Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes April 2019

26 – 29 April 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Di arena Island Invasion, terdapat Bull dan enam kotak yang disusun secara berjajar pada satu baris. Setiap kotak hancur setelah ditembak sekali saja. Tentukan banyaknya cara agar Bull dapat memilih tiga kotak untuk ditembaki satu persatu.

2. Diketahui persegi ABCD dengan panjang 6. E dan F ada di BC sehingga $CE = 3$ dan $CF = 4$. Diketahui AF dan BE berpotongan di O. Berapakah $100 \times [OFE]^2$?

3. Definisikan $s(n)$ adalah hasil penjumlahan seluruh digit pada n. Sebagai contoh, $s(2019) = 2+0+1+9 = 12$. Tentukan banyaknya bilangan asli $n \leq 2019$ sedemikian sehingga $s(n)$ tidak habis dibagi oleh 9

4. Lima anak Andi, Budi, Candra, Deva dan Evi merayakan hari jadi KTOM dengan latihan soal. Mereka berlatih dengan buku KTOM yang memuat 200 soal. Pada jam pertama, mereka semua mengerjakan 1 soal. Lalu, mereke mengerjakan soal secara bergantian, dengan urutan sesuai namanya. Andi mulai dengan 2 soal. Lalu, orang selanjutnya mengerjakan tiga soal lebih banyak daripada orang sebelumnya, sampai soalnya habis. Misalkan T ialah orang yang mengerjakan soal terakhir. Pada urutan keberapakah dalam abjad huruf pertama dari T?

5. Kelas A terdiri dari anak-anak yang memiliki nama dari dua huruf vokal dan tiga huruf konsonan, dimana setiap anak memiliki nama yang berbeda. Diketahui bahwa banyaknya anak di kelas A sama dengan banyaknya kombinasi nama yang dapat dibuat untuk anak-anak tersebut. Fahmi, salah satu anak dari kelas A, memiliki kebiasaan unik. Sebagai orang asli Malang, Fahmi selalu memanggil nama setiap orang secara terbalik. Sebagai contoh, jika ada orang bernama Azzam, Fahmi akan memanggilnya Mazza; jika ada orang bernama Okyan, Fahmi akan memanggilnya Nayko. Jika $\frac{p}{q}$ adalah peluang Fahmi memanggil dengan tepat salah satu anak di kelas A (termasuk dirinya), dimana p dan q adalah dua bilangan asli yang saling relatif prima, tentukan nilai dari $q - p$.

   Catatan: Huruf A, E, I, O, dan U adalah huruf vokal, sedangkan huruf-huruf sisanya adalah huruf konsonan

6. Suatu bilangan asli k disebut *bagus* jika ada bilangan asli l sehingga $l!$ memiliki tepat k buah angka 0 berurutan di belakang. Berapakah nilai bilangan asli tidak bagus terkecil kesepuluh?

7. Misalkan $A = \sqrt{1.7 + \sqrt{2.8}} + \sqrt{1.7 - \sqrt{2.8}}$. Berapakah nilai dari $\lfloor A^3 \rfloor$?

8. $\triangle ABC$ dengan $AB > AC$ memiliki luas 2019 satuan. Garis bagi dalam dari $\angle A$ memotong BC di D. Titik C' adalah hasil refleksi titik C terhadap AD. Jika diketahui $\triangle DBC'$ sebangun $\triangle ABC$, berapakah nilai AB^2 ketika keliling $\triangle ABC$ minimal?

9. Definisikan barisan bilangan real a_n untuk $n = 0, 1, 2, ...$ dan $a_0 = k$ serta

$$\frac{2a_n + 3}{a_{n+1} + 1} = \frac{a_n + 2}{a_{n+1} + 2}$$

Jika $a_{2019} = 0$, tentukan nilai dari $\frac{2}{k+2}$.

10. Bilangan bulat positif a, b, c, d memenuhi $a > b > c > d$, $a + b + c + d = 2018$, dan $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2018$. Carilah banyaknya nilai yang mungkin dari a.

11. Misalkan m bilangan real positif yang kurang dari 2. Garis $y = -x + m$ memotong kurva $y = -x^2 + 2x$ di titik K dan T. Titik O didefinisikan sebagai $(0, 0)$. Jika luas maksimum $\triangle KTO$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ dimana b tidak habis dibagi bilangan kuadrat apapun (square - free) dan $fpb(a, c) = 1$, tentukan nilai dari $a^a + b^b + c^c$.

12. Zika dan Sifara ingin membuat password email perusahaan mereka. Password mereka akan berbentuk ...*...*... . Bagian * akan diisi dengan "ZIKA" atau "SIFARA" (keduanya harus muncul), dan ... akan diisi dengan angka dengan syarat jumlah digit yang tertulis ialah 9 (digitnya tidak boleh ada yang 0). Suatu hari, Otto, seorang hacker, ingin membobol email ini. Ia tahu syarat password yang dijelaskan sebelumnya. Ternyata, Otto butuh k percobaan untuk berhasil membobol email ini. Berapakah nilai maksimum dari k? Contoh password yang mungkin ialah 212ZIKA111SIFARA1, 11511SIFARAZIKA dan ZIKA45SIFARA.

13. Misalkan titik D terletak di dalam $\triangle ABC$ sehingga $\angle BAD = \angle BCD$ dan $\angle BDC = 90^\circ$. Jika $AB = 65$, $BC = 97$, dan M titik tengah sisi AC, tentukanlah panjang DM

14. Misalkan himpunan S adalah kumpulan semua bilangan asli n sehingga $2019n + 1$ dan $2020n + 1$ merupakan bilangan kuadrat sempurna. Tentukan nilai maksimum k sehingga $k|n$ untuk setiap $n \in S$.

