Solusi OSP Matematika SMA 2017 Bagian Kedua

Oleh: Muhammad Alif Aqsha

Juli 2017

1. Untuk setiap persegi satuan pada papan berukuran 5×9 dituliskan angka 1 atau 0. Kemudian dihitung jumlah semua bilangan pada setiap kolom dan juga pada setiap barisnya sehingga diperoleh 14 bilangan. Misalkan H adalah himpunan yang berisi bilangan-bilangan tersebut. Tentukan maksimum dari banyak anggota H!

   Solusi:

   Jelas bahwa jumlah semua bilangan pada setiap kolom dan baris minimal 0, maksimal 9. Misalkan terdapat suatu konfigurasi sehingga $H = \{0, 1, 2, ...9\}$. Maka terdapat setidaknya satu kolom atau baris yang semua perseginya memuat angka 0. WLOG terdapat 5 baris dan 9 kolom. Perhatikan bahwa jumlah $6, 7, 8, 9$ hanya dapat dimuat pada baris, karena jumlah persegi pada tiap kolom adalah 5.

   Bila jumlah $= 0$ dimuat oleh kolom, maka pada setiap baris terdapat minimal satu buah 0, sehingga jumlah maksimal pada setiap baris adalah 8 (tidak akan ada baris yang memuat jumlah $= 9$).

   Bila jumlah $= 0$ dimuat oleh baris, maka pada setiap kolom terdapat minimal satu buah 0, sehingga jumlah maksimal pada setiap kolom adalah 4. Maka, jumlah $= 5$ harus dimuat pada baris, sehingga jumlah $\{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$ harus dimuat pada baris. Tetapi, hanya ada 5 baris, sehingga tidak ada konfigurasi yang mungkin.

   Maka maksimum dari banyak anggota H adalah 9, dengan salah satu konfigurasi seperti di bawah ini:

1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

   dengan $H = \{1, 2, ...9\}$

2. Bilangan asli $k > 2$ dikatakan *cantik* jika untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ dengan $5n + 1$ bilangan kuadrat sempurna, dapat ditemukan bilangan asli $a_1, a_2, ..., a_k$ sehingga

$$n + 1 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2$$

Tentukan bilangan cantik terkecil.

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$(5m)^2 \equiv 0 \pmod 5$$

$$(5m \pm 1)^2 \equiv 1 \pmod 5$$

$$(5m \pm 2)^2 \equiv 4 \pmod 5$$

, Sehingga agar $5n + 1$ kuadrat sempurna, maka haruslah

$$5n + 1 = (5m \pm 1)^2 = 5m(5m \pm 2) + 1, \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n + 1 = m(5m \pm 2) + 1 = 4m^2 + m^2 \pm 2m + 1 = m^2 + m^2 + m^2 + m^2 + (m \pm 1)^2$$

Untuk $n+1$ berbentuk $m^2 + m^2 + m^2 + m^2 + (m-1)^2$, jika $m = 1$, maka $n = 3 < 4$, sehingga haruslah $m \geq 2$, mengakibatkan $(m-1)^2$ kuadrat sempurna bukan nol.

Jelas $k = 5$ adalah bilangan *cantik*. Misalkan ada bilangan *cantik* ≤ 4. Perhatikan bahwa $n = 7$ adalah n terkecil yang lebih besar atau sama dengan 4 yang mengakibatkan $5n + 1$ bilangan kuadrat (bisa dicoba satu-satu dari $n = 4$ sampai $n = 7$). Maka $n + 1$ terkecil adalah 8. Semua bentuk angka 8 sebagai penjumlahan dari beberapa bilangan kuadrat sempurna bukan nol adalah sebagai berikut:

$$8 = 2^2 + 2^2$$

$$8 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

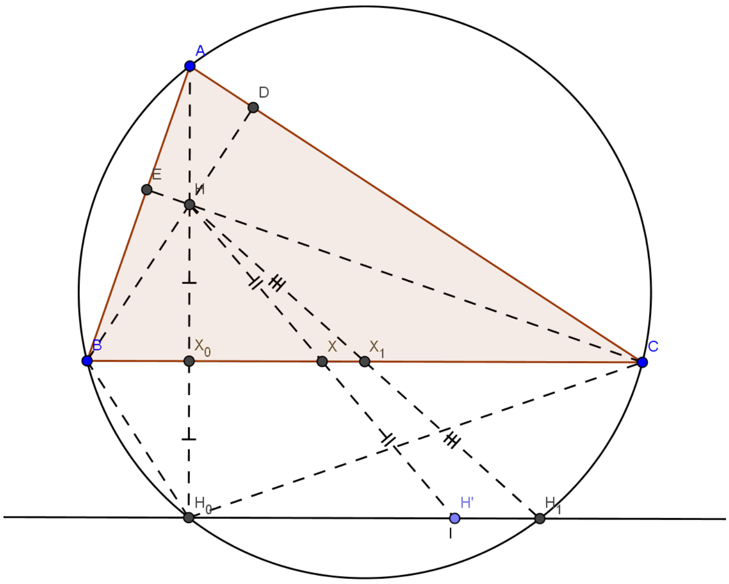
$$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

