Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan September 2018

21–24 September 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.
    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

16. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

22. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *injektif* atau *satu-satu* bila untuk setiap $a, b \in X$ yang memenuhi $f(a) = f(b)$, dipunyai $a = b$. Dengan kata lain, tidak ada $a, b \in X$ dengan $a \neq b$ yang memenuhi $f(a) = f(b)$.

23. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *surjektif* bila untuk setiap $y \in Y$, ada $x \in X$ yang memenuhi $f(x) = y$. Dengan kata lain, range dari fungsi f adalah Y.

24. Jika X dan Y adalah himpunan, suatu fungsi $f : X \to Y$ disebut *bijektif* bila fungsi tersebut injektif dan surjektif. Dengan kata lain, terdapat fungsi $g : Y \to X$ yang memenuhi $g(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in X$, dan $f(g(y)) = y$ untuk setiap $y \in Y$. (Fungsi g ini disebut *invers* dari fungsi f.)

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Tentukan banyaknya bilangan genap di antara 1000 sampai dengan 7000 yang semua digit-digitnya berbeda.

2. Tentukan bilangan asli terkecil a yang membuat

$$a + 4a + 7a + 10a + \cdots + 97a$$

menjadi bilangan kuadrat sempurna.

3. Audrey, Bill dan Clifton berdiri pada satu garis lurus dengan urutan tersebut. Jarak Audrey ke Bill sama dengan jarak Bill ke Clifton dan kecepatan Bill berlari 2 kali lebih cepat dari kecepatan Clifton. Pada saat yang sama, Bill mulai berlari ke arah Clifton, Clifton berlari ke arah Bill dan Audrey berlari ke arah Bill. Diketahui bahwa mereka bertiga bertemu pada suatu titik secara bersamaan dan jarak yang ditempuh Bill adalah 180 meter. Tentukan jarak Audrey dan Clifton sebelum berlari dalam meter.

4. Diketahui titik $A = (2, 4)$ dan $B = (4, 8)$ di bidang Kartesius. Titik C merupakan perpotongan garis $y = 4$ dan garis yang melalui B dan tegak lurus AB. Tentukan luas segitiga ABC.

5. Tentukan nilai minimum dari

$$4K^2 + 9T^2 + 3O^2 + 75M^2 + 12KT + 30OM$$

dimana K, T, O, M adalah empat bilangan real positif yang memenuhi $KTOM = 10$.

6. Suatu komputer diprogram untuk menampilkan salah satu dari tiga warna (merah, biru, atau hitam). Warna ini berganti setiap detiknya. Jika komputer menampilkan warna merah, warna yang ditampilkan berikutnya adalah warna biru. Jika komputer menampilkan warna biru, warna yang ditampilkan berikutnya adalah warna hitam. Tentukan banyaknya kemungkinan komputer menampilkan 3 warna merah, 5 warna biru, dan 8 warna hitam dalam selang waktu 16 detik.

7. Gasly, Verstappen, dan Kvyat masing-masing memilih satu titik awal pada suatu bidang. Diketahui jarak terpendek antara titik awal Gasly dengan titik awal Verstappen adalah 15 meter, titik awal Verstappen dengan titik awal Kvyat adalah 41 meter, dan titik awal Kvyat dengan titik awal Gasly adalah 52 meter. Misalkan terdapat titik R di bidang yang sama. Mereka bertiga hendak mencari jarak terpendek antara titik awal mereka masing-masing dengan titik R. Hasilnya, jarak terpendek antara titik awal Gasly dengan titik R adalah 28 meter, sedangkan titik awal Kvyat dengan titik R adalah 80 meter. Tentukan jarak terpendek antara titik awal Verstappen dengan titik R dalam satuan meter.

8. Tentukanlah jumlah semua nilai p sedemikian sehingga p, $p^2 + 2018$, $p^4 + 2018$ merupakan bilangan prima.

9. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, \ldots, 40\}$. Tentukan banyaknya cara memilih pasangan tidak terurut (a, b, c, d) sehingga $a, b, c, d \in A$ dan $a + b = c + d$.

