AZZAM LABIB HAKIM

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
PELATIHAN TAHAP I MALANG

SOEWONO
IMO TEAM
1 Oktober 2018

1. **CROSS RATIO**
   - DEFINISI CROSS RATIO
   - CROSS-RATIO of the pencil of lines
2. **POLE AND POLAR**
   - Pole and Polar
3. **INVERSION IN CIRCLES**
   - Inversion in Circles
4. **ANGLE CHASING**
   - Angle Chasing
5. **TRANSFORMATION**
   - Transformation

Konsep Cross-Ratio menjadi dasar dalam mempelajari Projective Geometry, dimana aplikasinya sangat diperlukan dalam mencari solusi Geometry Euclidean.

Definisi 1.1

Misalkan ℓ garis dan A, B, C, D empat titik yang berbeda dalam urutan pada ℓ. Maka, perbandingan $\frac{AC/CB}{AD/DB}$ yang dinyatakan dengan lambang (AB, CD) disebut ***cross-ratio*** *atau harmonic-division, yang disingkat harmonic. Harmonic division (harmonic) adalah alat yang dipakai untuk memecahkan permasalahan yang sulit dalam geometry Euclidean.*

Teorema 1.2

Jika $(AB,CD)=r$, maka :

1. $(AB,CD)=(BA,DC)=(CD,AB)=(DC,BA)=r$
2. $(BA,CD)=(AB,DC)=(DC,AB)=(CD,BA)=\frac{1}{r}$
3. $(AC,BD)=(BD,AC)=(CA,DB)=(DB,CA)=1-r$
4. $(CA,BD)=(DB,AC)=(AC,DB)=(BD,CA)=\frac{1}{1-r}$
5. $(BC,AD)=(AD,BC)=(DA,CB)=(CB,DA)=\frac{r-1}{r}$
6. $(CB,AD)=(DA,BC)=(AD,CB)=(BC,DA)=\frac{r}{r-1}$

Definisi 1.3

Jika A, B, C, D empat titik kolinier sehingga $(AB, CD) = -1$, yaitu : C dan D membagi AB satu didalam dan yang lain diluar, maka segmen AB dikatakan dibagi secara harmonic oleh C dan D.
Titik C dan D disebut harmonic-conjugates satu sama lainnya terhadap A dan B. Keempat titik A, B, C, D disebut harmonic range. Jika $V(AB, CD) = -1$, maka VA, VB, VC, VD disebut harmonic pencil.

NB : Pencil $P(A, B, C, D)$ adalah himpunan empat garis PA, PB, PC, PD.

Teorema 1.4

Jika C dan D membagi AB secara harmonic, maka A dan B membagi CD secara harmonic.

Proof.

Jika (AB,CD)=-1, maka menurut Teorema sebelumnya yaitu (CD,AB)=-1 , artinya A dan B membagi CD secara harmonic.

□

Contoh 1.5

Andaikan (AC,BD)=-1 , buktikan :

1. $\frac{1}{AC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}\right)$
2. $OC^2 = OB.OD$, *dimana O pertengahan segmen AC.*

Proof.

1. (AC,BD) = -1 artinya AB.CD=-BC.DA
AB.(AD + CA) = (AC - AB).AD
AB.(AD + CA) = (BA + AC)AD = AC.AD - AB.AD
2AB.AD = AC.AD + AB.AC
Persamaan terakhir ini bagilah dengan 2AB.AC.AD, maka diperoleh :
$\frac{1}{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}\right)$... qed.

2. AB = AO + OB = OC + OB
AD = AO + OD = OC + OD dan AC = 2AO
Dari (1) : $\frac{1}{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}\right)$
$\frac{1}{2AO} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{OB+OC} + \frac{1}{AO+OD}\right) \rightarrow \frac{1}{AO} = \frac{1}{OB+OC} + \frac{1}{OD+OC}$
Karena O pertengahan AC, maka AO = OC
Jadi, $\frac{1}{OC} = \frac{1}{OB+OC} + \frac{1}{OD+OC}$
$\frac{1}{OC} = \frac{OD+OC+OB+OC}{(OB+OC)(OD+OC)} = \frac{2OC+OB+OD}{OB.OD+OB.OC+OC.OD+OC^2}$
Setelah disederhanakan, diperoleh :
$OC^2 = OB.OD$ ... qed.

□

Definisi 1.6

Jika a, b, c, d *empat garis yang berbeda, dalam urutan pada satu bidang, maka nilai dari ratio*

$$\frac{\sin(a,b)\sin(c,d)}{\sin(b,c)\sin(d,a)},$$

yang diberi lambang (ac, bd) *disebut cross-ratio dari berkas garis* a, b, c, d *yang konkuren di titik* V. *Dimana* (a, b) *menyatakan sudut yang dibentuk oleh a dan b.*

Teorema 1.7

Jika garis-garis a, b, c dan d semuanya melalui titik V, dan garis ℓ memotong berkas garis a, b, c, d berturut-turut di titik A, B, C dan D, maka :

$$(ac,bd) = (AC,BD)$$

Proof.

