KUMPULAN USULAN SOAL INAMO 2009

Aljabar

Problem A1

Misalkan x, y, z bilangan real positif sedemikian sehingga $x + y + z = 3$. Buktikan bahwa

$$\frac{x+\sqrt{x}+1}{y}+\frac{y+\sqrt{y}+1}{z}+\frac{z+\sqrt{z}+1}{x} \geq 9.$$

Problem A2

Tentukan semua bilangan bulat non-negatif n sehingga sistem persamaan

$$\begin{aligned} x^4+n &= 4yz-2x^2 \\ y^4+n &= 4zx-2y^2 \\ z^4+n &= 4xy-2z^2 \end{aligned}$$

memiliki solusi real (x, y, z) dan tentukan semua solusi yang mungkin.

Problem A3

Misalkan $\mathbb{Q}^+$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional positif dan juga $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ suatu fungsi yang memenuhi

$$f(xy) = f(x)(f(y+1)-1)$$

untuk setiap bilangan rasional positif x dan y.

(a) Buktikan bahwa $f(1) = 1$ atau $f(1) = 2$.

(b) Cari semua fungsi f seperti di atas.

Problem A4

Misalkan a, b, c bilangan real > 0.Buktikan bahwa

$$\frac{3a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{3b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{3c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Problem A5

Misalkan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ suatu barisan bilangan asli yang memenuhi $a_1 > 1$ dan

$$\left\lfloor \frac{a_1+1}{a_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_2+1}{a_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_3+1}{a_4} \right\rfloor = \cdots .$$

(a) Buktikan bahwa

$$\left\lfloor \frac{a_n+1}{a_{n+1}} \right\rfloor \leq 1, \text{ untuk setiap bilangan asli } n.$$

(b) Jika $a_1 = 2(2^{2009}+1)$, tentukan nilai terkecil yang mungkin dari a_{2009}.

Problem A6

Diketahui x_i, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi persamaan

$$\sqrt{x_1 - 1} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \cdots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Tentukanlah nilai x_{2009}.

Problem A7

Cari semua $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga

$$f(x + f(y) + f(z)) = f(y + z) + x,$$

untuk semua $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Problem A8

Tentukan bentuk rasional dari bilangan

$$8 + \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}.$$

Problem A9

Cari semua $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ yang memenuhi:

$$f(x + y + f(y)) = x + yf(y)$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Problem A10

Diberikan p bilangan prima dan misalkan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ adalah fungsi yang memenuhi :

(1) Untuk setiap bilangan asli m, n, p membagi $f(m) - f(n)$ jika dan hanya jika p membagi $m - n$.

(2) Untuk setiap bilangan asli m, n, berlaku $f(mn) = f(m)f(n)$.

Buktikan p membagi $f(m)$, jika dan hanya jika p membagi m.

Problem A11

Tentukan nilai terkecil yang mungkin dari fungsi

$$f\left(x\right) = x^{2008} - 2x^{2007} + 3x^{2006} - 4x^{2005} + 5x^{2004} + ... - 2006x^3 + 2007x^2 - 2008x + 2009$$

untuk sebarang bilangan real x.

Problem A12

Misalkan a, b, c adalah bilangan positif, maka buktikan:

$$(a^4 + b^4 + c^4)^2 \geq (a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Problem A13

Diberikan bilangan real $a \geq b \geq c \geq d$ dengan

$$a + b + c + d = 13 \quad \text{dan} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 43.$$

Buktikan bahwa $ab - cd \geq 3$.

Problem A14

Misalkan a, b, c adalah bilangan positif yang memenuhi $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, maka buktikan:

$$2(a^{11} + b^{11} + c^{11}) + 3a^3b^3c^3(ab + bc + ca) \geq 5(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4).$$

Problem A15

Cari semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} \sin x &= 2\sin y \cos(y - x), \\ \sin y &= 2\sin x \cos(x - y). \end{cases}$$

Problem A16

Tentukan polinomial $p(x)$ sedemikian sehingga $p(x)$ habis dibagi $x^3 + x - 1$ dan $p(x) - 1$ habis dibagi $x^2 + x + 1$.

