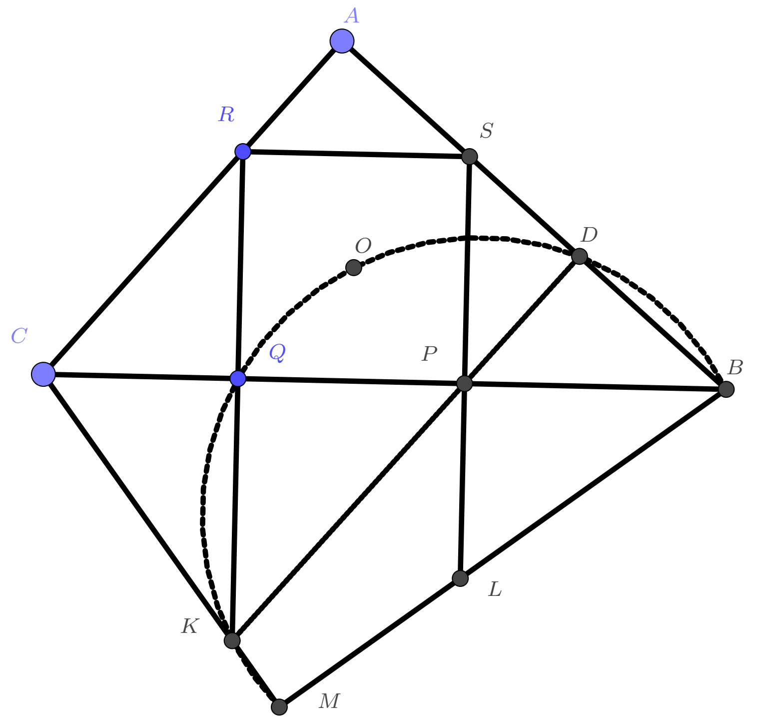
SOLUSI TES I



1.

- $\angle PSB = \angle DPB = \angle QPK \implies \triangle QPK \simeq \triangle PSB$.

  Karena $PS = PQ \implies \triangle QPK \cong \triangle PSB \implies PB = QK$.

  Dengan cara yang sama $CQ = PL$.

- Karena $\angle CQK = \angle LPB, CQ = LP, QK = PB \implies \triangle CQK \simeq \triangle LPB \implies \angle PBL = \angle QKL = 90^\circ - \angle KCQ\ impliesBL \perp CK \implies CMB = 90^\circ$.

- Karena $OP = OQ, PB = QK, \angle OPB = \angle OQK \implies \triangle OQK \cong \triangle OPB \implies \angle OBP = \angle OKQ \implies O, B, K, Q$ terletak pada satu lingkaran.

- Karena $\angle KMB = \angle KQB \implies M$ pada lingkaran luar $OBKQ$

- $\angle OMB = \angle OQB = 45^\circ \implies OM$ garis bagi $\angle BMC$

2. - Untuk $n = 3$ kita punyai $a_3 = -a_1 - a_2$.

$$a_1^3 + a_2^3 + (-a_1 - a_2)^3 = 0$$
$$\implies 3a_1a_2(a_1 + a_2) = 0$$

Karena $a_1, a_2 \neq 0$ maka

$$\implies a_1 = -a_2 \implies a_3 = 0$$

Jadi tidak mungkin $n = 3$.

- Untuk $n = 4$ kita punyai $a_4 = -a_1 - a_2 - a_3$.
  -
  $$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + (-a_1 - a_2 - a_3)^3 = 0$$
  $$\implies 3a_1a_2(a_1+a_2)+3a_2a_3(a_2+a_3)+3a_3a_1(a_3+a_1)+6a_1a_2a_3 = 0$$
  $$\implies (a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_1) = 0$$

    WLOG$a_1 + a_2 = 0 \implies a_4 = a_3$.
  - Jika karena semua a_i berbeda, maka $(a_1, a_2) =\mid a_1 \mid \neq \mid a_3 \mid = (a_3, a_4)$.

    WLOG $\mid a_3 \mid > \mid a_1 \mid = 1 \implies (a_3, a_4) > 1$, tidak memenuhi kondisi soal.
- Untuk $n = 5$ mudah dicek $\{1, 5, -7, -8, 9\}$ memenuhi kondisi soal.

3.
- Misalkan S banyaknya pertemanan, karena setiap orang kenap tepa 201 orang maka diperoleh $S = \frac{201 \cdot n}{2}$.
- Perhatikan setiap triple $T = (n, a, b)$ dimana n mengenal a, b.
- Jika kita fix nilai n, karena n mengenal tepat 201 orang maka banyaknya triple T adalah $n \cdot \frac{201 \cdot 200}{2}$.
- Jika kita fix a, b. Perhatikan bahwa
  - Jika a, b saling kenal, maka terdapat tepat 8 n yang mengenal mereka. Karena pertemanan adalah S maka banyaknya tripel T adalah $S \cdot 8$.
  - Jika a, b tidak saling kenal, banyaknya a, b yang memenuhi adalah $\frac{n(n-1)}{2} - S$. Karena terdapat tepat 24 orang yang mengenal a, b, maka banyaknya tripel T adalah $24\left(\frac{n(n-1)}{2} - S\right)$.

