TAHAP 1 IMO 2019

Budi Surodjo

Sesi 1, Senin 15 Oktober 2018

Soal Teori Bilangan

1. Pasangan bilangan bulat (m, n) yang memenuhi

$$12m^2 + 54m = n^2 + 11mn + 2n + 1996$$

adalah ...

2. Barisan aritmetika bilangan-bilangan asli yang memenuhi sifat perkalian tiga suku pertamanya sama dengan 2020 adalah ...

3. Diberikan bilangan prima p. Untuk semua bilangan asli m dan n berlaku operasi $*$ dengan aturan:

   (a) $(pm) * n = \frac{2}{p+1} + (m * n)$

   (b) $m^2 * n = n^2 * m$

   Jika $p^{10} * p^2 = \frac{p+21}{p+1}$, maka nilai $p * p$ adalah ...

4. Bilangan prima terkecil p sehingga dapat ditemukan bilangan prima q yang memenuhi

$$q^2 = 10p + 131$$

adalah .....

5. Jika $m = 2016^2 + 2^{2016}$, maka digit satuan dari

$$(m+1)^2 + 2^{\frac{m}{2}}$$

adalah ......

6. Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari x. Bilangan rasional negatif a dan b dikatakan *couple* jika memenuhi

$$\lfloor ab \rfloor^2 + \lfloor a+b-1 \rfloor^2 = 100$$

   Bilangan bulat terkecil N yang memenuhi

$$\lfloor a^2 + b^2 \rfloor \leq N$$

   untuk setiap couple a dan b adalah .....

7. Tentukan semua bilangan asli n yang memenuhi dua bilangan

$$n^2 + 4 \ \text{ dan } \ n^4 + 2n^2 + 3$$

   merupakan bilangan kubik!

8. Tentukan bilangan bulat-bilangan bulat

$$a_1, a_2, \ldots, a_{14}$$

   yang memenuhi

$$1 + a_1^{2016} + a_2^{2016} + \cdots + a_{14}^{2016} = 2016^{2017}.$$

9. Untuk setiap bilangan bulat positif n, $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400$. Jumlah semua nilai dari $f(n)$ yang merupakan bilangan prima adalah...

10. Tentukan semua bilangan bulat a, b dan c dengan $a, c \neq 0$ sedemikian sehingga fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan $g(x) = cx^2 + bx + a$ memenuhi

$$g(f(1)) = g(f(2)) = g(f(3))$$

11. Banyak pasangan bilangan bulat positif (a, b, c) dengan sifat $a < b < c \leq 2011$ yang memenuhi persamaan

$$2^a + 2^b = c^2$$

   adalah...

12. Bilangan asli terbesar $n \leq 123456$ sehingga terdapat bilangan asli x dengan sifat jumlah semua digit dari x^2 adalah n adalah...

13. Tentukan semua pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi $\frac{xy^2}{x+y}$ prima....

14. Diberikan bilangan asli 4-digit yang habis dibagi 7. Jika ditulis dengan urutan terbalik diperoleh bilangan 4-digit yang lebih besar dan habis dibagi 7. Selanjutnya, kedua bilangan asli tersebut jika dibagi 37 memiliki sisa pembagian yang sama. Tentukan bilangan tersebut!

Solusi

1. Tidak ada.

2. Tak ada yang memenuhi

   Karena $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, maka $101|u_1$ atau $101|u_3$.

   Jika $u_1 = k \cdot 101$, maka $u_1 + b \leq 20$ akibatnya $b \leq -81$, dan $u_3 \leq -61$ kontradiksi. Analog untuk kasus $101|u_3$.

3. 1.

4. 23

   Satuan q^2 harus 1, maka satuan q harus 1 atau 9. Bilangan prima q, di antaranya 11 atau 19. Untuk $q = 11$, berakibat p negatif. Untuk $q = 19$, maka $19^2 = 361$. Jadi $361 - 131 = 230$, diperoleh $p = 23$ bilangan prima.

5. 5

   Jika $n \equiv 0 \mod 4$, maka digit satuan 2^n adalah 6. Akibatnya satuan 2^{2016} adalah 6. Digit satuan 2016^2 adalah 6. Jadi digit satuan m diperoleh dari $6 + 6$ yaitu 2. Selain itu $8|m$, maka digit satuan $2^{\frac{m}{2}}$ adalah 6. Sehingga digit satuan dari $(m+1)^2 + 2^{\frac{m}{2}}$ diperoleh dari

   $$(m^2 + 2m + 1) + 6 = (2^2 + 2 \cdot 2 + 1) + 6 = 15 \to 5.$$

6. 37

   Dari asumsi karena untuk sebarang a dan b couple, $0 < ab$ dan $a + b < 0$, maka

   $(\lfloor ab \rfloor = 6 \text{ dan } \lfloor a+b-1 \rfloor = -8) \quad \text{atau} \quad (\lfloor ab \rfloor = 8 \text{ dan } \lfloor a+b-1 \rfloor = -6)$

   jadi

   $(6 \leq ab < 7 \text{ dan } -7 \leq a+b < -6) \text{ atau } (8 \leq ab < 9 \text{ dan } -5 \leq a+b < -4)$

   Berlaku

   $$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab < 49 - 2 \cdot 6 = 37$$

   akibatnya $\lfloor a^2 + b^2 \rfloor \leq 37$ untuk setiap couple.

7. $2016^{2017} - 1 \cong 15(\text{mod } 16)$

   Kasus $a = 2k$, maka

   $$a^{2016} = (a^4)^{504} = (16k^4)^{504} \cong 0(\bmod 16)$$

   Kasus $a = 2k + 1$, diperoleh

   $$a^{2016} = (a^4)^{504} \cong 1^{504} = 1(\bmod 16)$$

   Akibatnya

   $$a_1^{2016} + a_2^{2016} + \cdots + a_{14}^{2016} \preceq 14(\bmod 16)$$

   Tidak ada yang memenuhi.

8. $f(n) = (n^2 + 20n + 20)(n^2 - 20n + 20)$. Faktor yang pertama faktor kedua harus sama dengan satu. Hal ini dicapai untuk $n = 1\&19$. $f(1) + f(19) = 802$

9. $n = 2$

   Misalkan $n^2 + 4 = k^3$ dan $n^4 + 2n^2 + 3 = m^3$, maka

   $$(km)^3 = k^3m^3 = (n^2 + 4)(n^4 + 2n^2 + 3) = n^6 + 6n^4 + 11n^2 + 12 \qquad (1)$$

   Sedangkan

   $$(n^2 + 1)^3 = n^6 + 3n^4 + 3n^2 + 1 < n^6 + 6n^4 + 11n^2 + 12$$

   dan

   $$(n^2 + 2)^3 = n^6 + 6n^2 + 12n^2 + 8$$

   Jika $n > 4$, maka

   $$(n^2 + 1)^3 < n^6 + 6n^4 + 11n^2 + 12 < n^6 + 6n^2 + 12n^2 + 8 = (n^2 + 2)^3$$

   Karena $n^2 + 1$ dan $n^2 + 2$ berurutan, maka untuk $n > 4$ tidak mungkin Persamaan 1 terjadi.

   Untuk $n = 1 \Longrightarrow n^2 + 4 = 5$ bukan kubik
   Untuk $n = 2 \Longrightarrow n^2 + 4 = 8 = 2^3$ dan $n^4 + 2n^2 + 3 = 27 = 3^3$
   Untuk $n = 3 \Longrightarrow n^2 + 4 = 13$ bukan kubik
   Untuk $n = 4 \Longrightarrow n^2 + 4 = 20$ bukan kubik

10. Substitusi $x = 1, 2, 3$ ke $f(x)$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b + c \\ f(2) &= 4a + 2b + c \\ f(3) &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk sebarang $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$g(x) - g(y) = (cx^2 + bx + a) - (cy^2 + by + a) = (x - y)(cx + cy + b)$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} g(f(2)) - g(f(1)) &= (f(2) - f(1))(c(f(2) + cf(1) + b) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= (3a + b)(5ac + 3bc + 2c^2 + b) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} g(f(3)) - g(f(2)) &= (f(3) - f(2))(c(f(3) + cf(2) + b) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= (5a + b)(13ac + 5bc + 2c^2 + b). \end{aligned}$$

Ada 4 kasus yang mungkin terjadi.

- Jika $3a + b = 0$ dan $5a + b = 0$, maka diperoleh $a = 0$. (Bukan solusi yang dicari)
- Jika $3a + b = 0$ dan $13ac + 5bc + 2c^2 + b = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= 15ac + 5bc + 2c^2 - 3a - 2ac \\ \Leftrightarrow \quad 4c^2 - 4ac - 6a &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 4c^2 - 4ac + a^2 - a^2 - 6a - 9 &= -9 \\ \Leftrightarrow \quad (2c - a)^2 - (a + 3)^2 &= -9 \\ \Leftrightarrow \quad (2c + 3)(2c - 2a - 3) &= -9 \end{aligned}$$

Dapat dicek bahwa solusinya $(a, c) = (2, -1), (2, 3), (-8, -2), (-8, -6), (-6, -3)$. Jadi diperoleh (a, b, c) yang memenuhi adalah

$$(2, -6, -1), (2, -6, 3), (-8, 24, -2), (-8, 24, -6), (-6, 18, -3)$$

- Jika $5a + b = 0$ dan $5ac + 3bc + 2c^2 + b = 0$, maka diperoleh

$$\begin{array}{rcl} & 0 & = 5ac + bc + 2c^2 + b + 2bc \\ \Leftrightarrow & 4c^2 + 2b + 4bc & = 0 \\ \Leftrightarrow & 4c^2 + 4bc + b^2 - b^2 + 2b - 1 & = -1 \\ \Leftrightarrow & (2c - b)^2 - (b - 1)^2 & = -1 \\ \Leftrightarrow & (2c - 1)(2c - 2b + 1) & = -1 \end{array}$$

  Dapat dicek bahwa solusinya $(b, c) = (2, 1)$. Akan tetapi

$$0 = 5a + b = 5a + 2 \Leftrightarrow a = \frac{-2}{5}$$

  Tidak ada solusi pada kasus ini.

- Jika $13ac + 5bc + 2c^2 + b = 0$ dan $5ac + 3bc + 2c^2 + b = 0$, maka diperoleh

$$\begin{array}{rcl} & 13ac + 5bc + 2c^2 + b & = 5ac + 3bc + 2c^2 + b \\ \Leftrightarrow & 8ac + 2bc & = 0 \\ \Leftrightarrow & (4a + b)2c & = 0 \end{array}$$

  Karena $c \neq 0$ maka $4a + b = 0 \Leftrightarrow b = -4a$ .Akibatnya diperoleh

$$\begin{array}{rcl} & 0 & = 5ac + 3bc + 2c^2 + b \\ \Leftrightarrow & 0 & = 5ac - 12ac + 2c^2 - 4a \\ \Leftrightarrow & -7ac + 2c^2 - 4a & = 0 \\ \Leftrightarrow & 16c^2 - 56ac - 32a & = 0 \\ \Leftrightarrow & 16c^2 - 56ac + 49a^2 - 49a^2 - 32a & = 0 \\ \Leftrightarrow & (4c - 7a)^2 - (49a^2 + 32a) & = 0 \\ \Leftrightarrow & (28c - 49a)^2 - (49^2a^2 + 32.49a) & = 0 \\ \Leftrightarrow & (28c - 49a)^2 - (49a + 16)^2 & = -16^2 \\ \Leftrightarrow & (28c + 16)(28c - 98a - 16)^2 & = -16^2 \\ \Leftrightarrow & (7c + 4)(14c - 49a - 8) & = -32 \end{array}$$

Mudah dicek bahwa tidak ada bilangan bulat a, c yang memenuhi persamaan tersebut. Jadi pada kasus ini tidak ditemukan solusi.

Jadi solusinya adalah

$$(a, b, c) = (2, -6, -1), (2, -6, 3), (-8, 24, -2), (-8, 24, -6), (-6, 18, -3)$$

11. Perhatikan bahwa

$$c^2 = 2^a + 2^b = 2^a + 2^a 2^{b-a} = 2^a \left(1 + 2^{b-a}\right).$$

Kita dapat menuliskan c sebagai $c = 2^r d$ untuk suatu bilangan tak negatif r dan bilangan ganjil d, sehingga $2^{2r} d^2 = 2^a \left(1 + 2^{b-a}\right)$. Untuk ruas kiri 2^{2r} genap dan d^2 ganjil, sedang untuk ruas kanan 2^a genap dan $1 + 2^{b-a}$ ganjil. Dengan demikian, $2^{2r} = 2^a$ dan $d^2 = 1 + 2^{b-a}$, sehingga diperoleh $a = 2r$ dan $d^2 = 1 + 2^{b-a}$. Akan dicari nilai a, b, dan d yang memenuhi persamaan $d^2 = 1 + 2^{b-a}$. Perhatikan bahwa persamaan tersebut ekivalen dengan $2^{b-a} = d^2 - 1 = (d-1)(d+1)$ akibatnya $d - 1 = 2^x$ dan $d + 1 = 2^y$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif x, y dengan $x < y$ dan $x + y = b - a$. selanjutnya diperoleh $2^x \left(2^{y-x} - 1\right) = (d+1) - (d-1) = 2 = 2.1$. Dari sini kita simpulkan bahwa $x = 1$ dan $2^{y-x} - 1 = 1$ sehingga diperoleh $y = 2$ akibatnya $d = 3$ dan $b - a = x + y = 3$ atau dengan kata lain $b = a + 3$ dan karena sebelumnya sudah didapat bahwa $a = 2r$ maka $b = 2r + 3$. Dengan demikian diperoleh pasangan $(2r, 2r + 3, 3.2^r)$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif r. Sekarang perhatikan bahwa

$$2^{2r} + 2^{2r+3} = 2^{2r} \left(1 + 2^3\right) = 2^{2r}(9) = \left(3.2^r\right)^2,$$

sehingga pasangan ini merupakan solusi. Karena a positif maka $r > 0$, dan karena $c \leq 2011$ maka $3.2^r \leq 2011$ yang berakibat $r < 10$ sehingga $0 < r < 10$. Mudah dicek bahwa $3.2^r > 2r + 3 > 2r$ untuk $r > 0$, sehingga ada 9 solusi.

12. Selisih setiap bilangan dengan jumlah digit-digitnya habis dibagi 9, di lain pihak, sisa pembagian bilangan kuadrat oleh 9 adalah $0, 1, 4$, atau 7. Perhatikan bahwa 123456 bersisa 3 ketika dibagi 9, dengan demikian n terbesar yang mungkin adalah 123454 yakni bilangan yang bersisa 1 ketika dibagi 9 atau dengan kata lain dapat dinyatakan dalam bentuk $9k + 1$. Untuk

$x = \underbrace{199...9}_{9 \text{ sebanyak } k}$ kita punya

$$\begin{aligned} x^2 &= 199..9^2 \\ &= \left(2.10^k - 1\right)^2 \\ &= 4.10^{2k} - 4.10^k + 1 \\ &= \underbrace{399..9600..01}_{9 \text{ sebanyak } (k-1)} \end{aligned}$$

yang tentu saja berakibat bahwa jumlah semua digitnya adalah $9k + 1$. Dengan demikian, n terkecil yang dimaksud adalah 123454.

13. *58th Czech and Slovak Mathematical Olympiad, hal.3*

14. *58th Czech and Slovak Mathematical Olympiad, hal.10*

TEORI BILANGAN TAHAP 1 IMO 2019
SENIN 15 OKTOBER 2018, Sesi 2
Budi Surodjo

1. Diketahui $p_0 = 1$ dan p_i bilangan prima ke-i, untuk $i = 1, 2, \ldots$; yaitu $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ... Bilangan prima p_i dikatakan ***sederhana*** jika
$$p_i^{(n^2)} > p_{i-1}(n!)^4$$
untuk semua bilangan bulat positif n. Tentukan semua bilangan prima yang ***sederhana***!

2. Diketahui p bilangan prima dan $3p+10$ merupakan jumlahan kuadrat dari 6 bilangan asli berurutan. Benarkah $36|(p-7)$?

3. Tentukan banyaknya cara menyatakan $\frac{2011}{2012}$ sebagai perkalian dua bilangan rasional yang berbentuk $\frac{n}{n+1}$, dengan n adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 2012.

4. Tunjukkan, bahwa terdapat tak hingga banyak bilangan asli m sehingga banyaknya faktor prima berbeda dari $(m(m+3)$ merupakan kelipatan 3.

5. Jika a, b, c, d adalah empat bilangan asli berbeda, maka nilai minimal dari
$$(a-b+c-d)^2 - (a-c)(b-d)$$
adalah ...

6. Diberikan barisan $a_1, a_2, \ldots$ dengan
$$a_n = \frac{1}{n}(\lfloor\frac{n}{1}\rfloor + \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \cdots \lfloor\frac{n}{n}\rfloor)$$
untuk semua $n \geq 1$. Buktikan bahwa $a_{n+1} > a_n$ untuk tak hingga banyak n dan tentukan kapan $a_{n+1} < a_n$ untuk tak hingga banyak n.

7. Banyaknya pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi $0 \leq a \leq b \leq 2012$ dan
$$FPB\left(\binom{2012}{a}, \binom{2012}{b}\right) = 1$$
adalah ...

8. Diketahui $k > 2$ bilangan bulat. Bilangan asli m dikatakan k-pable jika bilangan-bilangan $1, 3, 5, \ldots 2k-1$ dapat dipartisi ke dalam dua subhimpunan A dan B sehingga jumlah elemen-elemen A besarnya tepat m kali jumlah elemen-elemen B. Tunjukkan bahwa bilangan k-pable terkecil relatif prima dengan k.

9. Nilai k terkecil, sehingga jika sembarang k bilangan dipilih dari $\{1, 2, \ldots, 30\}$, selalu dapat ditemukan 2 bilangan yang hasil kalinya merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah ...

10. Diketahui x_1, x_2 adalah dua bilangan bulat berbeda yang merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2+px+q+1 = 0$. Jika p dan p^2+q^2 adalah bilangan-bilangan prima, maka nilai terbesar yang mungkin dari $x_1^{2012} + x_2^{2012}$ adalah ...

11. Sebuah dadu dilempar dua kali. Misalkan a, b berturut-turut adalah angka yang muncul pada pelemparan pertama dan kedua. Tentukan peluang bahwa terdapat bilangan real x, y, z yang memenuhi persamaan

$$x + y + z = a \text{ dan } x^2 + y^2 + z^2 = b.$$

Solusi

1. Semua bilangan prima $p \geq 3$

   Untuk $p = 2$ tidak memenuhi, sebab untuk $n = 2$, $2^{(2^2)} = 16 = 1(2!)^4$.

   Misalkan $p_i \geq 3$. Untuk $n = 1$, $p_i^{(n^2)} = p_i^1 > p_{i-1} = p_{i-1}(1!)^4 = p_{i-1}(n!)^4$.

