Лабораторная работа по Матанализу №1

Группа: M3132 Студент: Назаров Рустам Русланович ИСУ номер: 368563

Аналитический метод:

Исходная последовательность

$$x_n = \operatorname{arctg}\sqrt{2+(-1)^n}\cdot\frac{n}{2n+5}$$

Рассмотрим первые 6 значений

$$x_1 = \overbrace{\operatorname{arctg}1}^{=\pi/4}\cdot\frac{1}{7} = \frac{\pi}{28} \qquad x_2 = \overbrace{\operatorname{arctg}\sqrt{3}}^{\pi/3=}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2\pi}{27}$$

$$x_3 = \overbrace{\operatorname{arctg}1}^{=\pi/4}\cdot\frac{3}{11} = \frac{3\pi}{44} \qquad x_4 = \overbrace{\operatorname{arctg}\sqrt{3}}^{=\pi/3}\cdot\frac{4}{13} = \frac{4\pi}{39}$$

$$x_5 = \overbrace{\operatorname{arctg}1}^{=\pi/4}\cdot\frac{5}{15} = \frac{5\pi}{60} \qquad x_6 = \overbrace{\operatorname{arctg}\sqrt{3}}^{=\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{6}{17} = \frac{6\pi}{51}$$

Мы видим, что значение arctg зависит только от четности числа:

у нечетных чисел $\operatorname{arctg} = \frac{\pi}{4}$ у четных чисел $\operatorname{arctg} = \frac{\pi}{3}$

Тогда разделим последовательность на две подпоследовательности:

⊙ Подпоследовательность нечетных чисел:

Если $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$x_n = x_{2k-1} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2k-1}{4k+3}$$

(подставим в последовательность $2k-1$ вместо $n$ ⇒)

Найдем предел подпоследовательности

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2k-1}{4k+3}\right)^{1:k} = \frac{\pi}{4}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2-\overbrace{\frac{1}{k}}^{\to 0}}{4+\underbrace{\frac{3}{k}}_{\to 0}}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Докажем сходимость:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{2k-1}{4k+3}\right)=\frac{\sqrt{5}}{8} \qquad t_k=\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{2k-1}{4k+3}$$

Предпологаю возрастание:

Док-во по мат. индукции:

База: $k=1$ $\quad t_1<t_2$

$$\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{2-1}{4+3}<\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{4-1}{8+3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{28}<\frac{3\sqrt{5}}{44} \quad \Big| :\sqrt{5}\cdot 28\cdot 44$$

$$44<3\cdot 28$$

$$44<84 \quad \underline{\text{выполнено}}$$

Шаг: $k=m$ $\quad t_m<t_{m+1}$

$$\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{2m-1}{4m+3}<\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{2m+1}{4m+7}$$

$k=m+1$ $\quad t_{m+1}\overset{?}{<}t_{m+2}$

$$\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{2m+1}{4m+7}\overset{?}{<}\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{2m+3}{4m+11} \quad \Big| \cdot\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot(4m+7)(4m+11)$$

$$(2m+1)(4m+11)\overset{?}{<}(2m+3)(4m+7)$$

$$\cancel{8m^2}+\cancel{26m}+11\overset{?}{<}\cancel{8m^2}+\cancel{26m}+21$$

$$11<21$$

доказано

Последовательность монотонно возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sup=\frac{\sqrt{5}}{8}$ (куда стремится)

$\inf=\frac{\sqrt{5}}{28}$ (первому, так как дальше возрастает)

$t_n\uparrow$

$\left.\begin{array}{l} \sup=\frac{\sqrt{5}}{8} \\ \inf=\frac{\sqrt{5}}{28}\end{array}\right\}$ подпоследовательность сходится (т Вейерштрасса)

Докажем по определению первую подпоследовательность

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall k \geq K_0 \qquad |t_k - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{2k-1}{4k+3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{8} \qquad \left|\frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{2k-1}{4k+3} - \frac{\sqrt{5}}{8}\right| < \varepsilon \Leftarrow$