Sehingga total tripel T adalah $\frac{201 \cdot n}{2} \cdot 8 + 24\left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{201 \cdot n}{2}\right)$

- Jadi diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{201 \cdot n}{2} \cdot 8 + 24\Big(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{201 \cdot n}{2}\Big) = n \cdot \frac{201 \cdot 200}{2}$$

$$\implies n = 1810.$$

4. - Jika terdapat $f(y_1) = f(y_2)$ maka kita dapatkan

$$f(x + f(y_1)) = f(x + f(y_2))$$

$$\frac{f(x)y_1}{f(x) + y_1} = \frac{f(x)y_2}{f(x) + y_2}$$

$$f(x)^2(y_1 - y_2) = 0 \implies y_1 = y_2$$

Sehingga kita peroleh f injektif

- Ambil $x = f(x)$ diperoleh

$$f(f(x) + f(y)) = \frac{xf(f(y))}{x + f(f(y))}$$

dengan mengubah posisi x dan y diperoleh

$$f(f(x) + f(y)) = \frac{yf(f(x))}{y + f(f(x))}$$

sehingga kita dapatkan

$$\frac{xf(f(y))}{x + f(f(y))} = \frac{yf(f(x))}{y + f(f(x))}$$

$$\frac{1}{f(f(x))} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f(f(y))} - \frac{1}{y}$$

Jika kita fix nilai y maka didapatkan

$$\frac{1}{f(f(x))} = c + \frac{1}{x}$$

$$f(f(x)) = \frac{x}{xc + 1}$$

- Jika $c < 0$, ambil $x = -\frac{1}{c}$ sehingga diperoleh

$$f(f(x)) = \frac{x}{0}$$

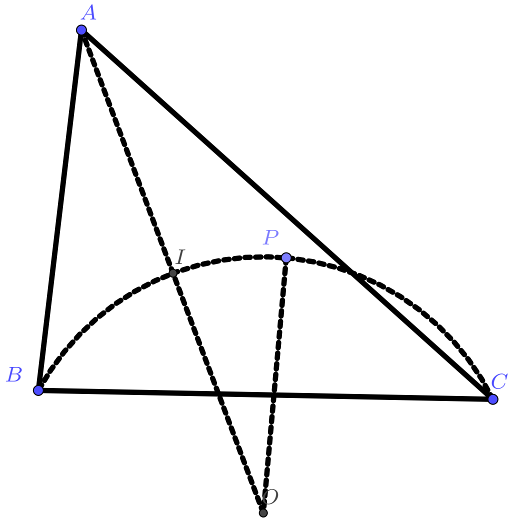
Tidak mungkin, sehingga haruslah $c \geq 0$

- Ambil $y = f(y)$ diperoleh
$$f(x + f(f(y))) = \frac{f(x)f(y)}{f(x) + f(y)}$$
dengan mengubah posisi x dan y diperoleh
$$f(y + f(f(x))) = \frac{f(x)f(y)}{f(x) + f(y)}$$
sehingga kita dapatkan
$$f(x + f(f(y))) = f(y + f(f(x)))$$
Karena f injektif maka
$$x + f(f(y)) = y + f(f(x))$$
$$x + \frac{y}{yc + 1} = y + \frac{x}{xc + 1}$$
$$c(\frac{x^2}{xc + 1} - \frac{y^2}{yc + 1}) = 0$$
Karena nilai dari $\frac{x^2}{xc+1} - \frac{y^2}{yc+1}$ tidak selalu 0, maka haruslah $c = 0$. Sehingga diperoleh
$$f(f(x)) = x$$

- Ambil $y = f(y)$ diperoleh
$$f(x + f(f(y))) = \frac{f(x)f(y)}{f(x) + f(y)}$$
$$\frac{1}{f(x + f(f(y)))} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}$$
$$\frac{1}{f(x + y)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}$$
Misalkan $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ maka kita punyai
$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$
Karena $f(x) > 0$ maka $g(x) > 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^+$,maka kita dapatkan
$$g(x + y) > g(x)$$
yang mengakibatkan $g(x)$ monoton naik.

- Karena $g(x)$ fungsi monoton, dan $g(x+y) = g(x)+g(y)$, maka dari fungsi *chaucy* diperoleh $g(x) = cx$. sehingga diperoleh $f(x) = \frac{1}{cx}$.

SOLUSI TES II



1.

- $\angle BPC = 180° - \angle PBC - \angle PCB = 180° - \frac{\angle PBC + \angle PCB + \angle ABP + \angle ACP}{2} = 180 - \frac{\angle B + \angle C}{2} = \angle BIC$.

  Maka diperoleh B, I, P, C ada pada satu lingkran.

- Misalkan O titik tengah busuh BC yang tidak memuat A. Jelas bahwa A, I, O segaris dan O pusat dari lingkran luar BIC.

- Dari pertidak samaan segitiga diperoleh bahwa

  $$AO \leq AP + PO$$

  Karena $OP = OI$ maka diperoleh

  $$AI + IO \leq AP + PO \implies APgeAI$$

  Dengan kesamaan terjadi jika P berada pada garis AO yang mengakibatkan $P = I$.

2.

- Dengan $AM \geq GM$ diperoleh bahwa

  $$a^3 + b^3 \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

  Ambil $a = tan\left(\frac{A}{2}\right)$ dan $b = tan\left(\frac{B}{2}\right) + tan\left(\frac{C}{2}\right)$ diperoleh

$$tan\left(\frac{A}{2}\right)^3+\left(tan\left(\frac{B}{2}\right)+tan\left(\frac{C}{2}\right)\right)^3 \geq 2\left(\frac{tan\left(\frac{A}{2}\right)+tan\left(\frac{B}{2}\right)+tan\left(\frac{C}{2}\right)}{2}\right)^3$$

- Karena $tan(x)$ merupakan fungsi convex pada $0^\circ < x < 90^\circ$ maka

$$tan\left(\frac{A}{2}\right)+tan\left(\frac{B}{2}\right)+tan\left(\frac{C}{2}\right) \leq 3tan\left(\frac{A+B+C}{6}\right) = \sqrt{3}$$

