logo.png

Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan Oktober 2017

24–27 November 2017

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Untuk setiap bilangan real a, b, c yang berbeda, definisikan

$$f(a,b,c) = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-b)(c-a)}.$$

   Hitunglah $f(-55, 19, 18)$.

2. Bilangan $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ diletakkan pada sebuah lingkaran secara acak. Dalam arah jarum jam, anda melihat 9 buah bilangan 2 digit di lingkaran tersebut. Hitunglah jumlah kesembilan bilangan tersebut.

3. Tentukan bilangan prima p terbesar sehingga $2017!$ habis dibagi p^5.

4. Hitunglah luas region yang menyatakan himpunan semua titik (x, y) yang memenuhi $x \geq 0$, $y \geq 0$, dan $x + \lfloor x \rfloor + y \leq 4$.

5. Hitunglah nilai dari

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{20}{2}.$$

6. Misalkan a, b, c adalah bilangan real positif yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} a + b & = c \\ a^2 + b^2 + c^2 & = 54 \end{cases}.$$

   Misalkan A adalah nilai terbesar yang mungkin untuk a, B adalah nilai terbesar yang mungkin untuk b, dan C adalah nilai terbesar yang mungkin untuk c. Tentukan nilai dari $A + B + C$.

7. Misalkan $ABCD$ persegi dengan panjang sisi 5. Misalkan E adalah titik tengah AB dan F adalah titik tengah DE. Jika luas $BCFE$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m, n adalah bilangan asli relatif prima, carilah nilai dari $(m - 4n)^n$.

8. Diberikan segitiga sama sisi ABC. Misalkan D, E dan F berturut turut adalah titik tengah sisi BC, CA dan AB. Misalkan juga D', E' dan F' berturut turut adalah titik tengah sisi EF, DF dan DE. Ramanda memilih 3 bilangan berbeda dari himpunan $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Kemudian tiga bilangan yang dipilih Ramanda masing masing diletakkan pada titik A, B dan C. Bilangan pada titik D, E dan F berturut turut adalah rata rata dari bilangan pada ujung segmen BC, CA dan AB. Kemudian bilangan pada titik D', E' dan F' berturut turut adalah rata rata dari bilangan pada ujung sisi EF, DF dan DE. Misalkan M adalah himpunan nilai rata-rata yang mungkin dari bilangan pada titik D', E'dan F', tentukan median dari himpunan M.

9. Pak Timi memiliki 4 buah apel, 5 buah jeruk dan 6 buah mangga. Ia akan memberi semua buah ini kepada anaknya Ami, Jimi dan Mimi. Ami paling suka apel, Jimi paling suka jeruk dan Mimi paling suka mangga. Jika semuanya mendapatkan minimal satu buah, penerima satu jenis buah terbanyak ialah anak yang paling menyukai buah tersebut (tidak boleh seri) dan buah-buah dianggap tidak bisa dibedakan, tentukan banyak cara pak Timi membagikan buah-buah tersebut

10. Misalkan x_1, x_2, x_3 adalah akar-akar dari $x^3 - x^2 + 5x + 7 = 0$ dan y_1, y_2 adalah akar-akar real dari $y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 58y + 40 = 0$ dengan $y_1 \leq y_2$. Tentukan nilai dari

$$(\frac{x_1^2}{x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_1x_3} + \frac{x_3^2}{x_1x_2} - 3)^{y_1^{y_2} - y_2^{y_1}}.$$

11. Diketahui segitiga ABC dengan $\angle A = 135°$. Segmen AE dan AD membagi tiga sama besar $\angle BAC$, dengan D dan E berada di sisi BC dengan E terletak lebih dekat terhadap C. Jika $CE = 6$ dan $BD = 9$, carilah $AC^2 + AE^2 + AD^2 + AB^2$

12. Diketahui f adalah fungsi dari bilangan real ke bilangan real yang memenuhi

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \left(\left(\sqrt{2017} \right)^{x - \lfloor x \rfloor} - 1 \right).$$

Himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $f(x) \leq 1$ dan $1 \leq x < 2016$ adalah gabungan beberapa interval yang tidak beririsan. Apabila S menyatakan jumlah dari panjang interval-interval tersebut, tentukan dua digit terakhir dari 2017^S.