$\left|\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{2k-1}{4k+3} - \frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{4k-2-4k-3}{8k+6}\right)\right| = \left|\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{-5}{8k+6}\right)\right| =$

$= \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{5}{8k+6} < \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{5}{8k} < \varepsilon \Leftarrow$

$\frac{5\sqrt{5}}{32k} < \varepsilon \ \Big| \cdot 32k \Leftarrow 5\sqrt{5} < 32 \cdot \varepsilon \cdot k \Leftarrow$

$k > \frac{5\sqrt{5}}{32\varepsilon} \Leftarrow$

$\Leftarrow K_0 = \left\lceil \frac{5\sqrt{5}}{32 \varepsilon} \right\rceil$

⊙ Подпоследовательность четных чисел

Если $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то

$x_n = x_{2k} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2k}{4k+5}$ (Подставим $2k$, вместо $n$)

Найдем предел подпоследовательности

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2k}{4k+5}\right) \overset{|:k}{=} \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2}{4+\underbrace{\frac{5}{k}}_{\to 0}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

Докажем сходимость:

$\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2k}{4k+5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{6} \qquad f_k = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2k}{4k+5}$

Предполагаю возрастание. Док-во по мат. индукции: $\quad$ т.к. $\left|\cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 27 \cdot 39\right.$

База: $k=1 \quad f_k < f_{k+1} \quad \frac{2\sqrt{5}}{27} < \frac{4\sqrt{5}}{39} \qquad 78 < 108$ доказано

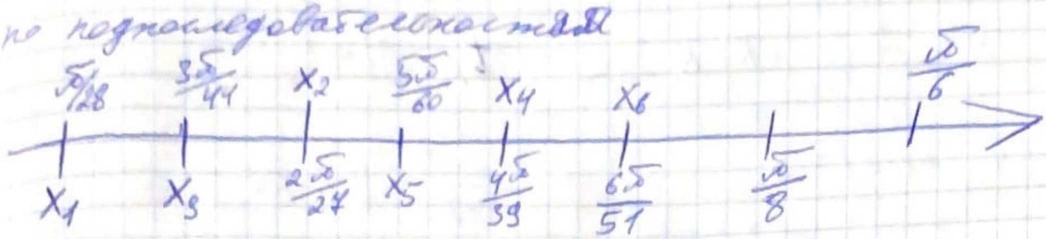
Шаг: $k=m \quad f_m < f_{m+1} \quad k=m+1 \quad f_{m+1} \overset{?}{<} f_{m+2} \quad \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2m+2}{4m+9} < \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2m+4}{4m+17}$

$(2m+2)(4m+13) < (2m+4)(4m+9) \qquad 34 < 36$ доказано

$f_k$ монотонно $\uparrow$; $\sup = \frac{\sqrt{5}}{6} \Rightarrow$ сходится (т Вейерштрасса)

$\inf = f_1 = \frac{2\sqrt{5}}{27}$

Итак рассмотрим значения последовательности по подпоследовательностям




$\sup = \frac{\sqrt5}{6}$ $\qquad \overline{\lim} = \frac{\sqrt5}{6}$

$\inf = \frac{\sqrt5}{28}$ $\qquad \underline{\lim} = \frac{\sqrt5}{8}$

Наибольшего max нет, т.к. посл. стремится к $\frac{\sqrt5}{6}$, но не равна ним. $\min = \frac{\sqrt5}{28}$ (т.к. дальше возрастает)

Докажем расходимость $x_n$:

$x_n = \operatorname{arctg}\sqrt{2+(-1)^n}\cdot\frac{n}{2n+5}$

Последовательность расходится, если выполняется обратный ~~теорема~~ критерий Коши

$\exists \varepsilon>0 \ \ \forall n_0\in\mathbb{N} \ \ \exists n\geq n_0 : \exists p\in\mathbb{N} \ \ |x_{n+p}-x_n|>\varepsilon$

$|x_{n+p}-x_n| = \left|\operatorname{arctg}\sqrt{2+(-1)^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{2n+7}+\dots+\operatorname{arctg}\sqrt{2+(-1)^{n+p}}\cdot\frac{n+p}{2n+2p+7}\right| =$

