

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
„ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина)

**СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ
ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ РАЗДЕЛАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Часть I

**Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2020**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
„ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина)

**СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ
ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ РАЗДЕЛАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Часть I

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2020**

УДК 517.958(07)
ББК В16я7
С 23

Авторы: А. Л. Белопольский, В. Л. Трегуб, Е. В. Фролова,
С. И. Челкак, А. П. Щеглова.

С 23 Сборник примеров и задач по специальным разделам математического анализа: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 1. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2020. 80 с.

ISBN 978-5-7629-2702-4 (Ч. 1)

ISBN 978-5-7629-2700-0

Данное издание предназначено для самостоятельной работы студентов первого и второго курсов, изучающих дисциплину «Математический анализ».

Каждая глава пособия содержит краткое изложение теории (без доказательств) и многочисленные примеры с подробными решениями. Дается много упражнений с ответами для самостоятельного решения студентами. Кроме того, даются ссылки на учебники и учебные пособия, в которых можно найти доказательства приведенных утверждений. Пособие соответствует рабочим программам дисциплины «Математический анализ», читаемой кафедрой высшей математики студентам факультетов: ФИБС, ФЭА, ФРТ, ФЭМ (1-й курс); ФЭЛ (2-й курс).

Предназначено для студентов всех направлений и специальностей.

УДК 517.958(07)
ББК В16я7

Рецензенты: кафедра высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД;
д-р физ.-мат. наук, проф. Т. А. Суслина (СПбГУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-2702-4 (Ч. 1)
ISBN 978-5-7629-2700-0

© СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2020

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для студентов СПбГЭТУ, изучающих соответствующие разделы математического анализа, и ориентировано, в первую очередь, на получение студентами практических навыков решения задач. Поэтому приводятся многочисленные примеры с решениями и упражнения для самостоятельной работы студентов. Сведения из теории приводятся справочно, в объеме, достаточном для решения задач. Подробно с теорией изложенного материала можно познакомиться в [1] – [5].

В пособии рассматриваются различные обобщения понятия определенного интеграла по отрезку на случай двумерной или трехмерной области, а также кривых и поверхностей в пространстве.

В гл. 1 рассматриваются кратные интегралы в двумерном и трехмерном пространствах.

В гл. 2 рассматриваются криволинейные и поверхностные интегралы. Также рассматриваются элементы теории поля, позволяющие связать криволинейные и поверхностные интегралы с кратными.

Векторы обозначаются: \mathbf{n} , \mathbf{f} . Для криволинейных интегралов второго рода используются обозначения $d\mathbf{l} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ в пространстве \mathbb{R}^2 и $d\mathbf{l} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$ в пространстве \mathbb{R}^3 . Для поверхностных интегралов второго рода используется обозначение $d\mathbf{s} = \begin{bmatrix} dy dz \\ dx dz \\ dx dy \end{bmatrix}$. Для векторов $\overrightarrow{\Delta l_i} = \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ используются старые обозначения.

Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} обозначается: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Векторное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} обозначается $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Отметим некоторые стандартные обозначения, принятые в издании. Множество натуральных чисел обозначается символом \mathbb{N} ; множество целых чисел — \mathbb{Z} ; множество вещественных чисел — \mathbb{R} ; множество точек на плоскости — \mathbb{R}^2 ; множество точек в пространстве — \mathbb{R}^3 ; \emptyset — пустое множество. Замыкание области D (т.е. область, объединенную со своей границей) будем обозначать \overline{D} .

Используются кванторы: $\exists a$ — существует a , $\forall x \in \mathbb{R}$ — для любых вещественных x . Знак \bullet — конец примера, знак \otimes — конец замечания. Более сложные упражнения отмечены значком $*$.

1. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Площадь области. Двойной интеграл

Пусть D — ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^2 . Рассмотрим прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$, содержащий область D . Разобьем этот прямоугольник на меньшие прямоугольники прямыми, параллельными координатным осям (рис. 1.1). Площадь каждого прямоугольника равна произведению длин его сторон. Через S обозначим сумму площадей всех прямоугольников, целиком лежащих в области D (выделена на рисунке темно-серым цветом), а через S^* — сумму площадей всех прямоугольников, имеющих с областью D непустое пересечение (выделена на рисунке светло-серым цветом).

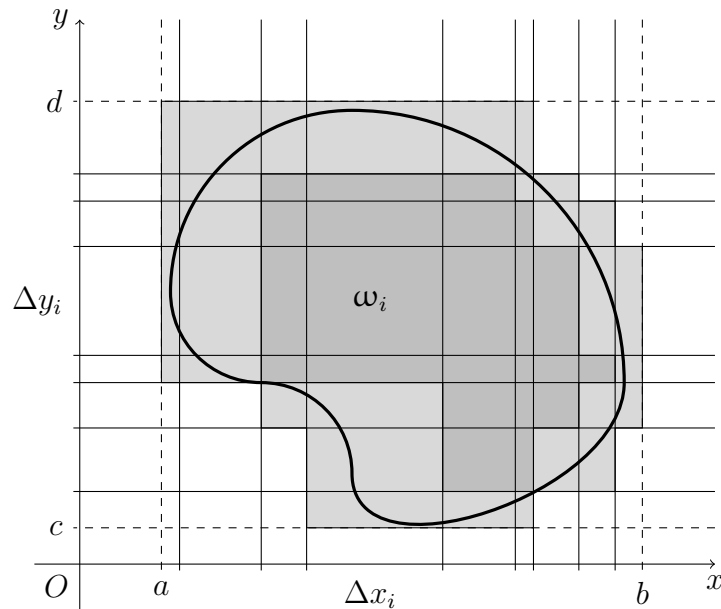


Рис. 1.1

Для фиксированного разбиения $S \leq S^*$. Если уменьшать размеры прямоугольников, то площадь S не уменьшается, а площадь S^* не увеличивается. Будем последовательно измельчать прямоугольники так, чтобы диаметр максимального прямоугольника стремился к нулю. Тогда образуются две последовательности

$$S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots; \quad S_1^* \geq S_2^* \geq \dots \geq S_n^* \geq \dots$$

Первая последовательность не убывает и ограничена сверху, а вторая последовательность не возрастает и ограничена снизу. Следовательно, обе эти последовательности имеют предел. Для достаточно широкого класса областей эти пределы совпадают. Такие области называют **квადрируемыми**,

а соответствующий предел называют площадью данной области и обозначают $|D|$. Далее будем рассматривать только квадратируемые области.

Приведем простейший вариант определения двойного интеграла от ограниченной функции по квадратируемой области. Пусть в области D задана ограниченная функция f . Рассмотрим произвольное разбиение прямоугольника $[a, b] \times [c, d]$ прямыми, параллельными координатным осям. Обозначим $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ прямоугольники, целиком лежащие в области D . В каждом прямоугольнике произвольно выберем точку $M_i(x_i, y_i)$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) |\omega_i|.$$

Назовем рангом разбиения максимальный диаметр прямоугольника $\lambda = \max_{i=1,2,\dots,N} \text{diam}(\omega_i)$. Если существует предел (не зависящий от выбора точек M_i)

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) |\omega_i|,$$

то он называется двойным интегралом от функции f по области D и обозначается

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Из определения следует, что для любой ограниченной области ее площадь $|D| = \iint_D dx dy$.

Далее везде в этой главе будем рассматривать подынтегральные функции, непрерывные в \overline{D} . Известно, что в этом случае двойной интеграл существует (см. [2, гл. 3, § 1]). Более того, полагают

$$\iint_{\overline{D}} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Свойства двойного интеграла.

1. Линейность интеграла. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\iint_D (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) dx dy = \alpha_1 \iint_D f_1 dx dy + \alpha_2 \iint_D f_2 dx dy.$$

2. Аддитивность интеграла. Если некоторая непрерывная кривая разбивает область D на две области D_1 и D_2 , то

$$\iint_D f \, dx \, dy = \iint_{D_1} f \, dx \, dy + \iint_{D_2} f \, dx \, dy.$$

3. Интегрирование неравенств. Пусть для $\forall (x, y) \in D$ выполнено неравенство $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$. Тогда

$$\iint_D f_1 \, dx \, dy \leq \iint_D f_2 \, dx \, dy.$$

В частности,

$$|D| \cdot \min_D f(x, y) \leq \iint_D f \, dx \, dy \leq |D| \cdot \max_D f(x, y).$$

4. Теорема о среднем значении. Существует точка $M^*(x^*, y^*) \in \overline{D}$, такая, что

$$\iint_D f \, dx \, dy = f(x^*, y^*) \cdot |D|.$$

Отметим, что теорема о среднем справедлива только для непрерывной функции f , тогда как свойства 1–3 верны для произвольных интегрируемых функций.

1.2. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному в декартовых координатах

Вычислять интеграл по определению крайне сложно, поэтому используется прием, позволяющий свести вычисление двойного интеграла к вычислению двух определенных интегралов.

Пусть на плоскости задана декартова система координат Oxy . Назовем область D **правильной** относительно оси Ox (рис. 1.2), если \overline{D} может быть представлено в виде: декартовы координаты $(x, y) \in \overline{D}$ удовлетворяют соотношениям $\forall x \in [a, b] : g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции. Аналогично определяется область, правильная относительно оси Oy .

