Лабораторная работа №2

Вариант 25

Назаров Рустам 368563 М3132

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ $\alpha = 0{,}2$

1) Формула производной n-ого порядка

Найдем первые 8 производных

(каждую производную выразим в виде положительных синусов с помощью формул приведения)

$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x + \pi\right)$

$f'''(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x + \frac{3\pi}{2}\right)$

$f^4(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x + 2\pi\right)$

$f^5(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{2}\right)$

$f^6(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3\pi\right)$

$f^7(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{2}\right)$

$f^8(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right)$

Итак, мы видим, что каждая производная (число в синусе (а именно)) больше предыдущей на $\frac{\pi}{2}$, а первая больше функции $\frac{\pi}{2}$, то есть можно находить производные, увеличивая функцию на $\frac{\pi}{2}$.

Отсюда формула производной n-го порядка для $f(x)$

$$f^{n}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Докажем методом математической индукции

База: $n=1$ $\quad f'(x)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

$$f^{1}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

с помощью формулы приведения

Шаг: $n=k$ $\quad f^{k}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$n=k+1$

$$f^{k+1}(x)\overset{?}{=}\sin\left(\frac{\pi}{3}+x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{k+1}(x)=\left(f^{k}(x)\right)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$\underset{\text{формула приведения}}{=}\sin\left(\frac{\pi}{3}+x+k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x+(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f^{k+1}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x+(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

доказали

2) Многочлен Тейлора n-го порядка по степеням x

формула Тейлора: $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{k}(x_0)(x-x_0)^{k}}{k!}$

так как $f^{k}(x_0)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x_0+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$; $x_0=0$ получаем:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{x^{k}}{k!}$$

3) Получим многочлен Тейлора n-го порядка

Так как $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x+\underset{\text{четность}}{2k}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ — из формул приведения

$\sin\left(\frac{\pi}{3}+x+\underset{\text{нечетность}}{(2k+1)}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\cdot\frac{1}{2}$

И так как по разложениям Тейлора

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\boxed{(-1)^m\cdot\frac{x^{2m}}{(2m)!}}+\dots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\boxed{(-1)^{m}\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}}+\dots$$

<u>Итак,</u>

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x+\frac{1}{2}\cdot\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$

(из разложений Тейлора)

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\underbrace{(-1)^k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{формулы приведения}}\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\underbrace{(-1)^k\cdot\frac{1}{2}}_{\text{формулы приведения}}\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sin\left(\frac{\pi}{3}+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{x^k}{k!}$$

Вывод: то же, что и во 2 (втором) пункте

4 Остаточный член формулы Тейлора

Остаточный член формулы Лагранжа

$$R_n(x,x_0)=\frac{f^{n+1}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\qquad \xi\in(0,x)$$

Так как: $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

$a=0{,}2;\ \Delta_1=10^{-3};\ \Delta_2=10^{-6};\ x_0=0;\ x=a;\ \xi\in(0,a)$

Тогда

$$f^{n+1}(\xi)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

$$R_n(a,0)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\xi+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

Оценим $|R_n(a,0)|$ сверху

Так как $|\sin\alpha|\le 1\Rightarrow\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\cancel{|R_n(a,0)|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|\le\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$$\Rightarrow|R_n(a,0)|=\left|\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{т.к. }\le 1}\cdot\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

синус уменьшает или не изменяет

Найдем n_1, n_2 для неравенства Δ_1 и Δ_2

$\Delta_1=10^{-3}$

$|R_n(a,0)|<10^{-3}$

$n_1=1\Rightarrow\frac{(0,2)^2}{2!}=0{,}02=2\cdot10^{-2}>10^{-3}$

$n=2\Rightarrow\frac{(0,2)^3}{3!}=\frac{4}{3}\cdot10^{-3}>10^{-3}$

$\boxed{n=3\Rightarrow\frac{(0,2)^4}{4!}=\frac{2}{3}\cdot10^{-4}<10^{-3}}$

Δ_1

$n_1=3$

$\Delta_2=10^{-6}$

$|R_n(a,0)|<10^{-6}$

$n=4\Rightarrow\frac{(0,2)^5}{5!}=\frac{4}{15}\cdot10^{-5}$

$\boxed{n=5\Rightarrow\frac{(0,2)^6}{6!}=\frac{4}{45}\cdot10^{-6}<10^{-6}}$

Δ_2

$n_2=5$