BUKU PEMBAHASAN

Mathematics Quiz and Competition

Thamrin Olympiad and Cup 12

Babak Penyisihan 1 & 2

Sekolah Menengah Pertama

SMANU M.H. Thamrin
Maret 2022

SMA NEGERI UNGGULAN MOHAMMAD HUSNI THAMRIN
JALAN BAMBU WULUNG 7
RT07/RW05, BAMBU APUS
CIPAYUNG, KOTA JAKARTA
TIMUR, DKI JAKARTA
13890

KATA SAMBUTAN

Marilah kita panjatkan puji dan syukur kepada Tuhan yang Maha Esa atas semua berkat dan rahmat-Nya sehingga acara Thamrin Olympiad Cup 12 ini dapat berjalan dengan lancar dan tepat waktu. Selain itu, kami juga bersyukur bahwa laporan kegiatan dalam bentuk buku pembahasan ini dapat rampung sesuai dengan waktu yang telah ditetapkan.

Kami juga mengucapkan banyak terima kasih yang teramat tulus bagi seluruh panitia atas seluruh usaha dan sumbangsihnya dalam menyukseskan acara ini, terutama kepada Bapak Kepala Sekolah SMA Negeri Unggulan Mohammad Husni Thamrin Jakarta dan ibu/bapak guru lainnya yang telah memberikan dukungan kepada kami untuk mengembangkan kegiatan ini agar hasilnya maksimal.

Selain itu, kami juga mengucapkan rasa terima kasih kami, rasa bangga, dan apresiasi kami kepada seluruh peserta yang telah berpartisipasi penuh dalam acara Thamrin Olympiad Cup ini. Meskipun memang soal tahun ini dianggap lebih sulit dibandingkan tahun kemarin dan tahun-tahun sebelumnya, kejujuran, integritas, semangat, dan sportivitas kalian tidak tergoyahkan dalam mengikuti setiap rangkaian acara Thamrin Olympiad Cup XII ini. Oleh karena itu, hasil daripada lomba ini juga sesuai dengan kenyataan dan segala pencapaian, baik hanya lolos ke Penyisihan 2, maupun pemenang babak final, memiliki kebanggaan tersendiri yang kami harap juga dirasakan oleh seluruh peserta.

Memang kenyataannya, acara Mathematics Quiz and Competition tahun ini dilaksanakan dengan segala keterbatasannya mengingat situasi pandemi yang tak kunjung mereda. Meskipun itu, kami tetap memberikan yang terbaik agar kegiatan ini dapat terlaksana dengan optimal sehingga seluruh peserta memperoleh pengalaman yang bermanfaat bagi kehidupan kalian masing-masing. Kami berharap agar ke depannya, lomba ini tetap akan menjadi wadah di mana para peserta menunjukkan kemampuannya serta mengembangkan potensi akademik serta nonakademiknya sampai pada titik yang maksimal.

Tentu pelaksanaan kegiatan ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, segala masukan, kritik, dan lain sebagainya dari ibu/bapak guru sekolah, pihak panitia, peserta kegiatan, maupun komponen-komponen lainnya akan sangat membantu kami untuk memberikan kegiatan perlombaan yang sebagus mungkin bagi seluruh peserta.

Semoga buku pembahasan ini dapat bermanfaat dan berguna untuk banyak khalayak. Sampai jumpa di lain waktu!

Jakarta, 14 Maret 2022

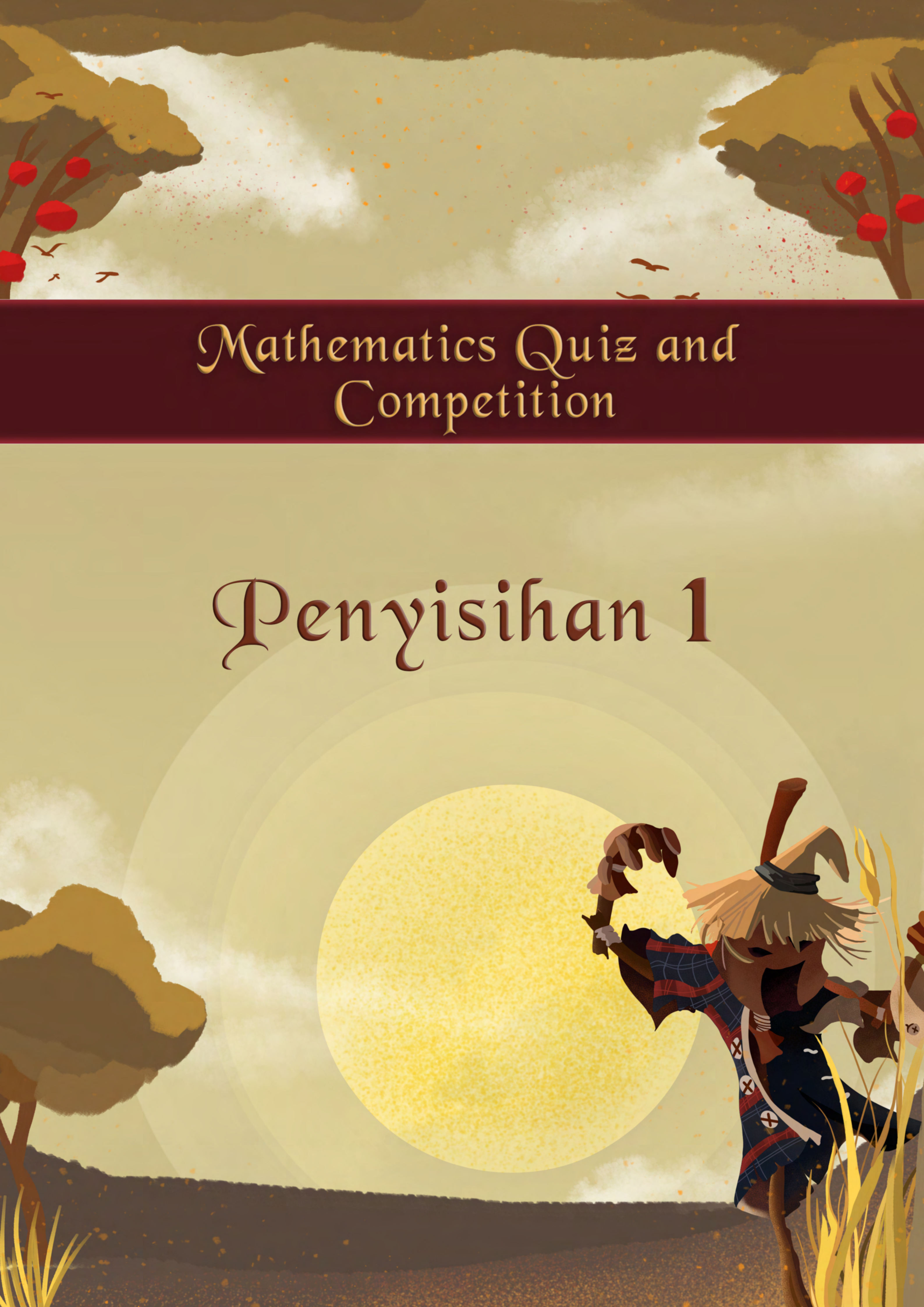
Haidar Prayata Wirasana

Ketua Pelaksanaan MaQC TOC XII

Daftar Isi

Mathematics Quiz and Competition

Penyisihan 1



1 Naskah Soal

§1.1 Pilihan Ganda

1. Definisikan sebuah operasi $\uparrow$ di mana

$$a \uparrow b = \frac{a^3}{a-b}$$

untuk setiap bilangan real $a \neq b$. Berapakah nilai dari $(10 \uparrow 100) + (100 \uparrow 10)$?

A. 9100 B. 10110 C. 9010 D. 11100

2. Misalkan N bilangan yang memenuhi persamaan

$$N = 1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times 6^6 \times 7^7 \times 8^8 \times 9^9.$$

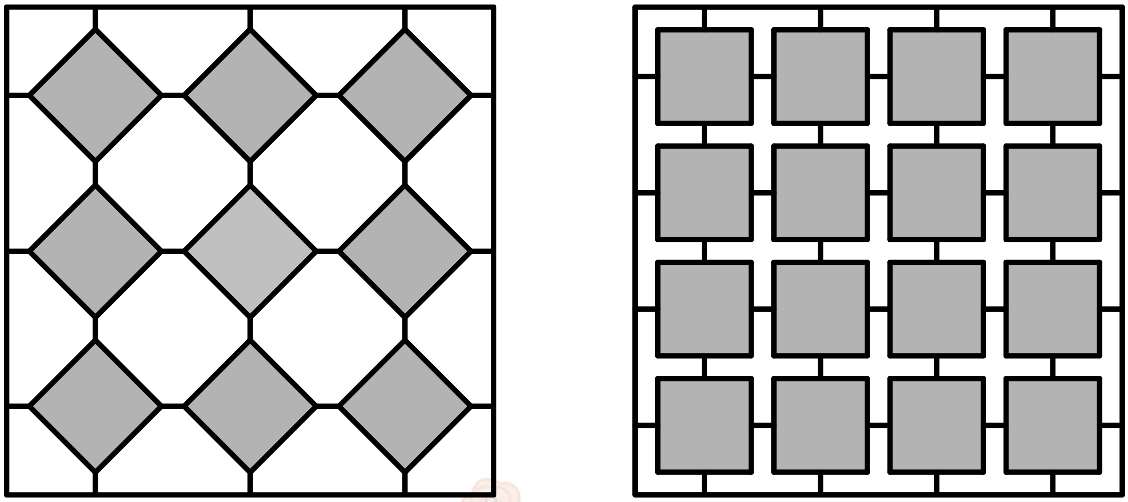
Jika faktorisasi prima dari N adalah $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, berapakah nilai dari $a+b+c+d$?

A. 44 B. 50 C. 49 D. 79

3. Pada permainan gunting-kertas-batu, diberikan bahwa gunting mengalahkan kertas, kertas mengalahkan batu, dan batu mengalahkan gunting. Pada setiap giliran, Adi, Bobi, dan Chiko masing-masing memilih gunting, kertas, atau batu secara acak dan mengeluarkannya secara bersamaan. Kondisi *seri* dicapai saat banyaknya pemain lain yang dikalahkan olehnya sama, untuk setiap pemain gunting-kertas-batu tersebut. Berapakah peluang terjadinya kondisi *seri* pada giliran pertama?

A. $\frac{7}{27}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{4}{27}$

4. Perhatikan gambar berikut.



Kedua persegi besar pada kedua gambar kongruen, serta persegi-persegi kecil di gambar pertama merupakan rotasi 45° dari persegi-persegi kecil di gambar kedua, yang mana sisi-sisinya sejajar dengan persegi besar. Jika jarak antara setiap persegi dengan persegi terdekat lainnya (yang ditandai dengan segmen-segmen kecil) adalah 1 satuan panjang, panjang sisi dari persegi yang besar sama dengan $a + b\sqrt{2}$ satuan panjang, di mana a, b bilangan bulat. Berapakah nilai dari $a + b$?

A. 22 B. 9 C. 19 D. 12

5. Suatu tahun Masehi memiliki 53 hari Kamis dan 52 hari Rabu. Hari apakah tanggal 27 Februari di tahun yang sama?

A. Kamis B. Sabtu C. Jumat D. Rabu

6. Suatu hari, Rafael sedang mengunjungi apotek dan ia ingin membeli masker, sabun untuk cuci tangan, dan *hand sanitizer*, berturut-turut dengan harga Rp10.000, Rp20.000, dan Rp25.000. Mengingat bahayanya virus corona, ia ingin membeli setidaknya 7 barang. Rafael hanya memiliki Rp120.000. Jika setelah dari situ, ia pulang dengan ojek seharga Rp15.000, berapakah banyaknya kemungkinan barang yang ia beli?

A. 17 B. 8 C. 11 D. 20

7. Di dalam persegi $ABCD$, terdapat suatu titik E sehingga perbandingan luas segitiga $\triangle ABE : \triangle BCE : \triangle CDE$ adalah $4 : 6 : 5$ berturut-turut. Berapakah nilai dari $\frac{AB}{AE}$?

A. $\frac{8}{5}$ B. $\frac{11}{5}$ C. $\frac{9}{5}$ D. 2

8. Diketahui bilangan real x memenuhi persamaan

$$\frac{\sqrt{16+x}}{16}+\frac{\sqrt{16+x}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Jika $x=\frac{a}{b}$ di mana a dan b bilangan asli relatif prima, berapakah nilai dari $a+b$?

Catatan. Bilangan asli m dan n dikatakan "relatif prima" jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesar dari m dan n adalah 1.

A. 79 B. 19 C. 23 D. 17

9. Enam tim sepak bola, yakni tim A, B, C, D, E, dan tim F suka mengadakan sparing mingguan antara satu sama lain. Mereka bertanding pada hari Jumat, Sabtu, dan Minggu, setiap harinya hanya dilakukan tepat 1 pertandingan, serta diketahui bahwa setiap tim hanya bertanding sekali seminggu. Peluang terjadinya pertandingan antara tim A dan tim B pada Sabtu pekan ketiga adalah ....

A. $\frac{1}{15}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{1}{8}$

10. Misalkan f sebuah fungsi kuadrat sedemikian sehingga $f(5)=10$, serta berlaku juga

$$\frac{f(3)}{f(2)}=\frac{3}{2}, \quad \text{dan} \quad \frac{f(4)}{f(3)}=\frac{5}{3}.$$

Jika $f(1)=\frac{m}{n}$ di mana m dan n bilangan asli relatif prima, berapakah nilai dari $m+n$?

Catatan. Bilangan asli m dan n dikatakan "relatif prima" jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesar dari m dan n adalah 1.

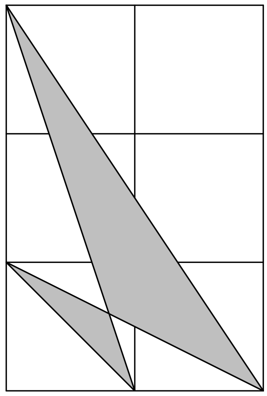
A. 7 B. 13 C. 9 D. 21

11. Berapakah banyaknya *string* dua digit $\overline{ab}$ ($a=0$ diperbolehkan) sedemikian sehingga **tidak ada** bilangan kuadrat sempurna yang berakhir dengan *string* dua digit tersebut, sesuai urutannya?

Catatan. Demi klarifikasi, sebagai contoh 29 tidak termasuk sebagai salah satu dari *string* dua digit tersebut sebab $27^2=729$ berakhir dengan 29.

A. 26 B. 74 C. 78 D. 22

12. Perhatikan gambar berikut. Berapakah perbandingan luas yang diarsir dengan luas keseluruhan petak 3×2 tersebut?



A. $\frac{5}{36}$ B. $\frac{5}{24}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{7}{30}$

13. Pada busur suatu setengah lingkaran ω dengan diameter RS, terdapat titik O sehingga lingkaran berpusat di O menyinggung RS di titik M, serta berpotongan dengan busur ω di P dan Q. Jika diketahui bahwa panjang $SM = 5$ dan $MR = 20$, berapakah panjang PQ?

A. $4\sqrt{21}$ B. $5\sqrt{5}$ C. 16 D. $\frac{17}{2}$

14. Misalkan f adalah sebuah fungsi sedemikian sehingga untuk sembarang bilangan asli a, b, berlaku

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + ab.$$

Jika $f(75) - f(51) = 1230$, berapakah nilai dari $f(40)$?

A. 1230 B. 410 C. 10 D. 330

15. Patrick melemparkan dua buah dadu imbang bersisi enam, lalu melihat sisi-sisi yang muncul (yakni yang menghadap ke atas). Ini disebut sebagai sebuah ronde. Setelah itu, ia melempar kembali hanya dadu-dadu yang sisinya memunculkan bilangan ganjil (jika ada), dan berhenti melempar saat kedua dadu memunculkan bilangan genap. Berapakah peluang Patrick berhenti melempar dadu setelah tepat empat ronde melemparkan dadu?

A. $\frac{29}{256}$ B. $\frac{1}{16}$ C. $\frac{61}{1024}$ D. $\frac{169}{1024}$

16. Carilah keliling dari segitiga yang panjang garis tingginya adalah 170, 210, dan 357.

A. 737 B. 1020 C. 1140 D. 1350

17. Misalkan bahwa $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots$ adalah semua solusi real yang bernilai lebih dari atau sama dengan 1 dari persamaan berikut.

$$x^2 - \lfloor x^2 \rfloor = (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

Jika nilai dari x_{100} dapat dinyatakan sebagai $\frac{m}{n}$ di mana m dan n bilangan asli yang relatif prima, berapakah nilai dari $m + n$?

Catatan. Fungsi $\lfloor x \rfloor$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari x. Misalnya, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, dan $\lfloor -2,34 \rfloor = -3$.

A. 103 B. 273 C. 23 D. 229

18. Rudi ingin mewarnai setiap persegi satuan dari sebuah tabel 4×4 dengan warna merah, hijau, biru atau putih. Namun, ia tidak ingin ada dua persegi satuan yang saling bersentuhan (berbagi setidaknya satu titik sudut yang sama) memiliki warna yang sama. Berapakah banyaknya cara pewarnaan yang mungkin agar keinginan Rudi terpenuhi?

Catatan. Pewarnaan lain yang diperoleh dari merefleksikan dan/atau merotasikan suatu pewarnaan tertentu dianggap berbeda.

A. 96 B. 168 C. 24 D. 192

19. Suatu hari Haidar sedang bosan dan menghitung nilai dari 24! (24 faktorial). Ia menemukan bahwa ternyata, 24! memiliki 24 digit (dalam basis 10). Tertarik, ia mencoba menuliskan semua pembagi positifnya, lalu mencari semua bilangan *pangkat sempurna* di antaranya. Sebuah bilangan asli disebut bilangan *pangkat sempurna* jika dapat dinyatakan sebagai a^b di mana $a > 1$, $b > 1$, dan keduanya bilangan asli. Berapakah banyaknya bilangan *pangkat sempurna* berbeda yang dapat Haidar temukan?

Catatan. Bentuk $n!$ (n faktorial) adalah hasil perkalian semua bilangan asli dari 1 hingga n, yakni $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.

A. 1031 B. 1011 C. 1000 D. 1042

20. Definisikan $|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$. Lalu misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$\sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} = 20$$
$$\sqrt{|b-c|} + \sqrt{|c-a|} = 22.$$

Jika nilai maksimum dari $\sqrt{|c-a|} + \sqrt{|a-b|}$ adalah $p + q\sqrt{r}$ di mana p, q bilangan bulat serta r bilangan asli yang tidak habis dibagi oleh kuadrat apapun (selain 1), berapakah nilai dari $p + q + r$?

A. 64 B. 105 C. 72 D. 21

§1.2 Isian Singkat

21. Misalkan $f(x)$ adalah bilangan asli terbesar tanpa menggunakan digit 0 sedemikian sehingga jumlah digit-digitnya adalah x. Nilai dari $f(2)+f(4)+f(6)$ adalah ....

22. Persegi panjang $ABCD$ (huruf-hurufnya berurutan) memiliki panjang sisi $AB = 30$ dan $BC = 40$. Titik D terletak pada sisi EF di persegi panjang $ACEF$ (huruf-hurufnya berurutan). Panjang sisi CE adalah ....

23. Lima tim bertanding pada suatu kompetisi sepak bola, di mana setiap pasang tim bertanding tepat sekali. Pada setiap pertandingan, tim yang menang, seri, dan kalah berturut-turut memperoleh 3, 1, dan 0 poin. Jika total poin yang didapatkan pada kompetisi tersebut tidak melebihi 23, banyaknya konfigurasi dari hasil akhir semua pertandingan yang mungkin adalah ....

24. Misalkan $g_1, g_2, \cdots, g_{2022}$ adalah suku-suku berurutan dari barisan geometri dengan rasio positif dan $g_1 \neq 0$. Jika diketahui bahwa barisan tersebut memenuhi persamaan
$$\frac{g_2+g_4+g_6+\cdots+g_{2022}}{g_3+g_6+g_9+\cdots+g_{2022}} = \frac{309}{140},$$
rasio dari barisan tersebut (yakni nilai $\frac{g_2}{g_1}$) adalah $\frac{m}{n}$ di mana m dan n bilangan asli relatif prima. Nilai dari $m+n$ adalah ....

25. Misalkan setiap huruf menyatakan suatu bilangan cacah satu digit (huruf yang berbeda tidak harus menyatakan bilangan berbeda). Jika $\overline{MAQC}$ bilangan asli yang memenuhi persamaan
$$\overline{MAQC} \times 3 + 100(Q+M) = \overline{CQAC} + 100A,$$
nilai dari $\overline{MAQC}$ adalah ....

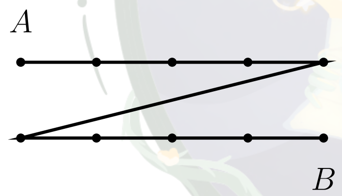
26. Diketahui a, b, c adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi
$$a + \frac{14}{b} = b + \frac{36}{c} = c + \frac{153}{a} = \frac{720}{a+b+c}.$$
Nilai dari $ab+bc+ca$ adalah ....

27. Lima bilangan bulat positif $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ memenuhi pertidaksamaan $n_5 \leq 32$ dan $n_{k+1} \geq 2n_k$ untuk setiap $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Banyaknya kuintupel terurut $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ yang memenuhi adalah ....

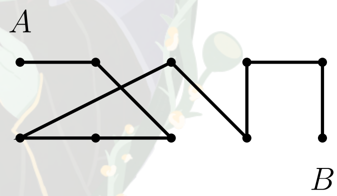
28. Misalkan ω adalah lingkaran luar segitiga ABC. Di dalam ω, terdapat suatu titik D sehingga $ABCD$ jajar genjang. Garis BD berpotongan dengan ω untuk kedua kalinya di titik P. Jika $AC = 20$, $AP = 18$, dan $CP = 26$, keliling dari jajar genjang $ABCD$ adalah ....

29. Perhatikan gambar berikut.

Sebuah laba-laba di titik A hendak membuat jaring melalui kesepuluh (kelima titik di baris pertama dan kelima titik di baris kedua segaris), hingga berakhir di titik B. Agar ia hemat jaring dan memiliki jaring yang stabil, ia hanya akan bergerak dengan garis lurus, serta melewati setiap titik tepat sekali. Diketahui bahwa tidak ada jaringnya yang saling berpotongan. Misalnya, contoh jaring yang valid (di kiri) dan tidak valid (di kanan) sebagai berikut.



Jaring yang valid



Jaring yang tidak valid

Banyaknya cara ia dapat membuat jaringnya adalah ....

