

- c. $1000(z - y) + xy$ e. $1000z + xy$
- d. $1000(x - y) + yz$
6. Jika $(1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 2011!)^2$ dibagi 5 maka sisanya adalah
a. 2 c. 4 e. 11
b. 3 d. 7
7. Misalkan angka satuan dari bilangan asli n adalah 8. Jika angka 8 ini dipindahkan ke digit paling depan, maka akan didapat sebuah bilangan yang nilainya 4 kali n . Berapakah minimal banyaknya digit dari n ?
a. 2 c. 4 e. 6
b. 3 d. 5
8. Jika n adalah bilangan asli, maka penjumlahan semua faktor prima dari m di mana $m = 7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3}$ adalah
a. 14 c. 17 e. 12
b. 21 d. 15
9. M menyatakan perkalian 2011 bilangan prima yang pertama. Banyaknya angka nol di akhir bilangan M adalah
a. 1 c. 3 e. 5
b. 2 d. 4
10. ABCD adalah trapesium dengan AB sejajar CD. Diagonal AC dan BD berpotongan di titik O. Luas segitiga AOB = 99^2 cm^2 , sedangkan luas segitiga COD = 19^2 cm^2 . Luas trapesium tersebut adalah cm^2 .
a. 112^2 b. 124^2 c. 136^2

d. 118^2 e. 144^2

11. Jika $a^2 = 3b + 77$ dan $b^2 = 3a + 77$ dengan a dan b bilangan real berbeda, maka hasil kali ab adalah

a. 27 c. -68 e. 126
b. -142 d. 81

12. DEB adalah tali busur suatu

lingkaran dengan $DE = 3$

satuan panjang dan $EB = 5$

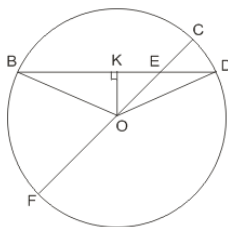
satuan panjang. Misalkan O

adalah pusat lingkaran.

Hubungkan OE dan

perpanjangan OE memotong lingkaran di titik C .

Diketahui $EC = 1$ satuan panjang. Radius lingkaran tersebut adalah ... satuan panjang.



a. $6\sqrt{2}$ c. $8 - 2\sqrt{2}$ e. 7,3333....
b. 7 d. 8

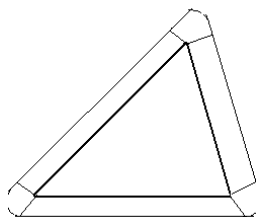
13. Misalkan $f(n)$ didefinisikan kuadrat dari penjumlahan digit n . Misalkan juga $f^2(n)$ didefinisikan $f(f(n))$, $f^3(n)$ didefinisikan $f(f(f(n)))$ dan seterusnya. Maka $f^{2011}(11)$ adalah

a. 121 c. 256 e. 169
b. 144 d. 184

14. Jika m dan n adalah bilangan bulat yang memenuhi $m^2 + 3m^2n^2 = 30n^2 + 517$, maka nilai dari $3m^2n^2$ adalah

a. 201 c. 297 e. 588
b. 336 d. 402

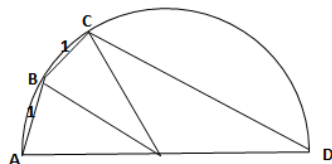
15. Jika $6^{83} + 8^{83}$ dibagi 49, maka sisanya adalah
- a. 21 c. 19 e. 25
b. 35 d. 36
16. Bilangan a , b , dan c adalah digit-digit dari suatu bilangan yang memenuhi $49a + 7b + c = 286$. Maka bilangan tiga digit $(100a + 10b + c)$ adalah
- a. 112 c. 628 e. 512
b. 181 d. 556
17. Sebuah rumah bagian alasnya mempunyai bentuk segitiga dengan keliling P meter dan luas A meter persegi. Taman rumah tersebut merupakan bidang yang merupakan kumpulan titik-titik dengan jarak 5 meter dari tepi rumah terdekat. Luas taman beserta rumah tersebut adalah meter persegi.
- a. $A + 5P + 25\pi$ d. $A + 6,25P + 25\pi$
b. $A + 6,5P + 25\pi$ e. $A + 6P + 25\pi$
c. $A + 5,5P + 25\pi$
18. Garis $g : ax + by + c = 0$ memotong sumbu x di P . Garis h melalui P dan tegak lurus garis $3x - y + 8 = 0$. Jika persamaan h adalah $(c + 8)x + 6y - 12 = 0$, nilai a adalah
- a. 1 c. 2,5 e. 4
b. 2 d. 3



19. Jika $2^x = 3$, $3^y = 4$, $4^z = 5$, maka $2^{xyz+1} = \dots$

- a. 10 c. 20 e. 30
b. 15 d. 25

20. Segiempat ABCD dibentuk pada sebuah lingkaran dengan sisi AD adalah diameter lingkaran dengan panjang 4 cm. Jika sisi AB dan BC mempunyai panjang 1 cm, maka sisi CD mempunyai panjang cm.



- a. $7/2$ c. $7/3$ e. $7/4$
b. $7/2\sqrt{2}$ d. $7/3\sqrt{2}$

21. Pada segitiga ABC, garis yang membagi 2 sama besar sudut ABC dan garis yang membagi 2 sama besar sudut ACB berpotongan di titik O. Melalui O dibuat garis sejajar dengan BC yang memotong AB di M dan AC di N. Jika panjang AB = 12 satuan panjang, BC = 24 satuan panjang, dan AC = 18 satuan panjang, maka keliling segitiga AMN adalah satuan panjang.