   Andaikan pernyataan benar untuk n, yaitu $p_i^{(n^2)} > p_{i-1}(n!)^4$. Akibatnya, membuktikan
   $$p_i^{n^2} p_i^{2n+1} = p_i^{((n+1)^2)} > p_{i-1}(n+1)!)^4 = (p_{i-1}(n!)^4)(n+1)^4$$
   cukup membuktikan $p_i^{2n+1} \geq 3^{2n+1} \geq (n+1)^4$.

   Sifat: Untuk semua bilangan asli n berlaku $3^{2n+1} \geq (n+1)^4$. **Perlu bukti sendiri, tapi dalam teks 2009 ada** Semua bilangan prima $p \geq 3$

   Untuk $p = 2$ tidak memenuhi, sebab untuk $n = 2$, $2^{(2^2)} = 16 = 1(2!)^4$.

   Misalkan $p_i \geq 3$. Untuk $n = 1$, $p_i^{(n^2)} = p_i^1 > p_{i-1} = p_{i-1}(1!)^4 = p_{i-1}(n!)^4$.

   Andaikan pernyataan benar untuk n, yaitu $p_i^{(n^2)} > p_{i-1}(n!)^4$. Akibatnya, membuktikan
   $$p_i^{n^2} p_i^{2n+1} = p_i^{((n+1)^2)} > p_{i-1}(n+1)!)^4 = (p_{i-1}(n!)^4)(n+1)^4$$
   cukup membuktikan $p_i^{2n+1} \geq 3^{2n+1} \geq (n+1)^4$.

   Sifat: Untuk semua bilangan asli n berlaku $3^{2n+1} \geq (n+1)^4$. **Perlu bukti sendiri, tapi dalam teks 2009 ada**

2. Macedonia Math. Olympiads 2017, hal 3

3. Misalkan
   $$\frac{2011}{2012} = \frac{m}{m+1} \times \frac{n}{n+1}$$
   untuk suatu $m, n > 2012$.
   maka diperoleh
   $$\begin{aligned} & 2011(m+1)(n+1) &&= 2012mn \\ \Leftrightarrow\ & mn - 2011m - 2011n &&= 2011 \\ \Leftrightarrow\ & mn - 2011m - 2011n + 2011^2 &&= 2011^2 + 2011 \\ \Leftrightarrow\ & (m-2011)(n-2011) &&= 2011.2012 = 2^2.503.2011 \end{aligned}$$

   Misalkan $a = m - 2011, b = n - 2011$, maka $a, b > 1$ dan $ab = 2012.2011$.
   Banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi ada sebanyak banyaknya faktor positif dari 2012.2011 selain 1 dan 2011.2012, yaitu ada $3 \times 2 \times 2 - 2 = 10$.
   Karena $(a, b), (b, a)$ memberikan himpunan $\{m, n\}$ yang sama, maka diperoleh banyaknya

cara menyatakan $\frac{2011}{2012}$ sebagai perkalian dua bilangan rasional ada $\frac{1}{2} \times 10 = 5$. Jadi banyaknya cara ada 5.

Catatan:
$\frac{m}{m+1} \times \frac{n}{n+1}$ dan $\frac{n}{n+1} \times \frac{m}{m+1}$ dianggap sama.

4. Italian Math. Contests 2016/2017, hal 14

5. Jika a, b, c, d adalah empat bilangan asli berbeda, maka nilai minimal dari

$$(a - b + c - d)^2 - (a - c)(b - d)$$

adalah ...

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
& (a - b + c - d)^2 - (a - c)(b - d) && = (a - b)^2 + (c - d)^2 + (a - c)(b - d) \\
& && = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - da \\
\Leftrightarrow \quad & 2((a - b + c - d)^2 - (a - c)(b - d)) && = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - da) \\
& && = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2
\end{aligned}$$

Misalkan N adalah nilai minimal dari

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2.$$

Karena $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 \geq 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$ dan genap, maka N adalah bilangan genap yang lebih besar atau sama dengan 4.

- Jika $N = 4$, maka $N = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Artinya $\{(a - b)^2, (b - c)^2, (c - d)^2, (d - a)^2\} = \{1, 1, 1, 1\}$. Karena $(a - b) + (b - c) + (c - d) + (d - a) = 0$, maka diperoleh $\{(a - b), (b - c), (c - d), (d - a)\} = \{-1, -1, 1, 1\}$. Akibatnya selisih sebarang 2 bilangan di $\{a, b, c, d\}$ maksimal 2. Padahal a, b, c, d adalah 4 bilangan berbeda, sehingga selisihnya minimal 3(kontradiksi).
  Jadi tidak mungkin $N = 4$.
- Jika $N = 6$, maka
  $$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4 < N < 7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2.$$
  Tidak ada a, b, c, d yang memenuhi. Jadi tidak mungkin $N = 6$.
- Jika $N = 8$, maka
  $$2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 7 < N < 10 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2.$$
  Tidak ada a, b, c, d yang memenuhi. Jadi tidak mungkin $N = 8$.
- Jika $N = 10$, dipilih $a = 1, b = 3, c = 4, d = 2$, maka diperoleh
  $$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 = 10$$

Jadi $N = 10$. Akibatnya diperoleh nilai minimal dari $(a-b+c-d)^2-(a-c)(b-d)$ adalah $\frac{N}{2} = 5$.

6. BMO 2016/2017,hal 24

7. Banyaknya pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi $0 \leq a \leq b \leq 2012$ dan

$$FPB\left(\binom{2012}{a}, \binom{2012}{b}\right) = 1$$

adalah ...
Perhatikan bahwa

- Jika $a = b$, maka

$$1 = FPB\left(\binom{2012}{a}, \binom{2012}{b}\right) = \binom{2012}{a}$$

Nilai a yang memenuhi adalah $a = 0$ atau $a = 2012$. Jadi pasangan (a, b) yang memenuhi pada kasus ini ada 2 yaitu $(0, 0), (2012, 2012)$.

- Jika $a = 0, 0 < b < 2012$, maka

$$1 = FPB\left(\binom{2012}{0}, \binom{2012}{b}\right) = FPB\left(1, \binom{2012}{b}\right)$$

Nilai b yang memenuhi adalah $b = 1, 2, \ldots, 2011$. Jadi pasangan (a, b) yang memenuhi pada kasus ini ada 2011 yaitu $(0, 1), (0, 2) \ldots, (0, 2011)$.

- Jika $0 < a < 2012, b = 2012$, maka

$$1 = FPB\left(\binom{2012}{a}, \binom{2012}{2012}\right) = FPB\left(\binom{2012}{a}, 1\right)$$

Nilai a yang memenuhi adalah $a = 1, 2, \ldots, 2011$. Jadi pasangan (a, b) yang memenuhi pada kasus ini ada 2011 yaitu $(1, 2012), (2, 2012) \ldots, (2011, 2012)$.

- Jika $a = 0, b = 2012$, maka

$$FPB\left(\binom{2012}{a}, \binom{2012}{b}\right) = FPB\left(\binom{2012}{0}, \binom{2012}{2012}\right) = FPB(1, 1) = 1$$

Jadi $(a, b) = (0, 2012)$ merupakan solusi.

- Jika $0 < a < b < 2012$, maka diperoleh

$$\binom{2012}{a} = \frac{2012.2011\ldots(b+1)}{(2012-a)\ldots(b-a+1)}\binom{b}{a} > \binom{b}{a}.$$

Perhatikan bahwa

$$\binom{2012}{a}\binom{2012-a}{b-a} = \frac{2012!}{a!(b-a)!(2012-b)!} = \binom{2012}{b}\binom{b}{a}.$$

Jika $FPB\left(\binom{2012}{a}, \binom{2012}{b}\right) = 1$, maka $\binom{2012}{a}$ dan $\binom{2012}{b}$ saling relatif prima . Akibatnya $\binom{2012}{a}$ membagi $\binom{b}{a}$.(Tidak mungkin). Jadi tidak ada solusi pada kasus ini.

Jadi banyaknya solusi ada $2 + 2011 + 2011 + 1 = 4025$

8. 55^{th} Dutch Math. Olym 2016, hal 29

9. Dibentuk 19 himpunan sebagai berikut:
$\{1, 4, 9, 16, 25\}, \{2, 8, 18\}, \{3, 12, 27\}, \{5, 20\}, \{6, 24\}, \{7, 28\}, \{10\}, \{11\}, \{13\}, \{14\}$, $\{15\}, \{17\}, \{19\}, \{21\}, \{22\}, \{23\}, \{26\}, \{29\}, \{30\}$.
Pada setiap himpunan di atas, perkalian setiap dua anggota di dalam himpunan tersebut , merupakan bilangan kuadrat sempurna. Akibatnya jika $k = 20$, untuk sebarang 20 bilangan dari $\{1, 2, \ldots, 30\}$, menurut PHP terdapat dua bilangan di dalam himpunan yang sama, yang berakibat perkaliannya merupakan bilangan kuadrat sempurna. Jika $k < 20$, maka untuk sebarang k bilangan anggota dari $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30\}$, tidak ada dua bilangan di antaranya yang perkaliannya merupakan bilangan kuadrat. Jadi nilai k terkecil yang memenuhi adalah 20.

10. Diketahui x_1, x_2 adalah dua bilangan bulat berbeda yang merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2+px+q+1 = 0$. Jika p dan p^2+q^2 adalah bilangan-bilangan prima, maka nilai terbesar yang mungkin dari $x_1^{2012} + x_2^{2012}$ adalah ...

Solusi:
Karena x_1, x_2 akar-akar dari $x^2 + px + q + 1 = 0$, maka diperoleh $x_1 + x_2 = -p$ dan $x_1x_2 = q + 1$. Didapat

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 1 \\ &= (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \end{aligned}$$

Karena $p^2 + q^2$ bilangan prima, maka haruslah salah satu dari x_1, x_2 sama dengan nol. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x_1 = 0$.
Oleh karena x_1 akar dari $x^2 + px + q + 1 = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} & x_1^2 + px_1 + q + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & q + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & q &= -1 \end{aligned}$$

.

Akibatnya didapat p dan $p^2 + 1$ adalah bilangan-bilangan prima. Jika p bilangan prima ganjil , maka $p^2 + 1$ adalah bilangan genap > 2 (bukan bilangan prima). Jika $p = 2$, jelas $p, p^2 + 1$ adalah bilangan-bilangan prima.
Jadi nilai p yang mungkin hanya $p = 2$. Akibatnya diperoleh kemungkinan akar-akar dari persamaan $x^2 + px + q + 1 = 0$ adalah $(x_1, x_2) = (0, -2)$ atau $(x_1, x_2) = (-2, 0)$.
Jadi nilai terbesar dari $x_1^{2012} + x_2^{2012}$ adalah 2^{2012}.

11. Substitusi z pada persamaan pertama ke persamaan kedua diperoleh

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+(a-x-y)^2 &&= b\\ \Leftrightarrow\ & x^2+y^2+a^2+x^2+y^2-2ax-2ay+2xy &&= b\\ \Leftrightarrow\ & 2x^2+(2y-2a)x+(2y^2-2ay+a^2-b) &&= 0 \end{aligned}$$

Persamaan di atas memiliki solusi real x jika dan hanya jika determinannya non-negatif, yaitu

$$\begin{aligned} & (2y-2a)^2-8(2y^2-2ay+a^2-b) &&\geq 0\\ \Leftrightarrow\ & 4y^2-8ay+4a^2-16y^2+16ay-8a^2+8b &&\geq 0\\ \Leftrightarrow\ & -12y^2+8ay+(8b-4a^2) &&\geq 0 \end{aligned}$$

Akibatnya jika persamaan $-12y^2+24ay+(8b-4a^2)=0$ mempunyai solusi y real, maka persamaan $2x^2+(2y-2a)x+(2y^2-2ay+a^2-b)=0$ juga punya solusi x real.

Perhatikan persamaan $-12y^2+24ay+(8b-4a^2)=0$ mempunyai solusi y real jika dan hanya jika determinannya non-negatif yaitu

$$64a^2-192a^2+384=128(3b-a^2)\geq 0 \Leftrightarrow a^2\leq 3b.$$

Lalu akan ditunjukkan bahwa jika $3b-a^2<0$, maka $-12y^2+8ay+(8b-4a^2)\geq 0$ tidak memiliki solusi y real.
Jika $3b-a^2<0$, oleh karena koefisien y^2 negatif maka kurva persamaan kuadrat $f(y)=-12y^2+24ay+(8b-4a^2)$ berada di bawah sumbu x yang berarti $-12y^2+24ay+(8b-4a^2)<0$ untuk setiap $y\in\mathbb{R}$. Artinya $-12y^2+8ay+(8b-4a^2)\geq 0$ tidak memiliki solusi y real.

Jadi persamaan

$$x+y+z=a \text{ dan } x^2+y^2+z^2=b.$$

memiliki solusi x,y,z real jika dan hanya jika $a^2\leq 3b$.

Perhatikan bahwa karena $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$, maka solusi dari $a^2\leq 3b$ adalah $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5)$,$(3,6),(4,6)$ (ada 16 solusi).
Jadi peluang persamaan

$$x+y+z=a \text{ dan } x^2+y^2+z^2=b.$$

memiliki solusi x,y,z real adalah $\dfrac{16}{36}=\dfrac{4}{9}$.

TEORI BILANGAN TAHAP 1 IMO 2019
SENIN 15 OKTOBER 2018, Sesi 3
Budi Surodjo

1. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi $f(k+1) > f(f(k))$ untuk semua $k \geq 1$

2. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ yang memenuhi $f(1) = 2$ dan untuk semua $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ berlaku $min(2m+2n, f(m+n)+1)$ habis dibagi $max(f(m)+f(n), m+n)$.

3. Diberikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ dengan

   (a) $f(p) = 1$ untuk setiap bilangan prima p dan

   (b) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ untuk setiap x, y.

   Tentukan bilangan asli terkecil $n \geq 2016$ yang memenuhi $f(n) = n$.

4. Diberikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi

   $$f(f(m) + f(n)) = m + n$$

   untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan k-faktorial

   $$F_k(n) = n(n-k)(n-2k)\cdots r$$

   dengan $1 \leq r \leq k$ dan $n \equiv r (\text{mod } k)$. Tentukan semua n yang memenuhi

   $$F_{20}(n) + f(2009)$$

   merupakan kuadrat bilangan bulat!

5. Fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dikatakan *loggy* jika memenuhi kondisi:

   1. $f(xy) \equiv f(x) + f(y) \pmod 8$ untuk semua x, y yang tidak habis dibagi 17
   2. $f(x + 17) \equiv f(x)$ untuk semua x.

   (a) Apakah terdapat fungsi loggy yang memenuhi $f(2) = 1$? Jelaskan dengan bukti.

   (b) Apakah terdapat fungsi loggy yang memenuhi $f(3) = 1$? Jelaskan dengan bukti.

Solusi

1. $f(k) = k$. Singapore Math Olym
2. 55rd Dutch Math. Olym 2016, 19
3. 53rd Dutch Math Olymp. 2014
4. Akan ditunjukkan $f(n)$ bilangan kuadrat sempurna jika dan hanya jika $n = 2^k + k - 2$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$. Misalkan $n_k = 2^k + k - 2$. Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $f(n_k) = (2^{k-1})^2$ dan jika $n_{k-1} < m < n_k$ maka $f(m)$ bukan kuadrat sempurna. Pernyataan benar untuk kasus $k = 1$. Dengan induksi dapat diperoleh
$$f(n_k + 2i) = (2^{k-1} + 1 - i)^2 + 2k$$
dan
$$f(n_k + 2i + 1) = (2^{k-1} + i)^2 - i$$
untuk $0 \leq i \leq 2^{k-1}$. Jika $i = 2^{k-1}$, diperoleh $f(n_{k+1}) = (2^k)^2$.

   Akibatnya diperoleh bilangan asli $n \leq 2014$ terbesar sehingga $f(n)$ bilangan kuadrat sempurna adalah $2^{10} + 10 - 2 = 1016$.
5. Irish Math Olym
6. Ireland 2017

TEORI BILANGAN IMO 2019
Tahap 1 Selasa 16 Oktober 2018
Budi Surodjo

1. Untuk sebarang bilangan prima p, barisan $\{b_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ dikatakan **naik tingkat**-p jika
$$b_n < b_{i+1} \quad \text{dan} \quad b_{pn} = pb_n$$
untuk semua n. Buktikan jika $\{b_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ naik tingkat-p, maka untuk sebarang bilangan prima $q > (p-1)b_1$, kelipatan q muncul pada sejumlah suku barisan $\{b_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$.

2. Misalkan barisan bilangan bulat $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ memenuhi sifat untuk setiap $n \leq 672$ bilangan $\sum_{i=1}^{1000} a_i^n$ merupakan kelipatan 2017. Buktikan bahwa masing-masing bilangan $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ merupakan kelipatan 2017.

3. Bilangan asli n dikatakan "*kuat*" jika terdapat bilangan asli x sehingga $x^{nx} + 1$ habis dibagi 2^n.

   (a) Tunjukkan bahwa 2013 merupakan bilangan kuat.

   (b) Jika n adalah bilangan kuat, tentukan bilangan asli terkecil x sehingga $x^{nx} + 1$ habis dibagi 2^n.

4. Bilangan rasional positif x dan y memenuhi persamaan
$$\frac{x+2}{y+2} + \frac{y+2}{x+2} = 3 - xy.$$
Buktikan bahwa dalam bentuk pecahan paling sederhana, penyebut dari x dan y merupakan bilangan kuadrat sempurna.

5. Diberikan bilangan asli a, b, c yang memenuhi
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2c}. \tag{1}$$
Buktikan bahwa bilangan $a + b + c$ komposit.

6. Misalkan $p > 3$ adalah sebuah bilangan prima, dan misalkan $S = \{2, 3, \ldots, p-1\}$. Jika
$$X = \sum_{i<j<k \in S} ijk$$
Buktikan bahwa $X + 1$ habis dibagi p.

SOLUSI

1. Karena $b_n < b_{n+1}$, maka $b_{n+1} - b_n \geq 1$ untuk masing-masing n. Akibatnya terdapat bilangan asli t sehingga

$$t = \min\{b_{n+1} - b_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$$

dan terdapat bilangan asli m, yang memenuhi $b_{m+1} - b_m = t$. Ambil k bilangan asli yang memenuhi $p^k > q$. Akibatnya

$$\begin{aligned} b_{p^k(m+1)} - b_{p^k m} &= p(b_{p^{k-1}(m+1)} - b_{p^{k-1}m}) \;=\; \cdots \\ &= p^{k-1}(b_{p(m+1)} - b_{pm}) \;=\; p^k(b_{m+1} - b_m) \;=\; p^k t \end{aligned}$$

Diketahui t bilangan terkecil, dan $t \leq b_{n+1} - b_n$ untuk semua n, dengan $p^k m \leq n \leq p^k(m+1) - 1$. Akibatnya

$$b_{n+1} - b_n = t, \; \forall p^k m \leq n \leq p^k(m+1) - 1$$

Sehingga

$$b_{p^k m}, b_{p^k m+1}, \ldots, b_{p^k(m+1)}$$

membentuk barisan aritmetika dengan beda t.

