Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Simulasi OSP Matematika SMA 2018

30 Maret – 1 April 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Diketahui barisan $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{20}$ merupakan barisan aritmetika dengan $a_{10} = 182$. Apabila $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} = 2000$, tentukan a_6.

2. Diberikan koordinat $A(-6,-8), B(4,-10), C(8,6)$, dan $D(-4,8)$. Tentukan luas daerah $ABCD$.

3. Pak Budi membeli setengah lusin lampu dari perusahaan 'Membuatku Bahagia'. Pabrik lampu perusahaan 'Membuatku Bahagia' mengalami kendala teknis yang menyebabkan 40% lampu yang diproduksi memiliki daya yang lebih kecil dibanding dengan lampu lainnya. Jika peluang Pak Budi mendapatkan tepat 2 lampu yang memiliki daya yang lebih kecil memiliki bentuk paling sederhana $\frac{a}{b}$ dimana a, b bilangan asli, tentukan nilai dari $b - 3a$.

4. Misalkan n anggota himpunan $\{1, 2, 3, , 100\}$ sehingga n^4+20n^2+100 bukan pangkat 4 dari suatu bilangan bulat. Tentukan banyak nilai n yang mungkin.

5. Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ dan $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Tentukan banyak himpunan bagian S yang elemen maksimalnya berada di A.

6. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif kurang dari 2018 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ untuk suatu bilangan bulat x.

7. Tentukan nilai minimum dari
$$\frac{a+b}{2} + \frac{2}{ab - b^2}$$
dimana a dan b adalah bilangan real positif dengan $a > b$.

8. Dua buah lingkaran Γ_1 dan Γ_2 berpotongan di titik X dan Y. Garis l, yang melalui titik X dan tegak lurus dengan XY, memotong Γ_1 dan Γ_2 berturut-turut di titik P dan Q dimana titik P dan Q berbeda dengan titik X. Garis k_1 dan k_2 masing-masing menyinggung Γ_1 di P dan Γ_2 di Q, berturut-turut. Garis k_1 dan k_2 berpotongan di titik S, serta $XY = 8$, $PX = 6$ dan $QX = 15$. Apabila panjang dari SY dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$, dimana $FPB(a, b) = 1$, tentukan $a + b$.

9. Diketahui bilangan asli x dan y memenuhi persamaan
$$3y^2 - 5x^2 + 8 = x^3 + 12y + 8x.$$
Diketahui pula bahwa $y > 1000$. Tentukan nilai y terkecil yang mungkin.

10. Garis BD dan CE adalah garis tinggi segitiga lancip ABC. Apabila luas $\triangle AED = 2100$ dan luas $\triangle ABC = 2500$ serta panjang jari-jari lingkaran luar $\triangle AED$ adalah $20\sqrt{21}$, tentukan panjang BC.

11. Barisan a_n didefinisikan sebagai berikut : $a_0 = 3,\ a_1 = -1$, dan untuk $n \geq 2$ berlaku :
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 4$$
Tentukan sisa pembagian a_{2018} ketika dibagi 2018.

12. Sebuah sekolah memiliki 341 murid. Mereka akan dibagi menjadi 11 kelas, dengan setiap kelas berisikan sebanyak murid yang sama. Tentukan banyak minimum siswa laki-laki di sekolah tersebut agar dapat dijamin bagaimanapun pembagian kelas, banyak kelas yang siswa laki-lakinya lebih banyak dari siswa wanitanya selalu lebih banyak dari banyak kelas yang siswa wanitanya lebih banyak dari siswa laki-lakinya.

13. Untuk sebarang barisan $X = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$, definisikan $\alpha(X)$ sebagai barisan $(x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \cdots)$, yaitu barisan yang suku ke-n nya adalah $x_{n+1} - x_n$. Misalkan setiap suku dari barisan $\alpha(\alpha(X))$ bernilai 1 dan $x_{18} = x_{20} = 0$. Tentukan $2x_1$.

14. Tentukan jumlah semua bilangan asli n sedemikian hingga $\sqrt{n^2 + 91n + 1921}$ merupakan bilangan asli.

15. Misalkan terdapat 2 lingkaran O_1 dan O_2 bersinggungan di titik X dengan panjang diameter berturut-turut 25 dan 10. Misalkan pada lingkaran O_1 dan O_2 berturut-turut dipilih titik A dan B dengan segmen AB melalui titik X dan panjang $AB = 21$ diketahui bahwa CX merupakan salah satu diameter lingkaran O_1. Tentukan luas dari segitiga ACX.