- $$\sum \frac{1}{tan\left(\frac{A}{2}\right)^3+\left(tan\left(\frac{B}{2}\right)+tan\left(\frac{C}{2}\right)\right)^3} \leq \sum \frac{1}{2\left(\frac{tan\left(\frac{A}{2}\right)+tan\left(\frac{B}{2}\right)+tan\left(\frac{C}{2}\right)}{2}\right)^3}$$

$$\leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

- Kesamaan terjadi ketika $tan\left(\frac{A}{2}\right) = tan\left(\frac{B}{2}\right)+tan\left(\frac{C}{2}\right)$, $tan\left(\frac{B}{2}\right) = tan\left(\frac{C}{2}\right)+tan\left(\frac{A}{2}\right)$, $tan\left(\frac{C}{2}\right) = tan\left(\frac{A}{2}\right)+tan\left(\frac{B}{2}\right)$, $A+B+C = 180^\circ$. Dapat dicek bahwa kesamaan tidak mungkin terjadi.

3.
- Misalkan S_i merupakan kumpulan persegi panjang $a \times b$ sehingga $2i-2 \leq \mid a-b \mid \leq 2i-1$

  Dapat dibuktikan bahwa untuk setiap $a, b \in S_i$ berlaku $a \subseteq b$ atau $b \subseteq a$.
- Perhatikan bahwa setiap persegi panjang dapat dimasukkan dalam $S_1, S_2, \cdots, S_{67}$.
- Dengan *PHP* diperoleh ada setidaknya 31 kotak yang berada dalam satu kotak S_k untuk suatu k.

4.
- Misalkan $a = n - p$.
- $m^2 > 2018 \implies m \geq 2 \implies m!$ genap.
- $m^a > 2018 + m! \implies a \geq 2 \implies n \geq 2 \implies n!$ genap.
- Karena $n!$ dan $m!$ genap, maka n genap.

- Jika $m, n \geq 4$ maka $v_2(n! + m! + 2018) = 1$ padahal $v_2(m^a) = a \cdot v_2(m) \geq 2$.

  Maka setidaknya salah satu dari m atau n kurang dari 4,

- Karena m, n genap, maka $m = 2$ atau $n = 2$.

  - Jika $m = 2$ maka $2^a > 2018 \implies a \geq 11 \implies n \geq 11$.

    Perhatikan bahwa $v_2(n! + m! + 2018) = 2$ padahal $v_2(m^a) = a \cdot v_2(m) \geq 11$ kontradiksi.

  - Jika $n = 2$, karena $a \geq 2$ dan $a = n - p = 2 - p \leq 2$ maka haruslah $a = 2$. Sehingga diperoleh

    $$2020 + m! = m^2 \implies m^2 > 2020 \implies m \geq 45$$

    Perhatikan bahwa

    $$m^2 > m! > m(m-1)(m-2) = m^3 - 3m^2 + 2m \geq 45m^2 - 3m^2 + 2m = 42^2 + 2m$$

    jelas tidak ada m yang memnuhi.

- Tidak ada (m, n) yang memenuhi soal.

SOLUSI TES III

1 • Jika ada $Q(x)$ mempunyai dua akar berbeda yaitu $(\alpha < \beta)$, maka dapat kita tulis

$$Q(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

– Terdapat takhingga pasangan $\alpha < p < \beta < q$ sehingga

$$Q(p) + Q(q) = 0$$

Ambil $b = \frac{q-p}{2} > 0$, $a = \frac{q+p}{2}$. Maka diperoleh

$$Q(\frac{a-b}{2}) + Q(\frac{a+b}{2}) = 0 \implies Q(a) + Q(b) = 0.$$

$$\implies Q(\frac{a-b}{2}) + Q(\frac{a+b}{2}) = Q(a) + Q(b)$$

$$\implies \frac{a^2+b^2}{2} - a(\alpha+\beta) + 2\alpha\beta = a^2 + b^2 - (a+b)(\alpha+\beta) + 2\alpha\beta$$

$$\implies a^2 + b^2 = 2b(\alpha + \beta).$$

– Dari persamaan

$$Q(a) + Q(b) = 0$$

$$\implies a^2 + b^2 - (a + b)(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta = 0$$

$$\implies 2b(\alpha + \beta) - (a + b)(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta = 0$$

$$\implies (a - b)(\alpha + \beta) = 2\alpha\beta$$

Dapat dibukatikan bahwa tidak mungkin $(\alpha + \beta)$ dan $\alpha\beta$ keduanya bernilai 0, sehingga diperoleh

$$(a - b) = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

Maka dapat disimpulkan $a - b$ konstan. Karena $a - b = \frac{p}{2}$ maka $\frac{p}{2}$ juga konstan, kontradiksi dengan ada takhingga p yang memenuhi.

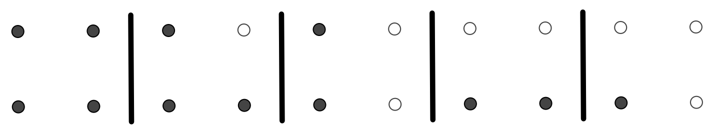
Jadi $Q(x)$ tidak mempunyai 2 akar berbeda.

• Jika $Q(x)$ memiliki maksimal 1 akar berbeda maka tidak ada (a, b) sehingga $Q(a) < 0 < Q(a)$.

- Karena $b > 0$ maka jelas bahwa $\frac{a-b}{2} \neq \frac{a-b}{2}$ yang berakhibat tidak mungkin
$$Q(\frac{a-b}{2}) = -Q(\frac{a+b}{2})$$
dan tidak mungkin pula
$$Q(\frac{a-b}{2}) = Q(\frac{a+b}{2}) = 0$$
Sehingga diperoleh bahwa
$$Q(\frac{a-b}{2}) + Q(\frac{a+b}{2}) \neq 0$$
Jadi semua $Q(x)$ yang memiliki maksimal 1 akar berbeda memnuhi soal.

