Inequalities

Joseph Andreas

1 Order in Real Numbers

1.1 Basic Ordering

Buktikan pernyataan-pernyataan di bawah ini.

1. $a < 0, b < 0 \rightarrow ab > 0$.
2. $a < 0, b > 0 \rightarrow ab < 0$.
3. $a < b, b < c \rightarrow a < c$.
4. $a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0$.
5. $a < 0 \rightarrow \frac{1}{a} < 0$.
6. $0 < a < b, 0 < c < d \rightarrow ac < bd$.
7. $a > 1 \rightarrow a^2 > a$.
8. $0 < a < 1 \rightarrow a^2 < a$.

1.2 Triangle Inequality

1.3 Problems

Tunjukkan bahwa

1. $||a| - |b|| \leq |a - b|$
2. $x > 0, y > 0 \rightarrow x^2 + y^2 > xy$
3. $|a| + |b| + |c| - |a + b| - |b + c| - |c + a| + |a + b + c| \geq 0$

1.4 Additional Problems

1. Jika $a \geq b, x \geq y$, tunjukkan bahwa $ax + by \geq ay + bx$.
2. Jika $x, y > 0$, tunjukkan bahwa $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

3. Misalkan $a+d=b+c$. Tunjukkan bahwa

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)\geq 0$$

4. Misalkan $f(a,b,c,d)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2$. Tunjukkan bahwa $f(a,c,b,d)>f(a,b,c,d)>f(a,b,d,c)$.

5. Carilah seluruh x sehingga

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$$

6. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli n, maka bagian pecahan dari $\sqrt{4n^2+n}$ kurang dari $\frac{1}{4}$. (bagian pecahan dari suatu bilangan x didefinisikan sebagai $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$, dengan fungsi $\lfloor x\rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar y sehingga $y\leq x$.

7. Tunjukkan ketaksamaan Schur, untuk setiap bilangan real positif a,b,c, maka berlaku

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$$

2 The AM-GM Inequality

2.1 Basic Idea

1. Buktikan jika a,b bilangan real positif, maka ketaksamaan QM-AM-GM-HM berlaku, yaitu

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

2. Jika $x>0$, tunjukkan bahwa $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

3. Tunjukkan bahwa $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ jika $a,b>0$.

4. Tunjukkan bahwa $\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a}\leq\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\leq\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$ jika $0<b\leq a$.

5. Jika $x,y,z>0$, tunjukkan bahwa $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$.

6. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan real x,y,z, maka berlaku $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$.

7. Tunjukkan bahwa $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z$.

8. Tunjukkan bahwa $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\geq\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}$.

9. Tunjukkan bahwa $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$.

2.2 Generalized AM-GM

Kecuali dikatakan lain, semua bilangan di bawah ini adalah real positif, dan yang diminta adalah untuk menunjukkan pernyataan di bawah ini.

1. Tunjukkan bahwa $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.
2. Tunjukkan bahwa
$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$
3. Misalkan $a, b, c > 0$. Jika $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$, tunjukkan bahwa $abc \leq 1$.
4. Tunjukkan bahwa $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9abc$.
5. Jika $a > 1$, tunjukkan bahwa $a^n - 1 > n\left(a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}}\right)$
6. Jika $abc = 1$, tunjukkan bahwa $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$.
7. Tunjukkan bahwa $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$.
8. Tunjukkan bahwa $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.
9. (IMO Shortlist 1996) Jika $abc = 1$, tunjukkan bahwa
$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$
10. Tunjukkan bahwa $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$.
11. Jika $a + b + c = 1$, tunjukkan bahwa
$$\left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 64$$
12. Jika $a + b + c = 1$, tunjukkan bahwa
$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 64$$
13. Tunjukkan bahwa
$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$
14. Misalkan $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1$. Tunjukkan bahwa
$$x_1 x_2 \ldots x_n \geq (n-1)^n$$

15. (IMO Shortlist 1998) Misalkan $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n (1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n))}{(a_1 + a_2 + \ldots a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}$$

16. (Russia 1992) Tunjukkan bahwa $x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz$

17. (APMO 1998) Tunjukkan bahwa

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

18. (IMO 2012) Jika $a_2, a_3, \ldots, a_n$ adalah bilangan real positif, $n \geq 3$, sehingga $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$, tunjukkan bahwa

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n > n^n$$

3 The Cauchy-Schwarz Inequality

3.1 Basic Idea

Kecuali dikatakan lain, semua bilangan di bawah ini adalah real positif, dan yang diminta adalah untuk menunjukkan pernyataan di bawah ini.

1. Tunjukkan ketaksamaan QM-AM

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

2. Misalkan $P(x)$ adalah polinomial dengan koefisien positif. Tunjukkan bahwa jika

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{P(x)}$$

berlaku untuk $x = 1$, maka ketaksamaan tersebut berlaku untuk setiap $x > 0$.

3. (Nesbitt) Tunjukkan bahwa

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

4. Tunjukkan bahwa

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}$$

5. Tunjukkan bahwa

$$\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + zx} \leq 2(x + y + z)$$

6. Tunjukkan bahwa

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

3.2 Cauchy-Schwarz Engel Form

Kecuali dikatakan lain, semua bilangan di bawah ini adalah real positif, dan yang diminta adalah untuk menunjukkan pernyataan di bawah ini.

1. Tunjukkan bahwa $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$.
2. (APMO 1991) Misalkan $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ adalah bilangan real positif sehingga $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Tunjukkan bahwa
$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$
3. (Michael Rozenberg) Jika $a^2+b^2+c^2+d^2=4$, tunjukkan bahwa
$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}\geq 4$$
4. (Republik Ceko dan Slovakia 1999) Tunjukkan bahwa
$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1$$
5. Tunjukkan bahwa
$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq a+b+c$$
6. (Croasia 2004) Tunjukkan bahwa
$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\geq\frac{3}{4}$$
7. Tunjukkan bahwa
$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\leq 1$$
8. Tunjukkan bahwa
$$\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c}{b+2c+d}+\frac{d}{c+2d+a}+\frac{a}{d+2a+b}\leq 1$$
9. (Romania TST) Tunjukkan bahwa
$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{3}{a+b}$$
10. (IMO 1995) Misalkan a,b,c bilangan real positif, $abc=1$. Tunjukkan bahwa
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$
11. (Zhautykov 2008) Jika $abc=1$, tunjukkan bahwa
$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{3}{2}$$