

Вопросы к экзамену по теории вероятностей.

1. Пространство элементарных исходов. Случайные события. Операции над событиями.
2. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности.
3. Геометрическое определение вероятности. Задача Бюффона об игле.
4. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятности.
5. Аксиома непрерывности. Ее смысл и вывод.
6. Свойства операций сложения и умножения. Формула сложения вероятностей.
7. Независимость событий. Независимые события в совокупности и попарно. Пример Бернштейна.
8. Условная вероятность. Формула умножения событий.
9. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
10. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли.
11. Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа (без док-ва).
12. Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события. Закон больших чисел Бернулли.
13. Схемы испытаний: Бернулли, до первого успеха. Биномиальное и геометрическое распределения. Свойство отсутствия последействия.
14. Урновая схема с возвратом и без возврата. Гипергеометрическое распределение. Теорема об его асимптотическом приближении к биномиальному.
15. Схема Пуассона. Формула Пуассона. Оценка погрешности в формуле Пуассона.
16. Случайные величины, определение. Измеримость функции, ее смысл. Вероятностное пространство (R, B, P) . Распределение случайной величины.
17. Дискретные случайные величины. Определение, закон распределения, числовые характеристики.
18. Свойства математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.
19. Стандартные дискретные распределения и их числовые характеристики (Бернулли, биномиальное, геометрическое, Пуассона).
20. Функция распределения и ее свойства (в свойствах 4, 5, 6 достаточно привести одно из доказательств).
21. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность и ее свойства.
22. Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины, их свойства.
23. Равномерное распределение.
24. Показательное распределение. Свойство нестарения.
25. Нормальное распределение. Стандартное нормальное распределение, его числовые характеристики.
26. Связь между стандартным нормальным и нормальным распределениями. Следствия.
27. Сингулярные распределения. Теорема Лебега (без док-ва).
28. Преобразования случайных величин. Борелевские функции. Стандартизация случайной величины.
29. Линейное преобразование случайной величины. Теорема о монотонном преобразовании (без док-ва).
30. Квантильное преобразование. Моделирование случайной величины с помощью датчика случайных чисел.

31. Виды сходимостей случайных величин, связь между ними. Теорема об эквивалентности сходимостей к константе (все без док-ва).
32. Математическое ожидание преобразованной случайной величины. Свойства моментов.
33. Неравенство Йенсена, следствие.
34. Неравенства Маркова, Чебышева, правило трех сигм.
35. Среднее арифметическое одинаковых независимых случайных величин. Закон больших чисел Чебышева.
36. Вывод закона больших чисел Бернулли из закона больших чисел Чебышева. Законы больших чисел Хинчина и Колмогорова (только формулировки), закон больших чисел Маркова (с док-м).
37. Совместные распределения случайных величин. Функция совместного распределения, ее свойства. Независимость случайных величин.
38. Дискретная система двух случайных величин. Закон совместного распределения. Маргинальные распределения.
39. Абсолютно непрерывная система двух случайных величин. Плотность совместного распределения, ее свойства.
40. Функции от двух случайных величин. Теорема о функции распределения. Формула свертки.
41. Суммы стандартных распределений, устойчивость по суммированию (биномиальное, Пуассона, стандартное нормальное).
42. Условные распределения и условные математические ожидания. Случаи дискретной и абсолютно непрерывной систем двух случайных величин.
43. Пространство случайных величин. Скалярное произведение, неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
44. Условное математическое ожидание как случайная величина, его свойства. Формула полного математического ожидания.
45. Условная дисперсия. Закон полной дисперсии. Смысл второго слагаемого в разложении дисперсии.
46. Числовые характеристики зависимости случайных величин. Ковариация, ее свойства. Коэффициент корреляции, его свойства. Корреляция случайных величин.
47. Характеристическая функция случайной величины, ее свойства. Теорема о непрерывном соответствии (формулировка).
48. Характеристические функции стандартных распределений (Бернулли, биномиальное, Пуассона, нормальное). Следствия.
49. Доказательство закона больших чисел Хинчина.
50. Центральная предельная теорема. Смысл и доказательство.
51. Центральная предельная теорема. Вывод из нее предельной теоремы Муавра-Лапласа. Неравенство Берри-Ессеена (формулировка).
52. Производящая функция моментов. Свойства.
53. Оценка хвостов биномиального распределения. Общий случай и идея. Упрощенная оценка аддитивной формы (без док-ва).
54. Мультипликативная форма (граница Чернова, с док-м).
55. Принятие решения в условиях полной неопределенности. Критерии максимакса, Вальда, Лапласа.
56. Принятие решений в условиях риска. Критерии Байеса, минимального риска, обобщенный и по приемлемому уровню прибыли.

Билет 1.

1. Пространство элементарных исходов. Случайные события. Операции над событиями.
2. Доказательство закона больших чисел Хинчина.

Билет 2.

1. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности.
2. Центральная предельная теорема. Вывод из нее предельной теоремы Муавра-Лапласа. Неравенство Берри-Ессеена (формулировка).

Билет 3.

