Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Juli 2019

26 Juli – 29 Juli 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
11. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
12. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
13. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
14. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
15. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
16. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.

(d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

(e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

17. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

19. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

20. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

21. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

22. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Berapakah dua digit terahir dari A dimana

$$A = (1 \times 2 \times 3) + (2 \times 3 \times 4) + \cdots + (18 \times 19 \times 20)?$$

2. Diketahui bahwa x merupakan bilangan real sedemikian hingga jajargenjang $ABCD$ dengan $A(5,12), B(0,0)$, dan $C(15,x)$ memiliki luas 300 satuan luas. Tentukan jumlah semua nilai x yang memenuhi.

3. Akar-akar persamaan kuadrat $4x^2+ax+b=0$ adalah tiga kali akar-akar persamaan kuadrat $2x^2+cx+d=0$ Tentukan nilai dari $\frac{b}{d}$.

4. Bobby ingin membuat sandi untuk akun KTOM-nya yang mengandung 12 digit dan semuanya tersusun dari angka 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, di mana setiap digit digunakan paling tidak sekali. Bobby juga menginginkan agar digit-digit penyusun sandinya merupakan barisan bilangan tidak turun. Tentukan banyaknya sandi yang mungkin dibuat Bobby.

5. Tentukan jumlah semua kemungkinan $x-y$, di mana x dan y adalah bilangan asli yang memenuhi persamaan $x^2 - xy + 2x - 3y = 20$.

6. Andi dan Budi sedang bermain. Terdapat sebuah kantong yang berisi 20162016 kelereng merah dan 2017 kelereng biru. Andi mengambil sejumlah kelereng secara acak dari kantong tersebut. Andi menang jika banyaknya kelereng merah yang tersisa lebih banyak dari banyaknya kelereng biru; sebaliknya, Budi menang. Untuk memaksimalkan peluang Andi menang, tentukan jumlah kelereng yang harus diambilnya.

7. Segitiga ABC mempunyai titik berat G. Definisikan G_A, G_B, G_C ialah titik berat segitiga GBC, GCA, GAB. Jika luas segitiga ABC ialah 378, maka berapa luas $G_AG_BG_C$?

8. Diketahui terdapat sebuah polinom monik P berderajat 4 dengan koefisien real, sedemikian sehingga $P(2013) = -2, P(2014) = 4, P(2015) = 8, P(2016) = 16$. Tentukan nilai dari P(2017).

9. Misalkan $ABCD$ adalah segiempat tali busur dengan $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 5$, dan $DA = 10$. Misalkan K, T, dan O adalah proyeksi titik D kepada garis AB, BC, dan CA, berturut-turut. Apabila $\frac{KT}{TO} = \frac{m}{n}$ untuk bilangan asli m dan n yang relatif prima, hitunglah nilai dari $100m + n$.

10. Ada 52 titik berbeda, $P_1, P_2, \ldots, P_{52}$ di bidang Kartesius. Setiap 2 titik dihubungkan oleh segmen. Apabila titik tengah semua segmen diberi warna biru, tentukan minimum banyaknya titik biru berbeda.

11. Definisikan barisan a_n dan b_n sebagai berikut : $a_1 = a_2 = b_2 = 1$ dan $b_1 = 0$.dan untuk $n \geq 3$,
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ dan } b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$
Misalkan $P_n(x) = x^2 + s_n x + t_n$ ialah polinom yang akar-akarnya ialah a_n dan b_n untuk setiap bilangan asli n. Misalkan M dan m ialah bilangan asli k terbesar dan terkecil sehingga
$$s_k \left(\sqrt{s_k^2 - 4t_k + 1} \right) + t_k + 100 > 0.$$
Tentukan nilai $m + M$.

12. Misalkan S adalah himpunan semua bilangan asli n yang kurang dari 2017 sehingga tidak ada bilangan asli a, b, c yang memenuhi
$$n = \text{KPK}(a, b) + \text{KPK}(b, c) + \text{KPK}(c, a).$$
Tentukan hasil penjumlahan semua anggota S.

13. Terdapat 100 kartu di meja yang dibaliknya tertulis sebuah bilangan bulat dan berbeda-beda untuk setiap kartu. A dan B bermain sebuah permainan. Pada setiap langkah, B dapat menunjuk 3 kartu yang berbeda di meja, dan A akan mengatakan sebuah bilangan bulat, yang merupakan nilai salah satu dari ketiga kartu tersebut (B tidak tahu yang mana). B dapat melakukan langkah tersebut berkali-kali. Berapa maksimal kartu yang pasti dapat ditebak B dengan benar?

14. Misalkan s dan t adalah bilangan real yang memenuhi $s^2 t(t + 4) = -1$. Jika $V = \frac{t^2}{4} + t + \frac{t}{4s} + \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s^2} + 1$, tentukan jumlah nilai maksimum V dengan nilai minimum V

15. Misalkan p dan q adalah bilangan asli sedemikian sehingga
$$\prod_{k=1}^{14} \cos{(6k)^\circ} = \frac{\sqrt{p}}{q}.$$
Jika p adalah bilangan yang tidak habis dibagi bilangan kuadrat apa pun selain 1, tentukan sisa pembagian $p + q$ oleh 1000.*Catatan:* Notasi $\prod_{k=1}^{m} f(k)$ menyatakan perkalian $f(1), f(2)$, sampai dengan $f(k)$.

16. Tentukan banyaknya bilangan asli n yang kurang dari 2017 dengan sifat sebagai berikut: apabila p adalah bilangan prima terkecil yang habis membagi n, $p^2 - p + 1$ juga habis membagi n.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Tentukan semua pasangan bilangan real taknegatif (x, y) yang memenuhi $x + y \leq 1$ dan
$$3xy = 2x(1 - x) + 2y(1 - y)$$
.

2. Diberikan kotak berukuran 20×20 yang diberi garis sehingga terbentuk kotak kotak unit berukuran 1×1 sebanyak 400 buah. Setiap titik sudut diwarnai dengan merah atau biru. Terdapat 233 titik berwarna merah. 2 di antaranya adalah titik sudut dari kotak yang besar, 43 lainnya terletak pada sisi kotak yang besar. Warna setiap segmen pada setiap unit kotak ditentukan sesuai aturan : Jika kedua titik yang menghubungkan segmen tersebut berwarna merah, maka segmen diberi warna merah, jika kedua titiknya biru, segmen diberi warna biru, jika salah satu titik merah dan satu titik lainnya adalah biru, segmen tersebut diberi warna kuning. Andaikan terdapat sebanyak 343 segmen berwarna kuning. Tentukan banyaknya segmen yang berwarna biru. (Asumsikan setiap segmen berukuran 1 unit).

3. Diberikan lingkaran C dan titik A di luar C. Kita pilih titik P, Q, dan R pada C sehingga $\triangle PQR$ sama sisi. Buktikan bahwa nilai $AP^2 + AQ^2 + AR^2$ tidak bergantung pada pemilihan P, Q, dan R.

4. Tentukan, dengan bukti, apakah ada bilangan bilangan bulat n sehingga
$$2^{2017} \mid n^n - 2017$$
.