- a. 40 c. 30 e. 35
b. 42 d. 32

22. Sebuah tangga yang panjangnya 20 dm bersandar di dinding. Jika ujung bawah tangga ditarik sepanjang lantai menjauhi dinding dengan kecepatan 1 dm/s, seberapa cepat ujung atas tangga bergeser menuruni dinding pada waktu ujung tangga sejauh 5 dm dari dinding?

- a. $-5/\sqrt{315} \text{ dm/s}$ b. $-5/\sqrt{375} \text{ dm/s}$

c. $5/\sqrt{375} \text{ dm/s}$

e. $5/\sqrt{15} \text{ dm/s}$

d. $-5/\sqrt{15} \text{ dm/s}$

23. Sebuah kotak berisi 11 bola. Dan dinomori 1,2,3,...,11. Jika 6 bola diambil secara acak, maka peluang jumlah angka-angka dari bola yang diambil tersebut merupakan bilangan ganjil adalah

a. $112/231$

c. $118/231$

e. $124/231$

b. $115/231$

d. $121/231$

24. Air dituangkan ke dalam tangki berbentuk kerucut terbalik dengan laju 8 liter/menit. Jika tinggi bak 1,2 meter dan diameter permukaan alas adalah 1,2 meter, seberapa cepat permukaan air naik ketika ketinggian airnya 0,4 meter?

a. $5/\pi \text{ dm/menit}$

d. $2/\pi \text{ dm/menit}$

b. $4/\pi \text{ dm/menit}$

e. $1/\pi \text{ dm/menit}$

c. $3/\pi \text{ dm/menit}$

25. Pernyataan yang salah di bawah ini adalah

a. Penjumlahan bilangan rasional dan irrasional adalah bilangan irrasional

b. Penjumlahan bilangan rasional dan irrasional adalah bilangan rasional

c. Penjumlahan dua bilangan rasional adalah rasional

d. Perkalian bilangan rasional tak nol dan irrasional adalah bilangan irrasional

e. Pengurangan dua bilangan rasional adalah rasional

26. Nilai dari

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2010^2} + \frac{1}{2011^2}}$$

adalah...

- a. 2010
b. $2011 + 2010/2011$
c. $2010 + 2010/2011$
d. $2009 + 2009/2010$
e. $2011 + 2011/2012$
27. Dua dadu sisi-sisinya dicat biru dan hitam. Dadu pertama terdiri dari 2 sisi warna biru dan 4 sisi warna hitam. Ketika kedua dadu tersebut dilempar, peluang munculnya sisi dadu yang berwarna sama adalah $4/9$, ada berapa banyakkah sisi dadu berwarna biru dan hitam pada kedua dadu tersebut?
- a. Biru : 6, Hitam : 6
b. Biru : 4, Hitam : 8
c. Biru : 8, Hitam : 4
d. Biru : 5, Hitam : 7
e. Biru : 7, Hitam : 5
28. Banyaknya bilangan dari 1 sampai 600 yang tidak habis dibagi 3, 5, atau 7 adalah
- a. 205
b. 310
c. 275
d. 325
e. 355
29. Diketahui $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
Nilai dari $x^{2005} + x^{2006} + x^{2007} + x^{2008} + x^{2009} + x^{2010} + x^{2011}$ adalah
- a. -2
b. -1
c. 0
d. 1
e. 2
30. Diberikan bahwa :

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1$$

$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12$$

$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123$$

Nilai dari $16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$ adalah

- a. 304 c. 381 e. 423
b. 418 d. 334

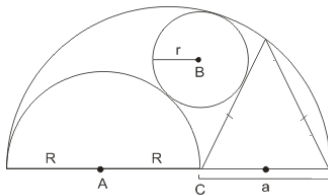
31. Jika $x = \frac{\sqrt{111}-1}{2}$, maka nilai $(2x^5 + 2x^4 - 53x^3 - 57x + 54)^{2011}$ adalah

- a. -10 c. 0 e. 1
b. 10 d. -1

32. Apabila $x - \sqrt{yz} = 42$, $y - \sqrt{xz} = 6$, $z - \sqrt{xy} = -30$, maka nilai $x + y + z$ adalah

- a. 82 c. 84 e. 86
b. 83 d. 85

33. Perhatikan gambar berikut ini !



Setengah lingkaran dengan jari-jari R berpusat di A dan sebuah lingkaran dengan jari-jari r berpusat di B . Dibuat BC tegak lurus dengan AC . Jika $r = 7$ satuan dan $R = 11$ satuan, maka nilai a adalah ... satuan.

- a. $20\frac{8}{15}$ c. $20\frac{7}{15}$ e. $20\frac{9}{15}$
b. $21\frac{8}{15}$ d. $21\frac{7}{15}$

34. Diketahui segitiga ABC dimana $\angle ACB = 3x\angle ABC$ dan $AB = 10/3 BC$. Nilai $\cos A + \cos B + \cos C =$

....

a. $37/32$

c. $41/39$

e. $45/43$

b. $39/37$

d. $43/41$

35. Titik Lattice adalah titik (x, y) dimana x dan y merupakan bilangan bulat. Contoh : $(2, -3)$ dan $(1, 0)$ merupakan titik Lattice, sedangkan $(3, 2\frac{1}{2})$ bukan titik Lattice. Banyaknya titik Lattice yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 4225$ adalah

a. 12

c. 18

e. 24

b. 16

d. 20

Solusi Babak Penyisihan MIC LOGIKA 2011

Nomor 1

Setiap bilangan asli dua digit atau lebih, dapat ditulis dalam bentuk $100c + 10b + a$ dengan a dan b adalah bilangan satu digit (boleh nol) sedangkan c adalah sembarang bilangan bulat.

