AZZAM LABIB HAKIM

MATERI GEOMETRI DALAM INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

oleh

SOEWONO

(TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA)

DOSEN

FAKULTAS TEKNIK ELEKTRO

TELKOM UNIVERSITY

BANDUNG

2018

MATERI GEOMETRI DALAM INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

SOEWONO
e-mail :soewono0841@gmail.com

Abstrak

Salah satu materi International Mathematical Olympiad (IMO) adalah Geometri.

Konsep yang mendasarinya adalah Geometri-Euclidean, dengan cakupan mayor mengenai konfigurasi yang ada pada segitiga dan lingkaran.

Untuk mencari solusi soal geometri, dapat dipakai cara : murni geometri, trigonometri, analitika, aljabar, teori bilangan, dan kombinatorika.

Dalam paparan materi ini, dibahas beberapa teorema, antara lain : Erdös-Mordell; Weitzenbock; Nine-point-circle; Garis Euler, Feuerbach; Fagnano dan Schwarz problem; Segitiga pedal, Garis Simson; dan teorema klasik yang paling tua yaitu Menelaus dan Ceva.

PENDAHULUAN

Dalam buku : Geometric Transformations I, by I. M. Yaglon, translated from the Russian by ALLEN SHEILDS, definition of geometry is given :

"Geometry is the science that studies the properties of geometric figures"

Gambar merupakan alat bantu yang paling ampuh dalam menyelesaikan soal geometri.

Geometri adalah sains yang tidak hanya mementingkan "jawaban", tetapi juga menelusuri bagaimana dan kenapa jawaban itu ditemukan.

Engineering, arsitektur dan banyak bidang seni lain, serta sains memerlukan dukungan geometri. Boleh jadi, geometri merupakan landasan utama bagi sains.

Diantara sarjana yang paling terkenal dari Yunani (Greek) adalah Euclid (300 BC), ia seorang guru yang juga mathematician, memiliki pengetahuan geometri yang dituangkan dalam bukunya : ELEMENTS.

Euclid mengungkapkan postulates/axioms sebagai dasar untuk membangun teorema yang akan ia buktikan dengan menggunakan penalaran logika. Dari sinilah lahir Euclidean Geometry.

Istilah "geometry" merupakan perpaduan antara dua kata Yunani, yaitu : GEOS dan METRON yang masing-masing mempunyai arti : EARTH dan TO MEASURE.

Atas dasar pertimbangan yang berasal dari konsep "geometry" inilah, muncul masalah mengenai pembagian tanah, yang kemudian berkembang menjadi, GEOMETRY IS THE SCIENCE OF MEASURING LAND.

Menelaus points, Centroid, Circumcenter, Incenter, Excenters, Orthocenter, Pedal point, Nagel point, Gergonne point, Fermat point, Steiner point, Torricelli point, Lemoine point, Brocard point, Isogonal Conjugates,

Nine-point center

Incircles, Excircles, Area, Perimeter, Circumcircle, Inradius, Exradii, Circum radius

SEGITIGA ADALAH POLIGON DENGAN TIGA SISI

Cevians, Dividends, Medians,Altitudes, Internal Bisectors, Eksternal Bisectors, Perpendicular Bisectors, Euler line, Pascal line, Simson line

Egyptian triangle, Heronian triangle, Pedal triangle, Medial triangle, Orthic triangle, Napolean (inner & outer) triangle, Copolar triangle, Coaxial triangle, Sierpinski triangle, Apollonius circle, Tritangent circle, Nine-point circle

METODE MEMECAHKAN MASALAH

REDUCTIO AD ABSURDUM

(REDUCTION TO THE ABSURD)

FOREWARD MOVEMENT ← **METODE MEMECAHKAN MASALAH DALAM GEOMETRI** → BACKWARD MOVEMENT

PURE GEOMETRY	TRIGONOMETRY	ANALYTIC GEOMETRY
ALGEBRA	NUMBER THEORY	COMBINATORICS

THEOREMS

- Pythagoras, Ceva, Menelaus, Law of Sines, Law of Cosines, Pappus, Morley, Stewart, Heron, Leibniz, Desarque, Triangle inequality, Varignon Butterfly, Ptolemy, Viviani Pascal, Brahmagupta, Carnot Miquel, Napolean, Steiner, Steiner-Lehmus, Euler, Simson
- Cauchy-Schwarz Erdös-Mordell Pedoe's inequality, Chord, Secant, Power point, Jensen's inequality, AM-GM-HM-QM inequality, Feuerbach, Cantor,Hippocrates
- Ravi-substitution, Viete, Chebyshev Nesbitt's inequality