Selanjutnya jika terdapat $0 \leq i < j \leq q - 1$, yang memenuhi

$$b_{p^k m+i} \equiv b_{p^k m+j} \pmod q$$

maka

$$b_{p^k m+j} - b_{p^k m+i} = (j - i)t = zq$$

untuk suatu bilangan bulat z. Di sisi lain $0 < j - i < p$ dan

$$0 < t \leq b_2 - b_1 = b_{2.1} - b_1 = (p - 1)b_1 < q$$

sehingga $j - 1 = 1 = t$ atau $1 \neq (j - 1)|q$ atau $1 \neq t|q$. Kontradiksi dengan q prima. Akibatnya

$$b_{p^k m}, b_{p^k m+i}, \ldots, b_{p^k m+q-1}$$

jika dibagi q akan memiliki sisa berbeda semua. Akibatnya terdapat $b_{p^k m+j}$ yang merupakan kelipatan dari q, untuk suatu $0 \leq j \leq q - 1$. Bukti selesai.

2. PR.

3. (a) Perhatikan bahwa $x^{2013x} + 1$ habis dibagi $x + 1$ untuk x ganjil. Pilih $x = 2^{2013} - 1$ maka $x + 1 = 2^{2013}$ habis membagi $x^{2013x} + 1$ yang berarti bahwa 2013 adalah bilangan kuat.

(b) Agar $x^{nx}+1$ habis dibagi 2^n maka haruslah x ganjil. Perhatikan pemfaktoran

$$x^{nx}+1=(x^n+1)\left(x^{n(x-1)}-x^{n(x-2)}+x^{n(x-3)}-\ldots-x^n+1\right),$$

karena x ganjil maka $x^{n(x-1)}-x^{n(x-2)}+x^{n(x-3)}-\ldots-x^n+1$ juga ganjil sehingga $2^n|x^n+1$. Sekarang, perhatikan bahwa jika n genap maka $x^n\equiv 1 \text{mod } 4$, sehingga $x^n+1\equiv 2 \text{mod } 4$ artinya 2^n tidak mungkin habis membagi x^n+1. Dengan demikian, jika n kuat maka n harus ganjil sehingga

$$x^n+1=(x+1)\left(x^{n-1}-x^{n-2}+\ldots-x+1\right)$$

habis dibagi 2^n. Karena n ganjil maka $(x^{n-1}-x^{n-2}+\ldots-x+1)$ juga ganjil sehingga $2^n|x+1$. Dengan demikian, x terkecil yang mungkin adalah $x=2^n-1$.

4. Karena kesimetrian, cukup dibuktikan untuk x saja. Misalkan $a=x+2$, $b=y+2$,

$$\begin{aligned}1 &= \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+(a-2)(b-2)-2=\frac{a^2+b^2}{ab}+2+ab-2(a+b)\\ &= \frac{(a^2+b^2+2ab)+(ab)^2-2ab(a+b)}{ab}=\frac{(ab-a-b)^2}{ab}\end{aligned} \tag{2}$$

dan $ab-a-b=(x+2)(y+2)-(x+2)-(y+2)=x+y+xy>0$.

Jadi dari (2), diperoleh $\sqrt{ab}=ab-a-b$. Samakan penyebut a dan b, yakni tulis $a=p/n$ dan $b=q/n$ dengan $p,q,n\in\mathbb{N}$, diperoleh $\sqrt{pq/n^2}=pq/n^2-p/n-q/n$ yang ekivalen dengan $\sqrt{pq}=pq/n-p-q\in\mathbb{Q}$. Dengan demikian, pq kuadrat sempurna. Misalkan $\gcd(p,q)=r$, maka $p=rs^2$ dan $q=rt^2$ dengan s,t bilangan asli relatif prima dan

$$rst=\sqrt{pq}=\frac{pq}{n}-p-q=\frac{r^2s^2t^2}{n}-rs^2-rt^2$$

yang ekivalen dengan $n=rs^2t^2/(s^2+t^2+st)$.

Selanjutnya, dari $x=a-2=p/n-2$, substitusi dalam r,s,t diperoleh

$$x=rs^2\cdot\frac{s^2+t^2+st}{rs^2t^2}-2=\frac{s^2+t^2+st}{t^2}-2=\frac{s^2+st-2t^2}{t^2}. \tag{3}$$

Cukup dibuktikan bahwa bentuk (3) adalah pecahan paling sederhana (Ingat bahwa s,t relatif prima). Andaikan belum, maka ada bilangan prima $p\geq 2$ yang membagi $\gcd(t^2,s^2+st-2t^2)$. Karena $p\,|\,t^2$, maka $p\,|\,t$ dan karena $p\,|\,s^2+t(s-2t)$, maka $p\,|\,s^2$ sehingga $p\,|\,s$. Jadi, p membagi $\gcd(s,t)=1$, suatu kontradiksi! Jadi, dalam bentuk pecahan paling sederhana, penyebut dari x adalah t^2 dan kita selesai.

5. Dari kesamaan (1) kita mempunyai $c=ab/2(a+b)$. Jadi,

$$a+b+c=a+b+\frac{ab}{2(a+b)}=\frac{2a^2+5ab+2b^2}{2(a+b)}=\frac{(2a+b)(a+2b)}{2(a+b)}.$$

Seandainya ini prima, yakni $(2a+b)(a+2b) = 2(a+b)p$ dengan p prima, maka $p \mid 2a{+}b$ atau $p \mid 2b{+}a$. Tanpa mengurangi keumuman, $p \mid 2a{+}b$. Karena $(2a{+}b)/p = 2(a+b)/(a+2b)$, maka $a+2b \mid 2(a+b)$. Namun ini tidak mungkin terjadi karena $1 < 2(a+b)/(a+2b) < 2$. Jadi pengandaian kita salah dan kita selesai.

Solusi 2: Perhatikan bahwa kesamaan (1) ekivalen dengan $(a+b)/a = b/2c$. Misalkan p/q adalah bentuk pecahan paling sederhana dari bilangan tersebut. Dari $(a+b)/a = p/q$ diperoleh $a+b = pm$, $a = qm$ dengan $m \in \mathbb{N}$ sementara dari $b/2c = p/q$ diperoleh juga $b = pn$, $2c = qn$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Jadi,

$$2(a+b+c) = (a+b) + a + b + 2c = pm + qm + pn + qn = (p+q)(m+n).$$

Sekarang dari $a+b$ lebih dari a dan b, maka pm lebih dari qm dan pn, yakni $p > q$ dan $m > n$. Akibatnya, $p+q \geq 3$ dan $m+n \geq 3$. Tidak mungkin $2(a+b+c) = (p+q)(m+n)$ berbentuk $2r$ dengan r prima. Dengan kata lain, $a+b+c$ komposit dan kita selesai.

Solusi 3: Tulis kesamaaan (1) sebagai $2c = ab/(a+b)$. Dengan demikian, $a+b \mid ab$. Sekarang misalkan $d = \gcd(a,b)$ dan tulis $a = dm$, $b = dn$ dengan $\gcd(m,n) = 1$. Dengan ini, $d(m+n) \mid d^2mn$ sehingga $m+n \mid dmn$. Dari $\gcd(m,n) = 1$, diperoleh $\gcd(m+n,m) = \gcd(m+n,n) = 1$, sehingga $m+n \mid d$. Tulis $d = k(m+n)$, diperoleh $a = dm = km(m+n)$ dan $b = kn(m+n)$. Selanjutnya,

$$2c = \frac{ab}{a+b} = \frac{d^2mn}{d(m+n)} = \frac{dmn}{m+n} = kmn$$

yang berakibat bilangan

$$\begin{aligned} a+b+c &= km(m+n) + kn(m+n) + \frac{kmn}{2} = \frac{1}{2}k\left(2m^2 + 5mn + 2n^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k\,(2m+n)\,(m+2n) \end{aligned}$$

komposit karena $2m+n$ dan $m+2n$ lebih dari atau sama dengan 3. Kita selesai.

6. Karena p ganjil, misalkan $p = 2m+1$.

   Pertama kita hitung $2^2 + \cdots + (p-1)^2 \pmod p$. Perhatikan bahwa $1^2 = (p-1)^2 \pmod p, 2^2 = (p-2)^2 \pmod p$ dan seterusnya. Setiap suku akan mempunyai "pasangan" nya masing-masing, sehingga jumlahnya adalah:

$$1^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 + \cdots + (p-1)^2$$
$$\equiv 2(1 + \cdots + m^2) \pmod p$$
$$\equiv m(m+1)(2m+1)/3 \equiv 0 \pmod p$$

   sebab $2m+1 = p$ dan p relatif prima terhadap 3. Berarti $2^2 + \cdots + (p-1)^2 \equiv -1 \pmod p$

Sekarang kita hitung $2^3 + \cdots + (p-1)^3 \pmod p$. Perhatikan bahwa $p = 1 + (p-1) | 1^3 + (p-1)^3, p = 2 + (p-2) | 2^3 + (p-2)^3$ dan seterusnya. Sehingga $1^3 + \cdots + (p-1)^3 \equiv 0 \pmod p$, sehingga $2^3 + \cdots + (p-1)^3 \equiv -1 \pmod p$.

Kita juga punya $1 + \cdots + (p-1) \equiv 0 \pmod p$, sehingga $2 + \cdots + (p-1) \equiv -1 \pmod p$. Dari sini kita dapatkan:

$$2 \sum_{i<j\in S} ij \equiv (-1)^2 - (-1) \equiv 2 \pmod p$$

$$\sum_{i<j\in S} ij \equiv 1 \pmod p$$

sebab p ganjil.

Sekarang, untuk sembarang bilangan real $a_1, \ldots, a_n$, kita definisikan variabel-variabel berikut ini:

$$A = a_1 + \cdots + a_n$$
$$B = \sum_{i<j} a_i a_j$$
$$C = \sum_{i\neq j} a_i^2 a_j$$
$$D = \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k$$
$$E = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$
$$F = a_1^3 + \cdots + a_n^3$$

Maka kita punya identitas sebagai berikut:

$$AB = (a_1 + \cdots + a_n)(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n) = C + 3D$$

Identitas tengah ke kanan berlaku sebab untuk setiap a_i di A akan dikalikan entah dengan a_ia_j atau a_ja_k di B. Jika dikalikan dengan a_ia_j maka akan termasuk dalam C, namun jika tidak, maka akan termasuk dalam $3D$. Demikian pula sebaliknya, setiap suku di C and $3D$ dapat di identifikasi sumbernya dari perkalian AB. Setiap suku $a_i^2a_j$ di C diperoleh dari a_i di A dan a_ia_j di B. Setiap suku berbentuk $3a_ia_ja_k$ di $3D$ datang dari 3 cara: a_i di A dan a_ja_k di B, serta kedua permutasi lainnya.

Untuk meyakinkan diri kita lebih lanjut lagi, A punya n suku, dan B punya $n(n-1)/2$ suku, jadi AB punya $n^2(n-1)/2$ suku. $3D$ punya $n(n-1)(n-2)/2$ suku dan C punya $n(n-1)$ suku, jadi secara total ada $n^2(n-1)/2$ suku.

Selanjutnya:

$$C = a_1^2(A - a_1) + a_2^2(A - a_2) + \cdots + a_n^2(A - a_n) = AE - F$$

Sehingga
$$3D = AB - C = F + AB - AE$$

Identitas ini berlaku untuk semua bilangan real a_i, sebab pembuktiannya hanyalah menggunakan manipulasi aljabar. Sekarang mari kita terapkan identitas tersebut untuk anggota himpunan S. Kita sudah tahu bahwa $F \equiv -1, A \equiv -1, B \equiv 1, E \equiv -1 \pmod{p}$. Dari situ, kita punya $3D \equiv -3 \pmod{p}$, berarti $(3D+3)$ habis dibagi p. Karena $p > 3$ maka $D + 1$ habis dibagi p.

MATERI TEORI BILANGAN TIM IMO 2019

Sesi II, 16 Oktober 2018

Budi Surodjo

1. Tentukan semua bilangan asli n yang bersifat
$$\frac{10^n}{n^3+n^2+n+1}$$
merupakan bilangan asli.

2. Barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ didefinisikan dengan $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, dan
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 41a_n$$
untuk $n \geq 0$. Apakah a_{2016} habis dbagi 2017 ?

3. Diberikan bilangan asli n. Buktikan ada tak hingga suku dari barisan $(a_k)_{k\geq 1}$ dengan definisi
$$a_k = \lfloor \frac{n^k}{k} \rfloor$$
yang ganjil.

4. Untuk bilangan prima p yang mana yang bersifat terdapat bilangan rasional positif x dan y, serta bilangan asli n sehingga
$$x + y + \frac{p}{x} + \frac{p}{y} = 3n$$

5. Diketahui p bilangan prima yang memenuhi $p > 10^9$ dan $4p + 1$ juga prima. Buktikan bahwa representasi desimal dari $\frac{1}{4p+1}$ memuat semua digit $0, 1, 2, \ldots, 9$.

6. Tentukan nilai hasil kali semua n yang memenuhi
$$2n - 5 \mid 3(n! + 1)$$

7. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi
$$n + f(m) \mid (f(n) + nf(m))$$
untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$

8. Himpunan bilangan-bilangan bulat S dikatakan *Balearic* jika terdapat 2 bilangan (tidak harus berbeda) $x, y \in S$, sehingga $x + y = 2^k$ untuk suatu bilangan bulat k, sedangkan yang tidak demikian dikatakan non Balearic. Tentukan semua bilangan n, sehingga $\{1, 2, \ldots, n\}$ memuat suatu himpunan dengan 99 elemen yang non Balearic dan semua subhimpunan dengan 100 elemen merupakan Balearic.

TAHAP 1 TEORI BILANGAN
Cadangan Oktober 2018
Budi Surodjo

N1. Carilah semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan

$$5x^2 + 20x^2y^2 - 28y^2 = 2013.$$

N2. Bilangan asli n dikatakan "*kuat*" jika terdapat bilangan asli x sehingga $x^{nx} + 1$ habis dibagi 2^n.

(a) Tunjukkan bahwa 2013 merupakan bilangan kuat.

(b) Jika n adalah bilangan kuat, tentukan bilangan asli terkecil x sehingga $x^{nx}+1$ habis dibagi 2^n.

N3. Bilangan rasional positif x dan y memenuhi persamaan

$$\frac{x+2}{y+2} + \frac{y+2}{x+2} = 3 - xy.$$

Buktikan bahwa dalam bentuk pecahan paling sederhana, penyebut dari x dan y merupakan bilangan kuadrat sempurna.

N4. Diberikan bilangan asli a, b, c yang memenuhi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2c}. \tag{1}$$

Buktikan bahwa bilangan $a + b + c$ komposit.

N5. Misalkan $p > 3$ adalah sebuah bilangan prima, dan misalkan $S = \{2, 3, \ldots, p-1\}$. Jika

$$X = \sum_{i<j<k \in S} ijk$$

Buktikan bahwa $X + 1$ habis dibagi p.

1. Persamaan pada soal ekivalen dengan

$$\left(5x^2-7\right)\left(4y^2+1\right)=2006.$$

Dengan demikian $5x^2-7$ dan $4y^2+1$ adalah pasangan pembagi positif dari 2006. Pembagi positif dari 2006 adalah 1, 2, 17, 34, 59, 118, 1003, dan 2006. Karena $4y^2+1$ ganjil maka $4y^2+1 \in \{1, 17, 59, 1003\}$. Oleh karena itu (x, y) adalah solusi bulat dari sistem-sistem persamaan

$$\left\{\begin{array}{l}5x^2-7=2006\\4y^2+1=1\end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l}5x^2-7=118\\4y^2+1=17\end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l}5x^2-7=34\\4y^2+1=59\end{array}\right., \quad \text{dan} \quad \left\{\begin{array}{l}5x^2-7=2\\4y^2+1=1003\end{array}\right..$$

Dari keempat sistem persamaan di atas yang mempunyai solusi bulat hanyalah sistem kedua, yaitu

$$\left\{\begin{array}{l}5x^2-7=118\\4y^2+1=17\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}5x^2=125\\4y^2=16\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2=25\\y^2=4\end{array}\right.$$

yang mempunyai empat solusi, yaitu $(5, 2)$, $(-5, 2)$, $(5, -2)$, dan $(-5, -2)$. Terakhir, dilakukan pengecekan ke persamaan pada soal dan keempat pasangan itu memenuhi.

2. (a) Perhatikan bahwa $x^{2013x}+1$ habis dibagi $x+1$ untuk x ganjil. Pilih $x=2^{2013}-1$ maka $x+1=2^{2013}$ habis membagi $x^{2013x}+1$ yang berarti bahwa 2013 adalah bilangan kuat.

   (b) Agar $x^{nx}+1$ habis dibagi 2^n maka haruslah x ganjil. Perhatikan pemfaktoran

$$x^{nx}+1=\left(x^n+1\right)\left(x^{n(x-1)}-x^{n(x-2)}+x^{n(x-3)}-\ldots-x^n+1\right),$$

   karena x ganjil maka $x^{n(x-1)}-x^{n(x-2)}+x^{n(x-3)}-\ldots-x^n+1$ juga ganjil sehingga $2^n|x^n+1$. Sekarang, perhatikan bahwa jika n genap maka $x^n \equiv 1 \bmod 4$, sehingga $x^n+1 \equiv 2 \bmod 4$ artinya 2^n tidak mungkin habis membagi x^n+1. Dengan demikian, jika n kuat maka n harus ganjil sehingga

$$x^n+1=(x+1)\left(x^{n-1}-x^{n-2}+\ldots-x+1\right)$$

   habis dibagi 2^n. Karena n ganjil maka $\left(x^{n-1}-x^{n-2}+\ldots-x+1\right)$ juga ganjil sehingga $2^n|x+1$. Dengan demikian, x terkecil yang mungkin adalah $x=2^n-1$.

3. Karena kesimetrian, cukup dibuktikan untuk x saja. Misalkan $a=x+2$, $b=y+2$,

$$\begin{aligned}1 &= \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+(a-2)(b-2)-2=\frac{a^2+b^2}{ab}+2+ab-2(a+b)\\ &= \frac{\left(a^2+b^2+2ab\right)+(ab)^2-2ab(a+b)}{ab}=\frac{(ab-a-b)^2}{ab}\end{aligned} \tag{2}$$

dan $ab-a-b=(x+2)(y+2)-(x+2)-(y+2)=x+y+xy>0$.

Jadi dari (2), diperoleh $\sqrt{ab} = ab - a - b$. Samakan penyebut a dan b, yakni tulis $a = p/n$ dan $b = q/n$ dengan $p, q, n \in \mathbb{N}$, diperoleh $\sqrt{pq/n^2} = pq/n^2 - p/n - q/n$ yang ekivalen dengan $\sqrt{pq} = pq/n - p - q \in \mathbb{Q}$. Dengan demikian, pq kuadrat sempurna. Misalkan $\gcd(p, q) = r$, maka $p = rs^2$ dan $q = rt^2$ dengan s, t bilangan asli relatif prima dan

$$rst = \sqrt{pq} = \frac{pq}{n} - p - q = \frac{r^2s^2t^2}{n} - rs^2 - rt^2$$

yang ekivalen dengan $n = rs^2t^2/(s^2 + t^2 + st)$.

