Рустамов.

17.

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^{(i)} = \left(\frac{1}{5}(4+0-1+3+4) \quad \frac{1}{5}(2-3-2+1+2) \quad \frac{1}{5}(3+2+2+1-3)\right) = (2 \;\; 0 \;\; 1).$$

$$X_c = \begin{pmatrix} 4-2 & 2-0 & 3-1 \\ 0-2 & -3-0 & 2-1 \\ -1-2 & -2-0 & 2-1 \\ 3-2 & 1-0 & 1-1 \\ 4-2 & 2-0 & -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = X_c^T X_c = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{N-1} C = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 22-\lambda & 21 & -9 \\ 21 & 22-\lambda & -9 \\ -9 & -9 & 22-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 65\lambda + 784) = 0$$

$\lambda_1 = 1$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda^2 - 65\lambda + 784 = 0$

$\lambda = \frac{65 \pm 33}{2} =$

$\lambda_2 = 49$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 16$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Собств. векторы:

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

v_1, v_2, v_3 – главные компоненты.

Значения:

$\frac{1}{N-1} \lambda_1 = \frac{1}{N-1} \sigma_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 1 = \underline{0{,}25}$

$\boxed{2}$ $\quad \frac{1}{4} \cdot 49 = \frac{49}{4} = \underline{12{,}25}$

$\frac{1}{4}\cdot 16 = \underline{4}$

Ответ: главные компоненты:

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{22}\begin{pmatrix}-3\\-3\\2\end{pmatrix}$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

дисперсии по главным компонентам:

0,25 ; 12,25 ; 4.

$\boxed{35}$

$$L(y', y) = (y' - y)^2$$

Д-ть: если $f^*(x) = \underset{c}{\arg\min}\, E\big((Y-c)^2 \,|\, X = x\big)$,

то $f^*(x) = E(Y \,|\, X = x)$; $R(f^*)$ - ?

$Y \in \mathcal{Y} = R$, $L(f(x), y) = (f(x) - y)^2$

$$R(f) = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} L(f(x), y)\cdot p(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} L(f(x), y)\, p(y|x)\,dy \cdot p(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathcal{X}} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{p(x)} \left(\int_{\mathcal{Y}} (f(x) - y)^2\, p(y|x)\,dy \right) dx$$

Минимизируем внутренний интеграл,

Найдём $c = f(x_0)$, при котором:

$$\int_{\mathcal{Y}} (c-y)^2 \cdot p(y|x_0)\,dy \to \min_c$$

$$\triangleq E_y\left((c-y)^2 | x_0\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial c} E_y\left((c-y)^2 | x_0\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \int_{\mathcal{Y}} (c-y)^2 p(y|x_0)\,dy = 2\int (c-y)\, p(y|x_0)\,dy =$$

$$= 2\Big(c \cdot \underbrace{\int_{\mathcal{Y}} p(y|x_0)\,dy}_{=1} - \underbrace{\int_{\mathcal{Y}} y\, p(y|x_0)\,dy}_{\triangleq E_y(y|x_0)}\Big) =$$

$$= 2\left(c - E_y(y|x_0)\right) = 0$$

$c = E_y(y|x_0)$, т.к. x_0 - произвольный,

$C(x) = f^*(x) = E_y(y|x)$ #

$$R(f^*) = \int_{\mathcal{X}} p(x) \left(\int_{\mathcal{Y}} (f(x) - y)^2 \cdot p(y|x)\,dy\right) dx =$$

$$\int_{\mathcal{Y}} (f^*(x) - y)^2 p(y|x)\,dy = \int_{\mathcal{Y}} \left(y - E_y(y|x)\right)^2 |x$$

$\boxed{4}$ $E_y\left((y - E_y(y|x))^2 / x\right) \triangleq D_y(y|x)$

$$R(f^*) = \int_{\mathcal{X}} p(x) \cdot \mathbb{D}_y(y|x)\,dx \triangleq E_x[\mathbb{D}_y(y|x)]$$

Ответ: $f^*(x) = E_y(y|x)$; $R(f^*) = E_x(\mathbb{D}_y(y|x))$.

$\boxed{36}$

$$L(y',y) = |y'-y|$$

Д-ть: $f^*(x) - \text{median}(y|X=x) \Longleftrightarrow R(f^*) \to \min$

$\mathcal{Y} \in \mathcal{Y} = \mathbb{R}$; $L(f(x),y) = |f(x)-y|$

$$R(f) = \int_{\mathcal{X}} \underset{\geqslant 0}{p(x)} \left(\int_{\mathcal{Y}} L(f(x),y) \cdot p(y|x)\,dy \right) dx$$

Минимизируем внутренний интеграл.