30. Suatu hari, Jonathan menuliskan bilangan 1 pada suatu papan, dan ingin menggantinya mengikuti prosedur sebagai berikut. Jika bilangan N pada papan, pada giliran selanjutnya ia akan menggantinya dengan $4N + 1$ atau $8N + 1$. Ia akan berhenti setelah prosedurnya menghasilkan bilangan yang lebih besar sama dengan 2022 (dalam basis 10). Jika M dan m berturut-turut adalah bilangan maksimum dan minimum yang dihasilkan oleh prosedur Jonathan, nilai dari $M - m$ adalah ....

2 Kunci Jawaban

§2.1 Pilihan Ganda

1. D
2. D
3. B
4. C
5. C
6. A
7. C
8. B
9. A
10. A
11. C
12. D
13. A
14. D
15. A
16. B
17. D
18. B
19. C
20. A

§2.2 Isian Singkat

21. 112233
22. 24
23. 1161
24. 20
25. 1965
26. 517
27. 202
28. 44
29. 70
30. 8580

3 Soal dan Solusi

§3.1 Pilihan Ganda

1. **(R - Aljabar, Original, Sangat Mudah)** Definisikan sebuah operasi $\uparrow$ di mana

$$a \uparrow b = \frac{a^3}{a-b}$$

untuk setiap bilangan real $a \neq b$. Berapakah nilai dari $(10 \uparrow 100) + (100 \uparrow 10)$?

A. 9100 B. 10110 C. 9010 D. 11100

Solusi. Tinjau bahwa

$$(a \uparrow b) + (b \uparrow a) = \frac{a^3}{a-b} + \frac{b^3}{b-a} = \frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$$

sehingga ekspresi soal adalah saat $a = 10$ dan $b = 100$, yakni bernilai $\boxed{11100 \textbf{ (D)}}$. □

2. **(K - Teori Bilangan, Original, Sangat Mudah)** Misalkan N bilangan yang memenuhi persamaan

$$N = 1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times 6^6 \times 7^7 \times 8^8 \times 9^9.$$

Jika faktorisasi prima dari N adalah $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, berapakah nilai dari $a+b+c+d$?

A. 44 B. 50 C. 49 D. 79

Solusi. Karena kita menghitung hasil penjumlahan semua pangkat primanya, sama seperti kita menghitung berapakah banyaknya prima (belum tentu berbeda) yang perlu dikalikan untuk menghasilkan N. Tinjau bahwa faktorisasi prima dari 2,3,5,7 berisikan 1 bilangan prima, faktorisasi prima dari 4,6, dan 9 berisikan 2 bilangan prima, dan faktorisasi prima 8 berisikan 3 bilangan prima. Maka, banyaknya prima yang diperlukan adalah

$$(2+3+5+7) \times 1 + (4+6+9) \times 2 + (8) \times 3 = 17 + 38 + 24 = \boxed{79 \textbf{ (D)}}. \quad \square$$

> **Komentar.** Dapat juga dicari dengan manual, yakni mencari faktorisasi prima masing-masing bilangan komposit lalu menjumlahkannya di akhir. Dengan cara ini, diperoleh bahwa $a = 40$, $b = 27$, $c = 5$, dan $d = 7$. Ini tidak terlalu sulit untuk dikerjakan, terlebih lagi jika diberikan waktu 2 jam.

3. **(K - Kombinatorika, e-dchen 2019 Mock Mathcounts Nationals - AoPS: eisirrational, Sangat Mudah)** Pada permainan gunting-kertas-batu, diberikan bahwa gunting mengalahkan kertas, kertas mengalahkan batu, dan batu mengalahkan gunting. Pada setiap giliran, Adi, Bobi, dan Chiko masing-masing memilih gunting, kertas, atau batu secara acak dan mengeluarkannya secara bersamaan. Kondisi *seri* dicapai saat banyaknya pemain lain yang dikalahkan olehnya sama, untuk setiap pemain gunting-kertas-batu tersebut. Berapakah peluang terjadinya kondisi *seri* pada giliran pertama?

A. $\frac{7}{27}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{4}{27}$

Solusi. Jika ada pemain yang menang, maka pemain lain harus kalah yang berarti maksimum terjadi 3 kemenangan. Maka kita hanya perlu membagi kasus menjadi banyaknya kemenangan yang diraih oleh setiap pemain (sebab diketahui selalu sama):

Kasus 1. Semua pemain mengalahkan 0 pemain lain: Maka berarti pilihan mereka sama semua. Di sini, ada 3 kemungkinan, yakni gunting semua, kertas semua, atau batu semua.

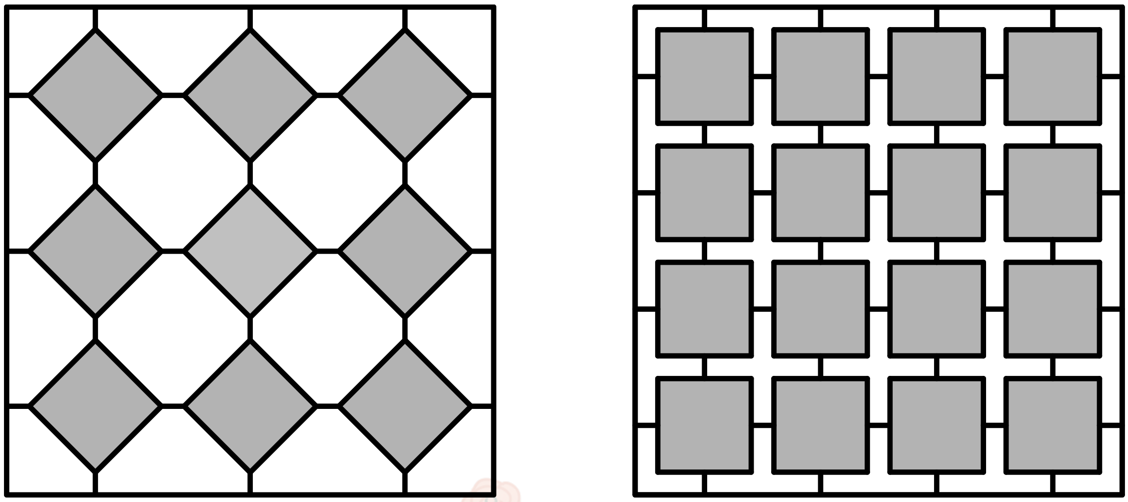
Kasus 2. Semua pemain mengalahkan 1 pemain lain: Berarti pilihan mereka berbeda semua. Di sini ada 3! kemungkinan, yakni banyaknya cara menyusun gunting, kertas, dan batu ke orang yang berbeda.

Karena mustahil mengalahkan 2 pemain lain (maksimum terjadi 3 kemenangan), semua kasus sudah dipertimbangkan. Semesta dari permainan ini adalah $3^3 = 27$. Jadi peluang terjadinya kondisi *seri* adalah

$$\frac{3+3!}{27} = \frac{3+6}{27} = \boxed{\frac{1}{3}\ \textbf{(B)}}. \quad \square$$

Komentar. Jika ingin memastikan kasus lain, yakni dua pemain mengeluarkan yang sama dan yang lain berbeda (untuk memastikan semestanya 27), hal ini dapat dilakukan. Ada $\binom{3}{2} = 3$ pasangan pemain yang mungkin mengeluarkan yang sama, dan mereka memiliki 3 pilihan. Sementara pemain yang berbeda sendiri hanya memiliki 2 pilihan, yang berarti ada $3 \times 3 \times 2 = 18$ cara, maka semua kemungkinan sudah dipertimbangkan.

4. **(K - Geometri, Original, Sangat Mudah)** Perhatikan gambar berikut.



Kedua persegi besar pada kedua gambar kongruen, serta persegi-persegi kecil di gambar pertama merupakan rotasi 45° dari persegi-persegi kecil di gambar kedua, yang mana sisi-sisinya sejajar dengan persegi besar. Jika jarak antara setiap persegi dengan persegi terdekat lainnya (yang ditandai dengan segmen-segmen kecil) adalah 1 satuan panjang, panjang sisi dari persegi yang besar sama dengan $a + b\sqrt{2}$ satuan panjang, di mana a, b bilangan bulat. Berapakah nilai dari $a + b$?

A. 22 B. 9 C. 19 D. 12

Solusi. Misal s panjang sisi persegi kecil. Maka pada gambar pertama, menggambarkan garis diagonal ketiga persegi kecil akan menghasilkan tiga segmen yang panjangnya $\sqrt{s^2 + s^2} = s\sqrt{2}$. Sementara di kanan, jika segmen dengan satuan 1 diperpanjang untuk menghubungkan dengan segmen di sisi lain persegi, panjangnya s. Jadi kita mendapatkan persamaan:

$$4 + 3s\sqrt{2} = 4s + 5 \iff (3\sqrt{2} - 4)s = 1 \iff s = \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2,$$

sehingga panjang sisi persegi yang besar adalah $4(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2) + 5 = 6\sqrt{2} + 13$ sehingga diperoleh $a + b = \boxed{19\ \textbf{(C)}}$. □

> **Komentar.** Demi kelengkapan, kita harus menunjukkan bahwa keempat segmen berbeda tersebut pada garis yang sama, agar kita bisa menambahkan panjang mereka, seperti di atas (karena untuk gambar kedua, jika tidak segaris pun sebenarnya cukup menggunakan kesejajaran). Untuk itu, tinjau saja bahwa rotasinya 45 derajat, yang berarti karena segmen dengan panjang 1 tersebut tegak lurus dengan sisi persegi, jika digambar diagonal daripada persegi akan diperoleh bahwa perpanjangan segmen yang kita miliki akan membagi dalam sudut 90 derajat yang dimiliki persegi kecil, berarti perpanjangan segmen jugalah diagonal persegi.

5. **(K - Teori Bilangan, Klasik, Mudah)** Suatu tahun Masehi memiliki 53 hari Kamis dan 52 hari Rabu. Hari apakah tanggal 27 Februari di tahun yang sama?

   A. Kamis B. Sabtu C. Jumat D. Rabu

   Solusi. Sebuah tahun memiliki 365 atau 366 hari yang berarti terdapat 52 minggu 1 hari atau 52 minggu 2 hari pada tahun-tahun kabisat. Setiap minggu, terjadi sekali hari Minggu, Senin, Selasa, dan seterusnya sampai Sabtu. Maka tersisa 1 atau 2 hari tambahan yang tersisa. Dan diketahui bahwa salah satu dari hari yang tersisa adalah hari Kamis. Hari kedua yang tersisa (jika ada) pasti hari Jumat, bukan Rabu, oleh soal. Maka tanggal 1 Januari dari tahun tersebut adalah hari Kamis. Ini berarti karena 27 Februari adalah $31 + 27 - 1 = 57$ hari kemudian, dan sisa pembagian 57 oleh 7 adalah 1, ini berarti harinya hanya bergeser sebesar 1 dari tanggal 1 Januari, artinya jawabannya adalah $\boxed{\text{Jumat} \quad \textbf{(C)}}$. □

6. **(K - Kombinatorika, Modifikasi KSN-K SD 2020, Mudah)** Suatu hari, Rafael sedang mengunjungi apotek dan ia ingin membeli masker, sabun untuk cuci tangan, dan *hand sanitizer*, berturut-turut dengan harga Rp10.000, Rp20.000, dan Rp25.000. Mengingat bahayanya virus corona, ia ingin membeli setidaknya 7 barang. Rafael hanya memiliki Rp120.000. Jika setelah dari situ, ia pulang dengan ojek seharga Rp15.000, berapakah banyaknya kemungkinan barang yang ia beli?

   A. 17 B. 8 C. 11 D. 20

   Solusi. Misalkan banyaknya masker, sabun, dan *hand sanitizer* yang ia beli adalah m, s, h berturut-turut. Maka kita ingin mencari banyaknya tripel bilangan cacah terurut (m, s, h) yang memenuhi sistem

   $$m + s + h \geq 7; \quad 10000m + 20000s + 25000h \leq 105000 \iff 2m + 4s + 5h \leq 21.$$

   Maka kita kuli berdasarkan nilai h.

   Kasus 1. Nilai $h = 4$: Maka $2m + 4s \leq 1$ tetapi $m + s \geq 3$, mustahil.

   Kasus 2. Nilai $h = 3$: Maka $2m + 4s \leq 6$ dan $m + s \geq 4$, mustahil juga.

   Kasus 3. Nilai $h = 2$: Maka $2m + 4s \leq 11$ dan $m + s \geq 5$, tetapi karena $2m + 4s$ genap maka $2m + 4s \leq 10 \iff m + 2s \leq 5$, dan karena $m + s \geq 5$, haruslah $s = 0$, sehingga $m = 5$, 1 solusi.

   Kasus 4. Nilai $h = 1$: Maka $2m + 4s \leq 16 \iff m + 2s \leq 8$ dan $m + s \geq 6$. Di sini artinya $m + 2s - (m + s) \leq 8 - 6 = 2 \iff s \leq 2$.
   Untuk $s = 0$, $m \geq 6$, tetapi $m + 2s \leq 8$ yang berarti $6 \leq m \leq 8$, 3 solusi. Selanjutnya untuk $s = 1$, $m \geq 5$, tetapi $m \leq 6$, 2 solusi. Untuk $s = 2$, $m \geq 4$ dan $m \leq 4$ maka 1 solusi. Jadi di kasus ini ada 6 solusi.

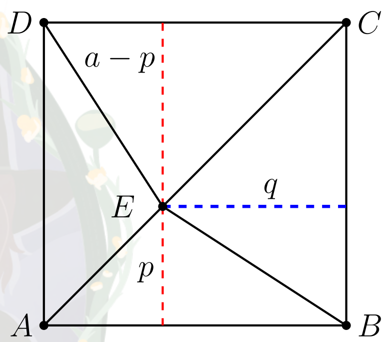
Kasus 5. Nilai $h = 0$: Maka $2m + 4s \leq 21$ tetapi karena genap, $2m + 4s \leq 20 \iff m + 2s \leq 10$, dan $m + s \geq 7$ yang berarti $s \leq 3$. Lakukan hal yang sama, kuli untuk $0 \leq s \leq 3$.

Untuk $s = 3$, $m = 4$, 1 solusi. Untuk $s = 2$, didapat $5 \leq m \leq 6$, 2 solusi. Untuk $s = 1$, diperoleh $6 \leq m \leq 8$, 3 solusi, dan terakhir untuk $s = 0$, diperoleh $7 \leq m \leq 10$, 4 solusi. Jadi di kasus ini ada 10 solusi.

Maka total terdapat $1 + 6 + 10 = \boxed{17 \textbf{ (A)}}$ kemungkinan. □

7. **(R - Geometri, Original, Mudah)** Di dalam persegi $ABCD$, terdapat suatu titik E sehingga perbandingan luas segitiga $\triangle ABE : \triangle BCE : \triangle CDE$ adalah $4 : 6 : 5$ berturut-turut. Berapakah nilai dari $\dfrac{AB}{AE}$?

A. $\dfrac{8}{5}$ B. $\dfrac{11}{5}$ C. $\dfrac{9}{5}$ D. 2



Solusi. Definisikan jarak dari suatu titik ke garis lain adalah panjang garis tegak lurus garis lain melalui titik yang dimaksud. Misalkan a adalah panjang dari sisi-sisi persegi. Maka misalkan jarak dari titik E ke sisi-sisi AB, BC, CD, DA berturut-turut adalah $p, q, a - p, a - q$. Maka,

$$[\triangle ABE] + [\triangle CDE] = \frac{1}{2} \times a \times p + \frac{1}{2} \times a \times (a - p) = \frac{1}{2}a^2.$$

Jadi, jika luas $\triangle ABE = 4x$, luas perseginya adalah dua kali setengah luas perseginya, atau $[ABCD] = 18x$. Maka,

$$[\triangle ABE] = \frac{1}{2}ap = 4x = \frac{4}{18}a^2 \iff p = \frac{4}{9}a \iff a - p = \frac{5}{9}a.$$

Sementara $[\triangle BCE] = \dfrac{1}{2}aq = 6x = \dfrac{1}{3}a^2 \iff q = \dfrac{2}{3}a \iff a - q = \dfrac{1}{3}a$. Maka, karena posisi E adalah sisi miring dari segitiga siku-siku yang panjang kakinya adalah p dan $a - q$, maka

$$AE^2 = \left(\frac{4}{9} \cdot a\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2 = \frac{25}{81}a^2 \iff AE = \frac{5}{9}a = \frac{5}{9}AB \iff \frac{AB}{AE} = \boxed{\frac{9}{5} \textbf{ (C)}}.$$ □

8. **(K - Aljabar, Winter Mock AMC 10 2018 - AoPS: jj_ca888, Mudah)** Diketahui bilangan real x memenuhi persamaan
$$\frac{\sqrt{16+x}}{16}+\frac{\sqrt{16+x}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{2}.$$
Jika $x=\frac{a}{b}$ di mana a dan b bilangan asli relatif prima, berapakah nilai dari $a+b$?
Catatan. Bilangan asli m dan n dikatakan "relatif prima" jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesar dari m dan n adalah 1.

A. 79 B. 19 C. 23 D. 17

Solusi. Samakan penyebut agar diperoleh bahwa
$$\frac{x\sqrt{16+x}+16\sqrt{16+x}}{16x}=\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{(16+x)\sqrt{16+x}}{16x} \iff 8x\sqrt{x}=(16+x)\sqrt{16+x}$$
yang ekuivalen dengan
$$8=\frac{(16+x)\sqrt{16+x}}{x\sqrt{x}}.$$
Maka dengan memisalkan $p=\frac{\sqrt{16+x}}{\sqrt{x}}$, diperoleh persamaan $p^3=8 \iff p^3-8=0 \iff (p-2)(p^2+2p+4)=0$. Karena $p^2+2p+4=(p+1)^2+3>0$, hanya mungkin bahwa $p=2$. Ini berarti
$$\frac{16+x}{x}=2^2 \iff 4x=x+16 \iff x=\frac{16}{3},$$
maka $a+b=\boxed{19\ \textbf{(B)}}$.

9. **(H - Kombinatorika, Klinik Pendidikan MIPA, Mudah-sedang)** Enam tim sepak bola, yakni tim A, B, C, D, E, dan tim F suka mengadakan sparing mingguan antara satu sama lain. Mereka bertanding pada hari Jumat, Sabtu, dan Minggu, setiap harinya hanya dilakukan tepat 1 pertandingan, serta diketahui bahwa setiap tim hanya bertanding sekali seminggu. Peluang terjadinya pertandingan antara tim A dan tim B pada Sabtu pekan ketiga adalah ....

A. $\frac{1}{15}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{1}{8}$

Solusi. Oleh definisi pertandingan (yakni dilakukan di antara 2 tim), berarti setiap hari terjadi 1 pertandingan. Peluang tim A dan tim B bertemu adalah $\frac{1}{5}$ (sebab A memiliki 5 kejadian yang sama mungkinnya, dan 1 di antaranya adalah dengan B). Sementara peluang A bertanding di hari Sabtu adalah $\frac{2!}{3!}=\frac{1}{3}$. Karena kedua kejadian tersebut independen, maka peluang keduanya terjadi adalah
$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\boxed{\frac{1}{15}\quad\textbf{(A)}}. \quad \square$$

Solusi alternatif. Misalkan kita menandakan semua tim berdasarkan hurufnya, dan urutan tandingnya berdasarkan posisi huruf tersebut, dengan posisi 1-2 di hari Jumat, posisi 3-4 di hari Sabtu, dan posisi 5-6 di hari Minggu (sehingga terciptalah suatu korespondensi satu-satu antara semua kemungkinan dengan penyusunan huruf). Maka banyaknya semesta adalah banyaknya penyusunan total yang mungkin, yakni $6! = 720$, sedangkan banyaknya kejadian adalah banyaknya penyusunan sehingga A dan B pada posisi ketiga dan keempat, yakni $2!4! = 48$ (dengan 2! untuk penyusunan A dan B, serta 4! untuk sisanya). Maka peluangnya adalah

$$\frac{48}{720} = \boxed{\frac{1}{15} \quad \textbf{(A)}}. \quad \square$$

10. **(K - Aljabar, Original, Mudah-sedang)** Misalkan f sebuah fungsi kuadrat sedemikian sehingga $f(5) = 10$, serta berlaku juga

$$\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{3}{2}, \quad \text{dan} \quad \frac{f(4)}{f(3)} = \frac{5}{3}.$$

Jika $f(1) = \frac{m}{n}$ di mana m dan n bilangan asli relatif prima, berapakah nilai dari $m+n$?

Catatan. Bilangan asli m dan n dikatakan "relatif prima" jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesar dari m dan n adalah 1.

A. 7 B. 13 C. 9 D. 21

Solusi. Misal $f(x) = a(x-p)(x-q)$ (kita juga bisa menggunakan $f(x) = ax^2 + bx + c$ namun akan lebih panjang, lengkapnya di komentar). Maka diketahui bahwa $f(5) = a(5-p)(5-q) = 8$, dan

$$\frac{a(3-p)(3-q)}{a(2-p)(2-q)} = \frac{3}{2} \iff 2(3-p)(3-q) = 3(2-p)(2-q) \iff pq = 6$$
$$\frac{a(4-p)(4-q)}{a(3-p)(3-q)} = \frac{5}{3} \iff 3(pq-4p-4q+16) = 5(pq-3p-3q+9) \iff p+q = 3$$

Maka $(x-p)(x-q) = x^2 - (p+q)x + pq = x^2 - 3x + 6$. Sekarang karena $f(5) = 10$, berlaku

$$f(5) = 10 = a(5^2 - 3(5) + 6) = 16a \iff a = \frac{5}{8}.$$

Jadi $f(1) = \frac{5}{8}(1-3+6) = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ sehingga nilai dari $m+n$ adalah $\boxed{7 \textbf{ (A)}}$. $\square$

Solusi alternatif. Misal $f(2) = 2a, f(3) = 3a, f(4) = 5a$. Perhatikan bahwa ini dapat dijadikan barisan aritmetika bertingkat 2, sehingga $f(5) = 8a$. (Penjelasan: $(f(n) - f(n-1)) - (f(n-1) - f(n-2)) = a$ berlaku untuk $n = 4$, sehingga dapat didefinisikan barisan yang suku-sukunya sama dengan nilai bulat fungsi kuadrat tadi.) Jadi $a = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$, sementara $(f(3) - f(2)) - (f(2) - f(1)) = a \iff a - (f(2) - f(1)) = a \iff f(2) = f(1) = 2a$ yang berarti $f(1) = 2a = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$.

Solusi alternatif. Misalkan juga $f(2) = 2p$, $f(3) = 3p$, dan $f(4) = 5p$. Dengan Interpolasi Lagrange, diperoleh:

$$f(x) = 2p \cdot \frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} + 3p \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)} + 5p \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)} = \frac{p}{2}(x^2 - 3x + 6),$$

lalu lanjutkan seperti solusi pertama, yakni memperoleh bahwa $p = \frac{5}{4}$ dan menyubstitusikan $x = 1$ ke persamaan di atas untuk memperoleh $f(1) = \frac{5}{2}$.

