Лабораторная работа №1

Назаров Рустам M3232

Вариант 13

Аналитическая часть

Лаб. №1 Вариант 13

ТИНЬКОФФ

Назаров Рустам M3232

чсем матан

Аналитический метод:

$A = \{x : (x)_{10}$ не содержит "31415" $\}$

$B = \{x : (x)_2$ имеет вид $0{,}00\ldots011\ldots\}$

C - канторово множество

$E = [0; 1]$

$F(x) = [x]$

$$f(x) = \begin{cases} 3, \text{ где } x \in A \Rightarrow x \notin (B \cap C) \\ 14, \text{ где } x \in B \lor x \in C \Rightarrow x \in A \\ 15, \text{ иначе} \end{cases}$$

~~[illegible]~~ - Рассмотрим каждый случай отдельно

I $f(x) = 14$. C - лебегова мера ноль (определение)

B - лебегова мера ноль (т.к. счетно

$f(x) = 14$ очень редко, лебегова мера ноль т.к. очевидно мало) не влияет

II $f(x) = 15$. "иначе" ← содержит "31415"

очев лебегова мера ноль, таких очень мало (счетно) не влияет.

III $f(x) = 3$. "не содержит "31415""

и $x \notin B \cap C$ ← пересечение двух лебегово нулей

основное значение.

ТИНЬКОФФ

1) f измерима по Лебегу на E

будем смотреть на $f(x) > a$.

1) $a < 3$ $\{x: f(x) > a\} = E$ все значения > 3
E - измеримо по Лебегу

2) $3 \leq a < 14$ $\{x: f(x) > a\} =$ ~~[illegible]~~ $= A \setminus (B \cap C)$ измеримо по Лебегу.

C - измеримо по Лебегу
B - счетно, тоже
A - измеримо по Лебегу
(дополнение до E)

3) $14 \leq a < 15$ $\{x: f(x) > a\} = \{x: f(x) = 15\}$

"иначе", когда мы не в A, B и C. т.к. они измеримы по Лебегу.

4) $a \geq 15$ $\{x: f(x) > a\} = \varnothing$ измеримо по Лебегу.

$\Downarrow$

f - измеримо по Лебегу.

2) f_n - ?

$f_n(x) = \begin{cases} 3, \text{ где } x \in A_n, x \notin B_n \cap C_n \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

т.к. все остальные меры Лебега 0

A_n, B_n, C_n - числа с точностью n знаков после запятой

$f_n \to f$, т.к. с $\uparrow n$ 15 и 14 - их кол-во $\to 0$
$f \to 3$

$f_n \leq f$, т.к. мы убрали 15 и 14, только на меньшие.

3) Интеграл Лебега по E

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu$$

т.к. B и C - лебегова мера 0, то $d\mu = 0$, умножение на 0

т.к. "иначе" аналогично, то их считать не будем.

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \lim 3 \cdot m(A_n \setminus (B_n \cap C_n)) =$$

почти везде по E; лебег. мера = 0

E \ "иначе" ← = 0

$$= \lim 3 \cdot m(E) = 3 \cdot 1 = \boxed{3}$$ Ответ: 3

4) доказать Лебега - Стилтьеса μ_F / $F(x) = \lceil x \rceil$

$\mu_F(E) = \int_E dF$ | $F(x)$ - неубывающая кусочно постоянная

$F(b) - F(a)$ $\Delta(0;1]$ $F(b) - F(a) = \lceil b \rceil - \lceil a \rceil = 1 - 1 = 0$

$\Delta [0; c]$ $c \in 1$; $F(b) - F(a) = 1 - 0 = 1$

- Неубывание
- Непрерывность (кроме одной точки)

⇓

интегрируем по Стилтьесу

5) $\int_E f\,d\mu_F$ т.к. $(0;1]$ $F = 0$ $dF = 0$

разим точку 0.

