Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes April 2020

24 – 27 April 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
11. Notasi $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terkecil dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_k$. Sebagai contoh, $\min\{4, 1.5, 5\} = 1.5$, $\min\{3.5, \pi, 3, 4\} = 3$, $\min\{-5, 3\} = -5$, dan $\min\{1\} = 1$.
12. Notasi $\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terbesar dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_k$. Sebagai contoh, $\max\{4, 1.5, 5\} = 5$, $\max\{3.5, \pi, 3, 4\} = 4$, $\max\{-5, 3\} = 3$, dan $\max\{1\} = 1$.
13. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
14. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
15. Definisikan fpb (faktor persekutuan terbesar) dari bilangan asli a dan b adalah bilangan asli terbesar yang habis membagi a dan b. Apabila d adalah fpb dari a dan b, maka d dapat ditulis sebagai $d = \text{fpb}(a, b)$. Sebagai contoh, $\text{fpb}(6, 4) = 2$, $\text{fpb}(5, 13) = 1$, dan $\text{fpb}(12, 12) = 12$.
16. Definisikan kpk (kelipatan persekutuan terkecil) dari bilangan asli a dan b adalah bilangan asli terkecil yang merupakan kelipatan dari a dan b. Apabila m adalah kpk dari a dan b, maka m dapat ditulis sebagai $m = \text{kpk}(a, b)$. Sebagai contoh, $\text{kpk}(6, 4) = 12$, $\text{kpk}(5, 13) = 65$, dan $\text{kpk}(12, 12) = 12$.

17. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.

18. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.

19. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

20. Pada $\triangle ABC$:

    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.

    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.

    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.

    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

    (f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

    (g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

21. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

22. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

23. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

24. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

25. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

26. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Diberikan segienam sama sisi $ABCDEF$ dengan titik O sebagai pusatnya. Diketahui titik X, Y, dan Z adalah titik tengah dari OC, OE, dan OA berturut-turut. Apabila perbandingan luas segitiga XYZ dan segienam $ABCDEF$ dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana $\frac{p}{q}$, tentukan nilai dari $10p + q$.

2. Jessen menulis angka 1 hingga 100 di papan. Lalu, Alfian menghapus sebuah angka secara acak. Setelah itu, Kinan menghitung jumlah dari 99 bilangan yang tersisa. Apabila Kinan mendapatkan hasil 5000, tentukan angka yang dihapus oleh Alfian.

3. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi
$$x^8 + y^8 = 7^7.$$

4. Untuk suatu kata K, definisikan $f(K)$ adalah banyaknya permutasi kata yang mungkin dari K. Sebagai contoh, $f(\text{"}ADA\text{"}) = 3$, karena "$ADA$", "$AAD$", dan "$DAA$" merupakan permutasi dari "ADA". Tentukan banyaknya kata K sedemikian sehingga $f(K) = 5$.
Catatan: Kata K tidak harus ada dalam KBBI, namun hanya boleh menggunakan 26 *abjad latin kapital.*

5. Tentukan banyaknya bilangan asli $x < 10000$ sedemikian sehingga fpb dari 2016 dan x adalah 288.

6. Diberikan segitiga ABC dengan luas 36. Apabila titik P, Q, dan R berturut-turut berada pada sisi AB, BC, dan CA sedemikian sehingga $AB = 2AP$, $BC = 3BQ$, dan $AR = 2CR$, tentukan luas dari segitiga PQR.

7. Kinan memiliki tak hingga banyaknya kubus dengan grid 3×3 menutupi keenam permukaan kubus tersebut. Kinan akan memotong kubus dengan ketentuan kubus hanya bisa dipotong pada garis grid yang ada pada permukaan kubus. Tentukan banyaknya jenis potongan kubus yang mungkin Kinan dapatkan apabila kubus dipotong dua kali.
Catatan: Dua potongan kubus dianggap sama jika salah satu potongan kubus dapat dirotasi agar didapatkan potongan kubus yang lain.

8. Diketahui x dan y adalah bilangan real yang memenuhi $x + y = 1$. Apabila nilai minimum dari
$$x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$$
dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana $\frac{p}{q}$, tentukan nilai dari p^q.

9. Dewangga, Izzul, dan Piko akan menuliskan sebuah bilangan asli pada kertas mereka masing-masing secara rahasia. Diketahui bahwa jumlah bilangan yang mereka tulis dijamin untuk tidak lebih dari dua puluh. Apabila peluang bahwa bilangan yang ditulis ketiganya memuat setidaknya satu bilangan ganjil dan satu bilangan genap dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dimana a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $10a + b$.