> **Komentar.** Memang Interpolasi Lagrange langsung menyelesaikan masalah ini, namun soal ini tetap cukup sesuai dengan soal polinom kuadrat OSK SMP, yang biasanya akan menjadi soal pembanding antara orang-orang yang kurang mahir mengerjakan soal fungsi kuadrat dengan yang sudah terbiasa. Memang solusi di sini terlihat sederhana, namun bentuk pecahan pada soal fungsi kuadrat merupakan sesuatu yang unik. Selain itu, penyelesaian soal ini dengan persamaan linear tiga variabel juga memungkinkan, yakni menyelesaikan sistem persamaan berikut:
>
> $$\begin{aligned} \frac{9a+3b+c}{4a+2b+c} = \frac{3}{2} &\iff 6a - c = 0 \\ \frac{16a+4b+c}{9a+3b+c} = \frac{5}{3} &\iff 3a - 3b - 2c = 0 \\ &\quad 25a + 5b + c = 10 \end{aligned}$$

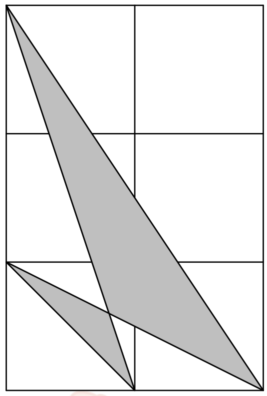
11. **(K - Teori Bilangan, Klasik, Mudah-sedang)** Berapakah banyaknya *string* dua digit $\overline{ab}$ ($a = 0$ diperbolehkan) sedemikian sehingga **tidak ada** bilangan kuadrat sempurna yang berakhir dengan *string* dua digit tersebut, sesuai urutannya?

Catatan. Demi klarifikasi, sebagai contoh 29 tidak termasuk sebagai salah satu dari *string* dua digit tersebut sebab $27^2 = 729$ berakhir dengan 29.

A. 26 B. 74 C. 78 D. 22

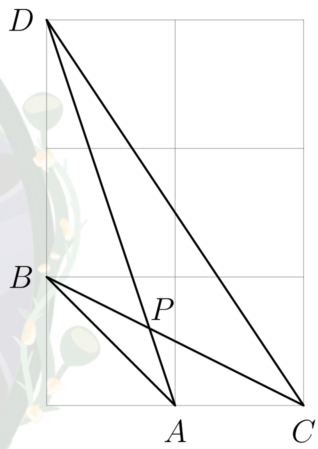
Solusi. Dalam mod 4, $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$. Sementara untuk mod 25, kita menguli. Untuk p kelipatan 5, $(25k + p)^2 \equiv 0 \pmod 5$. Maka kuli untuk $\pm p = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12$ agar diperoleh bahwa $(25k + p)^2 \equiv 1, 4, 9, 16, 11, 24, 14, 6, 21, 19 \pmod{25}$. Maka ada 11 solusi (termasuk $(25k + p)^2 \equiv 0 \pmod{25}$) untuk mod 25 dan 2 solusi untuk mod 4. Jadi, dengan *Chinese Remainder Theorem* terdapat $2 \times 11 = 22$ bilangan yang memiliki kuadrat sempurna yang berakhiran dengan 2 digit tersebut, atau $100 - 22 = \boxed{78 \textbf{ (C)}}$ bilangan yang memenuhi ketentuan. $\square$

12. **(K - Geometri, Mock AMC 8A 2019 - AoPS: popcorn1, Mudah-sedang)** Perhatikan gambar berikut. Berapakah perbandingan luas yang diarsir dengan luas keseluruhan petak 3×2 tersebut?



A. $\frac{5}{36}$ B. $\frac{5}{24}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{7}{30}$

Solusi. Misal titik kiri bawah adalah (0, 0) dan kanan atas adalah (2, 3), lalu petak tersebut mewakili Koordinat Cartesius. Kita akan mencari luas daerah yang tidak diarsir. Segitiga kanan atas memiliki luas $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$ satuan luas, sedangkan kiri bawah memiliki luas $\frac{1}{2}$ satuan luas. Sekarang akan dicari titik potong dua garis yang merupakan sisi-sisi kedua segitiga yang diarsir. Garis yang lebih landai melalui (0, 1) dan (2, 0), sehingga karena gradiennya $m = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ maka berlaku $y = -\frac{1}{2}x + c$ melalui (0, 1) sehingga $c = 1$.



Dengan cara yang sama, garis yang melalui (0, 3) dan (1, 0) memiliki persamaan $y = -3x + 3$. Sehingga titik potong mereka ditentukan oleh

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 = -3x + 3 \iff \frac{5}{2}x = 2 \iff x = \frac{4}{5}$$

yang berarti $y = -\frac{2}{5} + 1 = \frac{3}{5}$. Maka luas segitiga tidak diarsir di kiri adalah

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

satuan luas sedangkan segitiga kanan bawah yang tidak diarsir adalah

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

satuan luas. Karena luas keseluruhan petak 3×2 adalah 6 satuan luas, luas daerah yang diarsir adalah

$$\frac{6 - 3 - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} - \frac{3}{10}}{6} = \frac{\frac{7}{5}}{6} = \boxed{\frac{7}{30} \textbf{ (D)}}. \quad \square$$

Solusi alternatif. Lakukan cara yang sama dengan solusi pertama untuk memperoleh titik potong kedua garis yang merupakan sisi-sisi segitiga yang diarsir adalah pada $P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Sehingga kita menggunakan Prinsip Inklusi-Eksklusi termodifikasi, yakni mencari luas diarsir ditambah dengan dua kali luas segitiga kanan bawah yang tidak diarsir. Misal $A(0,1), B(1,0), C(2,0)$, dan $D(0,3)$. Maka luas daerah yang diarsir sama dengan

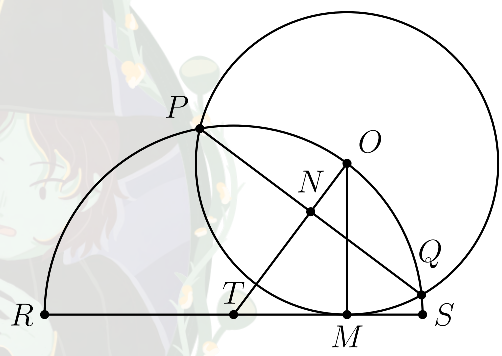
$$[\triangle BCD] + [\triangle ABC] - 2 \times [\triangle BCP] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2 \times \frac{3}{10} = \frac{7}{5}$$

di mana luas $\triangle BCP$ diperoleh dari solusi pertama, maka diperoleh jawaban yang sama. $\square$

13. **(H - Geometri, IG: eager2solve, Sedang)** Pada busur suatu setengah lingkaran ω dengan diameter RS, terdapat titik O sehingga lingkaran berpusat di O menyinggung RS di titik M, serta berpotongan dengan busur ω di P dan Q. Jika diketahui bahwa panjang $SM = 5$ dan $MR = 20$, berapakah panjang PQ?

A. $4\sqrt{21}$ B. $5\sqrt{5}$ C. 16 D. $\frac{17}{2}$

Solusi. Karena SR diameter, panjangnya 2 kali radius, atau radiusnya akan sama dengan $\frac{25}{2}$. Misalkan T titik pusat RS, yang merupakan titik pusat lingkaran ω, maka $TO = \frac{25}{2}$. Dan karena $MS = 5$, diperoleh $TM = \frac{25}{2} - 5 = \frac{15}{2}$. Oleh Pythagoras,



$$OM^2 = OT^2 - TM^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 100$$

yang berarti $OM = 10$. Sekarang misalkan perpotongan TO dan PQ adalah N, karena PQ adalah *radical axis* dari ω dan lingkaran berpusat di O dengan radius 10, maka PQ dan OT tegak lurus. Maka misalkan $ON = x$, maka $NT = \frac{25}{2} - x$. Artinya, oleh Pythagoras pada $\triangle PNT$ dan $\triangle ONP$, diperoleh

$$PT^2 - TN^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{2} - x\right)^2 = NP^2 = OP^2 - ON^2 = 10^2 - x^2$$

yang berarti $\frac{625}{4} - \left(\frac{625}{4} - 25x + x^2\right) = 10^2 - x^2 \iff 25x = 100 \iff x = 4$. Maka

$$PQ = 2PN = 2\sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{84} = \boxed{4\sqrt{21}\ \textbf{(A)}}. \quad \square$$

Solusi alternatif. Gunakan prosedur yang sama sampai permisalan titik N. Melanjutkan dari situ, oleh *Power-of-a-point*, jika garis TO berpotongan dengan ω di K dan L di mana $TL < TK$, dan $M \neq O$ titik potong kedua garis OT, maka

$$LN \times NK = NO \times NM \iff (10 - x)(10 + x) = x(25 - x)$$

sebab OM diameter (melalui T), dan diperoleh persamaan yang sama seperti solusi awal.

14. **(H - Aljabar, Modifikasi PUMaC 2010 Algebra Division A, Sedang)** Misalkan f adalah sebuah fungsi sedemikian sehingga untuk sembarang bilangan asli a, b, berlaku

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + ab.$$

Jika $f(75) - f(51) = 1230$, berapakah nilai dari $f(40)$?

A. 1230 B. 410 C. 10 D. 330

Solusi. Tinjau bahwa $f(75) = f(51) + f(24) + 51 \times 24 \iff f(75) - f(51) = f(24) + 1224 \iff f(24) = 1230 - 1224 = 6$. Selanjutnya, mengambil $a = b$, diperoleh

$$f(2a) = 2f(a) + a^2.$$

Maka $f(24) = 6 = 2f(12) + 144 \iff f(12) = -69$, dan oleh karena itu,

$$f(24) + f(12) + 24 \times 12 = f(36) = 6 - 69 + 288 = 225.$$

Artinya, natural untuk mencari nilai dari

$$f(3a) = f(a) + f(2a) + 2a^2 = 3f(a) + 3a^2,$$

sehingga $f(12) = 3f(4) + 48 = -69 \iff f(4) = -39$. Artinya,

$$f(40) = f(36) + f(4) + 4 \times 36 = 225 - 39 + 144 = \boxed{330 \textbf{ (D)}}. \quad \square$$

Solusi alternatif. Perhatikan bahwa untuk sembarang bilangan asli $a = n$, berlaku

$$f(n+1) = f(n) + f(1) + n.$$

Memasukkan $n \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, setelah menjumlahkan semua diperoleh bahwa

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + (n-1)f(1) + \frac{n(n-1)}{2}.$$
$$\iff f(n) = nf(1) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Maka, oleh persamaan $f(75) - f(51) = 1230$, berlaku

$$f(75) - f(51) = (75 - 51)f(1) + \frac{75 \times 74}{2} - \frac{51 \times 50}{2} = 24f(1) + 1500 \iff f(1) = -\frac{45}{4},$$

sehingga jawaban soal adalah $f(40) = 40f(1) + \dfrac{39 \cdot 40}{2} = -450 + 780 = \boxed{330 \textbf{ (D)}}$. $\square$

> **Komentar.** Oleh solusi alternatif, fungsi yang memenuhi soal adalah
>
> $$f(n) = n \cdot -\frac{45}{4} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{2n^2 - 47n}{4}.$$

15. **(K - Kombinatorika, Apocalyptic AMC 8 2020 - AoPS: bissue, Sedang)** Patrick melemparkan dua buah dadu imbang bersisi enam, lalu melihat sisi-sisi yang muncul (yakni yang menghadap ke atas). Ini disebut sebagai sebuah ronde. Setelah itu, ia melempar kembali hanya dadu-dadu yang sisinya memunculkan bilangan ganjil (jika ada), dan berhenti melempar saat kedua dadu memunculkan bilangan genap. Berapakah peluang Patrick berhenti melempar dadu setelah tepat empat ronde melemparkan dadu?

A. $\frac{29}{256}$ B. $\frac{1}{16}$ C. $\frac{61}{1024}$ D. $\frac{169}{1024}$

Solusi. Misal dua dadu yang ada, pertama kali memunculkan bilangan genap pada ronde ke-d_1 dan d_2 berturut-turut. Maka kita membagi kasus menjadi 7 kasus - yakni $(1,4),(2,4),(3,4)$ (dan permutasi) dan kasus yang terakhir adalah $(4,4)$. Pada kasus di mana $(d_1,d_2)=(1,4)$, dengan permutasinya (sebanyak 2!) peluang kejadiannya adalah

$$2!\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}.$$

Dengan cara yang sama, untuk kasus di mana $(d_1,d_2)=(2,4),(3,4)$, dan $(4,4)$ dengan permutasinya, peluang kejadiannya berturut-turut adalah

$$2!\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{32},\quad 2!\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{64},\quad \text{dan}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{256}$$

sehingga peluang totalnya adalah

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}=\boxed{\frac{29}{256}\ \textbf{(A)}}.$$

Solusi alternatif. Kita akan menguli secara rekursif. Misalkan P_n adalah peluang bahwa setelah ronde ke-n tidak ada dadu yang genap, serta Q_n dan R_n berturut-turut adalah peluang bahwa setelah ronde ke-n terdapat tepat satu dan dua dadu yang genap. Maka, $P_0=1$, sedangkan $Q_0=R_0=0$. Tinjau bahwa

$$P_n=\frac{1}{4}P_{n-1}$$

sebab jika pada giliran ke-$n-1$ tidak ada dadu yang genap, peluang bahwa pada giliran ke-n juga sama adalah jika kedua dadu yang dilempar pada ronde ke-n memunculkan bilangan ganjil. Selain itu, tinjau bahwa

$$Q_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{2}Q_{n-1}$$

sebab jika pada giliran ke-$n-1$ tidak ada dadu yang pernah memunculkan bilangan genap, peluang di antara kedua dadu tersebut muncul tepat sebuah dadu genap adalah $\frac{\binom{2}{1}}{4}=\frac{1}{2}$, sedangkan kemungkinan kedua adalah jika pada giliran ke-$n-1$ ada satu dadu yang sudah memunculkan bilangan genap, peluang bahwa dadu kedua tetap memunculkan bilangan ganjil juga $\frac{1}{2}$. Lalu, terakhir,

$$R_n = \frac{1}{4}P_{n-1} + \frac{1}{2}Q_{n-1} + R_{n-1}$$

sebab jika ada 0 dadu genap, peluang pada giliran ke-n keduanya genap adalah $\frac{1}{4}$, jika ada 1 dadu genap peluang yang lain muncul genap adalah $\frac{1}{2}$, dan jika keduanya sudah genap peluangnya adalah 1. Maka sistem rekursif sudah selesai, mari kita kuli.

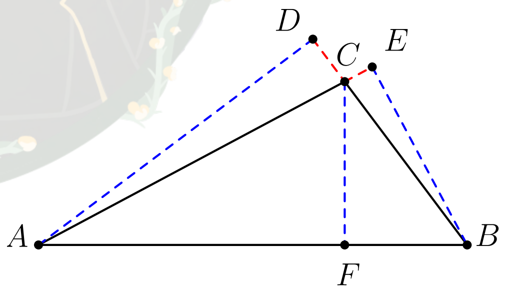
$$\begin{array}{lll}
P_1 = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}, & Q_1 = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}, & R_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{4}(0) = \frac{1}{4}, \\
P_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}, & Q_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}, & R_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16}, \\
P_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}, & Q_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{32}, & \\
\implies R_4 - R_3 = \frac{1}{4}P_3 + & \frac{1}{2}Q_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{32} = \boxed{\frac{29}{256}\ \textbf{(A)}} &
\end{array}$$

sebab kita ingin peluang bahwa Patrick berhenti tepat pada ronde keempat, jadi kita harus menguranginya dengan peluang Patrick sudah berhenti pada ronde ketiga. □

16. **(K - Geometri, Klasik, Sedang-sulit)** Carilah keliling dari segitiga yang panjang garis tingginya adalah 170, 210, dan 357.

A. 737 B. 1020 C. 1140 D. 1350

Solusi. Misalkan panjang sisi-sisi dari segitiga tersebut adalah a, b, c, serta tanpa mengurangi keumuman $a < b < c$. Perhatikan bahwa dengan meninjau dua kali luas segitiga tersebut:



$$a \times 357 = b \times 210 = c \times 170$$

kita memperoleh bahwa $a : b : c = 10 : 17 : 21$ yang berarti dapat dimisalkan bahwa $a = 10k, b = 17k, c = 21k$. Maka, dengan rumus Hëron luas segitiga tersebut adalah

$$\sqrt{24k \cdot (24k - 10k)(24k - 17k)(24k - 21k)} = 84k^2$$
$$\iff 10k \times 357 = 2 \times 84k^2$$
$$\iff 168k^2 - 3570k = 0 \iff k = 0 \text{ atau } k = \frac{3570}{168} = \frac{85}{4}$$

sehingga kelilingnya adalah $48k = \boxed{1020\ \textbf{(B)}}$ karena $k = 0$ tidak memenuhi. □

> **Komentar.** Menggunakan Pythagoras untuk *length-chasing* akan mempersulit level soal ini. Soal ini mirip soal jenis OSK SMA, meskipun caranya terlihat pendek.

17. **(K - Teori Bilangan, Modifikasi Mock AIME 2017 - AoPS: CantonMathGuy, Sedang-sulit)**
Misalkan bahwa $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots$ adalah semua solusi real yang bernilai lebih dari atau sama dengan 1 dari persamaan berikut.

$$x^2 - \lfloor x^2 \rfloor = (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

Jika nilai dari x_{100} dapat dinyatakan sebagai $\dfrac{m}{n}$ di mana m dan n bilangan asli yang relatif prima, berapakah nilai dari $m + n$?

Catatan. Fungsi $\lfloor x \rfloor$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari x. Misalnya, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, dan $\lfloor -2,34 \rfloor = -3$.

A. 103 B. 273 C. 23 D. 229

Solusi. Jabarkan persamaan soal agar menjadi $x^2 - \lfloor x^2 \rfloor = x^2 - 2x\lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor^2$ dan tulis ulang agar mendapatkan rumus untuk x, sebagai berikut:

$$2x\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x^2 \rfloor \iff x = \frac{\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x^2 \rfloor}{2\lfloor x \rfloor}$$

yang berarti x jelas rasional. Kita bisa meninjau bahwa jika $\lfloor x \rfloor = a$, maka $\lfloor x^2 \rfloor < (a+1)^2$ yang berarti dapat dibagi kasus menggunakan ini, jadi misalkan $\lfloor x \rfloor = a$.
Tinjau bahwa untuk $a = 1$, nilai $\lfloor x^2 \rfloor$ yang mungkin adalah 1, 2, atau 3. Memasukkan ke nilai x di atas, diperoleh $x = 1, \dfrac{3}{2}$, dan 2 berturut-turut, namun jelas 2 tidak memenuhi.
Selanjutnya, tinjau untuk $a = 2$, nilai $\lfloor x^2 \rfloor \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Dengan memasukkan untuk masing-masing nilai $\lfloor x^2 \rfloor$, diperoleh bahwa

$$x = 2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, 3$$

berturut-turut, namun $x = 3$ tidak memenuhi kasus ini.
Setelah menguji untuk nilai a yang lain, kita bisa melakukan proses ini secara berulang agar sampai ke solusi ke-100. Namun di sini akan dijelaskan pendekatan dengan penggunaan observasi berikut.
Observasi. Jika $\lfloor x \rfloor = a$, semua nilai $\lfloor x^2 \rfloor$ yang mungkin adalah anggota dari $\{a^2, a^2 + 1, \ldots, a^2 + 2a - 1\}$, dan masing-masing anggota menghasilkan solusi baru.
Bukti. Jika $\lfloor x \rfloor = a$ sama, maka x akan berbeda hanya jika $\lfloor x^2 \rfloor$ berbeda oleh rumus x di atas. Sekarang akan dibuktikan bahwa himpunan itu sudah semua solusi. Tinjau bahwa $\lfloor x^2 \rfloor < (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ yang berarti $\lfloor x^2 \rfloor \le a^2 + 2a$ sebab nilai dari $\lfloor x^2 \rfloor$ pasti bulat. Misalkan $\lfloor x^2 \rfloor = a^2 + k$, untuk $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2a\}$. Maka, berlaku

$$x = \frac{a^2 + (a^2 + k)}{2a} = a + \frac{k}{2a}.$$

Jelas $\lfloor x \rfloor = a$, berarti harus diperiksa nilai dari $\lfloor x^2 \rfloor$, yakni sebagai berikut:

$$\lfloor x^2 \rfloor = \left\lfloor \left(a + \frac{k}{2a}\right)^2 \right\rfloor = \left\lfloor a^2 + 2a \cdot \frac{k}{2a} + \frac{k^2}{4a^2} \right\rfloor = \left\lfloor a^2 + k + \frac{k^2}{4a^2} \right\rfloor,$$

namun perhatikan bahwa $a^2 + k$ bulat, dan $\lfloor x^2 \rfloor = a^2 + k$ jika dan hanya jika $0 \leq \dfrac{k^2}{4a^2} < 1$, yang ekuivalen dengan $0 \leq k^2 < 4a^2 \iff 0 \leq k < 2a$, artinya observasi kita terbukti (yakni, $k = 2a$ tidak menghasilkan solusi valid, dan itu sudah semua solusi). $\square$

Maka, tinjau bahwa untuk setiap nilai a, ada $2a$ solusi, dan karena $a \geq 1$, banyaknya solusi dari $a = 1$ sampai semua $a = n$ adalah $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$. Karena kita ingin mencari suku ke-100nya, $n(n+1) \geq 100$, nilai terkecil untuk n adalah $n = 10$. Jadi semua solusi dari $a = 1$ ke $a = 9$ sudah meliputi 90 solusi, kita hanya harus mencari solusi ke-10 di $a = 10$, atau $\lfloor x^2 \rfloor = 10^2 + 10 - 1 = 109$.

Artinya, $x = \dfrac{209}{20}$, yang berarti $m + n = \boxed{229 \textbf{ (D)}}$. $\square$

> **Komentar.** Menggunakan observasi di atas akan mempermudah pengerjaan soal jika nilai t dari x_t besar sehingga tidak dapat dikuli secara manual, serta meningkatkan kemampuan observasi pada soal.

18. **(R - Kombinatorika, Original, Sedang-sulit)** Rudi ingin mewarnai setiap persegi satuan dari sebuah tabel 4×4 dengan warna merah, hijau, biru atau putih. Namun, ia tidak ingin ada dua persegi satuan yang saling bersentuhan (berbagi setidaknya satu titik sudut yang sama) memiliki warna yang sama. Berapakah banyaknya cara pewarnaan yang mungkin agar keinginan Rudi terpenuhi?

