SCIENCE OLYMPIAD LEARNING CLUB INDONESIA

PEMBAHASAN OSP SMP/MTs 2017

Bidang: Matematika

Valentio Iverson

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Diketahui x dan y adalah dua bilangan bulat positif. Banyak (x, y) sehingga kelipatan persekutuan terkecil dari x dan y sama dengan $2^3.3^5.5^7$ adalah …
   <u>*Solusi:*</u> **1155**
   Banyak (x, y) sehingga KPK dari x dan y sama dengan $2^3.3^5.5^7$ adalah $(2.3+1)(2.5+1)(2.7+1) = 7.11.15 = \mathbf{1155}$ cara

   Komentar terhadap soal: Soal ini relatif mudah dikerjakan apabila siswa telah mengetahui rumus cepat untuk menjawab soal di atas. Bagi yang tidak mengetahui rumusnya, soal ini akan dianggap sulit bagi mereka. Jadi, soal ini termasuk dalam kategori mudah.

2. Jika $A = \{a, b, c\}$ dengan $a, b,$ dan c merupakan bilangan asli lebih besar daripada 1, serta $a \times b \times c = 180$, maka banyak himpunan A yang mungkin adalah …
   <u>*Solusi:*</u> **8**
   Perhatikan bahwa $180 = 2^2.3^2.5$ dan $a, b, c > 1$.
   Ingat kembali bahwa $\{2,2,45\}$ dan $\{2,45,2\}$ dianggap sama karena ini merupakan himpunan.
   Maka terdapat **8** himpunan A yang mungkin, yaitu:
   $\{2,2,45\}$; $\{2,3,30\}$; $\{2,5,18\}$; $\{2,6,15\}$; $\{2,9,10\}$; $\{3,3,20\}$; $\{3,5,12\}$; $\{3,6,10\}$

   Komentar terhadap soal: Soal ini cukup memusingkan siswa karena siswa relatif mengkombinasikan susunan yang menyebabkan banyak himpunan yang mungkin relatif banyak. Ingat bahwa himpunan tidak boleh dikombinasikan. Soal ini termasuk dalam kategori mudah.

3. Bentuk sederhana dari ekspresi $\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{\frac{16}{25}} - \sqrt[3]{\frac{4}{25}} + \sqrt[3]{\frac{1}{25}}\right)^{-1}$ adalah …

   <u>*Solusi:*</u>

$$\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{\frac{16}{25}} - \sqrt[3]{\frac{4}{25}} + \sqrt[3]{\frac{1}{25}}\right)^{-1} = \sqrt[3]{5}\left(\left(\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right) + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^2\right)^{-1}$$

   Ingat kembali identitas aljabar $a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b}$

$$= \sqrt[3]{5}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^3}{\sqrt[3]{\frac{4}{5}} + \sqrt[3]{\frac{1}{5}}}\right)^{-1}$$

$$= \sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{5}} + \sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right) = \sqrt[3]{4} + 1$$

Jadi, bentuk paling sederhana dari $\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{\frac{16}{25}}-\sqrt[3]{\frac{4}{25}}+\sqrt[3]{\frac{1}{25}}\right)^{-1}$ adalah $\sqrt[3]{\mathbf{4}}+\mathbf{1}$

Komentar terhadap soal: Pada soal ini, penting untuk mengetahui bahwa $a^2-ab+b^2=\frac{a^3+b^3}{a+b}$. Karena tanpa mengetahuinya, soal ini tidak akan dapat diselesaikan. Soal ini termasuk dalam kategori mudah.

4. Diketahui $n_1=1$ dan $n_{k+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n_k}}$ untuk $k\in\{1,2,3,\ldots,2016\}$.