2

- Bagi kumpulan titik tesebut menjadi peregi satuan yang berisi maksimal 4 titik seperti pada gambar dibawah, dimana titik hitam menyatakan titik yang ditandai.



- Dapat dibuktikan bahwa tiap kemungkinan persegi selalu terdapat setidaknya 1 titik yang memenuhini $R(x, y)$ ganjil.

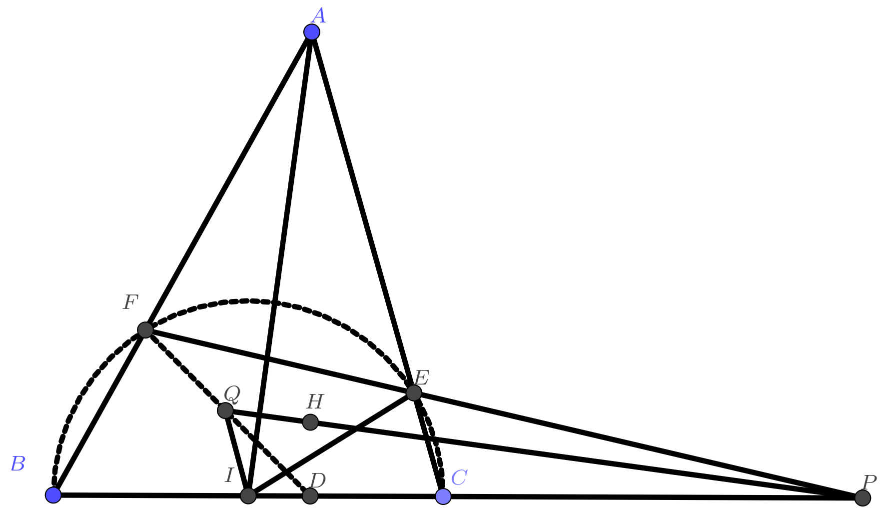
3

- Misalkan $\mathbb{P}$ merupakan kumpulan semua bilangan prima. Buktikan bahwa
$$\sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor$$

- $$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor > \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\Big(\frac{N}{p} - 1\Big) > \sum_{p\in\{2,3,5,6\}} \frac{1}{p}\Big(\frac{N}{p} - 1\Big)$$

$$\implies \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor = \frac{N}{3} + \frac{43n-540}{450} > \frac{N}{3} + \frac{43\cdot 15 - 540}{450} > \frac{N}{3}$$

-
$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor < \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{N}{p^2}$$
$$\implies \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor < N\Big(\sum_{p\in\{2,3,5,7,11,13,17\}} \frac{1}{p^2} + \sum_{p\in\mathbb{P},p\geq 17} \frac{1}{p^2}\Big)$$
$$\implies \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor < N\Big(0.44 + \sum_{p\in\mathbb{P},p\geq 19} \frac{1}{p(p-1)}\Big) = N\Big(0.44 + \sum_{p\in\mathbb{P},p\geq 19} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\Big)$$
$$\implies \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor < N\Big(0.44 + \frac{1}{18}\Big) < N(0.44 + 0.056) < \frac{N}{2}$$

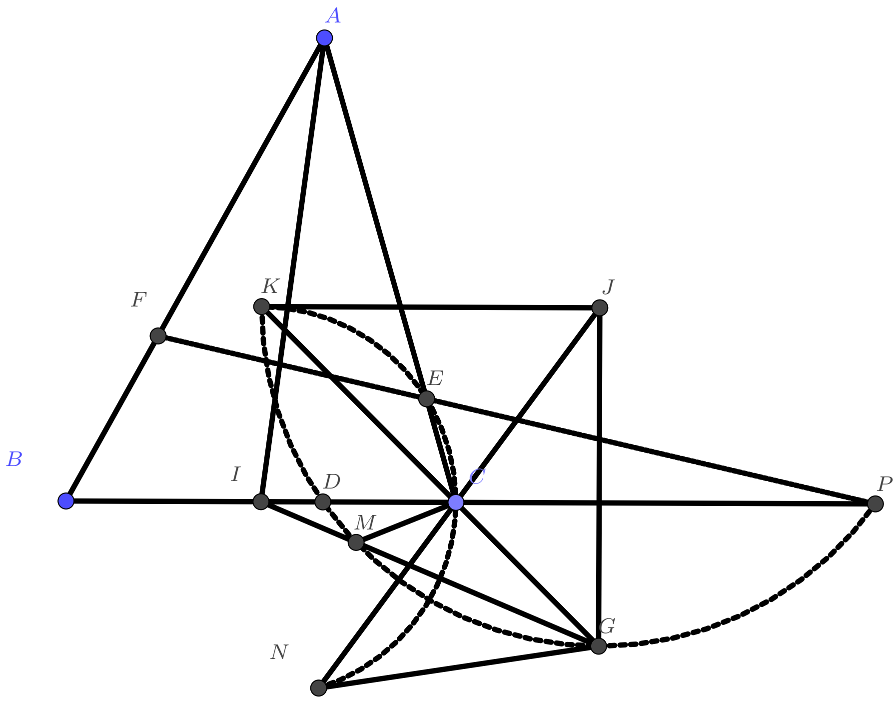


4 **(a)**

- Perhatikan bahwa E, F, B, C terletak pada satu lingkaran dengan pusat I. Dengan *brokard* didapat I merupakan titik tinggi dari segitiga AHP sehingga diperoleh $AI \perp QP$.