Selanjutnya, dari $x = a - 2 = p/n - 2$, substitusi dalam r, s, t diperoleh

$$x = rs^2 \cdot \frac{s^2 + t^2 + st}{rs^2t^2} - 2 = \frac{s^2 + t^2 + st}{t^2} - 2 = \frac{s^2 + st - 2t^2}{t^2}. \tag{3}$$

Cukup dibuktikan bahwa bentuk (3) adalah pecahan paling sederhana (Ingat bahwa s, t relatif prima). Andaikan belum, maka ada bilangan prima $p \geq 2$ yang membagi $\gcd(t^2, s^2 + st - 2t^2)$. Karena $p \mid t^2$, maka $p \mid t$ dan karena $p \mid s^2 + t(s - 2t)$, maka $p \mid s^2$ sehingga $p \mid s$. Jadi, p membagi $\gcd(s, t) = 1$, suatu kontradiksi! Jadi, dalam bentuk pecahan paling sederhana, penyebut dari x adalah t^2 dan kita selesai.

4. Dari kesamaan (1) kita mempunyai $c = ab/2(a + b)$. Jadi,

$$a + b + c = a + b + \frac{ab}{2(a + b)} = \frac{2a^2 + 5ab + 2b^2}{2(a + b)} = \frac{(2a + b)(a + 2b)}{2(a + b)}.$$

Seandainya ini prima, yakni $(2a+b)(a+2b) = 2(a+b)p$ dengan p prima, maka $p \mid 2a+b$ atau $p \mid 2b+a$. Tanpa mengurangi keumuman, $p \mid 2a+b$. Karena $(2a+b)/p = 2(a+b)/(a+2b)$, maka $a+2b \mid 2(a+b)$. Namun ini tidak mungkin terjadi karena $1 < 2(a+b)/(a+2b) < 2$. Jadi pengandaian kita salah dan kita selesai.

5. Perhatikan bahwa kesamaan (1) ekivalen dengan $(a + b)/a = b/2c$. Misalkan p/q adalah bentuk pecahan paling sederhana dari bilangan tersebut. Dari $(a+b)/a = p/q$ diperoleh $a + b = pm$, $a = qm$ dengan $m \in \mathbb{N}$ sementara dari $b/2c = p/q$ diperoleh juga $b = pn$, $2c = qn$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Jadi,

$$2(a + b + c) = (a + b) + a + b + 2c = pm + qm + pn + qn = (p + q)(m + n).$$

Sekarang dari $a + b$ lebih dari a dan b, maka pm lebih dari qm dan pn, yakni $p > q$ dan $m > n$. Akibatnya, $p+q \geq 3$ dan $m+n \geq 3$. Tidak mungkin $2(a+b+c) = (p+q)(m+n)$ berbentuk $2r$ dengan r prima. Dengan kata lain, $a + b + c$ komposit dan kita selesai.

Solusi 3: Tulis kesamaaan (1) sebagai $2c = ab/(a + b)$. Dengan demikian, $a + b \mid ab$. Sekarang misalkan $d = \gcd(a, b)$ dan tulis $a = dm$, $b = dn$ dengan $\gcd(m, n) = 1$. Dengan ini, $d(m+n) \mid d^2mn$ sehingga $m+n \mid dmn$. Dari $\gcd(m, n) = 1$, diperoleh $\gcd(m+n, m) =$

$\gcd(m+n, n) = 1$, sehingga $m+n \mid d$. Tulis $d = k(m+n)$, diperoleh $a = dm = km(m+n)$ dan $b = kn(m+n)$. Selanjutnya,

$$2c = \frac{ab}{a+b} = \frac{d^2mn}{d(m+n)} = \frac{dmn}{m+n} = kmn$$

yang berakibat bilangan

$$\begin{aligned} a+b+c &= km(m+n) + kn(m+n) + \frac{kmn}{2} = \frac{1}{2}k\left(2m^2 + 5mn + 2n^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k\left(2m+n\right)\left(m+2n\right) \end{aligned}$$

komposit karena $2m+n$ dan $m+2n$ lebih dari atau sama dengan 3. Kita selesai.

6. Karena p ganjil, misalkan $p = 2m+1$.

   Pertama kita hitung $2^2 + \cdots + (p-1)^2 \pmod p$. Perhatikan bahwa $1^2 = (p-1)^2 \pmod p, 2^2 = (p-2)^2 \pmod p$ dan seterusnya. Setiap suku akan mempunyai "pasangan" nya masing-masing, sehingga jumlahnya adalah:

$$1^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 + \cdots + (p-1)^2$$

$$\equiv 2(1 + \cdots + m^2) \pmod p$$

$$\equiv m(m+1)(2m+1)/3 \equiv 0 \pmod p$$

   sebab $2m+1 = p$ dan p relatif prima terhadap 3. Berarti $2^2 + \cdots + (p-1)^2 \equiv -1 \pmod p$

   Sekarang kita hitung $2^3 + \cdots + (p-1)^3 \pmod p$. Perhatikan bahwa $p = 1 + (p-1) | 1^3 + (p-1)^3, p = 2 + (p-2) | 2^3 + (p-2)^3$ dan seterusnya. Sehingga $1^3 + \cdots + (p-1)^3 \equiv 0 \pmod p$, sehingga $2^3 + \cdots + (p-1)^3 \equiv -1 \pmod p$.

   Kita juga punya $1 + \cdots + (p-1) \equiv 0 \pmod p$, sehingga $2 + \cdots + (p-1) \equiv -1 \pmod p$. Dari sini kita dapatkan:

$$2\sum_{i<j\in S} ij \equiv (-1)^2 - (-1) \equiv 2 \pmod p$$

$$\sum_{i<j\in S} ij \equiv 1 \pmod p$$

   sebab p ganjil.

   Sekarang, untuk sembarang bilangan real $a_1, \ldots, a_n$, kita definisikan variabel-variabel berikut ini:

$$A = a_1 + \cdots + a_n$$

$$B = \sum_{i<j} a_i a_j$$

$$C = \sum_{i \neq j} a_i^2 a_j$$

$$D = \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k$$

$$E = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$

$$F = a_1^3 + \cdots + a_n^3$$

Maka kita punya identitas sebagai berikut:

$$AB = (a_1 + \cdots + a_n)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n) = C + 3D$$

Identitas tengah ke kanan berlaku sebab untuk setiap a_i di A akan dikalikan entah dengan $a_i a_j$ atau $a_j a_k$ di B. Jika dikalikan dengan $a_i a_j$ maka akan termasuk dalam C, namun jika tidak, maka akan termasuk dalam $3D$. Demikian pula sebaliknya, setiap suku di C and $3D$ dapat di identifikasi sumbernya dari perkalian AB. Setiap suku $a_i^2 a_j$ di C diperoleh dari a_i di A dan $a_i a_j$ di B. Setiap suku berbentuk $3a_i a_j a_k$ di $3D$ datang dari 3 cara: a_i di A dan $a_j a_k$ di B, serta kedua permutasi lainnya.

Untuk meyakinkan diri kita lebih lanjut lagi, A punya n suku, dan B punya $n(n-1)/2$ suku, jadi AB punya $n^2(n-1)/2$ suku. $3D$ punya $n(n-1)(n-2)/2$ suku dan C punya $n(n-1)$ suku, jadi secara total ada $n^2(n-1)/2$ suku.

Selanjutnya:

$$C = a_1^2(A - a_1) + a_2^2(A - a_2) + \cdots + a_n^2(A - a_n) = AE - F$$

Sehingga

$$3D = AB - C = F + AB - AE$$

Identitas ini berlaku untuk semua bilangan real a_i, sebab pembuktiannya hanyalah menggunakan manipulasi aljabar. Sekarang mari kita terapkan identitas tersebut untuk anggota himpunan S. Kita sudah tahu bahwa $F \equiv -1, A \equiv -1, B \equiv 1, E \equiv -1 \pmod{p}$. Dari situ, kita punya $3D \equiv -3 \pmod{p}$, berarti $(3D+3)$ habis dibagi p. Karena $p > 3$ maka $D + 1$ habis dibagi p.

AZZAM LABIB HAKIM

Inequality

RWK

Malang, 15 Oktober 2018

A For all real numbers a, b, c, x, y, z such that $ab + bc + ca \geq 0$ and $xy + yz + zx \geq 0$ the following inequality holds

$$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}.$$

Proof. Using **CS** inequality we get

$$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = (a+b+c)(x+y+z) - (ax+by+cz)$$

$$= \sqrt{\left[\sum a^2 + 2\sum ab\right]\left[\sum x^2 + 2\sum xy\right]} - (ax+by+cz)$$

$$\geq 2\sqrt{\left(\sum xy\right)\left(\sum ab\right)} + \sqrt{\left(\sum a^2\right)\left(\sum x^2\right)} - (ax+by+cz)$$

$$\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}.$$

B For all positive real numbers a, b, c, x, y, z the following inequality holds

$$\frac{x(b+c)}{y+z} + \frac{y(c+a)}{z+x} + \frac{z(a+b)}{x+y} \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}.$$

Proof. Using **A** inequality and replace $\{x, y, z\}$ with $\{\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}\}$ we get

$$\frac{x(b+c)}{y+z} + \frac{y(c+a)}{z+x} + \frac{z(a+b)}{x+y}$$

$$\geq 2\sqrt{\left(\frac{x}{y+z}\frac{y}{z+x} + \frac{y}{z+x}\frac{z}{x+y} + \frac{z}{x+y}\frac{x}{y+z}\right)(ab+bc+ca)}.$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3}{4}(ab+bc+ca)} = \sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

Problems

1. Let x, y, z be positive real numbers. Prove that

$$xy(x+y-z)+yz(y+z-x)+zx(z+x-y) \geq \sqrt{3(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)}.$$

2. Let a, b, c be positive real numbers such that $ab+bc+ca=3$. Prove that

$$\frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc}+\frac{b(c^2+a^2)}{b^2+ca}+\frac{c(a^2+b^2)}{c^2+ab} \geq 3.$$

3. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{b^2+c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2+a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2+b^2}{c(a+b)} \geq \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc}}-1\right).$$

4. Let a, b, c be positive real numbers and $n \geq 2$ be a real number. Prove that

$$\frac{b^n+c^n}{a(b+c)}+\frac{c^n+a^n}{b(c+a)}+\frac{a^n+b^n}{c(a+b)} \geq \sqrt{\frac{3(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})(a^n+b^n+c^n)}{a+b+c}}.$$

5. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$ab\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}+bc\frac{b^3+c^3}{b^2+c^2}+ca\frac{c^3+a^3}{c^2+a^2} \geq \sqrt{3abc(a^3+b^3+c^3)}$$

6. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$ab\cancel{\frac{a+b}{b+c}}+bc\cancel{\frac{b+c}{c+a}}+ca\frac{c+a}{a+b} \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$$

$$\sum_{cyc} ab\left(\frac{a+c}{b+c}\right) \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$$

AZZAM LABIB HAKIM

RWK

Malang, 15 Oktober 2018

√ 1. Positive real numbers x, y, z are given such that the difference between any two of them is less than 2. Prove that:

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z$$

$4 > (x-y)^2$

$4xy + 4 > (x+y)^2$

$\sqrt{xy+1} > \frac{x+y}{2}$

2. Let n be a positive integer. Consider integers $0 < a_k \leq k$ for $1 \leq k \leq n$. Suppose that the sum $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ is even. Prove that one can choose signs $+$ or $-$ in the following expression such that it becomes valid:

$$a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots \pm a_n = 0.$$

3. All entries of an 8×8 matrix are positive integers. One may repeatedly transform the entries of the matrix according to the following rules:

   a Multiply all entries in the same row by 2.

   b Subtract 1 from all entries in the same column.

   Prove that it is possible to transform the given matrix into the zero matrix

4. 100 queens are placed on a 100×100 chessboard so that no two attack each other. Prove that each of the four 50×50 corners of the board contains at least one queen.

√ 5. Let ABC be a triangle. Let P be the point on line BC such that B is between P and C, and $BP = BA$. Similarly, let Q be the point on line BC such that C is between Q and B, and $CQ = CA$. If R is the second intersection of the circumcircles of $\triangle ACP$ and $\triangle ABQ$, prove that $\triangle PQR$ is isosceles. Angle chasing, $\angle PRB = \angle BRA$, $\angle ARC = \angle CRQ$.

√ 6. The quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle. The lines AB and CD meet at E, and the diagonals AC and BD meet at F. The circumcircles of the triangles AFD and BFC meet again at H. Prove that $\angle EHF = 90°$ $G = AD \cap BC$. $\angle DHG = \angle GHC \Rightarrow$ harmonik. | G radical center terus brokard

√ 7. A quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle ω. The tangent to ω at A intersects the ray CB at K, and the tangent to ω at B intersects the ray DA at M. Prove that if $AM = AD$ and $BK = BC$, then $ABCD$ is a trapezoid. Simple angle chasing then similarity

$\frac{KB}{AB} = \frac{KA}{AC} \wedge \frac{MA}{AB} = \frac{MB}{BD}$ $\Rightarrow$ $\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BD} \cdot \frac{KB}{KA} \Rightarrow \frac{AC}{BD} = 1 \Rightarrow AC = BD$

Pop $2KB^2 = AK^2$

$2MA^2 = MB^2$

8. Show that the equation

ketemu $x = 3a^2, y = b^2$ atau $x = a^2, y = 3b^2$

$$3y^2 = x^4 + x$$

has no solutions in positive integers.

9. Call admissible a set A of integers that has the following property: If $x, y \in A$ (possibly $x = y$) then $x^2 + kxy + y^2 \in A$ for every integer k.

   Determine all pairs m, n of nonzero integers such that the only admissible set containing both m and n is the set of all integers.

10. Let n be a positive integer and let $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ be distinct integers in the set $1, 2, \ldots, n$ such that n divides $a_i(a_{i+1} - 1)$ for $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Prove that n does not divide $a_k(a_1 - 1)$.

induksi kuat, asumsi kontra

AZZAM LABIB HAKIM Pak Budi Selasa, 16 oktober 2018

Integer Polynomials

June 29, 2007

Yufei Zhao

yufeiz@mit.edu

We will use $\mathbb{Z}[x]$ to denote the ring of polynomials with integer coefficients. We begin by summarizing some of the common approaches used in dealing with integer polynomials.

- Looking at the coefficients
  - Bound the size of the coefficients
  - Modulos reduction. In particular, $a - b \mid P(a) - P(b)$ whenever $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ and a, b are distinct integers.
- Looking at the roots
  - Bound their location on the complex plane.
  - Examine the algebraic degree of the roots, and consider field extensions. Minimal polynomials.

Many problems deal with the irreducibility of polynomials. A polynomial is *reducible* if it can be written as the product of two nonconstant polynomials, both with rational coefficients. Fortunately, if the original polynomial has integer coefficients, then the concepts of (ir)reducibility over the integers and over the rationals are equivalent. This is due to **Gauss' Lemma**.

Theorem 1 (Gauss). If a polynomial with integer coefficients is reducible over $\mathbb{Q}$, then it is reducible over $\mathbb{Z}$.

Thus, it is generally safe to talk about the reducibility of integer polynomials without being pedantic about whether we are dealing with $\mathbb{Q}$ or $\mathbb{Z}$.

Modulo Reduction

It is often a good idea to look at the coefficients of the polynomial from a number theoretical standpoint. The general principle is that any polynomial equation can be reduced mod m to obtain another polynomial equation whose coefficients are the residue classes mod m.

Many criterions exist for testing whether a polynomial is irreducible. Unfortunately, none are powerful enough to be universal. One of the most well-known criteria is **Eisenstein's criterion**.

Theorem 2 (Eisenstein). Let $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ be a polynomial with integer coefficients such that $p \mid a_i$ for $0 \le i \le n-1$, $p \nmid a_n$ and $p^2 \nmid a_0$. Then $f(x)$ is irreducible. p prime

Proof. Suppose that $f = gh$, where g and h are nonconstant integer polynomials. Consider the reduction mod p (i.e., apply the ring homomorphism $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{F}_p[x]$), and let $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ denote the residues of f, g, h (i.e. the coefficients are residues mod p). We have $\bar{f}(x) = a_0 x^n$. Since $\mathbb{F}_p[x]$ is a unique factorization domain, we see that the only possibilities for $\bar{g}$ and $\bar{h}$ are cx^k for some integers c and $k \ge 1$. Then, the constant terms of g and h are both divisible by p, so $p^2 \mid a_0$. Contradiction. $\square$

The most typical example for the application of Eisenstein's criterion is to show that the cyclotomic polynomial $\Phi_p(x)$ is irreducible for prime p:

Problem 1. Let p be a prime number. Show that $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ is irreducible.

Solution. The polynomial $f(x)$ is irreducible if and only if $f(x+1)$ is irreducible. We have

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1) - 1} = x^{p-1} + \binom{p}{1} x^{p-2} + \binom{p}{2} x^{p-3} + \cdots + \binom{p}{p-2} x + p.$$

Note that $f(x+1)$ fails the Eisenstein criterion for the prime p. Therefore $f(x)$ is irreducible. □

Note that the proof of Eisenstein's criterion extends to other rings with similar properties. For instance, to show that $x^4 + 5x + 5$ is irreducible over the Gaussian integers $\mathbb{Z}[i]$, we can simply apply Eisenstein with the Gaussian prime $2 + i$.

The proof of Eisenstein's Criterion can be slightly generalized to the following. The proof is more or less the same, and so it's left as exercise.

Theorem 3 (Extended Eisenstein). Let $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ be a polynomial with integer coefficients such that $p \mid a_i$ for $0 \le i < k$, $p \nmid a_k$ and $p^2 \nmid a_0$. Then $f(x)$ has an irreducible factor of degree greater than k.

We give one more result that relates to looking at the modulo reduction of polynomials, known as **Hensel's lemma**.

Theorem 4 (Hensel). Let $a_0, a_1, \ldots, a_k$ be integers, and let $P(x) = a_n x^k + \cdots a_1 x + a_0$, and let $P'(x)$ denote the derivative of $P(x)$. Suppose that x_1 is an integer such that $P(x_1) \equiv 0 \pmod p$ and $P'(x_1) \not\equiv 0 \pmod p$. Then, for any positive integer k, there exists an unique residue $x \pmod{p^k}$, such that $P(x_k) \equiv 0 \pmod{p^k}$ and $x \equiv x_1 \pmod p$.

The proof of Hensel's lemma closely mimics Newton's method of finding roots. We work up the powers of p, and find the a zero of $P(x) \mod p^k$ for $k = 2, 3, \ldots$. The details of the proof are omitted here.

Root Hunting

When working with integer polynomials, it is often not enough to stay in $\mathbb{Z}$. We have to think outside the box and move our scope to the complex numbers. A lot can be a said about a polynomial if we know something about its complex zeros. Many irreducibility problems hinge on placing bounds on the zeros of the polynomial in the complex plane. We begin with a familiar example.

