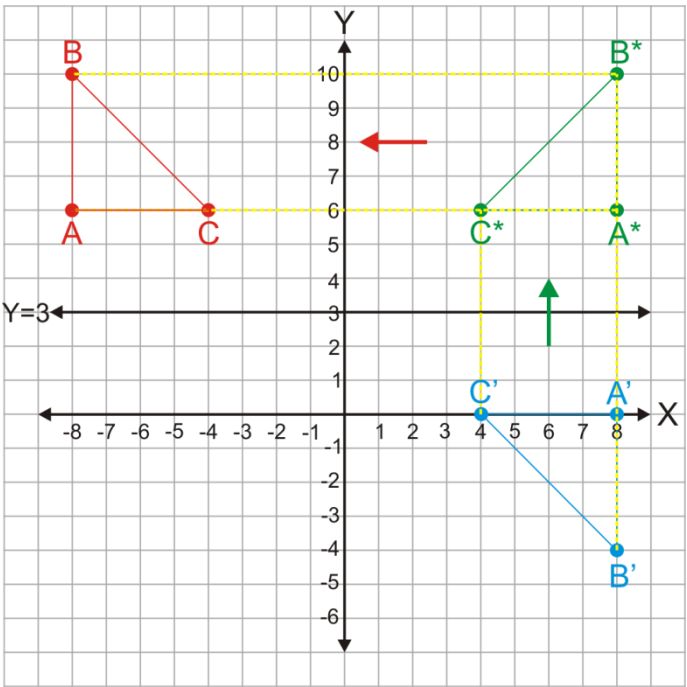
Jadi cara yang mungkin untuk memilih wakil sekolah tersebut ke OSN SMP tahun ini ada sebanyak 28

9. Jawaban : $A(-8, 6)$, $B(-8, 10)$, $C(-4, 6)$

Pembahasan :

$\triangle ABC$ dicerminkan terhadap sumbu Y, kemudian dicerminkan lagi terhadap garis $y = 3$, sehingga hasil pencerminannya adalah $\triangle A'B'C'$, yaitu $A'(8, 0)$, $B'(8, -4)$, $C'(4, 0)$

Dengan demikian untuk mendapatkan kembali $\triangle ABC$, lakukan langkah mundur yaitu : $\triangle A'B'C'$ harus dicerminkan terhadap garis $y = 3$, kemudian dicerminkan terhadap sumbu Y



Jadi koordinat titik – titik $\triangle ABC$ adalah $A(-8, 6)$, $B(-8, 10)$, $C(-4, 6)$



10. Jawaban : 61600

Pembahasan :

Putih = 3
 Merah = 3
 Kuning = 3
 Hijau = 3
 Biru = 3

$$\left. \begin{array}{l} \text{Putih} = 3 \\ \text{Merah} = 3 \\ \text{Kuning} = 3 \\ \text{Hijau} = 3 \\ \text{Biru} = 3 \end{array} \right\} \text{Jumlah} = 12$$

Manik – manik pada gelang disusun dengan aturan diantara 2 manik – manik berwarna putih selalu terdapat 4 manik – manik berwarna selain putih

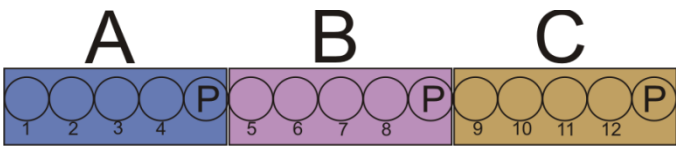
Karena Manik – manik disusun dengan aturan diantara 2 manik – manik berwarna putih selalu terdapat 4 manik – manik berwarna selain putih, maka manik – manik tersebut berpola :



Dengan demikian posisi manik – manik putih tetap, tetapi untuk manik – manik merah, kuning, hijau dan biru dapat disusun menggunakan permutasi dari unsur yang sama :

Banyak penyusunan manik – manik merah, biru, kuning dan hijau = $\frac{12!}{3!.3!.3!.3!}$

Tetapi , sebuah gelang bisa di putar dan dibalik kanan kirinya (yang kanan bisa jadi kiri, begitu juga sebaliknya) , sehingga untuk mempermudah perhitungan, gelang dikelompokkan jadi 3 bagian dengan acuan manik – manik putih, sebagai berikut :



Banyak kemungkinan gelang diputar atau dibolak – balik = 3!

Agar gelang yang disusun tidak ada yang lebih dari satu pola gelang (akibat pemutaran atau dibolak – balik) maka harus dilakukan perhitungan sebagai berikut :

Banyaknya susunan gelang yang mungkin dibuat = $\frac{12!}{3!.3!.3!.3! \cdot 3!} = 61600$

banyak pemutaran / balikan