Теорема 1.1. Пусть область D правильная относительно оси Ox , функция f интегрируема в D и для любого $x \in [a, b]$ существует

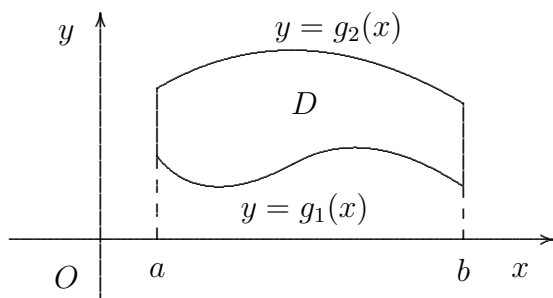


Рис. 1.2

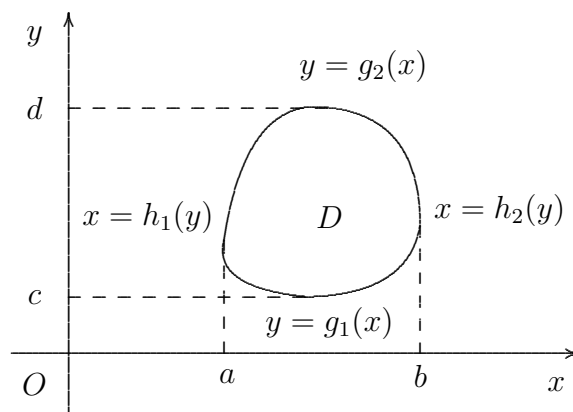


Рис. 1.3

$J(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ (интеграл, зависящий от параметра x). Тогда су-

ществует повторный интеграл $\int_a^b J(x) dx$ и он равен двойному интегралу:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Аналогично, если область D правильная относительно оси Oy (рис. 1.3), то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx.$$

Теорема 1.1 позволяет вычислять двойные интегралы по правильным областям. Для областей более сложной формы следует воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла (см. примеры 1.2, 1.3, 1.5, 1.6).

Замечание 1.1. Часто удобно пользоваться следующим легко проверяемым утверждением. Интеграл по прямоугольнику со сторонами, параллельными координатным осям, от произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, равен произведению интегралов

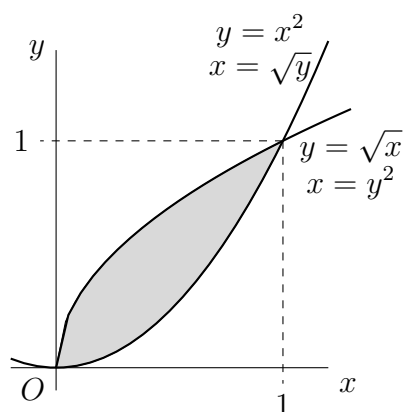


Рис. 1.4

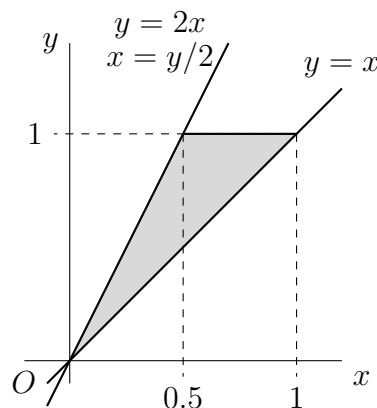


Рис. 1.5

по каждой из переменных:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y)dx dy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy.$$

Пример 1.1. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x, y)dx dy$ в виде повторного двумя способами, если область D ограничена параболлами $y = x^2$ и $x = y^2$.

Решение. Область является правильной как относительно оси Ox , так и относительно оси Oy (рис. 1.4). Очевидно,

$$\overline{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\},$$

поэтому

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y)dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y)dx. \quad \bullet$$

Пример 1.2. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x, y)dx dy$ в виде повторного двумя способами, если область D ограничена прямыми $y = x$, $y = 2x$ и $y = 1$.

Решение. Область является правильной как относительно оси Ox , так и относительно оси Oy (рис. 1.5). Однако если внешний интеграл берется по переменной x , то следует разбить повторный интеграл на два,

так как при $0 < x < 0.5$ и при $0.5 < x < 1$ область ограничена сверху отрезками разных прямых:

$$\begin{aligned}\overline{D} &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 0.5, x \leq y \leq 2x\} \cup \{(x, y) : 0.5 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\} = \\ &= \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y/2 \leq x \leq y\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^{0.5} dx \int_x^{2x} f(x, y) dy + \int_{0.5}^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy = \\ &= \int_0^1 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx. \bullet\end{aligned}$$

Пример 1.3. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного двумя способами, если область D ограничена окружностями $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ и прямой $y = 0$, $y < 0$ ($a > 0$).

Решение. При переходе к повторному интегралу разобьем область интегрирования на части и воспользуемся аддитивностью двойного интеграла. Так как $y < 0$, на дуге маленькой окружности $y = -\sqrt{ax - x^2}$, а на дуге большой окружности $y = -\sqrt{2ax - x^2}$ (рис. 1.6). Следовательно,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{-\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

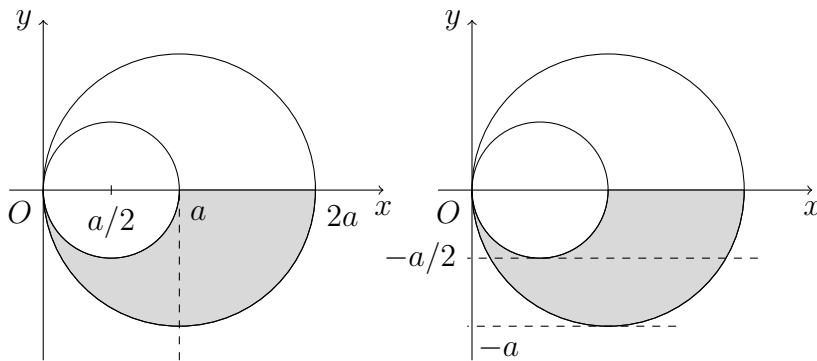


Рис. 1.6

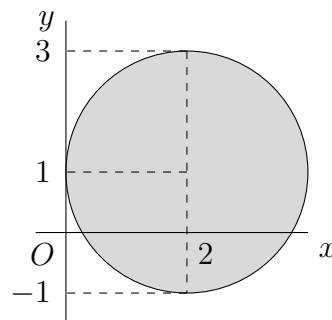


Рис. 1.7

Для перехода к повторному интегралу в другом порядке следует разбить область на 3 подобласти, являющиеся правильными относительно оси Oy (рис. 1.6). Из уравнений окружностей находим

$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}$, $x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2}$. На дуге маленькой окружности знак „+“, если $x > \frac{a}{2}$, знак „−“, если $x < \frac{a}{2}$, на дуге большой окружности знак „+“, если $x > a$, знак „−“, если $x < a$. По свойству аддитивности двойной интеграл равен сумме трех повторных интегралов

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy = & \int_{-\frac{a}{2}}^0 dy \int_{a - \sqrt{a^2 - y^2}}^{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}} f(x, y) dx + \int_{-\frac{a}{2}}^0 dy \int_{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}}^{a + \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx + \\ & + \int_{-a}^{-\frac{a}{2}} dy \int_{a - \sqrt{a^2 - y^2}}^{a + \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.4. Поменять порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_0^4 dx \int_{1 - \sqrt{4x - x^2}}^{1 + \sqrt{4x - x^2}} f(x, y) dy.$$

Решение. Область интегрирования

$$\overline{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, \quad 1 - \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{4x - x^2}\} -$$

круг с центром в точке $(2, 1)$ радиуса 2 (рис. 1.7). Уравнение окружности, ограничивающей D : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$. При каждом $-1 \leq y \leq 3$ в круг попадают те точки, которые лежат между левой дугой окружности, на которой $x < 2$, и правой дугой, на которой $x > 2$. Следовательно,

$$I = \int_0^4 dx \int_{1 - \sqrt{4x - x^2}}^{1 + \sqrt{4x - x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^3 dy \int_{2 - \sqrt{4 - (y-1)^2}}^{2 + \sqrt{4 - (y-1)^2}} f(x, y) dx. \quad \bullet$$

Пример 1.5. Поменять порядок интегрирования в повторном инте-

грале

$$I = \int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} f(x, y) dx.$$

Решение. Так как при $-3 < x < 0$ область ограничена сверху дугой окружности $x^2 + y^2 = 9$, а при $0 < x < 3$ — отрезком прямой $y = x + 3$ (рис. 1.8), разобьем область на две части и воспользуемся свойством аддитивности:

$$I = \int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} f(x, y) dx = \int_{-3}^0 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy. \quad \bullet$$

Пример 1.6. Поменять порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy, \quad a > 0.$$

Решение. Из повторного интеграла видно, что область интегрирования D ограничена графиками функций $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y = \frac{a^2 - x^2}{2a}$ при $x \in [0, a]$ (рис. 1.9). Так как в области интегрирования $y \geq 0$, то $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ и $x = \sqrt{a^2 - 2ay}$. Тогда по свойству аддитивности

$$I = \int_0^{a/2} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{a/2}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx. \quad \bullet$$

Пример 1.7. Вычислить интеграл $I = \iint_D \sin(2x + y) dx dy$, где область D — треугольник, ограниченный отрезками прямых $x = 0$, $y = x + 2$ и $y = 3$.

