Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Simulasi OSK Matematika SMA 2018

26–29 Januari 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \dots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Jika polinomial $g(x)$ dibagi $x^2 - 1$ bersisa $2x - 1$, tentukan sisa pembagian $g(x)$ dengan $x - 1$.

2. Tiga koin seimbang dan tiga dadu seimbang dilempar secara bergantian. Jika peluang munculnya tepat satu gambar pada pelemparan koin dan jumlah mata dadu 4 adalah $\frac{x}{y}$ dengan $FPB(x, y) = 2$. Tentukan nilai dari $x + y$.

3. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif tiga digit $\overline{abc}$ dengan $a \neq 0$, $c \neq 0$ (digit tidak harus berbeda) sedemikian sehingga $\overline{abc}$ dan $\overline{cba}$ habis dibagi 4.

4. Suatu segitiga memiliki sisi-sisi a, b, c yang merupakan akar-akar dari persamaan $x^3 - Ax^2 + Bx - C$. Jika $C = 8A$, tentukan hasil kali jari-jari lingkaran dalam dengan jari-jari lingkaran luar segitiga tersebut.

5. Tsubasa memiliki suatu kelainan. Ia selalu membaca angka 2 sebagai angka 1 dan sebaliknya. Ia diberikan sebuah bilangan 3 digit oleh gurunya, dan diminta untuk mencari penjumlahan digit-digitnya. Contohnya, jika diberi angka 468, Tsubasa akan menjawab 18, tetapi jika diberi angka 108, Tsubasa akan menjawab 10. Jika x ialah kemungkinan Tsubasa dapat menjawab dengan benar, tentukanlah nilai dari $\lfloor 100x \rfloor$. (Asumsikan bahwa Tsubasa tidak akan melakukan kesalahan lain yang tidak berhubungan dengan kelainannya.)

6. Diberikan $\triangle ABC$ dengan $AB = 15, BC = 19, \cos \angle ABC = \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Dari setiap titik tengah sisi segitiga ditarik dua garis yang masing-masing tegak lurus terhadap sisi yang lain. Jika luas segienam yang terbentuk dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ dengan a relatif prima dengan c, dan b tidak habis dibagi kuadrat sempurna lebih dari 1. Tentukan $a + b + c$.

7. Himpunan S adalah himpunan semua pembagi positif dari 25!. Satu anggota S diambil secara acak dan apabila peluang bilangan tersebut merupakan bilangan ganjil dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{1}{n}$ dengan n adalah bilangan asli, tentukan nilai n.

8. Diberikan barisan bilangan asli $a_1, a_2, \cdots$ yang memenuhi $a_i + a_j = a_{i+j}$ untuk semua $i, j \in \mathbb{N}$ dengan $i \neq j$. Jika $a_k \leq k^2 + 2018$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Tentukan nilai maksimum dari a_1.

9. Pak Wono memiliki sejumlah coklat yang berasal dari 8 negara yang berbeda. Beliau akan membagi 8 coklat berbeda ini ke 3 bungkusan sehingga tidak ada bungkusan yang kosong. Jika 2 bungkusan diantaranya identik. Tentukan banyaknya cara Pak Wono dapat melakukan hal tersebut.

10. Pada $\triangle ABC$, misalkan AD adalah garis tinggi dari A. Lingkaran dengan diameter AD memotong AC di F dan AB di E. Misalkan FD memotong lingkaran luar $\triangle EFC$ untuk kedua kalinya di G. Jika $AD = 20$, $DC = 15$ dan $\angle BAD = 30°$, dan panjang DG dapat dinyatakan sebagai $\frac{m}{\sqrt{n}}$,dengan m, n bilangan asli dimana n tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat sempurna lebih dari 1. Tentukan nilai dari $m + n$.

11. Misalkan a, b, c adalah bilangan real berbeda yang memenuhi

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{a-c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2 = 2$$

Jika a, b, c adalah akar-akar dari polinomial $x^3 - 3x^2 + 2x + t$, tentukan nilai $99t$.

12. Suatu keluarga terdiri dari 4 orang anak, urutan dari yang termuda yaitu Aisyah, Benyah, Ciyah, dan Dyah. Umur mereka dinyatakan dalam bentuk bilangan bulat dengan satuan tahun. Tahun lalu, umur Aisyah relatif prima dengan umur kakak-kakaknya. Tahun ini, setiap dua orang di antara mereka memiliki umur yang relatif prima, kecuali umur Aisyah dan Dyah. Diketahui pula pada tahun ini hasil kali umur mereka yaitu 2016 dan umur Dyah adalah d tahun. Tentukan nilai d.