Problem 2. Let $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ be a polynomial with integer coefficients, such that $|a_0|$ is prime and

$$|a_0| > |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Show that $f(x)$ is irreducible.

Solution. Let α be any complex zero of f. Suppose that $|\alpha| \le 1$, then

$$|a_0| = |a_1 \alpha + \cdots + a_n \alpha^n| \le |a_1| + \cdots + |a_n|,$$

a contradiction. Therefore, all the zeros of f satisfies $|\alpha| > 1$.

Now, suppose that $f(x) = g(x)h(x)$, where g and g are nonconstant integer polynomials. Then $a_0 = f(0) = g(0)h(0)$. Since $|a_0|$ is prime, one of $|g(0)|, |h(0)|$ equals 1. Say $|g(0)| = 1$, and let b be the leading coefficient of g. If $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ are the roots of g, then $|\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k| = 1/|b| \le 1$. However, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ are also zeros of f, and so each has an magnitude greater than 1. Contradiction. Therefore, f is irreducible. □

Next, we present a **Perron's criterion**, which has a similar statement but a much more difficult proof compared with the previous result.

Theorem 5 (Perron). Let $P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ be a polynomial with $a_0 \ne 0$ and

$$|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|.$$

Then $P(x)$ is irreducible.

Again, the idea is to put bounds on the modulus of the roots of f. The key lies in the following lemma.

Lemma 1. Let $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ be a polynomial with

$$|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|.$$

Then exactly one zero of P satisfies $|z| > 1$, and the other $n-1$ zeros of P satisfy $|z| < 1$.

Let us see how we can prove Perron's criterion if we have this lemma. Suppose that $P(x) = f(x)g(x)$, where f and g are integer polynomials. Since P has only one zero with modulus not less than 1, one of the polynomials f, g, has all its zeros strictly inside the unit circle. Suppose that $z_1, \dots, z_k$ are the zeros of f, and $|z_1|, \dots, |z_k| < 1$. Note that $f(0)$ is a nonzero integer, and $|f(0)| = |z_1 \cdots z_k| < 1$, contradiction. Therefore, f is irreducible.

Now, let us prove Lemma 1. We offer two proofs. The first proof is an elementary proof that uses only the triangle inequality. The second proof invokes theorems from complex analysis, but it is much more intuitive and instructive.

First proof of the Lemma 1. (due to Laurentiu Panaitopol) Let us suppose wolog that $a_0 \neq 0$ since we can remove any factors of the form x^k . Let's first prove that there is no root α of $P(x)$ with $|\alpha| = 1$. Suppose otherwise, then we have that

$$-a_{n-1}\alpha^{n-1} = \alpha^n + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1\alpha + a_0,$$

thus

$$\begin{aligned} |a_{n-1}| = |a_{n-1}\alpha^{n-1}| &= |\alpha^n + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1\alpha + a_0| \\ &\leq |\alpha^n| + |a_{n-2}\alpha^{n-2}| + \cdots + |a_1\alpha| + |a_0| \\ &= 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|. \end{aligned}$$

This contradicts the given inequality. Therefore, no zero of $f(x)$ lies on the unit circle.

Let's denote with α_1, α_2, ..., α_n be the zeros of P. Since $|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n| = a_0$, it follows that at least one of the roots is larger than 1 in absolute value. Suppose that $|\alpha_1| > 1$ and let

$$Q(x) = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$$

be the polynomial with roots α_2, α_3, ..., α_n. Then,

$$P(x) = (x - \alpha_1)Q(x) = x^n + (b_{n-2} - \alpha_1)x^{n-1} + (b_{n-3} - b_{n-2}\alpha_1)x^{n-2} + \cdots + (b_0 - b_1\alpha_1)x - b_0\alpha_1$$

It follows that $b_{n-1} = 1$, $a_0 = -b_0\alpha_1$, and $a_k = b_{k-1} - b_k\alpha_1$ for all $1 \leq k \leq n-1$. Then, using the given inequality, we have

$$\begin{aligned} |b_{n-2} - \alpha_1| = |a_{n-1}| &> 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0| \\ &= 1 + |b_{n-3} - b_{n-2}\alpha_1| + \cdots + |b_0\alpha_1| \\ &\geq 1 + |b_{n-2}||\alpha_1| - |b_{n-3}| + |b_{n-3}||\alpha_1| - |b_{n-4}| + \cdots + |b_1||x_1| - |b_0| + |b_0||x_1| \\ &= 1 + |b_{n-2}| + (|\alpha_1| - 1)\left(|b_{n-2}| + |b_{n-3}| + \cdots + |b_1| + |b_0|\right). \end{aligned}$$

On the other hand, $|b_{n-2} - \alpha_1| \leq |b_{n-2}| + |\alpha_1|$, so

$$|b_{n-2}| + |\alpha_1| > 1 + |b_{n-2}| + (|\alpha_1| - 1)\left(|b_{n-2}| + |b_{n-3}| + \cdots + |b_1| + |b_0|\right)$$

and therefore

$$|b_{n-2}| + |b_{n-3}| + \cdots + |b_1| + |b_0| < 1.$$

Then, for any complex number α with $|\alpha| \geq 1$, we have

$$\begin{aligned}
|Q(\alpha)| &= |\alpha^{n-1} + b_{n-2}\alpha^{n-2} + b_{n-3}\alpha^{n-3} + \cdots + b_1\alpha + b_0| \\
&\geq |\alpha^{n-1}| - |b_{n-2}\alpha^{n-2}| - |b_{n-3}\alpha^{n-3}| - \cdots - |b_1\alpha| - |b_0| \\
&\geq |\alpha|^{n-1} - |\alpha|^{n-1}\left(|b_{n-2}| + |b_{n-3}| + \cdots + |b_1| + |b_0|\right) \\
&= |\alpha|^{n-1}\left(1 - |b_{n-2}| - |b_{n-3}| - \cdots - |b_1| - |b_0|\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

And so α cannot be a root. It follows that all the zeros of Q lie strictly inside the unit circle. This completes the proof of the lemma. □

In the polynomial P, the second term x^{n-1} is "dominating," in the sense that the absolute value of its coefficient is greater than the sum of the absolute values of all the other coefficients. In the above proof, we managed to construct a new polynomial Q, whose leading term is dominating. While exactly one zero of P is outside the unit circle, none of the zeros of Q is outside the unit circle. This observation generalizes to the following result.

Proposition 6. Let $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ be a polynomial with complex coefficients, and such that

$$|a_k| > |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{k-1}| + |a_{k+1}| + \cdots + |a_n|$$

for some $0 \leq k \leq n$. Then exactly k zeros of P lie strictly inside the unit circle, and the other $n-k$ zeros of P lie strictly outside the unit circle.

This is indeed true. The easiest way to prove this result is to invoke a well-known theorem in complex analysis, known as **Rouché's theorem.**

Theorem 7 (Rouché). Let f and g be analytic functions on and inside a simple closed curve $\mathcal{C}$. Suppose that $|f(z)| > |g(z)|$ for all points z on $\mathcal{C}$. Then f and $f+g$ have the same number of zeros (counting multiplicities) interior to $\mathcal{C}$.

The proof of Rouché's theorem uses the argument principle. It can be found in any standard complex analysis textbook.

In practice, for polynomials, Rouché's theorem is generally applied to some circle, and is useful when one term is very big compared to the other terms.

Proposition 6 becomes very easy to prove with the aid of Rouché's theorem. Indeed, let us apply Rouché's theorem to the functions $a_k z^k$ and $P(z) - a_k z^k$ with the curve being the unit circle. The given inequality implies that $|a_k z^k| > |P(z) - a_k z^k|$ for all $|z| = 1$. It follows that P has the same number of zeros as $a_k z^k$ inside the unit circle. It follows that P has exactly k zeros inside the unit circle. Also, it is not hard to show that P has no zeros on the unit circle (c.f. first proof of Lemma 1). Thus we have proved Proposition 6.

Second proof of Lemma 1. Apply Proposition 6 to $k = n-1$. □

While we're at it, let's look at couple of neat applications of Rouché's theorem, just for fun. These are not integer polynomial problems, but they contain useful ideas.

Problem 3. (Romania ??) Let $f \in \mathbb{C}[x]$ be a monic polynomial. Prove that we can find a $z \in \mathbb{C}$ such that $|z| = 1$ and $|f(z)| \geq 1$.

Solution. Let $\deg P = n$. Suppose that $|f(z)| < 1$ for all z on the unit circle. Then $|f(z)| < |z^n|$ for all z on the unit circle. So, by Rouché's theorem, $f(z) - z^n$ has n roots inside the unit circle, which is impossible, since $f(z) - z^n$ has degree $n-1$. □

The Fundamental Theorem of Algebra is also an easy consequence of Rouché's theorem.

Theorem 8 (Fundamental Theorem of Algebra). Any polynomial $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ of degree n has exactly n complex zeros.

Proof. Let $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. For a sufficiently large real number R, we have

$$|a_n| R^n > |a_{n-1}| R^{n-1} + \cdots + |a_1| R + a_0.$$

Apply Rouché's theorem to the functions $a_n x^n$ and $P(x) - a_n x^n$ on the circle $|z| = R$, we find that $P(x)$ has exactly n zeros inside the circle. Also, since we may choose R arbitrarily large, so there are no additional zeros. □

Note that the above proof also gives a bound (although rather weak) for the zeros of a polynomial. This bound is attributed to Cauchy.

Finally, the following result is a slightly stronger version of Rouché's theorem.

Theorem 9 (Extended Rouché). Let f and g be analytic functions on and inside a simple closed curve C. Suppose that

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

for all points z on C. Then f and g have the same number of zeros (counting multiplicities) interior to C.

There are many ways of bounding polynomial zeros on the complex plane. The following result is worth mentioning, as it has proven useful quite a few times.

Proposition 10. Let $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, where $0 < a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ are real numbers, then any complex zero of the polynomial satisfies $|z| \leq 1$.

Proof. If $|z| > 1$, then, since z is a zero of $(1 - x)P(x)$, we get

$$a_0 + (a_1 - a_0)z + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n - a_n z^n = 0.$$

Thus,

$$\begin{aligned}
|a_n z^n| &= |a_0 + (a_1 - a_0)z + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n| \\
&\leq a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \cdots + (a_n - a_{n-1})|z^n| \\
&< a_0|z|^n + (a_1 - a_0)|z|^n + \cdots + (a_n - a_{n-1})|z|^n \\
&= a_0|z|^n - a_0|z|^n + a_1|z|^n - a_1|z|^n + \cdots + a_n|z|^n \\
&= |a_n z^n|
\end{aligned}$$

contradiction. Therefore, $|z| \leq 1$. □

It follows as a simple corollary that for any polynomial with positive real coefficients, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, all its zeros lie in the annulus

$$\min_{1 \leq k \leq n} \frac{a_{k-1}}{a_k} \leq |z| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{a_{k-1}}{a_k}$$

Finally, we present one more irreducibility criterion, known as **Cohn's criterion**. Essentially, it says that if $f(x)$ has nonnegative integer coefficients, and $f(n)$ is prime for some n greater than all the coefficients, then f is irreducible.

Theorem 11 (Cohn's Criterion). Let p be a prime number, and $b \geq 2$ an integer. Suppose that $\overline{p_n p_{n-1} \cdots p_1 p_0}$ is the base-b representation of p, with $0 \leq p_i < b$ for each i and $p_n \neq 0$, then the polynomial

$$f(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^n + \cdots + p_1 x + p_0$$

is irreducible.

The following proof is due to M. Ram Murty[1].

As before, we begin with a lemma bounding the complex zeros of the polynomial.

[1] M. Ram Murty, Prime Numbers and Irreducible Polynomials, *Amer. Math. Monthly.* 109 (2002) 452–458

Lemma 2. Let $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ belong to $\mathbb{Z}[x]$. Suppose that $a_n \geq 1$, $a_{n-1} \geq 0$, and $|a_i| \leq H$ for $i = 0, 1, \ldots, n-2$, where H is some positive constant. Then any complex zero α of $f(x)$ either has nonpositive real part, or satisfies

$$|\alpha| < \frac{1+\sqrt{1+4H}}{2}$$

Proof. If $|z| > 1$ and $\operatorname{Re} z > 0$, we observe that

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)}{z^n}\right| &\geq \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z}\right| - H\left(\frac{1}{|z|^2} + \cdots \frac{1}{|z|^n}\right) \\ &> \operatorname{Re}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z}\right) - \frac{H}{|z|^2 - |z|} \\ &\geq 1 - \frac{H}{|z|^2 - |z|} = \frac{|z|^2 - |z| - H}{|z|^2 - |z|} \geq 0\end{aligned}$$

whenever

$$|z| \geq \frac{1+\sqrt{1+4H}}{2}.$$

It follows that α cannot be a zero of f if $|\alpha| \geq \frac{1+\sqrt{1+4H}}{2}$ and $\operatorname{Re}\alpha > 0$. □

To prove Theorem 11 for the case $b \geq 3$, we notice that Lemma 2 implies if α is a zero of $f(x)$, then $|b - \alpha| > 1$. Suppose that $f(x) = g(x)h(x)$, where g and h are nonconstant integer polynomials. Since $f(b)$ is prime, one of $|g(b)|, |h(b)|$ is 1. Say $|g(b)| = 1$, and the zeros of g are $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. We have $|g(b)| = |b - \alpha_1| \cdots |b - \alpha_k| > 1$, contradiction. Therefore, f is irreducible.

The $b = 2$ case is special, and requires more analysis.

Lemma 3. Let $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ with $a_i \in \{0, 1\}$ for each i. Then all the zeros of f lie in the half plane $\operatorname{Re} z < \frac{3}{2}$.

Proof. The cases $n = 1$ and 2 can be verified by hand. Assume that $n \geq 3$. Then, for $z \neq 0$, we have

$$\left|\frac{f(z)}{z^n}\right| \geq \left|1 + \frac{a_{m-1}}{z} + \frac{a_{m-2}}{z^2}\right| - \left(\frac{1}{|z|^3} + \cdots + \frac{1}{|z|^m}\right) > \left|1 + \frac{a_{m-1}}{z} + \frac{a_{m-2}}{z^2}\right| - \frac{1}{|z|^2(|z|-1)}.$$

If z satisfies $|\arg z| \leq \pi/4$, then we have $\operatorname{Re}(1/z^2) \geq 0$, and we get

$$\left|\frac{f(z)}{z^n}\right| > 1 - \frac{1}{|z|^2(|z|-1)}.$$

If $|z| \geq \frac{3}{2}$, then $|z|^2(|z|-1) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{9}{8} > 1$, and so $f(z) \neq 0$. On the other hand, if z is a zero of f with $|\arg z| > \pi/4$, and suppose that $\operatorname{Re} z > 0$, then from Lemma 2 we have $|z| < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, and thus $\operatorname{Re} z < \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} < \frac{3}{2}$. It follows that all zeros of f lie in the half-plane $\operatorname{Re} z < \frac{3}{2}$. □

To finish off the proof, suppose that $f(x) = g(x)h(x)$, where g and h are integer polynomials. Since $f(2)$ is prime, one of $|g(2)|, |h(2)|$ is 1. Say $|g(2)| = 1$. By Lemma 3, all the zeros of f lie in the half plane $\operatorname{Re} z < \frac{3}{2}$, which means that they satisfy $|z - 2| > |z - 1|$. Thus, if $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ are the zeros of g, we have $|g(2)| = |2 - \alpha_1| \cdots |2 - \alpha_k| > |1 - \alpha_1| \cdots |1 - \alpha_k| = |g(1)| \geq 1$. So $|g(2)| > 1$, contradiction.

Problems

1. If q is a rational number and $\cos q\pi$ is also rational, show that $\cos q\pi \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$.

2. Let $P(x)$ be a monic polynomial with integer coefficients such that all its zeros lie on the unit circle. Show that all the zeros of $P(x)$ are roots of unity, i.e., $P(x) | (x^n - 1)^k$ for some $n, k \in \mathbb{N}$.

3. If $P(x)$ is a polynomial that such that $P(n)$ is an integer for every integer n, then show that
$$P(x) = c_n \binom{x}{n} + c_{n-1} \binom{x}{n-1} + \cdots + c_0 \binom{x}{0},$$
for some integers $c_n, \ldots, c_0$. (Note that the coefficients of P are not necessarily integers.)

4. Let f be an irreducible polynomial in $\mathbb{Z}[x]$, show that f has no multiple roots.

5. Player A and B play the following game. Player A thinks of a polynomial, $P(x)$, with non-negative integer coefficients. Player B may pick a number a, and ask player A to return the value of $P(a)$, and then player B may choose another number b and ask player A to return the value of $P(b)$. After the two questions, player B must guess $P(x)$. Does player B have a winning strategy?

6. Determine all pairs of polynomials $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, such that $f(g(x)) = x^{2007} + 2x + 1$.

7. (a) (USAMO 1974) Let a, b, c be three distinct integers, and let P be a polynomial with integer coefficients. Show that in this case the conditions $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$ cannot be satisfied simultaneously.

   (b) Let $P(x)$ be a polynomial with integer coefficients, and let n be an odd positive integer. Suppose that $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is a sequence of integers such that $x_2 = P(x_1), x_3 = P(x_2), \ldots, x_n = P(x_{n-1})$, and $x_1 = P(x_n)$. Prove that all the x_i's are equal.[2]

   (c) (Putnam 2000) Let $f(x)$ be a polynomial with integer coefficients. Define a sequence $a_0, a_1, \ldots$ of integers such that $a_0 = 0$ and $a_{n+1} = f(a_n)$ for all $n \geq 0$. Prove that if there exists a positive integer m for which $a_m = 0$ then either $a_1 = 0$ or $a_2 = 0$.

   (d) (IMO 2006) Let $P(x)$ be a polynomial of degree $n > 1$ with integer coefficients and let k be a positive integer. Consider the polynomial
$$Q(x) = \underbrace{P(P(\ldots(P(x)\ldots))}_{k\ P'\text{s}}$$
   Prove that there are at most n integers t such that $Q(t) = t$.

8. (IMO Shortlist 1997) Find all positive integers k for which the following statement is true: if $P(x)$ is a polynomial with integer coefficients satisfying the condition $0 \leq P(c) \leq k$ for $c = 0, 1, \ldots, k+1$, then $F(0) = F(1) = \cdots = F(k+1)$.

9. Let $f(x) = x^4 + 6x^2 + 1$. Show that for any prime p, $f(x)$ is reducible over $\mathbb{F}_p$, but $f(x)$ is irreducible over $\mathbb{Z}$.

10. Let m, n, and a be positive integers and p a prime number less than $a - 1$. Prove that the polynomial $f(x) = x^m(x-a)^n + p$ is irreducible.

11. Let p be prime. Show that $f(x) = x^{p-1} + 2x^{p-2} + 3x^{p-3} + \cdots + (p-1)x + p$ is irreducible.

12. (IMO 1993) Let $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, where $n > 1$ is an integer. Prove that $f(x)$ cannot be expressed as the product of two nonconstant polynomials with integer coefficients.

13. (Romania TST 2003) Let $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ be an irreducible monic polynomial with integer coefficients. Suppose that $|f(0)|$ is not a perfect square. Show that $f(x^2)$ is also irreducible.