Решение. Область является правильной как относительно оси Ox , так и относительно оси Oy . Перейдем к повторному в двойном интеграле

$$I = \int_0^1 dx \int_{x+2}^3 \sin(2x + y) dy.$$

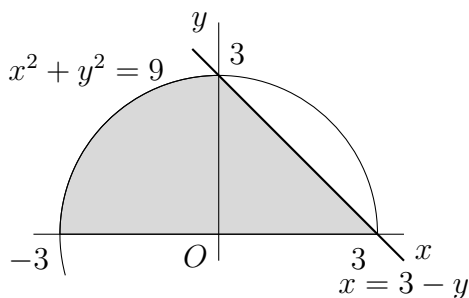


Рис. 1.8

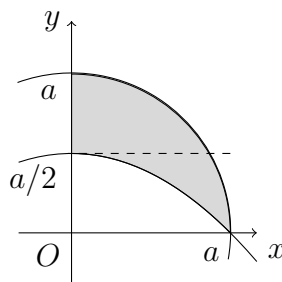


Рис. 1.9

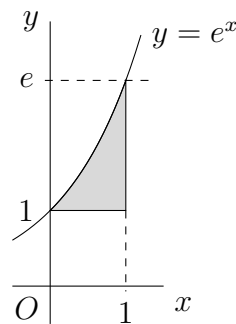


Рис. 1.10

Вычислим внутренний интеграл

$$\int_{x+2}^3 \sin(2x + y) dy = -\cos(2x + y) \Big|_{x+2}^3 = \cos(3x + 2) - \cos(2x + 3).$$

Подставляя полученное выражение в повторный интеграл, находим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\cos(3x + 2) - \cos(2x + 3) \right) dx = \frac{1}{3} \sin(3x + 2) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \sin(2x + 3) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{6} \sin(5) - \frac{1}{3} \sin(2) + \frac{1}{2} \sin(3). \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.8. Вычислить интеграл $I = \iint_D \frac{1}{y} dx dy$, где область D

ограничена прямыми $x = 1$, $y = 1$ и графиком функции $y = e^x$ (рис. 1.10).

Решение. Если рассматривать область D как правильную относительно Ox , имеем

$$I = \int_0^1 dx \int_1^{e^x} \frac{1}{y} dy = \int_0^1 \left(\ln |y| \Big|_{y=1}^{e^x} \right) dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Если же рассматривать область D как правильную относительно Oy , имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 \frac{1}{y} dx = \int_1^e \left(\frac{x}{y} \Big|_{x=\ln y}^1 \right) dy = \int_1^e \frac{1 - \ln y}{y} dy = \\ &= \int_1^e \frac{dy}{y} - \int_1^e \frac{\ln y}{y} dy = \ln y \Big|_1^e - \frac{1}{2} \ln^2 y \Big|_1^e = \frac{1}{2}. \quad \bullet \end{aligned}$$

Очень часто правильно выбранный порядок в повторном интеграле существенно упрощает вычисления, а иногда позволяет вычислить интеграл, не используя специальные функции, тогда как другой порядок интегрирования требует привлечения специальных функций.

Пример 1.9. Вычислить интеграл $I = \iint_D \sqrt[4]{1-y^2} dx dy$, где область D — треугольник, ограниченный отрезками прямых $x = 0$, $y = x$ и $y = 1$.

Решение. Для вычисления данного интеграла перейдем к повторному, в котором внутренний интеграл берется по переменной x :

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt[4]{1-y^2} dx = \int_0^1 y \sqrt[4]{1-y^2} dy = -\frac{2}{5}(1-y^2)^{5/4} \Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

При переходе к повторному в другом порядке возникает внутренний интеграл $\int_x^1 \sqrt[4]{1-y^2} dy$, вычисление которого требует привлечения специальных функций и представляет значительные сложности. •

Пример 1.10. Вычислить интеграл $I = \iint_D \frac{e^{-y^2}}{2\sqrt{x}} dx dy$, где область D ограничена кривыми $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x}/3$ и $y = 1$.

Решение. Для вычисления данного интеграла перейдем к повторному, в котором внутренний интеграл берется по переменной x :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{9y^2} \frac{e^{-y^2}}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^1 e^{-y^2} \left(\sqrt{x} \Big|_{y^2}^{9y^2} \right) dy = \int_0^1 2ye^{-y^2} dy = \\ &= -e^{-y^2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

При переходе к повторному в другом порядке возникает внутренний интеграл, который не выражается через элементарные функции. Этот интеграл можно выразить через функцию ошибок erf (проверьте самостоятельно). •

Упражнения. Изменить порядок интегрирования:

$$1.1. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) dx. \quad 1.2. \int_0^4 dx \int_{3x/2}^{12x} f(x, y) dy.$$

$$1.3. \int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$1.4. \int_1^2 dx \int_{-3\sqrt{x-1}}^{-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy. \quad 1.5. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

$$1.6. \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy.$$

Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами, если область интегрирования ограничена данными кривыми:

$$1.7. y = x, \quad y = 2 - x, \quad y = 0.$$

$$1.8. x^2 + y^2 = 2, \quad y = x^2, \quad y \geq 0.$$

$$1.9. (x - 2)^2 + y^2 = 4, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1, \quad y = 0 \quad (y \geq 0).$$

Вычислить интегралы:

$$1.10. \iint_D x^2 dx dy, \quad D \text{ ограничена кривыми } y = e^x, y = x + 1; x = \frac{1}{2}.$$

$$1.11. \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D \text{ ограничена кривыми } 2y = x^2, y = x.$$

$$1.12. \iint_D y^2 \sin(x) dx dy, \quad D : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1 + \cos(x).$$

$$1.13. \iint_D x^2 \sin^2(y) dx dy, \quad D : -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq 3 \cos(y).$$

$$1.14. \iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy, \quad D \text{ ограничена кривыми } y = x, y = \sqrt{x}.$$

1.3. Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим ситуацию, когда в \mathbb{R}^2 наряду с декартовой системой координат Oxy введена также и некоторая другая система координат, в которой положение точки P задается упорядоченным набором вещественных чисел (ξ, η) . Пусть области D в плоскости Oxy соответствует область \tilde{D} в плоскости $O\xi\eta$ (рис. 1.11).

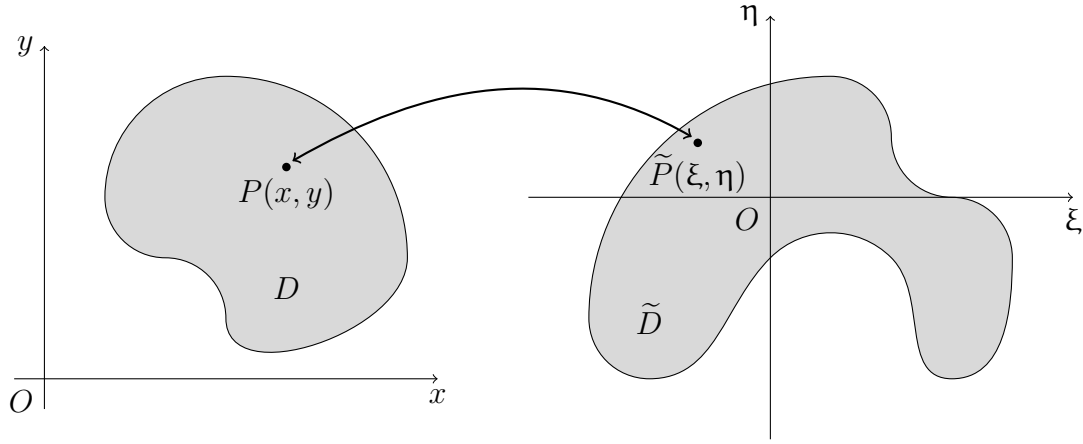


Рис. 1.11

Это соответствие задается системой уравнений

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$$

Предположим, что между точками $P \in D$ и $\tilde{P} \in \tilde{D}$ имеется взаимно-однозначное соответствие. Это заведомо выполнено, если функции $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ дифференцируемы и якобиан преобразования

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

не обращается в нуль для любых $(\xi, \eta) \in \tilde{D}$.

Пусть D – ограниченная область с кусочно-гладкой границей в плоскости Oxy , а \tilde{D} – соответствующая ей ограниченная область в плоскости $O\xi\eta$. Тогда справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{D}} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (1.1)$$

Интеграл по области \tilde{D} также может быть вычислен переходом к повторному. Формулу (1.1) называют формулой замены переменных в двойном интеграле.

Наиболее часто встречающимся примером криволинейных координат являются полярные координаты (r, φ) точек на плоскости. Если декартова и полярная системы координат согласованы друг с другом стандартным

образом, то декартовы и полярные координаты связаны равенствами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi$, $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi$ и якобиан $J = r$. Соответственно, формула (1.1) для полярных координат имеет вид

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{D}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (1.2)$$

Пример 1.11. Вычислить $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где область D – круг с центром в начале координат радиуса 2.

Решение. Перейдем к полярным координатам. Нетрудно видеть, что в новых координатах области D соответствует прямоугольник $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r < 2$. По формуле (1.2) находим

$$I = \iint_{\tilde{D}} r^2 \cdot r dr d\varphi = \int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 = 8\pi. \bullet$$

Пример 1.12. Вычислить $I = \iint_D (x^3 + xy^2) dx dy$, где D ограничена прямыми $\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$ и дугой окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Перейдем к полярной системе координат. Тогда

$$I = \iint_D x (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{\tilde{D}} r \cos \varphi \cdot r^2 \cdot r dr d\varphi,$$

где \tilde{D} ограничена прямыми $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $r = 0$ и $r = 1$.

Переходя к повторному в двойном интеграле, имеем:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \sin \varphi \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{10}. \bullet$$

Пример 1.13. Вычислить $I = \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, где область D

ограничена лепестком кривой $r = \sin(2\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение. Перейдем к полярной системе координат.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\tilde{D}} r \cos \varphi \cdot r \cdot r dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sin(2\varphi)} \cos \varphi \cdot r^3 dr = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \frac{\sin^4(2\varphi)}{4} d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi d(\sin \varphi) = 4 \int_0^1 t^4 (1 - t^2)^2 dt = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) = \frac{32}{315}. \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.14. Вычислить $I = \iint_D \sqrt[3]{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, где область D

ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Перейдем к обобщенным полярным координатам $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$ ($a, b > 0$). Замыканию области интегрирования соответствует прямоугольник $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$. Очевидно, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$, $|J| = abr$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt[3]{2 - r^2} dr = 2\pi ab \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^1 \sqrt[3]{2 - r^2} d(2 - r^2) = \\ &= \pi ab \int_1^2 \sqrt[3]{t} dt = \frac{3\pi ab}{4} (2^{4/3} - 1). \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.15. Вычислить $\iint_D xy dx dy$, где область D ограничена

кривыми $xy = 1$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{y} = 2$, $x, y > 0$.