Problem A17

Tentukan bilangan asli a sehingga $a < 3^{\sqrt{3}} < a + 1$.

Kombinatorika

Problem C1

Ada 2009 permen akan dibagikan kepada 113 siswa. Tunjukkan bahwa ada 4 siswa yang mendapatkan banyak permen sama. (Mungkin sama-sama mendapat 0 permen). Juga tunjukkan dapat terjadi tidak ada 5 siswa yang mendapatkan perman sama.

Problem C2

Diberikan sebarang bilangan asli $n > 1$. Didefinisikan

$$F = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{N} \text{ dan } 1 \leq a < b \leq n \right\}.$$

Jika $|F|$ menyatakan banyaknya anggota F, maka tunjukkan bahwa

$$|F| > \frac{n^2 - 4}{8}.$$

Problem C3

Diketahui P adalah segi 2009 dengan 2009 titik sudutnya pada suatu lingkaran. Untuk setiap segi banyak S yang semua titik sudutnya adalah titik sudut P, definisikan $t(S)$ adalah banyaknya titik sudut pada S (ruas garis, titik, dan himpunan kosong berturut-turut dianggap sebagai segi banyak dengan 2, 1, dan 0 titik). Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan real x, dengan $x \neq 0$, $x \neq 1$,

$$\sum_S x^{t(S)}(1 - x)^{2009 - t(S)} = 1,$$

dengan jumlah tersebut diambil untuk semua segi banyak S yang semua titik sudutnya adalah titik sudut-titik sudut P.

Problem C4

Di sebuah pulau terdapat 7 kota dan ada jaringan kereta api yang melalui kota-kota tersebut. Setiap segmen rel menghubungkan tepat 2 buah kota, dan diketahui bahwa setiap kota memiliki paling sedikit 3 buah segmen ke kota lain. Buktikan bahwa terdapat rute perjalanan kereta api yang mengunjungi 4 kota yang berbeda masing-masing sekali dan kembali ke kota asalnya. (Contoh: rute $A - B - C - D - A$).

Problem C5

Suatu subset H dari $\{1, 2, 3, \ldots, 13\}$ tidak memuat tiga anggota yang hasil kalinya menjadi kuadrat sempurna. Tentukan banyak maksimum anggota H.

Problem C6

Misalkan $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{2^{2009}}\}$ memenuhi

1. a_i bilangan asli untuk semua $i = 1, 2, \ldots, 2^{2009}$ dan
2. $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{2009}} = 2^{2010}$

Buktikan bahwa ada subhimpunan dari A yang jumlah anggota-anggotanya tepat 2^{2009}.

Problem C7

Seutas tali dengan panjang 2009 cm akan dipotong menjadi beberapa bagian dengan panjang masing-masing 1 cm, 10 cm, 100 cm dan 1000 cm. Dengan berapa cara seutas tali tadi dapat dipotong demikian sehingga tali terpotong habis (urutan tidak diperhatikan)?

Problem C8

Berapa banyak cara menyatakan 2^{2009} sebagai hasil kali faktor-faktornya selain 1 dan dirinya sendiri?

Contoh : 16 dapat dinyatakan dalam 7 bentuk hasil kali perkalian, yakni:
$2 \times 2 \times 2 \times 2$
$2 \times 2 \times 4$
$2 \times 4 \times 2$
2×8
$4 \times 2 \times 2$
4×4
8×2

Problem C9

Sebuah laci terdiri dari bola putih dan biru yang tercampur secara acak dengan jumlah paling banyak 2009 buah. Jika dua bola diambil secara acak tanpa pengembalian, maka diketahui probabilitas bahwa terambil keduanya bola warna putih atau keduanya bola warna biru adalah $\frac{1}{2}$. Berapa maksimum banyaknya bola putih yang mungkin berada dalam laci demikian sehingga pernyataan tentang probabilitas tersebut tetap terpenuhi?