Misalnya 1024 berarti $c = 10, b = 2, a = 4$. Apabila dua digit, maka $c = 0$.

Sekarang kita misalkan $n = 100c + 10b + a$.

- Karena $4|100c$, maka $100c + 10b + a$ dibagi 4 sisa $2b + a$. Diketahui angka puluhannya adalah 7, maka substitusi $b = 7$ sehingga sisanya $14 + a$.
- $14 + a$ dibagi 4 sisanya $2 + a$, sehingga $n \equiv (2 + a) \pmod{4}$.
- Digit satuan dari suatu bilangan kuadrat yang mungkin adalah 0,1,4,5,6,9. Jadi nilai a yang mungkin adalah 0,1,4,5,6,9.
- Akan tetapi bilangan kuadrat tersebut kongruen dengan 0 atau 1 modulo 4. Dengan mengecek nilai a , yang memenuhi hanya $a = 6$.

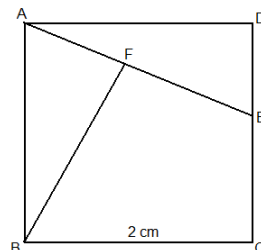
Jawaban : d

Nomor 2

Perhatikan gambar di samping!

Dengan phytagoras didapat

$$AE = \sqrt{5}$$



$$\cos \angle BAF = \sin \angle DAE = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \angle BAF = \frac{AF}{BA} \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{AF}{2}$$

$$AF = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Kemudian, } \sin \angle BAF = \cos \angle DAE = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \angle BAF = \frac{BF}{AB} \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{BF}{2}$$

$$BF = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas } BCEF &= \text{Luas } ABCD - (\text{Luas } BAF + \text{Luas } DAE) \\ &= 4 - \left(\frac{4}{5} + 1\right) = \frac{11}{5} \end{aligned}$$

Jawaban : c

Nomor 3

Perhatikan bahwa $77! = 77 \times 76 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Dengan demikian, $77!$ pasti habis dibagi oleh semua bilangan prima yang kurang dari 77.

Sehingga jika p adalah bilangan-bilangan yang memenuhi $77! + 1 < p < 77! + 77$, maka semua bilangan p mempunyai setidaknya 1 faktor selain 1 dan p itu sendiri, yaitu bilangan prima yang kurang dari 77.

Jadi, tidak ada bilangan p yang merupakan bilangan prima.

Jawaban : e

Nomor 4

Bilangan dua angka mempunyai jumlah digit terbesar 18. Dengan mencatat semua kemungkinan jumlah digit bilangan dua angka, diperoleh:

- Bilangan dua angka dengan jumlah digit 18 \Rightarrow 99 dibagi 18 sisa 5.
- Bilangan dua angka dengan jumlah digit 17 \Rightarrow 98 dibagi 17 sisa 13; 89 dibagi 17 sisa 4.
- Bilangan dua angka dengan jumlah digit 16 \Rightarrow 97 dibagi 16 sisa 1; 88 dibagi 16 sisa 8; 79 dibagi 16 sisa 15.

Sementara bilangan dua angka dengan jumlah digit tidak melebihi 15 akan bersisa maksimal 14.

Jadi, sisa terbesar sebuah bilangan dua angka dibagi oleh jumlah kedua angkanya adalah 15.

Jawaban : b

Nomor 5

Karena biaya untuk 1000 eksemplar pertama berbeda dengan eksemplar berikutnya, dan $z > 1000$, maka dapat kita buat sebagai berikut : Biaya 1000 eksemplar pertama adalah $1000x$ dan biaya untuk eksemplar berikutnya adalah $(z - 1000)y$.

Jadi biaya total yang dibutuhkan adalah $1000x + (z - 1000)y = 1000(x - y) + zy$

Jawaban : d

Nomor 6

Perhatikan bahwa untuk $5!$ sampai $2011!$ jika dibagi 5 akan bersisa 0.

Jadi kita hanya tinggal menghitung

$$\begin{aligned}(1! + 2! + 3! + 4!)^2 \bmod 5 &= (1 + 2 + 6 + 24)^2 \bmod 5 \\ &= (1 + 2 + 1 + 4)^2 \bmod 5 = 4 \bmod 5\end{aligned}$$

Jawaban : c

Nomor 7

Akan diperiksa kemungkinan bilangan asli n dimulai dari jumlah digit terkecil

- Jika n adalah bilangan asli 2 digit (misalkan : $\overline{a8}$), maka bilangan yang nilainya 4 kali n yang dimaksud haruslah 82 (karena angka satuan dari perkalian 8×4 adalah 2). Namun di sini terjadi kontradiksi karena tidak ada bilangan asli n yang memenuhi $4n = 82$.
- Jika n adalah bilangan asli 3 digit (misalkan : $\overline{ab8}$), maka bilangan yang nilainya 4 kali n yang dimaksud dapat dimisalkan juga dengan $\overline{8c2}$. Dari sini diperoleh hubungan bahwa $4b + 3 = c$, dan $4a = 8$, dimana $0 \leq a, b, c \leq 9$, sehingga terdapat nilai a, b, c yang memenuhi (Dari hasil percobaan, diperoleh $n = 208$ atau $n = 218$).