16. Panitia KTO Matematika sedang mengadakan makan malam bersama di sebuah meja berbentuk lingkaran. Dari 25 orang panitia yang mengikuti makan malam bersama tersebut, 6 orang dipilih secara acak untuk bernyanyi di panggung. Tidak ada 3 orang di antaranya yang duduk berurutan. Tentukan banyaknya kemungkinan memilih 6 orang tersebut sehingga terdapat tepat 2 pasang orang di antaranya yang duduk bersebelahan dimana setiap pasang terdiri atas 2 orang.

17. Diberikan himpunan $S = \{s_1, s_2, ..., s_{2018}\}$ yang mengandung 2018 bilangan asli yang memenuhi:

    - $0 < s_1 < s_2 < s_3 < \cdots < s_{2018} = 2022$
    - $s_1, s_3, s_5, \ldots, s_{2017}$ merupakan bilangan-bilangan ganjil
    - $s_2, s_4, s_6, \ldots, s_{2018}$ merupakan bilangan-bilangan genap

    Jika banyaknya himpunan S yang mungkin adalah P, tentukan sisa dari P dibagi 2000.

18. Diketahui $\triangle ABC$ merupakan segitiga dengan $\angle BAC = 78°, \angle CBA = 81°$ dan panjang jari-jari lingkaran luar 2018. Titik M merupakan titik tengah sisi BC dan titik H adalah perpotongan garis tinggi $\triangle ABC$. Diketahui pula bahwa P adalah perpotongan garis bagi dalam sudut $\angle BAC$ dengan lingkaran luar $\triangle ABC$. Garis melalui M dan tegak lurus AP memotong PH pada titik Q. Tentukan panjang MQ.

19. Diketahui bilangan real m dan n memenuhi sistem persamaan:

$$\begin{cases} 2m^5 + 10m^3 + n^2 = 2m^3n + m^2n + 5n \\ (m+1)\sqrt{n-5} = m + n - 3m^2 - 2 \end{cases}$$

Tentukan nilai terbesar yang mungkin untuk $m^2 + n^2$.

20. Sebuah himpunan bilangan asli A yang banyak anggotanya berhingga dan lebih dari 1 disebut *erat* apabila untuk setiap i, j anggota A, bilangan $\frac{i+j}{gcd(i,j)}$ juga merupakan anggota A. Misalkan S adalah himpunan yang berisi semua himpunan *erat* yang mengandung 132 sebagai anggota (diketahui S tidak kosong). Definisikan $D(X)$ sebagai jumlahan dari anggota anggota himpunan bilangan asli X. Tentukan nilai dari $D(s_1) + D(s_2) + \cdots D(s_k)$, dimana $s_1, s_2, \ldots, s_k$ adalah semua anggota S.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Misalkan sebuah persegi dengan panjang sisi 10 satuan akan dibagi menjadi 100 buah persegi dengan panjang 1 satuan. Budi akan mengisi angka 1 sampai 100 ke setiap persegi kecil secara acak sedemikian hingga tidak ada dua persegi kecil yang memuat angka yang sama. Kemudian, Budi akan menghitung jumlah bilangan pada setiap baris, kolom dan diagonal lalu mencatatnya. Budi mencatat 22 bilangan pada setelah selesai menjumlahkan. Tentukan peluang rata-rata jumlah ke-22 bilangan tersebut merupakan rata-rata terkecil yang mungkin.

2. Tentukan semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi

$$x + y = \sqrt{z^2 + 2018}$$
$$y + z = \sqrt{x^2 + 2018}$$
$$z + x = \sqrt{y^2 + 2018}$$

3. $ABCD$ merupakan segiempat tali busur dengan pusat lingkaran luar O dan panjang jari-jari lingkaran luar R. Diketahui pula bahwa diagonal AC dan BD saling tegak lurus dan berpotongan di P. Buktikan bahwa

$$AC^2 + BD^2 + 4OP^2 = 8R^2$$

4. Pada suatu pesta pernikahan, setiap orang kenal tepat 25 orang lainnya. Diketahui bahwa :

   - Untuk setiap dua orang X dan Y yang saling kenal, tidak ada orang lain yang kenal dengan X dan Y.
   - Untuk setiap dua orang X dan Y yang tidak saling kenal, terdapat tepat 8 orang yang kenal dengan X dan kenal dengan Y.

   Tentukan banyak orang yang hadir di pesta tersebut.

5. Untuk n bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, notasikan $\theta(n)$ sebagai rerata semua bilangan prima yang lebih kecil dari atau sama dengan n. Sebagai contoh, $\theta(3) = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$, dan $\theta(12) = \frac{2+3+5+7+11}{5} = \frac{28}{5}$. Apakah terdapat polinom berkoefisien real $P(x)$ dan $Q(x)$ sehingga $\frac{P(n)}{Q(n)} = \theta(n)$ untuk semua n bilangan bulat positif? Jelaskan.