Problem C10

Berapa banyak cara menyatakan $2^{2009} \times 3$ sebagai hasil kali faktor-faktornya selain 1 dan dirinya sendiri?

Contoh : 12 dapat dinyatakan dalam 7 bentuk hasil kali perkalian, yakni:
$2 \times 2 \times 3$
$2 \times 3 \times 2$
$3 \times 2 \times 2$
4×3
3×4
6×2
2×6

Geometri

Problem G1

Diberikan segitiga ABC, AL garis bagi sudut BAC dengan L pada sisi BC. Garis-garis LR dan LS berturut-turut sejajar dengan BA dan CA, R pada sisi AC dan S pada sisi AB. Melalui titik B dibuat garis tegak lurus pada AL, memotong LR di M. Jika titik D pertengahan BC, buktikan bahwa: ketiga titik A, M, D terletak pada satu garis lurus (kolinear).

Problem G2

Pada segitiga ABC, titik D, E, F berturut-turut terletak pada segmen BC, CA, AB. Nyatakan P sebagai titik perpotongan AD dan EF. Tunjukkan bahwa

$$\frac{AB}{AF} \times DC + \frac{AC}{AE} \times DB = \frac{AD}{AP} \times BC.$$

Problem G3

Diberikan segiempat tali busur $ABCD$; PA dan PB adalah garis singgung dari suatu titik P di luar lingkaran Γ dengan A dan B sebagai titik singgungnya. Garis PC memotong Γ di titik D. Selanjutnya buat garis yang melalui B sejajar PA, garis ini memotong AC dan AD berturut-turut di titik E dan F. Buktikan bahwa $BE = BF$.

Problem G4

Misalkan D, E, F berturut-turut menyatakan persinggungan lingkaran dalam segitiga ABC dengan sisi-sisi BC, CA, AB. Misalkan pula AD dan EF berpotongan di P. Buktikan bahwa

$$\frac{AP}{AD} \geq 1 - \frac{BC}{AB + CA}.$$

Problem G5

Dua lingkaran berpotongan di titik A dan B. Garis l melalui A memotong kedua lingkaran berturut-turut di C dan D. Misalkan M, N pertengahan dari busur BC dan busur BD yang tidak memuat A, dan andaikan pula bahwa K pertengahan segmen CD. Buktikan $\angle MKN$ sama dengan $90°$.

Problem G6

Misalkan titik-titik D, E, F berturut-turut terletak pada sisi BC, CA, AB sehingga AD, BE, CF adalah garis tinggi. Misalkan pula AD dan EF berpotongan di P. Buktikan bahwa

$$\frac{AP}{AD} \geq 1 - \frac{BC^2}{AB^2 + CA^2}.$$

Problem G7

Diberikan segiempat konvek $ABCD$, sedemikian rupa sehingga $OA = (OB.OD)/(OC + CD)$ dimana titik O adalah perpotongan kedua diagonalnya. Lingkaran luar segitiga ABC memotong BD di titik Q. Buktikan bahwa CQ garis bagi $\angle ACD$.

Problem G8

Misalkan titik-titik D, E, F berturut-turut terletak pada sisi BC, CA, AB sehingga AD, BE, CF adalah garis bagi. Definisikan P_1, P_2, P_3 berturut-turut sebagai perpotongan antara AD dan EF, BE dan DF, serta CF dan DE. Buktikan bahwa

$$\frac{AD}{AP_1} + \frac{BE}{BP_2} + \frac{CF}{CP_3} \geq 6$$

Problem G9

Diberikan segitiga ABC. Misalkan $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_{2008}B_{2008}$ adalah 2008 garis sejajar AB yang membagi segitiga ABC menjadi 2009 daerah yang sama luasnya. Hitunglah nilai dari

$$\left\lfloor \frac{A_1B_1}{2A_2B_2} + \frac{A_1B_1}{2A_3B_3} + ... + \frac{A_1B_1}{2A_{2008}B_{2008}} \right\rfloor$$

dengan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.