Jadi, minimal banyaknya digit dari n yang memenuhi adalah 3.

Jawaban : b

Nomor 8

Perhatikan bahwa $m = 7^n(1 + 7 + 7^2 + 7^3) = 7^n \times 400 = 7^n \times 2^4 \times 5^2$.

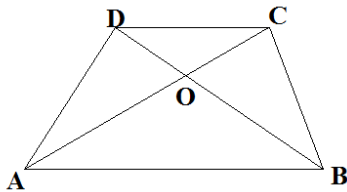
Jadi, penjumlahan semua faktor prima dari $m = 7 + 2 + 5 = 14$

Jawaban : a

Nomor 9

$M = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times A$, dengan A adalah bilangan prima ke 2011. Karena tidak ada bilangan genap selain 2 dan tidak ada bilangan kelipatan 5 selain 5 itu sendiri yang menjadi pembentuk M , maka hanya ada satu angka 0 di akhir bilangan M .

Jawaban : a

Nomor 10

Perhatikan bahwa AOB dan COD adalah dua buah segitiga yang sebangun sehingga

$$\left(\frac{99}{19}\right)^2 = \frac{[AOB]}{[COD]} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2$$

Jadi, $AB/CD = 99/19$. Misalkan t_1 dan t_2 adalah panjang garis tinggi dari segitiga AOB dan COD yang

ditarik dari titik O, maka $t_1/t_2 = 99/19$. Kita punya bahwa $1/2 \times AB \times t_1 = 99^2$.

Jadi, luas trapesium keseluruhan adalah

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (AB + CD)(t_1 + t_2) &= \frac{1}{2} \left(AB + \frac{19AB}{99} \right) \left(t_1 + \frac{19t_1}{99} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{118}{99} \times \frac{118}{99} (AB \times t_1) = 118^2 \end{aligned}$$

Jawaban : d

Nomor 11

Diketahui 2 buah persamaan : $a^2 = 3b + 77$ dan $b^2 = 3a + 77$

- Menjumlahkan kedua persamaan di atas diperoleh:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 3(a + b) + 154 \\ (a + b)^2 - 2ab &= 3(a + b) + 154 \end{aligned}$$

- Mengurangkan kedua persamaan di atas diperoleh:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 3(b - a) \leftrightarrow (a + b)(a - b) = 3(b - a) \\ &\leftrightarrow (a + b) = -3 \end{aligned}$$

Pembagian kedua ruas dengan $(a - b)$ diperbolehkan karena a dan b dua bilangan real berbeda.

- Substitusi persamaan kedua ke persamaan pertama diperoleh $ab = -68$.

Jawaban : c

Nomor 12

Perhatikan bahwa $BCDF$ merupakan segiempat talibusur. Maka berlaku $BE \times ED = CE \times EF = CE \times (CF -$

CE). Perhatikan juga bahwa CF merupakan diameter lingkaran. Maka radius lingkaran tersebut adalah $CF/2$.

Sehingga :

$$BE \times ED = CE \times (CF - CE)$$

$$\Leftrightarrow 5 \times 3 = 1 \times (CF - 1)$$

$$\Leftrightarrow CF = 16$$

$$\Leftrightarrow CF/2 = 16/2 = 8$$

Jadi, radius lingkaran tersebut adalah 8 satuan panjang.

Jawaban : d

Nomor 13

Perhatikan bahwa

$$f(11) = 4$$

$$f^2(11) = f(4) = 16$$

$$f^3(11) = f(16) = 25$$

$$f^4(11) = f(25) = 49$$

$$f^5(11) = f(49) = 169$$

$$f^6(11) = f(169) = 256$$

$$f^7(11) = f(256) = 169$$

\vdots

Jadi, $f^{2011}(11) = 169$

Jawaban : e

Nomor 14

Dengan sedikit manipulasi aljabar dari persamaan awal, diperoleh

$$m^2(1 + 3n^2) = 30n^2 + 517 \Leftrightarrow m^2 = \frac{30n^2 + 517}{1 + 3n^2}$$

$$= 10 + \frac{507}{3n^2 + 1}$$

Karena m bilangan bulat, maka m^2 juga merupakan bilangan bulat, sehingga $3n^2 + 1$ harus merupakan faktor pembagi bulat dari 507. Kita tahu bahwa faktor pembagi bulat dari 507 antara lain 1, 3, 13, 39, 169, dan 507.

Namun, mengingat bahwa m^2 adalah bilangan kuadrat, maka nilai $3n^2 + 1$ yang memenuhi hanyalah 13. Sehingga :

$$m^2 = 10 + \frac{507}{13} = 10 + 39 = 49$$

$$3n^2 + 1 = 13 \Leftrightarrow 3n^2 = 12$$

Jadi, nilai dari $3m^2n^2 = 49 \times 12 = 588$

Jawaban : e

Nomor 15

Berdasarkan teorema Fermat $a^{(\varphi(m))} \equiv 1 \pmod{m}$, dimana $\gcd(a, m) = 1$ dan a bilangan asli.

- Perhatikan bahwa $6^{42} \equiv 1 \pmod{49}$, maka $6^{83} = 6^{42} \times 6^{41} \equiv 1 \times 6^{41} \pmod{49} \equiv 6^{41} \pmod{49}$.
Misalkan $6^{41} \equiv m \pmod{49}$, diperoleh $m = 41$.
Sehingga $6^{83} \equiv 41 \pmod{49}$.
- Perhatikan bahwa $8^{42} \equiv 1 \pmod{49}$, maka $8^{83} = 8^{42} \times 8^{41} \equiv 1 \times 8^{41} \pmod{49} \equiv 8^{41} \pmod{49}$.

