10.03.2023 Назаров Рустам М3132 368563

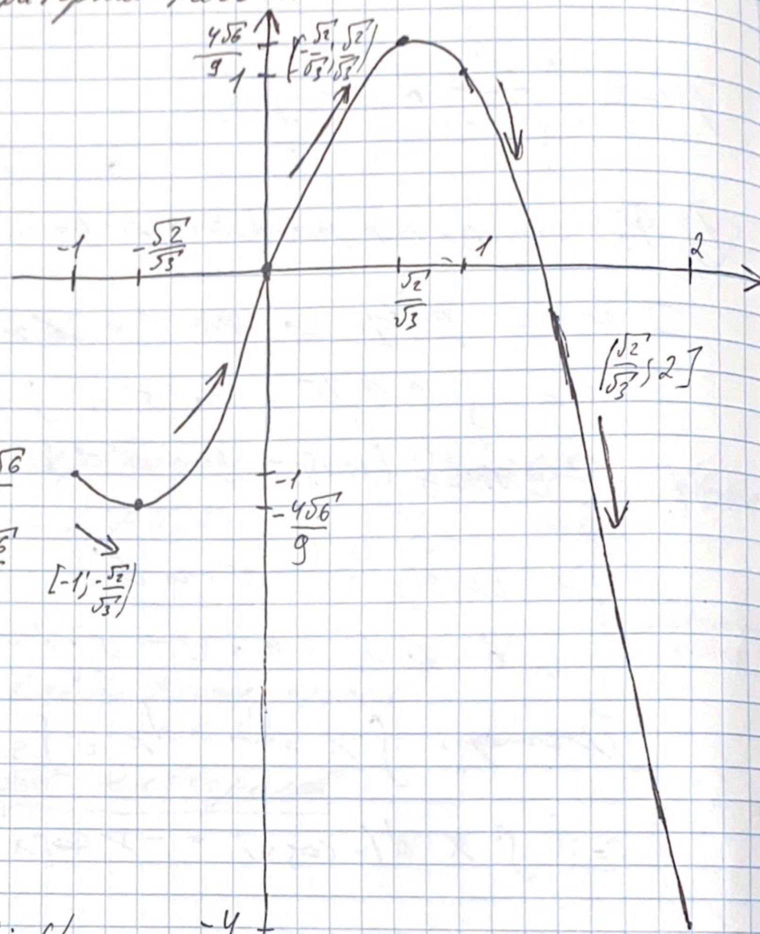
Лабораторная работа

Аналитическая часть.

$f(x)=2x-x^3$ $[-1;2]$

Нашёл несколько точек

x	-1	0	2	1
$f(x)$	-1	0	-4	1



Найдем максимумы и минимумы

$f'(x)=2-3x^2$ Экстремумы

$2-3x^2=0$ $\quad x_1=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$ $f(x_1)=\frac{4\sqrt6}{9}$

$-3x^2=-2$ $\quad x_2=-\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$ $f(x_2)=-\frac{4\sqrt6}{9}$

$x^2=\frac{2}{3}$ $\quad x_3=-1$ $f(x_3)=-1$

$x_4=2$ $f(x_4)=-4$

1) Находим суммы Дарбу

Нижняя:

$\underline{S}_T n=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x$ (m_i – "локальный" inf)

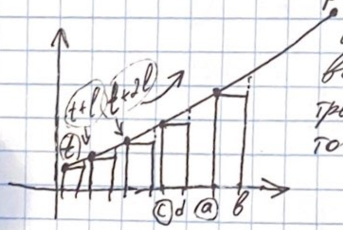
Верхняя:

$\overline{S}_T n=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x$ (M_i – "локальный" sup)

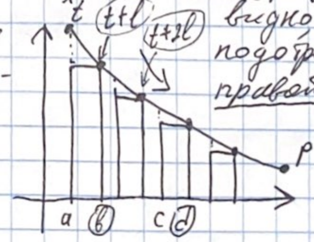
Пусть T - равномерное разбиение на n частей

Как найти локальный inf?

