

lab1

Лера Самсонова

April 2024

Тогда можно воспользоваться формулой Остроградского

$$\int \int_S W_n d\sigma = \int \int \int_V \operatorname{div} W dV$$

и преобразовать уравнение к виду

$$\begin{aligned} \int \int_V c\rho[u(P, t_2) - u(P, t_1)]dV_p = \\ = - \int_{t_2}^{t_1} \int \int \int_V \operatorname{div} W dV_p + \int_{t_2}^{t_1} \int \int \int_V F(P, t) dV_p dt. \end{aligned}$$

(Будем предполагать $F(P, t)$ непрерывной функцией своих аргументов.)

Применяя теорему о среднем и теорему о конечных приращениях для функций многих переменных, получим:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_1, P=P_1} \Delta t \cdot V = - \operatorname{div} W \Big|_{t=t_4, P=P_2} \Delta t \cdot V + F \Big|_{t=t_5, P=P_3} \Delta t \cdot V,$$

где t_3, t_4, t_5 - промежуточные точки на интервале Δt , а P_1, P_2, P_3 - точки в объеме V . Фиксируем некоторую точку $M(x, y, z)$ внутри V и будем стягивать V в эту точку, а Δt стремиться к нулю. После сокращения на $\Delta t V$ и указанного предельного перехода получим:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = - \operatorname{div} W(x, y, z, t) + F(x, y, z, t).$$

Заменяя W по формуле $W = -k \operatorname{grad} u$, получим дифференциальное уравнение теплопроводности

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F$$

или

$$c\rho u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F.$$

Если среда однородна, то это уравнение обычно записывают в виде

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{c\rho},$$

где $a^2 = k/c\rho$ - коэффициент теплопроводности, или

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad \left(f = \frac{F}{c\rho} \right),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

4. Постановка краевых задач. Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа состоит лишь в задании значений функции $u(x, t)$ в начальный момент t_0

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На конце стержня $x = 0$ задана температура

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где $\mu(t)$ — функция, заданная в некотором промежутке $t_0 \leq t \leq T$ есть промежуток времени, в течение которого изучается процесс.

2. На конце $x = l$ задано значение производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t).$$

К этому условию мы приходим, если задана величина теплового потока $Q(l, t)$, протекающего через торцевое сечение стержня,

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t)$, где $v(t)$ — известная функция, выражающаяся через заданный поток $Q(l, t)$ по формуле

$$v(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3. На конце $x = l$ задано линейное соотношение между производной и функцией

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \Theta(t)].$$

Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой Θ известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение $x = l$,

$$Q = h(u - \Theta)$$

и

$$Q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \Theta(t)],$$