[2]This problem appeared in Reid Barton's handout in 2005. Compare with the IMO 2006 problem.

14. Let $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}[i]$ be Gaussian integers (i.e., complex numbers of the form $a+bi$, where $a, b \in \mathbb{Z}$) such that $|z_i - z_1| > 2$ for all $i > 1$. Prove that the polynomial $(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)+1$ is irreducible over $\mathbb{Z}[i]$.

15. (Brazil 2006) Let $f(x)$ be an irreducible polynomial, and suppose that it has two roots whose product is 1. Show that the degree of f is even.

16. (MathLinks Contest) Let a be a nonzero integer, and $n \geq 3$ be another integer. Prove that the the following polynomial is irreducible over the integers:
$$P(x) = x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + ax - 1.$$

17. Let $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ be positive integers. Show that the following polynomial is irreducible:
$$P(x) = x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \cdots - a_n$$

18. (MOP 2007) Let $p(x)$ be a polynomial with integer coefficients. Determine if there always exists a positive integer k such that $p(x) - k$ is irreducible.

19. (Iran TST 2007) Does there exist a sequence $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in $\mathbb{N}$, such that for each $i \neq j$, $\gcd(a_i, a_j) = 1$, and for each n, the polynomial $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ is irreducible in $\mathbb{Z}[x]$?

20. (China TST Quizzes 2006) Let n be a positive integer, and let $A_1, A_2, \ldots, A_k$ be a partition of the set of positive integers. Show that for some $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, there are infinitely many irreducible polynomials of degree n and whose coefficients are distinct elements from A_i.

21. Prove that $x^n - x - 1$ is irreducible over the integers for all $n \geq 2$.

22. (Iran 2003) Let $f_1, f_2, \ldots, f_n$ be polynomials with integer coefficients. Show that there exists a reducible polynomial $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ such that $f_i(x) + g(x)$ is irreducible for $i = 1, 2, \ldots, n$.

23. (IMO Shortlist 1997) Let f be a polynomial with integer coefficients and let p be a prime such that $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, and $f(k) \equiv 0$ or $1 \pmod p$ for all positive integers k. Show that $\deg f \geq p - 1$.

24. (IMO Shortlist 2005) Find all monic integer polynomials $p(x)$ of degree two for which there exists an integer polynomial $q(x)$ such that $p(x)q(x)$ is a polynomial having all coefficients ± 1.

25. (IMO Shortlist 2005) Let a, b, c, d, e and f be positive integers. Suppose that the sum $S = a+b+c+d+e+f$ divides both $abc + def$ and $ab + bc + ca - de - ef - fd$. Prove that S is composite.

26. (IMO 2002) Find all pairs of integers $m, n \geq 3$ such that there exist infinitely many positive integers a for which
$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$
is an integer.

27. (IMO Shortlist 2002) Let $P(x)$ be a cubic polynomial with integer coefficients. Suppose that $xP(x) = yP(y)$ for infinitely many pairs x, y of integers with $x \neq y$. Prove that the equation $P(x) = 0$ has an integer root.

28. (IMO Shortlist 1996) For each positive integer n, show that there exists a positive integer k such that
$$k = f(x)(x+1)^{2n} + g(x)(x^{2n}+1)$$
for some polynomials f, g with integer coefficients, and find the smallest such k as a function of n.

29. (Romania TST 1998) show that for any $n \in \mathbb{N}$, the polynomial $P(x) = (x^2+x)^{2^n} + 1$ is irreducible over the integers.

AZZAM LABIB HAKIM

KETERBAGIAN

RWK

Malang, 16 Oktober 2018

1. Jika $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ merupakan fungsi tak terbatas, dan $f(a) \mid c$ untuk konstanta c dan $a \in \mathbb{B}$. Buktikan jika $\mid \mathbb{B} \mid = \infty$ maka $c = 0$.

2. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan bilangan asli $, b$ berlaku

$$f(a) + b \mid (f(b) + a)^2$$

- Ambil $b = 1, a = p - f(1)$, $p \in \mathbb{P}$ (prima)

$$f(p - f(1)) + 1 \mid p^2$$

Karena $f(n) \geq 1$ maka $f(p - f(1)) + 1 = p \vee p^2$. Karena ada takhingga bilangan prima, maka ada suatu $\alpha \in \{1, 2\}$ sehingga ada takhingga $p \in \mathbb{P}$ yang memenuhi $f(p - f(1)) = p^\alpha - 1$. Misalkan himpunan semua bilangan bilangan prima yang memenuhi persamaan tersebut adalah $\mathbb{A}$.

- Ambil $b = p - f(1)$, $p \in \mathbb{A}$ maka diperoleh

$$f(a) + p - f(1) \mid (p^\alpha - 1 + a)^2$$

$$\implies f(a) + p - f(1) \mid \Big((f(1) - f(a))^\alpha - 1 + a\Big)^2$$

Karena ada takhingga $p \in \mathbb{P}$ memenuhi persamaan diatas, dan RHS bernilai konstan, maka $RHS = 0$.

$$\Big((f(1) - f(a))^\alpha - 1 + a\Big)^2 = 0$$

$$(f(1) - f(a))^\alpha = 1 - a$$

Karena tidak semua $1 - a$ merupakan bilangan kuadrat maka diperoleh $\alpha = 1$ sehingga $f(a) = a + f(1) - 1$

3. Tentukan semua $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

for all $m, n \in \mathbb{N}$

- $n + f(m) \mid f(n) - n^2$

unbounded
- Jika f *ubounded* $\implies f(n) = n^2$.

bounded
- Jika f *bounded*, terdapat $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$ sehingga $\forall a \in \mathbb{A} \implies f(a) = c$ dan $\mid \mathbb{A} \mid = \infty$.
- $n, m \in \mathbb{A} \implies n + c \mid c(c-1) \implies c = 1$
- $\mathbb{B} = \mathbb{N} - \mathbb{A}$, $\mid \mathbb{B} \mid < K$ untuk suatu $K \in \mathbb{N}_0$
- Ada $S \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \geq S \implies n \in \mathbb{A}$.
- Jika $\mid \mathbb{B} \mid > 0$, $b \in \mathbb{B} \implies f(b) \neq 1$

  Ambil $n = kf(b), m = b \in B$, $k > S$

$$(k+1)f(b) \mid 1 + kf(b)^2 \implies f(b) = 1$$

kontaradiksi.

4. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$f(a) + f(b) \mid a + b, \ \forall \ a, b \in \mathbb{N}$$

5. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga $x^2 + f(y)$ membagi $f(x)^2 + y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{N}$

6. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

untuk semua bilangan asli berbeda m dan n.

7. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ sehingga $f(a) + b$ membagi $2(f(b) + a)$ untuk semual a, b bilangan bulat positif.

8. Tentukan semua polinomial $f \in \mathbb{Z}[x]$ sehingga untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$a + b + c | f(a) + f(b) + f(c)$$

9. Diberikan $n \geq 1$ bilangan asli ganjil. Tentukan semua fungs $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, sehingga untuk semua bilangan asli berbeda x dan y berlaku $f(x) - f(y) \mid x^n - y^n$.

10. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga untuk semua bilangan asli m dan n, $f(m) + f(n) - mn > 0$ dan membagi $mf(m) + nf(n)$.

11. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $f(n!) = f(n)!$ untuk semua bilangan asli n dan m sehingga $m - n$ membagi $f(m) - f(n)$ untuk setiap bilangan asli berbeda m, n.

12. Diberikan bilangan aslu k . Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga untuks setiap $m, n \in \mathbb{N}$ berlaku:

$$f(m) + f(n) \mid (m+n)^k$$

13. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$\left(f^2(m) + f(n)\right) \mid \left(m^2 + n\right)^2$$

untuk semua bilangan asli m dan n.

14. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ sehingga $f(m) \geq m$ dan $f(m+n) \mid f(m) + f(n)$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{Z}^+$

15. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sehingga untuk semua bilangan asli berbeda m dan n, $f(m-n)|f(m) - f(n)$. Buktikan bahwa untuk semua bilangan asli m dan n dengan $f(m) \leq f(n)$, maka $f(m)|f(n)$.

16. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga $af(a) + bf(b) + 2ab$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ adalah bilangan kuadrat.

17. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga

$$(f(m) + n)(f(n) + m)$$

adalah bilangan kuadrat untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$.

AZZAM LABIB HAKIM

RWK

Malang, 16 Oktober 2018

√ 1. Let $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ be an infinite sequence of positive integers. Prove that there exists a unique integer $n \geq 1$ such that

IMO SL 2014 A1

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

√ 2. Let a, b and c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0.$$

renata

3. Several positive integers are written in a row. Iteratively, Alice chooses two adjacent numbers x and y such that $x > y$ and x is to the left of y, and replaces the pair (x, y) by either $(y+1, x)$ or $(x-1, x)$. Prove that she can perform only finitely many such iterations.

√ 4. We have 2^m sheets of paper, with the number 1 written on each of them. We perform the following operation. In every step we choose two distinct sheets; if the numbers on the two sheets are a and b, then we erase these numbers and write the number $a + b$ on both sheets. Prove that after $m2^{m-1}$ steps, the sum of the numbers on all the sheets is at least 4^m . extremal, ambil sum paling kecil dulu

√ 5. The altitudes AD and BE of acute triangle ABC intersect at H. Let F be the intersection of AB and a line that is parallel to the side BC and goes through the circumcentre of ABC. Let M be the midpoint of AH. Prove that $\angle CMF = 90°$

6. In a cute triangle ABC ($AB > AC$), let M be mid point BC and O circumcenter triangle ABC. D on AM such that $\angle ODC = 90°$ and E on DC such that $\angle BAM = \angle EAC$. Prove that circle passing through AB and tangent to AC also tangent circumcircle triangle ODE.

7. Find all triples (p,a,m); p is a prime number, $a, m \in \mathbb{N}$, which satisfy: $a \leq 5p^2$ and $(p-1)! + a = p^m$.

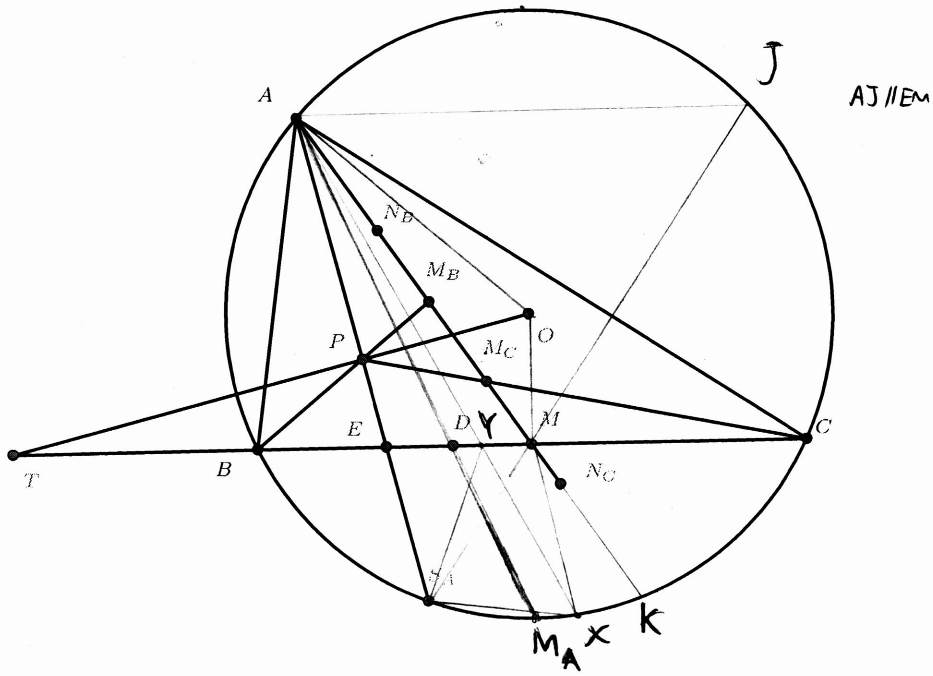
8. Find all triples (x, y, z) of natural numbers such that y is a prime number, y and 3 do not divide z, and $x^3 - y^3 = z^2$.

AZZAM LABIB HAKIM

SYMMEDIAN

RWK

Malang, 17 Oktober 2018



Diberikian $\triangle ABC$ lancip, dengan M dan O berturut-turut merupakan titik tengah BC dan pusat lingkaran luar $\triangle ABC$. Titik D, M_A berturut-turut adalah perpotongan garis bagi dalam $\angle ABC$ dengan sisi BC dan lingkaran luar $\triangle ABC$.

Definisikan *symmedian* dari $\triangle ABC$ terhadap titik A sebagai pecerminan garis AM terhadap garis bagi dalam $\angle ABC$ dan memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ dan BC berturut-turut pada S_A dan E.

- ✓ Bukikan garis singgung lingkaran luar $\triangle ABC$ dari titik B dan C, dan AS_A berpotongan di satu titik.
- ✓ Buktikan A, O, M, S_A terletak pada satu lingkaran, sebut ω_1 $\angle OMA = \angle OS_AA$
- ✓ Untuk sebarang titik X pada lingkaran luar $\triangle ABC$. Jika Y merupakan perpotongan AX dengan BC, buktikan bahwa lingkara luar $\triangle XYM$ melewati sebuah titik yang tetap. M ? LOL $\underline{\underline{S_A}}$ MYS$_A$X cyclic

$\angle MYX = \angle AYB = \angle JAX = \angle JS_AX = \angle MS_AX$

- Buktikan lingkaran luar $\triangle S_A EM$ bersinggungan dengan lingkaran luar $\triangle ABC$ $\angle S_A ME = \angle EMA$ (see EGMO 4.26, 9)

Pencerminan S_A terhadap BC adalah S.

- Buktikan S berada pada AM. $\cancel{\overset{\frown}{BS_A} = \overset{\frown}{SC}}$
- Buktikan $\triangle ASC$ dan $\triangle ASB$ menyinggung BC.

Titik P pada AS_A sedimikian sehingga $OP \perp AS_A$. PB, PC memotong AM berturut-turut pada M_B, M_C.

- Buktikan $M_B A = M_B B$ dan $M_C A = M_C C$. BC symmedian
- Buktikan PO merupakan garis bagi $\angle M_B P M_C$. $\angle BPS_A = \angle S_A PC$ analogy from $\angle AMB = \angle BMS_A$
- Buktikan bahwa ω_B (lingkaran luar $\triangle ABP$) menyinggung AC dan ω_C (lingkaran luar $\triangle ACP$) menyinggung BA. BC symmedian
- Buktikan P, O, B, C terletak pada satu lingkaran. analogous with $AOMS_A$ cyclic.

Garis bagi dalam $\angle ABC$ memotong BC pada D.

- Buktikan lingkaran luar $\triangle PDO$ menyinggung BC. $TD^2 = TA^2 = TP \cdot TO$

Perpanjangan OP memotong BC di T.

- (1) Buktikan T merupakan pusat lingkaran luar ADS_A.
- Buktikan T berada pada ω_1. $\cancel{\angle S_A ME}$ MT, OT bisector of $\angle AMS_A$ and $\angle AOS_A$

Garis AM memotong ω_B dan ω_C berturut-turut pada N_B dan N_C.

- Buktikan lingkaran luar $\triangle M_B O N_C$ menyinggung ω_B dan lingkaran luar $\triangle M_C O N_B$ menyinggung ω_C

Tambahan

- √ Diberikan X pada BC, sehingga AX merupakan *symmedian* dari $\triangle ABC$. Maka $XB : XC = AB^2 : AC^2$. Trigon for life uwu
- Tentukan locus X sedemikian sehingga $\frac{dist(X,AB)}{dis(X,AC)} = \frac{AB}{AC}$.
- Kaki garis tinggi dari titik B dan C berturut-turut adalah H_B dan H_C. Jika AM memotong H_BH_C pada P, dan proyeksi P pada BC adalah X. Buktikan AX adalah *symmedian* $\triangle ABC$.
- Diberikan P pada BC. Garis melalui P dan sejajar dengan AB dan AC memotong AB dan AC pada X dan Y. Buktikan lingkaran luar $\triangle ABC$ melewati titik yang tetap.

  Buktikan titik tersebut berada pada *symmedian* ABC.
- A' titik pada lingkaran luar ABC sehingga $AA' \perp BC$. Jika M_A adalah titik tengah AA', buktikan M, P, M_A segaris.
- Diberikan segitiga lancip ABC. Misalkan M, N, P merupakan titik tengah BC, CA, dan AB berturut-turut. Jika garis sumbu dari AB dan AC memotong AM berturut-turut pada D dan E. BD dan CE berpotongan di F. Buktikan A, N, F, dan P merupakan segiempat talibusur.
- Diberikan MN garis yang sejajar BC pada segitiga ABC, dengan M pada AB dan N pada AC. Garis BN dan CM berpotongan pada P. Lingkaran luar segitiga BMP dan segitiga CNP bertemu pada dua titik yang berbeda P dan Q. Buktikan bahwa $\angle BAQ = \angle CAP$.
- Diberikan segitiga ABC dengan pusat lingkaran luar di O dan $AO \cap BC = D$. Jika H_1 dan H_2 adalah titik tinggi dari segitiga ABD dan segitiga ACD berturut-turut, dan S pusat lingkaran luar segitiga H_1H_2D. Buktikan AS adalah *symmedian*.
- Diberikan segitiga ABC dengan *symmedian* AD dan M titik tengah BC. P titk didalam segitiga ABC sehingga $\angle PBA = \angle PCA$. K adalah proyeksi dari P pada AD. Buktikan lingkaran luar (KDM) dan (PBC) bersinggungan.
- Diberikan segitiga ABC dengan $AB > BC$ dan M titik tengah BC. D pada AM sehingga $OD \perp DC$ dan $M \neq D$. $P \neq O$ merupakan perpotongan kedua dari lingkaran luar BOC dan lingkaran dengan diameter AO. Buktikan lingkaran luar ODP menyinggung lingkaran luar APB.

and the foot of the internal bisector of angle CAB. Let ω intersect the circumcircle of triangle ABC again at Q. Prove that AC is parallel to the tangent to ω at Q. $Q_1 \in (ABC)$ s.t. AQ_1 bisector of $\angle A$. Prove NQ, B, C cyclic.
$AQ_1 \cap BC = N$. $BN = NB_1$, $BQ_1 = Q_1B_1 \Rightarrow \angle NB_1Q_1 = \angle NBQ_1 = \angle NCQ_1$.

9. Given non-obtuse triangle ABC, let D be the foot of the altitude from A to BC, and let I_1, I_2 be the incenters of triangles ABD and ACD, respectively. The line I_1I_2 intersects AB and AC at P and Q, respectively. Show that $AP = AQ$ if and only if $AB = AC$ or $\angle A = 90°$.

✓ 10. Find all integers a, b, c greater than 1 for which $ab - 1$ is divisible by c, $bc - 1$ is divisible by a, and $ca - 1$ is divisible by b.