Gambarkan sesuai dengan skenario soal. Buat melalui V garis tegak lurus ℓ, dan nyatakan titik potongnya H, selanjutnya sebut segmen $VH=h$, maka :

$$(AC, BD) \triangleq \frac{AB.CD}{BC.DA} = \frac{(\frac{1}{2}h.AB)(\frac{1}{2}h.CD)}{(\frac{1}{2}h.BC)(\frac{1}{2}h.DA)}$$

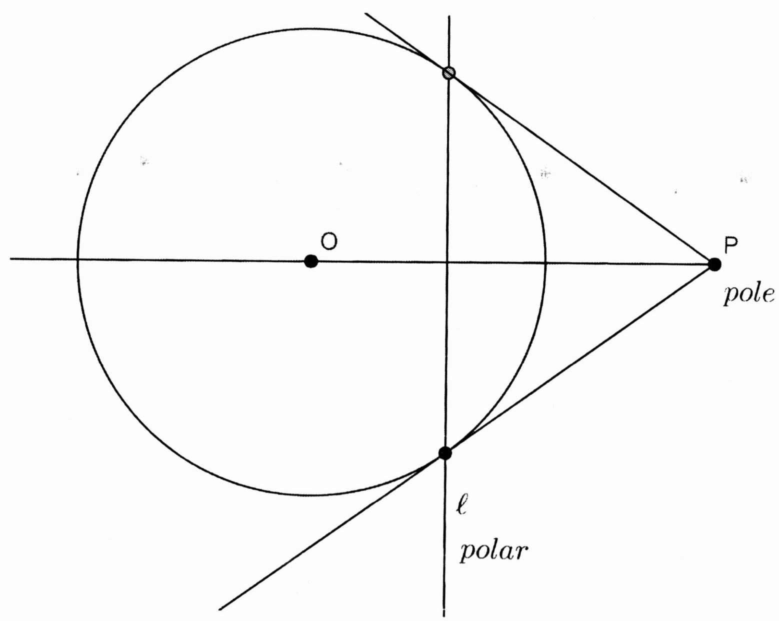
$$= \frac{[VAB][VCD]}{[VBC][VDA]} = \frac{\frac{1}{2}ab\sin(a,b).\frac{1}{2}cd\sin(c,d)}{\frac{1}{2}bc\sin(b,c).\frac{1}{2}da\sin(d,a)}$$

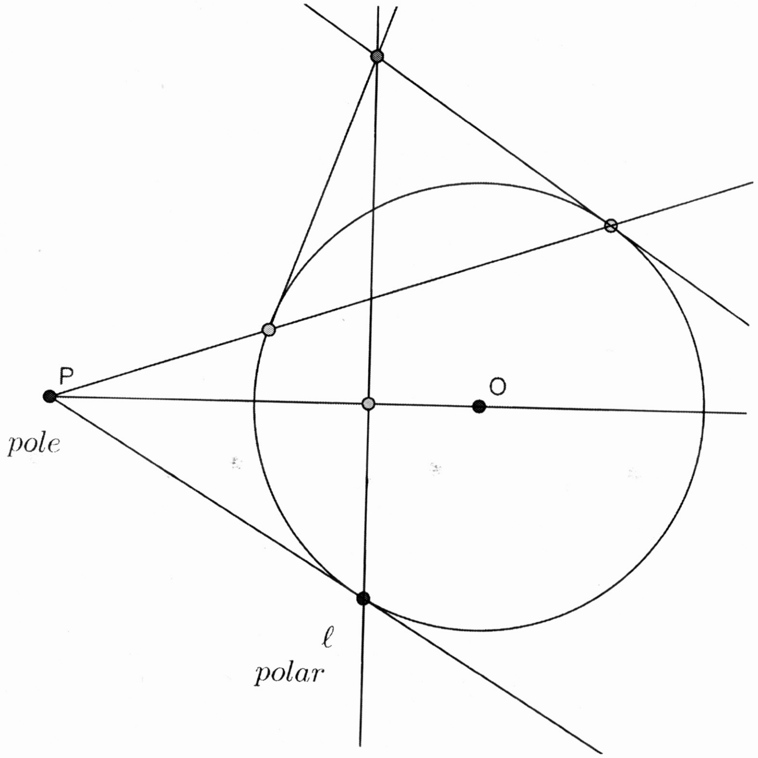
Sehingga diperoleh : $(AC, BD) = (ac, bd)$.... qed.