Contoh soal

1. Diberikan bujur sangkar ABCD dengan panjang sisi 20
Andaikan T_i, i = 1, 2 . . . 2000 titik - titik yang berada dalam bujur sangkar ABCD, sedemikian rupa sehingga tidak ada tiga titik dalam himpunan S= {A, B, C, D} $\cup$ {T_i, i=1,2 . . . 2000} yang kolinier. Buktikan bahwa paling sedikit ada satu segitiga dengan puncak/titik sudut dalam S yang luasnya kurang dari 0,10

2. Andaikan M suatu titik didalam segitiga ABC, sedemikian rupa sehingga $\angle AMC=90^o$, $\angle AMB=150^o$, $\angle BMC=120^o$. Titik pusat lingkaran luar dari segitiga segitiga : AMC, AMB dan BMC berturut-turut di titik P, Q dan R. Buktikan bahwa luas segitiga PQR lebih besar dari luas segitia ABC

3. Diberika segitiga ABC sama sisi, titik P didalam segitiga ABC. Garis AP, BP, CP memotong BC, CA dan AB berturut-turut di A_1, B_1 C_1. Buktikan bahwa :
$| A_1B_1|.\ |B_1C_1\ |.\ |C_1A_1\ | \geq |A_1B\ |.\ |B_1C\ |.\ |C_1A\ |$

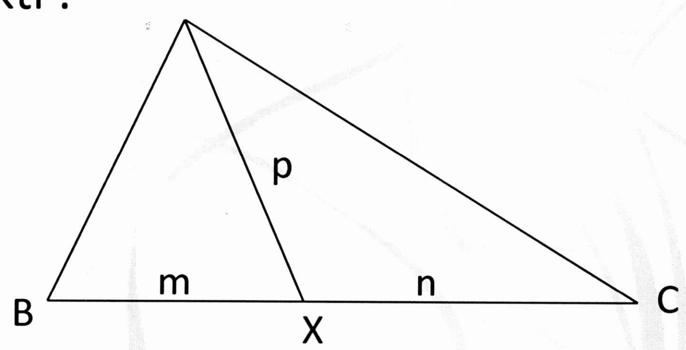
4. Diberikan segitiga ABC (bukan segitiga tumpul), CH dan CM berturut-turut merupakan garis tinggi dan garis berat. Jika garis bagi dalam sudut BAC memotong CH dan CM berturut-turut di titik P dan Q, dan sudut ABP = sudut PBQ = sudut QBC. Buktikan bahwa :
a. Segitiga ABC adalah segitiga siku-siku
b. BP = 2CH

DARI TEOREMA STEWART KE TEOREMA ERDÖS-MORDELL

A. Teorema Stewart

Jika cevian AX panjangnya p, membagi BC menjadi segmen BX = m dan segmen XC = n, maka : $a(p^2+mn) = b^2m + c^2n$

Bukti :



1). $c^2 = p^2 + m^2 - 2pm\cos\angle BXA$

2). $b^2 = p^2 + n^2 - 2pn\cos\angle CXA$

$b^2 = p^2 + n^2 - 2pn\cos[180° - \angle BXA]$

$b^2 = p^2 + n^2 + 2pn\cos\angle BXA$

$\cos\angle BXA = \frac{p^2+m^2-c^2}{2pm}$, substitusikan pada persamaan (2)

maka diperoleh : $b^2 = p^2 + n^2 + \frac{n}{m}\left(p^2+m^2-c^2\right)$

$$mb^2 = mp^2 + n^2m + np^2 + nm^2 = nc^2 \ atau$$

$$mb^2 + nc^2 = (m+n)p^2 + mn(n+m)$$

Jadi, $\boxed{a\left(p^2+mn\right) = mb^2 + nc^2}$ qed

Beberapa hal yang dapat terjadi pada teorema Stewart :

1. *Jika* $m = n$, **maka cevian AX = p menjadi garis berat/median,**
$m = n = \frac{1}{2}a$, **dengan lain perkataan X terletak ditengah-tengah BC**
Notasi AX = p ditulis sama dengan m_a yang berarti panjang garis berat dari titik sudut A. Teorema Stewart menjadi teorema garis berat

$$\boxed{m_a{}^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2}$$

, dimana a, b dan c menyatakan panjang sisi Δ ABC

Analog, dapat dicari :

$$\boxed{m_b{}^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2) - \frac{1}{4}b^2} \quad \textbf{atau} \quad \boxed{m_c{}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2}$$