11. A rational number x is written on a blackboard. In each step, you erase x and replace it with either $x + 1$ or $\frac{-1}{x}$. (If $x = 0$, you must choose $x + 1$). Prove that for any rational number p, if p currently appears on the blackboard, then you can make 0 appear after a finite number of steps.

✓ 12. A sequence (a_i) of natural numbers has the property that for all $i \neq j$, $gcd(a_i, a_j) = gcd(i, j)$. Show that $a_i = i$ for all i.
$gcd(a_k, a_{kp}) = gcd(k, kp) = k \Rightarrow k | a_k$. $a_k = km$ $gcd(km, a_{km}) = gcd(k, km) = k$
$\because km | a_{km}$, $a_{km} = kmn \Rightarrow gcd(km, a_{km}) = km \Rightarrow m = 1 \Rightarrow a_k = k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

10. $abc \,|\, (ab-1)(bc-1)(ac-1) \Rightarrow abc \,|\, ab+ac+bc-1 \Rightarrow abc \leq ab+ac+bc-1 < ab+ac+bc \Rightarrow 1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$.
WLOG $a > b > c$. by the ineq, $1 < c < 3 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow (2-a)(2-b) < 4 \Rightarrow a = 3, b = 5$. $(2, 3, 5)$ and permutations.

AZZAM LABIB HAKIM

RWK

Malang, 17 Oktober 2018

AM-GM :

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{d} \geq 4a\right)$$

$$3\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}\frac{a}{d} \geq \sum_{cyc} 4a$$

√ 1. Let a, b, c, d be positive real numbers such that

$$abcd = 1, a+b+c+d > \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$$

Prove that

$$a+b+c+d < \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$$

2. Find all integer-valued functions, f and g, dened on the integers. for which g is one-to-one and
injektif

$$f(g(x)+y) = g(f(y)+x)$$

for all integers x, y.

3. Let $a_0, a_1, a_2, \cdots$ be a sequence of positive integers such that

$$(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}.$$

Prove that $a_n \geq 2^n$ for all $n \geq 0$.

√ 4. A deck contains 52 cards of 4 dierent suits. Vanya is told the number of cards in each suit. He picks a card from the deck, guesses its suit, and sets it aside; he repeats until the deck is exhausted. Show that if Vanya always guesses a suit having no fewer remaining cards than any other suit, he will guess correctly at least 13 times. kalo salah tebak suits yang sama lagi. Ulang terus sampe suitsnya abis. kalo suitnya bener, ganti suit. Jadi, maximal salah 39 kali (3 suits) → minimal 13 x bener.

5. Let $n \geq 2$ be an integer and T_n be the number of non-empty subsets S of $\{1, 2, \cdots, n\}$ with the property that the average of the elements in S is an integer. Prove that $T_n - n$ is always even.

√ 6. A set S of ≥ 3 points in a plane has the property that no three points are collinear, and if A, B, C are three distinct points in S, then the circumcentre of $\triangle ABC$ is also in S. Prove that S is innite. tinjau segitiga tumpul. + tinjau Δ jari-jari maks, terus pake trigon / tinjau r terkecil (infinite descent)

√ 7. Let ABC be an acute triangle. The points M and N are taken on the sides AB and AC, respectively. The circles with diameters BN and CM intersect at points P and Q respectively. Prove that P, Q and the orthocenter H are collinear. $FH \cdot HC = BH \cdot HE \Rightarrow H$ on radical axis of $(CMF) \wedge (BEN)$.

√ 8. Let ABC be a triangle with $AC \neq AB$, and select point B_1 on ray AC such that $AB = AB_1$. Let ω be the circle passing through C, B_1, AZZAM LABIB HAKIM · Kamis, 18 oktober 2018

POLINOM

Fajar Yuliawan

Suatu polinom adalah suatu fungsi f dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ yang berbentuk $f(x) = a_n x^n + + \cdots + a_1 x + a_0$ dengan $a_n \neq 0$. Derajat dari polinom tersebut, ditulis $\deg(f)$, sama dengan n. Polinom konstan memiliki derajat nol, sedangkan derajat polinom nol tidak didefinisikan. Bilangan $a_n, \ldots, a_1, a_0$ dinamakan koefisien dari polinom. Jika $a_n = 1$, polinom di atas dikatakan polinom monik.

Suatu polinom dengan koefisien di $\mathbb{R}$ (atau $\mathbb{Q}$, atau $\mathbb{Z}$) dikatakan sebagai polinom atas $\mathbb{R}$ (atau $\mathbb{Q}$, atau $\mathbb{Z}$). Himpunan semua polinom atas $\mathbb{R}$ (atau $\mathbb{Q}$, atau $\mathbb{Z}$) dinotasikan dengan $\mathbb{R}[x]$ (atau $\mathbb{Q}[x]$, atau $\mathbb{Z}[x]$)

√ **Soal 1.** Misalkan $p(x)$ dan $q(x)$ polinom berderajat m dan n. Buktikan bahwa $p(x)q(x)$ dan $p(q(x))$ adalah polinom dengan derajat berturut-turut $m+n$ dan mn.

√ **Soal 2.** √ (a) Misalkan n bilangan asli dan a bilangan real. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga ketaksamaan $|a|/|x|^n \leq \varepsilon$ berlaku untuk setiap bilangan real x dengan $|x| \geq M$. ambil $M = \sqrt[n]{\frac{|a|}{\varepsilon}}$

$|x+y| \geq |x| - |y|$

√ (b) Misalkan $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ suatu polinom dengan $a_n \neq 0$. Buktikan bahwa terdapat bilangan real M sehingga ketaksamaan $|P(x)| \geq |a_n||x|^n/2$ berlaku untuk setiap bilangan real x dengan $|x| \geq M$. $|P(x)| = |\Sigma a_i x^i| \geq |a_n x^n| - |\Sigma a_i x^i| \Leftrightarrow \frac{|a_n|}{2} \geq |\Sigma \frac{a_i}{x^{n-i}}|$ Pakai (a) dapat $M = \max\left\{\left(\frac{2n|a_{n-k}|}{|a_n|}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}$.

Teorema 0.1 (Pembagian dan Sisa). *Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ polinom berderajat n atas $\mathbb{R}$ (atau $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{C}$). Maka terdapat polinom $q(x)$ dan $r(x)$ atas $\mathbb{R}$ (atau $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{C}$) sehingga $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ dengan $r(x) = 0$ atau $\deg(r) < \deg(g)$.*

Catatan 0.2. Jika $r(x) = 0$ kita katakan $g(x)$ membagi $f(x)$.

√ **Soal 3.** Berikan suatu contoh penyangkal bahwa pembagian dan sisa di atas tidak berlaku untuk polinom atas $\mathbb{Z}$. Dengan kata lain, cari polinom $f(x)$ dan $g(x)$ atas $\mathbb{Z}$ sehingga tidak terdapat polinom $q(x)$ dan $r(x)$ atas $\mathbb{Z}$ juga yang memenuhi kesimpulan pada teorema di atas. $f(x)=28$, $g(x)=5$, $q(x)=5$, $r(x)=3$, $\deg(r)=\deg(g)$

√ **Soal 4.** Misalkan $f(x)$ suatu polinom berderajat n dan $a \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $f(x) = q(x)(x-a) + f(a)$ untuk suatu polinom $q(x)$ berderajat $n-1$. Untuk $f(x) = x^n$ tentukan $q(x)$. $= \frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}$

√ **Soal 5.** Misalkan I suatu himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}[x]$ sehingga untuk setiap $f(x), g(x) \in I$ dan $a \in \mathbb{R}$, maka $af(x) + g(x) \in I$ dan $xf(x) \in I$. if $a=0 \Rightarrow g(x) \in I$. if $x=0 \Rightarrow 0 \in I$.

√ (a) Buktikan bahwa jika $f(x) \in I$ dan $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ maka $f(x)h(x) \in I$. pilih $a=h(x)$ dan $g(x)=0$.

√ (b) Buktikan bahwa terdapat suatu polinom $p(x) \in I$ yang membagi setiap polinom di I. $p(x)=1$.

√ **Soal 6.** Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ dua polinom di $\mathbb{R}[x]$ dan $d(x)$ suatu polinom di $\mathbb{R}[x]$ yang membagi keduanya. Buktikan bahwa terdapat polinom $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ sehingga $d(x) = p(x)f(x) + q(x)g(x)$. bezout's polynom

√ **Soal 7.** Cari satu polinom $p(x)$ sehingga $p(x)$ habis dibagi x^2+1 dan $p(x)+1$ habis dibagi x^3+x^2+1. $p(x) = q(x)(x^2+1)$, $p(x)+1 = r(x)(x^3+x^2+1) \Rightarrow x^2+1 \mid r(x)x^3 - 1 \Rightarrow x^2+1 \mid r(x)x+1$ pilih $r(x)=x \Rightarrow p(x) = x^4+x^3+x-1$.

Soal 8. (a) Misalkan $p(x)$ suatu polinom atas $\mathbb{R}$ dengan n akar real (tidak harus berbeda). Buktikan bahwa terdapat polinom $q(x)$ sehingga $p(x)$ membagi $q(x^{100})$. $\deg(p(x)) = n$.

(b) Apakah terdapat polinom atas $\mathbb{R}$ sehingga x^2+1 membagi $q(x^{100})$?

gcd polinom.
$f(x), g(x) \in R[x]$. polinom monik dengan degree terbesar yang membagi $f(x)$ dan $g(x)$

Akar. Jika f suatu polinom berderajat n, suatu bilangan real (atau kompleks) a disebut akar dari f jika $f(a) = 0$. Dengan demikian, a adalah akar dari f jika dan hanya jika $f(x) = (x - a)q(x)$ untuk suatu polinom $q(x)$ berderajat $n - 1$. Akibatnya, setiap polinom berderajat n memiliki paling banyak n akar (kompleks), terhitung pengulangannya. Jika $b_1, b_2, \ldots, b_n$ adalah akar-akar dari polinom f dan $\deg(f) = n$, maka

$$f(x) = c(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n), \quad \text{untuk suatu } c \in \mathbb{R}.$$

Catatan. Seluruh bilangan real adalah dari polinom nol.

√ **Soal 9.** Misalkan $P(x)$ suatu polinom berderajat n yang memenuhi $P(k) = k/(k+1)$ untuk $k = 0, 1, \ldots, n$. Tentukan $P(n+1)$. n ganjil : $P(n+1) = 1$, n genap : $P(n+1) = \frac{n}{n+2}$ $\quad P(x)(x+1) - x = Q(x)$

subs. $x = -1$, tinjau kedua ruas.

Teorema 0.3 (Interpolasi Lagrange). *Diberikan bilangan-bilangan real berbeda $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ dan bilangan-bilangan real sebarang (tidak harus berbeda) $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$. Terdapat tunggal polinom $f(x)$ yang memenuhi $f(a_i) = b_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n+1$, yaitu* $\deg(f) \leq n$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{b_i}{P_i(a_i)} P_i(x),$$

dimana $P_i(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdots (x - a_{n+1})$ polinom monik dengan akar $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}$.

√ **Soal 10.** Misalkan a, b, c bilangan real berbeda. Tunjukkan bahwa bongkar /Lagrange

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

untuk sebarang bilangan real x.

Teorema Vieta. (a) Misalkan $f(x) = x^2 + px + q$ memiliki akar a, b. Maka

$$a + b = -p \quad \text{dan} \quad ab = q.$$

(b) Misalkan $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ suatu polinom berderajat 3 dengan akar a, b, c. Maka berlaku

$$a + b + c = -p, \quad ab + bc + ca = q, \quad abc = -r.$$

√ **Soal 11.** Misalkan a, b, c bilangan real sehingga $a + b + c$, $ab + bc + ca$ dan abc positif. Buktikan bahwa a, b, c sendiri positif. asumsikan wlog $a, b < 0$, $c > 0$. nanti kontra pake ineq

atau $f(x) = x^3 - lx^2 + mx - n \Rightarrow f(x) = (x-i)(x-j)(x-k)$

√ **Soal 12.** Cari semua tripel bilangan real a, b, c yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

dapet $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$

$(a, -a, c)$ dan permutasi

√ **Soal 13.** Buktikan bahwa polinom berderajat lebih dari 3 dengan koefisien 1 atau -1 memiliki paling sedikit satu akar tidak real. $\cancel{\pm 1 = (x_1 + \ldots + x_n)^n}$

Polinom atas $\mathbb{Z}$

Teorema 0.4. *Jika $P(x)$ polinom atas $\mathbb{Z}$, maka untuk setiap bilangan bulat berbeda a, b berlaku $a - b \mid P(a) - P(b)$.*

√ **Soal 14.** Misalkan p, q bilangan bulat relatif prima dengan $q \neq 0$. Buktikan bahwa jika $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ suatu polinom atas $\mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(p/q) = 0$ maka $p \mid a_0$ dan $q \mid a_n$.

√ **Soal 15.** Misalkan a, b, c tiga bilangan bulat berbeda dan $P(x)$ suatu polinom atas $\mathbb{Z}$. Jika $|P(a)| = |P(b)| = |P(c)| = 1$, buktikan bahwa $P(x)$ tidak memiliki akar bulat. nanti kontra, ketemu $a = b \vee b = c \vee a = c$

ambil $j \in \mathbb{Z}$ $P(j) = 0$ $\quad a - j \mid P(a) - P(j) \Rightarrow a - j \mid \pm 1 \Rightarrow a - j = \pm 1$, $b - j = \pm 1$, $c - j = \pm 1$.

√ **Soal 16.** Misalkan $P(x)$ polinom atas $\mathbb{Z}$. Jika polinom $P(P(P(x))) - x$ memiliki akar bulat a, buktikan bahwa a juga merupakan akar dari $P(P(x)) - x$ buktiin $P(x) = x$ $\quad a - n \mid P^3(a) - P^3(n) = a - P^3(n)$

$\cancel{a - P^3(n) = x(a-n)}$ $\quad a - n \mid n - P^3(n)$.

$\cancel{(x-1)n = xn - P^3(n)}$

$\cancel{x - 1 = x - \frac{P^3(n)}{n}}$ $\quad$ kalo $P^3(n) = a \Rightarrow a = n$ (kontra)

$\cancel{P^3(n) = n \ \forall \mathbb{Z}.}$ $\quad \Rightarrow P^3(n) = n \ \forall n \in \mathbb{Z}$

$P^3(n) - n = 0$ punya ∞ akar di $\mathbb{Z}$ ※

$P^5(n) - P^2(n) = 0$ $\quad \Rightarrow \deg(P^3) \leq 1$. kalo deg=0 ※ $\Rightarrow \deg(P) = 1 \Rightarrow P(x) = x$.

AZZAM LABIB HAKIM   Kamis, 18 oktober 2018

BARISAN BILANGAN

Fajar Yuliawan

Prinsip Teleskopik. Misalkan $a_1, a_2, \ldots$ suatu barisan bilangan real. Maka berlaku

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

Soal 1. Hitunglah

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1} - 1$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)\cdot(k+1)! - k\cdot k! = (n+1)\cdot(n+1)! - 1$

Soal 2. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku ketaksamaan berikut

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2.$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2.$

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \leq 1$

~~(b)~~ $\cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k}}}$ (b) on the back of paper

(c) $\displaystyle n - 1 < \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{(k-1)^2+1} + \sqrt{k^2+1}} < n$

rasionalkan, dapet $\sqrt{n^2+1} - 1$

Soal 3. Tentukan polinom $P(x)$ sehingga

$$\frac{a}{P(a)} - \frac{a+1}{P(a+1)} = \frac{1}{a(a+1)}$$

untuk setiap bilangan real positif a.

Soal 4. Misalkan $x_1, x_2, \ldots$ suatu barisan bilangan real yang didefinisikan dengan $x_1 = 1/2$ dan $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$. Tentukan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{100}+1}$$

Definisi 0.1. Suatu barisan bilangan real $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dikatakan terbatas di atas (atau di bawah) jika terdapat suatu bilangan real M sehingga $a_k \leq M$ (atau $a_k \geq M$) untuk setiap bilangan asli k. Barisan tersebut dikatakan terbatas jika barisan $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$ terbatas di atas. Deret $a_1 + a_2 + \cdots$ dikatakan terbatas jika terdapat suatu bilangan real M sehingga $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq M$ untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 0.2. Misalkan $a \neq 0$ dan r bilangan real. Deret geometrik $a + ar + ar^2 + \cdots$ terbatas jika dan hanya jika $|r| < 1$.

Soal 5 (Deret Harmonik). Tunjukkan bahwa deret harmonik

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

tidak terbatas.

$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$\vdots$

$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$

Soal 6. Apakah terdapat suatu barisan bilangan real positif $a_1, a_2, \cdots$ sehingga kedua deret

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \text{dan} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2^2 a_2} + \frac{1}{3^2 a_3} + \cdots$$

keduanya terbatas?

Formula jumlah Abel. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dua barisan bilangan real dan untuk stiap $k = 1, 2, \ldots, n$, didefinisikan $S_k = b_1 + \cdots + b_k$. Maka berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(a_k - a_{k+1})$$

Soal 7. Buktikan formula jumlah Abel.

Soal 8. Misalkan $a \neq 1$ suatu bilangan real. Buktikan bahwa Abel $S_k = 1 + \dots + a^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n - 1}{(a-1)^2}.$$

$a_k = k$

Secara khusus, untuk $0 < a < 1$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka^{k-1} = \frac{1}{(a-1)^2}.$$

Akibat 0.3. *Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan $b_1, b_2, \dots, b_n$ dua barisan bilangan real sehingga $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ dan* Abel

$$\begin{aligned} b_1 &\geq 0 \\ b_1 + b_2 &\geq 0 \\ &\vdots \\ b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} &\geq 0 \\ a_n(b_1 + b_2 + \dots + b_n) &\geq 0. \end{aligned}$$

Maka berlaku ketaksamaan

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq 0.$$

Soal 9. Misakan $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ dan $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ bilangan-bilangan real + yang memenuhi

$$\begin{aligned} a_1 &\geq b_1 \\ a_1 + a_2 &\geq b_1 + b_2 \\ &\vdots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n &\geq b_1 + b_2 + \dots + b_n. \end{aligned}$$

Buktikan bahwa $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$.

Soal 10. Misalkan a, b, c, d bilangan-bilangan real sehingga $a^2 \leq 1$, $a^2 + b^2 \leq 5$, $a^2 + b^2 + c^2 \leq 14$ dan $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 30$. Buktikan bahwa $a + b + c + d \leq 10$.

Soal 11. Misalkan $a_1, a_2, \dots$ barisan bilangan real positif sehingga $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt{n}$ untuk setiap bilangan asli n. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku ketaksamaan

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Soal 12. Misalkan $a_1, a_2, \dots$ suatu barisan bilangan real. Jika deret $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ terbatas, buktikan bahwa deret $a_1 + a_2/2 + a_3/3 + \cdots$ juga terbatas.

Barisan rekursif linear orde dua

Soal 13. Diberikan bilangan-bilangan real $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2$. Didefinisikan barisan bilangan real $a_1, a_2, \dots$ dengan

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \quad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Buktikan bahwa

$$a_{n+2} = (\lambda_1 + \lambda_2)a_{n+1} - \lambda_1\lambda_2 a_n$$

untuk setiap bilangan asli n.