Nilai dari $n_1n_2+n_2n_3+n_3n_4+\cdots+n_{2016}n_{2017}$ adalah …

Solusi: $\frac{\mathbf{2016}}{\mathbf{2017}}$

Dengan induksi matematika, kita akan buktikan bahwa $n_k=\frac{1}{k}$

Basis Induksi

$$n_2=\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2}$$

Maka $n_k=\frac{1}{k}$ benar untuk $k=2$

Langkah Induksi – 2

Misalkan $n_k=\frac{1}{k}$ benar untuk $k=k$. Maka akan dibuktikan bahwa $n_{k+1}=\frac{1}{k+1}$ benar untuk $k=(k+1)$

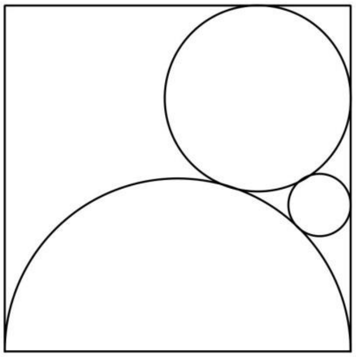
$$n_{k+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n_k}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{k}}}=\frac{1}{k+1}$$

Maka terbukti bahwa $n_k=\frac{1}{k}$ untuk k bilangan asli.

Maka nilai dari $n_1n_2+n_2n_3+n_3n_4+\cdots+n_{2016}n_{2017}$ adalah $\frac{1}{1}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2016}.\frac{1}{2017}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots.+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}=\frac{\mathbf{2016}}{\mathbf{2017}}$

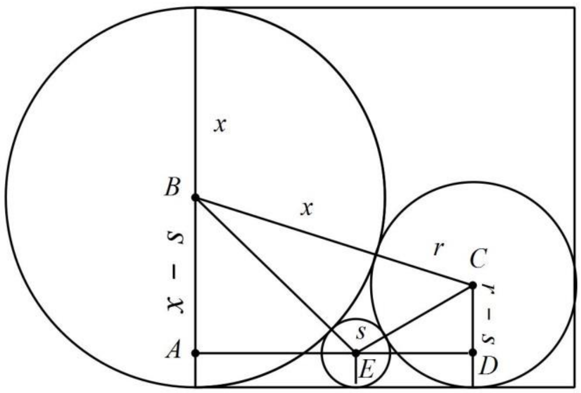
Komentar terhadap soal: Soal ini adalah soal kedua termudah dalam OSP 2017. Intinya, siswa harus dapat menyadari bahwa $n_k=\frac{1}{k}$ untuk k bilangan asli. Soal ini termasuk dalam kategori mudah.

5. Diberikan persegi dengan setengah lingkaran, L_1, yang berpusat pada titik tengah alasnya. Lingkaran L_2 dengan radius r menyinggung sisi atas dan sisi tegak persegi, serta L_1. Sedangkan lingkaran L_3 dengan radius s menyinggung L_1, L_2 dan sisi tegak persegi. Rasio dari $r:s$ adalah ….



Solusi: $\mathbf{3:1}$

Putar gambar yang diberikan 90° searah jarum jam, dan didapat:



Misalkan sisi persegi $2x$, maka radius lingkaran besar adalah x

Perhatikan ΔABE

Menurut Teorema Pythagoras,

$$BE^2 = AB^2 + AE^2$$
$$(x+s)^2 = (x-s)^2 + AE^2$$
$$4xs = AE^2$$
$$AE = 2\sqrt{xs}$$

Perhatikan ΔECD

Menurut Teorema Pythagoras,

$$CE^2 = CD^2 + ED^2$$
$$(r+s)^2 = (r-s)^2 + ED^2$$
$$4rs = ED^2$$
$$ED = 2\sqrt{rs}$$

Misalkan proyeksi titik C terhadap garis AB adalah F.