2. Selanjutnya, apabila $AX \perp BC$ **, maka cevian** AX **menjadi garis tinggi segitiga ABC, yang dinyatakan dengan** h_a

notasi

Jadi, $h_a = c \sin \angle A = b \sin \angle C$

3. **Apabila cevian AX membagi sudut A, maka AX merupakan garis bagi. Menurut kaidah sinus**

$$\frac{BX}{\sin \angle \frac{1}{2}A} = \frac{c}{\sin \angle BXA} \quad dan \quad \frac{XC}{\sin \angle \frac{1}{2}A} = \frac{b}{\sin \angle CXA}$$

Dari kedua persamaan terakhir diperoleh:

$$XC = \frac{ab}{b+c} \quad dan \quad BX = \frac{ac}{b+c}$$

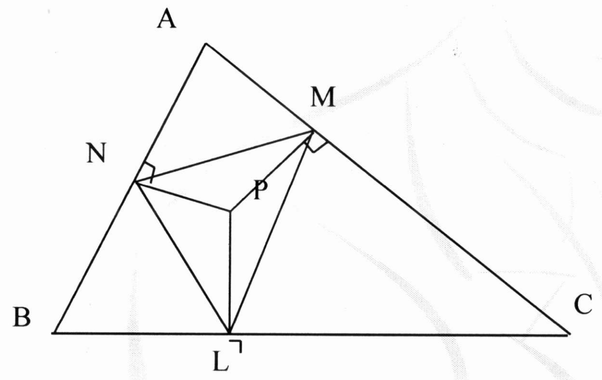
Panjang $AX = p$ **biasanya diberi notasi** ℓ_a, **dengan demikian**

$$\ell^2{}_a = bc\left[1 - \left(\tfrac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

Dari sini dikembangkan teorema Steiner- Lehmus

B. Segitiga Pedal

Andaikan *P* suatu titik terletak di dalam segitiga ABC, selajutnya melalui P dibuat garis tegak lurus pada sisi BC, CA dan AB, masing-masing titik potongnya pada sisi tersebut adalah L, M dan N



Definisi :

Segitiga *LMN* disebut segitiga pedal dari segitiga ABC dan titik P disebut "titik pedal". Sudut siki-siku di M dan N memberikan indikasi bahwa titik-titik A, M dan N terletak pada satu lingkaran dengan diameter AP.

Dengan lain perkataan, titik P terletak pada circumcircle dari segitiga *AMN*. Pada segitiga ABC berlaku hubungan a = 2R sin A, analog dalam segitiga *AMN; MN = AP* sin A. sehingga diperoleh $MN = a\frac{AP}{2R}$

Analog : $NL = b\frac{BP}{2R}$ **dan** $LM = c\frac{CP}{2R}$

Pertanyaan, apa yang terjadi, jika A*P = BP = CP ?*

1. Jika R_o circumradius dari segitiga pedal *LMN*, maka $MN = 2R_0 \sin \angle NLM$

tetapi $MN = AP.\frac{BC}{2R}$ sehingga diperoleh : $\boxed{\frac{AP.BC}{\sin \angle NLM} = 4RR_0}$

2. Jika P adalah incentre, maka $\angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}A$ **dengan demikian**

$\angle NLM = 90^\circ - \frac{1}{2}A \rightarrow \sin \angle NLM = \cos\frac{1}{2}A$

$AP.BC = 4RR_0 \sin \angle NLM$

$AP.a = 2R.2r\cos\frac{1}{2}A \rightarrow AP\sin A = 2r\cos\frac{A}{2}$

Jadi, $\boxed{AP = r\,\mathrm{cosec}\frac{A}{2}}$

- Selanjutnya, dapat dikembangkan bahwa dalam segitiga pedal *LMN* berlaku $BL^2 + CM^2 + AN^2 = LC^2 + MA^2 + NB^2$
- Apa yang terjadi jika P terletak pada circumcircle dari segitiga ABC