    Catatan. Pewarnaan lain yang diperoleh dari merefleksikan dan/atau merotasikan suatu pewarnaan tertentu dianggap berbeda.

    A. 96 B. 168 C. 24 D. 192

    Solusi. Untuk mempermudah penulisan, misalkan persegi yang diwarnai merah, hijau, biru, dan putih berturut-turut disebut sebagai kotak A, B, C, dan D. Kita kuli berdasarkan susunan warna yang digunakan pada baris pertama dari kotak tersebut.

    Kasus 1. Baris pertama lengkap warnanya: Misalkan kotak-kotaknya secara terurut dari kiri ke kanan adalah 1,2,3,4. Maka, kita tinjau dua kotak tengah di baris kedua. Di sini, jelas kotak kedua dari kiri hanya bisa sama warnanya dengan kotak 4, dan kotak ketiga dari kiri hanya bisa sama warnanya dengan kotak 1. Ini berarti kotak paling kiri di baris kedua haruslah kotak 3, dan kotak paling kanan di baris kedua haruslah kotak 2. Dengan argumen yang serupa, baris ketiga dan keempat adalah 1234 dan 3412 berturut-turut. Artinya setiap pewarnaan unik kotak 1,2,3,4 menyebabkan tepat 1 konfigurasi pewarnaan yang mungkin, sehingga untuk kasus ini ada $4! = 24$ cara pewarnaan.

    Kasus 2. Baris pertama warnanya ada 3: Ada beberapa susunan yang mungkin, tanpa mengurangi keumuman dua kotak di kiri adalah 12, maka ada 2 kemungkinan: 1231, 1232, dan 1213. Maka untuk 1231, ini mustahil karena kedua kotak tengah harus menggunakan warna 4, sementara 1232 mungkin, jika baris keduanya 3414, dan dilanjut dengan 1232 dan 3414 lagi di dua baris terakhir. Jadi ada $\binom{4}{3} \times 3! = 24$ cara pewarnaan. Sementara untuk 1213, kotak ketiga dari kiri dari baris kedua pasti berwarna 4, maka kotak kanannya 2, sehingga baris keduanya 4342, lalu baris ketiga dan keempatnya 1213 dan 4342 berturut-turut. Jadi di kasus ini ada $2 \times \binom{4}{3} \times 3! = 48$ cara pewarnaan.

Kasus 3. Banyaknya warna di baris pertama hanya 2: Gunakan asumsi yang sama, di baris pertama gunakan 1212 saja. Ini satu-satunya susunan yang mungkin. Sementara di baris kedua, 3434 (dan 4343) mungkin. Namun agar tidak terhitung dua kali, kita tidak akan menggunakan 4343 (karena sama dengan 3434 tetapi beda warna). Selanjutnya, tinjau bahwa baris ketiga boleh 1212 atau 2121, dan baris keempat boleh 3434 atau 4343. Jadi ada $4 \times 4! = 96$ cara.

Jadi total ada $24 + 48 + 96 = \boxed{168 \textbf{ (B)}}$ cara pewarnaan.

19. **(K - Teori Bilangan, Original, Sulit)** Suatu hari Haidar sedang bosan dan menghitung nilai dari 24! (24 faktorial). Ia menemukan bahwa ternyata, 24! memiliki 24 digit (dalam basis 10). Tertarik, ia mencoba menuliskan semua pembagi positifnya, lalu mencari semua bilangan *pangkat sempurna* di antaranya. Sebuah bilangan asli disebut bilangan *pangkat sempurna* jika dapat dinyatakan sebagai a^b di mana $a > 1$, $b > 1$, dan keduanya bilangan asli. Berapakah banyaknya bilangan *pangkat sempurna* berbeda yang dapat Haidar temukan?

Catatan. Bentuk $n!$ (n faktorial) adalah hasil perkalian semua bilangan asli dari 1 hingga n, yakni $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.

A. 1031 B. 1011 C. 1000 D. 1042

Solusi. Kita bisa menghitung bahwa faktorisasi prima dari 24! adalah

$$24! = 2^{22} \times 3^{10} \times 5^4 \times 7^3 \times 11^2 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23.$$

Selain itu, definisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari x. Sekarang kita akan menguli banyaknya bilangan *pangkat sempurna* berdasarkan nilai b-nya. Ingat bahwa $n = 1$ bukan solusi.

Kasus 1. $b = 2$ (sekalian $b = 4, 6, 8, 10, \ldots, 22$): Misal p adalah pembagi prima dari suatu pembagi positif d dari 24! maka jelas 13, 17, 19, dan 23 tidak membagi d manapun, untuk $b \geq 2$. Maka kita hanya perlu meninjau kasus-kasus di mana $p = 2, 3, 5, 7$, atau 11. Oleh karena itu, misalkan pembagi positif dari 24!, yakni d dituliskan faktorisasi primanya sebagai berikut:

$$d = 2^{a_2} \times 3^{b_2} \times 5^{c_2} \times 7^{d_2} \times 11^{e_2}.$$

Di sini ada

$$\left(\left\lfloor\frac{22}{2}\right\rfloor+1\right)\times\left(\left\lfloor\frac{10}{2}\right\rfloor+1\right)\times\left(\left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor+1\right)\times\left(\left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor+1\right)\times\left(\left\lfloor\frac{2}{2}\right\rfloor+1\right)-1$$
$$=12\times 6\times 3\times 2\times 2-1=\boxed{863}\text{ kemungkinan.}$$

Kasus 2. $b=3$ (sekalian $b=6,9,12,15,18,21$): Dengan cara yang sama, 11 juga tidak mungkin membagi d (jika d kubik sempurna), maka faktorisasi prima dari d dapat dimisalkan sebagai

$$d=2^{a_3}\times 3^{b_3}\times 5^{c_3}\times 7^{d_3}.$$

Artinya dengan cara yang sama di sini ada $8\times 4\times 2\times 2-1=\boxed{127}$ kemungkinan.

Kasus 3. $b=6$ (sekaligus $b=12,18$): Kasus ini merupakan irisan dari $b=2$ dan $b=3$, yang berarti akan terjadi pengurangan oleh Prinsip Inklusi-Eksklusi. Di sini terdapat $4\times 2-1=7$ kemungkinan.

Kasus 4. $b=5$ (tetapi tidak termasuk $b=10,15,20$): Dengan cara yang sama dengan kasus $b=2$ dan $b=3$, pembagi prima dari d dalam kasus ini hanyalah 2 atau 3. Jadi

$$d=2^{a_5}\times 3^{b_5}$$

tetapi $\gcd(a_5,b_5)=5$. Jadi jika $a_5=0$, $b_5=5$ dan sebaliknya menghasilkan 2 solusi. Jika keduanya taknol, maka hanya terdapat solusi-solusi $6^5,12^5,24^5,48^5,72^5,18^5$, sebanyak 6 solusi tambahan. Jadi di sini ada 8 solusi.

Kasus 5. $b=7$ (namun tidak termasuk $b=14,21$): Dengan cara yang sama, semua yang mungkin adalah $2^7,3^7,6^7,12^7,24^7$ sebanyak 5 solusi.

Kasus 6. $b=11,13,17,19$: Masing-masing 1 kemungkinan, yakni 2^b, jadi 4 solusi di sini.

Oleh karena itu, total terdapat $863+127-7+8+5+4=\boxed{1000\ \textbf{(C)}}$ pembagi positif di antaranya yang merupakan bilangan *pangkat sempurna*. □

> **Komentar.** Untuk memperoleh faktorisasi prima di atas, dapat menggunakan rumus Legendre atau de Polignac. Penerapan hal ini muncul pada soal KSN-P 2021.
> Sebetulnya, akan lebih singkat jika untuk b bukan kelipatan 2, maupun 3 kita menguli faktor-faktor yang dimaksud. Sebelum itu, untuk $b=2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22$ terdapat $863+127-7=983$ solusi. Jadi kita kuli untuk $b=5,7,11,13,17,19$ yakni
>
> $$2^5,3^5,6^5,12^5,24^5,48^5,18^5,72^5,2^7,3^7,6^7,12^7,24^7,2^{11},2^{13},2^{17},2^{19}$$
>
> agar diperoleh total sebesar $983+17=\boxed{1000}$ solusi. Metode pengulian pada solusi di atas adalah dengan meninjau setiap nilai $b=2,3,4,\ldots,22$ dan menginspeksi secara perlahan-lahan mana saja yang terhitung lebih dari sekali, lalu menambahkan secara sistematis.

20. **(K - Aljabar, Original, Sulit)** Definisikan $|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$. Lalu misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$\sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} = 20$$
$$\sqrt{|b-c|} + \sqrt{|c-a|} = 22.$$

Jika nilai maksimum dari $\sqrt{|c-a|} + \sqrt{|a-b|}$ adalah $p + q\sqrt{r}$ di mana p, q bilangan bulat serta r bilangan asli yang tidak habis dibagi oleh kuadrat apapun (selain 1), berapakah nilai dari $p + q + r$?

A. 64 B. 105 C. 72 D. 21

Solusi. Misal $|a-b| = x^2, |b-c| = y^2, |c-a| = z^2$, dan $x, y, z \geq 0$. Dengan mengurangi persamaan 2 dengan 1, diketahui $|c-a| > |a-b| \iff z^2 > x^2$. Maka sistem persamaan yang dimiliki menjadi $x + y = 20, y + z = 22$. Misalkan $x + z = k$. Menyelesaikan dengan eliminasi substitusi, diperoleh

$$(x, y, z) = \left(\frac{k-2}{2}, \frac{42-k}{2}, \frac{k+2}{2}\right). \qquad (\star)$$

Lalu, perhatikan bahwa $(a-b)+(b-c)+(c-a) = 0$ maka tidak mungkin $a-b, b-c, c-a$ bilangan positif atau negatif atau nol semua, sebab tidak memenuhi persamaan soal. Maka akan ada 2 yang negatif dan 1 yang positif atau 2 yang positif dan 1 yang negatif. Jelas hasil penjumlahan yang positif dan negatif menghasilkan sesuatu yang positif pula, serta tinjau bahwa $z^2 > x^2$. Maka hanya ada 2 kasus yang harus diperiksa, yakni $x^2 + y^2 = z^2$ dan $x^2 + z^2 = y^2$ sebab $y^2 + z^2 = x^2$ mustahil ($y^2 \geq 0, z^2 > x^2 \implies y^2 + z^2 = x^2 > x^2$). Maka tinggal meninjau kedua kasus tersebut, serta memastikan bahwa $2 \leq k \leq 42$, oleh syarat x dan y dari $(\star)$.

Kasus 1: $x^2 + y^2 = z^2$**.** Dengan menyubstitusikan $(\star)$ kita memperoleh persamaan

$$\left(\frac{k-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{42-k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k+2}{2}\right)^2$$
$$\frac{k^2 - 4k + 4 + k^2 - 84k + 1764}{4} = \frac{k^2 + 4k + 4}{4}$$
$$\iff k^2 - 92k + 1764 = 0.$$

Dengan rumus kuadrat diperoleh bahwa $k = \dfrac{92 \pm \sqrt{1408}}{2} = 46 \pm 4\sqrt{22}$. Jelas solusi $46 + 4\sqrt{22}$ gagal, namun solusi $46 - 4\sqrt{22}$ memenuhi sebab $4 < 4\sqrt{22} < 44$.

Kasus 2: $x^2 + z^2 = y^2$**.** Dengan menyubstitusikan $(\star)$ kita memperoleh persamaan

$$\left(\frac{k-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{k+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{42-k}{2}\right)^2$$
$$\frac{k^2 - 4k + 4 + k^2 + 4k + 4}{4} = \frac{k^2 - 84k + 1764}{4}$$
$$\iff k^2 + 84k - 1756 = 0.$$

Di sini dengan meninjau koefisiennya, pasti terdapat 1 solusi positif dan negatif. Maka kita akan cari solusi positifnya dengan rumus kuadrat, akan diperoleh bahwa $k = \dfrac{-84+\sqrt{14080}}{2} = -42 + 8\sqrt{55}$. Jadi pada kasus ini solusinya adalah $8\sqrt{55} - 42$, dan ini dalam rentang $2 \le k \le 42$ sebab $44 \le 8\sqrt{55} \le 84$.

Dengan menaksir, $59 < 8\sqrt{55} < 60$ sedangkan $18 < 4\sqrt{22} < 19$ maka $28 > 46 - 4\sqrt{22} > 27$ sedangkan $18 > 8\sqrt{55} - 42 > 17$, maka nilai maksimumnya adalah $46 - 4\sqrt{22}$, sehingga $p + q + r = 46 - 4 + 22 = \boxed{64 \textbf{ (A)}}$. $\square$

> **Komentar.** Sebenarnya observasi bahwa $x^2 + y^2 = z^2$ atau $x^2 + z^2 = y^2$ adalah kunci dari menyelesaikan soal ini, untuk memanfaatkan informasi bahwa $a - b + b - c + c - a = 0$ namun cara pemanfaatannya itulah yang tergolong sulit.

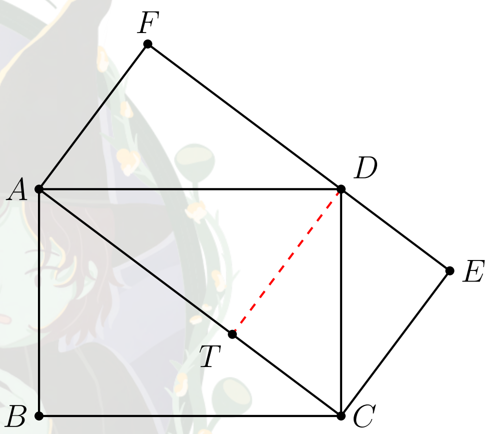
§3.2 Isian Singkat

21. **(K - Teori Bilangan, Modifikasi 2021 OPCAT - AoPS: bobthegod78, Sangat Mudah)** Misalkan $f(x)$ adalah bilangan asli terbesar tanpa menggunakan digit 0 sedemikian sehingga jumlah digit-digitnya adalah x. Nilai dari $f(2) + f(4) + f(6)$ adalah ....

Solusi. Kita ingin memiliki sebanyak-banyaknya digit. Tetapi karena digit yang diperbolehkan hanyalah 1 sampai 9, untuk memaksimalkannya kita maksimalkan banyaknya digit 1. Jadi, $f(2) = 11, f(4) = 1111$, dan $f(6) = 111111$ yang berarti $f(2) + f(4) + f(6) = \boxed{112233}$. □

22. **(K - Geometri, Original, Sangat Mudah)** Persegi panjang $ABCD$ (huruf-hurufnya berurutan) memiliki panjang sisi $AB = 30$ dan $BC = 40$. Titik D terletak pada sisi EF di persegi panjang $ACEF$ (huruf-hurufnya berurutan). Panjang sisi CE adalah ....

Solusi. Tinjau bahwa luas segitiga ADC adalah setengah luas persegi panjang $ACEF$, dan juga setengah luas persegi panjang $ABCD$. Oleh Pythagoras, $AC = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$, yang berarti jika titik T di AC sehingga $DT \perp AC$, berlaku



$$\begin{aligned}[\triangle ADC] &= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600 \\ &= \frac{1}{2} \times AC \times DT = 25DT \\ \iff \quad DT &= 24.\end{aligned}$$

Dan karena $DT \perp AC$, serta $CE \perp AC$, segiempat $CEDT$ persegi panjang (oleh $\angle TCE = \angle CED = 90°$), berarti $DT = CE = \boxed{24}$. □

> **Komentar.** Cara lain adalah juga dengan mendefinisikan titik T, lalu memisalkan panjang $AT = x$ dan $TC = 50 - x$. Di sini, dapat digunakan Pythagoras, yakni sistem $DT^2 + x^2 = 30^2$ dan $DT^2 + (50 - x)^2 = 40^2$, agar diperoleh bahwa $x = 18$, lalu dilanjutkan seperti di atas.

23. **(H - Kombinatorika, Original, Mudah)** Lima tim bertanding pada suatu kompetisi sepak bola, di mana setiap pasang tim bertanding tepat sekali. Pada setiap pertandingan, tim yang menang, seri, dan kalah berturut-turut memperoleh 3, 1, dan 0 poin. Jika total poin yang didapatkan pada kompetisi tersebut tidak melebihi 23, banyaknya konfigurasi dari hasil akhir semua pertandingan yang mungkin adalah ....

Solusi. Pada pertandingan yang seri, total poin yang diperoleh kedua tim adalah 2, sementara jika ada yang menang, total poin yang diperoleh kedua tim adalah 3. Banyaknya permainan adalah $\binom{5}{2} = 10$, maka jika dimisalkan bahwa d dan w adalah banyaknya seri dan kemenangan yang terjadi pada suatu kompetisi, berlaku sistem persamaan

$$w + d = 10, \qquad 3w + 2d \leq 23$$

atau $w \leq 3$. Maka dapat dibagi kasus berdasarkan kemenangan yang terjadi.

Kasus 1. $w = 0$: Hanya 1 kemungkinan.

Kasus 2. $w = 1$: Kita dapat memilih $\binom{10}{1} = 10$ pertandingan dan 2 pemenang, jadi total ada 20 kemungkinan.

Kasus 3. $w = 2$: Kita dapat memilih $\binom{10}{2} = 45$ pasangan pertandingan dan 2^2 pemenang, jadi total ada 180 kemungkinan.

Kasus 4. $w = 3$: Kita dapat memilih $\binom{10}{3} = 120$ tripel pertandingan dan 2^3 pemenang, jadi total ada 960 kemungkinan.

Artinya total ada $1+20+180+960 = \boxed{1161}$ konfigurasi dari hasil akhir semua pertandingan yang mungkin. □

24. **(K - Aljabar, Original, Mudah)** Misalkan $g_1, g_2, \cdots, g_{2022}$ adalah suku-suku berurutan dari barisan geometri dengan rasio positif dan $g_1 \neq 0$. Jika diketahui bahwa barisan tersebut memenuhi persamaan

$$\frac{g_2 + g_4 + g_6 + \cdots + g_{2022}}{g_3 + g_6 + g_9 + \cdots + g_{2022}} = \frac{309}{140},$$

rasio dari barisan tersebut (yakni nilai $\frac{g_2}{g_1}$) adalah $\frac{m}{n}$ di mana m dan n bilangan asli relatif prima. Nilai dari $m + n$ adalah ....

Solusi. Misalkan $\frac{g_{k+1}}{g_k} = r$ untuk semua $k \in \{1, 2, \ldots, 2021\}$. Maka ekspresi soal menjadi

$$\frac{309}{140} = \frac{g_1 r(1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{2020})}{g_1 r^2(1 + r^3 + r^6 + \cdots + r^{2019})} = \frac{r \cdot \frac{r^{2022} - 1}{r^2 - 1}}{r^2 \cdot \frac{r^{2022} - 1}{r^3 - 1}} = \frac{r(r^{2022} - 1)(r^3 - 1)}{r^2(r^{2022} - 1)(r^2 - 1)}$$

$$= \frac{(r-1)(r^2 + r + 1)}{r(r-1)(r+1)} = \frac{r^2 + r + 1}{r^2 + r} = 1 + \frac{1}{r^2 + r}$$

yang berarti $\frac{309}{140} = 1 + \frac{1}{r^2 + r} \iff \frac{140}{169} = r^2 + r \iff r^2 + r - \frac{140}{169} = 0$. Maka

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{560}{169}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{729}{169}}}{2} = \frac{-1 \pm \frac{27}{13}}{2} = \frac{7}{13} \text{ atau } -\frac{20}{13},$$

sehingga jawaban untuk soal ini adalah $m + n = 7 + 13 = \boxed{20}$. □

Solusi alternatif. Misalkan $g_1 + g_2 + \cdots + g_{2022} = S$, dan $\frac{g_{k+1}}{g_k} = r$ untuk semua $k \in \{1, 2, \ldots, 2021\}$. Kita akan mencari ekspresi $g_2 + g_4 + \cdots + g_{2022}$ dan $g_3 + g_6 + \cdots + g_{2022}$ dalam S dan r.

Tahap pertama. Misalkan $g_2 + g_4 + \cdots + g_{2022} = r(g_1 + g_3 + \cdots + g_{2021}) = rA$, maka

$$S = (g_1 + g_3 + \cdots + g_{2021}) + (g_2 + g_4 + \cdots + g_{2022}) = A + rA = A(r+1) \iff r \cdot A = r \cdot \frac{S}{r+1}.$$

Tahap kedua. Misalkan $g_3 + g_6 + g_9 + \cdots + g_{2022} = r^2(g_1 + g_4 + g_7 + \cdots + g_{2020}) = r^2B$, maka $g_2 + g_5 + g_8 + \cdots + g_{2021} = rB$. Ini berarti

$$\begin{aligned} S &= (g_1 + g_4 + g_7 + \cdots + g_{2020}) + (g_2 + g_5 + g_8 + \cdots + g_{2021}) + (g_3 + g_6 + g_9 + \cdots + g_{2022}) \\ &= B + rB + r^2B \iff r^2 \cdot B = r^2 \cdot \frac{S}{r^2 + r + 1}. \end{aligned}$$

Di soal diketahui bahwa

$$\frac{rA}{r^2B} = \frac{309}{149} = \frac{\frac{Sr}{r+1}}{\frac{Sr^2}{r^2+r+1}} = \frac{r(r^2+r+1)}{r^2(r+1)} = \frac{r^2+r+1}{r^2+r} = 1 + \frac{1}{r^2+r}$$

maka dari sini, dapat dilanjutkan dengan cara yang sama seperti solusi pertama untuk memperoleh hasil yang sama. □

25. **(H - Teori Bilangan, Original, Mudah-sedang)** Misalkan setiap huruf menyatakan suatu bilangan cacah satu digit (huruf yang berbeda tidak harus menyatakan bilangan berbeda). Jika $\overline{MAQC}$ bilangan asli yang memenuhi persamaan

$$\overline{MAQC} \times 3 + 100(Q + M) = \overline{CQAC} + 100A,$$

nilai dari $\overline{MAQC}$ adalah ....

Solusi. Tinjau digit satuannya, diketahui $3\overline{C} = \overline{XC}$, maka yang mungkin hanyalah $C = 0$ atau $C = 5$. Tetapi jika $C = 0$ maka $\overline{CQAC}$ diawali dengan digit 0, $\overline{MAQC}$ bukan bilangan asli (sebab $3100M + 200A + 130Q = 100Q + 10A \iff 3100M + 190A + 30Q = 0$, yang berarti $M = A = Q = 0$). Maka $C = 5$.