Misalkan $8^{41} \equiv a \pmod{49}$, diperoleh $a = 43$.

Sehingga $6^{83} \equiv 43 \pmod{49}$.

Jadi, $(6^{83} + 8^{83}) \pmod{49} \equiv (41 + 43) \pmod{49} \equiv 84 \pmod{49} = 35$

Jawaban : e

Nomor 16

Nilai a yang mungkin adalah $a \leq 5$. Jika $a = 5$, maka $245 + 7b + c = 286 \Leftrightarrow 7b + c = 41$. Sehingga nilai yang memenuhi adalah $b = 5$ dan $c = 6$

Jadi, $100a + 10b + c = 556$

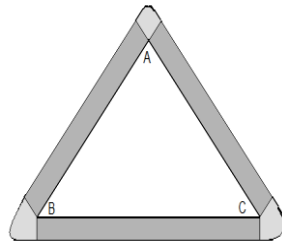
Jawaban : d

Nomor 17

Perhatikan gambar di samping!

Luas daerah pada gambar tersebut dapat kita bagi menjadi 3 bagian :

- Bagian alas rumah, yang diketahui mempunyai luas A meter persegi.
- Bagian taman sepanjang sisi rumah (yang diarsir terang), adalah gabungan dari 3 luas persegi panjang, yaitu $5 \times AB + 5 \times BC + 5 \times AC = 5 \times (AB + BC + AC)$. Karena $AB + BC + AC$ adalah keliling segitiga yang diketahui sama dengan P, maka luasnya sama dengan $5P$ meter persegi.



- Bagian taman titik sudut rumah (yang diarsir gelap), adalah gabungan dari 3 juring lingkaran yang berjari-jari 5. Ketiga juring tersebut apabila digabungkan akan membentuk lingkaran penuh (dapat dibuktikan sendiri). Sehingga luasnya sama dengan $\pi \times 5 \times 5 = 25\pi$ meter persegi.

Jadi, luas rumah dan taman secara keseluruhan adalah sama dengan $A + 5P + 25\pi$ meter persegi.

Jawaban : a

Nomor 18

Karena h tegak lurus garis $3x - y + 8 = 0$, h bergradien $-1/3$, yakni $-(c + 8)/6 = -1/3 \leftrightarrow c + 8 = 2 \leftrightarrow c = -6$.

Persamaan garis g adalah $ax + by - 6 = 0$ yang memotong sumbu x di $(6/a, 0)$. Garis h juga melalui titik ini sehingga $2x + 6y - 12 = 0 \leftrightarrow 2(6/a) + 6(0) - 12 = 0 \leftrightarrow 12/a = 12 \leftrightarrow a = 1$.

Jawaban : a

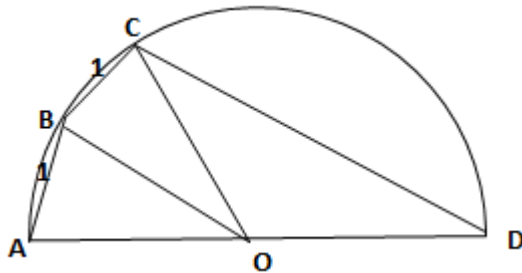
Nomor 19

Perhatikan bahwa $4^z = 5 \leftrightarrow (3^y)^z = 5 \leftrightarrow ((2^x)^y)^z = 5 \leftrightarrow 2^{xyz} = 5$.

Jadi, $2^{xyz+1} = 2^{xyz} \times 2 = 5 \times 2 = 10$.

Jawaban : a

Nomor 20



Perhatikan gambar di atas!

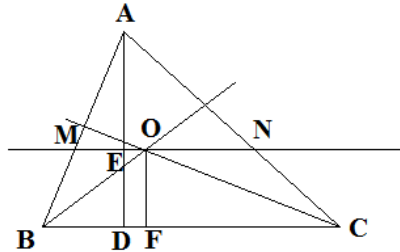
- Jelas bahwa $AO = BO = CO = DO = 1/2 AD = 2 \text{ cm}$. Sehingga $\triangle ABO = \triangle BCO$
- Misalkan $\angle AOB = \angle BOC = \theta$, maka $\angle COD = 180 - 2\theta$. Dengan menggunakan aturan cosinus didapat :
$$\cos \theta = \frac{AO^2 + BO^2 - AB^2}{2 \cdot AO \cdot BO} = \frac{(2^2 + 2^2 - 1^2)}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{8}$$

dan $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$.
- Sehingga $\cos(180 - 2\theta) = -\cos 2\theta = -(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -49/64 + 15/64 = -17/32$.
- Dengan menggunakan kembali aturan cosinus :
$$CD^2 = CO^2 + OD^2 - 2 \cdot CO \cdot OD \cdot (-\cos(2\theta)) = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-17/32) = 49/4$$

Jadi $CD = \sqrt{49/4} = 7/2 \text{ cm}$

Jawaban : a

Nomor 21



Misalkan AD adalah garis tinggi dari segitiga ABC dan memotong MN di titik E. Perhatikan bahwa AMN dan ABC adalah dua segitiga yang sebangun.

Karena BO dan OC adalah garis bagi, maka O adalah titik pusat lingkaran dalam. Misalkan titik F pada BC sehingga OF tegak lurus AB, maka panjang OF adalah panjang jari-jari lingkaran dalam.