15. Diberikan suatu segitiga dengan ketiga sudutnya adalah α, β, dan γ, dimana $\alpha, \beta \leq \gamma$. Selanjutnya, diberikan fungsi sebagai berikut: $f(\alpha, \beta) = -\sin 3\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\beta - \cos 2\beta + \cos(2\alpha + \beta) - \sin(\alpha + 2\beta) + \cos(2\alpha - \beta) - \sin(\alpha - 2\beta) + 6 \sin\alpha \cos\beta$. Agar diperoleh sudut α dan β yang menyebabkan $f(\alpha, \beta)$ bernilai minimum, tentukan besar sudut γ (dalam satuan derajat)

16. Terdapat tiga dadu dengan 6 sisi bernomor 1-6 dengan masing2 mempunyai probabilitas mendapat angka x adalah P_x, Q_x, R_x.Tiga dadu ini mempunyai sifat istimewa sebagai berikut:

    (a) Jika untuk satu dadi probabilitas mendapat 1 lebih kecil dari probabilitas mendapat 6, maka probabilitas jika dua dadu lainnya dilempar bersama menghasilkan jumlah 2 lebih besar daripada probabilitas jika dua dadu lainnya dilempar bersama menghasilkan jumlah 12.

    (b) Sebaliknya, jika untuk satu dadu probabilitas mendapat 1 lebih besar dari probabilitas mendapat 6, maka probabilitas jika dua dadu lainnya dilempar bersama menghasilkan jumlah 2 lebih kecil daripada probabilitas jika dua dadu lainnya dilempar menghasilkan 12.

Jessen melempar ketiga dadu bersamaan, jika S_x menyatakan probabilitas jumlah semua dadu x dan $3S_{18} = 3S_3 = S_8 = S_{13}$, tentukan nilai maksimal dari $P_1+Q_1+R_1$.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Misalkan x adalah bilangan bulat yang memenuhi

$$4x^{2016} + x^3 = 2019^{2019} + 3$$

   (a) Tentukan sisa ketika 2019^{2019} dibagi 7.

   (b) Jika x merupakan kelipatan 7, buktikan x tidak memenuhi persamaan di atas.

   (c) Tentukan semua sisa yang mungkin ketika x^3 dan x^6 dibagi 7.

   (d) Buktikan tidak ada bilangan bulat x yang memenuhi persamaan di atas.

   (e) Tentukan semua bilangan bulat k dimana $2 \leq k \leq 2019$ sehingga persamaan

$$x^6 + 2kx^3 = 2019^{2019} + 3$$

   memiliki setidaknya satu solusi x bilangan bulat.

2. Tentukan semua tripel bilangan real positif (a, b, c) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} a\lfloor b \rfloor &= 7 \\ b\lfloor c \rfloor &= 7 \\ c\lfloor a \rfloor &= 10 \end{aligned}$$

3. Diberikan segiempat tali busur $ABCD$ dimana perpanjangan DA dan CB saling berpotongan di titik E. Misalkan k adalah garis yang sejajar dengan BC dan melalui titik A serta l adalah garis yang sejajar dengan AD dan melalui titik B, dimana k dan l memotong segmen CD di titik M dan N berturut-turut serta titik potong antara k dan l terletak di dalam segiempat $ABCD$. Misalkan lingkaran luar segitiga ADM dan lingkaran luar segitiga BCN saling berpotongan di titik X dan Y, dimana titik X lebih dekat dengan AB daripada titik Y. Diketahui bahwa AY dan BN saling berpotongan di titik P serta BY dan AM saling berpotongan di titik Q. Buktikan bahwa EX membagi segmen PQ menjadi dua bagian yang sama panjang.

4. Diberikan suatu papan berukuran $m \times n$, dimana m dan n adalah bilangan asli. Doraemon dan Nobita memainkan suatu permainan pada papan tersebut. Pertama, Nobita melabeli masing-masing baris dan kolom pada papan menggunakan bilangan $1, 2, \ldots, m+n-1$, dan $m+n$. Selanjutnya, Doraemon melangkah dengan aturan sebagai berikut: Mula-mula, Doraemon meletakkan batu pada suatu persegi di kolom atau baris berlabel 1. Selanjutnya, untuk setiap bilangan asli k, jika pada langkah ke-k, Doraemon bermain pada kolom atau baris berlabel j, maka pada langkah ke-$(k+1)$, Doraemon bermain pada kolom atau baris berlabel $j+1$, dimana dia meletakkan batu pada persegi di baris atau kolom tersebut, dengan syarat bahwa pada persegi tersebut belum ada batu yang diletakkan (juga dengan asumsi baris atau kolom berlabel $m+n+1$ adalah baris atau kolom berlabel 1). Apabila saat

Doraemon bermain pada suatu baris atau kolom, pada seluruh persegi pada baris atau kolom tersebut telah diletakkan batu, maka permainan berhenti. Doraemon menang jika dia dapat mengisi seluruh persegi pada papan dengan batu, dan Nobita menang jika permainan berhenti sebelum Doraemon dapat melakukan hal ini.

Buktikan bahwa bagaimanapun caranya Nobita melabeli baris dan kolom pada papan tersebut, Doraemon pasti memiliki strategi untuk menang.