$\int_E f\,d\mu_F = $ ~~…~~ $f(0) \cdot 1$

$f(0) = 14$

$0 \in C$ - Канторово (никогда не середина отр)

$0 \in A$ ⇓ 2 случай

$f(0) \cdot 1 = 14 \cdot 1 = 14$

Ответ: 14

Численная часть

Python 3.8 импорты

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import quad
import math
import time

# Функция для проверки, принадлежит ли точка к Канторову множеству
def is_in_cantor_set(x, n):
    for _ in range(n):
        x *= 3
        if x > 1 and x < 2:  # Если точка попадает в средний удаленный
интервал
            return False
        x %= 1  # Оставляем только дробную часть
    return True

def float_to_binary(x, n): # преобразование в двоичную
    # Получаем дробную часть числа
    x -= int(x)
    binary = "."
    for _ in range(n):
        x *= 2
        if x >= 1:
            binary += "1"
            x -= 1
        else:
            binary += "0"
    return binary

# Функция для проверки, что число имеет вид 0,00...0111...
def has_ones_at_end(x, n):
    # Преобразуем число в двоичную строку с n знаками после запятой
    x_bin = float_to_binary(x, n)
    # Преобразуем число в строку без '0.' в начале и ограничиваем
длину до n знаков после запятой
    # x_str = format(x, f'.{n}f').split('.')[1]
    # Ищем индекс первой единицы с конца строки
    index_of_one = x_bin.rfind('1')
    # Проверяем, что все символы после этой единицы также являются
единицами
    return index_of_one != -1 and x_bin[index_of_one:] == '1' *
(len(x_bin) - index_of_one)