  Maka $\angle IQH = 90^\circ - \angle QIA$

- Mudah dibuktikan $\angle EHF = 90^\circ \implies \angle AIE = 90^\circ - \angle QIA = \angle IQH$



(b)

- $\angle FKE = 180^\circ - \angle A = 135^\circ$. Karena $\angle EIF = 90^\circ$ maka K ada pada lingkaran $BCEF$.
- Jelas bahwa $(B, C; D, P)$ harmonik. Karena I titik tengah BC maka berlaku

  $$ID \cdot IP = IB^2 = IK^2 (R_{\triangle BKC})$$

  Maka IK menyinggung $(PKD) \implies IK \perp IJ \implies JK$ menyinggung $(BKC) \implies IK \perp IC$.
- $\angle KCI = \frac{180 - \angle KIC}{2} = 45^\circ$.
- $\angle JGK = \angle JKG = 90^\circ - \angle IKC = 90^\circ - \angle KCI = 45^\circ$.
- Karena IK menyingung (PKD) maka $IK^2 = IM \cdot IG \implies IC^2 = IM \cdot IG \implies \triangle IMC \simeq \triangle ICG \implies \angle IMC = \angle ICG = 180^\circ - \angle GCP = 180^\circ - \angle ICK = 45^\circ$.
- Karena JK menyinggung (BKC) maka $JK^2 = JC \cdot JN \implies JG^2 = JC \cdot JN \implies \triangle JCG \simeq \triangle JNG \implies \angle CNG = \angle CGJ = 45^\circ$.
- Karena $\angle CNG = \angle CMG = 45^\circ \implies C, G, N, M$ terletak pada satu lingkaran.

SOLUSI TES IV

1. • Misalkan $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ dimana $a_k \in \{0,1,2,3\}$ maka dapat kita tulis $a_k = 2b_k + c_k$ dimana $b_k, c_k \in \{0,1\}$. Maka diperoleh

$$2018 = P(2) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

• Misalkan $N = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ dan $M = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. Maka diperoleh

$$2018 = 2N + M.$$

• Perhatikan bahwa $N = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ dan $M = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ merupakan representasi tunggal N dan M dalam basis 2, sehingga

$$2018 = 2N + M$$

Mempunyai tepat 1 solusi.

• Mudah dicari bahwa semua solusi dari $2018 = 2N + M$ adalah 1010.

2. • Misalkan $y_n = \sqrt{x_n} > 0$,

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n} \implies y_{n+1}^2 = y_n^2 + y_n$$

maka diperoleh

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{y_n^2} = \frac{1}{y_{n-1}(y_{n-1}+1)} = \frac{1}{y_{n-1}} - \frac{1}{y_{n-1}+1}$$

• **Claim**

$$\frac{1}{y_{n+1}} - \frac{1}{y_n+1} < \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_{n+1}}$$

Bukti

$$\iff \frac{2}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_n+1} = \frac{2y_n+1}{y_n(y_n+1)} = \frac{2y_n+1}{y_{n+1}^2}$$

$$\iff 2y_{n+1} < 2y_n + 1$$

$$\iff y_{n+1}^2 < (y_n + \frac{1}{2})^2$$

$$\iff y_n^2 + y_n < y_n^2 + y_n + \frac{1}{4}$$

- Dari soal diperoleh

$$\sum_{i=1}^{2019}\frac{1}{x_i}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_{2018}+1}+\sum_{i=1}^{2017}\frac{1}{y_{i+1}}-\frac{1}{y_i+1}$$

$$\implies \sum_{i=1}^{2019}\frac{1}{x_i}<2+\sum_{i=1}^{2017}\frac{1}{y_i}-\frac{1}{y_i+1}=2+\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_{2018}}<3$$

3

- Misalkan O, O_1 merupakan pusat lingkaran luar ABC dan ω. D pada AB sehingga BC menyinggung ω di E, jelas $\angle DEF = \angle DFE$. Dari sesei **RA** diperoleh bahwa I ada di EF dan E, I, C, T cyclic.

- Jika A, I, F segaris

$$\implies \angle EIT + \angle AIF = 180^\circ$$

$$\implies \angle ECT = \angle FAI + \angle IFA$$

$$\implies \angle ECB + \angle BCT = \angle DEF + \frac{\angle BAC}{2}$$

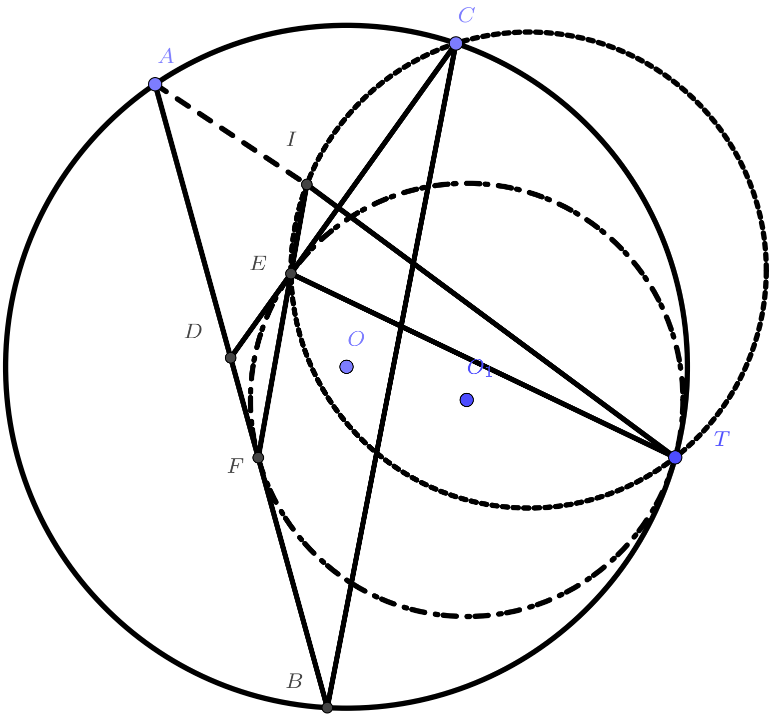
$$\implies \angle DCB - \angle DEF = \angle BCT - \frac{\angle BAC}{2} = 0$$