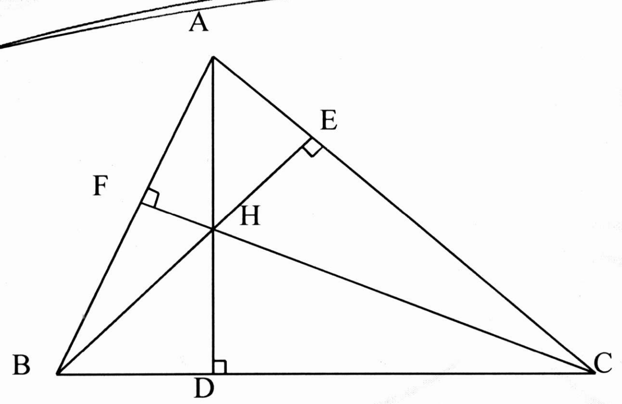
C. Segitiga Orthic (orthic triangle)

Garis-garis tinggi *AD, BE dan CF* dari segitiga ABC adalah konkuren, artinya ketiga garis tinggi tersebut bertemu di satu titik. Titik konkurensinya diberi notasi H, disebut orthocentre dari segitiga ABC.
Segitiga *DEF* yang dibentuk oleh kaki-kaki dari garis tinggi segitiga ABC disebut segitiga orthic.

Timbul pertanyaan apakah segitiga orthic pasti merupakan segitiga pedal? Atau segitiga pedal adalah segitiga orthic?

Dapat dibuktikan bahwa di antara segitiga yang ada di dalam suatu segitiga, hanya segitiga orthic yang mempunyai keliling minimal. Dari sini muncul Fagnano's problem dan Schwarz's problem.

Lemma : Misalkan diberikan segitiga ABC dan andaikan pula bahwa *D, E dan F* adalah titik kaki dari garis tinggi masing-masing pada sisi *BC, CA* dan *AB* yang ditarik dari titik sudut *A, B dan C*.
Maka dapat dibuktikan, bahwa, segitiga – segitiga *ABC, AEF, BDF dan CDE* adalah sebangun



Bukti : Perhatikan quadrilateral AFHE.

$\angle$ FAH = $\angle$FEH

Dari sini, disimpulkan Δ ABC ~ Δ AEF

Analog :

ΔABC ~ Δ CDE dan Δ ABC ~ Δ BDF

$90^0 - \angle B = 90^0 - \angle AEF$

$\Rightarrow \angle AEF = \angle B$

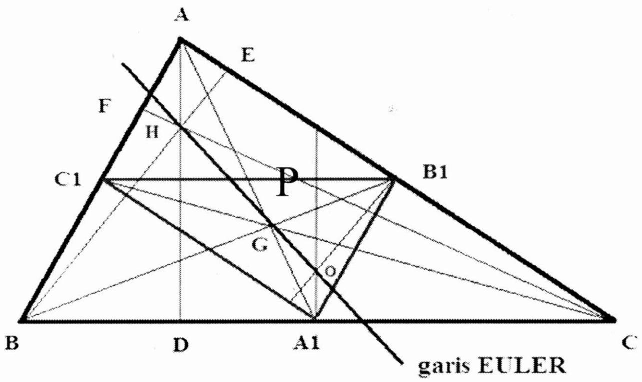
Sebagai latihan, dapat dibuktikan bahwa :