Problem G10

Diberikan sebuah segitiga ABC dengan I sebagai pusat lingkaran dalamnya. Diketahui E_A adalah pusat lingkaran singgung luar yang menyentuh BC (ex-center). Demikian pula, E_B dan E_C berturut-turut adalah pusat lingkaran singgung luar yang menyentuh AC dan AB. Buktikan bahwa I adalah titik tinggi segitiga $E_AE_BE_C$.

Problem G11

Diberikan segitiga ABC lancip. Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung BC, CA, dan AB berturut-turut di D, E, dan F. Garis bagi sudut A memotong DE dan DF berturut-turut di K dan L. Jika AA_1 adalah garis tinggi dan M titik tengah BC, Tunjukkan bahwa A_1KML adalah segiempat talibusur.

Problem G12

Pada segitiga ABC, lingkaran dalamnya menyentuh BC di D, AC di E, dan AB di F. Buktikan bahwa:

$$\frac{CE - EA}{\sqrt{AB}} + \frac{AF - FB}{\sqrt{BC}} + \frac{BD - DC}{\sqrt{CA}} \geq \frac{BD - DC}{\sqrt{AB}} + \frac{CE - EA}{\sqrt{BC}} + \frac{AF - FB}{\sqrt{CA}}.$$

Teori Bilangan

Problem N1

Cari semua tripel bilangan asli (a, b, c) yang memenuhi

$$\frac{ab+c}{a+b} = \frac{bc+a}{b+c} = \frac{ca+b}{c+a}$$

dan ketiganya merupakan bilangan bulat.

Problem N2

Misalkan $a, b, c > 1$ bilangan asli sedemikian sehingga terdapat bilangan asli k yang memenuhi

$$abc \mid (ab)^k + (bc)^k + (ca)^k - 1 \qquad \text{... (1)}$$

a. Tunjukan bahwa ada tak hingga banyaknya a, b, c yang memenuhi.
b. Jika untuk suatu $a, b, c > 1$, ada bilangan prima $k > a, b, c$ yang memenuhi ...(1) maka tentukan semua a, b, c yang mungkin.

Problem N3

Suatu pasangan bilangan bulat (m, n) dikatakan *baik* bila

$$m \mid n^2 + n \;\text{ dan }\; n \mid m^2 + m.$$

Diberikan sebarang dua bilangan asli $a, b > 1$ yang relatif prima, buktikan bahwa terdapat pasangan baik (m, n) dengan $a \mid m$ dan $b \mid n$ tetapi a tidak membagi n dan b tidak membagi m.

Problem N4

Tentukanlah semua pasangan bilangan bulat non-negatif (x, y) yang memenuhi persamaan:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2009}.$$

Problem N5

Tentukan semua pasangan bilangan asli (a, b) yang memenuhi

$$12a\,(24a+1) = b\,(b+1)$$

dan a, b relatif prima.

Problem N6

Buktikan bahwa bilangan yang dinyatakan oleh

$$5^{5^{2010}} + 5^{5^{2009}} + 1$$

bukan bilangan prima.

Problem N7

Misalkan $S = \{1, 2, ..., 2009\}$ dan untuk setiap bilangan real x didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Tentukan banyak $n \in S$ sehingga terbagi oleh $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$.

Problem N8

Tentukan banyaknya bilangan $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$ sedemikian sehingga

$$4n^6 + n^3 + 5$$

habis dibagi 7.

Problem N9

Diketahui p_1, p_2, dan p bilangan prima-bilangan prima yang memenuhi

$$(p_1 p - 1)^{p_2} + (p_2 p)^{p_1} = (p_1 p_2)^p.$$

Tentukan semua pasangan (p_1, p_2, p) yang memenuhi.

Problem N10

Diketahui p_1, $p_2, \cdots, p_n$ bilangan prima-bilangan prima, $n > 1$, dan untuk masing-masing $i = 1, 2, \cdots, n$

$$q_i = p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n.$$

Tentukan semua pasangan $p_1, p_2, \cdots, p_n$ yang memenuhi

$$(q_1 - 1)^{p_1} + q_2^{p_2} + \cdots + q_{n-1}^{p_{n-1}} = q_n^{p_n}.$$