Perhatikan ΔBCF

Menurut Teorema Pythagoras,

$$BC^2 = BF^2 + CF^2$$
$$(x+r)^2 = (x-r)^2 + CF^2$$
$$4xr = CF^2$$
$$CF = 2\sqrt{xr}$$

Perhatikan bahwa $CF = AD = AE + ED = 2x - r$

$$2\sqrt{xr} = 2\sqrt{xs} + 2\sqrt{rs} = 2x - r$$

Maka $2\sqrt{xr} = 2x - r$

$$4xr = 4x^2 - 4xr + r^2$$
$$0 = 4x^2 - 8xr + r^2$$
$$0 = 4\left(\frac{x}{r}\right)^2 - 8\left(\frac{x}{r}\right) + 1$$
$$\frac{x}{r} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$$

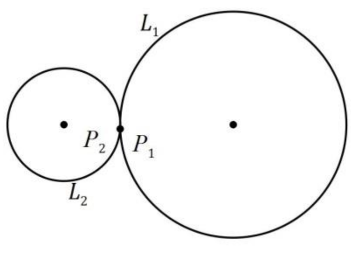
Ingat bahwa $x - r > 0 \Leftrightarrow x > r \Leftrightarrow \frac{x}{r} > 1$, jadi $\frac{x}{r} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{r}{x} =$

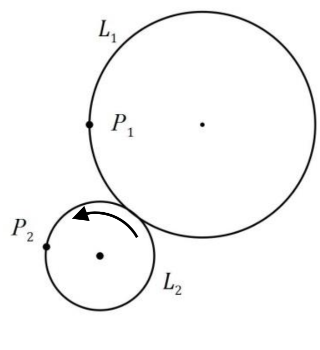
$$2\sqrt{xr} = 2\sqrt{xs} + 2\sqrt{rs}$$
$$\sqrt{xr} = \sqrt{xs} + \sqrt{rs}$$
$$\sqrt{s} = \frac{\sqrt{xr}}{\sqrt{x} + \sqrt{r}}$$
$$\frac{r}{s} = \left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{s}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{r}}{\frac{\sqrt{xr}}{\sqrt{x}+\sqrt{r}}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{xr} + r}{\sqrt{xr}}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{\frac{r}{x}}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{3}}}\right)^2$$
$$= \left(1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right)^2 = \left(1 + \left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Jadi, rasio $r : s$ adalah $\mathbf{3} : \mathbf{1}$.

Komentar terhadap soal: Sebenarnya, tanpa rotasi pun kita dapat menyelesaikan soal ini. Namun, ide ini cenderung akan muncul apabila kita memutar bangun tersebut. Dan ingat kembali bahwa bangun tersebut adalah persegi. Soal ini termasuk dalam kategori sedang.

6. Dua lingkaran L_1 dan L_2 mempunyai radius berturut-turut 12 cm dan 5 cm. Titik P_1 pada L_1 dan titik P_2 pada L_2. Mula-mula, L_1 dan L_2 bersinggungan luar di P_1 dan P_2. Kemudian L_2 digelindingkan sepanjang L_1, sehingga tetap bersinggungan luar. Titik P_2 pertama kali bertemu kembali dengan P_1 ketika L_2 telah digelindingkan sebanyak … kali.





Solusi: **12**
Keliling L_1 adalah $2(12)\pi = 24\pi$
Keliling L_2 adalah $2(5)\pi = 10\pi$
P_1 dan P_2 akan bertemu apabila kedua lingkaran menempuh jarak yang sama.
$KPK(24\pi, 10\pi) = 120\pi$
Jadi P_1 dan P_2 akan bertemu ketika lingkaran L_2 telah digelindingkan sebanyak $\frac{120\pi}{10\pi} = \mathbf{12}$ kali.

Komentar terhadap soal: Soal ini merupakan soal termudah pada OSP Matematika SMP 2017. Intinya adalah penerapan KPK pada soal. Soal ini termasuk dalam kategori mudah.