a. $\frac{HD}{HA} + \frac{HE}{HB} + \frac{HF}{HC} \geq \frac{3}{2}$

b. $\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9$

D. Segitiga Medial (medial triangle)

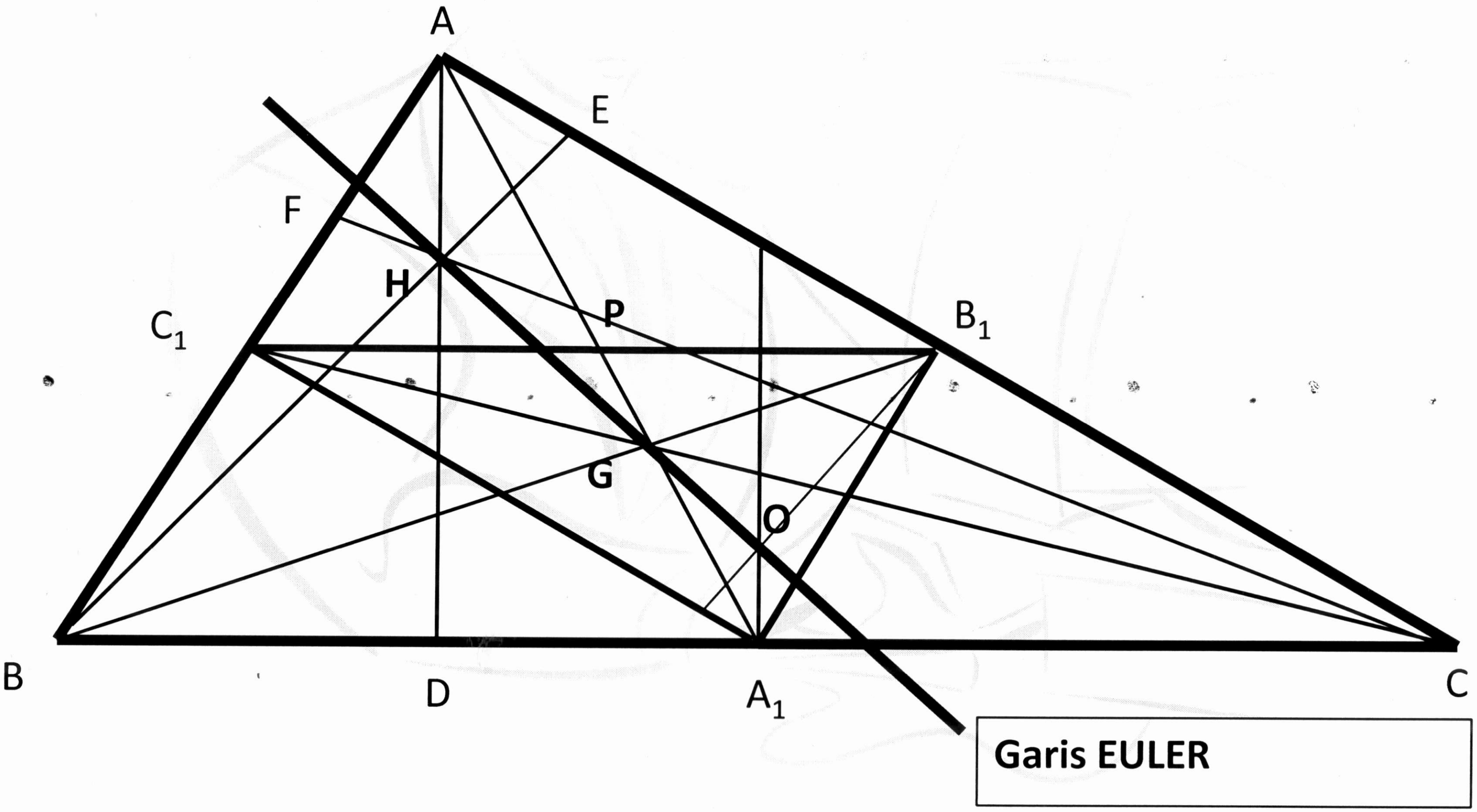
Segitiga yang dibentuk dari menghubungkan titik tengah dari sisi-sisi segitiga, disebut segitiga medial.



Pada gambar di samping, segitiga A_1, B_1, C_1 merupakan segitiga medial dari segitiga ABC
$AA_1 \cap BB_1 = G$ disebut centroid
$AD \cap BE = H$ disebut orthocentre, dan orthocentre dari segitiga A_1, B_1, C_1 disebut O

Perhatikan segiempat $AC_1A_1B_1$ → parallelogram, dengan demikian AA_1 dan C_1B_1 saling membagi, artinya $AA_1 \cap C_1B_1 = P$ → $AP = PA_1$ dan $C_1P = PB_1$ dengan demikian $\Delta A_1B_1C_1$ dan ΔABC mempunyai centroid yang sama, yaitu G. Orthocentre dari $\Delta A_1B_1C_1$ sama dengan circumcentre dari ΔABC yaitu O.
$\Delta AGH \sim \Delta A_1GO$ karena AD dan OA_1 keduanya saling tegak lurus pada BC, jadi $AD // OA_1$.
$\angle HAG = \angle OA_1G$ $\angle AGH = \angle A_1GO$, jadi : titik – titik O,G,H kolinear dan HG = 2GO. Garis yang menghubungkan ketiga titik O,G,H disebut garis EULER.

Corollary : Centroid membagi jarak dari orthocentre ke circumcentre dalam perbandingan 2:1


A
E
F
H
P
C_1
B_1
G
O
B
D
A_1
C
Garis EULER

E. Lingkaran Sembilan Titik (Nine-point circle)

Nine-point circle adalah nama lingkaran yang diberikan oleh O. Terquem, versi Perancis menyebut Euler-circle dan versi Jerman memberi nama Feuerbach-circle. Nine-point circle, terkait dengan sembilan titik penting yang ada pada segitiga.