13. Tentukan bilangan non-negatif terkecil a sehingga terdapat b yang memenuhi: 2017 digit terakhir dari a^b, semuanya 1.

14. Diketahui C_0 adalah lingkaran berjari-jari 1 dan berpusat di O. A_0 adalah sebarang titik pada lingkaran C_0. C_1 adalah lingkaran berjari-jari r dengan $r < 1$ yang menyinggung C_0 dari dalam pada titik A_0 dan berdiameter A_0A_1. C_2 adalah lingkaran berjari-jari r^2 yang menyinggung C_1 dari dalam pada titik A_1 dan berdiameter A_1A_2. Kita konstruksi lingkaran-lingkaran dengan cara yang sama seperti C_1 dan C_2 terus menerus hingga terbentuk barisan lingkaran $C_1, C_2, C_3, \ldots$ dan barisan titik $A_1, A_2, A_3, \ldots$ dimana C_n adalah lingkaran berjari-jari r^n dan menyinggung C_{n-1} di A_{n-1} dan berdiameter $A_{n-1}A_n$. Terdapat titik B yang terletak di dalam setiap lingkaran tersebut. Apabila $OB = \frac{8}{11}$ dan r dapat dinyatakan dalam $\frac{m}{n}$ di mana m dan n adalah bilangan asli yang relatif prima, tentukan $m + n$.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Dante memiliki sekeping koin yang diletakkan pada suatu titik $(20, 17)$ di bidang kartesius. Untuk setiap bilangan asli n, definisikan langkah tipe n sebagai pemindahan koin dari titik (x, y) ke titik $(x+n, y+n), (x+n, y-n), (x-n, y+n)$, atau $(x-n, y-n)$.

   (a) Selidiki apakah Dante dapat memindahkan koinnya ke titik $(0, 1)$ dengan menggunakan hanya menggunakan kombinasi dari langkah tipe 2 dan langkah tipe 3.

   (b) Misalkan koin Dante ada di titik (p, q) buktikan bahwa Dante dapat memindahkan koinnya ke titik-titik berikut $(p+1, q+1)$, $(p+1, q-1)$, $(p-1, q+1)$, $(p-1, q-1)$ dengan menggunakan hanya menggunakan kombinasi dari langkah tipe 2 dan langkah tipe 3.

   (c) Selidiki apakah Dante dapat memindahkan koinnya ke titik $(0, 0)$ dengan menggunakan hanya menggunakan kombinasi dari langkah tipe 2 dan langkah tipe 3.

   Penuntun: tinjau jumlah koordinat titik pada setiap langkah.

   (d) Tentukan semua titik (x, y) di koordinat kartesius sehingga Dante dapat memindahkan koinnya ke titik $(0, 0)$ dengan menggunakan hanya menggunakan kombinasi dari langkah tipe 2 dan langkah tipe 3.

2. Misalkan bilangan asli x dikatakan *indah* jika terdapat bilangan asli $n \geq 2$ sehingga n membagi x dan $x = y^n$ untuk suatu bilangan asli y. Tentukan banyaknya pembagi dari 30^{30} yang *indah*.

3. Diberikan segitiga ABC dengan G, I, dan O menyatakan titik berat, titik pusat lingkaran dalam dan titik pusat lingkaran luar dari $\triangle ABC$. Buktikan bahwa $OG = OI$ jika dan hanya jika segitiga ABC sama sisi.

4. Misalkan $\mathbb{R}^+$ menyatakan himpunan semua bilangan real positif. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ yang memenuhi

$$f(xf(y) + 1) = yf(x + y)$$

   untuk setiap bilangan real positif x dan y.