$c = f(x_0)$, при котором $\underbrace{\int_{\mathcal{Y}} L(c,y)\,p(y|x_0)\,dy}_{\triangleq E_y(L(c,y)|x_0)} \to \min_c$,

$$\frac{\partial}{\partial c} E_y(L(c,y)|x_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \int_{\mathcal{Y}} L(c,y)\,p(y|x_0)\,dy = \frac{\partial}{\partial c} \int_{\mathcal{Y}} |c-y| \cdot p(y|x_0)\,dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial c} \int_{\mathcal{Y}\setminus\{c\}} |c-y| \cdot p(y|x_0)\,dy = \int_{\mathcal{Y}\setminus\{c\}} \text{sign}(c-y) \cdot p(y|x_0)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\{c>y\}} p(y|x_0)dy - \int\limits_{\{c<y\}} p(y|x_0)dy =$$

$$= P(\{c>y\}|x_0) - P(\{c<y\}|x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\{c>y\}|x_0) = P(\{c<y\}|x_0)$$

Пусть $p(y|x)$ - непрерывно

$$P(\{c=y\}|x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(\{c \geq y\}|x_0) = \frac{1}{2} \\ P(\{c < y\}|x_0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c = \mathrm{median}(Y|X = x_0)$$

Обобщим $\forall x \in X$, $c \Rightarrow c(x) = f^*(x)$

$$c(x) = f^*(x) = \mathrm{median}(Y|X = x)$$

\#

$\boxed{3\,\text{Я}}$ $L(y', y) = ?$, $R(f) \to \min\limits_f$ при $f^*(x) = \ldots$
$= \mathrm{mode}(Y|X = x)$

$$R(f) \to \min_f \Leftrightarrow E_y(L(c,y)|x_0) \to \min_c$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} L(c,y) \cdot p(y|x_0)dy \to \min_c \qquad (1)$$

$$f^*(x) = \mathrm{mode}(Y|X = x) \Rightarrow p(c|x) \to \max_c$$

$$c^* = \mathrm{mode}(y|x_0) \Rightarrow -p(c^*|x_0) = \min_c(-p(c|x_0))$$

(2)

$(1),(2) \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} L(c,y)\, p(y|x_0)\, dy = -p(c|x_0)$

$\hat{I}(c,y) = -L(c,y)$, тогда

$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{I}(c,y)\, p(y|x_0) = p(c|x_0)$

$\hat{I}(c,y) = \delta(c-y) = \delta(y-c)$ - дельта-ф-я Дирака.

$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, \delta(x-x_0)\, dx = f(x_0)$

$L(c,y) = -\delta(y-c)$, $\quad L(c,y) \geq 0$

$\delta(y-c) \geq 0$

Введём $c_0 > 0$

Тогда: $L(c,y) = c_0 - \delta(y-c)$

$E_y(L(c,y)|x_0) = \int\limits_{\mathbb{R}} L(c,y) \cdot p(y|x_0)\, dy =$

$= c_0 \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} p(y|x_0)\, dy}_{=1} - \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(y-c)\, p(y|x_0)\, dy}_{= p(c|x_0)} =$

$\boxed{7}$

$= C_0 - p(c|x_0) \to \min_c \Rightarrow p(c|x_0) \to \max_c \Rightarrow$

$\Rightarrow c = f^*(x_0) = mode(y|x_0)$

#

Ответ: $L(y', y) = c - \delta(y - y')$; $c_0 > 0$

$\boxed{4.1}$ $W_k = v_0 + L(v_1, \dots, v_k)$ – k-мерное линейное многообразие.

Причём: $\sum_{i=1}^{N} dist^2(x^{(i)}, W_k) \to \min$.

Доказать, что $v_0 = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x^{(i)}$.

Рассмотрим $W_0 = v_0 \in \mathbb{R}^d$, $||v_0|| = 1$

Известно, что:

$$W_0 = \arg\min_{v_0 \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{N} dist^2(x^{(i)}, v_0) =$$

$$= \arg\min_{v_0 \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{N} ||x^{(i)} - v_0||^2 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{d v_0} (||x^{(i)} - v_0||) \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d(x^{(i)} - v_0)}{d v_0} \cdot \frac{d(||x^{(i)} - v_0||)^2}{d(x^{(i)} - v_0)} \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} (-1) \cdot 2(x^{(i)} - v_0) = 0 \Big/ \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{N} (x^{(i)} - v_0) = 0$$

$\boxed{8}$

$$\sum_{i=1}^{N} x^{(i)} - \sum_{i=1}^{N} v_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} x^{(i)} - \vartheta_0 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} 1}_{= N} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} x^{(i)} - N \vartheta_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} x^{(i)} = N \vartheta_0$$

$$\vartheta_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x^{(i)}$$