10. Tentukan banyak tripel bilangan bulat (x, y, z) dengan $|x|, |y|, |z| \leq 100$ sedemikian sehingga $xy + x + y = z$ dan $yz + y + z = x$.

11. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan bulat yang membuat persamaan

$$(x - a)(x - 2020) + 39 = (x + b)(x - c)$$

berlaku untuk semua bilangan real x. Apabila jumlah semua b yang mungkin adalah S, tentukan nilai dari $\left|\left\lfloor \frac{S-7}{2020} \right\rfloor\right|$.

12. Diberikan segitiga sama sisi ABC dengan panjang sisi $\sqrt{19}$. Terdapat titik P di dalam segitiga tersebut sedemikian sehingga $\angle APB = 120^\circ$ dan $CP = \sqrt{7}$. Tentukan nilai dari $AP + BP$.

13. Misalkan

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^k}\right).$$

Tentukan nilai dari $\lfloor A \rfloor$.

14. Tentukan jumlah dari semua bilangan asli tiga digit yang digit-digitnya membentuk barisan naik tegas. (Contoh: 123, 235, 389. Bukan contoh: 224, 132, 455).

15. Diberikan segitiga ABC dengan titik tinggi H. Notasikan R dan r sebagai jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam dari segitiga ABC berturut-turut. Apabila $R + r = 2020$, tentukan nilai dari $AH + BH + CH$.

16. Definisikan sebuah bilangan a sebagai permutasi dari bilangan b apabila digit-digit yang digunakan dalam a merupakan permutasi dari digit-digit yang digunakan dalam b. Sebagai contoh, 1277 merupakan permutasi dari 1727 namun bukan merupakan permutasi dari 7211, 8322 ataupun 712.
Katakan bilangan n yem-yem apabila terdapat dua buah pasangan bilangan asli (a, b), dengan $a \neq b$, sedemikian sehingga a^n merupakan permutasi dari b^n.
Misalkan A adalah penjumlahan semua bilangan asli yem-yem yang tidak lebih dari 2020. Tentukan tiga digit terakhir dari A.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Diberikan segitiga ABC dengan titik pusat lingkaran dalam I.
   (a) Buktikan bahwa $\angle BIC = 90° + \frac{\angle BAC}{2}$.
   (b) Misalkan titik I_A, I_B, dan I_C merupakan titik pusat lingkaran dalam dari segitiga IBC, ICA, dan IAB berturut-turut. Tarik garis II_B sedemikian sehingga memotong AC di titik U serta tarik garis II_C sedemikian sehingga memotong AB di titik V. Buktikan bahwa $\angle BAC = 60°$ jika dan hanya jika $AVIU$ merupakan segiempat siklis.

2. Misalkan $\mathbb{R}^+$ adalah himpunan semua bilangan real positif. Lalu, misalkan pula S adalah himpunan dimana $1 \in S$ dan $S \subseteq \mathbb{R}^+$. Tentukan, dengan bukti, semua fungsi $f : S \to S$ sedemikian sehingga
$$f(a)^{b+1} + (b + f(1))^{f(a)} = a^{f(b)+1} + (f(b) + 1)^a$$
untuk setiap $a, b \in S$.

3. Negara KTOM memiliki 2020 kota. Maskapai KTOM Airlines membuka penerbangan antar beberapa kota di negara tersebut. Namun, Jessen, yang tinggal di kota A, tidak dapat pergi ke kota B hanya dengan menggunakan KTOM Airlines (meskipun Jessen transit di kota lain dari kota A). Jessen memutuskan mendirikan KTOM Airways untuk menghindari persaingan langsung. KTOM Airways membuka penerbangan antar dua buah kota jika dan hanya jika KTOM Airlines tidak membuka penerbangan antar kedua kota tersebut.
   Buktikan bahwa dari sembarang kota di negara KTOM, Jessen kini dapat pergi ke sembarang kota lain hanya dengan menggunakan KTOM Airways (dengan transit diperbolehkan).
   Catatan: Apabila sebuah maskapai membuka penerbangan dari X ke Y, maskapai tersebut pasti membuka penerbangan dari Y ke X.

4. Diberikan dua bilangan prima ganjil p dan q. Diberikan pula suatu fungsi $f : \{1, 2, \ldots, p-1\} \to \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$ yang memenuhi sifat berikut: Untuk setiap bilangan asli a, b, dan c yang kurang dari p, apabila $ab - c$ habis dibagi p, maka $f(a) + f(b) - f(c)$ juga habis dibagi q.
   Selanjutnya, misalkan $L = f(1) + f(2) + \ldots + f\left(\frac{p-1}{2}\right)$. Buktikan bahwa apabila $L \neq 0$, maka $p - 1$ habis dibagi q dan $L = \frac{(p-1)(q-1)}{4}$.