Luas segitiga ABC adalah $\sqrt{27 \times 15 \times 9 \times 3} = 27\sqrt{15}$. Sehingga panjang jari-jari lingkaran dalam adalah $(27\sqrt{15})/27 = \sqrt{15}$. Jadi, $ED = OF = \sqrt{15}$.

Karena luas segitiga ABC adalah $27\sqrt{15}$, maka panjang AD adalah $(2 \times 27\sqrt{15})/24 = \frac{9}{4}\sqrt{15}$, dengan demikian $AE = AD - ED = \frac{5}{4}\sqrt{15}$. Sehingga, perbandingan tinggi kedua segitiga adalah $AE : AD = 5 : 9$.

Jadi, keliling segitiga AMN adalah $5/9 \times \text{keliling } ABC = 5/9 \times 54 = 30$.

Jawaban : c

Nomor 22

Anggap sistem tersebut dalam bidang koordinat Cartesius dimana lantai berada pada sumbu- x dan dinding sumbu- y .

Diketahui : $x^2 + y^2 = 400$, $dx/dt = 1$, $x = 5$.

Ditanyakan : $dy/dt = \dots?$

$$y = \sqrt{400 - x^2}$$

$$dy/dx = -x/\sqrt{400 - x^2}$$

$$dy/dt = -x/\sqrt{400 - x^2} dx/dt$$

Substitusi $dx/dt = 1$, $x = 5$ sehingga $dy/dt = -5/\sqrt{400 - 5^2} \times 1 = -5/\sqrt{375}$. Tanda negatif menunjukkan bahwa pergeseran ujung atas tangga menuju ke bawah (menuruni dinding).

Jawaban : c

Nomor 23

Pertama-tama, akan dihitung banyaknya cara mengambil 6 bola dari 11 bola yang tersedia, yaitu sebanyak $C_6^{11} = 462$ cara.

Selanjutnya akan dihitung banyaknya kemungkinan jumlah dari 6 bola bernomor tersebut adalah bilangan ganjil dengan beberapa asumsi sebagai berikut :

- 1 bola bernomor ganjil, 5 bola lainnya bernomor genap. Banyaknya kemungkinan :

$$C_1^6 \times C_5^5 = 6 \times 1 = 6$$

- 3 bola bernomor ganjil, 3 bola lainnya bernomor genap. Banyaknya kemungkinan :

$$C_3^6 \times C_3^5 = 20 \times 10 = 200$$

- 5 bola bernomor ganjil, 1 bola lainnya bernomor genap. Banyaknya kemungkinan :

$$C_5^6 \times C_1^5 = 6 \times 5 = 30$$

Sehingga banyaknya seluruh kemungkinan adalah 236 cara.

Jadi, peluang jumlah angka-angka dari bola yang diambil tersebut merupakan bilangan ganjil adalah $236/462 = 118/231$.

Jawaban : c

Nomor 24

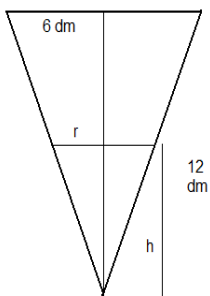
Misalkan h adalah ketinggian bak yang terisi air (dalam dm).

Diketahui : $dV/dt = 8$ dm/menit

$$h = 0,4 \text{ m} = 4 \text{ dm}$$

Ditanyakan : $dh/dt = \dots ?$

Pertama-tama, kita cari volume bak yang terisi air pada saat ketinggian h dm. Perhatikan gambar di bawah!



Kita hitung jari-jari bak yang terisi air pada saat h dengan menggunakan kesebangunan segitiga

$$\frac{6}{r} = \frac{12}{h} \Leftrightarrow r = \frac{6h}{12} = \frac{h}{2}$$

Sehingga volumenya menjadi

$$V = 1/3 \times [\pi \times (h/2)^2] \times h = 1/12 \pi h^3$$

$$dV/dh = 1/4 \pi h^2$$

Berdasarkan aturan rantai $dV/dt = dV/dh \times dh/dt$.

Maka $dh/dt = (dV/dt)/(dV/dh) = 32/\pi h^2$.

Substitusi $h = 4$. Jadi $dh/dt = 32/\pi 4^2 = 2/\pi$.

Jawaban : d

Nomor 25

Pernyataan yang salah : Penjumlahan bilangan rasional dengan bilangan irrasional adalah bilangan rasional.

Bukti: Andaikan penjumlahan keduanya merupakan bilangan rasional. Misalkan bilangan rasional yang dimaksud masing-masing a/b dan c/d dengan $b, d \neq 0$ dan bilangan irrasional yang dimaksud adalah m . Tinjau:

$$a/b + m = c/d \leftrightarrow m = c/d - a/b \leftrightarrow m = bc - ad/bd$$

Maka m adalah merupakan bilangan rasional yang kontradiksi dengan asumsi sebelumnya.