Lalu perhatikan bahwa persamaan di soal ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} 3000M + 300A + 30Q + 3C + 100Q + 100M &= \overline{CQAC} + 100A \\ \iff 3100M + 200A + 130Q + 3C &= \overline{CQAC} < 6000 \end{aligned}$$

yang berarti $M < 2$, atau $M = 1$. Substitusikan ke soal, agar diperoleh

$$\overline{1AQ5} \times 3 + 100(Q + 1 - A) = \overline{5QA5}$$

$$\iff 100(Q - A) = -100 + 5000 + 100Q + 10A + 5 - 3000 - 300A - 30Q - 15$$

$$\iff 100(Q - A) = 1890 + 70Q - 290A = 1890 + 70(Q - A) - 220A$$

$$\iff 3(Q - A) = 189 - 22A.$$

Jadi karena ruas kiri habis dibagi 3, ruas kanan harus habis dibagi 3. Tinjau bahwa 189 habis dibagi 3 namun 22 tidak habis dibagi 3 sehingga A harus habis dibagi 3. Tinjau bahwa $Q - A \leq 9 - 0 = 9$ sehingga haruslah $3(Q - A) \leq 27$ atau $189 - 22A \leq 27 \iff 22A \geq 162 \implies A \geq 8$, maka $A = 9$. Menyubstitusikan, diperoleh $3(Q - 9) = 189 - 22(9) = -9 \iff Q - 9 = -3 \iff Q = 6$, sehingga $\overline{MAQC} = \boxed{1965}$. □

26. **(K - Aljabar, AoPS Open Mathcounts Nationals Year 2 - AoPS: kred9, Mudah-sedang)** Diketahui a, b, c adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi

$$a + \frac{14}{b} = b + \frac{36}{c} = c + \frac{153}{a} = \frac{720}{a+b+c}.$$

Nilai dari $ab + bc + ca$ adalah ....

Solusi. Menyamakan penyebut, diperoleh persamaan

$$ab + 14 = \frac{720b}{a+b+c}, \quad bc + 36 = \frac{720c}{a+b+c}, \quad ca + 153 = \frac{720a}{a+b+c}.$$

Menjumlahkan semuanya, diperoleh bahwa $ab + bc + ca + 203 = \dfrac{720(a+b+c)}{a+b+c} = 720$, sehingga $ab + bc + ca = 720 - 203 = \boxed{517}$. □

> **Komentar.** Mengharapkan bahwa solusi real positifnya bulat, diperoleh bahwa tripel $(a, b, c) = (17, 14, 9)$ memenuhi.

27. **(K - Kombinatorika, Mock Combo AMC 10 2020 - AoPS: fidgetboss_4000, Sedang)** Lima bilangan bulat positif $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ memenuhi pertidaksamaan $n_5 \leq 32$ dan $n_{k+1} \geq 2n_k$ untuk setiap $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Banyaknya kuintupel terurut $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ yang memenuhi adalah ....

Solusi. Jika $n_1 = 2$, hanya ada 1 solusi, yakni $n_2 = 4, n_3 = 8, n_4 = 16$, dan $n_{32} = 2$. Maka sekarang asumsikan $n_1 = 1$.

Untuk mempermudah pengerjaan, sekarang kita mulai dari belakang - yakni menghitung untuk setiap pilihan n_4, berapakah banyaknya pilihan untuk n_5 yang ada. Jelas $n_4 \geq 8$, maka sekarang kita kuli:

Misalkan $n_4 = k$, maka semua nilai yang mungkin untuk n_5 adalah $2k, 2k+1, \cdots, 32$. Jadi ada $32 - (2k-1) = 33 - 2k$ pilihan untuk setiap nilai n_4 yang mungkin. Untuk mempermudah penulisan, misalkan banyaknya pemilihan nilai n_5 untuk suatu $k = n_4$ adalah d_k, jadi sebut $d_k = 33 - 2k$. Selanjutnya, kita tinjau dari nilai n_3.

Semua nilai n_3 yang mungkin adalah dari 4 sampai 8. Jika p adalah nilai dari n_3, nilai n_4 yang mungkin adalah $2p, 2p+1, \cdots, 16$. Jadi tinggal bagi kasus dari n_2.

Kasus 1. $n_2 = 4$: Maka $n_3 = 8$ jadi ada 1 pilihan untuk n_4, dan $n_4 = 16$ maka di kasus ini ada $d_{16} = 1$ solusi.

Kasus 2. $n_2 = 3$: Maka $n_3 = 6, 7$, atau 8.

Subkasus 1. Jika $n_3 = 8$, seperti argumen di atas, 1 solusi.

Subkasus 2. Jika $n_3 = 7$, maka ada 3 nilai yang mungkin untuk n_4 yakni 14, 15, dan 16, sehingga ada $d_{14} + d_{15} + d_{16} = 9$ solusi.

Subkasus 3. Jika $n_3 = 6$, ada 5 nilai yang mungkin untuk n_4, sehingga ada $d_{12} + d_{13} + (d_{14} + d_{15} + d_{16}) = d_{12} + d_{13} + 9 = 25$ solusi.

Jadi di kasus ini, ada total $1 + 9 + 25 = 35$ solusi.

Kasus 3. $n_2 = 2$: Maka $n_3 = 4, 5, 6, 7$, atau 8. Tetapi jika $n_3 = 6, 7$, atau 8, kita sudah menghitung banyak solusinya, yakni 35. Jadi sekarang hanya tersisa menghitung jika $n_3 = 4$ dan $n_3 = 5$.

Subkasus 1. $n_3 = 5$: Untuk $n_4 = 12$ sampai 16 ada 25 solusi. Jadi ada $d_{10} + d_{11} + 25 = 49$ solusi di subkasus ini.

Subkasus 2. $n_3 = 4$: Untuk $n_4 = 10$ sampai 16 ada 49 solusi, seperti yang telah dikerjakan. Maka di sini ada $d_8 + d_9 + 49 = 81$ solusi.

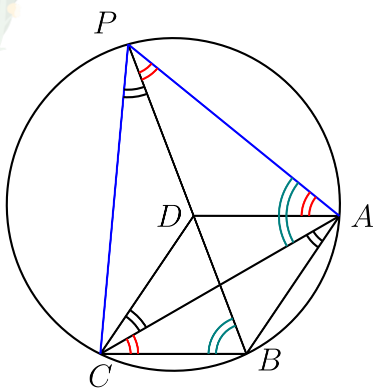
Jadi di kasus ini ada $35 + 49 + 81 = 165$ solusi.

Sehingga menjumlahkan untuk setiap kasus, ada $1 + 1 + 35 + 165 = \boxed{202}$ kuintupel terurut. □

> **Komentar.** Pengulian kasus di sini tergolong rumit. Pada tahap menghitung banyaknya nilai n_4 yang mungkin, kita tidak dapat mengalikan langsung setiap bilangan dengan banyaknya nilai n_5 yang mungkin sebab banyaknya nilai n_5 yang mungkin juga tergantung dengan nilai n_4. Maka anggap itu sebagai penghitungan banyaknya kasus berbeda yang harus dipertimbangkan untuk setiap nilai n_3 yang dikuli. Meskipun rumit, di sini pengulian kasusnya tidak terlalu memerlukan ide yang berat, hanya mengerjakan dari belakang saja. Pengulian kasus dengan menggunakan pohon kasus akan membuatnya agak mustahil, tetapi di saat yang bersamaan memunculkan ide untuk menguli dari belakang, bukan dari depan.

28. **(R - Geometri, Original, Sedang-sulit)** Misalkan ω adalah lingkaran luar segitiga ABC. Di dalam ω, terdapat suatu titik D sehingga $ABCD$ jajar genjang. Garis BD berpotongan dengan ω untuk kedua kalinya di titik P. Jika $AC = 20$, $AP = 18$, dan $CP = 26$, keliling dari jajar genjang $ABCD$ adalah ....

Solusi. Tinjau bahwa $\angle PAC = \angle DBC$ sebab keduanya sudut keliling yang menghadap busur PC dari ω yang sama. Selanjutnya, tinjau bahwa $\angle APB = \angle ACB$ dan



$$\angle CPB = \angle CAB = \angle ACD$$

oleh kesejajaran. Maka $\angle APB + \angle BPC = \angle APC = \angle ACB + \angle ACD = \angle BCD$ yang berarti $\triangle APC \sim \triangle BCD$, jadi berlaku perbandingan

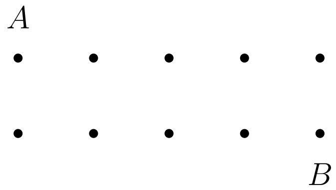
$$AP : PC : CA = BC : CD : DB = 9 : 13 : 10.$$

Jadi memisalkan $BC = 9x$, diperoleh $CD = 13x$ dan $DB = 10x$. Oleh *Parallelogram Side Law*, jumlah kuadrat sisi-sisinya sama dengan jumlah kuadrat kedua diagonalnya (atau $AD^2 + BC^2 = 2(CB^2 + CD^2)$), yakni berlakulah

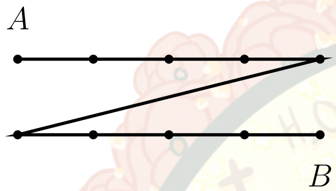
$$20^2 + (10x)^2 = 2\Big((13x)^2 + (9x)^2\Big) \iff 200 + 50x^2 = 250x^2 \iff x^2 = 1 \iff x = 1.$$

Maka $CD = 13$ dan $BC = 9$, sehingga keliling $ABCD = 2(13 + 9) = \boxed{44}$. □

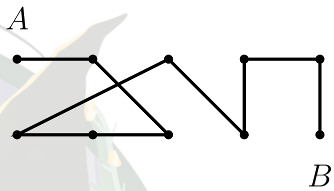
29. **(H - Kombinatorika, Original, Sedang-sulit)** Perhatikan gambar berikut.



Sebuah laba-laba di titik A hendak membuat jaring melalui kesepuluh (kelima titik di baris pertama dan kelima titik di baris kedua segaris), hingga berakhir di titik B. Agar ia hemat jaring dan memiliki jaring yang stabil, ia hanya akan bergerak dengan garis lurus, serta melewati setiap titik tepat sekali. Diketahui bahwa tidak ada jaringnya yang saling berpotongan. Misalnya, contoh jaring yang valid (di kiri) dan tidak valid (di kanan) sebagai berikut.



Jaring yang valid



Jaring yang tidak valid

Banyaknya cara ia dapat membuat jaringnya adalah ....

Solusi. Misalkan titik-titik terletak pada $A = (0, 1)$, lalu titik-titik lain adalah $(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), B = (4, 0)$ dan $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)$. Setelah mencari-cari konfigurasi yang mungkin, diperoleh observasi sebagai berikut.

Observasi 1. Dari titik A, pasti laba-laba ke titik $(1, 1)$ atau $(0, 0)$, dan berakhir di $(4, 1)$ atau $(3, 0)$ sebelum menyambung ke titik B.

Bukti. Untuk memulai, jelas $A = (0, 1)$ tidak bisa disambungkan ke titik manapun selain $(1, 1)$ di baris pertama. Sementara di baris kedua, jika terhubung dengan baris kedua secara langsung di $(b, 0)$ untuk $b \in \{1, 2, 3\}$, maka karena setidaknya salah satu dari titik-titik $(c, 0)$ untuk $c \in \{0, 1, 2\}$ dan $c < b$ harus dihubungkan dengan $(a, 1)$ (di mana $a \geq 1$), yang berarti berpotongan dengan jaring awal. Dengan argumen yang serupa (namun secara simetris, terbalik), jaring juga harus berakhir di kedua titik yang disebutkan. $\square$

Observasi 2. Pada setiap baris, jika $a > b$, agar memperoleh konfigurasi yang valid, titik (a, d) harus dikunjungi setelah titik (b, d) untuk suatu baris $d \in \{0, 1\}$.

Bukti. Perhatikan bahwa jika laba-laba membuat jaring dari $(a, 0)$ ke $(b, 1)$ ataupun sebaliknya, tidak boleh ada jaring yang bisa melewati garis jaring yang dibentuk oleh kedua titik tersebut. Jika kita melewatkan suatu titik dari $(x, 0)$ dengan $x < a$ dan $(y, 1)$ dengan $y < b$, mengingat bahwa kita harus melewati semua 10 titik yang ada, suatu saat kita akan ke titik yang berposisi di $(4, 0)$ yang berarti karena $4 > b$, jaring akan berpotongan (antara di titik, yang berarti suatu titik dilewati dua kali, yang berarti terbentuk jaring tambahan), atau berpotongan di jaring tersebut (jaringnya tidak valid). $\square$

Artinya, jika ingin ke suatu titik $(a, 1)$ dari $(b, 0)$ (atau sebaliknya), semua nilai $(c, 1)$ dan

$(d, 0)$ dengan $c < a$ dan $d < b$ juga sudah harus dilalui. Artinya, banyaknya konfigurasi sama seperti memilih banyaknya titik di baris pertama (yang bukan A) dan memilih banyaknya titik di baris kedua (yang bukan B), namun urutan pemilihan titik sudah ditentukan.
Artinya jawaban untuk soal ini adalah $\frac{8!}{4!4!} = \boxed{70}$. $\square$

30. **(K - Teori Bilangan, Modifikasi SIME 2020 - AoPS: willwin4sure, Sulit)** Suatu hari, Jonathan menuliskan bilangan 1 pada suatu papan, dan ingin menggantinya mengikuti prosedur sebagai berikut. Jika bilangan N pada papan, pada giliran selanjutnya ia akan menggantinya dengan $4N + 1$ atau $8N + 1$. Ia akan berhenti setelah prosedurnya menghasilkan bilangan yang lebih besar sama dengan 2022 (dalam basis 10). Jika M dan m berturut-turut adalah bilangan maksimum dan minimum yang dihasilkan oleh prosedur Jonathan, nilai dari $M - m$ adalah ....

Solusi. Tinjau bahwa sistem ini lebih mudah diwakilkan dengan sistem biner. Sebuah bilangan, $\overline{d_k d_{k-1} d_{k-2} \cdots d_2 d_1 d_0}_n$ menandakan bilangan yang dibaca dalam basis n, dan bernilai

$$\overline{d_k d_{k-1} d_{k-2} \cdots d_2 d_1 d_0}_n = n^k \cdot d_k + n^{k-1} \cdot d_{k-1} + n^{k-2} \cdot d_{k-2} + \cdots + n^2 \cdot d_2 + n \cdot d_1 + d_0$$

dengan $0 \leq d_i \leq n - 1$ untuk setiap $i \in \{0, 1, \cdots, k\}$. Misalkan di awal ia memiliki bilangan 1, yang dalam biner ditulis sebagai 1_2. Maka setelah 1 prosedur, ia dapat menggantinya menjadi 101_2 atau 1001_2 (dalam biner, jadi sesuai definisi di atas, $n = 2$). Jadi setelah setiap prosedur ia seperti menyambungkan/menempelkan 01_2 atau 001_2 pada akhir bilangan (proses ini disebut *concatenation*).
Tinjau bahwa 2022 dalam biner adalah 11111100110_2 yang memiliki 11 digit. Kita akan menghitung minimum yang dapat diperolehnya. Jelas agar minimum, kita ingin banyaknya digit juga minimal. Namun jika digitnya hanya 11, tinjau bahwa 2022 dimulai oleh banyak digit 1, sementara operasi kita memaksa adanya 1 atau 2 digit 0 di antara setiap digit 1. Jadi kita terpaksa membuat 12 digit. Agar minimum, kita buat agar tepat 12 digit, dan digit-digit yang berdempetan (maksudnya yang digit 0 nya hanya 1) dibuat sedekat mungkin dengan ruas paling kanan. Karena setiap operasi menambahkan 2 atau 3 digit dari yang mula-mula hanya menambahkan 1 digit, kita perlu menambahkan 11 digit lagi. Jadi misal p dan q berturut-turut banyaknya 01_2 dan 001_2 yang ditambahkan. Maka harus diselesaikan $2p + 3q = 11$ dengan p sekecil mungkin. Ternyata $q = 3, p = 1$. Jadi dari 1 kita gunakan operasi $8N + 1$ sebanyak 3 kali, dan setelah itu gunakan operasi $4N + 1$ sebanyak sekali. Ini membuat bilangan 100100100101_2 yang bernilai

$$2^{11} + 2^8 + 2^5 + 2^2 + 1 = 2048 + 256 + 32 + 4 + 1 = 2341 = m.$$

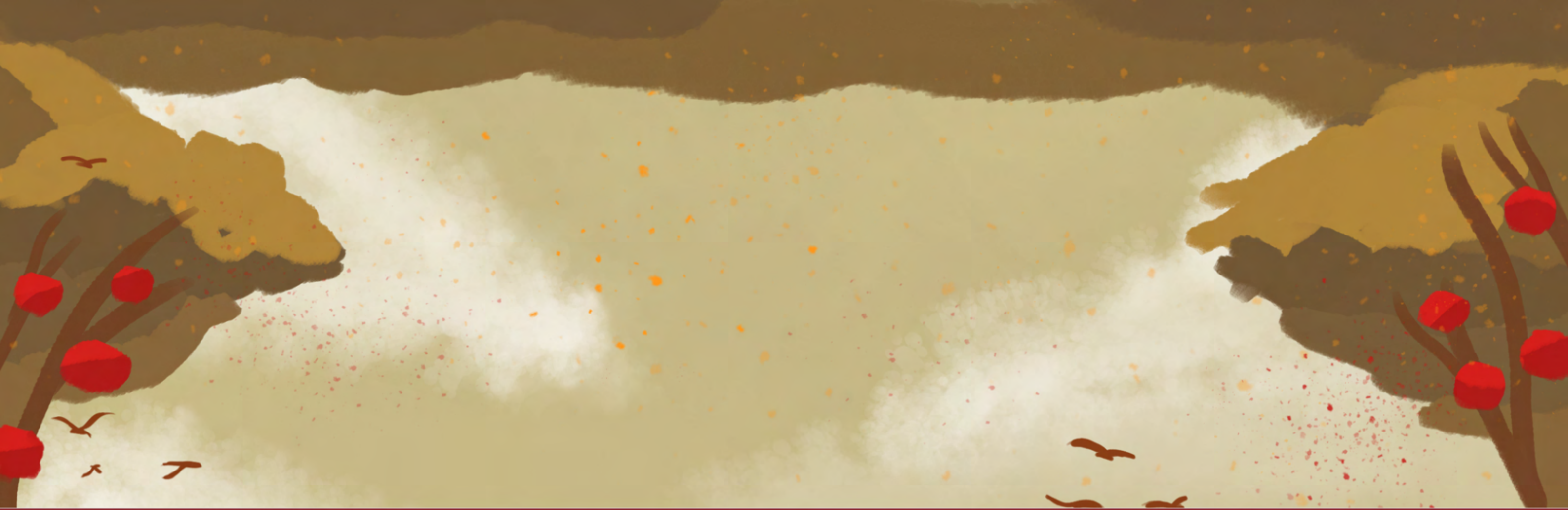
Sementara untuk membuat bilangan terbesar, kita dorong terlebih dahulu agar bilangannya memiliki digit yang sebanyak banyaknya tetapi digitnya tidak lebih dari 11, lalu terakhir dorong dengan sebuah operasi 001_2. Ini bisa dilakukan dengan 5 kali penambahan 01_2

terlebih dahulu (sebab kita perlu 10 digit agar ekspresi yang kita miliki ada 11 digit), dan terakhir gunakan $8N+1$. Demi kelengkapan, sebelum menggunakan $8N+1$ jelas bahwa $10101010101_2 \leq 11111100110_2 = 2022$ jadi operasi masih boleh dilakukan. Maka dari itu diperoleh bilangan 10101010101001_2, yang berarti

$$M = 2^{13} + 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 1 = 8192 + 2048 + 512 + 128 + 32 + 8 + 1 = 10921.$$

Sehingga $M - m = 10921 - 2341 = \boxed{8580}$. $\square$

Komentar. Kesulitan dari soal ini pada umumnya adalah mengenai konsep basis, jika konsep ini tidak terlintas maka soal ini akan kurang dapat diprediksi jawabannya. Namun sepertinya juga bisa dikuli. Jika mengasal mungkin akan mendapatkan $8 \times 2021 + 1 - 2022 = 14147$. Ini tidak diperbolehkan sebab 2021 dan 2022 tidak bisa dibentuk dengan operasi tersebut.



Mathematics Quiz and Competition

Penyisihan 2

4 Naskah Soal

§4.1 Isian Singkat

1. Diberikan segitiga ABC sedemikian sehingga AD garis tingginya terhadap sisi BC dan BE garis bagi dalam sudut $\angle ABC$. Diketahui pula E pada AC dan F titik potong garis AD dengan BE. Jika besar $\angle AFB = \angle BEC$, besar sudut $\angle BAC$ dalam derajat adalah ....

2. Bilangan asli N memiliki sifat bahwa N adalah kelipatan 2022, dan selisih terkecil yang mungkin dari N dengan sebuah bilangan kuadrat sempurna adalah 2022 juga. Nilai terkecil dari N yang mungkin adalah ....

3. Warung Warni buka pada hari Senin sampai Jumat setiap minggunya. Ia dapat menyediakan 3 macam sup, yakni sup ayam, bebek, atau sapi. Namun setiap hari ia menjual tepat satu dari ketiga macam sup yang dapat disediakan. Karena pemilik warung tidak ingin pelanggannya bosan, ia tidak akan menjual sup ayam selama 3 hari berturut-turut. Banyaknya variasi penjualan sup yang mungkin dalam seminggu adalah ....

4. Pada tahun X, usia Aliyah dua kali usianya Beatrice. Sedangkan pada tahun Y, usianya Beatrice dua kali usianya Cindy. Ternyata usia Aliyah pada tahun X sama dengan usia Cindy pada tahun Y. Sekarang usia Aliyah 69 tahun, sedangkan usia Cindy adalah 30 tahun. Usianya Beatrice sekarang, dalam tahun, adalah ....

   Catatan. Asumsikan mereka berulang tahun pada hari yang sama, dan hari ini hari ulang tahun mereka.

5. Diberikan segiempat konveks $ABCD$ dengan panjang $AB = 4, BC = 3$, dan $CD = 12$ serta $\angle ABC = \angle ACD = 90°$. Jika E adalah titik potong AC dengan BD, jarak titik E dengan sisi DA dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ di mana m dan n bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $m + n$ adalah ....

6. Jika a, b, dan c adalah semua akar kompleks dari persamaan $x^3 + 3x - 1 = 0$, nilai dari

$$\frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{b^3 + c^3} + \frac{1}{c^3 + a^3}$$

   dapat dinyatakan sebagai $\frac{m}{n}$, di mana m dan n bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $m + n$ adalah ....

   Catatan. Bilangan kompleks z adalah bilangan yang ditulis sebagai $z = a + bi$, dengan a dan b bilangan real (jika $b = 0$, maka z termasuk real). Di situ, definisi dari i adalah $i = \sqrt{-1}$, atau $i^2 = -1$.