$$\implies \angle DCB = \angle DEF$$

$$\implies EF \parallel BC \implies IF \parallel BC$$

- Jika $IF \parallel BC \implies EF \parallel BC \implies DBC$ sama kaki ($DB = DC$). Karena DO_1 garis bagi $\angle EDF$ (DF, DE garis singgung lingkaran ω dengan pusat O_1) $\implies DO_1$ garis bagi $\angle CDB \implies DO_1$ ada digaris sumbu BC.

  Karena ω menyinggung (ABC) di T maka, $\{O, O_1, T\}$ segaris. Karena O ada digaris sumbu BC dan O_1 ada digaris sumbu BC maka T ada digaris sumbu BC, mkaa T titik tengah busur BC maka AT garis bagi $\angle BAC$ maka A, I, F segaris.



4 • Untuk $p = 2$ mudah dibuktikan tidak ada solusi, maka p ganjil.

• Jika $r \in \mathbb{P}$ sehingga $r \mid 11^p + 17^p$, maka diperoleh

$$11^p + 17^p \equiv 0 \pmod{r}$$

$$\implies 11^{2p} \equiv 17^{2p} \pmod{r}$$

Dari FLT

$$\implies 11^{r-1} \equiv 17^{r-1} \pmod{r}$$

maka diperoleh

$$11^{(r-1,2p)} \equiv 17^{(r-1,2p)} \pmod{r}$$

Jelas nilai dari $(r-1, 2p) = 1 \vee 2 \vee 2p$, p tidak mungkin karena akan mengakibatkan $r \mid 11$ dan $r \mid 17$.

• Jika $(r-1, 2p) = 1$ diperoleh $r \mid 6$, maka $r = 2 \vee 3$.

- Jika $(r-1, 2p) = 2$ diperoleh $r \mid 168$, maka $r = 2 \vee 3 \vee 7$.
- Jika $(r-1, 2p) = 2p$ diperoleh $2p \mid r-1$, maka $r = 2pk+1$. Misalkan $\mathbb{B}$ himpunan bilangan prima r yang membagi $3p^{q-1}+1$ dan $11^p + 17^p$. Perhatikan bahwa hasil kali beberapa anggota $\mathbb{B}$ dapat dinyatakan sebagai $2pl+1$.
- Jika $r \mid 3p^{q-1}+1$ dan $r \mid 11^p + 17^p$ maka $r = 2 \vee 3 \vee 7 \vee r \in \mathbb{B}$.

  Mudah dibuktikan $r = 3$ tidak mungkin.
- Jika $v_7(3p^{q-1}+1) \geq 2 \implies v_7(11^p + 17^p) \geq 2$, maka

$$v_7(11^p + 17^p) = v_7(11+17) + v_7(p) = 1 + v_7(p) \geq 2$$

$$\implies v_7(p) \geq 1 \implies 7 \mid p, \implies p = 7$$

  Perhatikan bahawa jika $p = 7$ maka $7 \nmid 3p^{q-1}+1$, maka haruslah $v_7(3p^{q-1}+1) \leq 1$.
- Mudah dibuktikan bahwa $v_2(11^p+17^p) = 2 \implies v_2(3p^{q-1}+1) \leq 2$.
- Jika $q = 2$ maka diperoleh

$$3p + 1 = 2^{a_1} 7^{a_2} (2pl+1)$$

  dimana $0 \leq a_1 \leq 2$ dan $0 \leq a_2 \leq 1$.

  Mudah dibuktikan tidak ada bilangan prima p yang memenuhi, maka haruslah $q \geq 3$. Karena p, q prima ganjil maka $v_2(3p^{q-1} + 1) = 2$.
- Sekarang kita dapat menuliskan

$$3p^{q-1} + 1 = 4 \cdot 7^a (2pl+1)$$

$$\implies p \mid 4 \cdot 7^a - 1$$

  Karena $a \leq 1$, mudah dicari bahwa $p = 3$ satu satunya solusi.

  Karena $3p^{q-1}+1 \mid 11^p + 17^p$ dan $p = 3$, mudah dicari bahwa $q = 3$ satu satunya solusi.

SOLUSI SIMULASI I

1 • Ambil k terbesar sehingga $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq 1$. Ada $y \in \mathbb{R}_0^+$ sehingga

$$x_1 + x_2 + \cdot + x_k + y = 1.$$

• Dengan $AM \geq GM$, untuk setiap $i \leq k$ diperoleh

$$(x_1 + x_2 + \cdot + x_i)^2 + 1 \geq 2(x_1 + x_2 + \cdot + x_i)$$

$$\implies 2(1 - x_1 + x_2 + \cdot + x_i) \geq 1 - (x_1 + x_2 + \cdot + x_i)^2$$

$$\implies 2x_i(x_{i+1} + \cdots + y) \geq x_i\Big(1 - (x_1 + x_2 + \cdot + x_i)^2\Big)$$

• Dari soal, akan kita dapatkan

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\Big(1 - (x_1 + \cdots + x_i)^2\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} x_i\Big(1 - (x_1 + \cdots + x_i)^2\Big)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} 2x_i(x_{i+1} + \cdots + y) \leq \sum_{i>j} 2x_ix_j + 2\sum_{1\leq i\leq k} x_iy$$