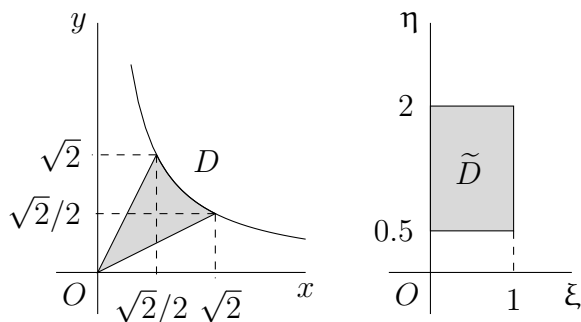


Рис. 1.12

Решение. Здесь удобно сделать замену $\xi = xy$, $\eta = x/y$. Находим выражения старых переменных через новые, учитывая, что на области интегрирования $x, y > 0$: $x = \sqrt{\xi\eta}$, $y = \sqrt{\xi/\eta}$. Находим Якобиан:

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\xi\eta}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta^3}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\eta},$$

следовательно, $\iint_D xy \, dx \, dy = \iint_{\tilde{D}} \xi \left(\frac{1}{2\eta} \right) d\xi \, d\eta$, где область \tilde{D} ограничена прямыми $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 1/2$, $\eta = 2$ (рис. 1.12). Таким образом, двойной интеграл легко вычисляется переходом к повторному:

$$\frac{1}{2} \iint_{\tilde{D}} \frac{\xi}{\eta} d\xi \, d\eta = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 d\eta \int_0^1 \frac{\xi}{\eta} d\xi = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2\eta} d\eta = \frac{1}{4} \ln |\eta| \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{2} \ln 2. \bullet$$

Пример 1.16. Вычислить $\iint_D x^3 \, dx \, dy$, где область D ограничена параболлами $x = \frac{1}{2}y^2$, $x = \frac{1}{4}y^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$.

Решение. Перейдем к новым переменным $\xi = y^2/x$, $\eta = x^2/y$. Замыкание области интегрирования переходит в прямоугольник $[2, 4] \times [1/2, 1]$ в плоскости переменных (ξ, η) . Для вычисления Якобиана выразим старые переменные через новые: $x = \xi^{1/3}\eta^{2/3}$, $y = \xi^{2/3}\eta^{1/3}$. Находим Якобиан:

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\xi^{-2/3}\eta^{2/3} & \frac{2}{3}\xi^{1/3}\eta^{-1/3} \\ \frac{2}{3}\xi^{-1/3}\eta^{1/3} & \frac{1}{3}\xi^{2/3}\eta^{-2/3} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Вычисляем интеграл, переходя к повторному в новых переменных:

$$\iint_D x^3 \, dx \, dy = \iint_{\tilde{D}} \xi \eta^2 \frac{1}{3} d\xi \, d\eta = \frac{1}{3} \int_2^4 \xi \, d\xi \int_{1/2}^1 \eta^2 \, d\eta = \frac{1}{3} \frac{\xi^2}{2} \Big|_2^4 \cdot \frac{\eta^3}{3} \Big|_{1/2}^1 = \frac{7}{12}. \bullet$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

1.15. $\iint_D xy \, dx \, dy$, D ограничена параболой $x = y^2$, $x = 2y^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$.

1.16. $\iint_D \cos(x + y) \, dx \, dy$, D ограничена прямыми $y = x$, $y = x + 3$, $3x + y = 1$, $3x + y = 2$.

1.17. $\iint_D \frac{x}{y} \, dx \, dy$, D ограничена прямыми $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$, $x + y = 1$.

1.18. $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, $D : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$.

1.19. $\iint_D (x^3 + xy^2) \, dx \, dy$, $D : x^2 + y^2 \leq 3, x \leq 0, y \geq 0$.

1.20. $\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, $D : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$.

1.21. $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, $D : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. 1.22. $\iint_D e^{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} \, dx \, dy$, $D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

1.23. $\iint_D x^2 \, dx \, dy$, D ограничена лепестком лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geq 0$.

1.4. Применение двойного интеграла для вычисления площади и объема

Вычисление площади. Как уже отмечалось, для нахождения площади области нужно найти интеграл от 1 по этой области.

Пример 1.17. Найти площадь области, ограниченной параболой $y = x^2$ и дугой окружности $x^2 + y^2 = 2$ (рис. 1.13).

Решение. Переходя к повторному в $\iint_D dx \, dy$, имеем

$$|D| = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy = \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} \, dx - \int_{-1}^1 x^2 \, dx.$$

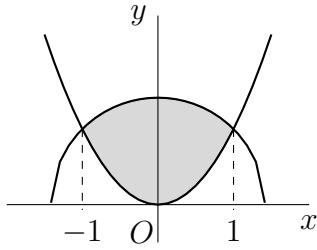


Рис. 1.13

Очевидно, $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$. Найдем первый инте-

грал с помощью замены переменной $x = \sqrt{2} \cos \varphi$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx &= 2 \int_{3\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1-\cos^2 \varphi} (-\sin \varphi) d\varphi = \\ &= 2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2 \varphi d\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (1 - \cos(2\varphi)) d\varphi = \\ &= \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right) \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{\pi}{2} + 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|D| = \iint_D dx dy = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}. \bullet$$

Пример 1.18. Найти площадь области, ограниченной лепестком лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, $x \geq 0$.

Решение. В данном примере удобно перейти к полярным координатам, тогда уравнение лемнискаты записывается следующим образом:

$$r^4 = r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \cos(2\varphi).$$

Поскольку $r \geq 0$, кривая расположена в той части плоскости, где $\cos(2\varphi) \geq 0$. В полуплоскости $x \geq 0$ это неравенство выполнено, если $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$. При $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = -\pi/4$ координата r обращается в нуль и получается замкнутая кривая, которую называют лепестком. Из уравнения лемнискаты в полярных координатах следует, что на лепестке r меняется от 0 до $\sqrt{\cos(2\varphi)}$. Находим площадь

$$\begin{aligned} |D| &= \iint_{\tilde{D}} r d\varphi dr = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos(2\varphi)}} r dr = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos(2\varphi) d\varphi = \frac{\sin(2\varphi)}{2} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}. \bullet \end{aligned}$$

Вычисление объема. Двойной интеграл применяется также и для вычисления объема. Введем в \mathbb{R}^3 декартову систему координат $Oxyz$. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область в плоскости Oxy , $f(x, y)$ – непрерывная функция, определенная на D . Предположим, что $f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$. Уравнение $z = f(x, y)$ задает поверхность, лежащую в верхней полуплоскости.

Рассмотрим трехмерную цилиндрическую область (рис. 1.14)

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 < z < f(x, y)\},$$

которая ограничена снизу плоскостью $z = 0$, сверху – поверхностью $z = f(x, y)$ и сбоку – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz , и направляющей, совпадающей с границей области D . Объем области Ω (обозначим объем через $|\Omega|$) равен двойному интегралу от функции f по области D :

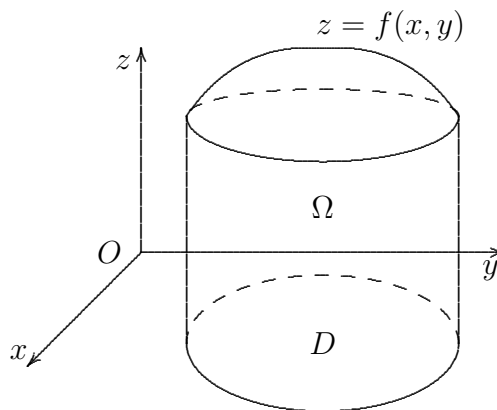


Рис. 1.14

$$|\Omega| = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1.3)$$

Объем области

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, f_1(x, y) < z < f_2(x, y)\}$$

вычисляется по формуле

$$|\Omega| = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy. \quad (1.4)$$

Пример 1.19. Найти объем области

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < e^{x^2+y^2}\}.$$

Решение. По формуле (1.3) находим

$$|\Omega| = \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \iint_{r \leq 1} e^{r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{r^2} d\left(\frac{r^2}{2}\right) = \pi(e - 1). \bullet$$

Пример 1.20. Найти объем области Ω , ограниченной поверхностями $y = x^2$, $y = x + 2$, $z - 2x - y = 0$, $z = x^2 + 2y + 4$.