13. Diberikan dua buah barisan $a_1, a_2, \cdots$ dan $b_1, b_2, ...$ dengan $a_i \in \mathbb{R}$ untuk semua $i \in \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{1 + a_n} \quad \text{dan} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 1}{1 - a_n}$$

Diketahui $a_{2017} = b_1$,$b_{2018} = a_x$, dan $a_{2018} = b_y$ dengan x dan y nilai terkecil yang mungkin. Tentukan nilai $x + y$.

14. Misalkan keterbalikan bilangan asli M adalah bilangan yang diperoleh dari menulis bilangan M dari digit terakhir ke digit pertama. (contoh: keterbalikan dari 2314 adalah 4132). Sebuah bilangan P dikatakan "palindrom sejati" jika pada saat P dipartisi secara sembarang, kemudian setiap partisi dari P diganti dengan keterbalikannya, maka bilangan yang anda peroleh dapat anda gabungkan kembali sedemikian sehingga membentuk P. (Contoh: 1111, 1221 adalah palindrom sejati, sedangkan 1222,12322 bukan) Misalkan M adalah jumlah dari semua bilangan "palindrom sejati" di antara 100000 dan 1000000. Tentukan 3 digit terakhir dari M. (Suatu bilangan n digit dapat di partisi menjadi $1, 2, ...$,atau n bilangan, Misalnya bilangan 123 dapat dipartisi menjadi $\{123\}, \{12, 3\}, \{1, 23\}$ atau $\{1, 2, 3\}$)

15. Diberikan segitiga lancip ABC dengan pusat lingkaran luar O dan titik tinggi H. Diketahui $CH = CO$ dan $\angle CAB = \angle CBO$. Misalkan BO memotong AC pada D. Jika $AB = 5$ dan luas $\triangle COD$ data dinyatakan dalam bentuk $\frac{a-\sqrt{b}}{2c}$ dengan $\gcd(a, c) = 1$ dimana a, b, c bilangan asli. Tentukan nilai dari $a + b + c$.

16. Sebuah kata disebut *valid* apabila kata tersebut dibentuk menggunakan huruf-huruf A, B atau C dan tidak memuat suku kata AAA,BBB dan CCC (sebagai contoh, kata AABCAB merupakan kata yang *valid* sedangkan BABAAAAC bukanlah kata yang valid). Misalkan $S(n)$ menyatakan banyaknya kata yang valid dengan panjang n. Tentukan sisa pembagian $S(2018)$ ketika dibagi oleh 20 (panjang suatu kata di-definisikan sebagai banyaknya huruf yang menyusun kata tersebut. Sebagai contoh, ABC merupakan suatu kata dengan panjang 3).

17. Diberikan sebuah persamaan P yang memenuhi

$$P(x, y) : y^3 + x^2 + 3y + 4xy = x^3 + 2x^2y + 2xy^2$$

Untuk suatu bilangan real a, b didefinisikan $f(x,a) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ dan $g(b,y) = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$ dimana x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 berturut-turut merupakan akar-akar dari $P(x,a)$ dan $P(b,y)$. Jika M menyatakan jumlah semua bilangan real p yang memenuhi $f(x,p) = g(p,y) + 1$. Tentukan nilai dari $10M$.

18. Sebuah segiempat konveks $ABCD$ memiliki sisi-sisi dengan panjang sebagai berikut: $AB = 2016$, $BC = 2017$, $CD = 2018$, dan $DA = 2019$. Garis AB dan garis DC berpotongan di E, sementara garis CB dan garis DA berpotongan di F. Jika diketahui $CE + 5 = AF$, tentukan selisih panjang BE dan BF.

19. Diberikan suatu segitiga sama sisi ABC. Bagi $\triangle ABC$ menjadi n^2 segitiga sama sisi yang kongruen dan tidak tumpang tindih. Sebut masing-masing segitiga kecil ini suatu *sel*. Buat garis yang sejajar BC, CA, AB melalui A, B, C berturut-turut. Daerah yang dibatasi dua garis sejajar yang berdekatan disebut suatu 'pita'. Jika $n = 10$, tentukan maksimum banyaknya *sel* yang dapat dipilih sehingga tidak ada dua *sel* yang berada dalam satu pita.

20. Tentukan bilangan prima p terkecil sedemikian sehingga terdapat suatu bilangan bulat a yang membuat

$$ap \equiv 1 \pmod{667}$$
$$a + p \equiv 17 \pmod{667}.$$