Definisi :Suatu lingkaran melalui titik tengah dari sisi-sisi segitiga dan melalui titik kaki dari garis tinggi serta titik tengah dari segmen garis yang menghubungkan orthocentre dengan titik sudut segitiga, disebut lingkaran sembilan titik.

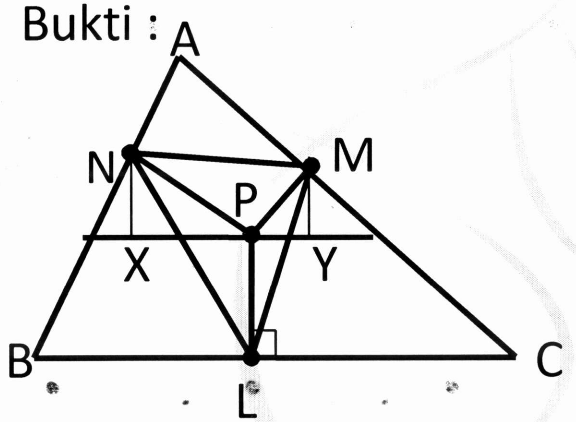
Teorema : Titik pusat dari lingkaran sembilan titik terletak pada garis Euler, pertengahan antara orthocentre dan circumcentre. Dari konsep nine-point circle muncul teorema Feuerbach dan teorema Cantor

F. Teorema Erdös – Mordell

Andaikan *P* suatu titik di dalam segitiga ABC. Jika p_a, p_b, p_c berturut-turut menyatakan jarak dari *P* ke sisi-sisi segitiga ABC, maka :

$$PA + PB + PC \geq 2(p_a + p_b + p_c)$$

Bukti :



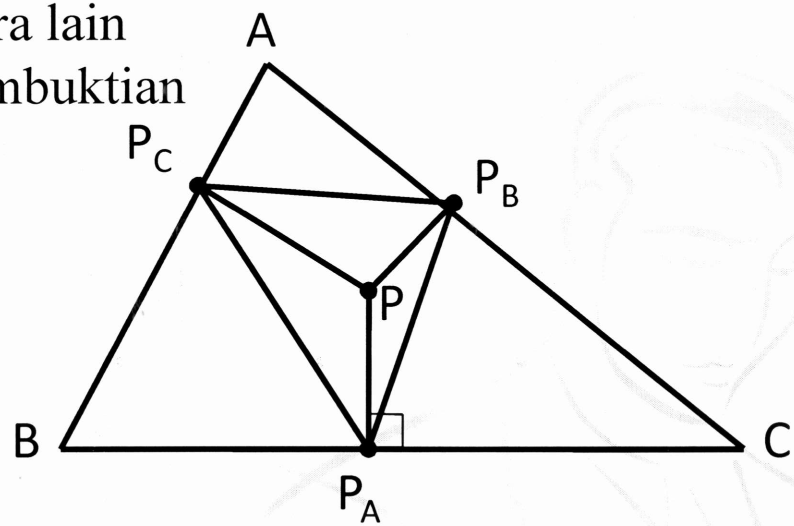
Buat garis yang melalui titik P, sejajar dengan BC; memotong sisi AB dan AC berturut-turut B_1 dan C_1
$\angle MPC_1 = 90^0 - C$ dan $\angle NPB_1 = 90^0 - B$.
Menurut, segitiga pedal : $NM = AP \sin A \geq PX + PY$,
tetapi : $PX = p_c \cos (90^o - B)$ dan $PY = p_b \cos (90^o - C)$
dengan demikian, $NM \geq p_c \sin B + p_b \sin C$ berarti

$$AP \geq p_c \frac{\sin B}{\sin A} + p_b \frac{\sin C}{\sin A} \qquad AP \geq p_c \frac{AC}{BC} + p_b \frac{AB}{CB} \qquad BP \geq p_c \frac{BC}{AC} + p_a \frac{BA}{CA} \qquad CP \geq p_a \frac{CA}{BA} + p_b \frac{CB}{AB}$$

maka : $$AP + BP + CP \geq \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right) p_a + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB}\right) p_b + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC}\right) p_c$$

Selanjutnya, gunakan *AM – GM*, maka : $\boxed{AP + BP + CP \geq 2(p_a + p_b + p_c)}$

Cara lain pembuktian



Titik P, suatu titik didalam segitiga ABC dengan sisi a, b dan c
PP_A, PP_B, PP_C berturut-turut tegak lurus pada BC, CA dan AB