7. Bilangan 3 angka yang habis dibagi 3 dengan semua angka penyusunnya merupakan anggota dari $S = \{2,3,5,6,7,9\}$ ada sebanyak …
Solusi: **72**
Ciri- ciri bilangan yang habis dibagi 3 adalah jumlah semua angka penyusunnya habis dibagi 3.
Apabila semua anggota S dinyatakan dalam modulo 3, maka $S = \{2,0,2,0,1,0\}$
Cara menyusun suatu bilangan 3 angka dapat dikelompokkan dalam 4 kondisi:
<u>KONDISI PERTAMA:</u> 0 – 0 – 0
Angka 0 (mod 3) dalam himpunan S dipasangkan bersama.
Maka, ada $3^3 = 27$ bilangan
<u>KONDISI KEDUA:</u> 1 – 1 – 1
Angka 1 (mod 3) dalam himpunan S dipasangkan bersama.
Maka, ada $1^3 = 1$ bilangan
<u>KONDISI KETIGA:</u> 2 – 2 – 2
Angka 2 (mod 3) dalam himpunan S dipasangkan bersama.
Maka, ada $2^3 = 8$ bilangan
<u>KONDISI KEEMPAT:</u> 0 – 1 – 2
Angka 0 (mod 3), 1 (mod 3) dan 2 (mod 3) dalam himpunan S disusun.
Maka, ada $3.2.1.3! = 36$ bilangan
Jadi, ada sebanyak **72** bilangan 3 angka yang habis dibagi 3 yang semua angka penyusunnya merupakan anggota dari S.

Komentar terhadap soal: Kesalahan umum yang dilakukan siswa dalam mengerjakan soal ini adalah dengan menggangap bilangan yang disusun tidak boleh memiliki angka yang berulang. Namun, hal tersebut sebenarnya diperbolehkan. Kesalahan lain yang sering dilakukan juga adalah lupa mengalikan $3! = 6$ pada kondisi keempat. Ingat bahwa susunan bilangan dapat dipermutasikan. Soal ini termasuk dalam kategori mudah.

8. Sekolah A memiliki 3 kelas yang akan mengikuti ujian komputer pada sekolah B. Sekolah B menyediakan 2 pilihan waktu setiap harinya selama 5 hari berturut-turut. Setiap waktu yang disediakan dibuka dua kelas parallel. Jika setiap kelas sekolah A hanya mengikuti satu kali ujian, dan waktu ujian ditentukan secara acak, maka peluang bahwa tiga kelas tersebut mengikuti ujian pada hari yang berbeda adalah …
Solusi: $\mathbf{\frac{32}{57}}$
Banyak pilihan (slot) yang tersedia $= 4.5 = 20$
$$n(S) = P_3^{20} = 20.19.18$$
Misalkan A adalah kejadian dimana tiga kelas tersebut mengikuti ujian pada hari yang berbeda.
Maka $n(A) = P_3^5 = 5.4.3.4^3$
Maka, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20.19.18}{5.4.3.4^3} = \mathbf{\frac{32}{57}}$

Komentar terhadap soal: Soal ini dikategorikan sebagai soal sulit. Siswa cenderung salah saat menentukan $n(A)$ sebab lupa mengalikan P_3^5 dengan 4^3. 4^3 itu berasal dari pilihan waktu dan kelas yang ada setiap harinya. Soal ini termasuk dalam kategori sedang.

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Diketahui m adalah suatu bilangan bulat lima angka. Angka ditengah penyusun m dihapus sehingga diperoleh n yang merupakan bilangan empat angka. Jika $\frac{m}{n}$ adalah suatu bilangan bulat, tentukan semua nilai m yang memenuhi.
Solusi: **Semua bilangan 5 digit kelipatan 1000**.
Misalkanlah $m = abcde$, maka $n = abde$
Misalkan pula x adalah suatu bilangan asli sehingga $\frac{m}{n} = x$
$$\frac{abcde}{abde} = x$$
$$\frac{10000a + 1000b + 100c + 10d + e}{1000a + 100b + 10d + e} = x$$
$$1 + \frac{9000a + 900b + 100c}{1000a + 100b + 10d + e} = x$$
$$1 + \frac{100(90a + 9b + c)}{100(10a + b) + (10d + e)} = x$$
Agar x bilangan bulat, maka $\frac{100(90a+9b+c)}{100(10a+b)+(10d+e)}$ harus merupakan bilangan bulat.
$$\frac{100(90a + 9b + c)}{100(10a + b) + (10d + e)}$$