• Mudah dibuktikan

$$3\Big(\sum_{i>j} x_ix_j + \sum_{1\leq i\leq k} x_iy\Big) \leq \Big(y^2 + \sum_{1\leq i\leq k} x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq k} 2x_ix_j + \sum_{1\leq i\leq k} 2x_iy\Big)$$

$$\implies 3\Big(\sum_{i>j} x_ix_j + \sum_{1\leq i\leq k} x_iy\Big) \leq (x_1 + x_2 + \cdot + x_k + y)^2 = 1$$

• Gabungkan dua pertidaksamaan terakhir diperolh

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\Big(1 - (x_1 + \cdots + x_i)^2\Big) < \frac{3}{2}$$

Mudah kesamaan terjadi ketika $x_1 + x_2 + \cdots + x_i = 1$ untuk semua $i \leq k$ dan $x_i = x_j$ untuk setiap $i \neq j$, yang mana tidak mungkin terjadi, sehingga diperoleh

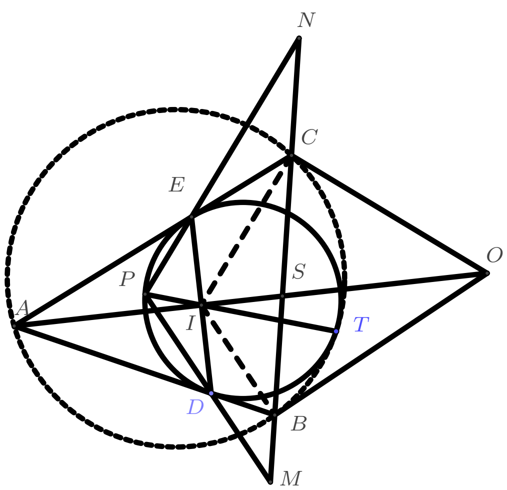
$$\sum_{i=1}^{n} x_i\Big(1 - (x_1 + \cdots + x_i)^2\Big) < \frac{3}{2}$$

2

- Misalkan P_i menyakan total berat batu pada tumbukan ke-i. **WLOG** $P_i > P_j$ untuk semua $i > j$.
- $P_n > P_1 + n - 1$.
- Misalkan $P_n = a_n + b_n + X_n$ dimana a_n, b_n menyatakan berat batu terberat dan teringan dari tumpukan ke-n.
- Dapat dibuktikan $X_i > X_j$ untuk setiap $i < j$.
- $X_1 > X_n - (n-1)$
- $2016a_n \geq X_n \geq 2016b_n$.
- Karena $X_1 > X_n \implies a_1 > b_n$.
- Perhatikan bahwa

$$P_n > P_1 + n - 1$$
$$\implies S_n + X_n > S_1 + X_1 + n - 1$$
$$\implies S_n - S_1 > X_1 - X_n + n - 1 \geq 2(n-1)$$
$$\implies 25 - 1 + 0 \geq a_n - b_1 + b_n - a_1 > 2(n-1) \implies 12 \geq n$$

- Buat konstruksi $n = 12$.



3

- Misalkan $S = AI \cap BC$, O pada AI sehingga $(O, I; S, A)$ harmonik. Karena BI garis bagi $\angle B \implies IB \perp OB$, dengan cara yang sama $IC \perp OC$.
- Dari sesi **RA**, diperoleh bahwa I merupakan titik tengah DE.

  Karena I titik tengah DE dan $AD = AE$ maka $AI \perp DE \implies AO \perp DE \implies O$ ada pada garis sumbu EF. **(1)**
- Dari sesi **RA**, TD memotong busur AB tepat ditengah, sehingga $\angle DTB = \frac{\angle C}{2}$.
- $\angle DIB = \angle EDA - \angle IBD = \frac{\angle B + \angle C}{2} - \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle C}{2} = \angle DTB$

  Maka $DITB$ cyclic $\implies DTI = DBI = \frac{\angle B}{2}$.
- $\angle MDB = \angle ADP = \angle DTP = \frac{\angle B}{2}$.

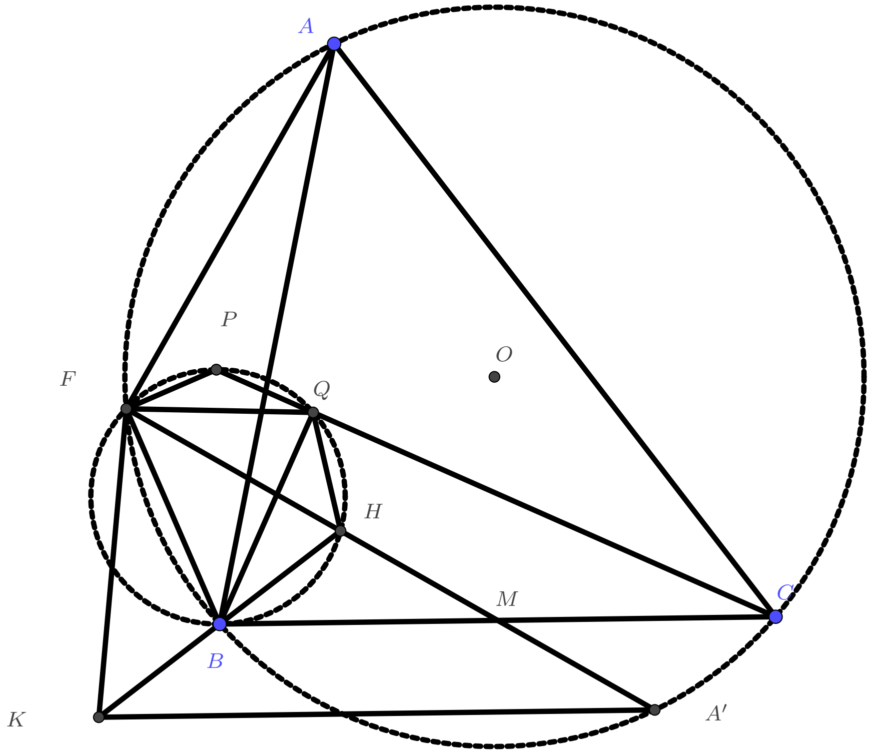
  $\angle DMB = \angle CBA - \angle MDB = \frac{\angle B}{2}$.