Рассмотрим 2 вида монотонности:



Из рисунка возрастания видно, что, смотря на подотрезки, m_i будет левой точкой подотрезка



Из рисунка убывания видно что, смотря на подотрезки, m_i будет правой крайней точкой подотрезка

Пусть ширина подотрезка = l, тогда

Пусть рассматриваем пром $[t;p]$, тогда

$$\underline{S}_T^{\nearrow} n=\sum_{i=1}^{n}\Delta x\cdot m_i=\sum_{1}^{n} l\cdot f(\underline{t+l\cdot(i-1)})$$

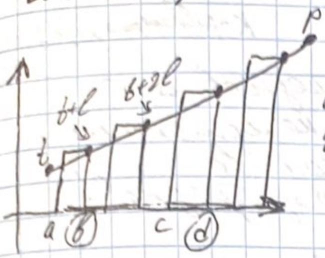
левая точка "на шаг назад"

$$\underline{S}_T^{\searrow} n=\sum_{i=1}^{n}\Delta x\cdot m_i=\sum_{i=1}^{n} l\cdot f(\underline{t+l\cdot i})$$

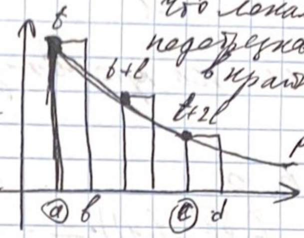
правая точка "шаг вперед"

Как найти локальный sup?

Рассмотрим 2 вида монотонности:



Рассматривая подотрезки, видно, что (на возрастание), что локальным sup будет справа, в крайней точке каждого подотрезка



на убывании видно что локальный inf подотрезков будет слева, в крайней точке подотрезка.

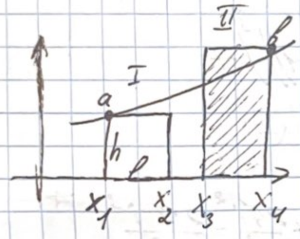
$$S_T^{\wedge n} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot M_i = \sum_{i=1}^{n} l \cdot f(\underbrace{t + l \cdot i}_{\text{каждая правая точка}})$$

$$S_T^{\wedge n} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot M_i = \sum_{i=1}^{n} l \cdot f(\underbrace{t + l(i-1)}_{\text{каждая левая точка}})$$

Почему ΔX - это ширина подотрезка?

Почему m_i и M_i - это $f(\ )$ от какой-то точки?

Сумма Дарбу по сути это сумма площадей прямоугольников, где ΔX - ширина, m_i/M_i - высота



I нижний: $\Delta X = X_{i+1} - X_i = X_2 - X_1$

$l = x_2 - x_1$ — то есть одно и то же

и так как у нас равномерные отрезки то ΔX всегда будет один.

$h = a \quad a = f(x_1)$

берем точку на OX, вставляем в f, вот и $\inf/m_i$ $\quad h = m_i = f(x_i)$

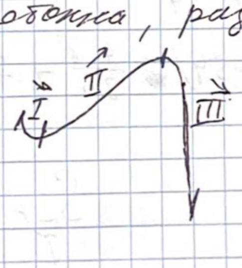
II верхний: аналогично.

В итоге и получается $S_{\square} = h \cdot l = \Delta X \cdot \underset{\Downarrow\ f(x_i)}{m_i}$

Найдем ширину каждого подотрезка, то есть ΔX

$$\Delta X = \frac{\text{длина}}{\text{кол-во}} = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

Так как у нас функция немонотонна, разделим на 3 монотонных промежутка



I - $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]$

II - $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

III - $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; 2\right]$

Тогда:

Нижняя: $\underset{T}{S}n \overset{[-1;2]}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = \underset{F}{S}n + \underset{K}{S}n + \underset{N}{S}n$ $\quad [-1; -\frac{\sqrt2}{\sqrt3}) \; (-\frac{\sqrt2}{\sqrt3}; \frac{\sqrt2}{\sqrt3}) \; [\frac{\sqrt2}{\sqrt3}; 2]$

F - равномерное разбиение $\int$ на $\frac{(3-\sqrt6)n}{9}$

N - равн разб на $\frac{(6-\sqrt6)n}{9}$

K - равномерное разб $\int$ на $\frac{2\sqrt6}{9}n$

Мы поделили на промежутки. Ширина подотрезков Δx не изменилась

Но изменилось кол-во подотрезков!

Теперь не n, а

I $\frac{\text{длина}}{\text{ширина } \Delta x} = \left(-\frac{\sqrt2}{\sqrt3} - (-1)\right) : \frac{3}{n} = \frac{(3-\sqrt6)n}{9}$ $\rightarrow$ левая гран: -1, правая гран: $-\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$

II $\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt3} - \left(-\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\right)\right) : \frac{3}{n} = \frac{2\sqrt6}{9}n$ $\rightarrow$ Л: $-\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$ П: $\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$

III $\left(2 - \frac{\sqrt2}{\sqrt3}\right) : \frac{3}{n} = \frac{(6-\sqrt6)n}{9}$ $\rightarrow$ Л: $\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$ П: 2

