KTOM

Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan Oktober 2018

26–29 Oktober 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \dots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

22. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *injektif* atau *satu-satu* bila untuk setiap $a, b \in X$ yang memenuhi $f(a) = f(b)$, dipunyai $a = b$. Dengan kata lain, tidak ada $a, b \in X$ dengan $a \neq b$ yang memenuhi $f(a) = f(b)$.

23. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *surjektif* bila untuk setiap $y \in Y$, ada $x \in X$ yang memenuhi $f(x) = y$. Dengan kata lain, range dari fungsi f adalah Y.

24. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *bijektif* bila fungsi tersebut injektif dan surjektif. Dengan kata lain, terdapat fungsi $g : Y \to X$ yang memenuhi $g(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in X$, dan $f(g(y)) = y$ untuk setiap $y \in Y$. (Fungsi g ini disebut *invers* dari fungsi f.)

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Terdapat 4 bola merah dan 3 bola putih pada suatu kotak. Dua bola dari kotak akan diambil secara bersamaan. Jika bentuk paling sederhana dari peluang terambilnya bola berwarna sama adalah $\frac{m}{n}$, tentukan $m + n$.

2. Tentukan bilangan bulat n terbesar sehingga $5000 \cdot (0,6)^n$ merupakan bilangan bulat.

3. Diketahui $(g \circ f)(x + 2) = 2x^2 + 8x + 5$ serta $g(x) = 2x + 5$ untuk setiap bilangan real x. Tentukan bilangan real positif x yang memenuhi $f(x) = 96$.

4. Diketahui luas segienam beraturan $ABCDEF$ adalah $150\sqrt{3}$. Tentukan panjang AD.

5. Seorang guru mengadakan ulangan sejarah. Ulangan tersebut terdiri dari lima soal pilihan ganda dan setiap soal terdiri dari lima pilihan jawaban. Kimi, salah satu peserta ulangan, mengetahui bahwa soal pertama terdapat empat pilihan jawaban yang pasti salah, soal kedua terdapat tiga pilihan jawaban yang pasti salah, soal ketiga terdapat dua pilihan jawaban yang pasti salah, soal keempat terdapat satu jawaban yang pasti salah, dan soal kelima tidak terdapat pilihan jawaban yang pasti salah. Asumsikan setiap soal hanya memiliki satu jawaban benar, Kimi menjawab semua soal dengan menebak jawaban dengna syarat Kimi tidak memilih jawaban yang sudah pasti salah. Jika peluang Kimi menjawab dengan benar tepat tiga dari lima soal dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $100a + b$.

6. Tentukan faktor persekutuan terbesar dari $(2018! + 1)$ dan $2019!$.

7. Russell menyusun suatu persamaan kubik $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ dimana (p, q, r) adalah susunan acak dari $(1, 2, 3)$. Bila akar-akar dari persamaan kubik tersebut adalah a, b, dan c, tentukan nilai terbesar dari $(a + 2)(b + 2)(c + 2)$ yang mungkin.

8. Diketahui pada segitiga ABC, panjang BC adalah 17. Titik A, D, E, dan B terletak segaris dengan urutan demikian, sedangkan titik A, F, G, dan C terletak segaris dengan urutan demikian sehingga luas kelima segitiga ADF, DFG, DEG, CEG, dan BEC adalah sama. Bila $AE = 12$ dan $CG = 2$, tentukan luas segitiga AFD.

9. Tentukan banyaknya nilai n bilangan bulat tak negatif sehingga
$$((n! + 1)! + 2)! + 3$$
adalah bilangan kubik sempurna.

10. Misal a dan b adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + 20x + 18 = 0$. Misalkan
$$\frac{20b^2 - 400a - 20a^2}{18a - 18b - a^2b} = \frac{p}{q}$$
untuk suatu bilangan bulat p dan q yang positif dan relatif prima. Tentukan nilai $p - q^2$.

11. Terdapat segmen AB dengan panjang 6. C dan D dipilih acak pada segmen AB sedemikian sehingga $0 \leq AC \leq AD \leq AB$. Jika peluang $CD \geq 4$ dan $2AC \leq CD$ dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah dua bilangan bulat positif yang saling relatif prima, tentukan nilai dari $a + b$.

12. Diketahui sebuah segitiga lancip ABC dengan $BC > CA > AB$ dan $\angle BCA = 22.5°$. H dan O ialah titik tinggi dan titik pusat lingkaran luar segitiga tersebut. Jari-jari lingkaran luar segitiga ini ialah 2. Jika $[AHO] + [BHO] + [CHO] = \sqrt{18} - \sqrt{6}$, berapakah besar dari sudut $\angle ABC$?

13. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $b \neq 0$. Jika nilai maksimum dari

$$\min\left(\frac{4 - a^2 b}{4b}, \frac{4ab^2 - 1}{4b^2}\right)$$

adalah M, di mana $\min(x, y)$ menyatakan bilangan terkecil di antara x dan y. Tentukan nilai dari $\lfloor 100M \rfloor$.