Jelas bahwa satu-satunya k yang kurang atau sama dengan 4 adalah 2. Tetapi, bilangan *cantik* haruslah lebih besar dari 2, sehingga tidak ada bilangan *cantik* ≤ 4.

Jadi, bilangan *cantik* terkecil adalah $k = 5$.

3. Diberikan segitiga ABC yang ketiga garis tingginya berpotongan di titik H. Tentukan semua titik X pada sisi BC sehingga pencerminan H terhadap titik X terletak pada lingkaran luar segitiga ABC.

   Solusi:



Perpanjang AH sehingga memotong BC dan lingkaran berturut-turut di X_0 dan H_0. Perhatikan bahwa $AEHD$ siklis karena $\angle ADH + \angle AEH = 90 + 90 = 180$, sehingga $\angle BHC = \angle EHD = 180 - \angle BAC = \angle BH_0C$. Tetapi $HH_0 \perp BC$, sehingga $BHCH_0$ adalah layang-layang. Maka $HX_0 = H_0X_0$.

Buat garis l melalui H_0 dan sejajar BC. Pilih sembarang X di BC dan perpanjang HX sehingga memotong l di H'. Karena l sejajar dengan BC dan $HX_0 = H_0X_0$, dengan kesebangunan diperoleh $HX = H'X$.

Misalkan H_1 adalah titik perpotongan garis l dan lingkaran luar segitiga ABC selain H_0, dan X_1 titik perpotongan HH_1 dan BC. Karena bisa saja kita pilih titik H di H_1, maka $HX_1 = H_1X_1$.

Agar kita mendapatkan titik H' pada lingkaran luar segitiga ABC, haruslah kita pilih X sedemikian sehingga H' adalah titik perpotongan garis l dan lingkaran luar segitiga ABC. Maka, titik X yang memenuhi hanyalah titik X_0 dan X_1.

4. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan real yang nilai mutlaknya tidak lebih besar dari 1. Buktikan bahwa

$$\sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} + \sqrt{|c-a|} \leq 2 + \sqrt{2}$$

Solusi:

WLOG $-1 \leq a < b < c \leq 1$, $|a-b| = b-a = x, |b-c| = c-b = y$, maka $|c-a| = c-a = (b-a)+(c-b) = x+y$. Perhatikan bahwa x dan y adalah bilangan non-negatif dengan $x + y \leq 1 - (-1) = 2$. Jika salah satu dari x dan y sama dengan 0, WLOG $x = 0$ maka $x + y = y \leq 2$, sehingga pertidaksamaan menjadi

$$\sqrt{0} + \sqrt{y} + \sqrt{y} = 2\sqrt{y} \leq 2\sqrt{2} < 2 + \sqrt{2} \qquad \text{(memenuhi)}$$

Jika x dan y positif, maka dengan AM-QM,

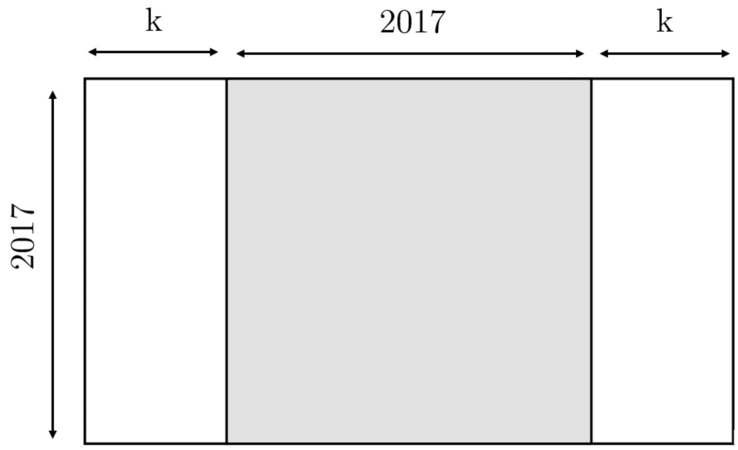
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y} \leq 2\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{x+y} = \sqrt{x+y}(\sqrt{2}+1) \leq \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 2+\sqrt{2} \qquad \text{(terbukti)}$$