$= \left|\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2+(-1)^{n+1}}\cdot(n+1)}{2n+7}+\dots+\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2+(-1)^{n+p}}\cdot(n+p)}{2n+2p+7}\right| >$

Возьмем min числитель и max знаменатель и заменим

$> \left|\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2+(-1)^{n+1}}\cdot(n+1)}{2n+2p+7}\cdot p\right| > \left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2+(-1)^{n+1}}\,(n^2+n)}{4n+7}\right) \to \frac{\operatorname{arctg}}{0} \to +\infty$

(Пусть $p=n$, можем из "$\exists p\in\mathbb{N}$", тогда)

(разделим на $n^2$)

$+\infty > \varepsilon$

т.к. $\exists\varepsilon$, $0<\varepsilon<+\infty$

$\Longleftarrow$ Расходится

Язык Программирования: Python Версия языка: 3.8

In [1]:
```python
# Импортируем необходимые библиотеки
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
%matplotlib inline
```

In [2]:
```python
# Фунция подсчета значений исходной последовательности
def func(X):
    Y = np.arctan((2 + (-1) ** X) ** 0.5) * X / (2 * X + 5)
    return Y
```

In [3]:
```python
# Фунция подсчета значений подпоследовательности нечетных чисел (нижней)
def func_1(X):
    Y = (math.pi * (X)) / (4 * (2 * X + 5))
    return Y
```

In [4]:
```python
# Фунция подсчета значений подпоследовательности четных чисел (верхней)
def func_2(X):
    Y = (math.pi * (X)) / (3 * (2 * X + 5))
    return Y
```

In [5]:
```python
# Первые 100 точек последовательности
n = np.arange(1, 101, 1)
# Нечетные точки последовательности (Для нижней подпоследовательности)
n_1 = np.arange(1, 101, 2)
# Четные точки последовательности (Для верхней подпоследовательности)
n_2 = np.arange(2, 101, 2)
# Получаем значения последовательности
x_n = func(n)
# Получаем значения последовательности
x_n1 = func_1(n_1)
# Получаем значения верхней подпоследовательности
x_n2 = func_2(n_2)
```

Переносим полученные значения из Аналитического метода

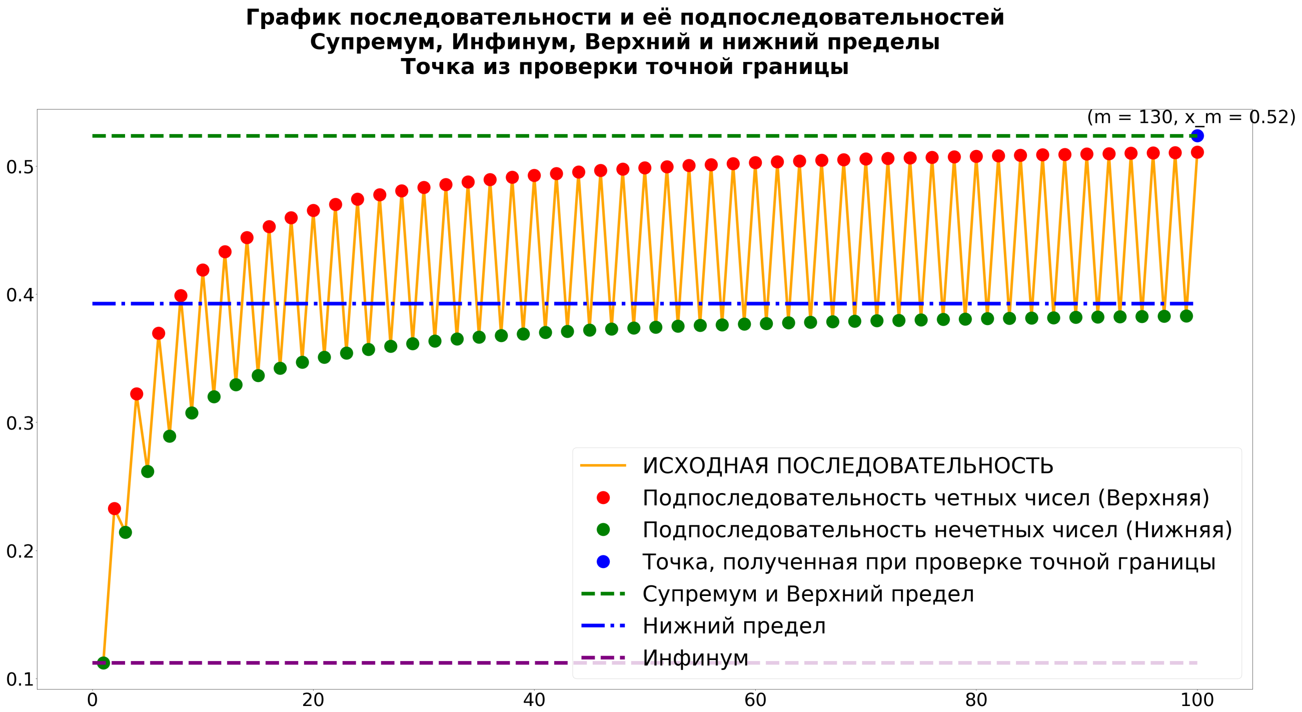
In [6]:
```python
sup = math.pi / 6
# Задаем значение Супремума (и Верхнего предела, так как они равны)
inf = math.pi / 28
# Задаем значение Инфинума
lim_down = math.pi / 8
# Задаем значение Нижнего предела
```

