Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan Januari 2019

25–28 Januari 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

22. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *injektif* atau *satu-satu* bila untuk setiap $a, b \in X$ yang memenuhi $f(a) = f(b)$, dipunyai $a = b$. Dengan kata lain, tidak ada $a, b \in X$ dengan $a \neq b$ yang memenuhi $f(a) = f(b)$.

23. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *surjektif* bila untuk setiap $y \in Y$, ada $x \in X$ yang memenuhi $f(x) = y$. Dengan kata lain, range dari fungsi f adalah Y.

24. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *bijektif* bila fungsi tersebut injektif dan surjektif. Dengan kata lain, terdapat fungsi $g : Y \to X$ yang memenuhi $g(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in X$, dan $f(g(y)) = y$ untuk setiap $y \in Y$. (Fungsi g ini disebut *invers* dari fungsi f.)

25. Notasi $\Sigma_{i=m}^{n} a_i$ dengan $m < n$ bilangan bulat menyatakan penjumlahan nilai a_i dari m hingga n yaitu $\Sigma_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$. Sebagai contoh, $\Sigma_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

26. Notasi $\Pi_{i=m}^{n} a_i$ dengan $m < n$ bilangan bulat menyatakan perkalian nilai a_i dari m hingga n yaitu $\Pi_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} \times \cdots \times a_n$. Sebagai contoh, $\Pi_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Selamat datang di KTO Januari 2019! Saya ingin memperkenalkan diri terlebih dahulu. Nama saya Ucok. Saya lahir pada bulan Februari pada tahun 2000-an, sebelum tahun 2010.
   Apabila jawaban soal ini kalian pangkat tiga kan dan kalian kurangi dengan tanggal lahir saya, kalian akan mendapatkan umur saya saat ini.
   Berapakah jumlah mantan saya (Ucok) ini?

2. Misalkan $\overline{abc}$ adalah bilanan 3 digit yang memenuhi
$$144a + 12b + c = 643$$
   Tentukan nilai dari $a \times b \times c$.

3. Tentukan banyaknya cara membuat bilangan yang terdiri dari tiga buah angka 2, satu buah angka 0, dua buah angka 1, dan sepuluh buah angka 9 sedemikian sehingga terdapat empat angka berurutan yang bertuliskan 2019.

4. Misal $ABCD$ adalah sebuah layang-layang sehingga $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$. Misalkan U adalah titik tengah AC dan DU memotong lingkaran luar ABC di V. Tentukan panjang AV.

5. Andaikan $P(x)$ adalah suatu polinomial berderajat dua yang koefisien-koefisiennya merupakan bilangan bulat dan memenuhi $P(1) = P(5)$. Jika $P(0) + P(3) = 17$ dan $P(2) = 5$, tentukan nilai dari $P(6)$.

6. Misalkan segitiga ABC dengan $\angle A = 60°$ memenuhi $AB^2 + AC^2 - AB \times AC = 4$. Garis tegak lurus AB di B memotong perpanjangan AC di E dan garis tegak lurus AC di C memotong perpanjangan AB di F. Tentukan panjang EF.

7. Diberikan dua fungsi linier $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dan $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dimana setiap koefisien dan konstanta dari masing-masing fungsi diambil dari himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan banyaknya pasangan fungsi $(f(x), g(x))$ sedemikian sehingga $f(g(x))$ merupakan bilangan asli genap untuk setiap bilangan asli x.

8. Akan dibentuk N bilangan yang hanya memiliki faktor prima $\{7, 11, 13, 17, 19\}$. Tentukan nilai minimum dari N sehingga pasti terdapat 2 bilangan yang jika dikalikan merupakan bilangan kuadrat sempurna.

9. Russell sedang memasuki bidang Cartesius dan mendarat pada titik $(3, 5)$. Ia berjalan pada bidang tersebut hanya dengan langkah sejauh $(1, 0)$ atau $(0, 3)$ saja. Jika banyaknya rute yang mungkin agar Russell dapat tiba pada garis $3x + y = 74$ adalah M, tentukan nilai dari $\sqrt{M} + 1$.

10. Diberikan $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n$ merupakan pembagi-pembagi positif dari bilangan bulat positif n. Apabila $d_4^2 + d_5^2 = 2d_k + d_1$, tentukan jumlah semua nilai n yang mungkin.

11. Diberikan ΔABC dengan $AB = 5$, $BC = 11$, dan $AC = 4\sqrt{5}$. Misalkan titik D adalah hasil proyeksi titik A pada BC. Sebuah lingkaran ω dengan titik pusat D melalui titik A serta memotong BC dan AC berturut-turut di titik E dan F, dimana titik C dan E berada pada sisi yang sama terhadap AD. Selanjutnya, misalkan garis yang melalui titik F dan sejajar dengan BC memotong ω sekali lagi di titik G. Selain itu, misalkan AB memotong ω sekali lagi di titik H. Jika luas ΔEGH dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a dan b adalah dua bilangan asli yang relatif prima, tentukan nilai dari $\sqrt{a+b}$.