  Karena $\angle DMB = \angle MDB$ maka segitiga DMB sama kaki, dengan $DM = DB$.
- Karena $\angle DMB = \frac{\angle B}{2} = \angle IBC \implies DB \parallel IB$.

  Karena $DB \parallel IB$ maka $OB \perp DM$, dan karena segitiga DMB sama kaki maka O ada digaris sumbu BM. **(2)**

  Dengan cara yang sama O ada digaris sumbu CN. **(3)**
- Dari **(1), (2), (3)** terdapat lingkaran dengan pusat O yang melewati D, E, M, N.

SOLUSI SIMULASI II



1

- Jelas B, P, Q, H terletak pada satu lingakran dengan pusat pada titik tengah PB.
- Karena $\angle PBC = 90° \implies BC$ menyinggung $(BPQH)$
- Misalkan $A' = (ABC) \cap FH$, dan M titik tengah BC. Jelas bahwa H, M, A' segaris (*well-known*).

$$\angle BFH = \angle A + \angle B - 90° = \angle HBC = \angle BPH.$$

  maka diperoleh F ada pada lingkaran $(BPQH)$.

- Misalkan M titik tengah BC. Karena $\angle BQC = 90°$ maka M pusat $(BQC) \implies MQ = MB$.
- Karena BC menyinggung $(BPQH)$ maka $MB^2 = MF \cdot MF \implies MQ^2 = MF \cdot MF \implies (F, B, H, Q)$ harmonik.
- $\frac{FQ}{QH} = \frac{FB}{BH} = \frac{FB}{BK}$. **(1)**

- Karena $\angle FBK = \angle FQH$ (cyclic) dan (**1**) maka diperoleh $\triangle FBK \simeq \triangle FQH \implies \angle FKB = \angle FHQ \implies QH$ menyinggung (FHK).

2
- Misalkan $\mathbb{P}$ merupakan himpunan semua bilangan prima, dan definisikan
$$S_n = \sum_{p \in \mathbb{P}, p<n} p.$$
- Diasumsikan kontradiksi, sehingga untuk setiap $n > 2018^{2018}$ berlaku
$$(S_n, n) \geq 2.$$
- Misalkan semua bilangan prima yang lebih dari 2018^{2018} kita urutkan sebagai berikut
$$2018^{2018} < p_1 < p_2 < \cdots < p_\infty < \cdots$$
- Perhatikan bahwa $S_{p_k} = S_{p_1} + p_2 + \cdots p_{k-1}$
- Jelas $(S_{p_k}, p_k) > 1 \implies p_k \mid S_{p_k}$.
- Terdapta a_1 sehingga $S_{p_1} = a_1 p_1$ karena $p_1 \mid S_{p_1}$.
- Karena $p_k \mid S_{p_k}$ untuk semua $k \geq 2$, dapat dibuktikan dengan induksi bahwa terdapat $a_k \in \mathbb{N}$ sehingga
$$a_k p_{k-1} = a_{k+1} p_{k+1} - 1$$
dimana $p_0 = 1$ dan dapat dibuktikan pula dengan induksi bahwa
$$S_{p_1} = a_{k+1} p_{k+1} p_k - p_1 - p_2 - \cdots p_{k-1}$$
- Perhatikan bahwa
$$a_k = \frac{a_{k+1} p_{k+1} + 1}{p_k} > a_{k+1}.$$
- Karena $a_1 = \frac{S_1}{p_1}$ bernilai tetap dan $a_i > a_j$ untuk setiap $j > i$ maka a_i suatu saat akan menjadi non positif. Kontradiksi dengan $a_i \in \mathbb{N}$.
- Jadi terdapat n sehingga $(n, S_n) = 1$.

3
- Jika $S > \frac{11}{2}$ maka S dapat kita tulis sebagai
$$S = \frac{11 + 11\alpha}{2}, \alpha < \frac{1}{11}.$$

- Misalkan kita punyai

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = S$$

  Dengan $a_i = \frac{1+\alpha}{2}$

- Mudah dibuktikan kita tidak bisa membagi seluruh bilangan tersebut menjadi 2 grup sehingga salah satu grup memiliki jumlah maksimal 1 dan grup lainnya memiliki jumlah maksimal 5.

• Jika $S \leq \frac{11}{2}$. Misalkan

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

- Ambil k maksimal sehingga $a_1+a_2+\cdots+a_k \leq 1$ (**1**). Misalkan bilangan ini ada pada A.
- B merupakan grup kedua yang anggotanya merupakan

$$a_{k+1} + \cdots + a_n.$$

- Dapat kita tuliskan pula jumlah semua anggora A bernilai $1-\beta$, dan jumlah semua anggota $B = \frac{9}{2} + \beta$.
- Jika $\beta \leq \frac{1}{2}$, maka kita selesai karena jumlah anggota A kurang dari 1 dan jumlah anggota B kurang dari 5.
- Jika $\beta > \frac{1}{2}$
  * Jelas $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} > 1$ karena k merupakan nilai terbesar yang memenuhi (**1**).

$$\implies a_{k+1} > \frac{1}{2}$$

  * Ambil grup A berisikan a_{k+1} dan B sisaya. Maka mudah dicek bahwa A dan B memenuhi kondisi soal.