Будем считать, что Эпсилон = 0.01

In [7]:
```python
# Проверим Точную границу
m = 0
x_m = 0
for i in range(100, 501):
    if (func(i) > sup - 0.01):
        m = i
        # Запомним точку, где смогли выйти за границу
        x_m = func(i)
        break
```

Построение графика

In [8]:
```
fig = plt.figure(figsize=(60,30))   # Размер графика

# Заголовок
ax = fig.add_subplot()
fig.subplots_adjust(top=0.85)
fig.suptitle('График последовательности и её подпоследовательностей\n'
             'Супремум, Инфинум, Верхний и нижний пределы\n'
             'Точка из проверки точной границы', fontsize=60, fontweight='bold')

# Размер координат осей абсцисс и ординат
plt.xticks(fontsize = 50)
plt.yticks(fontsize = 50)

# Чертим последовательность
plt.plot(n, x_n, color='orange', linewidth=7,
         label='ИСХОДНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ')

# Чертим Верхнюю подпоследовательность
plt.plot(n_2, x_n2, 'ro', markersize=35,
         label='Подпоследовательность четных чисел (Верхняя)')

# Чертим Нижнюю подпоследовательность
plt.plot(n_1, x_n1, 'go', markersize=35,
         label='Подпоследовательность нечетных чисел (Нижняя)')

# Покажем точку, вышедшую за границу И ее точную координату
plt.plot(100, x_m + 0.01, 'bo', markersize=35,
         label='Точка, полученная при проверке точной границы')
plt.text(90, x_m + 0.02, '({}, {})'.format
    (f"m = {m}", f"x_m = {round(x_m + 0.01, 2)}"), fontsize=50)

# Укажем уровень Супремума и Верхнего предела
plt.hlines(y = sup, xmin=0, xmax=100, linewidth=10,
           linestyle='dashed', colors='green',
           label='Супремум и Верхний предел')

# Укажем уровень Нижнего придела
plt.hlines(y = lim_down, xmin=0, xmax=100, linewidth=10,
           linestyle='dashdot', colors='blue',
           label='Нижний предел')

# Укажем уровень Инфинума
plt.hlines(y = inf, xmin=0, xmax=100, linewidth=10,
           linestyle='dashed', colors='purple', label='Инфинум')

# Выведем Легенду
plt.legend(loc=4, prop={'size': 60})

# Вывод полученного графика
plt.show()
```




Итак, по верхнему графику мы видим, что Инфинум нашли правильно, он и правда является нижней границей и наименьшим значением.