Misalkan PA = x, PB = y, PC = z
PP_A= p, PP_B = q, PP_c = r, maka :

$$(a)\quad x \geq \frac{qc}{a} + \frac{rb}{a}$$

$$(b)\quad x + y + z \geq 2(p + q + r)$$ yang disebut sebagai **<u>teorema Erdos Mordell</u>**

$$(c)\quad xyz \geq 8pqr$$

Bukti : AP adalah diameter dari lingkaran luar segitiga AP_BP_C

Karena AP_BPP_C = adalah cyclic, maka :

P_BP_C = AP sin A = x sin A

a. Dalam segitiga $PP_BP_C : \left(PP_{BC}\right)^2 = q^2 + r^2 + 2qr\cos A$ atau $x = \frac{\sqrt{q^2 + r^2 + 2qr\cos A}}{\sin A}$

Karena coa A = - cos (B + C), maka : $x = \frac{\sqrt{q^2 + r^2 - 2qr\cos(B + C)}}{\sin A}$

$$x = \frac{\sqrt{(q\sin C + r\sin B)^2 + (q\cos c - r\cos B)^2}}{\sin A} \geq q\sin C + r\sin B$$

Dari kaidah sinus : $\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a} dan \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$

Jadi : $x \geq \frac{qc}{a} + \frac{rb}{a}$ qed ....(i)

(b) Telah dibuktikan (a) ➔ (i) $x \geq \frac{qc}{a} + \frac{rb}{a}$

Analog $y \geq \frac{ra}{b} + \frac{pc}{b}$

$z \geq \frac{pb}{c} + \frac{qa}{c}$

$$x + y + z \geq p\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + q\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + r\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan AM-GM

$$\boxed{x + y + z \geq 2(p + q + r)}$$ qed

Tanda sama dipenuhi, jika a = b = c dan p = q = r, yang berarti segitiga ABC adalah segitiga sama sisi dengan O sebagai incentre

(c) $xyz \geq \frac{(qc + rb)(ra + pc)(pb + qa)}{abc}$ Gunakan AM-GM

$$xyz \geq \frac{8}{abc}\sqrt{(qc)(rb)}\sqrt{(ra)(pc)}\sqrt{(pl)(qa)} = 8prq\ldots$$ qed

G. Teorema Weitzenbock

Jika a, b dan c sisi sisi segitiga ABC dengan luas [ABC], maka :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\left[ABC\right]$$

Bukti :

Andaikan ABC adalah segitiga dengan a≥ b≥ c dan A_1 suatu titik sedemikian rupa sehingga A_1BC adalah segitiga sama sisi dengan sisi = a dan misalkan d = A_1A, maka :

$$d^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(B - 60\right) = a^2 + c^2 - 2ac\left[\cos B \cos 60 + \sin B \sin 60^o\right]$$

$$a^2 + c^2 - ac\cos B - 2\sqrt{3}\frac{ac\sin B}{2} = a^2 + c^2 - ac\left[\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right] - 2\sqrt{3}\left[ABC\right]$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2\sqrt{3}\left[ABC\right] \geq 0$$

jadi: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\left[ABC\right]$ qed

Tanda sama terjadi apabila a = b = c

H. Teorema PEDOE/Pedoe's inequality

Jika a_i, b_i, c_i sisi-sisi dari segitga A_i, B_i, C_i dengan luas Δ_i dimana i = 1, 2 ; maka :

$$a_1^2\left(b_2^2+c_2^2-a_2^2\right)+b_1^2\left(c_2^2+a_2^2-b_2^2\right)+c_1^2\left(a_2^2+b_2^2-c_2^2\right)\geq 16\Delta_1\Delta_2$$

yang disebut <u>pertaksamaan PEDOE</u>

Bukti :

$$a_1^2\left(b_2^2+c_2^2-a_2^2\right)+b_1^2\left(c_2^2+a_2^2-b_2^2\right)+c_1^2\left(a_2^2+b_2^2-c_2^2\right)-16\Delta_1\Delta_2=$$

$$2b_1^2c_2^2+2b_2^2c_1^2-\left(b_1^2+c_1^2-a_1^2\right)\left(b_2^2+c_2^2-a_2^2\right)-16\Delta_1\Delta_2=$$

$$2b_1^2c_2^2+2b_2^2c_1^2-\left(2b_1c_1\cos A_1\right)\left(2b_2c_2\cos A_2\right)-4b_1b_2c_1c_2\sin A_1\sin A_2=$$

$$2\left(b_1c_2-b_2c_1\right)^2+4b_1b_2c_1c_2\left[1-\cos\left(A_1-A_2\right)\right]\geq 0$$

