



Kontes Terbuka Olimpiade Matematika
Simulasi OSN Matematika SMA 2018

25–26 Mei 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi \mathbb{N} menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi \mathbb{Z} menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi \mathbb{Q} menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi \mathbb{R} menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \dots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b .
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n .
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
 - (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
 - (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
 - (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC .
 - (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A , garis berat dari titik B , dan garis berat dari titik C .
 - (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A , garis tinggi dari titik B , dan garis tinggi dari titik C .

- (f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A , B , dan C .
- (g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC , CA , dan AB .
16. Luas dari sebuah segi- n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.
17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i+1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i . Contohnya, $3, 5, 7, 9, \dots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.
18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan tak nol (bisa jadi 1) untuk setiap i . Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \dots$ merupakan barisan geometrik.
19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{a+b}{2}$.
20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah \sqrt{ab} .
21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Hari Kedua

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

5. Afif dan Ekky sedang bermain menggunakan 2018 koin di atas meja secara bergiliran dan Afif mendapat giliran pertama. Pada tiap giliran, mereka dapat mengambil beberapa koin pada meja tersebut sedemikian sehingga banyaknya koin yang diambil merupakan pembagi dari banyak koin yang tersisa. Sebagai contoh, pada giliran pertama Afif dapat mengambil 2 koin sehingga tersisa 2016 koin dan pada giliran kedua Ekky dapat mengambil 8 koin sehingga tersisa 2008 koin. Pemain yang mengambil koin terakhir dinyatakan kalah. Tentukan siapakah yang selalu dapat memenangkan permainan.
6. Suatu segitiga ABC dikatakan sebagai segitiga ‘WoW’ jika ketiga titik sudutnya, titik pusat lingkaran dalam dan titik pusat lingkaran luarnya berada di titik letis. Apakah ada tak hingga segitiga ‘WoW’ yang tidak siku-siku dan tidak saling sebangun?
- (Titik letis adalah titik dengan koordinat dalam kartesius berupa 2 bilangan bulat, contohnya $(-2, 3)$ dan $(1, 4)$)

7. Diberikan barisan bilangan real $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ yang memenuhi

(a) $a_0 = a_{2018} = 0$, dan

(b) $|a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}| \leq 1$ untuk setiap $k = 1, 2, \dots, 2017$.

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli k yang kurang dari 2019, berlaku $|a_k| \leq \frac{k(2018-k)}{2}$.

8. Diberikan barisan a_n yang memenuhi $a_0 = a_1 = 97\sqrt{2}$ dan untuk setiap $n \geq 1$ berlaku

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_n a_{n-1} + \sqrt{(a_n^2 - 2)(a_{n-1}^2 - 2)} \right).$$

Buktikan bahwa $2 + \sqrt{2 + 2a_n\sqrt{2}}$ adalah bilangan kuadrat sempurna untuk setiap bilangan asli n .