



Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan April 2018

27–30 April 2018

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi \mathbb{N} menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi \mathbb{Z} menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi \mathbb{Q} menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi \mathbb{R} menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \dots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x , notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b .
11. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
12. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
13. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n .
14. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
15. Pada $\triangle ABC$:
 - (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
 - (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
 - (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC .
 - (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A , garis berat dari titik B , dan garis berat dari titik C .
 - (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A , garis tinggi dari titik B , dan garis tinggi dari titik C .

- (f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A , B , dan C .
- (g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC , CA , dan AB .
16. Luas dari sebuah segi- n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.
17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i+1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i . Contohnya, $3, 5, 7, 9, \dots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.
18. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan tak nol (bisa jadi 1) untuk setiap i . Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \dots$ merupakan barisan geometrik.
19. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{a+b}{2}$.
20. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah \sqrt{ab} .
21. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Dua buah dadu seimbang di tos sebanyak 1 kali secara bersamaan. Jika peluang mendapatkan jumlah mata dadu 7 atau 11 adalah P . Tentukan $36P$.
2. Tentukan banyaknya bilangan asli kelipatan 2018 yang kurang dari 10^9 dimana empat digit terakhirnya adalah 2018.
3. Diberikan segitiga ABC . Misalkan titik D, E, F berturut-turut terletak pada segmen BC, CA, AB sehingga AD, BE, CF berpotongan di satu titik P . Diketahui $AC = 3AE$ dan $BD = 3DC$. Bila dinyatakan dalam bentuk pecahan paling sederhana, perbandingan $CP : PF$ memiliki bentuk $\frac{m}{n}$. Tentukan $m + n$.
4. Kelas Nab diberikan 26 buah ulangan harian selama satu semester. Diketahui di setiap ulangan, hanya ada tepat satu orang yang memiliki nilai lebih rendah dari Nab. Namun, nilai rata-rata Nab dari semua ulangan tersebut adalah rata-rata tertinggi di kelas tersebut. Tentukan banyak murid (termasuk Nab) maksimum di kelas tersebut.
5. Tentukan banyaknya cara menyusun 8 buah benteng identik pada papan catur 8×8 sehingga tidak ada 2 benteng yang saling menyerang. (Dua benteng dikatakan saling menyerang jika kedua benteng tersebut terletak sekolom atau sebaris.)
6. Diberikan titik A, B, C yang terletak segaris dalam urutan A, B, C . Buat lingkaran k yang melalui titik B dan C . Garis sumbu segmen BC memotong k di D dan E . Misalkan titik F merupakan perpotongan segmen AD dengan k untuk yang kedua kalinya (F berbeda dengan D). Jika panjang $AB = 1000$ dan $BC = 2018$ dan $\frac{BF}{FC} = \frac{a}{b}$ dimana $FPB(a, b) = 1$, tentukan $a + b$.
7. Diberikan barisan $\{a_n\}$ yang memenuhi $a_1 = 1$ dan

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$$

untuk setiap bilangan asli n . Jika B adalah barisan $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{2017})$ dimana $(-1)^{n-1}a_nb_{2018-n} = 2$ untuk setiap bilangan asli n kurang dari 2018, tentukan nilai penjumlahan semua anggota himpunan B .

8. Diketahui banyak faktor prima bilangan asli a dan b tidak lebih dari 2, namun a dan b keduanya habis dibagi oleh suatu bilangan kuadrat yang lebih besar dari 1. Jika faktor persekutuan terbesar dari $ab, a + b, a - b$ adalah 6, tentukan nilai terkecil dari $a + b$ yang mungkin.
9. Tentukan sisa pembagian $226!0! + 224!2! + 222!4! + 220!6! + \dots + 6!220! + 4!222! + 2!224! + 0!226!$ dibagi 227.
10. Terdapat 8 titik pada bidang sehingga tidak terdapat tiga titik yang terletak pada satu garis. Tentukan banyak maksimum segitiga yang terbentuk dari titik-titik tersebut sedemikian hingga tidak ada dua segitiga yang memiliki lebih dari 1 titik sudut yang sama.

11. Jika a, b, c adalah bilangan real positif dan nilai minimum dari

$$\frac{3a - 11b - 10c}{6a + 12b + 8c} + \frac{11b + 4c}{24a + 4b + 16c} - \frac{a - 2c}{6a + 9b + 3c}$$

adalah $\frac{p}{q}$, dimana p adalah bilangan bulat dan q adalah bilangan asli dengan $FPB(p, q) = 1$, tentukan nilai dari $p + q$.