Решение. Цилиндрическая поверхность $y = x^2$ и плоскость $y = x + 2$ состоят из образующих, параллельных оси Oz . В сечении плоскостью $z = \text{const}$ они ограничивают область

$$D = \{(x, y) : -1 < x < 2, x^2 < y < x + 2\}.$$

Очевидно, при $(x, y) \in D$ поверхность $z = x^2 + 2y + 4$ лежит выше плоскости $z = 2x + y$. Воспользуемся формулой (1.4):

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \iint_D (x^2 + 2y + 4 - (2x + y)) dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} (x^2 - 2x + y + 4) dy = \\ &= \int_{-1}^2 \left((x^2 - 2x + 4)y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 \left(-\frac{3}{2}x^4 + 3x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 10 \right) dx = \\ &= \left(-\frac{3}{10}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + x^2 + 10x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{477}{20}. \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.21. Найти объем области Ω , ограниченной поверхностями $y^2 + z^2 = 2z$, $y^2 + z^2 = 4z$, $x = 0$, $x = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Решение. Поскольку образующие цилиндрических поверхностей $y^2 + z^2 = 2z$, $y^2 + z^2 = 4z$ параллельны оси Ox , для вычисления объема воспользуемся формулой (1.3), в которой переменные меняются ролями. В сечении цилиндрических поверхностей плоскостью $x = \text{const}$ получаются окружности $y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $y^2 + (z - 2)^2 = 4$. Обозначим через D область в плоскости переменных (y, z) , лежащую между этими окружностями, тогда $\Omega = \{(x, y, z) : (y, z) \in D, 0 < x < \sqrt{y^2 + z^2}\}$. Следовательно,

$$|\Omega| = \iint_D \sqrt{y^2 + z^2} dy dz.$$

Перейдем к полярным координатам в плоскости переменных (y, z) : $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$. Уравнения окружностей, ограничивающих D , в полярных координатах: $r = 2 \sin \varphi$, $r = 4 \sin \varphi$, обе окружности лежат в полуплоскости $z \geq 0$. Области D соответствует

$$\tilde{D} = \{(r, \varphi) : 0 < \varphi < \pi, 2 \sin \varphi < r < 4 \sin \varphi\},$$

поэтому

$$|\Omega| = \int_0^\pi \int_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} r \cdot r dr = \int_0^\pi \left(\frac{r^3}{3} \Big|_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} \right) d\varphi = \frac{56}{3} \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi.$$

Сделаем замену $t = \cos \varphi$, тогда $dt = -\sin \varphi d\varphi$, $\sin^2 \varphi = 1 - t^2$:

$$|\Omega| = \frac{56}{3} \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{224}{9}. \bullet$$

Упражнения. Найти площадь области, ограниченной кривыми:

1.24. $y = x^2 + 1, y = x + 3$.

1.25. $x^2 + y^2 = 4, (x - 2)^2 + y^2 = 4 (x > 1)$.

1.26. $r = \frac{1}{2} + \cos \varphi, r = 1, r > 1$.

Найти объем области, ограниченной поверхностями:

1.27. $2z + 3 = x^2 + y^2, z^2 = x^2 + y^2 (z < 0)$.

1.28. $x^2 + y^2 = 2y, z = 0, z = xy, x = 0 (x > 0)$.

1.29. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1, z = 2x + y, z = 0$.

1.30. $x^2 + z^2 = y + \frac{3}{4}, x^2 + z^2 = (y + 1)^2 (y \geq -1)$.

1.31. $y = z^2, z = y^2, x = 0, x = yz$.

1.32. $xy = 1, xy = 2, y = x^2, y = 2x^2, z = 0, z = x^3$.

1.33. $x^2 + y^2 = 4x, z = 12 - y^2, z = 0$.

1.5. Вычисление площади поверхности

Сначала рассмотрим случай, когда гладкая поверхность S задана явно. Пусть S задается уравнением $z = f(x, y)$ (является графиком функции двух переменных), а проекцией поверхности на плоскость Oxy является область D .

Покроем область D прямоугольной сеткой со сторонами, параллельными координатным осям (см. 1.1). Пусть $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ — все элементы разбиения, целиком лежащие в области D . Рассмотрим произвольный S_i — элемент поверхности, проектирующийся в ω_i . Выберем на S_i произвольную точку $M_i(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ и проведем в этой точке касательную плоскость (рис. 1.15). На касательной плоскости выделим параллелограмм, проектирующийся на ω_i . Известно (см. [1, § 1.8]), что площадь этого параллелограмма равна

$$|\omega_i| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2 + 1}.$$

Суммируя по всем ω_i , получаем интегральную сумму для функции

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

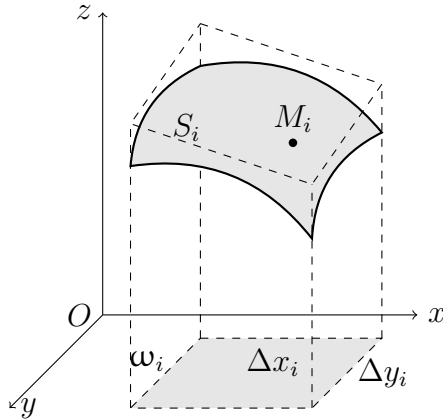


Рис. 1.15

Естественно определить площадь поверхности как предельное значение суммы площадей этих параллелограммов:

$$|S| = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy. \quad (1.5)$$

Формула (1.5) позволяет вычислять площадь поверхности S , являющейся графиком функции. Такую поверхность любая прямая, параллельная оси Ox , пересекает не более чем в одной точке.

Если же поверхность S такова, что каждая прямая, параллельная оси Oy , пересекает ее не более чем в одной точке, то S является частью графика функции $y = g(x, z)$. В этом случае справедлива аналогичная (1.5) формула

$$S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 + 1} dx dz,$$

где D — область в плоскости Oxz , являющаяся ортогональной проекцией S . Аналогичная формула справедлива, если S является частью графика функции $x = h(y, z)$.

В общем случае поверхность S обычно возможно разбить на конечное число таких частей, для вычисления площадей которых можно применить одну из этих формул.

Если поверхность S задана параметрически уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta) = [x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)]^T, \quad (\xi, \eta) \in D_{\xi\eta},$$

то (см. [3, § 50.9]) площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint_{D_{\xi\eta}} \|\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta\| d\xi d\eta, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{r}_\xi, \mathbf{r}_\eta$ — частные производные вектора \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}_\xi = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right]^T, \quad \mathbf{r}_\eta = \left[\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]^T.$$

Пример 1.22. Найти площадь поверхности цилиндра $z^2 = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

Решение. Здесь $D_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$, $z = \pm\sqrt{x^3}$. Найдем площадь той половины цилиндра, на которой $z \geq 0$, т.е. $z = \sqrt{x^3}$. Из соображений симметрии искомая площадь поверхности получается умножением на 2:

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2 + 0^2 + 1} dx dy = 2 \int_0^2 dy \int_0^1 \sqrt{\frac{9}{4}x + 1} dx = \\ &= 2 \int_0^2 \left(\left(\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{9}{4}x + 1 \right)^{3/2} \right) \Big|_{x=0}^1 \right) dy = 2 \int_0^2 \left(\frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right) \right) dy = \\ &= \left(\frac{26\sqrt{13}}{27} - \frac{16}{27} \right) y \Big|_0^2 = \frac{52\sqrt{13} - 32}{27}. \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.23. Найти площадь поверхности верхней полусферы, заданной уравнением $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ при $x^2 + y^2 \leq 1$.

Решение. По формуле (1.5) получаем

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)^2 + 1} dx dy = \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} + 1} dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{\frac{1}{1 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Перейдем к полярной системе координат:

$$\begin{aligned} S &= \iint_{r \leq 1} \sqrt{\frac{1}{1 - r^2}} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left(-\sqrt{1 - r^2} \right) \Big|_{r=0}^1 \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi. \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.24. Найти площадь части поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 2ax$, заключенной между цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = a$ ($a > 0$).

Решение. Верхняя половина заданного параболоида описывается уравнением $z = g(x, y) = \sqrt{2ax - y^2}$. Имеем:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2ax - y^2}}; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{2ax - y^2}},$$

$$1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{a^2 + y^2}{2ax - y^2} = \frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}.$$

Так как рассматриваемая поверхность симметрична относительно плоскости Oyz , то искомая площадь вычисляется как учетверенная площадь части этой поверхности, лежащей в первом октанте:

$$\begin{aligned} |S| &= 4 \iint_D \sqrt{\frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}} dx dy = 4 \int_0^a \sqrt{2ax + a^2} dx \int_0^{\sqrt{ax}} \frac{dy}{\sqrt{2ax - y^2}} = \\ &= 4 \int_0^a \sqrt{2ax + a^2} \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{2ax}} \Big|_0^{\sqrt{ax}} \right) dx = \pi \int_0^a \sqrt{2ax + a^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{3a} (2ax + a^2)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{\pi}{3a} (3\sqrt{3}a^3 - a^3) = \frac{\pi a^2}{3} (3\sqrt{3} - 1). \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.25. Найти площадь поверхности, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \xi^2/2, \\ y = \eta^2, \\ z = \xi\eta, \end{cases}$$

где $(\xi, \eta) \in D_{\xi\eta}$, а область $D_{\xi\eta}$ ограничена прямыми $\eta = 0$, $\xi = \sqrt{2}$, $\eta = \sqrt{\frac{3}{2}}\xi$.

Решение. Так как поверхность задана параметрически, воспользуемся формулой (1.6). Найдем $\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta = \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \\ \eta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2\eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\eta^2 \\ -\xi^2 \\ 2\xi\eta \end{bmatrix}$,

$$\|\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta\| = \sqrt{4\eta^4 + \xi^4 + 4\xi^2\eta^2} = \sqrt{(2\eta^2 + \xi^2)^2} = 2\eta^2 + \xi^2,$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_{\xi\eta}} (2\eta^2 + \xi^2) d\xi d\eta = \int_0^{\sqrt{2}} d\xi \int_0^{\sqrt{3/2}\xi} (2\eta^2 + \xi^2) d\eta = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{2}{3}\eta^3 + \xi^2\eta \right) \Big|_{\eta=0}^{\sqrt{3/2}\xi} \right) d\xi = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^3 \xi^3 + \xi^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \xi \right) d\xi = \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \xi^3 d\xi = \sqrt{6} \frac{1}{4} \xi^4 \Big|_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{6}. \bullet$$

Пример 1.26. Вычислить площадь поверхности части геликоида $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = 2v$ ($0 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq \pi$).