Тогда: $[-1;2]$

$$\underset{T}{S}n = \sum_{i=1}^{\frac{3-\sqrt6}{9}n} (\Delta x \cdot m_i) + \sum_{i=1}^{\frac{2\sqrt6 n}{9}} (\Delta x \cdot m_i) + \sum^{\frac{(6-\sqrt6)n}{9}} (\Delta x \cdot m_i)$$

$$\underset{T}{S}n = \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{(3-\sqrt6)n}{9}} f\Big(\underbrace{-1}_{\text{л.г.}} + \underbrace{\frac{3}{n}}_{\Delta n} \cdot \underbrace{i}_{\text{правая точка}}\Big) + \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{2\sqrt6 n}{9}} f\Big(-\frac{\sqrt2}{\sqrt3} + \underbrace{\frac{3}{n}(i-1)}_{\text{левая точка}}\Big) + \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{(6-\sqrt6)n}{9}} f\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt3} + \frac{3}{n} \cdot i\right) =$$

$$= \frac{3}{n} \cdot \sum^{\frac{(3-\sqrt6)n}{9}} \left(2\left(-1 + \frac{3}{n} \cdot i\right) - \left(-1 + \frac{3}{n} \cdot i\right)^3\right) + \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{2\sqrt6 n}{9}} \left(2\left(-\frac{\sqrt2}{\sqrt3} + \frac{3}{n}(i-1)\right) - \left(-\frac{\sqrt2}{\sqrt3} + \frac{3}{n}(i-1)\right)^3\right) +$$

$$+ \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{6-\sqrt6}{9}} \left(2\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt3} + \frac{3}{n} \cdot i\right) - \left(\frac{\sqrt2}{\sqrt3} + \frac{3}{n} \cdot i\right)^3\right) =$$

☆ $2\left(-1 + \frac{3}{n} \cdot i\right) - \left(-1 + \frac{3}{n} \cdot i\right)^3 = -2 + \frac{6i}{n} - \left(-1 + 3\left(\frac{3i}{n}\right) - 3\left(\frac{3i}{n}\right)^2 + \left(\frac{3i}{n}\right)^3\right) = -1 - \frac{3i}{n} + \frac{27i^2}{n^2} - \frac{27i^3}{n^3}$ ☆

$$= \frac{3}{n} \cdot \left(-\sum_1^{\frac{(3-\sqrt6)n}{9}} (1) - \frac{3}{n} \cdot \sum_1^{\frac{(3-\sqrt6)n}{9}} (i) + \frac{27}{n^2} \cdot \sum_1^{\frac{(3-\sqrt6)n}{9}} (i^2) - \frac{27}{n^3} \cdot \sum_1^{\frac{(3-\sqrt6)}{9}} (i^3)\right) + \frac{3}{n} \cdot \left(-\frac{4\sqrt2}{3\sqrt3} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{2\sqrt6 n}{9}} (1) + \frac{27\sqrt2}{\sqrt3 n^2} \sum^{\frac{2\sqrt6 n}{9}} (i^2) - \frac{27}{n^3} \cdot \sum^{\frac{2\sqrt6 n}{9}} (i^3)\right) +$$

$$+ \frac{3}{n} \left(\frac{4\sqrt2}{3\sqrt3} \cdot \sum_1^{\frac{(6-\sqrt6)n}{9}} (1) - \frac{27\sqrt2}{\sqrt3 n^2} \sum (i^2) - \frac{27}{n^3} \sum_1^{\frac{(6-\sqrt6)n}{9}} (i^3)\right) =$$

☆ $S_A = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \quad \sum x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum x^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ☆

$$= \frac{3}{n} \cdot \left(-\frac{(3-\sqrt6)n}{9} + \frac{27}{n^2} \cdot \frac{(3-\sqrt6)n}{54} \cdot \left(\frac{(3-\sqrt6)n + 9}{9}\right)\left(\frac{2(3-\sqrt6)n + 9}{9}\right) - \frac{27}{n^3} \cdot \frac{(3-\sqrt6)^2 n^2}{81 \cdot 4} \cdot \left(\frac{(3-\sqrt6)n}{9} + 1\right)^2\right) +$$

$$+ \frac{3}{n} \cdot \left(-\frac{4\sqrt2}{3\sqrt3} \cdot \frac{2\sqrt6 n}{9} + \frac{27\sqrt2}{\sqrt3 n^2} \cdot \frac{2\sqrt6 n}{54} \cdot \frac{2\sqrt6 n + 9}{9} \cdot \frac{4\sqrt6 n + 9}{9} - \frac{27}{n^3} \cdot \frac{24n^2}{81 \cdot 4} \cdot \left(\frac{2\sqrt6 n}{9} + 1\right)^2\right) +$$