Agar $\frac{100(90a+9b+c)}{100(10a+b)+(10d+e)}$ merupakan bilangan bulat, maka $10d+e$ haruslah kelipatan 100. Namun, d dan e adalah bilangan 1 digit, dan tidak ada kelipatan 100 yang merupakan bilangan 2 digit, maka $10d+e=0 \Leftrightarrow d=0$ dan $e=0$.

$$1+\frac{100(90a+9b+c)}{100(10a+b)+(10d+e)}=x$$
$$1+\frac{100(90a+9b+c)}{100(10a+b)}=x$$
$$1+\frac{9(10a+b)+c}{10a+b}=x$$
$$1+9+\frac{c}{10a+b}=x$$
$$10+\frac{c}{10a+b}=x$$

Agar x bilangan bulat, maka $\frac{c}{10a+b}$ haruslah bilangan bulat. Perhatikan bahwa a adalah digit pertama bilangan m dan n. Maka $a \geq 1$ yang mengakibatkan $10a+b \geq 10$. Tidak ada bilangan 1 digit yang merupakan kelipatan 10, maka $c=0$.
Jadi $m=ab000$
dimana $a \geq 1$ dan $b \geq 0$, Jadi semua nilai m yang memenuhi adalah bilangan 5 digit kelipatan 1000, yaitu 10000, 11000, 12000, …, 98000, 99000.

Komentar terhadap soal: Soal ini merupakan soal termudah pada OSP Matematika 2017 bagian uraian. Soal ini merupakan soal teori bilangan yang memanfaatkan kelipatan. Jadi, soal ini termasuk dalam kategori sedang.

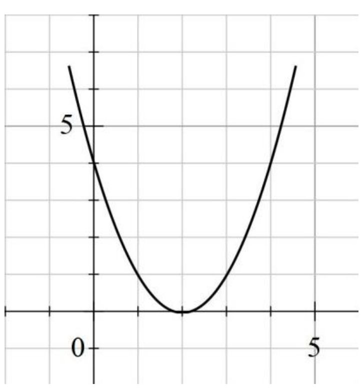
2. Diketahui fungsi kuadrat $f(x)=ax^2+bx+c$ dengan $a>0$ dan $f(0)=4$. Tentukan semua kemungkinan nilai $a, b,$ dan c agar $0 \leq f(x) \leq 4$ untuk $0 \leq x \leq 3$.

<u>Solusi:</u> $\boldsymbol{-\frac{16}{3} \leq b \leq -\frac{8}{3}, a=\frac{b^2}{16}, c=4}$ **atau** $\boldsymbol{b<-\frac{4}{3}, b \neq -\frac{8}{3}, a=\frac{-3b-4}{9}, c=4}$

Diketahui $f(0)=4$, maka
$$f(0)=a(0)^2+b(0)+c=c=4$$
Maka, parabola memotong sumbu y di titik (0,4)
Karena $a>0$, maka parabola terbuka ke atas. Maka bentuk kurva parabola parabola itu ada 2 kemungkinan:

<u>Kemungkinan pertama:</u>
Apabila parabola menyinggung sumbu x.

Syarat Pertama: Sumbu simetri parabola harus minimal $1\frac{1}{2}$ sebab apabila sumbu simetrinya lebih kecil dari $1\frac{1}{2}$ maka saat $x=3$, $y>4$.



$$D = 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$b^2 - 4a(4) = 0$$
$$b^2 = 16a \Leftrightarrow \frac{b}{2a} = \frac{8}{b} \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{b}$$
$$\frac{3}{2} \leq x \leq 3$$
$$\frac{3}{2} \leq -\frac{b}{2a} \leq 3$$
$$\frac{3}{2} \leq -\frac{8}{b} \leq 3$$

Pertidaksamaan ruas kiri: $\frac{3}{2} \leq -\frac{8}{b}$

$$\frac{3}{2} + \frac{8}{b} \leq 0$$
$$\frac{3b + 16}{2b} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (3b + 16)2b \leq 0$$
$$\Leftrightarrow 6b^2 + 32b \leq 0$$

