Pemanasan Sebelum OSN

Audrey Felicio Anwar

A. Sedikit Kata Pengantar

Tak terasa OSN 2019 tinggal beberapa hari lagi. Perkenalkan, nama saya Audrey Felicio Anwar, medali perak OSN 2018. Saya membuat modul ini karena saya ingin berkontribusi bagi perkembangan olimpiade matematika di Indonesia. Soal-soal ini silakan untuk dijadikan pemanasan sebelum OSN yang sesungguhnya bagi kalian yang lolos ke tingkat nasional (selamat!). Bagi yang belum mencapai tingkat nasional atau bagi veteran-veteran yang masih ingin menikmati soal-soal olimpiade matematika SMA ataupun mereka yang hanya menggemari matematika, kalian juga dapat menikmati soal-soal berikut. Soal-soal ini terbuka untuk dikerjakan siapapun.

Sumber sengaja tidak disertakan karena penulis modul ingin semua yang mengerjakan berusaha semaksimal mungkin dan tidak hanya mengerjakan sebentar kemudian langsung melihat solusi dari soal. Bagi yang ingin meminta sumber, solusi, menemukan kesalahan pada soal baik itu typo atau yang lainnya, atau yang ingin dikoreksi solusinya oleh penulis, kalian dapat menghubungi penulis melalui email di **audreyanwar@gmail.com**. Mohon maaf apabila email kalian mungkin lama dibalasnya :(. Selamat mengerjakan dan semoga dapat meraih yang terbaik di OSN nanti.

Salam hangat,
Audrey Felicio Anwar

B. Soal-Soal

1. Misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $ab + bc + ac = 1$. Buktikan bahwa

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

2. Misalkan p, q adalah bilangan prima yang memenuhi

$$\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$$

Untuk suatu n bilangan asli. Tentukan semua nilai $q-p$ yang mungkin.

3. Sebuah bilangan asli dikatakan *keren* jika terdapat kelipatan dari bilangan tersebut yang empat digit pertamanya adalah 2019. Apakah ada bilangan asli yang tidak *keren*?

4. Diberikan sebuah segitiga lancip $\triangle ABC$. Titik M adalah pertengahan segmen garis BC. D, E adalah titik pusat lingkaran singgung luar terhadap M dari $\triangle AMB, \triangle AMC$ secara berturut-turut. Lingkaran luar $\triangle ABD$ memotong BC di B dan F. Lingkaran luar $\triangle ACE$ memotong BC di C dan G. Buktikan bahwa $BF = CG$.

5. Tentukan dengan bukti bilangan prima terkecil p sehingga terdapat bilangan asli n yang memenuhi $p \mid n^2 + 5n + 23$.

6. Sebut sebuah himpunan bilangan asli *baik* apabila tidak ada 4 elemen berbeda a, b, c, d dari himpunan tersebut sehinggga $a + b = c + d$. Sebagai contoh $\{1, 2, 3, 5\}$ baik, namun $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tidak karena $1 + 4 = 2 + 3$. Misalkan S adalah himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tentukan banyak anggota maksimum dari S jika S *baik*.

7. Diberikan sebuah polinomial kubik $x^3 + ax^2 + bx + c$ yang memiliki 3 buah akar real. Misalkan m, n adalah akar terbesar dan terkecil, secara berturut-turut dari persamaan tersebut. Buktikan bahwa $\sqrt{a^2 - 3b} \leq m - n$.

8. Tentukan semua triple bilangan asli (a, x, y) yang memenuhi

$$ax + FPB(a, x) + KPK(a, x) = ay + FPB(a, y) + KPK(a, y)$$

9. Misalkan $n > 1$ adalah bilangan bulat. Sebuah persegi $n \times n$ dibagi menjadi n^2 persegi satuan. n buah persegi satuan akan diwarnai hijau, n buah persegi satuan akan diwarnai biru, dan sisanya akan diwarnai putih. Misalkan A adalah banyaknya cara mewarnai persegi sehingga terdapat tepat satu persegi hijau di setiap baris dan satu persegi biru di setiap kolom. Misalkan juga B adalah banyaknya cara mewarnai persegi sehingga di setiap baris terdapat tepat satu persegi hijau dan satu persegi biru. Tentukanlah mana yang lebih besar, A atau B.

10. Diberikan sebuah $\triangle ABC$ dengan $AB \neq AC$. Misalkan H, O, dan D adalah titik tinggi $\triangle ABC$, titik pusat lingkaran luar $\triangle ABC$, dan titik tengah BC secara berturut-turut. HD dan AO berpotongan di P. Buktikan bahwa $\triangle ABC$ dan $\triangle AHP$ memiliki titik berat yang sama.

11. Tentukan semua pasangan polinomial berkoefisien real (f, g) yang memenuhi

$$x^2 g(x) = f(g(x))$$

untuk setiap x bilangan real.

12. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$f(ab) = f(a + b)$$

untuk setiap a, b bilangan irrasional.

13. Misalkan $k, n > 1$ adalah bilangan asli ganjil sehingga terdapat bilangan asli a yang memenuhi $k|2^a + 1$ dan $n|2^a - 1$. Buktikan bahwa tidak ada bilangan asli b sehingga $k|2^b - 1$ dan $n|2^b + 1$.

14. Beberapa buah koin ditempatkan pada beberapa persegi satuan di papan berukuran 20×19, dengan setiap persegi satuan memuat tepat satu koin. Dua buah koin dikatakan *serasi* jika kedua koin tersebut terletak pada kolom atau baris yang sama dan tidak ada koin lain di antara mereka. Berapa maksimal banyaknya koin yang mungkin ditempatkan jika diketahui bahwa setiap koin *serasi* dengan maksimal dua koin lainnya?