# Функция f_n
def f_n(x, n):
    if '31415' in format(x, '.100f'):  # Проверяем наличие
```

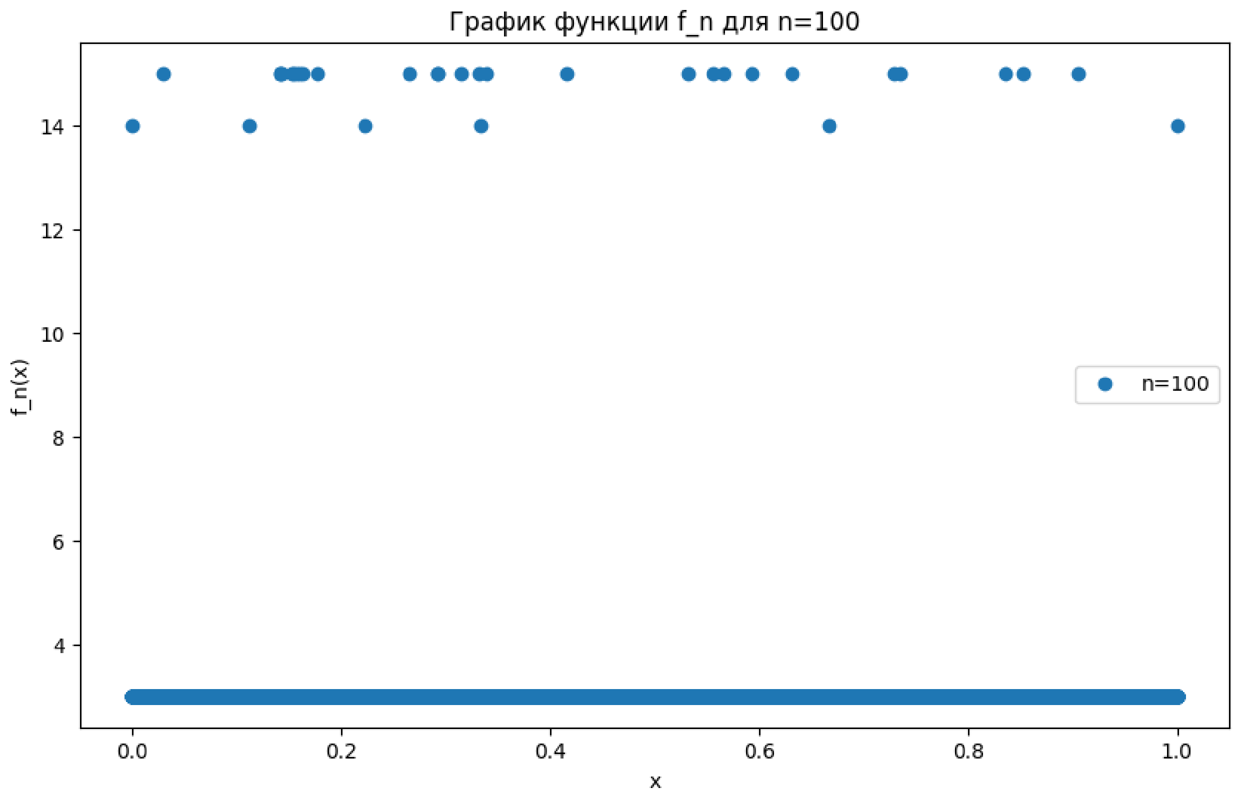
```
последовательности '31415'
        return 15
    elif is_in_cantor_set(x, n) or has_ones_at_end(x, n):
        return 14
    else:
        return 3
```

1. Строим f_n, чтобы увидеть, как стремимся к f