Решение. Найдем частные производные вектора \mathbf{r} : \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v :

$$\mathbf{r}_u = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_v = \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Запишем их векторное произведение:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 2 \end{bmatrix} = 2 \sin v \mathbf{i} - 2 \cos v \mathbf{j} + u \mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{4 \sin^2 v + 4 \cos^2 v + u^2} = \sqrt{4 + u^2},$$

$$S = \int_0^3 du \int_0^\pi \sqrt{4 + u^2} dv = \pi \int_0^3 \sqrt{4 + u^2} du = \pi J.$$

Для вычисления интеграла $J = \int_0^3 \sqrt{4 + u^2} du$ воспользуемся формулой интегрирования по частям и получим соотношение

$$J = u\sqrt{4 + u^2} \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{u^2}{\sqrt{4 + u^2}} du = 3\sqrt{13} - J + 4 \int_0^3 \frac{du}{\sqrt{4 + u^2}},$$

из которого находим

$$J = \frac{3\sqrt{13}}{2} + 2 \int_0^3 \frac{du}{\sqrt{4 + u^2}}.$$

Значит, площадь поверхности части геликоида

$$S = \pi \left(\frac{3\sqrt{13}}{2} + 2 \ln(u + \sqrt{4 + u^2}) \Big|_0^3 \right) = \pi \left(\frac{3\sqrt{13}}{2} + 2 \ln \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right) \right). \bullet$$

Упражнения.

1.34. Найти площадь поверхности цилиндра $z = \frac{1}{2}x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

1.35. Найти площадь поверхности $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$.

1.36. Найти площадь поверхности $z = \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}$, $x, y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

1.37. Найти площадь части поверхности $(x^2 + y^2)^{3/2} + z = 1$, отсекаемой плоскостью $z = 0$.

1.38. Найти площадь поверхности, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \xi + \eta, \\ y = \xi - \eta, \\ z = \xi\eta, \end{cases} \quad \text{где } \xi, \eta \geq 0, \xi^2 + \eta^2 \leq 2.$$

1.6. Тройной интеграл

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Аналогично двумерному случаю (см. 1.1) определим квадратуемость области и объем.

Пусть функция f непрерывна на $\overline{\Omega}$. Тройной интеграл от функции f по $\overline{\Omega}$ определяется аналогично двойному интегралу от функции двух переменных (см. 1.1). Для тройного интеграла используется обозначение

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz,$$

справедливы свойства линейности, аддитивности, интегрирования неравенств и теорема о среднем.

Из определения тройного интеграла следует, что интеграл от $f \equiv 1$ по Ω равен объему области Ω :

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = |\Omega|.$$

Вычисление тройного интеграла. Аналогично двойному интегралу сведем тройной интеграл к повторному. Область Ω называется правильной относительно плоскости Oxy , если декартовы координаты (x, y, z) точек этой области удовлетворяют соотношениям: $(x, y) \in \overline{D}_{xy}$, $g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$, где D_{xy} – ограниченная область с кусочно-гладкой границей в плоскости Oxy , а $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$ – непрерывные на D_{xy} функции.

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на Ω , то функция

$$F(x, y) = \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

будет непрерывной в области D_{xy} и существует интеграл

$$\iint_{D_{xy}} dx dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz,$$

называемый повторным интегралом функции $f(x, y, z)$. При этом справедливо равенство

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (1.7)$$

Если кроме того двумерная область D_{xy} является правильной относительно оси Ox , т. е. $D_{xy} = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$, то двойной интеграл по D_{xy} , в свою очередь, сводится к повторному интегралу и, следовательно,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (1.8)$$

Область Ω называется правильной относительно оси Oz , если декартовы координаты (x, y, z) точек этой области удовлетворяют соотношениям: $a < z < b$, $(x, y) \in D(z)$, где $D(z)$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей в плоскости переменных (x, y) (рис. 1.16). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на Ω , то функция

$$F(z) = \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy$$

интегрируема по $[a, b]$, т. е. существует повторный интеграл и справедливо

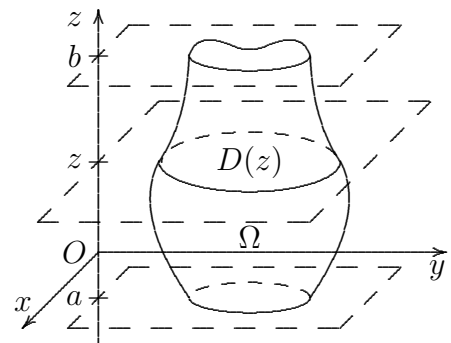


Рис. 1.16

равенство

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy. \quad (1.9)$$

Для других возможных случаев справедливы формулы, аналогичные (1.7), (1.8) и (1.9).

Например, если область Ω – правильная относительно плоскости Oyz , т. е. $\Omega = \{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz}, g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z)\}$, а область $D_{yz} = \{z_1 \leq z \leq z_2, h_1(z) \leq y \leq h_2(z)\}$ – правильная относительно оси Oz , то

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iint_{D_{yz}} dy dz \int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) dx = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{h_1(z)}^{h_2(z)} dy \int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

Пример 1.27. Перейти к повторному в тройном интеграле $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$, где область Ω ограничена двуполостным гиперболоидом $x^2 = y^2 + z^2 + 1$ и эллиптическим параболоидом $x = 5 - y^2 - z^2$ ($x > 0$).

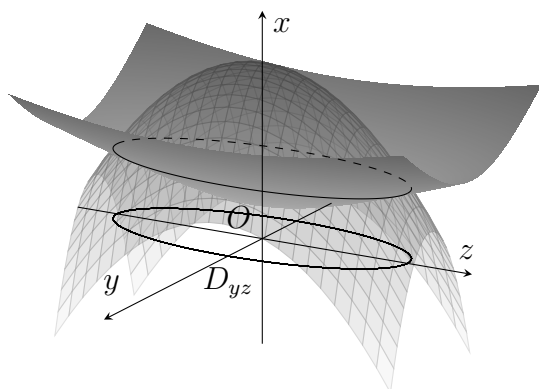


Рис. 1.17

Решение. *I* способ. Область интегрирования является правильной относительно оси Ox (рис. 1.17). Решив квадратное уравнение $x^2 + x - 6 = 0$ и учитывая условие ($x > 0$), найдем, что поверхности пересекаются при $x = 2$. Следовательно, при $1 < x < 2$ область Ω ограничена гиперболоидом (сечение плоскостью $x = \text{const}$ есть множество $D(x) = \{(y, z) : y^2 + z^2 \leq x^2 - 1\}$), а при $2 < x < 5$ – параболоидом (сечение плоскостью $x = \text{const}$ есть множество $D(x) = \{(y, z) : y^2 + z^2 \leq 5 - x\}$). Тогда тройной интеграл равен

сумме двух повторных интегралов:

$$I = \int_1^2 dx \iint_{y^2+z^2 \leq x^2-1} f(x, y, z) dy dz + \int_2^5 dx \iint_{y^2+z^2 \leq 5-x} f(x, y, z) dy dz.$$

II способ. Область интегрирования является правильной относительно плоскости Oyz . Проекция $\bar{\Omega}$ на плоскость Oyz есть круг $D_{yz} = \{(y, z) : y^2 + z^2 \leq 3\}$. Очевидно, область интегрирования ограничена сверху параболоидом, а снизу гиперболоидом, поэтому тройной интеграл

$$I = \iint_{y^2+z^2 \leq 3} dy dz \int_{\sqrt{1+y^2+z^2}}^{5-y^2-z^2} f(x, y, z) dx. \bullet$$

Пример 1.28. Вычислить интеграл $I = \iiint_{\Omega} y dx dy dz$, где область Ω — тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$.

Решение. Здесь Ω — правильная область относительно плоскости Oxy , $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y) = 1 - x - y$. Плоская область D_{xy} ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, и двойной интеграл, в свою очередь, можно переписать как повторный:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} y dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y \left(z \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} \right) dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (y(1-x) - y^2) dy = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}(1-x) - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = -\frac{1}{6} \frac{(1-x)^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{24}. \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.29. Вычислить интеграл $I = \iiint_{\Omega} yz dx dy dz$, где область Ω ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ($z > 0$).

Решение. Область Ω — правильная относительно плоскости Oxy . Имеем:

$$g_1(x, y) = x^2 + y^2, \quad g_2(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2},$$

\overline{D}_{xy} – круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\overline{D}_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} yz dz = \iint_{\overline{D}_{xy}} \left(\frac{yz^2}{2} \Big|_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y \left(2 - (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 \right) dx dy. \end{aligned}$$

Таким образом, задача сведена к вычислению двойного интеграла, в котором удобно перейти к полярным координатам:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sin \varphi \left(2 - r^2 - r^4 \right) r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \left(r^2 - \frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{2} \right) dr = 0. \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.30. Вычислить интеграл $I = \iiint_{\Omega} x dx dy dz$, где область

Ω ограничена поверхностью $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ и плоскостью $x = 1$.