Soal 14. Misalkan a, b bilangan real sehingga persamaan kuadrat $x^2 - ax + b = 0$ memiliki akar λ_1, λ_2. Misalkan $x_1, x_2, \dots$ suatu barisan bilangan real yang memenuhi $x_{n+2} = ax_{n+1} - bx_n$ untuk setiap bilangan asli n. Buktikan bahwa terdapat c_1, c_2 yang memenuhi $x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ untuk setiap bilangan asli n.

Soal 15. Tentukan semua fungsi $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ yang memenuhi persamaan $f(f(x)) + f(x) = 2x$ untuk setiap bilangan real positif x.

AZZAM LABIB HAKIM   Kak Yasya

Mandiri Malam
Kamis, 18 Oktober 2018

1. Find all triplets of positive integers (a, b, c) for which the number $3^a + 3^b + 3^c$ is a perfect square.

2. In a chess festival that is held in a school with 2017 students, each pair of students played at most one match versus each other. In the end, it is seen that for any pair of students which have played a match versus each other, at least one of them has played at most 22 matches. What is the maximum possible number of matches in this event?

3. For a non-constant function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prove that there exist real numbers x, y satisfying $f(x + y) < f(xy)$ Turkey Junior 2015

√ 4. Prove that for positive reals a,b,c so that $a + b + c + abc = 4$, Turkey Junior 2014

$$\left(1 + \frac{a}{b} + ca\right)\left(1 + \frac{b}{c} + ab\right)\left(1 + \frac{c}{a} + bc\right) \geq 27$$

holds. $\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3.$ $4 = a+b+c+abc \overset{\text{AM-GM}}{\geq} 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow 1 \geq abc \Rightarrow \sum \frac{1}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geq 3.$

5. Determine the minimum possible amount of distinct prime divisors of $19^{4n} + 4$, for a positive integer n.

6. Let $k > 1$ be a given positive integer. A set S of positive integers is called good if we can colour the set of positive integers in k colours such that each integer of S cannot be represented as sum of two positive integers of the same colour. Find the greatest t such that the set $S = \{a + 1, a + 2, \ldots, a + t\}$ is good for all positive integers a.

7. Consider the set $A = \{1, 2, 3 \ldots, 2^n\}, n \geq 2$. Find the number of subsets B of A such that for any two elements of A whose sum is a power of 2 exactly one of them is in B.

8. Let p be a prime such that p^2 divides $2^{p-1} - 1$. Prove that for all positive integers n the number $(p - 1)(p! + 2^n)$ has at least 3 different prime divisors.

9. Let $a > 0$, the function $f : (0, +\infty) \to R$ satisfies $f(a) = 1$, if for any positive reals x and y, there is

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{a}{x}\right) f\left(\frac{a}{y}\right) = 2f(xy)$$

then prove that $f(x)$ is a constant.

10. Consider two circles k_1, k_2 touching externally at point T. a line touches k_2 at point X and intersects k_1 at points A and B. Let S be the second intersection point of k_1 with the line XT. On the arc $\widehat{TS}$ not containing A and B is chosen a point C. Let CY be the tangent line to k_2 with $Y \in k_2$, such that the segment CY does not intersect the segment ST. If $I = XY \cap SC$. Prove that :

(a) the points C, T, Y, I are concyclic. $\measuredangle TCI = \measuredangle TYI$

(b) I is the excenter of triangle ABC with respect to the side BC.

11. Let ABC an acute triangle and Γ its circumcircle. The bisector of BAC intersects Γ at $M \neq A$. A line r parallel to BC intersects AC at X and AB at Y. Also, MX and MY intersect Γ again at S and T, respectively.

    If XY and ST intersect at P, prove that PA is tangent to Γ.

12. Let $M = (0,1) \cap \mathbb{Q}$. Determine, with proof, whether there exists a subset $A \subset M$ with the property that every number in M can be uniquely written as the sum of finitely many distinct elements of A.

13. Find the number of all permutations of $\{1, 2, \cdots, n\}$ like p such that there exists a unique $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ that :

$$p(p(i)) \geq i$$

14. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that for all positive real numbers x, y :

$$f(y)f(x + f(y)) = f(x)f(xy)$$

AZZAM LABIB HAKIM Jumat, 19 oktober 2018

PERSAMAAN POLINOM

Fajar Yuliawan

✓ 1. Cari semua pasangan polinom $P(x), Q(x)$ sehingga $P(x)Q(x) = P(Q(x))$. On the back of paper

2. Cari semua polinom $P(x)$ dan $Q(x)$ sehingga $P(Q(x)) = (x-1)(x-2)\cdots(x-15)$.

✓ 3. Misalkan $P(x)$ suatu polinom. Buktikan pernyataan-pernyataan berikut.
   - ✓ (a) $P(x) = P(-x)$ jika dan hanya jika $P(x) = Q(x^2)$ untuk suatu polinom $Q(x)$.
   - ✓ (b) $P(x) = -P(-x)$ jika dan hanya jika $P(x) = xQ(x^2)$ untuk suatu polinom $Q(x)$.
   - ✓ (c) Jika $P(x)^2 = Q(x^2)$ untuk suatu polinom $Q(x)$ maka $P(x) = P(-x)$ atau $P(x) = -P(-x)$.

4. Misalkan $P(x)$ suatu polinom yang memenuhi $P(\cos x) = P(\sin x)$ untuk setiap bilangan real x. Buktikan bahwa terdapat suatu polinom $Q(x)$ sehingga $P(x) = Q(x^4 - x^2)$.

✓ 5. Tentukan semua polinom $P(x)$ sehingga $16P(x^2) = P(2x)^2$. ~~back of paper~~. IMOMATH polynomial equations

6. Cari semua polinom $P(x)$ sehingga $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$.

7. ✓ (a) Misakan $P(x)$ polinom berderajat $n \geq 1$. Buktikan bahwa terdapat tunggal polinom $Q(x)$ sehingga $Q(x) = x^n P(1/x)$ untuk setiap bilangan real $x \neq 0$. Lebih lanjut, polinom $Q(x)$ tersebut memenuhi $\deg(Q(x)) \leq n$.
   (b) Misalkan $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ polinom sehingga

Ralat: 7b. Buktikan $P(x)+Q(0)=R(x)+S(0)$
$P(0)+Q(x)=R(0)+S(x)$

$$P(x) + Q\left(\frac{1}{x}\right) = R(x) + S\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Jika $Q(x)$ bukan polinom konstan, buktikan bahwa $P(x) = R(x)$ dan $Q(x) = S(x)$.

8. (a) Jika $P(x)$, $Q(x)$ dan $R(x)$ polinom yang memenuhi $P(R(x)) = Q(R(x))$ dan $R(x)$ tidak konstan, maka $P(x) = Q(x)$.
   (b) Tentukan semua polinom $P(x)$ sehingga $P(P(x)) = P(x)^k$.

✓ 9. Misalkan $P(x)$ polinom sehingga ~~tinjau degree~~ pakai 7.a

$$P(x)^2 + P\left(\frac{1}{x}\right)^2 = P(x^2)P\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

untuk setiap bilangan real x tidak nol. Buktikan bahwa $P(x) = 0$.

10. Tentukan semua polinom $f(x)$ sehingga

$$f(x+1) + f(x-1) = 2f(x) + 2f(1).$$

11. Tentukan semua polinom $S(x)$ sehingga terdapat suatu polinom $P(x)$ yang memenuhi $P(1) + P(2) + \cdots + P(n) = S(n)$ untuk setiap bilangan asli n.

12. Cari semua polinom $P(x)$ berderajat 3 sehingga $P(x) + P(y) \geq P(x+y)$ untuk setiap bilangan real tak negatif x, y.

✓ 13. Cari semua polinom $P(x)$ sehingga $(x+1)P(x) = (x-2019)P(x+1)$. back of paper

✓ 14. Cari semua polinom $P(x)$ sehingga $8(x-1)P(x) = (x-8)P(2x)$. Perhatiin leading coefficientnya, dapet $n=3$. subs, $x=1$, $x=8$, $x=2$ dapet $P(x)=k(x-2)(x-4)(x-8)$

15. Cari semua polinom $P(x)$ sehingga $P(x^2-1) = P(x)P(-x)$.

AZZAM LABIB HAKIM   Jumat, 19 oktober 2018

FUNGSI KONVEKS

Fajar Yuliawan

Definisi 0.1. Suatu fungsi f yang terdefinisi pada suatu interval I dikatakan konveks pada I apabila untuk setiap bilangan real $x, y \in I$ dan setiap $t \in [0, 1]$ berlaku ketaksamaan

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y).$$

Contoh 0.2. .

(a) Untuk $r > 1$ (atau $r < 0$), $f(x) = x^r$ konveks pada $[0, \infty)$ (atau pada $(0, \infty)$).

(b) Untuk $0 < r < 1$, $f(x) = -x^r$ konveks pada $[0, \infty)$.

(c) $f(x) = -\sin x$ konveks pada $[0, \pi]$.

(d) $f(x) = \tan x$ konveks pada $[0, \pi/2)$.

(e) Jumlah dua fungsi yang konveks pada I juga konveks pada I.

(f) $f(x) = e^x$ konveks pada $\mathbb{R}$.

(g) Untuk setiap $a > 0$, $f(x) = -({}^a\log x)$ konveks pada $(0, \infty)$.

(h) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x - a|$ konveks pada $\mathbb{R}$.

Lihat titik-titik ujung

Teorema 0.3. *Misalkan $f(x)$ suatu fungsi yang konveks pada suatu interval I. Jika $a < x < b$ dan $a, b \in I$ maka* $\max\{f(a), f(b)\} \geq f(x)$.

Proof. Gunakan definisi fungsi konveks dan fakta bahwa $x = ta + (1-t)b$ untuk suatu bilangan real tak negatif $t \in [0, 1]$. □

✓ **Soal 1.** Jika $a, b, c \in [0, 1]$, buktikan bahwa   max saat (1,1,1), (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1).

(Arthur Engel, E.24 / USAMO 1980)

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

✓ **Soal 2.** Misalkan $0 \leq a, b, c \leq 1$. Buktikan bahwa   max saat (0,1,1) dan permutasi

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

✓ **Soal 3.** Misalkan $0 \leq x, y, z \leq 1$. Buktikan bahwa $x^2 + y^2 + z^2 \leq xyz + 2$.   max saat (1,1,1) (1,1,0) dan permutasi.

✓ **Soal 4.** Bilangan tak negatif a, b, c, x, y, z, k memenuhi $a + x = b + y = c + z = k$. Buktikan bahwa $ay + bz + cx \leq k^2$.   (0,k,0,k,0,k)

✓ **Soal 5.** Misalkan $n \geq 2$ dan $1 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq 2$. Tentukan nilai maksimum dari

$$\frac{x_1}{2 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2}{2 + x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n}{2 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}.$$

Soal 6. Misalkan $n \geq 2$ dan $1 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq 2^n$. Buktikan bahwa

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \left(\frac{n-1}{2} + 2^{n-1}\right) \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

✓ **Soal 7.** Misalkan $n \geq 2$ dan $1 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq 2$. Tentukan nilai maksimum dari

$$\underbrace{(1,1,1,\ldots,1}_{\frac{n}{2}},\underbrace{0,0,\ldots,0)}_{\frac{n}{2}}$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right). \leq \frac{9}{8}n^2$$

√**Soal 8.** Misalkan $n \geq 2$ dan $0 \leq x_i \leq 1$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$. Buktikan bahwa

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

$(1,0,1,0,\ldots,1,0)$ even

$(1,0,1,0,\ldots,1,0,1)$ odd

Ketaksamaan Majorisasi (Karamata)

Definisi 0.4. Barisan $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ "majorize" (atau mendominasi) barisan $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ jika berlaku

$$\begin{aligned} a_1 &\geq b_1 \\ a_1 + a_2 &\geq b_1 + b_2 \\ &\vdots \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} &\geq b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \end{aligned}$$

Teorema 0.5 (Ketaksamaan Majorisasi). *Misalkan f suatu fungsi konveks pada interval I. Jika barisan $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ mendominasi barisan $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ dan kedua barisan tersebut berada di dalam I, maka berlaku*

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n).$$

Proof. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan bahwa $a_i \neq b_i$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$. Menggunakan Formula jumlah Abel, selisih ruas kiri dan kanan adalah

$$\begin{aligned} \text{LHS} - \text{RHS} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f(a_k) - f(b_k)}{a_k - b_k} \right) (a_k - b_k) \\ &= \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\frac{f(a_k) - f(b_k)}{a_k - b_k} - \frac{f(a_{k+1}) - f(b_{k+1})}{a_{k+1} - b_{k+1}} \right) \left(\sum_{j=1}^{k} a_j - \sum_{j=1}^{k} b_j \right) \right] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

generalisasinya ada di Algebraic Inequalities old and new method, chapter 4.

√ **Soal 9.** Buktikan ketaksamaan Popoviciu berikut. Jika f fungsi konveks pada interval I dan $a, b, c \in I$ maka berlaku bagi kasus

$$f(a) + f(b) + f(c) + 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{b+c}{2}\right) + 2f\left(\frac{c+a}{2}\right).$$

Soal 10. Misalkan a, b, c bilangan real positif dengan $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca).$$

$a = e^x, b = e^y, c = e^z$. $e^x e^y e^z = 1$. $x + y + z = 0$

$3 = 3e^{x+y+z} = 3e^{2x+2y+2z}$

$f(2x) + f(2y) + f(2z) + 3f\left(\frac{2(x+y+z)}{3}\right) \geq 2f(x+y) + 2f(x+z) + 2f(y+z)$ by Karamata

Aczel's Ineq: if $a_1^2 > a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2$ or $b_1^2 > b_2^2 + \ldots + b_n^2$ then

$$(a_1b_1 - a_2b_2 - \ldots - a_nb_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2)$$

AZZAM LABIB HAKIM   Sesi Malam Kak Yasya

Mandiri Malam

Jumat, 19 Oktober 2018

√ 1. Let x, y and z be positive real numbers. Show that $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4$.
$4 + x^2 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{4}xyz^2 + \frac{1}{4}xyz^2 + \frac{1}{4}xyz^2 + \frac{1}{4}xyz^2 \geq 8\sqrt[8]{\frac{x^8y^8z^8}{2^8}} = 4xyz$. Eq. iff $x = y = z = 2$.

2. Consider 70-digit numbers with the property that each of the digits $1, 2, 3, ..., 7$ appear 10 times in the decimal expansion of n (and $8, 9, 0$ do not appear). Show that no number of this form can divide another number of this form.

3. For any positive integers n and k, let $L(n, k)$ be the least common multiple of the k consecutive integers $n, n+1, \ldots, n+k-1$. Show that for any integer b, there exist integers n and k such that $L(n, k) > bL(n+1, k)$.

4. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with opposite sides not parallel. Let X and Y be the intersections of AB, CD and AD, BC respectively. Let the angle bisector of $\angle AXD$ intersect AD, BC at E, F respectively, and let the angle bisectors of $\angle AYB$ intersect AB, CD at G, H respectively. Prove that $EFGH$ is a parallelogram.

5. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let P be the point of intersection of AC and BD. Suppose that $AC + AD = BC + BD$. Prove that the internal angle bisectors of $\angle ACB$, $\angle ADB$ and $\angle APB$ meet at a common point.

6. Amy has divided a square into finitely many white and red rectangles, each with sides parallel to the sides of the square. Within each white rectangle, she writes down its width divided by its height. Within each red rectangle, she writes down its height divided by its width. Finally, she calculates x, the sum of these numbers. If the total area of white equals the total area of red, determine the minimum of x.

7. Let ABC be a triangle, and let D be a point on side BC. A line through D intersects side AB at X and ray AC at Y. The circumcircle of triangle BXD intersects the circumcircle ω of triangle ABC again at point Z distinct from point B. The lines ZD and ZY intersect ω again at V and W respectively. Prove that $AB = VW$

8. For a positive integer m denote by $S(m)$ and $P(m)$ the sum and product, respectively, of the digits of m. Show that for each positive integer n, there exist positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfying the following conditions:

$$S(a_1) < S(a_2) < \cdots < S(a_n) \text{ and } S(a_i) = P(a_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(We let $a_{n+1} = a_1$.)

9. Let $S = \{1, 2, \ldots, 2014\}$. For each non-empty subset $T \subseteq S$, one of its members is chosen as its representative. Find the number of ways to assign representatives to all non-empty subsets of S so that if a subset $D \subseteq S$ is a disjoint union of non-empty subsets $A, B, C \subseteq S$, then the representative of D is also the representative of one of A, B, C.

10. Let $S = \{2, 3, 4, \ldots\}$ denote the set of integers that are greater than or equal to 2. Does there exist a function $f : S \to S$ such that

$$f(a)f(b) = f(a^2b^2) \text{ for all } a, b \in S \text{ with } a \neq b?$$

11. Let n be a positive integer. Consider $2n$ distinct lines on the plane, no two of which are parallel. Of the $2n$ lines, n are colored blue, the other n are colored red. Let $\mathcal{B}$ be the set of all points on the plane that lie on at least one blue line, and $\mathcal{R}$ the set of all points on the plane that lie on at least one red line. Prove that there exists a circle that intersects $\mathcal{B}$ in exactly $2n - 1$ points, and also intersects $\mathcal{R}$ in exactly $2n - 1$ points.

12. Circles ω and Ω meet at points A and B. Let M be the midpoint of the arc AB of circle ω (M lies inside Ω). A chord MP of circle ω intersects Ω at Q (Q lies inside ω). Let ℓ_P be the tangent line to ω at P, and let ℓ_Q be the tangent line to Ω at Q. Prove that the circumcircle of the triangle formed by the lines ℓ_P, ℓ_Q and AB is tangent to Ω.

13. Let ABC be a triangle ($\angle A \neq 90°$). BE, CF are the altitudes of the triangle. The bisector of $\angle A$ intersects EF, BC at M, N. Let P be a point such that $MP \perp EF$ and $NP \perp BC$. Prove that AP passes through the midpoint of BC.

14. We arranged all the prime numbers in the ascending order: $p_1 = 2 < p_2 < p_3 < \cdots$. Also assume that $n_1 < n_2 < \cdots$ is a sequence of positive integers that for all $i = 1, 2, 3, \cdots$ the equation $x^{n_i} \equiv 2 \pmod{p_i}$ has a solution for x. Is there always a number x that satisfies all the equations?

15. Determine the least real number k such that the inequality

$$\left(\frac{2a}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c}{c-a}\right)^2 + k \geq 4\left(\frac{2a}{a-b} + \frac{2b}{b-c} + \frac{2c}{c-a}\right)$$

holds for all real numbers a, b, c.

16. For a finite set A of positive integers, a partition of A into two disjoint nonempty subsets A_1 and A_2 is *good* if the least common multiple of the elements in A_1 is equal to the greatest common divisor of the elements in A_2. Determine the minimum value of n such that there exists a set of n positive integers with exactly 2015 good partitions.