

Kompetisi Sains Nasional 2020
Hari Pertama
Sekolah Menengah Atas

13 Oktober 2020

Soal 1. Diberikan segitiga lancip ABC dan titik D pada segmen BC . Lingkaran c_1 adalah lingkaran yang melalui A, D , dan memiliki titik pusat pada garis AC , sedangkan lingkaran c_2 adalah lingkaran yang melalui A, D , dan memiliki titik pusat pada garis AB . Misalkan $P \neq A$ adalah titik potong lingkaran c_1 dengan AB dan $Q \neq A$ adalah titik potong lingkaran c_2 dengan AC . Buktikan bahwa AD garis bagi $\angle PDQ$.

Soal 2. Misalkan $P(x) = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, c real. Jika

$$P(a) = bc, \quad P(b) = ca, \quad P(c) = ab$$

Buktikan bahwa

$$(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c) = 0$$

Soal 3. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sehingga $n^2 + f(n)f(m)$ merupakan kelipatan $f(n) + m$ untuk setiap bilangan asli n, m .

Soal 4. Diberikan papan catur berukuran $2n \times 2n$ yang setiap petaknya diwarnai dengan salah satu dari n warna. Buktikan bahwa terdapat dua petak yang terletak di dalam kolom yang sama atau baris yang sama, sehingga jika pewarnaan kedua petak tersebut ditukar, maka terdapat persegi panjang yang keempat petak pada semua sudutnya memiliki warna yang sama.