5. Pada suatu papan catur berukuran $2017 \times n$, Ani dan Banu melakukan permainan. Pemain pertama memilih suatu persegi dan kemudian mewarnainya dengan warna merah. Pemain berikutnya memilih suatu persegi dari daerah yang belum diberi warna merah dan kemudian mewarnainya dengan warna merah. Persegi yang dipilih boleh sebarang ukuran namun harus tepat menutup sejumlah persegi satuan pada papan catur. Kemudian kedua pemain bergantian melakukan hal tersebut. Seorang pemain dikatakan menang, jika pemain berikutnya tidak bisa lagi melanjutkan permainan. Jika Ani mendapat giliran pertama, tentukan semua nilai $n \geq 2017$ sehingga Ani mempunyai strategi untuk memenangkan permainan.

   Solusi:

   Jika $n = 2017$, jelas bahwa Ani memiliki strategi menang dengan langsung memilih persegi 2017×2017. Selanjutnya, kita akan bagi dua kasus.

   Kasus pertama: n ganjil, dengan $n = 2017 + 2k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

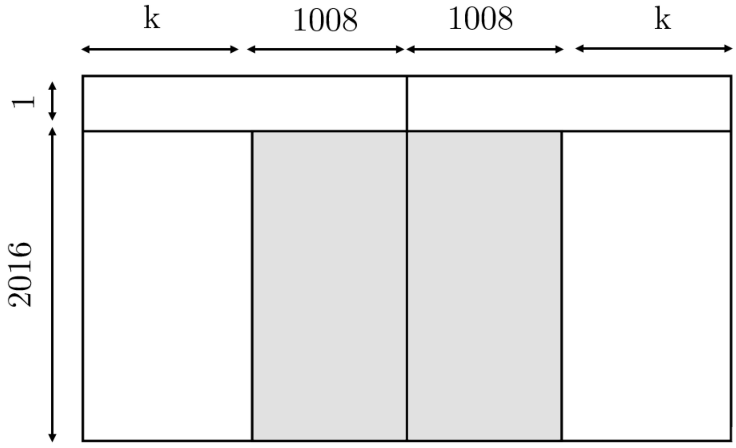


   Pada langkah pertama, Ani memilih persegi 2017×2017 di tengah seperti pada gambar. Kemudian, setiap Banu memilih persegi $m \times m$, pada langkah selanjutnya Ani memilih daerah cerminannya di seberang persegi 2017×2017 yang telah Ani pilih pada langkah pertama.

   Misal pada langkah ke-s, Banu memilih suatu persegi di kanan, dan pada langkah ke-$s+1$ Ani tidak bisa memilih cerminannya di kiri karena ada beberapa bagian persegi yang telah dipilih. Karena sebelum langkah ke s beberapa bagian dari persegi tersebut di sebelah kanan belum diwarnai sedangkan cerminannya di sebelah kiri telah dipilih, haruslah bagian cerminannya di sebelah kiri sudah dipilih Banu (karena strategi Ani adalah pencerminan), dan setelahnya Ani memilih persegi yang memuat cerminan bagiannya di sebelah kanan, membuat langkah ke-s Banu menjadi tidak mungkin, kontradiksi. Maka setiap Banu memilih suatu persegi, Ani dapat selalu menemukan persegi cerminan yang semua bagiannya belum diwarnai. Strategi ini akan membuat Ani menang, karena jika Banu yang menang, Banu-lah yang mewarnai persegi yang terakhir, sedangkan setiap Banu memilih suatu persegi, Ani dapat selalu menemukan persegi cerminan yang semua bagiannya belum diwarnai. Kontradiksi.

Jadi, untuk semua $n > 2017$ ganjil, Ani dapat memenangkan permainan dengan menggunakan strategi pencerminan.

Kasus kedua: n genap, dengan $n = 2016 + 2k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$



Pada langkah pertama, Ani memilih persegi 2016×2016 di tengah bawah seperti pada gambar. Kemudian, Ani bisa melakukan strategi pencerminan seperti pada kasus n ganjil (karena dengan memilih persegi 2016×2016 di tengah bawah atau tengah atas, Ani telah menghapus kesempatan Banu untuk melakukan strategi yang sama atau memilih daerah persegi yang beberapa bagiannya jika dicerminkan adalah bagian dari persegi itu juga).

Jadi, untuk semua $n > 2017$ genap, Ani dapat memenangkan permainan dengan menggunakan strategi pencerminan.

Maka untuk semua n bilangan asli dengan $n \geq 2017$, Ani memiliki strategi untuk memenangkan permainan tersebut.