15. Untuk setiap n bilangan asli, tentukanlah nilai maksimum dari

$$\frac{1 - x^n - (1-x)^n}{x(1-x)^n + (1-x)x^n}$$

dengan $0 < x < 1$.

16. Diberikan sebuah $\triangle ABC$ dengan $AB = BC$. Misalkan Γ menyatakan lingkaran luar $\triangle ABC$ dan I menyatakan pusat lingkaran dalam $\triangle ABC$. Garis BI dan CI memotong Γ di M dan N secara berturut-turut. Misalkan D suatu titik pada busur BC yang tidak mengandung A. Garis AD memotong BI dan CI di E dan F secara berturut-turut. Garis DM berpotongan dengan garis CI di P dan garis DN berpotongan dengan garis BI di Q. Misalkan garis CE dan BF berpotongan di X. Buktikan bahwa X, I, P, Q terletak pada satu lingkaran yang sama.

17. Definisikan sebuah domino sebagai persegi panjang berukuran 2×1 atau 1×2 petak satuan. Domino-domino diletakan pada sebuah papan $n \times n$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Setiap domino tepat menutupi 2 petak satuan dan tidak ada yang saling tumpang tindih. Definisikan nilai dari suatu baris atau kolom sebagai banyaknya domino yang menutupi setidaknya satu petak satuan pada baris atau kolom tersebut. Sebut sebuah konfigurasi domino *memuaskan* jika setiap baris dan kolom bernilai sama, namun tidak boleh semuanya bernilai 0. Buktikan terdapat suatu konfigurasi yang *memuaskan* untuk setiap $n \geq 3$ dan tentukan banyaknya domino minimal pada konfigurasi *memuaskan* tersebut.

18. Diberikan sebuah $\triangle ABC$. Definisikan r_A sebagai garis yang melalui titik tengah BC dan tegak lurus dengan garis bagi $\angle BAC$. Dengan cara serupa, definisikan juga r_B dan r_C. Misalkan H dan I menyatakan titik tinggi dan pusat lingkaran dalam secara berturut-turut dari $\triangle ABC$. Buktikan bahwa pusat lingkaran luar dari segitiga yang dibentuk oleh garis r_A, r_B, r_C adalah titik tengah HI.

19. Diberikan suatu himpunan sebagai berikut

$$A = \{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Untuk setiap bilangan asli $x \geq 2$, definisikan $f(x)$ sebagai nilai minimal sehingga x dapat ditulis sebagai perkalian $f(x)$ anggota (tidak harus berbeda) dari A. Tunjukan bahwa terdapat tak berhingga banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) sehingga

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

20. Diberikan sebuah $\triangle ABC$ dengan setiap panjang sisinya berbeda. Misalkan O pusat lingkaran luar $\triangle ABC$ dan A' berada pada perpanjangan AO sehingga $\angle BA'A = \angle CA'A$. A_1, A_2 terletak pada garis AB dan AC sehingga $A'A_1 \perp AB, A'A_2 \perp AC$. H_A terletak pada garis BC sehingga $AH_A \perp BC$. Notasikan R_A sebagai jari-jari lingkaran luar $\triangle H_A A_1 A_2$. Dengan cara serupa, definisikan R_B dan R_C. Tunjukan bahwa

$$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} = \frac{2}{R}$$

Dengan R jari-jari lingkaran luar $\triangle ABC$.

C. Petunjuk

1. Apakah benar bahwa $\sqrt{a + \frac{1}{a}} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c}$?
2. $\frac{p}{p+1} = 1 - \frac{1}{p+1}, \frac{q+1}{q} = 1 + \frac{1}{q}, \frac{2n}{n+2} = 2 - \frac{4}{n+2}$.
3. Semua bilangan keren :)
4. Cukup menggunakan Angle Chasing.
5. p nya cukup kecil, bisa Anda kuli.
6. Apakah $S = 6$ mungkin?
7. Teorema vieta dan sedikit bongkar.
8. mod a kedua ruas.
9. Fix pewarnaan hijaunya. Anda cukup meninjau pewarnaan biru di A dan B.
10. Buktikan AP diameter dari lingkaran luar $\triangle ABC$.
11. Bagi kasus ketika f, g konstan dan ketika tidak. Tinjau derajat dari f dan g.
12. Buktikan untuk setiap k bilangan rasional, terdapat a, b irrasional sehingga $a + b = k$ dan ab irrasional.
13. Tinjau order dari 2 mod k.

14. Buat dalam graph dengan koin-koin menjadi vertices dari graph dan edge menyatakan hubungan serasi. Misalkan x_i adalah banyak vertice pada baris ke i. Buktikan bahwa jumlah degree semua vertice pada baris ke i $\geq 2x_i - 2$. Bagaimana dengan yang kolom?
15. Misalkan $x = \dfrac{a}{a+b}$. Untuk suatu $a, b \in R$.
16. Buktikan D, I, P, Q juga siklis. Soal ini hanya menggunakan angle chasing.
17. Asumsikan terdapat sebuah konfigurasi memuaskan. Hitung jumlah nilai semua baris dan kolom pada konfigurasi memuaskan tersebut. Apa yang dapat Anda peroleh? Dapatkah dikonstruksi langsung?
18. Homothety.
19. Konstruksi langsung x, y nya.
20. Misalkan H titik tinggi $\triangle ABC$. Buktikan $\triangle BHC \sim \triangle A_1 H_A A_2$.