Решение. Здесь удобно рассматривать область Ω как правильную относительно плоскости Oyz . Имеем: $g_1(y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$, $g_2(y, z) = 1$, $\overline{D}_{yz} : y^2 + z^2 \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \iint_{\overline{D}_{yz}} dy dz \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^1 x dx = \iint_{\overline{D}_{yz}} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{x=\sqrt{y^2+z^2}}^1 \right) dy dz = \\ &= \iint_{y^2+z^2 \leq 1} \frac{1 - y^2 - z^2}{2} dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1 - r^2}{2} r dr = \pi \int_0^1 (r - r^3) dr = \\ &= \pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \bullet \end{aligned}$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

1.39. $\iiint_{\Omega} z \cos(x + 2y) dx dy dz$, где область $\Omega : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3$.

$$1.40. \quad \iiint_{\Omega} \frac{1}{(x+y+z+3)^2} dx dy dz, \quad \Omega : x, y, z \geq 0, x+y+z \leq 3.$$

$$1.41. \quad \iiint_{\Omega} x^2 y^2 z dx dy dz, \quad \Omega \text{ ограничена поверхностями } x^2 + y^2 = z^2, z = 4.$$

$$1.42. \quad \iiint_{\Omega} xy dx dy dz, \quad \Omega \text{ ограничена поверхностями } y = x^2, x = y^2, z = 3xy, z = 0.$$

Замена переменной в тройном интеграле. Пусть в \mathbb{R}^3 заданы декартова система координат $Oxyz$ и криволинейные координаты (ξ, η, ζ) , связанные соотношениями

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta), \\ y = y(\xi, \eta, \zeta), \\ z = z(\xi, \eta, \zeta). \end{cases} \quad (1.10)$$

Пусть Ω – область с кусочно-гладкой границей, $\tilde{\Omega}$ – образ области Ω при преобразовании координат (1.10). Предположим, что между точками $P \in \Omega$ и $\tilde{P} \in \tilde{\Omega}$ имеется взаимно-однозначное соответствие. Это заведомо выполнено, если функции $x(\xi, \eta, \zeta)$, $y(\xi, \eta, \zeta)$, $z(\xi, \eta, \zeta)$ дифференцируемы и якобиан преобразования не обращается в нуль для любых $(\xi, \eta, \zeta) \in \tilde{\Omega}$. Тогда в тройном интеграле по области Ω можно сделать замену переменных по формуле

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\tilde{\Omega}} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $J(\xi, \eta, \zeta)$ — якобиан:

$$J(\xi, \eta, \zeta) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}.$$

Пример 1.31. Вычислить интеграл $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dx dy dz$,

где область Ω ограничена плоскостями $x + y = 0$, $x + y = 1$, $x + z = 0$, $x + z = 1$, $y + z = 0$, $y + z = 1$.

Решение. Здесь удобно перейти к новым координатам $\xi = x + y$, $\eta = x + z$, $\zeta = y + z$. Выразим старые переменные через новые: $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta - \zeta)$, $y = \frac{1}{2}(\xi + \zeta - \eta)$, $z = \frac{1}{2}(\eta + \zeta - \xi)$ и найдем якобиан:

$$J(\xi, \eta, \zeta) = \det \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = -1/2.$$

По формуле (1.11) имеем:

$$I = \iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dx dy dz = \iiint_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{1}{2}(\xi + \eta + \zeta) \right)^2 \frac{1}{2} d\xi d\eta d\zeta,$$

где область $\tilde{\Omega}$ – куб, ограниченный плоскостями $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\eta = 1$, $\zeta = 0$, $\zeta = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 (\xi + \eta + \zeta)^2 d\zeta = \frac{1}{8} \int_0^1 d\xi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta)^3 \Big|_{\zeta=0}^1 \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{24} \int_0^1 d\xi \int_0^1 \left((\xi + \eta + 1)^3 - (\xi + \eta)^3 \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{24} \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{4}(\xi + \eta + 1)^4 - \frac{1}{4}(\xi + \eta)^4 \right) \Big|_{\eta=0}^1 \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{96} \int_0^1 \left((\xi + 2)^4 - 2(\xi + 1)^4 + \xi^4 \right) d\xi = \frac{1}{96} \left(\frac{1}{5}(\xi + 2)^5 - \frac{2}{5}(\xi + 1)^5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5}\xi^5 \right) \Big|_{\xi=0}^1 = \frac{1}{480}(3^5 - 2 \cdot 2^5 + 1 - 2^5 + 2 \cdot 1 - 0) = \frac{150}{480} = \frac{5}{16}. \bullet \end{aligned}$$

Цилиндрическая и сферическая системы координат. Наиболее часто встречающимися примерами криволинейных координат в трехмерном пространстве являются цилиндрическая и сферическая системы координат.

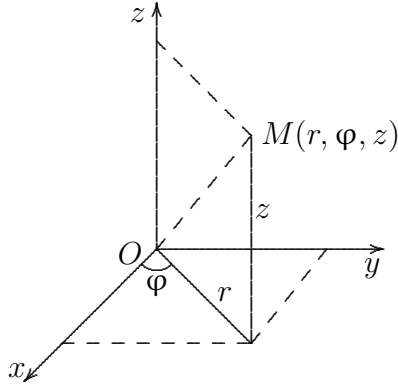


Рис. 1.18

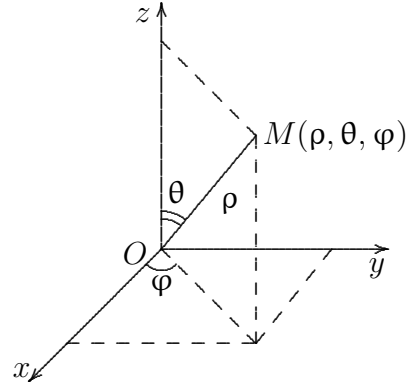


Рис. 1.19

Цилиндрические координаты (рис. 1.18) связаны с декартовыми следующим образом:
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad \text{Здесь } r \in [0, +\infty), \varphi \in [0, 2\pi). \text{ Найдем якобиан:}$$

$$J(r, \varphi, z) = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r.$$

Согласно (1.11) формула перехода к цилиндрическим координатам имеет вид

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\tilde{\Omega}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \, r \, dr \, d\varphi \, dz.$$

Сферические координаты (рис. 1.19) связаны с декартовыми следующим образом:
$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases} \quad \text{Здесь } \rho \in [0, +\infty), \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi].$$

Отметим, что полупространству $z \geq 0$ соответствуют значения $\theta \in [0, \pi/2]$, а полупространству $z \leq 0$ соответствуют значения $\theta \in [\pi/2, \pi]$.

Найдем якобиан:

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{bmatrix} = \rho^2 \sin \theta.$$

Следовательно, согласно (1.11) формула перехода к сферическим координатам имеет вид

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\tilde{\Omega}} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Иногда (например, при наличии выражения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в уравнении поверхности, ограничивающей область интегрирования) удобнее пе-

реходить к *обобщенным сферическим координатам*:
$$\begin{cases} x = a\rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = b\rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = c\rho \cos \theta \end{cases}$$

($a, b, c > 0$). В этом случае якобиан $|J(\rho, \varphi, \theta)| = abc\rho^2 \sin \theta$.

Пример 1.32. Вычислить интеграл $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$,

где Ω – шар радиуса 2 с центром в начале координат.

Решение. Перейдем к сферическим координатам. Область переходит в параллелепипед $\tilde{\Omega} = \{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\tilde{\Omega}} \rho \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi(-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 = 16\pi. \bullet \end{aligned}$$

Пример 1.33. Вычислить интеграл $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$,

где область Ω ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $z = 0$ и $z = 5$.

Решение. Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$I = \iiint_{\tilde{\Omega}} z \sqrt{r^2 + z^2} \cdot r dr d\varphi dz,$$

где $\tilde{\Omega}$ – параллелепипед $\{(z, r, \varphi) \mid 0 \leq z \leq 5, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Имеем:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^5 dz \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} zr \sqrt{r^2 + z^2} d\varphi = 2\pi \int_0^5 dz \int_0^2 zr \sqrt{r^2 + z^2} dr = \\
 &= 2\pi \int_0^5 \left(z \frac{1}{3} (r^2 + z^2)^{3/2} \Big|_{r=0}^2 \right) dz = \frac{2\pi}{3} \int_0^5 (z(z^2 + 4)^{3/2} - z^4) dz = \\
 &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{5} (z^2 + 4)^{5/2} - \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{z=0}^5 = \frac{1682\sqrt{29} - 6314}{15} \pi. \bullet
 \end{aligned}$$

Пример 1.34. Вычислить интеграл $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$,

где область Ω ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

Решение. В этом примере можно сделать различные замены переменных.