7. Misalkan x dan y adalah bilangan real positif yang memenuhi persamaan $x^2 + y^2 = 1$. Nilai maksimum dari $xy + x$ dapat dinyatakan sebagai $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ di mana a, c bilangan asli relatif prima dan b bilangan asli yang tidak habis dibagi oleh kuadrat apapun selain 1. Nilai dari $a + b + c$ adalah ....

8. Suatu hari, Putri dan Kirana bermain suatu permainan. Putri dan Kirana bermain secara bergiliran, dengan prosedur sebagai berikut:

   - Pertama, Putri memilih suatu faktor n dari 3^{22} yang bernilai lebih dari 2022;
   - Lalu Kirana memilih faktor dari n yang tidak kurang dari $\sqrt{n}$, tetapi lebih kecil daripada n sendiri;
   - Setiap pemain selanjutnya mengambil bilangan yang dipilih pemain sebelumnya, misal d, lalu memilih faktor dari d yang tidak kurang dari $\sqrt{d}$ namun lebih kecil dari d juga.

   Seorang pemain akan kalah jika ia tidak dapat memilih bilangan lagi. Putri akan memiliki strategi kemenangan jika bilangan yang dipilihnya pada giliran pertama adalah 3^a. Hasil penjumlahan semua nilai a yang mungkin adalah ....

9. Sebut $n > 1$ bilangan asli sebagai bilangan *magic* jika kedua sifat berikut terpenuhi:

   - Ketika 1859 (dalam basis 10) dinyatakan dalam basis n, banyaknya digit adalah suatu bilangan genap.
   - Jika 1859 dalam basis n adalah $\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{2k}}$, di mana $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ adalah digit-digitnya, maka $a_i + a_{k+i} = n - 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$.

   Hasil penjumlahan semua bilangan asli *magic* adalah ....

10. Diberikan segitiga ABC dengan titik D di dalamnya yang memenuhi $\angle DBC = \angle DCB = 13^\circ$, $\angle DAC = 34^\circ$, dan $\angle DCA = 73^\circ$. Besar sudut $\angle DAB$ dalam derajat adalah ....

§4.2 Uraian

1. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan-bilangan taknol yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} x+y+z &= 5, \\ x^2y+y^2z+z^2x &= 20, \\ xy^2+yz^2+zx^2 &= 22. \end{aligned}$$

   Hitunglah nilai dari $\dfrac{x^3+y^3+z^3+1}{xyz}$.

2. Diberikan sebuah papan catur 7×7 dengan semua persegi satuan di keempat pojoknya merupakan persegi hitam. Berapakah banyaknya cara meletakkan 6 topi identik pada persegi-persegi satuan yang berwarna sama (semua topi di persegi putih atau semua topi di persegi hitam) sehingga tidak ada pasangan topi yang terletak di baris, ataupun kolom yang sama?

3. Diberikan suatu segitiga lancip ABC dengan $AB < AC$. Definisikan O dan M sebagai titik pusat lingkaran luar $\triangle ABC$ dan titik tengah sisi BC berturut-turut. Titik A' adalah refleksi titik A terhadap O. Lingkaran luar dari $\triangle AA'M$ memotong garis BC lagi di titik $D \neq M$, serta lingkaran luar $\triangle OA'M$ memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ lagi di $E \neq A'$. Buktikan bahwa A, D, E segaris.

4. Misalkan a dan b adalah bilangan real positif sedemikian sehingga $a, A_1, A_2, \cdots, A_k, b$ adalah barisan aritmetika (dengan urutan tersebut) dan $a, G_1, G_2, \cdots, G_k, b$ adalah barisan geometri (dengan urutan tersebut). Buktikan bahwa

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \geq G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$$

   untuk setiap bilangan asli k.

5. Bilangan asli n dikatakan *dermawan* jika terdapat bilangan-bilangan asli $a < b < c$ sedemikian sehingga a habis membagi b dan b habis membagi c yang memenuhi persamaan

$$a+b+c=n.$$

   Tentukan semua bilangan asli yang **tidak** *dermawan*.

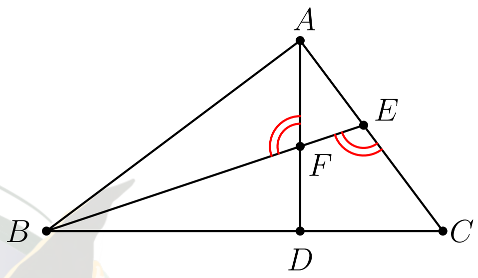
6. Di awal tahun 2022, banyak sekolah yang mulai melakukan PTMT (pembelajaran tatap muka terbatas) yang mana 100% siswa masuk. Namun, setelah dilaksanakan beberapa minggu, banyak sekolah di Jakarta yang kembali menutup sekolahnya dan melanjutkan *online learning* dikarenakan beberapa siswa di antaranya terjangkit Covid-19. Menurutmu, bagaimana cara melakukan penerapan PTMT yang efektif (yakni, kemungkinan penularan Covid-19 paling kecil)? Jelaskan pula alasannya.

5 Kunci Jawaban Isian Singkat

1. 90
2. 4090506
3. 222
4. 56
5. 55
6. 128
7. 10
8. 22
9. 326
10. 17

6 Soal dan Solusi Isian Singkat

1. **(K - Geometri, Original, Mudah)** Diberikan segitiga ABC sedemikian sehingga AD garis tingginya terhadap sisi BC dan BE garis bagi dalam sudut $\angle ABC$. Diketahui pula E pada AC dan F titik potong garis AD dengan BE. Jika besar $\angle AFB = \angle BEC$, besar sudut $\angle BAC$ dalam derajat adalah ....



Solusi. Misalkan $\angle BAC, \angle ABC$, dan $\angle ACB$ adalah A, B, dan C berturut-turut. Maka, $\angle DAC = 90^\circ - C$ dan $\angle DAB = 90^\circ - B$. Lalu, tinjau bahwa

$$\begin{aligned} \angle BEC = 180^\circ - C - \frac{B}{2} &= \angle BFA \\ &= 180^\circ - \angle BAD - \frac{B}{2} \\ \iff C = \angle BAD. \end{aligned}$$

Maka $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = (90^\circ - C) + C = 90^\circ$ jadi jawabannya $\boxed{90}$. $\square$

Solusi alternatif. Definisikan A, B, dan C seperti di atas. Maka karena $\angle AFB = \angle BEC$, pelurus-pelurusnya, yakni $\angle AFE$ dan $\angle AEF$ sama besar juga, yang berarti $\angle AFE = \angle AEF = 45^\circ - \frac{C}{2}$. Maka, meninjau segitiga AFB, diperoleh persamaan

$$\angle ABF + \angle BAF = \angle AFE \iff 90^\circ - \frac{B}{2} = 45^\circ + \frac{C}{2} \iff 90^\circ = B + C$$

yang berarti besar sudut A adalah $180 - 90 = \boxed{90}$ derajat. $\square$

2. **(R - Teori Bilangan, Original, Mudah)** Bilangan asli N memiliki sifat bahwa N adalah kelipatan 2022, dan selisih terkecil yang mungkin dari N dengan sebuah bilangan kuadrat sempurna adalah 2022 juga. Nilai terkecil dari N yang mungkin adalah ....

Solusi. Misalkan $N = 2022k$ di mana k suatu bilangan asli. Maka misal terdapat suatu bilangan kuadrat sempurna p^2 memenuhi $p^2 + 2022 = 2022k$ atau $p^2 - 2022 = 2022k$ yang berarti $p^2 = 2022(k \pm 1)$. Tetapi karena $2022 = 2 \times 3 \times 337$, bilangan terkecil yang menyebabkan $2022(k \pm 1)$ kuadrat sempurna adalah 2022. Mengambil $k + 1 = 2022$ diperoleh $k = 2021$, tetapi ini tidak memenuhi sebab $2022(2021) - 2021 = 2021^2$ sehingga selisih dengan bilangan kuadrat terdekatnya adalah 2021, bukan 2022. Sementara untuk $k - 1 = 2022 \iff k = 2023$, didapat bahwa $2023^2 - N = 2023^2 - 2022(2023) = 2023 > 2022$ jadi bilangan ini memenuhi. Maka $N = \boxed{4090506}$. $\square$

Solusi alternatif. Jelas N bukan bilangan kuadrat sempurna, maka misalkan $x^2 < N < (x+1)^2$ untuk suatu bilangan cacah x. Maka, $N - x^2 \geq 2022$ dan $(x+1)^2 - N \geq 2022$ yang berarti dengan menjumlahkan diperoleh bahwa

$$(x+1)^2 - N + N - x^2 \geq 4044 \iff 2x + 1 \geq 4044 \implies x \geq 2022.$$

Mencoba $x = 2022$, diperoleh $N = 2022^2 + 2022 = \boxed{4090506}$ yang merupakan bilangan kelipatan 2022, sehingga memenuhi. □

3. **(H - Kombinatorika, Original, Mudah-sedang)** Warung Warni buka pada hari Senin sampai Jumat setiap minggunya. Ia dapat menyediakan 3 macam sup, yakni sup ayam, bebek, atau sapi. Namun setiap hari ia menjual tepat satu dari ketiga macam sup yang dapat disediakan. Karena pemilik warung tidak ingin pelanggannya bosan, ia tidak akan menjual sup ayam selama 3 hari berturut-turut. Banyaknya variasi penjualan sup yang mungkin dalam seminggu adalah ....

   Solusi. Dari Senin sampai Jumat terdapat 5 hari. Di sini kita kuli kasus berdasarkan banyaknya hari yang digunakan untuk menjual sup ayam.

   Kasus 1. 0 hari: Maka setiap harinya ada 2 pilihan, bebek atau sapi, sehingga oleh kaidah perkalian terdapat $2^5 = 32$ kemungkinan.

   Kasus 2. 1 hari: Ia dapat menjual sup ayam di salah satu dari 5 hari, dan pada 4 hari yang tersisa dapat menjual bebek atau sapi secara bebas, 2^4 kemungkinan. Jadi untuk kasus ini ada $5 \times 2^4 = 80$ kemungkinan.

   Kasus 3. 2 hari: Ia dapat menjual sup ayam di 2 hari yang bebas dari 5 hari, dan pada hari-hari yang tersisa dapat menjual bebek atau sapi secara bebas, maka di kasus ini ada $\binom{5}{2} \times 2^3 = 10 \times 8 = 80$ kemungkinan.

   Kasus 4. 3 hari: Ia dapat menjual sup ayam di 3 hari bebas, kecuali berturut-turut. Banyaknya pemilihan 3 hari yang mungkin adalah $\binom{5}{3} = 10$, tetapi 3 di antaranya tidak mungkin (hari Senin-Selasa-Rabu, Selasa-Rabu-Kamis, dan Rabu-Kamis-Jumat), jadi hanya 7 kemungkinan penjualan sup ayam. Sementara di 2 hari lain ada 2^2 kemungkinan, maka di kasus ini total terdapat $7 \times 2^2 = 28$ kemungkinan.

   Kasus 5. 4 hari: Ia tidak menjual sup ayam pada hari Rabu saja (jika di hari lain maka akan ada 3 hari yang menjual sup ayam), sebesar 1 kemungkinan penempatan penjualan sup ayam, dan 2 kemungkinan jenis sup di hari Rabu. Maka 2 kemungkinan.

   Kasus 6. 5 hari: Pasti 5 hari berturut-turut, tidak memenuhi.

   Jadi total terdapat $32 + 80 + 80 + 28 + 2 = \boxed{222}$ variasi penjualan sup yang mungkin. □

Solusi alternatif. Jika tidak ada larangan, ada $3^5 = 243$ kemungkinan. Sekarang akan dihitung kasus komplemennya, yakni banyaknya hari yang digunakan untuk tidak menjual sup ayam.

Kasus 1. 0 hari: Maka ada 1 kemungkinan.

Kasus 2. 1 hari: Semua kemungkinan, kecuali di tengah. Jadi ada 4 kemungkinan hari yang tidak menjual sup ayam, dan 2 kemungkinan jenis sup di hari yang tidak menjual sup ayam, maka $4 \times 2 = 8$ kemungkinan.

Kasus 3. 2 hari: Ada 3 kemungkinan, yakni hari Senin-Selasa, Kamis-Jumat, dan Senin-Jumat. Sementara untuk dua hari yang tidak menjual sup ayam, ada 2^2 kemungkinan, jadi total di kasus ini ada $3 \times 2^2 = 12$ kemungkinan.

Jika 3 hari atau lebih tidak menjual sup ayam, maka banyaknya hari yang digunakan menjual sup ayam kurang dari 3, maka tidak ada kasus komplemennya. Sehingga terdapat $1 + 8 + 12 = 21$ kemungkinan yang harus dikeluarkan, atau sebesar $243 - 21 = \boxed{222}$ kemungkinan yang diinginkan. □

4. **(K - Aljabar, Modifikasi Apocalyptic AMC 8 2022 - AoPS: bissue, Mudah-sedang)** Pada tahun X, usia Aliyah dua kali usianya Beatrice. Sedangkan pada tahun Y, usianya Beatrice dua kali usianya Cindy. Ternyata usia Aliyah pada tahun X sama dengan usia Cindy pada tahun Y. Sekarang usia Aliyah 69 tahun, sedangkan usia Cindy adalah 30 tahun. Usianya Beatrice sekarang, dalam tahun, adalah ....

 Catatan. Asumsikan mereka berulang tahun pada hari yang sama, dan hari ini hari ulang tahun mereka.

 Solusi. Misalkan umur Aliyah adalah A, Beatrice adalah B, dan Cindy adalah C. Maka nilai dari $(A - B)$ dan $(B - C)$ konstan (menganggap umur B dan C bisa negatif, jika mereka juga sekian tahun sebelum lahir).

 Sekarang misalkan A_1 adalah usia Aliyah saat ia dua kali usia Beatrice, dan pada waktu yang sama misalkan umur Beatrice B_1. Sementara saat usia Beatrice dua kali usia Cindy, misalkan usia Beatrice adalah B_2. Berlakulah sistem persamaan

$$A - B = A_1 - B_1 = B_1$$
$$B - C = B_2 - A_1 = A_1$$

 Diketahui bahwa $A - C = 39 = (A - B) + (B - C) = B_2 - B_1 = A_1 + B_1$, sementara oleh persamaan pertama berlaku $A_1 = 2B_1$ yang berarti $3B_1 = 39 \iff B_1 = 13$, dan $A_1 = 26$, yang berarti $A - B = 13$ dan $B - C = 26$. Maka jika $A = 69$, $B = \boxed{56}$. □

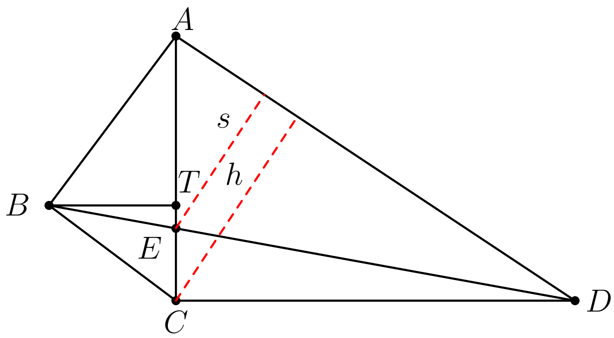
> **Komentar.** Penyusunan sistem persamaan yang tepat untuk soal ini tergolong rumit.

5. **(W - Geometri, Original: Untuk Tryout III untuk KSN-K 2022 Tim MAN 2 Kota Malang, Sedang)** Diberikan segiempat konveks $ABCD$ dengan panjang $AB = 4, BC = 3$, dan

$CD = 12$ serta $\angle ABC = \angle ACD = 90°$. Jika E adalah titik potong AC dengan BD, jarak titik E dengan sisi DA dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ di mana m dan n bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $m + n$ adalah ....

Solusi. Tarik garis tinggi BT di mana T pada AC dan BT tegak lurus AC. Karena $\angle ABC$ siku-siku, $AC = 5$ oleh Pythagoras sehingga

$$AB \times BC = BT \times AC \iff BT = \frac{12}{5}.$$



Karena BT dan CD sama-sama tegak lurus AC, BT sejajar CD yang berarti berlaku $\triangle BTE \sim \triangle DCE$, yang berarti

$$\frac{TB}{CD} = \frac{\frac{12}{5}}{12} = \frac{1}{5} = \frac{TE}{EC}.$$

Oleh Pythagoras, $CT = \frac{9}{5}$ dan dengan memisalkan $x = TE$, diperoleh $x + 5x = \frac{9}{5}$ yang berarti $CE = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$.

Sekarang tinjau bahwa panjang garis tinggi dari C ke sisi AD diperoleh dari persamaan luas $2\triangle ACD = AC \times CD = AD \times h \iff h = \frac{60}{13}$ (di mana $AD = 13$ oleh Pythagoras). Jika s adalah garis tinggi dari E ke AD, oleh kesebangunan (karena kedua garis tinggi tersebut sejajar):

$$\frac{AE}{AC} = \frac{5 - \frac{3}{2}}{5} = \frac{7}{10} = \frac{s}{h} \iff s = \frac{7}{10} \cdot \frac{60}{13} = \frac{42}{13}$$

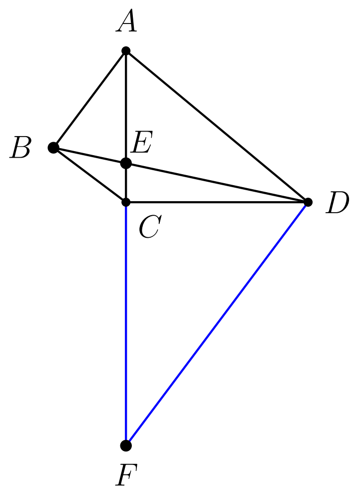
yang berarti $m + n = \boxed{55}$. □

Solusi alternatif. Perpanjang AC hingga F sehingga DF sejajar AB. Maka, $\angle BAE = \angle EFD = \angle CFD$ yang berarti karena $\angle FCD = \angle CBA$, berlaku $\triangle ABC \sim \triangle FCD$. Tetapi oleh $CD = 12$, diperoleh $DF = 20$.

Misalkan $CE = x$, maka karena DF sejajar AB diperoleh $\triangle DEF \sim \triangle BEA$ yang artinya

$$\frac{EF}{EA} = \frac{DF}{AB} = 5 = \frac{16 + x}{5 - x} \iff 9 = 6x \iff x = \frac{3}{2}.$$

Lanjut seperti solusi pertama.



Solusi alternatif. Oleh Pythagoras diperoleh $AC = 5$ dan $AD = 13$. Kita akan menggunakan koordinat Cartesius. Tanpa mengurangi keumuman, misal $C = (0,0)$, $A = (0,5)$, dan $D = (12,0)$. Misalkan pula $B = (p,q)$ di mana $p < 0$ dan $q > 0$. Maka oleh persamaan lingkaran, diperoleh

$$p^2 + q^2 = 9 \text{ dan } p^2 + (q-5)^2 = 16$$

yang berarti dari eliminasi, diperoleh bahwa $-10q+25 = 7 \iff q = \frac{9}{5}$. Menyubstitusikan diperoleh bahwa $p = \pm\frac{12}{5}$ namun karena $ABCD$ konveks, diambillah $p = -\frac{12}{5}$. Maka diperoleh koordinat $B = \left(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

Dari sini, kita juga memperoleh bahwa persamaan garis DB adalah $y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{2}$, maka $E = \left(0, \frac{3}{2}\right)$. Selain itu, persamaan garis DA adalah $5x + 12y - 60 = 0$. Maka jarak titik E dengan DA adalah

$$\left|\frac{5\cdot 0 + 12\cdot \frac{3}{2} - 60}{\sqrt{5^2+12^2}}\right| = \left|\frac{-42}{13}\right| = \frac{42}{13}$$

yang berarti $m + n = \boxed{55}$. □

> **Komentar.** Solusi terakhir menggunakan rumus jarak dari garis, demi variasi. Rumusnya adalah sebagai berikut: Jarak titik (p,q) dari garis $ax + by + c = 0$ adalah
>
> $$\left|\frac{ap + bq + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$

6. **(K - Aljabar, HMMT November 2021 Team Round, Sedang)** Jika a, b, dan c adalah semua akar kompleks dari persamaan $x^3 + 3x - 1 = 0$, nilai dari

$$\frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{b^3+c^3} + \frac{1}{c^3+a^3}$$

dapat dinyatakan sebagai $\frac{m}{n}$, di mana m dan n bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $m + n$ adalah ....

Catatan. Bilangan kompleks z adalah bilangan yang ditulis sebagai $z = a + bi$, dengan a dan b bilangan real (jika $b = 0$, maka z termasuk real). Di situ, definisi dari i adalah $i = \sqrt{-1}$, atau $i^2 = -1$.

Solusi. Tinjau bahwa untuk $x = a, b, c$ berlaku $x^3 = 1 - 3x$, yang berarti $a^3 + b^3 = 2 - 3a - 3b$ dan begitu pula untuk c. Selanjutnya, tinjau bahwa oleh Vieta, $a + b + c = -\frac{0}{1} = 0 \iff c = -a - b$, yang berarti

$$\frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{b^3+c^3} + \frac{1}{c^3+a^3} = \frac{1}{3c+2} + \frac{1}{3a+2} + \frac{1}{3b+2}.$$

Maka dengan menyamakan penyebut,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3c+2}+\frac{1}{3a+2}+\frac{1}{3b+2} &= \frac{(3a+2)(3b+2)+(3b+2)(3c+2)+(3c+2)(3a+2)}{(3a+2)(3b+2)(3c+2)}\\ &= \frac{9ab+9bc+9ca+6a+6b+6b+6c+6c+6a+4+4+4}{27abc+18ab+18bc+18ca+12a+12b+12c+8}\\ &= \frac{9(ab+bc+ca)+12(a+b+c)+12}{27abc+18(ab+bc+ca)+12(a+b+c)+8}\\ &= \frac{9(3)+12(0)+12}{27(1)+18(3)+12(0)+8} = \frac{39}{89},\end{aligned}$$

yang berarti $m+n = \boxed{128}$. □

Solusi alternatif. Menyamakan penyebut pada soal, diperoleh bahwa ekspresi soal sama dengan

$$\frac{a^6+b^6+c^6+3(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)}$$

yang berarti kita harus mencari jumlah simetrik dari pembilang dan penyebut.

