



Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Juni 2020 : Simulasi KSN Matematika SMA/MA 2020

Hari Pertama : 20 Juni 2020

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi \mathbb{N} menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi \mathbb{Z} menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi \mathbb{Q} menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi \mathbb{R} menyatakan himpunan semua bilangan riil.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \dots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x . Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 0$.
11. Notasi $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terkecil dari kumpulan bilangan real a_1, a_2, \dots, a_k . Sebagai contoh, $\min\{4, 1.5, 5\} = 1.5$, $\min\{3.5, \pi, 3, 4\} = 3$, $\min\{-5, 3\} = -5$, dan $\min\{1\} = 1$.
12. Notasi $\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terbesar dari kumpulan bilangan real a_1, a_2, \dots, a_k . Sebagai contoh, $\max\{4, 1.5, 5\} = 5$, $\max\{3.5, \pi, 3, 4\} = 4$, $\max\{-5, 3\} = 3$, dan $\max\{1\} = 1$.
13. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b .
14. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
15. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
16. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n .
17. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
18. Pada $\triangle ABC$:

- (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
 - (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
 - (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC .
 - (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A , garis berat dari titik B , dan garis berat dari titik C .
 - (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A , garis tinggi dari titik B , dan garis tinggi dari titik C .
 - (f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A , B , dan C .
 - (g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC , CA , dan AB .
19. Luas dari sebuah segi- n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.
20. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i+1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i . Contohnya, $3, 5, 7, 9, \dots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.
21. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan tak nol (bisa jadi 1) untuk setiap i . Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \dots$ merupakan barisan geometrik.
22. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{a+b}{2}$.
23. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah \sqrt{ab} .
24. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Hari Pertama

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Dyo dan Iqbal memainkan suatu permainan. Pada awalnya, Iqbal memilih sebuah bilangan riil, sebut saja a , kemudian dilanjutkan oleh Dyo dengan memilih sebuah bilangan riil lain, sebut saja b (bisa jadi $a = b$). Selanjutnya, Dyo membuat sebuah fungsi kuadrat, sebut saja $f(x) = x^2 + mx + n$, dan memberitahukannya kepada Iqbal, kemudian dilanjutkan oleh Iqbal dengan membuat sebuah fungsi kuadrat lain, sebut saja $g(x) = -x^2 + px + q$, dimana $\{m, n\} = \{p, q\} = \{a, b\}$. Sekarang, definisikan R_f adalah himpunan range dari fungsi f . Dari sini, Dyo dikatakan menang apabila $R_f \cap R_g \neq \emptyset$, sedangkan Iqbal dikatakan menang apabila $R_f \cap R_g = \emptyset$. Menurut Anda, siapakah yang memiliki strategi untuk memenangkan permainan? Jelaskan jawaban Anda.
2. Pada papan tulis, Megumin menulis bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6. Setiap saat, Megumin dapat memilih dua bilangan di papan, yaitu x dan y dengan $x > y$, dan menggantinya menjadi

$$\frac{xy}{x-y} \text{ dan } \frac{x}{2}.$$

Misalnya, Megumin dapat memilih 3 dan 5, lalu menggantinya menjadi $\frac{5 \cdot 3}{5-3} = \frac{15}{2}$ dan $\frac{5}{2}$.

- (a) Apakah suatu saat dapat muncul bilangan yang tidak lebih besar dari $\frac{2}{5}$?
 - (b) Apakah suatu saat dapat muncul bilangan yang tidak lebih besar dari $\frac{1}{2}$?
3. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f(m^2) + 2f(m)n + f(n)^2$$

merupakan bilangan asli kuadrat.

4. Diberikan segitiga ABC dengan $AB \neq AC$. Definisikan ω dan ω_A sebagai lingkaran dalam dan lingkaran singgung luar yang berhadapan dengan A dari segitiga ABC berturut-turut. Selanjutnya, definisikan titik I , E , dan I_A sebagai titik pusat ω , titik singgung ω_A dengan BC , dan titik pusat ω_A berturut-turut. Diketahui lingkaran luar segitiga ABC berpotongan dengan lingkaran Γ , yaitu lingkaran dengan diameter AI_A dan berpusat di titik tengah AI_A , di titik A dan X . Selanjutnya, diketahui titik Y adalah titik perpotongan garis EI_A dengan lingkaran Γ dimana $Y \neq I_A$. Sekarang, definisikan titik D pada BC sehingga $AD \perp BC$. Buktikan bahwa AD menyinggung lingkaran luar segitiga EXY jika dan hanya jika EI_A menyinggung ω .