12. Diberikan $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ sembilan buah bilangan rill sedemikian sehingga jumlahnya adalah 20. Tentukan nilai minimum dari

$$\sum_{1 \le i < j \le 9} \lfloor x_i + x_j \rfloor.$$

13. Misalkan $p = 201820182018$, $q = 2019201920192019$. Tentukan tiga digit terakhir dari $\sum_{i=1}^{q} \lfloor \frac{ip}{q} \rfloor$.

14. a, b, c, d bilangan bulat yang memenuhi $0 \le a, b, c, d \le 19$. Probabilitas sukubanyak $P(x) = x^a + x^b + x^c + x^d$ habis dibagi oleh $x^3 + x^2 + x + 1$ adalah $\frac{p}{q}$, dengan p dan q merupakan dua bilangan yang relatif prima. Tentukan nilai $p + q$.

15. Misalkan ω_1 dan ω_2 dengan pusat O_1 dan O_2 berturut-turut adalah dua lingkaran yang berpotongan di A dan B sehingga O_1 terletak pada ω_2. Misalkan D adalah titik pada ω_2 sehingga O_1O_2 melewati D dan O_2 di segmen O_1D. Misalkan F adalah kaki tinggi dari A ke O_1D dan E adalah titik pada ω_2 sehingga $DF = DE$ dan A dan E terletak pada sisi yang sama dari O_1D. Garis melewati D dan tegak lurus EF memotong O_1 untuk pertama kalinya di X, tentukan $\angle AFX$.

16. Bilangan-bilangan bulat dari 1 hingga 400 dituliskan pada grid berukuran 20×20, dengan 1 bilangan pada setiap kotak sehingga baris pertama memiliki bilangan bulat dari 1 hingga 20 dari kiri ke kanan, baris kedua memiliki bilangan bulat dari 21 hingga 40 dari kiri ke kanan, dan seterusnya. Langkah yang diperbolehkan pada grid adalah memilih dua kotak berdekatan (dua kotak yang terhubung oleh sebuah sisi) lalu ditambah atau dikurangi dengan sebuah bilangan bulat yang sama dengan yang tertera pada kotak tersebut. Tentukan minimal banyaknya langkah sehingga setiap kotak menunjukan angka 0.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Misalkan $s(n)$ menyatakan banyak faktor dari n. Contohnya, $s(10) = 4$, karena faktor dari 10 ialah $1, 2, 5$ dan 10.

   (a) Hitunglah $s(17), s(36)$ dan $s(2019)$.

   (b) Hitunglah banyaknya solusi x, y bilangan asli yang memenuhi $xy = N$, jika diketahui $s(N) = 100$

   (c) Carilah semua solusi dari x, y asli yang memenuhi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$. (Hint : Kalikan kedua sisi dengan $4xy$, $xy + ax + yb + ab = (x + b)(y + a)$)

   (d) Misalkan $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$. Buktikanlah $s(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$. (Hint : Perhatikan bahwa semua bilangan memiliki faktorisasi prima yang unik. Berapa cara memilih eksponen dari p_1? Cobalah angka-angka kecil). Maka, karakteristikanlah semua bilangan N dengan $s(N)$ ganjil.

   (e) Buktikan bahwa banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{K}$ ialah genap.

2. Empat anak, Ed, Al, Win dan Pam, sedang bermain turnamen catur memperebutkan sebuah pai apel yang besar. Diketahui diantara mereka berempat, Ed yang paling kuat, Al yang terkuat kedua dan Win yang paling lemah. Setiap anak punya poin kekuatan $i > 0$. Jika seseorang/tim dengan kemampuan a melawan orang/tim yang kekuatannya b, peluang ia/mereka menang ialah $\frac{a}{a+b}$. Sistem turnamenya, pertama mereka akan main dua lawan dua. Lalu, tim yang menang akan berhadapan di final. Pemenang partai final ialah juaranya. Karena Win paling lemah, ia diberi keuntungan untuk memilih partnernya di ronde pertama (sekaligus lawannya di final, jika mereka menang). Win mengetahui semua nilai kekuatan pemain, termasuk dirinya sendiri. Jika pemain yang kekuatannya a dan b bergabung, kekuatan tim mereka ialah $\max(a, b)$. Mungkinkah ada situasi sehingga Win memilih (a) Ed, (b) Al, (c) Pam?

3. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$f(x + y) + f(x - y) = f(xy)\, f\left(\frac{x}{y}\right)$$

   untuk setiap bilangan real x dan $y \neq 0$.

4. Diberikan ABC segitiga lancip. Misalkan sebuah lingkaran ω yang melewati BC memotong segmen AB dan AC di E dan D. Kemudian F adalah titik pada BC sehingga AF, BD, CE berpotongan di satu titik G. Misal J dan L adalah perpotongan BG dengan lingkaran luar ACE, jika diketahui $CJ = CL$, buktikan bahwa $\frac{DJ}{DG} = \frac{DB}{DL}$.