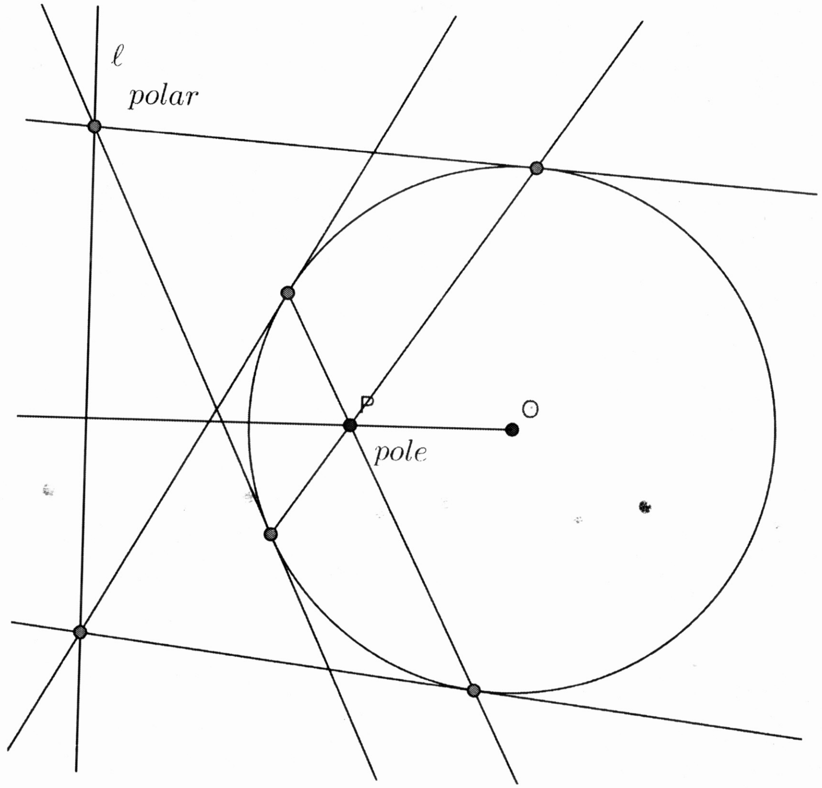
□

Definisi 2.1

Misalkan Γ lingkaran berpusat di O dengan radius r, yang diberi notasi $\Gamma(O, r)$ dan inverse P' dari P terhadap Γ (P' terletak pada sinar OP sehingga $OP.OP' = r^2$). Misalkan pula bahwa ℓ garis yang melalui P' tegak lurus OP, maka dikatakan bahwa ℓ polar dari P dan P adalah pole dari ℓ.




P
O
pole
ℓ
polar


ℓ
polar
P
O
pole

Definisi 3.1

Misalkan Γ *suatu lingkaran dengan radius* r*, berpusat di* O*. Untuk suatu titik* $P \neq O$*, inverse* P' *dari* P *terhadap* Γ *adalah titik* P' *yang unique pada sinar garis* OP *sehingga*

$$OP.OP' = r^2.$$

Teorema 3.2

Diberikan titik $P \neq O$, berlaku :

1. $P = P'$ jika dan hanya jika P terletak pada Γ.
2. Jika P di dalam Γ, maka P' di luar Γ, dan jika P di luar Γ, maka P' di dalam Γ.
3. $(P')' = P$.

Teorema 3.3

Misalkan titik P didalam $\Gamma(O,r)$. Andaikan TU tali busur Γ yang melalui P tegak lurus pada OP. Maka inversi P' dari P adalah pole dari tali busur TU, yaitu titik potong antara garis singgung Γ berturut-turut T dan U.

Proof.

Misalkan garis singgung Γ di T memotong OP di P'. Selanjutnya, perhatikan bahwa segitiga siku-siku OPT sebangun dengan segitiga siku-siku OTP'. Akibatnya,

$$\frac{OP}{r} = \frac{OT}{OP'} \Rrightarrow OP.OP' = r^2,$$

yang berarti P' adalah inversi dari P.
Dengan cara yang sama, untuk garis singgung Γ di U juga melalui P', jadi P' yang merupakan inversi dari P adalah pole dari tali busur TU. Terbukti. $\square$

Teorema 3.4

Jika P titik di luar $\Gamma(O, r)$, dan misalkan Q pertengahan OP. Andaikan pula bahwa Γ_1 lingkaran yang berusat di Q dengan radius $OQ = QP$. Maka, Γ_1 memotong Γ berturut-turut di T dan U, PT dan PU adalah garis singgung pada Γ. Dengan demikian inversi P' dari P adalah perpotongan dari TU dan OP.