Nilai nol fungsi:

$$6b^2 + 32b = 0$$
$$(3b + 16)2b = 0$$
$$b = 0 \vee b = -\frac{16}{3}$$

Maka, $-5\frac{1}{3} \leq b < 0$

Pertidaksamaan ruas kanan: $-\frac{8}{b} \leq 3$

$$0 \leq 3 + \frac{8}{b}$$
$$0 \leq \frac{3b + 8}{b}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq b(3b + 8)$$

Nilai nol fungsi:

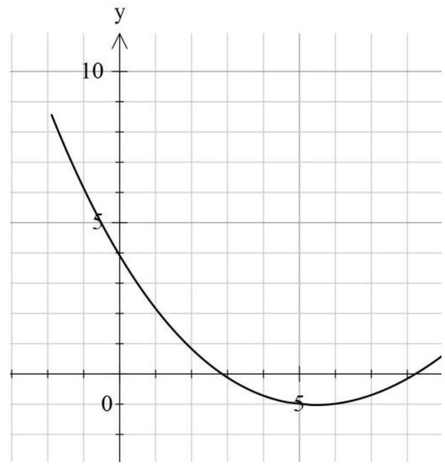
$$3b^2 + 8b = 0$$
$$b(3b + 8) = 0$$
$$b = 0 \vee b = -\frac{8}{3}$$

Maka, $b \leq -\frac{8}{3}$ atau $b > 0$

Dari kedua bentuk pertidaksamaan diperoleh $-\frac{16}{3} \leq b \leq -\frac{8}{3}$.

Maka, nilai (a, b, c) yang memenuhi adalah $-\frac{16}{3} \leq b \leq -\frac{8}{3}, a = \frac{b^2}{16}, c = 4$

Kemungkinan kedua:
Apabila parabola memotong sumbu x.
Syarat Pertama: Parabola memotong sumbu x di titik (3,0) dan sumbu y di titik (0,4)



$$D > 0$$
$$b^2 - 4ac > 0$$
$$b^2 > 16a$$

Kurva melalui titik (3,0), maka

$$f(x) = 0$$
$$ax^2 + bx + 4 = 0$$
$$9a + 3b = -4$$
$$a = \frac{-3b - 4}{9}$$
$$b^2 > 16\left(\frac{-3b - 4}{9}\right)$$
$$b^2 > \frac{-48b - 64}{9}$$
$$9b + 48b + 64 > 0$$
$$(3b + 8)^2 > 0$$

Bentuk aljabar di atas merupakan definit positif apabila $b \neq -\frac{8}{3}$.

$$a > 0$$
$$\frac{-3b - 4}{9} > 0$$
$$-3b - 4 > 0$$
$$-4 > 3b$$
$$-\frac{4}{3} > b$$

Dari kedua bentuk pertidaksamaan, didapat $b < -\frac{4}{3}, b \neq -\frac{8}{3}$

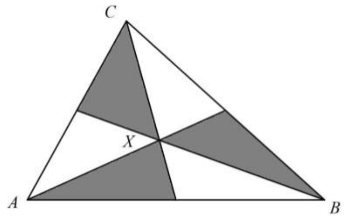
Maka nilai (a, b, c) yang memenuhi adalah $b < -\frac{4}{3}, b \neq -\frac{8}{3}, a = \frac{-3b-4}{9}, c = 4$

Jadi, semua kemungkinan nilai (a, b, c) yang memenuhi adalah $\boldsymbol{-\frac{16}{3} \leq b \leq -\frac{8}{3}, a = \frac{b^2}{16}, c = 4}$ **atau** $\boldsymbol{b < -\frac{4}{3}, b \neq -\frac{8}{3}, a = \frac{-3b-4}{9}, c = 4}$