Tahap pertama: nilai dari $a^6+b^6+c^6$. Kita akan menggunakan sifat $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)((a+b+c)^2-3(ab+bc+ca))$ berulang kali. Karena $a+b+c=0$, berarti semua faktor yang mengandung $a+b+c$ akan sama dengan nol. Berarti,

$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2 = (a^2+b^2+c^2)((a^2+b^2+c^2)^2-3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)).$$

Nilai dari $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) = 0-2(3) = -6$, sementara $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2-2(a^2bc+b^2ac+c^2ab) = (ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c) = (ab+bc+ca)^2 = 9$. Maka dari itu,

$$a^6+b^6+c^6-3 = (-6)((36-3(9)) = (-6)(9) = -54 \iff a^6+b^6+c^6 = -51.$$

Tahap kedua: nilai dari $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3$. Gunakan lagi sifat di tahap pertama, agar diperoleh bahwa

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-3a^2b^2c^2 = (ab+bc+ca)((ab+bc+ca)^2-3abc(a+b+c)) = 3(9) = 27$$

yang berarti $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-3 = 27 \iff a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 = 30$.
Artinya nilai dari pembilang adalah $-51+3(30) = 39$.
Sementara untuk menghitung penyebut, kita hitung dalam bentuk terfaktor saja, yakni $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)$ yang berarti dengan meninjau bahwa

$$a^3+b^3 = a^3+b^3+c^3-3abc-c^3+3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)-c^3+3 = 3-c^3$$

dan siklisnya, berlaku bahwa penyebutnya sama dengan

$$(3-a^3)(3-b^3)(3-c^3) = 27-9(a^3+b^3+c^3)+3(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)-a^3b^3c^3.$$

Oleh $a^3+b^3+c^3-3abc = 0 \iff a^3+b^3+c^3 = 3abc = 3$, diperoleh bahwa penyebutnya sama dengan $27-9(3)+3(30)-1 = 89$, dan karena $\operatorname{fpb}(39,89) = 1$, pecahannya sudah tidak bisa disederhanakan, yang berarti

$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{c^3+a^3} = \frac{39}{89};$$

maka jawaban soal ini adalah $39 + 89 = \boxed{128}$. $\square$

7. **(H - Aljabar, International Teenager's Mathematics Olympiad 2019 (ITMO 2019), Sedang-sulit)** Misalkan x dan y adalah bilangan real positif yang memenuhi persamaan $x^2+y^2 = 1$. Nilai maksimum dari $xy + x$ dapat dinyatakan sebagai $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$ di mana a, c bilangan asli relatif prima dan b bilangan asli yang tidak habis dibagi oleh kuadrat apapun selain 1. Nilai dari $a + b + c$ adalah ....

   Solusi. Tinjau bahwa $xy+x = x(y+1)$. Misalkan $P = x(y+1)$, maka $P^2 = x^2(y+1)^2 = (1-y^2)(y+1)^2 = (1-y)(y+1)^3$. Oleh AM-GM, tinjau bahwa

   $$\frac{y+1}{3} + \frac{y+1}{3} + \frac{y+1}{3} + (1-y) = 2 \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{27}(y+1)^3(1-y)}$$

   yang ekuivalen dengan $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}P^2} \iff P^2 \leq \dfrac{27}{16}$ yang berarti $P \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, kesamaan dicapai saat $\dfrac{y+1}{3} = 1 - y \iff y = \dfrac{1}{2}$ dan $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\square$

   Solusi alternatif. Misalkan $x = \sin 2a$ dan $y = \cos 2a$. Maka diminta mencari nilai maksimum dari $\sin 2a \cos 2a + \sin 2a = \sin 2a(\cos 2a + 1)$. Oleh identitas

   $$\cos 2a + 1 = \cos^2 a - \sin^2 a + 1 = 2\cos^2 a,$$

   diperoleh bahwa kita diminta mencari nilai maksimum dari $\sin 2a \times 2\cos^2 a = 4 \sin a \cos^3 a$. Tinjau bahwa turunan dari $f(a) = 4 \sin a \cos^3 a$ adalah

   $$f'(a) = 4\cos^4 a - 12 \sin^2 a \cos^2 a = 4\cos^2 a(\cos^2 a - 3\sin^2 a).$$

   Karena fungsinya periodik, maksimum (dan minimum) terjadi di salah satu titik stasioner fungsi, jadi $\cos^2 a = 0$ atau $\cos^2 a = 3\sin^2 a \iff \sin^2 a = \dfrac{1}{4}$ dan $\cos^2 a = \dfrac{3}{4}$. Untuk kesamaan di kasus kedua diperoleh $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, tetapi di kasus pertama diperoleh ekspresinya sama dengan 0, jelas maksimum tidak tercapai, tetapi ingat bahwa syarat soal adalah bahwa x dan y real positif, jadi kasus ini mustahil. $\square$

8. **(K - Kombinatorika, Original, Sedang-sulit)** Suatu hari, Putri dan Kirana bermain suatu permainan. Putri dan Kirana bermain secara bergiliran, dengan prosedur sebagai berikut:

   - Pertama, Putri memilih suatu faktor n dari 3^{22} yang bernilai lebih dari 2022;
   - Lalu Kirana memilih faktor dari n yang tidak kurang dari $\sqrt{n}$, tetapi lebih kecil daripada n sendiri;
   - Setiap pemain selanjutnya mengambil bilangan yang dipilih pemain sebelumnya, misal d, lalu memilih faktor dari d yang tidak kurang dari $\sqrt{d}$ namun lebih kecil dari d juga.

   Seorang pemain akan kalah jika ia tidak dapat memilih bilangan lagi. Putri akan memiliki strategi kemenangan jika bilangan yang dipilihnya pada giliran pertama adalah 3^a. Hasil penjumlahan semua nilai a yang mungkin adalah ....

   Solusi. Tinjau bahwa pada setiap giliran, bilangan yang dipilih Putri dan Kirana berbentuk 3^a, di mana a suatu bilangan asli. Jika suatu pemain memilih $d = 3^a$, maka pemain selanjutnya hanya dapat memilih $3^{\lceil \frac{d}{2} \rceil}$ sampai 3^{a-1}, di mana $\lceil x \rceil$ menandakan bilangan bulat terkecil yang tidak kurang dari x. Sekarang, definisikan posisi "P" sebagai posisi yang memenangkan pemain yang baru saja bergerak, dan posisi "N" sebagai posisi yang memenangkan pemain selanjutnya yang akan bergerak.

   Kita kuli mulai dari $a = 1$, di mana posisinya pasti P, dikarenakan pemain selanjutnya akan kalah karena tidak dapat memilih bilangan lagi. Selanjutnya, jika memperoleh $a = 2$ (atau $d = 2^2$) maka terpaksa untuk memilih $a = 1$ ($d = 2$) sehingga pemain selanjutnya akan menang, maka ditandai dengan N. Lalu untuk $a = 3$, pemain selanjutnya terpaksa memilih $a = 2$, yang akan membuat pemain sebelumnya lagi untuk menang. Namun, untuk $a = 4, 5, 6$ pemain selanjutnya dapat bergerak ke $a = 3$ dan memaksa pemain selanjutnya untuk $a = 2$. Logika seperti ini dilanjutkan hingga $a = 22$, yang disajikan pada tabel berikut:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P/N	P	N	P	N	N	N	P	N	N	N	N

a	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
P/N	N	N	N	P	N	N	N	N	N	N	N

   Artinya, jika Putri ingin menang, ia harus memilih nilai a yang posisinya ditandai dengan P. Mengingat syarat pertama, $3^a > 2022$ jika $a \geq 7$, sehingga semua nilai a yang memenuhi adalah 7 dan 15, maka jawabannya adalah $7 + 15 = \boxed{22}$. □

   > **Komentar.** Pembahasan untuk soal ini menggunakan notasi pada *game theory* standar, yakni posisi N (*N-position*) sebagai posisi yang akan memenangkan pemain selanjutnya (dengan N menandakan *Next player*), dan posisi P (*P-position*) sebagai posisi yang meme-

> nangkan pemain yang baru saja bergerak (dengan P menandakan *Previous player*). Teori umum dari logika seperti ini bersifat rekursif, dengan aturan umum sebagai berikut:
>
> - Posisi kemenangan adalah posisi P.
> - Jika suatu posisi yang ditinggalkan pemain mengakibatkan pemain selanjutnya dapat mencapai posisi P, maka posisi tersebut adalah posisi N.
> - Jika suatu posisi yang ditinggalkan pemain selalu mengakibatkan pemain selanjutnya mencapai posisi N, maka posisi tersebut adalah posisi P.

9. **(R - Teori Bilangan, Original, Sedang-sulit)** Sebut $n > 1$ bilangan asli sebagai bilangan *magic* jika kedua sifat berikut terpenuhi:

   - Ketika 1859 (dalam basis 10) dinyatakan dalam basis n, banyaknya digit adalah suatu bilangan genap.
   - Jika 1859 dalam basis n adalah $\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{2k}}$, di mana $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ adalah digit-digitnya, maka $a_i + a_{k+i} = n - 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$.

   Hasil penjumlahan semua bilangan asli *magic* adalah ....

   Solusi. Oleh definisi basis, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{2k}} &= a_1 \cdot n^{2k-1} + a_2 \cdot n^{2k-2} + a_3 \cdot n^{2k-3} + \cdots + a_{2k} \\
&= a_1 \cdot n^{2k-1} + a_2 \cdot n^{2k-2} + \cdots + a_k \cdot n^k \\
&+ (n-1-a_1) \cdot n^{k-1} + (n-1-a_2) \cdot n^{k-2} + \cdots + (n-1-a_k) \\
&= (n^k - 1)(a_1 \cdot n^{k-1} + a_2 \cdot n^{k-2} + \cdots + a_k) + (n-1)(n^{k-1} + n^{k-2} + \cdots + 1) \\
&= (n^k - 1)(a_1 \cdot n^{k-1} + a_2 \cdot n^{k-2} + \cdots + a_k) + n^k - 1 \\
&= (n^k - 1)(a_1 \cdot n^{k-1} + a_2 \cdot n^{k-2} + \cdots + a_k + 1)
\end{aligned}$$

   yang berarti $n^k - 1 | 1859_{10}$. Tinjau bahwa faktorisasi prima dari $1859 = 11 \times 13^2$ sehingga

$$n^k - 1 | 11 \times 13^2.$$

   Namun, 11×13^2 hanya memiliki 6 faktor, jadi bisa dikuli, yakni

$$n^k - 1 = 1, 11, 13, 143, 169, 1859 \iff n^k = 2, 12, 14, 144, 170, 1860.$$

   Jika $k = 1$, maka hanya ada 2 digit. Artinya, $n^2 > 1859 \implies n \geq 44$. Tersisa 3 bilangan yang harus dicoba untuk $k = 1$, dan 1 bilangan untuk $k = 2$ $(144 = 12^2)$.

   Kasus 1. $k = 1$: Untuk $n = 144$ diperoleh bahwa $a_1 + 1 = 13 \iff a_1 = 12$, jadi ini mungkin. Untuk $n = 170$, diperoleh bahwa $a_1 + 1 = 11 \iff a_1 = 10$, mungkin pula. Dan terakhir, untuk $n = 1860$, ini hanya memiliki 1 digit, jadi tidak memenuhi.

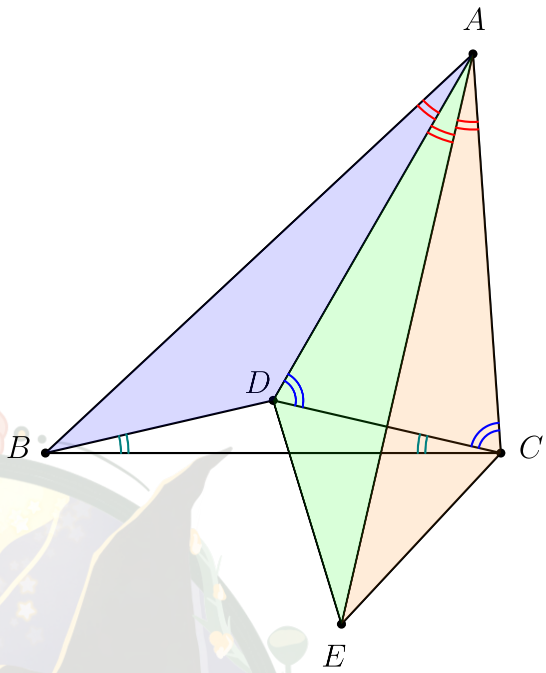
   Kasus 2. $k = 2$: Untuk $n = 12$ dan $k = 2$ diperoleh $n^k = 144$, yang berarti memiliki 4 digit. Jadi $a_1 \cdot 12 + a_2 + 1 = 13 \iff a_1 \cdot 12 + a_2 = 12$ yang berarti $a_1 = 1$ dan $a_2 = 0$ solusi. Maka $n = 12$ juga solusi.

   Artinya hasil penjumlahan semua bilangan *magic* adalah $144 + 170 + 12 = \boxed{326}$. □

10. **(F - Geometri, Original, Sulit)** Diberikan segitiga ABC dengan titik D di dalamnya yang memenuhi $\angle DBC = \angle DCB = 13^\circ$, $\angle DAC = 34^\circ$, dan $\angle DCA = 73^\circ$. Besar sudut $\angle DAB$ dalam derajat adalah ....

Solusi. Tinjau bahwa $\angle BDC = 180^\circ - \angle DBC - \angle DCB = 154^\circ$ dan $\angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle DCA = 73^\circ$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}\angle ADB &= 360^\circ - \angle BDC - \angle CDA\\ &= 360^\circ - 154^\circ - 73^\circ\\ &= 133^\circ.\end{aligned}$$



Perhatikan juga bahwa $DB = DC$ oleh soal, dan $AD = AC$ karena $\angle ADC = \angle ACD = 73^\circ$. Maka oleh motivasi ini, definisikan E sebagai refleksi titik B terhadap AD. Artinya,

$$\angle BDE = 360^\circ - \angle BDA - \angle ADE = 360^\circ - 2\angle ADB = 360^\circ - 2 \times 133^\circ = 94^\circ.$$

Jadi, $\angle EDC = \angle BDC - \angle BDE = 154^\circ - 94^\circ = 60^\circ$ yang berarti karena E refleksi B terhadap garis AD, diperoleh $DB = DE = DC$. Oleh $\angle EDC = 60^\circ$ dengan $DE = DC$, diperoleh CDE segitiga sama sisi, yang berarti $CE = DC = DB$. Tinjau bahwa $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = 73^\circ + 60^\circ = 133^\circ$. Karena $AC = AD$, $CE = DB$, dan $\angle ACE = \angle ADB = 133^\circ$, diperoleh bahwa $\triangle ACE \cong \triangle ADB$. Dan karena $\angle ADE = \angle ADC + \angle CDE = 73^\circ + 60^\circ = 133^\circ$, dengan $ED = DC = DB$ dan $AD = AD$ diperoleh juga $\triangle ADE \cong \triangle ADB$. Artinya,

$$\angle DAC = \angle EAD + \angle EAC = 2\angle EAD = 34^\circ \iff \angle EAD = \angle DAB = \boxed{17^\circ}. \quad \square$$

7 Soal, Solusi dan MS Uraian

1. **(Kenji G - Aljabar, Modifikasi NEMO 2020 Team Round, Mudah-sedang)** Misalkan x, y, dan z adalah bilangan-bilangan taknol yang memenuhi sistem persamaan

$$x + y + z = 5,$$
$$x^2y + y^2z + z^2x = 20,$$
$$xy^2 + yz^2 + zx^2 = 22.$$

Hitunglah nilai dari $\dfrac{x^3 + y^3 + z^3 + 1}{xyz}$.

Solusi 1. Jumlahkan persamaan kedua dan ketiga, agar diperoleh bahwa

$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) = 42 = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$$

yang ekuivalen dengan $5(xy + yz + zx) = 42 + 3xyz$. Selanjutnya, oleh

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)((x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx))$$

diperoleh bahwa oleh $x + y + z = 5$, berlaku

$$\begin{aligned} &5(25 - 3(xy + yz + zx)) = 125 - 15(xy + yz + zx) \\ \iff\ &x^3 + y^3 + z^3 = 125 - 3(42 + 3xyz) + 3xyz \\ \iff\ &x^3 + y^3 + z^3 = -1 - 6xyz \iff \frac{x^3 + y^3 + z^3 + 1}{xyz} = \boxed{-6}. \quad \square \end{aligned}$$

Marking Scheme:

a) Penjumlahan persamaan kedua dan ketiga: 2 poin

b) Pemanfaatan pemfaktoran $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$: 1 poin

c) Substitusi $x + y + z = 5$: 1 poin

d) Penyelesaian solusi dengan jawaban benar: 4 poin

Solusi 2. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (x + y + z)^3 &= 125 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3(x^2y + y^2z + z^2x) + 3(xy^2 + yz^2 + zx^2) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 126, \end{aligned}$$

yang berarti $-1 = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \iff \dfrac{x^3 + y^3 + z^3 + 1}{xyz} = \boxed{-6}$. $\square$

Marking Scheme:

a) Ide mengkubikkan persamaan pertama: 2 poin

b) Penjabaran serta substitusi persamaan kedua dan ketiga: 2 poin

c) Penyelesaian solusi dengan jawaban benar: 4 poin

2. **(Haidar PW - Kombinatorika, Thailand IMC (EMIC) 2008 Team Contest, Sedang)** Diberikan sebuah papan catur 7×7 dengan semua persegi satuan di keempat pojoknya merupakan persegi hitam. Berapakah banyaknya cara meletakkan 6 topi identik pada persegi-persegi satuan yang berwarna sama (semua topi di persegi putih atau semua topi di persegi hitam) sehingga tidak ada pasangan topi yang terletak di baris, ataupun kolom yang sama?

Solusi. Perhatikan bahwa kita harus mempertimbangkan dua warna yang mungkin, yakni hanya menggunakan warna hitam atau hanya menggunakan warna putih.

Kasus 1. Warna putih: Ada 3 baris dan kolom yang memiliki tepat 4 petak putih, serta 4 baris dan kolom yang memiliki tepat 3 petak putih. Kita harus meletakkan 6 topi. Jika (a, b) adalah pasangan bilangan cacah sehingga a adalah banyaknya topi di baris dengan 4 petak putih, dan b banyak topi di baris dengan 3 petak putih. Maka pasangan (a, b) yang mungkin hanyalah $(3, 3)$, mengingat bahwa kita ingin tidak ada kolom maupun baris yang memiliki dua topi.

Untuk pasangan $(3, 3)$: Semua petak di baris 4 petak putih terisi, ada $3! = 6$ cara. Sementara di baris-baris dengan 3 petak putih, hanya 3 dari 4 yang terisi (sebanyak $\binom{4}{3} = 4$ pilihan), dan ada $4 \times 3 \times 2 = 24$ cara. Maka di sini terdapat $6 \times 4 \times 24 = 576$ cara yang mungkin.

Kasus 2. Warna hitam: Ada 4 baris yang memiliki tepat 4 petak hitam, serta 3 baris yang memiliki tepat 3 petak hitam. Kita harus meletakkan 6 topi, maka mendefinisikan (a, b) serupa dengan kasus pertama (yakni a banyaknya topi di baris dengan 4 petak hitam, dan b di baris dengan 3 petak hitam), ada 2 kasus yang mungkin, yakni $(4, 2)$ dan $(3, 3)$.

Untuk pasangan $(4, 2)$: Semua petak di baris 4 petak hitam terisi, ada $4! = 24$ cara. Sementara di baris-baris dengan 3 petak hitam, hanya 2 (dari 3) yang diisi sehingga ada $\binom{3}{2} = 3$ cara, ada $3 \times 2 = 6$ cara. Jadi di sini ada $24 \times 3 \times 6 = 432$ cara yang mungkin.

Untuk pasangan $(3, 3)$: Petak di baris 4 petak hitam hanya 3 yang terisi sehingga ada $\binom{4}{3} = 4$ cara, sehingga terdapat $4 \times 3 \times 2 = 24$ cara, sementara di baris 3 petak hitam, semua terisi, jadi ada $3! = 6$ cara. Jadi di sini ada $4 \times 24 \times 6 = 576$ cara yang mungkin juga.

Maka total terdapat $576 + 432 + 576 = \boxed{1584 \text{ cara}}$. □

Marking Scheme:

a) Pembagian kasus berdasarkan warna: 1 poin

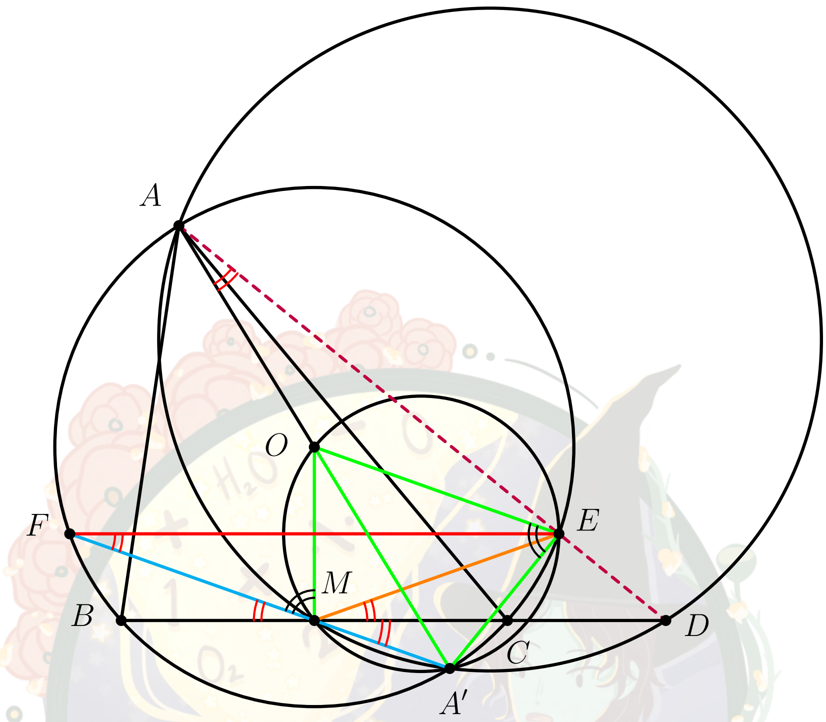
b) Penghitungan kasus putih yang tepat: 2 poin

c) Pembagian dua subkasus hitam: 1 poin

d) Penghitungan per subkasus hitam yang tepat: 1 poin (dari 2 subkasus)

e) Hasil akhir dan penyelesaian yang benar: 2 poin

3. **(Farrel D. Salim - Geometri, Original, Sedang-sulit)** Diberikan suatu segitiga lancip ABC dengan $AB < AC$. Definisikan O dan M sebagai titik pusat lingkaran luar $\triangle ABC$ dan titik tengah sisi BC berturut-turut. Titik A' adalah refleksi titik A terhadap O. Lingkaran luar dari $\triangle AA'M$ memotong garis BC lagi di titik $D \neq M$, serta lingkaran luar $\triangle OA'M$ memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ lagi di $E \neq A'$. Buktikan bahwa A, D, E segaris.