Adalah sangat mengagumkan, banyak teorema-teorema dalam Geometry Euclidean yang dapat dibangun dengan menggunakan penataan dari sudut-sudut, yang mengikuti penemuan dari : kesebangunan segitiga, segiempat tali busur dan lainnya. Dalam beberapa permasalahan yang ada pada lingkaran, teknik ini dikenal sebagai "*angle chasing*".
Sebagai contoh dari angle chasing, yaitu teorema yang untuk pertama kalinya diterbitkan pada tahun 1838 oleh A. Miguel.

Teorema 4.1

Misalkan segitiga ABC dengan titik-titik P, Q, R berturut-turut pada sisi-sisi BC, CA, dan AB. Maka lingkaran luar dari segitiga : ARQ, BPR, CQP melalui satu titik sekutu.

Proof.

Andaikan T titik potong kedua (selain R) dari lingkaran luar segitiga ARQ dan BPR, maka menurut sifat kollinearitas, berlaku :

$$\angle TQA = \pi - \angle CQT, \angle TRB = \pi - \angle ART$$
$$\text{dan } \angle TPC = \pi - \angle BPT.$$

Dalam segirmpat tali busur berlaku :

$$\angle TQA = \pi - \angle ART, \angle TRB = \pi - \angle ART.$$

Akibatnya $\angle TPC = \pi - \angle CQT$. Sebaliknya, pada segiempat tali busur, jumlah sudut yang berhadapan = π. Oleh karena itu T juga terletak pada lingkaran luar segitiga CPQ.

$\square$

Teorema 4.2

Misalkan lingkaran Γ_1 dan Γ_2 berpotongan di dua titik yang berbeda A dan B. Andaikan CD tali busur pada Γ_1, dan misalkan pula E dan F titik potong kedua dari garis CA dan garis BD berturut-turut dengan Γ_2. Maka EF sejajar CD.

Proof.

Sesuai dengan judul "angle chasing" , maka kita lakukan pem-buruan sudut.
$\angle CDF = \angle CDB$, sifat kolliniearitas B, D, F
$= \pi - \angle CAB$, sifat segiempat tali busur $ABCD$
$= \angle EAB$, sifat kollinearitas E, A, C
$= \pi - \angle EFB$, sifat segiempat tali busur $ABFE$
$= \angle EFG$, sifat kolliniearitas B, F, G dimana $G = CE \cap DF$
Dengan demikian garis CD dan garis EF membuat sudut yang sama dengan sinar garis DG, maka EF sejajar CD. Terbukti.

$\square$

Definisi 5.1

1. *Isometry : Transformasi, dimana jarak antara titik-titik adalah tetap disebut isometry.*

Contoh 5.2

Jika t transformasi, P dan Q suatu titik pada bidang sehingga $t(P) = P'$ *dan* $t(Q) = Q'$, *jika* $PQ = P'Q'$, *maka t disebut isometry.*

Definisi 5.3

2. *Rotasi : Rotasi melalui titik P sebesar sudut* θ, *diberi notasi* $R_{P,\theta}$.
Jika $R_{P,\theta}(P) = P$, *dan untuk* $A \neq P$, $R_{P,\theta}(A) = A'$ *sehingga* $PA \cong PA'$ *dan* $\angle APA' = \theta$.
Titik P disebut pusat dari rotasi.

Definisi 5.4

3. *Refleksi : Refleksi pada garis ℓ diberi notasi R_ℓ adalah transformasi, dimana jika A tidak pada ℓ, maka $R_\ell(A) = A'$, sehingga ℓ garis sumbu dari AA', dan jika P pada ℓ, maka $R_\ell(P) = P$*

Definisi 5.5

4. *Refleksi Luncur (Glide reflection) : Refleksi luncur $G_{EH,\ell}$ adalah perkalian dari R_ℓ dengan T_{EH}, dimana EH sejajar dengan ℓ.*
Dengan demikian, $G_{EH,\ell} = R_\ell \circ T_{EH} = T_{EH} \circ R_\ell$.

Definisi 5.6

5. Homothety : Homothety, $H_{O,k}$, dimana O titik tertentu dan k bilangan real tidak sama dengan nol, adalah transformasi dimana $H_{O,k}(O) = O$; jika $P \neq O$ maka $H_{O,k}(P) = P'$, sehingga O,P dan P' kollinear dan $OP' = k(OP)$.
Jika $k > 1$, maka O - P - P'
Jika $0 < k < 1$, maka O - P' - P dan
Jika $k < 0$, maka P' - O - P.
Titik O disebut pusat homothety dan k disebut konstanta proporsional.
Kadang-kadang homothety disebut juga dengan istilah dilation.