Tanda sama dipenuhi, jika :

$$b_1c_2 = b_2c_1 \quad dan \quad \cos\left(A_1 - A_2\right) = 1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$b_1 : c_1 = b_2 : c_2 \quad dan \quad A_1 = A_2$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\ A_1B_1C_1\ dan\ \Delta\ A_2B_2C_2\ sebangun$$

Selanjutnya, apabila $a_2 = b_2 = c_2 = 1$, maka

Pedoe's Inequality $\Rightarrow$ Weitzenbock inequality

Melalui titik Fermat, dapat dibuktikan teorema Weitzenbock, sebagai berikut : Andaikan P titik Fermat dari segitiga ABC, dan misalkan PA = x, PB = y, PC = z, maka :

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos 120^0 = y^2 + z^2 + yz$$

$$b^2 = z^2 + x^2 + zx \quad dan$$

$$c^2 = x^2 + y^2 + xy$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \left(xy + yz + zx\right)$$

Mengingat : $x^2 + y^2 \geq 2xy$

$$y^2 + z^2 \geq 2yz$$

$$z^2 + x^2 \geq 2zx$$

$$2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq 2\left(xy + yz + zx\right)$$

Jadi, $a^2+b^2+c^2 \geq 3(xy+yz+zx)$

$$[ABC]=\tfrac{1}{2}xy\sin 120^o+\tfrac{1}{2}yz\sin 120^o+\tfrac{1}{2}zx\sin 120^o$$

atau, $xy+yz+zx=\dfrac{4[ABC]}{\sqrt{3}}$

Dengan demikian, $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}[ABC]$ *qed*

Dari teorema diatas, dapat dicari : x + y + z = ?

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

$$x+y+z=\sqrt{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}$$

Diperoleh : $x+y+z=\tfrac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}[ABC]\right)}$

Formulasi dari Heron yang diturunkan dari formulasi Brahmagupta, memberikan kontribusi yang cukup berarti bagi teorema Weitzenbock, yaitu :

$$[ABC]^2 = s(s-a)(s-b)(s-c); \quad \text{dimana } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

$$[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \sqrt{s.\left(\tfrac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3} = \frac{S^2}{3\sqrt{3}}$$

$$[ABC] \leq \tfrac{1}{3\sqrt{3}}\left(\tfrac{a+b+c}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3\sqrt{3}}\tfrac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)$$

$$[ABC] \leq \tfrac{1}{3\sqrt{3}}\tfrac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2\right)$$

$$[ABC] \leq \tfrac{1}{3\sqrt{3}}\tfrac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Dengan demikian $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}[ABC] qed$

Akhirnya, dengan menggunakan konsep yang mendasar dari kaidah Cosinus dan luas segitiga ABC, dapat melahirkan Weitzenbock inequality, sebagai berikut :

Diberikan segitiga ABC dengan a, b, c sebagai sisinya, maka :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, dan \left[ABC\right] = \tfrac{1}{2} bc \sin A$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(b^2 + c^2\right) - 2bc \cos A$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\left[ABC\right] &= 2\left(b^2 + c^2\right) - 2bc\, cosA - 4\sqrt{3}.\tfrac{1}{2} bc \sin A \\ &= 2\left(b^2 + c^2\right) - 4bc \left\{\tfrac{1}{2} cosA + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \sin A\right\} \\ &= 2\left(b^2 + c^2\right) - 4bc \left\{cos\left(\tfrac{\pi}{3} - A\right)\right\} \\ &\geq 2\left(b^2 + c^2\right) - 4bc \\ &\geq 2\left(b - c\right)^2 \geq 0 \cdots\cdots \quad qed \end{aligned}$$

Dengan demikian : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\left[ABC\right]$

SUPPLEMENT

1. Statement : A statement is a sentence expressed in words that is either true or false
2. Definition : A definition is a statement of the precise meaning of a word or phrase, a mathematical symbol or concept. Definition are like the soil in which a theory grows
3. Postulate/Axiom : Postulate or Axiom are statement accepted as true without proof.
4. Theorem : A theorem is a statement proven on the basis of definition, postulate/axiom and previously proven theorem.
5. Lemma : A lemma is a helping theorem or is a small theorem.
6. Corollary : A corollary is a consequence of a theorem or as " a by-product of another theorem