Jawaban : b

Nomor 26

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} &= \sqrt{\frac{a^2(a+1)^2 + (a+1)^2 + a^2}{a^2(a+1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1}{(a(a+1))^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + a + 1)^2}{(a^2 + a)^2}} \\ &= \frac{a^2 + a + 1}{a^2 + a} = 1 + \frac{1}{a^2 + 1} = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \end{aligned}$$

Sehingga :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2010^2} + \frac{1}{2011^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + 1/1 - 1/2 + 1 + 1/2 - 1/3 + 1 + 1/3 - 1/4 + \dots \\
&\quad + 1 + 1/2010 - 1/2011 \\
&= 2010 + 1/1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 + 1/3 - 1/4 + 1/4 \\
&\quad - 1/5 + 1/5 + \dots + 1/2010 - 1/2011 \\
&= 2010 + 1/1 - 1/2011 \\
&= 2010 + 2010/2011
\end{aligned}$$

Jawaban : c

Nomor 27

Misalkan banyaknya sisi biru pada dadu kedua x maka

$$\begin{aligned}
2/6 \cdot x/6 + 4/6 \cdot (6 - x)/6 &= 4/9 \\
(24 - 2x)/36 &= 4/9 \\
24 - 2x &= 16 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Sehingga total sisi biru $2 + 4 = 6$ dan sisi hitam $4 + (6 - 4) = 6$

Jawaban : a

Nomor 28

Sebaiknya dicari kebalikannya terlebih dahulu, yaitu banyaknya bilangan yang habis dibagi 3, 5, atau 7 dengan rincian sebagai berikut :

- Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 = $[600/3] = 200$
- Banyaknya bilangan yang habis dibagi 5 = $[600/5] = 120$
- Banyaknya bilangan yang habis dibagi 7 = $[600/7] = 85$

- Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 dan 5 = $\lfloor 600/15 \rfloor = 40$
- Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 dan 7 = $\lfloor 600/21 \rfloor = 28$
- Banyaknya bilangan yang habis dibagi 5 dan 7 = $\lfloor 600/35 \rfloor = 17$
- Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3, 5, dan 7 = $\lfloor 600/105 \rfloor = 5$

Sehingga dengan aturan Inklusi-Eksklusi Himpunan, banyaknya bilangan yang habis dibagi 3, 5, atau 7 adalah $200 + 120 + 85 - (40 + 28 + 17 - 5) = 325$.

Jadi banyaknya bilangan yang tidak habis dibagi 3, 5, atau 7 adalah $600 - 325 = 275$.

Jawaban : c

Nomor 29

Perhatikan bahwa $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ dikali dengan $(x - 1)$ menjadi $x^8 - 1 = 0$, dimana faktor-faktornya $x = 1$ atau $x = -1$. Cek ke persamaan $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ yang memenuhi hanya $x = -1$.

Substitusi $x = -1$ ke persamaan $x^{2005} + x^{2006} + x^{2007} + x^{2008} + x^{2009} + x^{2010} + x^{2011}$, maka didapat hasilnya -1.

Jawaban : b

Nomor 30

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1 \dots\dots(1)$$

$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12\dots(2)$$

$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123\dots\dots(3)$$

Jika (3) – (2), maka

$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 13x_5 + 15x_6 + 17x_7 = 111 \dots(4)$$

Jika (4) – (1), maka

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 13x_6 + 15x_7 = 11 \dots\dots(5)$$

Jika (4) – (5), maka

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 100 \dots\dots\dots(6)$$

Jika (6) + (4), maka

$$7x_1 + 9 + 11x_3 + 13x_4 + 15x_5 + 17x_6 + 19x_7 = 211 \dots\dots(7)$$

Jika (3) + (7), maka

$$16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7 = 334$$

Jawaban : d

Nomor 31

Jika $2x + 1 = \sqrt{111}$, maka $4x^2 + 4x = 110 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 55 = 0$

$$2x^5 + 2x^4 - 53x^3 - 57x + 54$$

$$= x^3(2x^2 + 2x - 55) + (2x^3 - 57x + 54)$$

$$= 0 + (2x^3 - 57x + 54)$$

$$= x(2x^2 + 2x - 55) - (2x^2 + 2x - 55) - 1$$

$$= -1$$

$$\text{Jadi } (2x^5 + 2x^4 - 53x^3 - 57x + 54)^{2011} = -1$$

Jawaban : d

Nomor 32

Mengurangkan persamaan (1) dengan (2) diperoleh,

$$\begin{aligned}x - y + \sqrt{xz} - \sqrt{yz} \\&= (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{z}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\&= (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 36\end{aligned}$$

Mengurangkan persamaan (2) dengan (3) diperoleh,

$$\begin{aligned}y - z + \sqrt{xy} - \sqrt{xz} \\&= (\sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{z}) + \sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{z}) \\&= (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{z}) = 36\end{aligned}$$

Dari kedua persamaan itu diperoleh $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (\sqrt{y} - \sqrt{z}) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{z} = 2\sqrt{y} \dots (4)$

Substitusi (4) masing-masing ke (3) dan (1) diperoleh

$$z - x/2 - \sqrt{xz}/2 = -30 \text{ dan } x - z/2 - \sqrt{xz}/2 = 42.$$

Menyelesaikan kedua persamaan di atas diperoleh

$$x - z = 48 \text{ dan } x - \sqrt{xz} = 36.$$

Mengurangkan persamaan (1) dan (3) diperoleh $x - z +$

$$\sqrt{xy} - \sqrt{yz} = 72 \Leftrightarrow \sqrt{xy} - \sqrt{yz} = \sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{z}) = 24.$$