12. Misalkan $\triangle ABC$ adalah segitiga lancip dengan lingkaran luar berjari-jari 3 dan berpusat di titik O . Lingkaran luar $\triangle AOC$ memotong BC sekali lagi di titik D . Jika $\sin \angle BCA = \frac{2}{3}$ dan jarak D ke sisi AB adalah 6, hitunglah $DA^2 + OA^2$.

13. Titik-titik $(2, 2), (-2, 2), (2, -2), (-2, -2)$ membentuk sebuah persegi pada bidang kartesius. Seekor semut berada di titik $(0, 0)$. Pada setiap detik, apabila semut berada pada titik (x, y) maka semut tersebut dapat bergerak dengan probabilitas yang sama ke salah satu dari titik-titik $(x + 1, y + 1), (x + 1, y), (x + 1, y - 1), (x, y + 1), (x, y - 1), (x - 1, y + 1), (x - 1, y), (x - 1, y - 1)$. Semut tersebut akan menyentuh persegi untuk pertama kali, pada salah satu dari keempat sudutnya, atau pada salah satu dari 12 titik latis yang terletak pada sisi persegi. Jika peluang bahwa semut tersebut akan menyentuh persegi untuk pertama kali pada sisi persegi (bukan titik sudutnya) adalah $\frac{m}{n}$, dimana m dan n relatif prima, tentukan nilai $m + n$.

14. Tentukan bilangan komposit n terkecil sehingga

$$n \mid 1^{\phi(n)} + 2^{\phi(n)} + 3^{\phi(n)} + \dots + (n - 1)^{\phi(n)} + 1.$$

dimana $\phi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang relatif prima dan kurang dari n .

15. Diberikan lingkaran k dengan jari-jari 4. Buat garis l yang menyinggung k pada titik X . Terdapat lingkaran Γ_1 berjari-jari r_1 dengan pusat O_1 yang menyinggung k di luar, dimana pusat O_1 terletak pada garis l . Untuk setiap $i = 2, 3, \dots, 2018$, buat lingkaran Γ_i berjari-jari r_i dengan pusat O_i sehingga Γ_i menyinggung Γ_{i-1} dan k di luar, serta O_i terletak pada l dan diantara O_{i-1} dan X . Jika $r_1 = 1$ dan nilai dari

$$\sum_{i=1}^{2018} r_i$$

dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima, tentukan $a + b$.

16. Tentukan jumlah dari semua nilai yang mungkin dari $f(2018)$, dimana f adalah fungsi dari himpunan bilangan real ke himpunan bilangan real sehingga untuk setiap bilangan real x, y , dan z , berlaku

$$f(zf(x)f(y)) + f(f(z)(f(x) + f(y))) = f(xyz + xz + yz).$$

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Pasangan bilangan asli (x, y) dikatakan *serasi* apabila memenuhi persamaan

$$3^x - 2^y = 23.$$

- (a) Tentukan semua pasangan *serasi* (x, y) dengan $y \leq 2$.
 - (b) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n , $3^n + 1$ tidak habis dibagi 8.
 - i. Buktikan untuk n ganjil.
 - ii. Buktikan untuk n genap.
 - (c) Tentukan semua pasangan *serasi*.
2. Diberikan segitiga ABC lancip. Sebuah persegi panjang akan dibuat di dalam segitiga sehingga keempat titik sudutnya berada pada sisi-sisi segitiga. Jika luas persegi panjang tersebut adalah L dan luas $\triangle ABC$ adalah $[ABC]$, buktikan bahwa

$$L \leq \frac{1}{2}[ABC].$$

3. Buktikan untuk setiap x, y, z real positif dan $xyz = 1$, berlaku

$$(x + y + z)^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 9 + 2(x^3 + y^3 + z^3) + 4 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right).$$

4. Diberikan sebuah papan berukuran 5×5 dengan 25 kotak berukuran 1×1 . Di setiap kotak, terdapat tepat sebuah lampu yang awalnya mati. Definisikan sebuah operasi sebagai berikut: pilih sebuah lampu. Kemudian, ubah status dari lampu-lampu yang berada tepat di atas, bawah, kiri dan kanan (jika ada) dari lampu yang dipilih. (Jika status lampu adalah mati, maka lampu tersebut akan menyala setelah operasi. Jika status lampu adalah menyala, maka lampu tersebut akan mati setelah operasi).

Buktikan bahwa, setelah melakukan beberapa operasi, Anda tidak bisa memperoleh kondisi dimana hanya ada tepat 1 buah lampu menyala pada papan tersebut.