10. Diberikan persegi $ABCD$ dengan titik E dan F pada segmen AB dan BC sehingga segitiga DEF sama sisi. Titik G, H, dan I berturut-turut terletak pada segmen AE, ED, dan DA sehingga segiempat $AGHI$ adalah persegi. Titik J dan K terletak pada segmen EF sehingga $HJ \perp EF$ dan $FK = EJ$. Titik L terletak pada DF sehingga $HL \parallel EF$. Jika luas persegi panjang $HJKL = x$ dan luas persegi $AGHI = y$. Tentukan nilai dari $\left\lfloor \frac{100x}{y} \right\rfloor$.

11. Diberikan sebuah fungsi satu-satu $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ dimana $\mathbb{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $f(n) \neq n, \forall n \in \mathbb{V}$. Apabila

$$f(1 + 2f(2)) + f(1) = f(4f(m) + f(6)) + f(2f(3) - 3) + f(4)$$

untuk suatu bilangan asli m, tentukan nilai dari

$$\sum_{i=1}^{6} m^i f(i).$$

12. Barisan $7, 63, 511, 728, \cdots$ merupakan barisan bilangan-bilangan asli yang merupakan kelipatan 7 dan juga kurang 1 dari pangkat 3 suatu bilangan bulat. Di sini, $7, 63, 511, 728$ semuanya habis dibagi 7, dan $7 = 2^3 - 1$, $63 = 4^3 - 1$, $511 = 8^3 - 1$ dan $728 = 9^3 - 1$.

    Tentukan 3 digit terakhir dari suku ke 2018 dari barisan tersebut.

13. Sebuah bilangan empat digit dikatakan *aneh* jika dan hanya jika bilangan baru yang terbentuk dari penghapusan digit satuannya habis dibagi 7. Sebuah bilangan empat digit dikatakan *cantik* jika dan hanya jika bilangan baru yang terbentuk dari penghapusan digit ribuannya habis dibagi 9. Misalkan R adalah himpunan seluruh bilangan yang aneh dan cantik. Jika x adalah rata-rata dari penjumlahan seluruh anggota R, tentukan nilai dari $2x - 10000$.

14. Misalkan $ABCD$ adalah segiempat siklis. Garis AB dan CD bertemu di titik R. Garis AD dan BC bertemu di titik V. Diketahui titik S dan titik I terletak pada lingkaran luar segiempat $ABCD$ sehingga RS dan VI adalah garis singgung lingkaran tersebut. Jika panjang $VI = 13552$ dan panjang $RV = 17777$, tentukan panjang RS.

15. Diberikan sebuah nilai S yang merupakan deret tak terhingga yang suku ke -n didefinisikan sebagai

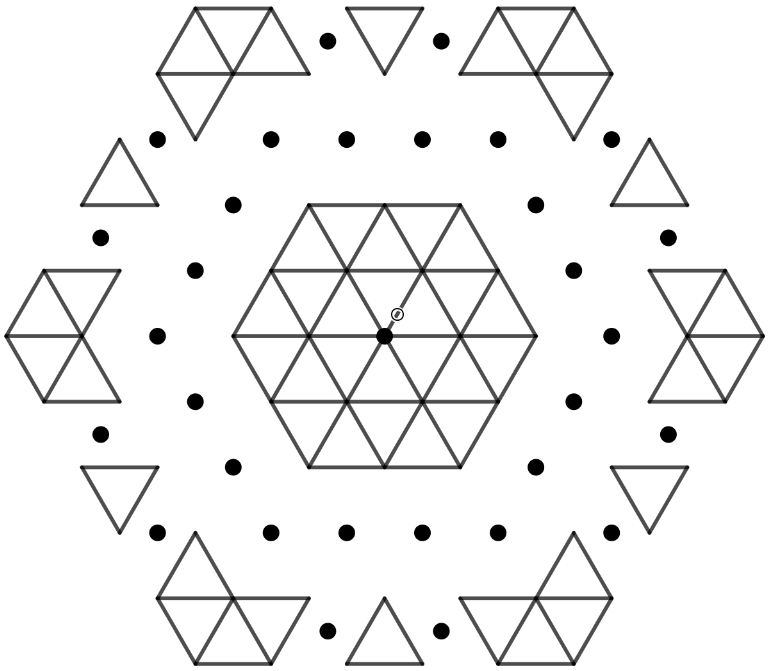
$$U_n = \frac{T_n \times 1^2 + T_{n-1} \times 2^2 + T_{n-2} \times 3^2 + \cdots + T_2 \times (n-1)^2 + T_1 \times n^2}{10^n},$$