Karena $x - \sqrt{xz} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{z}) = 36$, kita memperoleh

$$\sqrt{y} = (2\sqrt{x})/3 \text{ dan selanjutnya diperoleh } \sqrt{z} = \sqrt{x}/3$$

$$\text{sehingga } \sqrt{y} = (2\sqrt{x})/3 = 2\sqrt{z} \dots (5)$$

Menguadratkan (5) dan substitusi ke (2) diperoleh

$$4z - \sqrt{xz} = 6. \text{ Substitusi (5) ke (3) diperoleh } z -$$

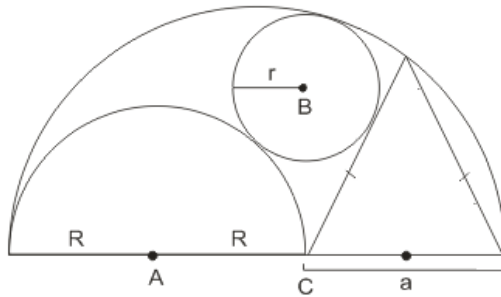
$$2\sqrt{xz} = -30. \text{ Menyelesaikan kedua persamaan di atas}$$

$$\text{diperoleh } z = 6. \text{ Berdasarkan (5) diperoleh } x = 54, y =$$

$$24. \text{ Jadi, nilai dari } x + y + z = 84.$$

Jawaban : c

Nomor 33



Pandang gambar di atas! Perhatikan $\triangle ABC$

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = (R + r)^2 - R^2 = 18^2 - 11^2 = 203$$

Misalkan persinggungan antara segitiga besar dengan lingkaran yang berjari-jari r adalah titik D . Perhatikan $\triangle BCD$.

$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = BC^2 - r^2 = 203 - 7^2 = 154$$

Misalkan titik tengah alas segitiga besar adalah E dan puncaknya adalah F . Misalkan juga $a = 2b$. Perhatikan bahwa $\triangle BCD$ sebangun dengan $\triangle CFE$.

$$EF/CD = CE/BD \leftrightarrow EF = CD \times CE/BD = \sqrt{154} \times b/7 = b \times \sqrt{154/49} = b\sqrt{22/7}$$

Misalkan pusat setengah lingkaran besar adalah titik O . Perhatikan bahwa OF merupakan jari-jari setengah lingkaran besar. Karena diameter setengah lingkaran besar adalah $2R + 2b = 22 + 2b$, maka $OF = 11 + b$. Perhatikan juga $OE = 11$.

Perhatikan $\triangle OEF$.

$$OF^2 = OE^2 + EF^2$$

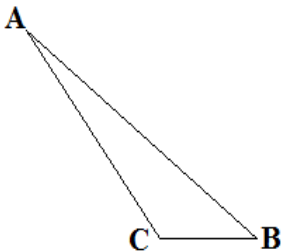
$$\Leftrightarrow (11 + b)^2 = 11^2 + (b\sqrt{22/7})^2$$

$$\text{Akan didapat } b = \frac{154}{15}, \text{ maka } a = 2b = \frac{308}{15} = 20\frac{8}{15}.$$

Jadi panjang a adalah $20\frac{8}{15}$ satuan panjang.

Jawaban : a

Nomor 34



Perhatikan segitiga di samping!

Misalkan $\angle ABC = x$, maka $\angle ACB = 3x$ dan $\angle CAB = 180^\circ - 4x$. Perhatikan bahwa

$$\frac{10}{3} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sin 3x}{\sin 4x}.$$

Jadi, kita memiliki persamaan $10 \sin 4x = 3 \sin 3x$.

$$\sin 3x = \sin x \cos 2x + 2 \sin x \cos^2 x$$

$$\sin 4x = 4 \sin x \cos x \cos 2x$$

Karena $\sin x$ tidak bernilai nol, maka persamaan tersebut bisa disederhanakan menjadi

$$40 \cos x \cos 2x = 3 \cos 2x + 6 \cos^2 x$$

Substitusi $\cos 2x$ dengan $2 \cos^2 x - 1$, diperoleh

$$80 \cos^3 x - 40 \cos x = 12 \cos^2 x - 3$$

$$80 \cos^3 x - 12 \cos^2 x - 40 \cos x + 3 = 0$$

Didapat $\cos x$ yang memenuhi adalah $3/4, (-3 + \sqrt{14})/10, (-3 - \sqrt{14})/10$. Kemungkinan kedua dan

ketiga tidak mungkin karena $x < 45^\circ$ sehingga $1 \geq \cos x > 1/2\sqrt{2}$. Jadi, $\cos x = 3/4$.

$$\cos C = \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = -9/16$$

$$\cos A = -\cos 4x = -2 \cos^2 2x + 1 = -2(2 \cos^2 x - 1)^2 + 1 = 31/32.$$

$$\text{Jadi, } \cos A + \cos B + \cos C = 31/32 + 3/4 - 9/16 = 37/32$$

Jawaban : a

Nomor 35

Kita dapat mencari banyaknya titik Lattice (x, y) dengan melihat bentuk kuadrat dari 4225

- Bentuk I : $4225 = 65^2 = 65^2 + 0^2$. Dari bentuk ini, kita akan mendapatkan 4 titik Lattice.
- Bentuk II : $4225 = 65^2 = (5 \times 13)^2 = 5^2 \times 13^2$
 - Bentuk II.a : $4225 = 5^2 \times 13^2 = (3^2 + 4^2) \times 13^2 = 39^2 + 52^2$. Dari bentuk ini, kita akan mendapatkan 8 titik Lattice.
 - Bentuk II.b : $4225 = 5^2 \times 13^2 = 5^2 \times (5^2 + 12^2) = 25^2 + 60^2$. Dari bentuk ini, kita juga akan mendapatkan 8 titik Lattice.

Jadi, banyaknya titik Lattice adalah $4 + 8 + 8 = 20$.

Jawaban : d