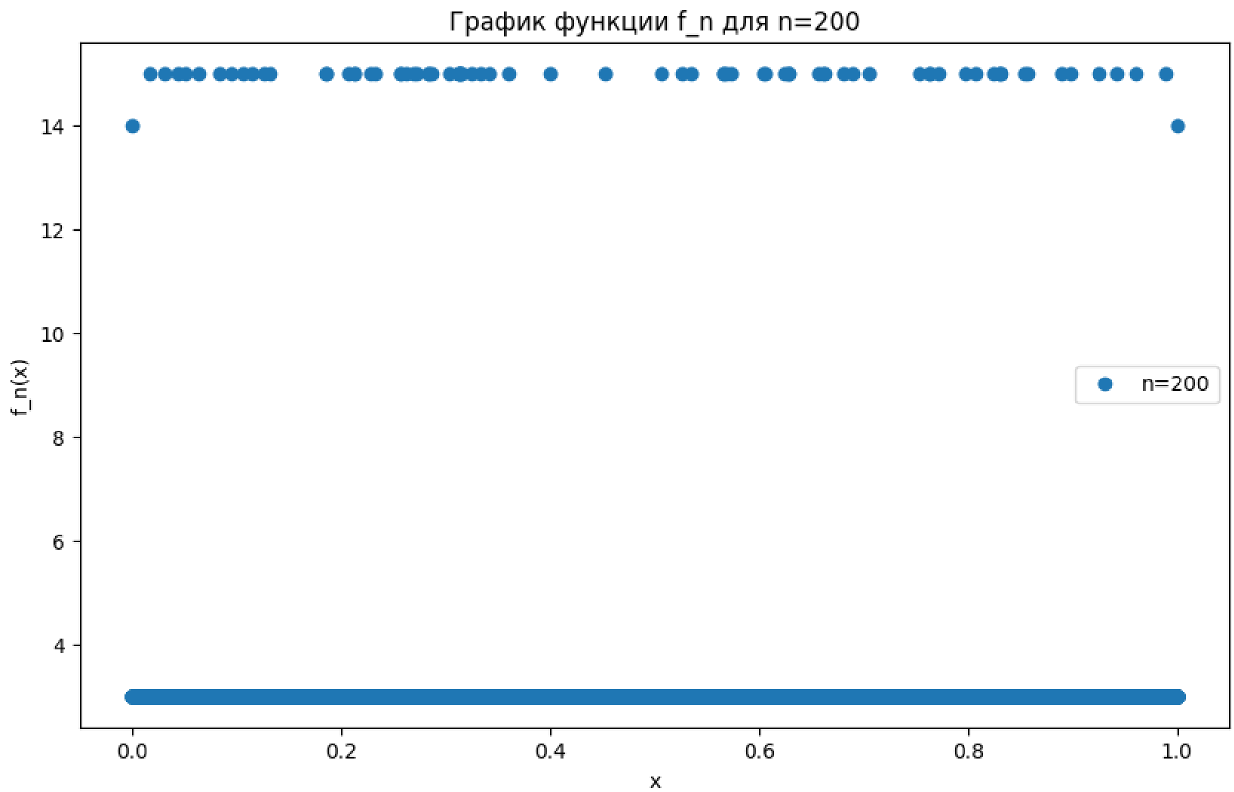
f_n сделаем честной, чтобы численный метод отработал честно. Не будем отбрасывать 15 и 14. Будем работать с **аппроксимацией**.

То есть наши множества A B C ограничены n числами после запятой

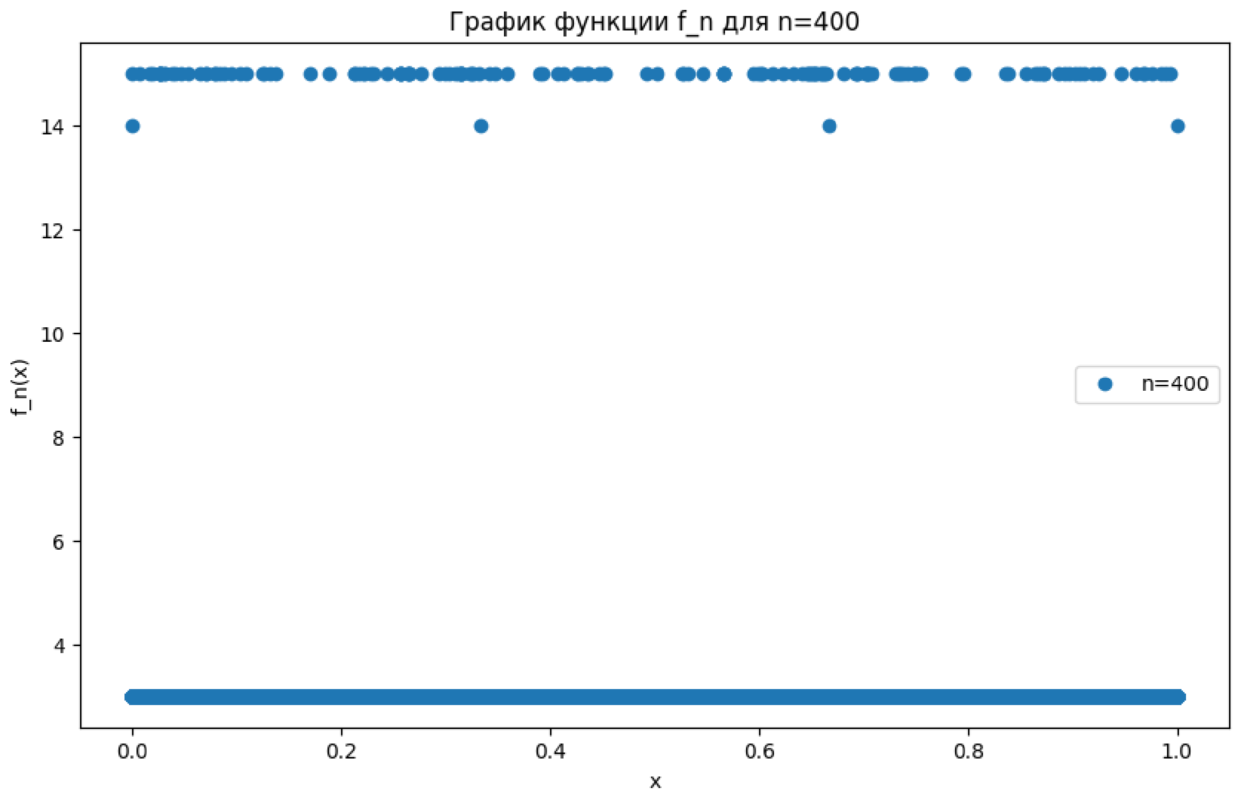
```
# Задайте значения n, для которых нужно построить графики
n_values = [100, 200, 400]