dimana T_n menyatakan bilangan segitiga ke-n. Dipunyai

$$S = \frac{1^2}{10} + \frac{3 \times 1^2 + 2^2}{10^2} + \frac{6 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + 1 \times 3^2}{10^3} + \ldots$$

Diketahui bahwa nilai S dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$, dimana a dan b adalah dua buah bilangan bulat positif yang saling relatif prima. Apabila $X = a + b$, tentukan nilai dari $\left\lfloor \frac{X}{100} \right\rfloor$.

16. Sebanyak 6×2018^2 segitiga sama sisi identik dengan panjang sisi 1 satuan disusun sedemikian rupa sehingga membentuk segienam beraturan yang berpusat di titik O dengan panjang sisi 2018 satuan, seperti gambar yang tercantum di bawah. Misalkan V_i, untuk $i = 1, 2, \ldots, 2018$, adalah himpunan seluruh titik sudut pada segienam beraturan yang berpusat di titik O dengan panjang sisi i satuan. Selanjutnya, definisikan sebuah DRS sebagai perpindahan dari salah satu titik di V_i ke salah satu titik di V_{i-1}, dimana keduanya saling terhubung dengan sebuah sisi segitiga untuk $i = 1, 2, \ldots, 2018$. Vettel yang berada di luar segienam paling besar tersebut memilih salah satu titik di V_{2018}, lalu dari titik tersebut akan melangkah menuju ke salah satu titik di V_{1009} sebanyak tepat 1009 langkah. Jika R adalah banyaknya kemungkinan langkah yang dapat dilakukan Vettel, tentukan dua digit terakhir dari R.



Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Misalkan P adalah sebuah polinomial yang memenuhi $P(x) = x^4+2x^3+2x^2+6x-2$ untuk semua bilangan bulat x.

   (a) Jika $x > 3$, tunjukkan $P(x) > x^4 + 2x^3 + x^2 = (x^2 + x)^2$.

   (b) Jika $x > 3$, tunjukkan $P(x) < x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$.

   (c) Jika $x < -6$, tunjukkan $P(x) > (x^2 + x)^2$.

   (d) Jika $x < -6$, tunjukkan $P(x) < (x^2 + x + 1)^2$.

   Diketahui t dan u adalah bilangan bulat yang memenuhi $t^2 = P(u)$.

   (e) Simpulkan bahwa $-6 \leq u \leq 3$.

   (f) Tentukan semua pasangan (t, u) yang memenuhi persamaan tersebut.

2. Buktikan bahwa tidak ada tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi persamaan

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz - 1.$$

3. Ubai menuliskan 2018 bilangan asli pertama: $1, 2, \ldots, 2018$ di papan tulis. Tiap menit, dia akan menghapus 4 bilangan (tidak harus berbeda): x, y, z dan $x+y+z$ dan menuliskan $x + y$, $x + z$ dan $y + z$ pada papan tulis. Misalnya, bila Ubai menghapus 1, 2, 3, dan 6, maka dia akan menulis 3, 4, 5 di papan tulis.

   Ubai akan berhenti apabila dia tidak dapat menghapus 4 bilangan manapun yang memenuhi syarat lagi. Apabila Ubai mulai menghapus bilangan pada pukul 08 : 00, buktikan bahwa Ubai akan berhenti sebelum jam 16 : 30.

4. Diberikan sebuah segiempat konveks $ABCD$. Misalkan O perpotongan diagonal AC dan BD, dan misalkan I, K, H berturut-turut adalah proyeksi titik B, O, C ke AD. Buktikan

$$AD \times BI \times CH \leq AC \times BD \times OK$$

   dan tentukan kapan kesamaan terjadi.