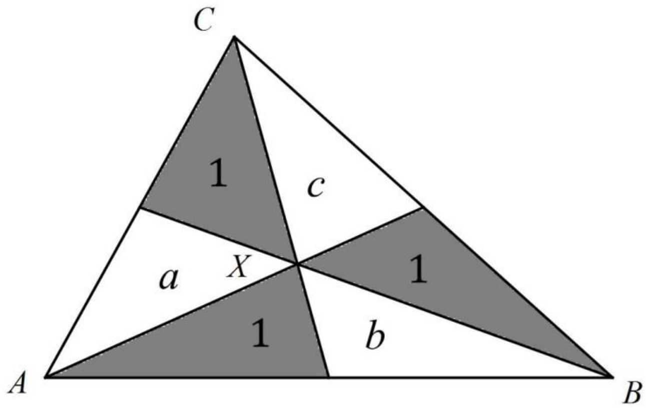
Komentar terhadap soal: Soal ini adalah soal paling sulit dalam OSP Matematika SMP 2017. Soal ini memanfaatkan pertidaksamaan. Soal ini dikategorikan sebagai soal sulit.

3. Pada segitiga ABC, berturut-turut melalui titik $A, B,$ dan C dibuat garis luru yang memotong sisi di hadapannya. Ketiga garis tersebut berpotongan di titik X sehingga diperoleh enam

segitiga seperti pada gambar. Jika masing-masing luas segitiga yang diarsir adalah satu, buktikan bahwa masing-masing luas segitiga yang tidak diarsir juga satu.



Solusi: **Terbukti**



Misalkan ketiga daerah yang tidak diarsir sebagai $a, b,$ dan c

Misalkan perpanjangan BX memotong AC di D.

Maka diperoleh $\frac{L\Delta AXD}{L\Delta CDX} = \frac{L\Delta AXB}{L\Delta BXC}$

$$\frac{a}{1} = \frac{b+1}{c+1}$$

Analog, diperoleh

$$\frac{b}{1} = \frac{c+1}{a+1}$$

$$\frac{c}{1} = \frac{a+1}{b+1}$$

Kalikan ketiga persamaan, dan kita dapatkan $abc = 1$.

$$b = \frac{c+1}{a+1}$$

$$ab + b = c + 1$$

Analog, diperoleh

$$bc + c = a + 1$$

$$ac + a = b + 1$$

Jumlahkan ketiga persamaan, dan kita dapatkan $ab + bc + ac = 3$

Perhatikan persamaan $ab + b = c + 1$

Kalikan kedua ruas dengan c, didapatkan

$$abc + bc = c^2 + c$$

$$c^2 + c = 1 + bc$$

Analog, diperoleh

$$a^2 + a = 1 + ac$$
$$b^2 + b = 1 + ab$$

Jumlahkan ketiga persamaan ini, dan kita dapatkan

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = 3 + ab + ac + bc$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = 6$$
$$(a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) + a + b + c = 6$$
$$(a + b + c)^2 + (a + b + c) = 12$$
$$(a + b + c)^2 + (a + b + c) - 12 = 0$$
$$(a + b + c + 4)(a + b + c - 3) = 0$$
$$a + b + c = -4\ (T.M.) \vee a + b + c = 3$$

Maka, $a + b + c = 3$

Misalkan kita punya persamaan pangkat tiga

$$t^3 + At^2 + Bt + C = 0$$

Mempunyai akar-akar real a, b dan c.

Maka,

$$a + b + c = -A$$
$$A = -3$$
$$ab + ac + bc = B$$
$$B = 3$$
$$abc = -C$$
$$C = -1$$

Maka persamaan pangkat 3 itu adalah

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$
$$(t - 1)^3 = 0$$
$$t = 1$$

Maka $a = b = c = 1$

Jadi, terbukti bahwa masing masing luas yang tidak diarsir adalah 1.

Komentar terhadap soal: Soal ini termasuk dalam kategori sulit sebab soal geometri ini memerlukan penalaran logika dan cara menghubungkannya ke aljabar, dan perlu diketahui bahwa solusi di atas bukanlah satu-satunya cara.