1. Геометрическое определение вероятности. Задача Бюффона об игле.
2. Характеристическая функция случайной величины, ее свойства. Теорема о непрерывном соответствии (формулировка).

Билет 4.

1. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятности.
2. Связь между стандартным нормальным и нормальным распределениями. Следствия.

Билет 5.

1. Аксиома непрерывности. Ее смысл и вывод.
2. Числовые характеристики зависимости случайных величин. Ковариация, ее свойства. Коэффициент корреляции, его свойства. Корреляция случайных величин.

Билет 6.

1. Свойства операций сложения и умножения. Формула сложения вероятностей.
2. Характеристические функции стандартных распределений (Бернулли, биномиальное, Пуассона, нормальное). Следствия.

Билет 7.

1. Независимость событий. Независимые события в совокупности и попарно.
Пример Бернштейна.
2. Пространство случайных величин. Скалярное произведение, неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Билет 8.

1. Условная вероятность. Формула умножения событий.
2. Условное математическое ожидание как случайная величина, его свойства. Формула полного математического ожидания.

Билет 9.

1. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
2. Условная дисперсия. Закон полной дисперсии. Смысл второго слагаемого в разложении дисперсии.

Билет 10.

1. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли.
2. Сингулярные распределения. Теорема Лебега (без док-ва).

Билет 11.

1. Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа (без док-ва).
2. Функции от двух случайных величин. Теорема о функции распределения. Формула свертки.

Билет 12.

1. Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события.
Закон больших чисел Бернулли.
2. Условные распределения и условные математические ожидания. Случаи дискретной и абсолютно непрерывной систем двух случайных величин.

Билет 13.

1. Схемы испытаний: Бернулли, до первого успеха. Биномиальное и геометрическое распределения. Свойство отсутствия последействия.

2. Абсолютно непрерывная система двух случайных величин. Плотность совместного распределения, ее свойства.

Билет 14.

1. Урновая схема с возвратом и без возврата. Гипергеометрическое распределение. Теорема об его асимптотическом приближении к биномиальному.
2. Совместные распределения случайных величин. Функция совместного распределения, ее свойства. Независимость случайных величин.

Билет 15.

1. Схема Пуассона. Формула Пуассона. Оценка погрешности в формуле Пуассона.
2. Дискретная система двух случайных величин. Закон совместного распределения. Маргинальные распределения.

Билет 16.

1. Случайные величины, определение. Измеримость функции, ее смысл. Вероятностное пространство (R, B, P) . Распределение случайной величины.
2. Среднее арифметическое одинаковых независимых случайных величин. Закон больших чисел Чебышева.

Билет 17.

1. Дискретные случайные величины. Определение, закон распределения, числовые характеристики.
2. Неравенства Маркова, Чебышева, правило трех сигм.

Билет 18.

1. Свойства математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.
2. Преобразования случайных величин. Борелевские функции. Стандартизация случайной величины.

Билет 19.

1. Стандартные дискретные распределения и их числовые характеристики (Бернулли, биномиальное, геометрическое, Пуассона).
2. Линейное преобразование случайной величины. Теорема о монотонном преобразовании (без док-ва).

Билет 20.

1. Функция распределения и ее свойства (в свойствах 4, 5, 6 достаточно привести одно из доказательств).
2. Виды сходимостей случайных величин, связь между ними. Теорема об эквивалентности сходимостей к константе (все без док-ва).

Билет 21.

1. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность и ее свойства.
2. Вывод закона больших чисел Бернулли из закона больших чисел Чебышева. Законы больших чисел Хинчина и Колмогорова (только формулировки), закон больших чисел Маркова (с док-м).

Билет 22.

1. Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины, их свойства.
2. Суммы стандартных распределений, устойчивость по суммированию (биномиальное, Пуассона, стандартное нормальное).

Билет 23.

1. Равномерное распределение.
2. Неравенство Йенсена, следствие.

Билет 24.

1. Показательное распределение. Свойство нестарения.
2. Математическое ожидание преобразованной случайной величины. Свойства моментов.

Билет 25.

1. Нормальное распределение. Стандартное нормальное распределение, его числовые характеристики.
2. Квантильное преобразование. Моделирование случайной величины с помощью датчика случайных чисел.

Билет 26.

1. Производящие функции целочисленных случайных величин. Их свойства (теорема 3 без док-ва).
2. Дискретные случайные величины. Определение, закон распределения, числовые характеристики.

Билет 27.

1. Свертка производящих функций. Свойства. Устойчивость биномиального распределения относительно суммирования.
2. Свойства математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.

Билет 28.

1. Производящая функция моментов. Свойства.
2. Нормальное распределение. Стандартное нормальное распределение, его числовые характеристики.

Билет 29.

1. Оценка хвостов биномиального распределения. Общий случай и идея. Аддитивная форма (без док-ва). Случай $p \geq 1/2$.
2. Стандартные дискретные распределения и их числовые характеристики (Бернулли, биномиальное, геометрическое, Пуассона).

Билет 30.

1. Мультипликативная форма (граница Чернова, с док-м).
2. Равномерное распределение.