Solusi. Titik E pada busur minor AC sebab $AB < AC$ dan $\triangle ABC$ lancip. Definisikan F sebagai titik potong garis $A'M$ dengan lingkaran luar ABC di mana $F \neq A'$. Tinjau bahwa karena $OMA'E$ siklis,

$$\angle OEA' = 180^\circ - \angle OMA' = \angle OMF$$

dan karena $OA' = OE$ juga maka $\angle OEA' = \angle OA'E = \angle OME$ yang berarti $\angle OMF = \angle OME$. Akibatnya,

$$\angle FMB = 90^\circ - \angle OMF = 90^\circ - \angle OME = \angle EMC.$$

Oleh sudut bertolak belakang dan karena $AMA'D$ siklis,

$$\angle FMB = \angle A'MD = \angle A'AD \quad (\star)$$

yang berarti $\angle DMA' = \angle CMA' = \angle CME$ sehingga $\angle DMA' = \dfrac{\angle EMA'}{2}$. Maka, diperoleh kesamaan berikut:

$$\angle DMA' = \frac{\angle EMA'}{2} = \frac{\angle EOA'}{2} = \angle EFA' = \angle EAA'$$

yang berarti oleh $(\star)$, diperoleh

$$\angle EAA' = \angle DMA' = \angle DA'A$$

yang berarti A, D, E segaris. $\square$

Marking Scheme:

a) Meninjau bahwa $\angle OME = \angle OEA'$ lalu menyimpulkan bahwa $\angle EMC = 90^\circ - \angle OME$ (karena $OM \perp BC$, sebagai garis sumbunya): 2 poin

b) Memperoleh bahwa $\angle DMA' = \dfrac{\angle EMA'}{2}$: 2 poin

c) Penyelesaian yang benar: 4 poin

> **Komentar.** Cara lain dari pembuktian hal di atas adalah dengan meninjau bahwa AA' diameter, sehingga $\angle OEA' = 90^\circ - \angle OEA$. Di situ, artinya $\angle A'MO = 90^\circ + \angle OEA = 90^\circ + \angle OAE$. Selanjutnya tinjau $\angle A'MD = \angle A'MO - \angle OMD = \angle OAE$, sehingga $\angle A'MD = \angle A'AD = \angle OAD = \angle OAE$, maka terbukti. Selain itu, soal ini adalah satu-satunya soal yang tidak diselesaikan oleh siapapun - nilai perolehan tertinggi dari sini adalah 1 poin (memperoleh poin parsial pada indikator pertama).

4. **(Kenji G dan Rafael KY - Aljabar, Original, Sedang-sulit)** Misalkan a dan b adalah bilangan real positif sedemikian sehingga $a, A_1, A_2, \cdots, A_k, b$ adalah barisan aritmetika (dengan urutan tersebut) dan $a, G_1, G_2, \cdots, G_k, b$ adalah barisan geometri (dengan urutan tersebut). Buktikan bahwa
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \geq G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$$
untuk setiap bilangan asli k.

Solusi 1. Misalkan $A_1 - a = d$ dan $\frac{G_1}{a} = r$, maka $A_t = a + td$ dan $G_t = ar^t$ untuk suatu $t \in \{1, 2, \cdots, k+1\}$. Jelas juga bahwa $r \neq 0$. Tinjau bahwa $A_{k+1} = G_{k+1} = b$ sehingga diperoleh persamaan $(\star)$:
$$a + (k+1)d = ar^{k+1} \in \mathbb{R}^+$$
Sekarang kita akan membuktikan bahwa $A_t A_{k+1-t} \geq G_t G_{k+1-t}$ untuk semua $t \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Artinya, kita cukup membuktikan bahwa:
$$\begin{aligned} A_t A_{k+1-t} = (a+td)(a+(k+1-t)d) &\geq G_t G_{k+1-t} \\ \iff a^2 + (k+1)ad + t(k+1-t)d^2 &\geq ar^t \cdot ar^{k+1-t} \\ \iff a(a+(k+1)d) + t(k+1-t)d^2 &\geq a^2 r^{k+1} \\ \overset{\text{oleh } (\star)}{\iff} a^2 r^{k+1} + t(k+1-t)d^2 &\geq a^2 r^{k+1} \\ \iff t(k+1-t)d^2 &\geq 0 \end{aligned}$$
yang benar oleh *Trivial Inequality*, dan karena $t(k+1-t) \geq t > 0$. Lalu tinjau bahwa $A_t \in [a, b] \in \mathbb{R}^+$ sedemikian sehingga $A_1 A_2 \cdots A_k \in \mathbb{R}^+$ juga. Maka mengalikan untuk semua pertidaksamaan untuk $t \in \{1, 2, \cdots, k\}$, diperoleh bahwa
$$\begin{aligned} (A_1 A_2 \cdots A_k)^2 &\geq (G_1 G_2 \cdots G_k)^2 \\ \iff A_1 A_2 \cdots A_k = |A_1 A_2 \cdots A_k| &\geq |G_1 G_2 \cdots G_k| \geq G_1 G_2 \cdots G_k. \quad \square \end{aligned}$$

Marking Scheme:

a) Ide pembuktian $A_t A_{k+1-t} \geq G_t G_{k+1-t}$ untuk $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$: 1 poin

b) Eksekusi pembuktian $A_t A_{k+1-t} \geq G_t G_{k+1-t}$: 2 poin

c) Penyelesaian solusi: 5 poin

Solusi 2. Perhatikan bahwa nilai a, b di sini simetris terhadap pertidaksamaannya jadi tanpa mengurangi keumuman $a \leq b$ (yakni, jika $a > b$, dapat dibalik urutannya dari $a, A_1, A_2, \cdots, b$ yang merupakan barisan turun menjadi $b, A_k, A_{k-1}, \cdots, A_2, A_1, a$ yang merupakan barisan naik; di sini tukar posisi variabel a dan b).
Maka dari itu jika dimisalkan $A_1 - a = d$ dan $\dfrac{G_1}{a} = r$, maka $A_t = a + td$ dan $G_t = ar^t$ untuk suatu $t \in \{1, 2, \cdots, k+1\}$, diperoleh $d \geq 0$ dan $|r| \geq 1$.
Sehingga cukup membuktikan bahwa $\left|\dfrac{A_t}{G_t}\right| \geq 1$ untuk setiap $t \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Pertama tinjau bahwa $A_{k+1} = G_{k+1} = b$ sehingga diperoleh persamaan $(\star)$:

$$a + (k+1)d = ar^{k+1} \iff d = \frac{ar^{k+1} - a}{k+1} = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{k+1} > 0$$

(yang berarti jika r negatif k harus ganjil, dan ini jelas benar jika $a \leq b$ dan a real positif) sehingga oleh $(\star)$ cukup membuktikan bahwa

$$\left|\frac{A_t}{G_t}\right| = \frac{a + td}{a|r|^t} = \frac{a + t \cdot \frac{a(r^{k+1}-1)}{k+1}}{a|r|^t} = \frac{(k+1) + t(r^{k+1} - 1)}{|r|^t(k+1)} \geq 1 \iff \frac{(r^{k+1} - 1)}{k+1} \geq \frac{|r|^t - 1}{t}$$

yang dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa $f(t) = \dfrac{|r|^t - 1}{t}$ takturun untuk $1 \leq t \leq k+1$. Ini dapat dilakukan dengan membuktikan bahwa $f(t+1) \geq f(t)$. Untuk $|r| = 1$, jelas sebab $f(t) = 0$ untuk sembarang t. Sementara untuk $|r| > 1$, harus berlaku

$$\frac{|r|^{t+1} - 1}{t+1} \geq \frac{|r|^t - 1}{t} \iff t|r|^t(|r| - 1) \geq |r|^t - 1 \iff t|r|^t \geq 1 + |r| + |r|^2 + \cdots + |r|^{t-1}$$

dan pertidaksamaan ini benar sebab $|r|^t \geq |r|^p$ untuk semua $0 \leq p \leq t-1$. Maka diperoleh

$$|A_1| \times |A_2| \times \cdots |A_k| = |A_1 A_2 \cdots A_k| \geq |G_1| \times |G_2| \times \cdots \times |G_k| \geq |G_1 G_2 \cdots G_k|$$

sehingga terbukti dengan cara yang sama seperti solusi pertama. □

Marking Scheme:

a) Menemukan bahwa jika $A_1 - a = d$ dan $\dfrac{G_1}{a} = r$, maka berlaku $d = \dfrac{ar^{k+1} - a}{k+1}$: 2 poin

b) Membuktikan bahwa $\left|\dfrac{A_t}{G_t}\right| \geq 1$: 6 poin

Solusi 3. Misalkan $a+(k+1)d=b$, maka $d=\dfrac{b-a}{k+1}$, sehingga

$$A_t = a + \frac{t}{k+1}(b-a) = \frac{a(k+1-t)}{k+1} + \frac{bt}{k+1},$$

sementara $b = a|r|^{k+1} \iff \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{k+1}} = |r|$. Artinya,

$$|G_t| = a \times |r|^t = a \times \left(b^{\frac{1}{k+1}} \cdot a^{\frac{-1}{k+1}}\right)^t = a^{\frac{k+1-t}{k+1}} b^{\frac{t}{k+1}}$$

sehingga oleh AM-GM, diperoleh bahwa $A_t \geq |G_t|$, oleh

$$A_t = \underbrace{\frac{a}{k+1} + \frac{a}{k+1} + \cdots + \frac{a}{k+1}}_{k+1-t \text{ suku}} + \underbrace{\frac{b}{k+1} + \frac{b}{k+1} + \cdots + \frac{b}{k+1}}_{t \text{ suku}} \geq \left(a^{k+1-t}b^t\right)^{\frac{1}{k+1}} = |G_t|$$

sehingga terbukti dengan cara yang sama seperti solusi pertama. □

Marking Scheme:

a) Menemukan bahwa $d = \dfrac{b-a}{k+1}$: 0 poin

b) Menemukan poin a) dan $|r| = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{k+1}}$: 2 poin

c) Eksekusi AM-GM: 4 poin

d) *Finishing*: 2 poin

e) Lupa meninjau kasus di mana r negatif: -2 poin (sebab AM-GM jadi tidak valid, dan substitusi di b) tidak tepat)

Solusi alternatif (oleh IG: @pepemaths). Definisikan r sebagai konstanta real sedemikian sehingga

$$ae^{r(k+1)} = b,$$

atau $r = \dfrac{1}{k+1} \cdot \dfrac{\ln b}{\ln a}$, sehingga berlaku $ae^{ri} = |G_i|$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Selanjutnya, tinjau fungsi $f(x) = ae^{rx}$. Turunan pertama dari $f(x)$ adalah $f'(x) = are^{rx}$ dan turunan keduanya adalah $f''(x) = ar^2e^{rx} > 0$ yang berarti f fungsi konveks. Maka, oleh Ketaksamaan Jensen (atau *Jensen's Inequality*) berlaku

$$\begin{aligned} |G_i| = f(i) = f\left(\frac{(k+1)i + 0(k+1-i)}{k+1}\right) &\leq \frac{1}{k+1}\left[if(k+1) + (k+1-i)f(0)\right] \\ &= \frac{ib + (k+1-i)a}{k+1} = A_i \end{aligned}$$

untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ sehingga terbukti seperti pada solusi pertama. □

> **Komentar.** Permisalannya dibuat seperti di atas (menggunakan konstanta e) agar turunannya tidak repot. Setelah menggambar grafik, solusi ini tergolong intuitif.

5. **(Haidar PW dan Rafael KY - Teori Bilangan, Klasik, Sulit)** Bilangan asli n dikatakan *dermawan* jika terdapat bilangan-bilangan asli $a < b < c$ sedemikian sehingga a habis membagi b dan b habis membagi c yang memenuhi persamaan

$$a + b + c = n.$$

Tentukan semua bilangan asli yang **tidak** *dermawan*.

Solusi. Oleh ketentuan soal, misalkan $b = ap$ dan $c = bq = apq$. Maka

$$a + ap + apq = a(p(q + 1) + 1) = n.$$

Karena $p, q \geq 2$, nilai dari $p(q + 1) + 1 \geq 7$, yang berarti 1,2,3,4,5,6 semuanya tidak *dermawan*. Untuk $p = 2$, diperoleh bahwa $n = 2(q + 1) + 1 \geq 7$ semua dapat dicapai, yakni semua bilangan ganjil 7 ke atas merupakan bilangan *dermawan* (yakni dengan menggunakan $a = 1$).

Maka dari itu hanya tersisa kasus genap $2^k, 2^k \times 3$, dan $2^k \times 5$ untuk k asli, sebab jika $p \geq 7$ di mana p ganjil, oleh konstruksi sebelumnya gunakan $a = 2^k$ daripada $a = 1$.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa $pq + p + 1 = 16$ adalah pangkat dua terkecil yang dapat dicapai, sementara $pq+p+1 = 8$ mustahil. Tinjau bahwa $pq+p+1 = 16 \iff p(q+1) = 15$, jadi $p = 3$ dan $q = 4$ solusi. Sementara $pq + p + 1 = 8 \iff p(q + 1) = 7$ namun 7 prima, jadi tidak dapat ditemukan pasangan asli $p, (q + 1)$ yang sesuai (bahkan $q + 1 \geq 3$, tetapi pernyataan ini menyatakan bahwa untuk $q + 1 \geq 2$ tidak ada solusi).

Jadi $2^k \times n$ untuk semua $k \geq 4$ dapat dicapai, jadi yang harus diperiksa hanyalah 10,12,20,8,24,40.

Tinjau bahwa $a + b + c = 10$ mungkin, yakni dengan $a = 1$, dan $(p, q) = (3, 2)$ dan ini berarti $a + b + c = 20$ dan $a + b + c = 40$ juga mungkin, oleh pasangan $(p, q) = (3, 2)$ serta $a = 2$ dan $a = 4$ berturut-turut.

Kesamaan $a + b + c = 8$ mustahil (sebab $pq + p + 1 = 8$ tidak ada solusi, dan jika $a \geq 2$, $n \geq 14$). Selain itu $a + b + c = 12$ mustahil juga (sebab $a \leq \frac{12}{7}$ yang berarti $a = 1$ maka haruslah $pq + p = 11$, menggunakan argumen prima juga). Terakhir, kesamaan $a + b + c = 24$ mustahil (sebab $a \leq \frac{24}{7}$ jadi $a = 1, 2, 3$, tetapi jika $a = 2$ atau $a = 3$, maka haruslah $pq + p + 1$ bernilai 12 dan 8 berturut-turut, yang mustahil). Ini berarti $a = 1$, maka $pq + p + 1 = 24 \iff p(q + 1) = 23$, mustahil juga oleh argumen yang sama.

Maka terbukti bahwa 8,12,24 semua yang mustahil dan himpunan ini lengkap.

Jadi semua bilangan asli yang tidak *dermawan* adalah $\boxed{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 24}$. □

Marking Scheme:

a) Membuktikan bahwa untuk semua bilangan ganjil $n \geq 7$, bilangannya *dermawan*: 2 poin

b) Pembagian kasus $2^k, 2^k \times 3$, dan $2^k \times 5$: 1 poin

c) Menunjukkan 2^k di mana $k \geq 4$ bilangan *dermawan*: 1 poin

d) Hasil akhir dan penyelesaian yang benar: 4 poin

> **Komentar.** Soal ini dirumuskan secara original, namun tidak lama setelah perumusan dan pengerjaan soal ini, ternyata soal ini sudah diketahui dalam komunitas Matematika secara luas. Contoh post Art of Problem Solving yang bersangkutan adalah sebagai berikut: https://artofproblemsolving.com/community/c4t177f4h2746711_prove_that_for_any_integer_ngt24_there_exist_positive_integers_altbltc_such_th

6. **(Tim Soal - Subjektif, Klasik)** Di awal tahun 2022, banyak sekolah yang mulai melakukan PTMT (pembelajaran tatap muka terbatas) yang mana 100% siswa masuk. Namun, setelah dilaksanakan beberapa minggu, banyak sekolah di Jakarta yang kembali menutup sekolahnya dan melanjutkan *online learning* dikarenakan beberapa siswa di antaranya terjangkit Covid-19. Menurutmu, bagaimana cara melakukan penerapan PTMT yang efektif (yakni, kemungkinan penularan Covid-19 paling kecil)? Jelaskan pula alasannya.

   Marking Scheme:

   a) Konten (2 poin): Konten dapat dicapai dan lumayan efektif (2 poin), Konten antara dapat dicapai namun tidak terlalu efektif, atau tidak dapat dicapai dan efektif (1 poin). Konten tidak dapat dicapai dan tidak efektif (0 poin)

   b) Penjelasan (6 poin): Penjelasan yang diberikan jelas dan mendukung ide yang diberikan (5-6 poin), penjelasan yang diberikan tidak terlalu jelas (*somewhat unclear*), namun masih mendukung ide yang dipanjatkan (3-4 poin), penjelasan yang diberikan tidak relevan dengan ide yang dipanjatkan (1-2 poin).

   Perolehan **0 poin** hanya dapat diberikan jika tulisan yang dituliskan **tidak masuk akal**, atau **pernyataan soal hanya disalin**, atau, **soal ini tidak dijawab** (*no response was given*).

CREDITS

CREATED BY
Aleeza Amanda Qynanti
Amara Khairunnisa Dinata
Fikri Fauzan Rahman
Haidar Prayata Wirasana
Hilmi Izzuddin Rayyan
Kenji Gunawan
Nisrina Fathiyya Nugraha
Rafael Kristoforus Yanto
Wildan Bagus Wicakson
Yasmin Jihan

GRAPHICS BY
Ferdinand
Kenji Gunawan
Wildan Bagus Wicaksono

EVENT ORGANIZERS
Amara Khairunnisa Dinata
Haidar Prayata Wirasana
Hilmi Izzuddin Rayyan

LIAISON OFFICERS
Nadine Gabe Ulina Sianturi
Nasywa Hanan Huriyah
Nisrina Fathiyya Nugraha

PROBLEM PROPOSERS
Amara Khairunnisa Dinata
Farrel Dwireswara Salim
Haidar Prayata Wirasana
Irfan Hanif Yamashita
Kenji Gunawan
M Rayhan Khayru Amri
Muhammad Ridho
Petrus Deon Pranoto
Rafael Kristoforus Yanto
Rizky Rajendra Anantadewa
Wildan Bagus Wicaksono

JUDGE
Tahta Aulia Kusuma Arifin

TESTSOLVERS
Amara Khairunnisa Dinata
Andrew Daniel Janong
Arshanada Putranta
Evelyn Lianto
Haidar Prayata Wirasana
Ignatius Kent Hastu
Kenji Gunawan
M Nadhif Haryadipta
M Rayhan Khayru Amri
Muhammad Ridho
Natano Juditya Sihan
Petrus Deon Pranoto
Rafael Kristoforus Yanto
Rizky Rajendra Anantadewa
Seno Soebekti
Valentio Iverson
Wildan Bagus Wicaksono

ESSAY JURORS
Amara Khairunnisa Dinata
Haidar Prayata Wirasana
Hilmi Izzuddin Rayyan
Kenji Gunawan
M Ilham Al-Farisi
Nafi Suling
Rizky Rajendra Anantadewa
Tahta Aulia Kusuma Arifin

MODULE CREATORS
Amara Khairunnisa Dinata
Hilmi Izzuddin Rayyan

GAME CREATORS
Amara Khairunnisa Dinata
Haidar Prayata Wirasana
Hilmi Izzuddin Rayyan

MODERATORS
Haidar Prayata Wirasana
Nadine Gabe Ulina Sianturi
Nasywa Hanan Huriyah
Nisrina Fathiyya Nugraha

POSTER BY
Vivi Alvianita

BOARD MASTERS
Ahmad Zaky Arivianto
Athar Gibran
Deswita Amanda Putri
Eissen Hower Pratama
Irfan Aryanto
M Nadhif Arfa R
Muhammad Ghifari
Muhammad Rizki
Reva Aurelia Herdianto
Yasmin Jihan

GAME MASTERS
Abu Dzar Al Ghifari
Adella Nanda
Agnes Oktaviani Silaban
Alban Mulky Adiguna T
Aulia Putri Kusuma
Azra Aqila Aulia
Daffa Axel Kautsar R
Desy Karunia Hutari
Dian Novita
Dinda Yuviarahmah
Ghazanfar Wangsa M
Haliza Arfa
Ivanna Febrinta Keliat
Kyla Zakira Sophiena
M Aksal Prima Putra R
M Fathan Fahrezi
M Fathan Khan
M Rafly Afid
Meisely Fathiya Ramdi
Nadine Gabe Ulina Sianturi
Nasywa Hanan Huriyah
Nisrina Fathiyya Nugraha
Salwa Shabrina
Satria Pangestu Bahari
Shifa Kayana Fidella
Syaqina Oktavia Rizha
Tertia Zayanni S
Zakha Ilham

CREDITS

INVIGILATORS

Abu Dzar Al-Ghifari
Achmad Fauzi
Adea Zahwa
Aditya Al Farizi
Ahmad Carleone N
Aishya Ristya
Aldino Putra Riyanto
Alifia Nabila
Alshandra Aurelya W
Alya Syiffa Maharani
Angelina Putri. P
Aryuni Fajriah
Aswal Ikraam R
Athar Gibran
Aulya Rachma
Azizah Bonitha
Azra Aqila Aulia
Buege Mahara Putra
Cantik Arsy
Cynthia Ling Adi Sutrisna
Daffa Axel Kautsar R
Dian Novita
Dinda Yuviarrahmah
Dzakiyyatunnisa Asmarani
Eva Lizbeth
Fauzan Akmal Rabbani
Grace Immanuela Bakker
Ihdina Hilma
Inayah Saffanah Asri
Indi Alkaida
Jihan Saputri
Kayla Khansarafa TPP
Khansa Valencia
Khoirun Nisa
Lila Mutiara Kasbi
Lutfiah Rahmadini Fitria
Lyon Andoly P. S
M Aqila Putrawisesa
M Ilham Akbar
M Nabiel Shafa
M Nadhif Arfa R
M Rafly Afid
M Syahreza Trihatmanto
Muhammad Ghifari
Muti'ah
Mutiara Abdullah H.
Nabil Rafif Muflih
Najwa Akifa
Namia Tsabita Balqis
Nashwa Ammara
Nayla Hafshah Ghina
Nisrina Khansa Izzati
Qinthary S. Lovely M.
Rakha Putra
Rifa Anindya
Rizka Nadyne Puteri
Salman Al-Farisi
Valentino Goksir
Vivi Alvianita
Yasmin Jihan
Zaky Ziad Hidane

SUPPORTED BY

SMAN UNGGULAN M.H. THAMRIN
SOBAT ARIN — MATH IS FUN
lajur STUDY GROUP