14. Seorang pecinta alam bernama Afif sedang tersesat di tengah hutan weebuu yang berbentuk segitiga dengan titik sudut $(0, 0), (4, 0)$ dan $(0, 4)$. Pada kedua sisi tegak hutan (yaitu sumbu-x dan sumbu-y) terdapat katak raksasa yang lapar, sehingga ketika Afif menginjakkan kaki sisi tegak tersebut, ia akan langsung dimangsa. Namun, pada sisi miring segitiga siku-siku tersebut (garis $x + y = 4$), terdapat pintu ke mana saja yang dapat mengantarkan Afif pulang dalam sekejap.

    Pada saat ini, Afif berada pada titik $(1, 1)$ dan melangkah secara acak karena ia tidak membawa kompas. Diketahui bahwa jika Afif berada pada titik (x, y) maka Afif hanya dapat melangkah ke titik $(x - 1, y)$ atau $(x, y - 1)$ dengan peluang $\frac{3}{8}$ serta ke titik $(x + 1, y)$ atau $(x, y + 1)$ dengan peluang $\frac{1}{8}$. Jika peluang Afif berhasil pulang dapat dituliskan sebagai $\frac{m}{n}$ dimana m dan n adalah bilangan asli relatif prima, tentukan nilai $m + n$.

15. Diberikan j, k, l tiga buah bilangan bulat positif berbeda yang tidak lebih besar daripada 2018. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat (j, k, l) yang memenuhi kedua kondisi berikut:

$$\left\lfloor \frac{j}{k} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{l} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{l}{j} \right\rfloor$$

adalah barisan aritmatika dengan urutan tersebut dan

$$\left\lceil \frac{j}{k} \right\rceil, \left\lceil \frac{k}{l} \right\rceil, \left\lceil \frac{l}{j} \right\rceil$$

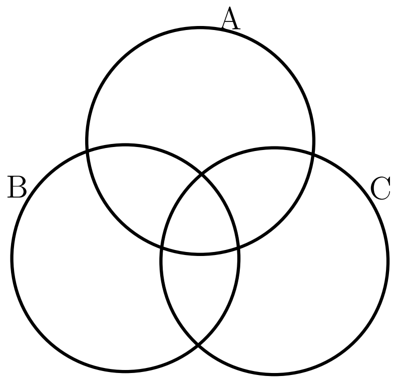
adalah barisan geometri dengan urutan tersebut.

16. Diberikan segitiga ABC dengan $BC = 10$ dan $\angle BAC = 45°$. Pada sisi AB dan AC, dibentuk persegi $ABDE$ dan $ACFG$ ke arah luar segitiga ABC. Misalkan O adalah pusat lingkaran luar AEG. Diketahui bahwa $OD^2 + OG^2 = 1308$. Tentukan luas segitiga ADF.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Misalkan terdapat tiga lingkaran A, B, C yang beririsan seperti pada gambar di bawah ini membentuk 7 daerah. Dua buah koin akan diletakkan kedalam 1 dari 7 daerah tersebut sehingga tidak ada 2 koin yang berada di daerah yang sama.



   (a) Buktikan bahwa banyaknya lingkaran yang tidak mengandung koin tidak lebih dari 1.

   (b) Jika terdapat tepat 1 lingkaran yang tidak mengandung koin, buktikan bahwa salah satu dari 2 lingkaran lainnya memiliki tepat 1 koin.

   (c) Jika tidak ada lingkaran yang tidak mengandung koin, misalkan $|A|, |B|, |C|$ menyatakan banyaknya koin yang terletak di dalam lingkaran A, B, C berturut-turut.

      (i) Buktikan bahwa $|A| + |B| + |C| \leq 5$.

      (ii) Jika tidak terdapat lingkaran yang mengandung tepat 1 koin, buktikan bahwa $|A| + |B| + |C| \geq 6$.

   (d) Buktikan bahwa selalu terdapat setidaknya 1 lingkaran yang mengandung tepat 1 koin.

2. Tentukan semua bilangan bulat positif n, sehingga untuk setiap bilangan real a dan b, dipunyai
$$a^n + b^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}a.$$

3. Pada segitiga lancip ABC, misalkan D, E ialah dua titik di lingkaran luar segitiga ABC sehingga DE ialah diameter, $DE||BC$ dan D lebih dekat ke B dibandingkan dengan C. Misalkan H titik tinggi dari ABC, dan Γ ialah lingkaran dengan diameter AH. Γ memotong AD, AB, AC, AE berturut-turut di M, G, F, L, dan MF memotong GL di P. Buktikan $\angle BPC = 90°$.

4. Diberikan barisan bilangan asli $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ dengan
$$u_n = a^n - b^n$$

untuk suatu bilangan asli $a > b$ yang relatif prima. Tentukan, dengan bukti, semua pasangan (a, b) yang mungkin sedemikian sehingga terdapat empat bilangan u_p, u_q, u_r, dan u_s, dimana $s \neq p$, $s \neq q$, dan $s \neq r$, yang memenuhi

$$u_p u_q u_r = u_s.$$