$$+ \frac{3}{n} \cdot \left(\frac{4\sqrt2}{3\sqrt3} \cdot \frac{(6-\sqrt6)n}{9} - \frac{27\sqrt2}{\sqrt3 \cdot n^2} \cdot \frac{(6-\sqrt6)n}{54} \cdot \frac{(6-\sqrt6)n + 9}{9} \cdot \frac{2(6-\sqrt6)n + 9}{9} - \frac{27}{n^3} \cdot \frac{(6-\sqrt6)^2 n^2}{81 \cdot 4} \cdot \frac{((6-\sqrt6)n + 9)^2}{81}\right) =$$

$$= \frac{1}{36n}\left(-7n + \frac{27}{n} - 24\sqrt6 + 54\right) - \frac{4\sqrt6}{3n} + \frac{-10n^2 - 12\sqrt6 n - 108n - 135}{18n^2}$$

=

$$\underset{T}{S}n = \boxed{\frac{-3\sqrt3 n^2 + 27\sqrt3 + 32\sqrt2 n - 18\sqrt3 n}{4\sqrt3 n^2}}$$

8 Верхняя:

$$\underset{[-1;2]}{S_T^{\wedge n}} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x = \underset{\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]}{S_F^{\wedge n}} + \underset{\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{S_K^{\wedge n}} + \underset{\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; 2\right]}{S_N^{\wedge n}}$$

$$S_T^{\wedge n} = \sum_{i=1}^{\frac{(3-\sqrt{6})n}{9}} (\Delta x \cdot M_i) + \sum_{i=1}^{\frac{2\sqrt{6}n}{9}} (\Delta x \cdot M_i) + \sum_{i=1}^{\frac{(6-\sqrt{6})n}{9}} (\Delta x \cdot M_i) = \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{(3-\sqrt{6})n}{9}} f\left(-1+\frac{3}{n}(i-1)\right) + \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{2\sqrt{6}n}{9}} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{3}{n}i\right) + \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{(6-\sqrt{6})n}{9}} f\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{3}{n}(i-1)\right)$$

$$S_T^{\wedge n} = \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{(3-\sqrt{6})n}{9}} \left(2\left(-1+\frac{3}{n}(i-1)\right) - \left(-1+\frac{3}{n}(i-1)\right)^3\right) + \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{2\sqrt{6}n}{9}} \left(2\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{3}{n}i\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{3}{n}i\right)^3\right) + \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{(6-\sqrt{6})n}{9}} \left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{3}{n}(i-1)\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{3}{n}(i-1)\right)^3\right)$$

$$S_T^{\wedge n} = \frac{3}{n} \cdot \left(\frac{-7n^2+24\sqrt{6}n-54n+27}{108n}\right) + \frac{3}{n}\left(\frac{4\sqrt{6}}{9}\right) + \frac{3}{n}\left(-\frac{10n^2+12\sqrt{6}n+108n-135}{54n}\right) =$$

$$S_T^{\wedge n} = \boxed{\frac{-3\sqrt{3}n^2+27\sqrt{3}+32\sqrt{2}n-18\sqrt{3}n}{4\sqrt{3}n^2}}$$

2) Критерий Римана интегрируемости функции

$$\forall \varepsilon > 0: S_T^{\wedge n} - S_{-n_T} < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} (S^{\wedge n} - S_{-n}) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-3\sqrt{3}n^2+27\sqrt{3}+32\sqrt{2}n-18\sqrt{3}n}{4\sqrt{3}n^2} - \frac{-3\sqrt{3}n^2-27\sqrt{3}-32\sqrt{2}n-18\sqrt{3}n}{4\sqrt{3}n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{54\sqrt{3}}{4\sqrt{3}n^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{64\sqrt{2}n}{4\sqrt{3}n^2}}_{\to 0}\right) = 0 \qquad S_T^{\wedge n} - S_{-n_T} < \varepsilon$$

$\Downarrow$

Функция интегрируема

3) Предел сумм. Если пределы верхней и нижней сумм Дарбу совпадают и конечны, то функция интегрируема.

$$\lim_{n\to\infty}(S_T^{\wedge n}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3\sqrt{3}n^2+27\sqrt{3}+32\sqrt{2}n-18\sqrt{3}n}{4\sqrt{3}n^2}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_{-n_T}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3\sqrt{3}n^2-27\sqrt{3}-32\sqrt{2}n-18\sqrt{3}n}{4\sqrt{3}n^2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

} интегрируема

4) формула Ньютона-Лейбница $\int f(x)dx = F(b) - F(a) = \lim$

$$\int 2x - x^3 dx = x^2 - \frac{x^4}{4} = F(2) - F(-1) = 4 - 4 - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{3}{4}}$$ ← совпал

$\Downarrow$

правильно