4. Misalkan n menyatakan banyak perubahan posisi berurutan dari laki-laki ke perempuan atau sebaliknya dalam suatu antrian. Urutan sesame laki-laki atau sesame perempuan tidak dibedakan. Contohnya, dalam antrian yang terdiri dari 4 laki-laki (L) dan 6 perempuan (P) dengan susunan antrian $LPPLLPPLPP$, diperoleh $n = 5$ karena ada lima posisi laki-laki dan perempuan. Tentukan rata-rata nilai n dari semua kemungkinan urutan antrian yang terdiri dari 3 laki-laki dan 5 perempuan.

   Solusi: **3,75**

Kita akan membagi kasus dari $n = 1$ hingga $n = 6$

Apabila $n = 1$

Maka susunan yang mungkin hanyalah apabila semua laki-laki dikelompokkan dan semua perempuan dikelompokkan. $LLLPPPP$ dan $PPPPLLL$

Maka ada 2 susunan yang mungkin.

Apabila $n = 2$

Maka susunan yang mungkin adalah apabila semua laki-laki dikelompokkan atau apabila semua perempuan dikelompokkan.

Susunan yang mungkin:

$$PLLLPPPP, PPLLLPPP, PPPLLLPP, PPPPLLLP$$
$$LPPPPPLL, LLPPPPPL$$

Maka ada 6 susunan yang mungkin.

Apabila $n = 3$

Maka susunan yang mungkin adalah apabila satu atau dua laki-laki terletak di ujung dan laki-laki sisanya sisanya disusun di antara perempuan

Susunan yang mungkin:

$$LLPPPPLP, LLPPPLPP, LLPPLPPP, LLPLPPPP$$
$$LPPPPLLP, LPPPLLPP, LPPLLPPP, LPLLPPPP$$

Dan kebalikannya

Maka, ada sebanyak 16 susunan.

Apabila $n = 4$

Maka susunan yang mungkin adalah apabila laki-laki dipecah menjadi 2 kelompok: satu dan dua orang, dan dua dua disusun diantara perempuan, dengan syarat kedua kelompok ini tidak boleh berdampingan, atau dua laki-laki diletakkan di ujung dan satu laki-laki tersisa disusun diantara perempuan

Susunan yang mungkin:

$$P\_\ P\_\ P\_\ P\_\ P$$

Banyak susunan yang mungkin = $P_2^4 + 4 = 12 + 4 = 16$ susunan

Apabila $n = 5$

Maka susunan yang mungkin adalah apabila laki-laki dipecah menjadi 3 kelompok, masing-masing terdiri dari satu orang. Salah satu laki-laki harus terletak di ujung sedangkan kedua orang lainnya disusun diantara perempuan dengan syarat kedua laki-laki tersebut tidak boleh berdampingan.

Susunan yang mungkin:

$$P\_\ P\_\ P\_\ P\_\ P$$

Banyak susunan yang mungkin $= \frac{2.P_2^4}{2!} = 12$ susunan.

Apabila $n = 6$

Maka susunan yang mungkin adalah apabila ketiga laki-laki dipecah menjadi 3 kelompok, dan ketiga kelompok disusun diantara perempuan dengan syarat tidak ada dua laki-laki yang boleh berdampingan.

Susunan yang mungkin:

$$P\_\_\ P\_\_\ P\_\_\ P\_\_\ P$$

Banyak susunan yang mungkin $= \frac{P_3^4}{3!} = 4$ susunan.

Maka rata-rata semua nilai n yang memenuhi adalah:

$$\bar{X} = \frac{1.2 + 2.6 + 3.16 + 4.16 + 5.12 + 6.4}{56} = \mathbf{3,75}$$

Jadi, rata-rata semua nilai n yang memenuhi adalah **3,75**.

Komentar terhadap soal: Soal ini termasuk dalam kategori sedang sebab soal ini dapat dikerjakan apabila siswa dapat menulis masing-masing kemungkinan susunan untuk tiap nilai n. Soal ini merupakan soal kedua termudah pada Bagian Uraian OSP SMP 2017.