# Цикл для построения графиков для каждого значения n
for n in n_values:
    start_time = time.time()  # Начало замера времени
    # Задайте диапазон x
    x_values = np.linspace(0, 1, 1000 * n)
    # Вычислите значения функции f_n для текущего n
    y_values = [f_n(x, n) for x in x_values]

    # Постройте график
    plt.figure(figsize=(10, 6))  # Создайте новую фигуру для каждого
графика
    plt.plot(x_values, y_values, 'o', label=f'n={n}')
    plt.title(f'График функции f_n для n={n}')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('f_n(x)')
    plt.legend()
    plt.show()

    end_time = time.time()  # Конец замера времени
    print(f"Время построения графика для n={n}: {end_time -
start_time} секунд")
```




```
Время построения графика для n=100: 4.475044250488281 секунд
```




```
Время построения графика для n=200: 12.269102334976196 секунд
```




```
Время построения графика для n=400: 44.43815898895264 секунд
```

Что и требовалось доказать. f_n <= f. Постепенно появляются значения 15 и 14, подходим к количеству 15 и 14 обычной функции. Связано с увеличением числел после запятой. Так же видно, что в основном мы равны трем. 14 и 15 являются лебеговой мерой ноль.

2. Вычислим интеграл Лебега

Сначала сделаем через библиотеку

```
# Вычисление интеграла для разных значений n
for n in [100000]:  # Примеры значений n
    start_time = time.time()  # Начало замера времени

    integral, error = quad(f_n, 0, 1, args=(n,))
    print(f"----------Интеграл f_n для n={n}: {integral}, с погрешностью {error}-----------")

    end_time = time.time()  # Конец замера времени
    print(f"Время для n={n}: {end_time - start_time} секунд\n")
```

```
----------Интеграл f_n для n=100000: 3.0, с погрешностью
3.3306690738754696e-14-----------
Время для n=100000: 0.6984658241271973 секунд
```

Теперь найдем честно

```
# Метод прямоугольников для вычисления интеграла
def rectangle_method(f, a, b, n):
    total_sum = 0
    delta_x = (b - a) / n
    for i in range(n):
        x = a + i * delta_x
        total_sum += f(x, n) * delta_x
    return total_sum

# Вычисление интеграла для разных значений n
for n in [100, 1000, 10000]:  # Примеры значений n
    start_time = time.time()  # Начало замера времени

    integral = rectangle_method(f_n, 0, 1, n)
    print(f"-----------Интеграл f_n для n={n}: {integral}----------")

    end_time = time.time()  # Конец замера времени
    print(f"Время графика для n={n}: {end_time - start_time} секунд\
n")
```

```
-----------Интеграл f_n для n=100: 3.3299999999999994----------
Время графика для n=100: 0.0030012130737304688 секунд

-----------Интеграл f_n для n=1000: 3.0330000000000003----------
Время графика для n=1000: 0.29366278648376465 секунд

-----------Интеграл f_n для n=10000: 3.0033000000004817----------
Время графика для n=10000: 47.44346880912781 секунд
```

Видно стремление к 3. Как и ожидали в аналитике.

3. Интеграл Лебега-Стилтьеса

```
def g(x):
    return math.ceil(x) # наша функция F

# Метод прямоугольников для вычисления интеграла Лебега-Стилтьеса
def lebesgue_stieltjes_integral(f, g, a, b, n):
    total_sum = 0
    delta_x = (b - a) / n
    for i in range(n):
        x = a + i * delta_x
```

```python
        total_sum += f(x, i) * (g(x + delta_x) - g(x))
    return total_sum

# Вычисление интеграла для разных значений n
for n in [100, 1000, 10000]:  # Примеры значений n
    start_time = time.time()  # Начало замера времени

    integral = lebesgue_stieltjes_integral(f_n, g, 0, 1, n)
    print(f"-------------Интеграл Лебега-Стилтьеса f_n для n={n}:
{integral}-----------")

    end_time = time.time()  # Конец замера времени
    print(f"Время графика для n={n}: {end_time - start_time} секунд\
n")
```

```
-------------Интеграл Лебега-Стилтьеса f_n для n=100: 14-----------
Время графика для n=100: 0.0010046958923339844 секунд

-------------Интеграл Лебега-Стилтьеса f_n для n=1000: 14-----------
Время графика для n=1000: 0.12611007690429688 секунд

-------------Интеграл Лебега-Стилтьеса f_n для n=10000: 14-----------
Время графика для n=10000: 20.455270051956177 секунд
```

Как и думали в аналитике. Мы всегда равны 14. Потому что при всех значениях кроме нуля мы равны нулю. В нуле же мы являемся частью множества A B C и равны 14.

Выводы: Получили все, что и в аналитике. Мы стремимся к 3, так как на множестве E равны 3, почти всюду. Интеграл Стилтьеса равен 14, так как емеет значение только точка 0, где мы равны 14. Код все подтвердил

Множества при которых f(x) = 14 или 15 лебеговой меры ноль это было в аналитике и численный метод подтвердил.

На Стилтьессе же (0;1] интеграл равен нулю, как и ожидалось, это подтвердил Численный метод