DILARANG
mengupload/ mendiskusikan soal
Penyisihan LuMaT SMP ini pada
forum-forum online sebelum tanggal
10 April 2021.

Lomba Unik Matematika ala Tobi

Penyisihan LuMaT SMP

3 April 2022

Instruksi

1. Naskah soal penyisihan LuMaT SMP terdiri dari 12 ISIAN and 3 ESAI, yang terbagi dalam LIMA halaman soal, termasuk halaman ini. Soal tidak diurut berdasarkan tingkat kesulitan. Keterangan tambahan bagi yang perlu dilampirkan di halaman terakhir.
2. Peserta dilarang menggunakan kalkulator dan alat bantu komputasi elektronik lainnya (wolframalpha, geogebra, swp).
3. Nilai maksimal setiap soal **isian** adalah 3 **poin**, dan **esai** adalah 10 **poin**. Jawaban yang tidak lengkap atau tidak sesuai permintaan soal tidak akan diberi nilai maksimal. Tidak ada nilai negatif untuk jawaban yang salah. Total nilai maksimal yang mungkin didapat peserta adalah 66 **poin**.
4. Untuk soal isian, solusi wajib dikumpulkan dalam **Lembar Jawab Isian**. Untuk soal esai, peserta dapat mengirimkan foto /dokumen solusi (dalam bentuk pdf/jpg/doc). Pastikan kejelasan tulisan, inisial, no. soal, halaman dan total halaman tertera pada setiap Lembar Jawab Esai.
5. Waktu yang diperkenankan untuk mencoba seluruh soal adalah 270 **menit**. Kumpulkan seluruh berkas jawaban sebelum jam 1700 WIB di

   tinyurl.com/jawablumat

   Tidak ada penambahan waktu setelah 1700 WIB.

Isian

1. Ada berapa banyak bilangan bulat positif N, dengan $N \leq 100$, dan N memiliki tepat tiga faktor positif?

2. Carilah semua solusi real (x, y) dengan sifat

$$x - \frac{1}{x} = y \quad \text{dan} \quad y - \frac{1}{y} = x.$$

3. Carilah banyaknya solusi bulat $0 \leq a, b, c, d, e \leq 2022$ yang memenuhi

$$(6!)^a = (5!)^b (4!)^c (3!)^d (2!)^e.$$

4. Ada titik P di dalam persegi $ABCD$ sehingga $\angle DAP = 75^\circ$, $\angle CPB = 120^\circ$. Tentukan besar sudut $\angle ABP$.

5. Himpunan S terdiri dari lima bilangan bulat dua-digit (yakni, $10 \leq N \leq 99$) dan memenuhi:

   Setiap angka dari $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ muncul pada digit-digit penyusun anggota S.

   Hitunglah banyaknya himpunan S yang demikian.

---

6. Diketahui $(x, y) = (1, 3)$ dan $(3, 3)$ adalah solusi dari persamaan

$$p(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by = 0.$$

   Carilah nilai minimal dari $ax_0 + by_0$ dimana (x_0, y_0) adalah solusi real dari $p(x, y) = 0$.

---

7. Kedua diagonal AC dan BD dari segiempat talibusur $ABCD$ berpotongan di P. Ada titik E di segmen AP sehingga $BE//CD$; dan panjang $AE = 5$, $EP = 4$, $PC = 3$. Cari panjang PD.

---

8. Diberikan barisan $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dengan $a_1 = a_2 = 1$ dan untuk $k \geq 3$,

$$a_k = (a_{k-1})^{a_{k-2}} + 1.$$

   Carilah digit terakhir dari a_{2022}.

---

9. Tentukan banyaknya solusi bulat positif (a,b) yang memenuhi
$$ab + \mathrm{FPB}(a,b) = 2022.$$

10. Jarak sepasang-sepasang antara empat titik di bidang adalah $1,2,3,4,5,x$. Carilah banyaknya kemungkinan nilai x.

11. Carilah bilangan asli terkecil S, sehingga
$$\frac{1}{4^{100}+2^{100}+1} + \frac{1}{4^{99}+2^{99}+1} + \cdots + \frac{1}{4^{-100}+2^{-100}+1} \leq S.$$

12. Di dalam kotak harta karun ada 25 koin identik, kecuali beratnya masing-masing berbeda. Suatu mesin dapat menerima lima koin dan memberitahu urutan kelima koin tersebut dari paling ringan ke paling berat. Berapa kali paling sedikit mesin tersebut dapat digunakan, agar kita selalu yakin mengetahui koin-koin yang mana adalah lima koin terberat, dan urutan berat lima koin tersebut?

Esai

1. Carilah semua bilangan bulat positif N dengan sifat: N ditambah dengan semua digit penyusunnya adalah 2022.

2. Di dalam lingkaran Γ, lingkaran Γ_1 dan lingkaran Γ_2 menyinggung Γ di titik P dan Q, $P \neq Q$. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 juga bersinggungan di R. Garis PR memotong Γ di $S \neq P$ dan garis QR memotong Γ di $T \neq Q$. Buktikan bahwa ST diameter Γ.

3. Diberikan n bilangan real taknol $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dengan sifat: untuk setiap tripel index $1 \leq i < j < k \leq n$, $|x_i + x_j + x_k| \leq 1$. Buktikan bahwa ketaksamaan

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}\right)^3 \leq 2^n \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{9|x_i|^3}\right)$$

berlaku untuk setiap permutasi $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$.

$\sim * \circ \oplus \ominus \otimes \oslash \odot$ akhir dari soal $\odot \oslash \otimes \oplus \circ * \sim$