Также, видим, что Нижний предел, который еще является супермумом подпоследовательности нечетных чисел, найден верно, так как подпоследовательность стремится, но не достикает его.

Видим, что Супремум подпоследовательности (и верхний предел) найден правильно, подпоследовательность, и вся последовательность стремятся к нему, но не достигают, это так же значит, что нельзя определить максимальное значение.

Также Видим, что подпоследовательности нашли верно, так как ее точки совпали с графиком нашей последовательности

Выберем подсполседовательность нечетных чисел, которую доказывали по определинию в аналитическом методе, и покажем на графике, как, начиваня от N_0 стремится к своему супермуму (так как выбрали эту точную границу). Выборность подпоследовательности и границы похволяет условие задачи

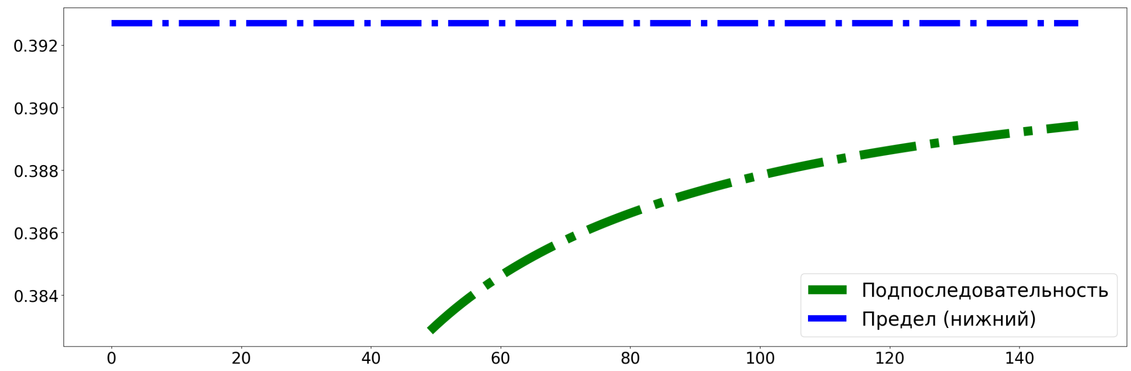
In [9]:
```
# Функция подсчета значений Подпоследовательности
# нечетных чисел (Нижней) точно по решению из Тетради
def func_N_0(X):
    Y = (math.pi * (2 * X - 1))/(4 * (4 * X + 3))
    return Y
```

In [10]:
```
n_0 = (5 * math.pi) / (0.01 * 32)
# Задаем значение N_0, считая Эпсилон = 0.01
X_0 = np.arange(n_0, n_0 + 101, 1)
# 100 точек подпоследовательности начиная с N_0
Y_0 = func_N_0(X_0)
# Получим значения
```

In [11]:

```python
fig = plt.figure(figsize=(30,10))   # Размер графика

# Заголовок
ax = fig.add_subplot()
fig.subplots_adjust(top=0.85)
fig.suptitle('(Нижняя) Подпоследовательность нечетных чисел от N_0',
             fontsize=60, fontweight='bold')

# Размер координат осей
plt.xticks(fontsize = 25)
plt.yticks(fontsize = 25)

# Чертим подпоследовательность
plt.plot(X_0, Y_0, color='green', linestyle='dashdot',
         linewidth=14, label='Подпоследовательность')

# Задаем и чертим её предел
lim_0 = math.pi / 8
plt.hlines(y = lim_0, xmin=0, xmax=n_0 + 100, linewidth=10,
           linestyle='dashdot', colors='blue', label='Предел (нижний)')

# Вывод легенды
plt.legend(loc=4, prop={'size': 30})

# Вывод полученного графика
plt.show()
```

**(Нижняя) Подпоследовательность нечетных чисел от N_0**




Хоть и из-за масштабов не сразу видно, что подпоследовательность, стремится но не достигает, и из-за крупноты кажется, что выходит за окрестность Эпсилон, но, если посмотреть на значение оси ординат, то видно, что расстояние между Подпоследовательностью и Значением предела в рамках окрестности Эпсилон = 0.01