I способ. Перейдем к сферическим координатам, тогда уравнение сферы примет вид $\rho^2 = 2\rho \cos \theta$ и

$$I = \iiint_{\tilde{\Omega}} \rho^2 \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta,$$

где $\tilde{\Omega} = \{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} d\rho \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^4 \sin \theta d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\rho^5}{5} \sin \theta \right) \Big|_{\rho=0}^{2 \cos \theta} \right) d\theta = \frac{64\pi}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta = \\
 &= \frac{64\pi}{5} \left(-\frac{1}{6} \cos^6 \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{32\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

II способ. Сделаем замену переменных $\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = 1 + \rho \cos \theta. \end{cases}$ Заметим,

что это тоже сферические координаты, но центр такой системы координат

находится в точке $(0, 0, 1)$, а не в центре исходной декартовой системы координат. Очевидно, что якобиан при этом не меняется. Следовательно,

$$I = \iiint_{\tilde{\Omega}} (\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + 1 + 2\rho \cos \theta + \\ + \rho^2 \cos^2 \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \iiint_{\tilde{\Omega}} (\rho^2 + 2\rho \cos \theta + 1) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta,$$

где $\tilde{\Omega} = \{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ — параллелепипед. Тогда

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (\rho^4 \sin \theta + 2\rho^3 \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \sin \theta) d\rho = \\ = 2\pi \int_0^\pi \left(\left(\frac{\rho^5}{5} \sin \theta + \frac{\rho^4}{4} \sin(2\theta) + \frac{\rho^3}{3} \sin \theta \right) \Big|_{\rho=0}^1 \right) d\theta = \\ = 2\pi \int_0^\pi \left(\frac{1}{5} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin(2\theta) + \frac{1}{3} \sin \theta \right) d\theta = \\ = 2\pi \left(\left(-\frac{1}{5} \cos \theta - \frac{1}{8} \cos(2\theta) - \frac{1}{3} \cos \theta \right) \Big|_{\theta=0}^\pi \right) = 2\pi \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{32\pi}{15}.$$

III способ. Сделаем цилиндрическую замену, тогда область Ω переходит в область $\tilde{\Omega} = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2z - z^2}\}$. Следовательно,

$$I = \iiint_{\tilde{\Omega}} (r^2 + z^2) r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} r(r^2 + z^2) dr = \\ = 2\pi \int_0^2 \left(\left(\frac{1}{4} (r^2 + z^2)^2 \right) \Big|_{r=0}^{\sqrt{2z-z^2}} \right) dz = \\ = \frac{\pi}{2} \int_0^2 \left((2z)^2 - z^4 \right) dz = \frac{\pi}{2} \left(4 \frac{z^3}{3} - \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{z=0}^2 = 16\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{32\pi}{15}. \bullet$$

Этот пример демонстрирует, что для вычисления некоторых интегралов можно применить различные замены. Можно упрощать подынтегральную функцию или область интегрирования. Выбор замены сказывается на технике дальнейших вычислений.

Упражнения. Вычислить интегралы:

$$1.43. \quad \iiint_{\Omega} xy \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega : 2 \leq x + y \leq 3, \quad 3 \leq y + z \leq 4, \quad 4 \leq x + z \leq 5.$$

$$1.44. \quad \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9.$$

$$1.45. \quad \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 3.$$

$$1.46. \quad \iiint_{\Omega} x^2(y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega : y^2 + z^2 \leq 2y, \quad 1 \leq x \leq 3.$$

$$1.47. \quad \iiint_{\Omega} \cos z \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega \text{ ограничена поверхностями } z = x^2 + y^2,$$

$$(z - 4)^2 = 2(x^2 + y^2), \quad z \leq 4.$$

$$1.48. \quad \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) z \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

$$1.49. \quad \iiint_{\Omega} x y z \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad x \geq 0, \quad y \leq 0, \quad z \geq 0.$$

$$1.50. \quad \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, \quad z \leq 0.$$

$$1.51. \quad \iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega \text{ ограничена поверхностью } y = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}.$$

* Найти объем тела, ограниченного поверхностью:

$$1.52. \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z.$$

$$1.53. \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^3 = \frac{x^2 y}{h^2}.$$

$$1.54. \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Ответы к упражнениям гл. 1

$$1.1. \int_{-1}^0 dx \int_{x^2}^{e^{-x}} f(x, y) dy. \quad 1.2. \int_0^6 dy \int_{\frac{y}{12}}^{\frac{2y}{3}} f(x, y) dx + \int_6^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^4 f(x, y) dx.$$

$$1.3. \int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$1.4. \int_{-3}^{-1} dy \int_{1+\frac{y^2}{9}}^2 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{1+\frac{y^2}{9}}^{2-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$1.5. \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy.$$

$$1.6. \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_1^2 f(x, y) dx + \int_{\sqrt{3}}^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^2 f(x, y) dx.$$

$$1.7. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$1.8. \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$1.9. \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$1.10. -\frac{395}{192} + \frac{5}{4}\sqrt{e}. \quad 1.11. \ln 2. \quad 1.12. \frac{4}{3}. \quad 1.13. \frac{12}{5}. \quad 1.14. \frac{e}{2} - 1.$$

$$1.15. \frac{3}{64}. \quad 1.16. -\cos(5/2) + \cos 1 + \cos 2 - \cos(1/2). \quad 1.17. \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{6}.$$

- 1.18. $\pi(\sin 1 - \cos 1)$. 1.19. $-\frac{(\sqrt{3})^5}{5}$. 1.20. $\frac{32}{15}$. 1.21. $\frac{3\pi}{2}$.
 1.22. $6\pi(e - 1)$. 1.23. $a^4 \left(\frac{\pi}{32} + \frac{1}{12} \right)$. 1.24. $\frac{9}{2}$.
 1.25. $2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}$. 1.26. $\frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12}$. 1.27. $\frac{7\pi}{12}$. 1.28. $\frac{2}{3}$.
 1.29. 3π . 1.30. $\frac{\pi}{96}$. 1.31. $\frac{1}{12}$. 1.32. $\frac{1}{4}$. 1.33. 44π .
 1.34. $\frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2}$. 1.35. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$. 1.36. $\frac{64 + 247\sqrt{13}}{1215}$.
 1.37. $\frac{\pi}{6} (\ln(3 + \sqrt{10}) + 3\sqrt{10})$. 1.38. $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.
 1.39. $\frac{9}{4} (\cos 6 + \cos 9 - \cos 5 - \cos 10)$. 1.40. $\frac{9}{4} - 3 \ln 2$. 1.41. $\frac{1024\pi}{3}$.
 1.42. $\frac{1}{9}$. 1.43. $\frac{31}{48}$. 1.44. $\frac{1688\pi}{15}$. 1.45. $\frac{2\pi}{15}(100\sqrt{10} - 244)$. 1.46. 13π .
 1.47. $\pi(3 \cos 2 + \sin 2 - \sin 4 - 1)$. 1.48. $\frac{21\pi}{16}$. 1.49. $-\frac{243}{16}$. 1.50. -3π .
 1.51. $\frac{\pi}{8}$. 1.52. Указание: перейти к сферическим координатам. $\frac{\pi a^3}{3}$.
 1.53. Указание: перейти к обобщенным сферическим координатам. $\frac{a^3 b^2 c \pi}{12 h^2}$.
 1.54. Указание: перейти к обобщенным сферическим координатам. $\frac{\pi^2 abc}{4}$.

2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Многие понятия, рассматриваемые в этой главе, являются инвариантными, т. е. могут быть определены независимо от системы координат. Однако для простоты и наглядности предполагаем, что в пространстве \mathbb{R}^3 задана декартова прямоугольная система координат (стандартный базис i, j, k).

2.1. Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл 1-го рода. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 кривую L , соединяющую точки A и B . Пусть эта кривая задана параметрически:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Если $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[t_1, t_2]$ функции и $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \geq r_0^2 > 0$, то кривая называется гладкой. Кривая называется кусочно-гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких частей.

Введем разбиение кривой L точками N_i ($i = 0, 1, \dots, m$), такое, что $N_0 = A$, $N_m = B$. Обозначим часть кривой, соединяющей точки N_i и N_{i+1} , через l_i , длину участка кривой l_i обозначим $|l_i|$. Рангом разбиения $\{N_i\}$ назовем число $\lambda = \max_{0 \leq i \leq m-1} |l_i|$. Выберем на каждом участке кривой точку $M_i \in l_i$ (рис. 2.1).

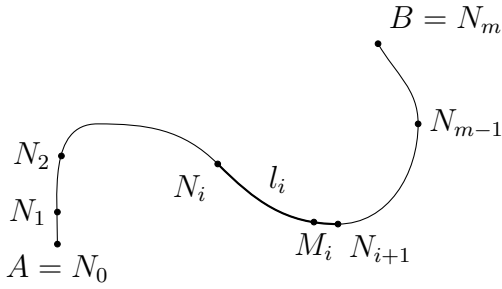


Рис. 2.1

Пусть в пространстве \mathbb{R}^3 также задана ограниченная функция f , определенная во всех точках кривой L . Интегральной суммой для криволинейного интеграла 1-го рода от функции f по кривой L , соответствующей данному разбиению и данному выбору точек, называется сумма

$$\sum_{i=0}^{m-1} f(M_i) |l_i|.$$

Будем измельчать разбиения, устремляя ранг разбиения к нулю. Если существует предел

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} f(M_i) |l_i|,$$

то он называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции f по кривой L и обозначается

$$I = \int_L f(M) dl.$$

Достаточным условием интегрируемости функции является ее непрерывность. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть функция f непрерывна в замкнутой области D , содержащей кусочно-гладкую кривую L . Тогда f интегрируема по L .

Отметим, что условия теоремы 2.1 можно значительно ослабить; в частности, эта теорема справедлива для кусочно-непрерывной на L функции f , но точная формулировка теоремы в этом случае требует как уточнения понятия кривой, так и точного определения термина «кусочно-непрерывная функция».

Далее будем считать все подынтегральные функции непрерывными.

Замечание 2.1. Физический смысл криволинейного интеграла 1-го рода: интеграл дает решение задачи о вычислении массы (или заряда), распределенной вдоль кривой L с плотностью $f(M)$. \otimes

Замечание 2.2. Отметим, что в отличие от определенного интеграла криволинейный интеграл 1-го рода не меняет знак при изменении направления интегрирования по кривой L :

$$\int_{L, [A,B]} f(M) dl = \int_{L, [B,A]} f(M) dl,$$

где A и B — начало и конец кривой L . \otimes

Остальные свойства криволинейного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла по отрезку прямой.

1. Аддитивность. Пусть кусочно-гладкая кривая L разбита на две части L_1 и L_2 ($L = L_1 \cup L_2$), имеющие лишь одну общую точку, тогда

$$\int_L f(M) dl = \int_{L_1} f(M) dl + \int_{L_2} f(M) dl.$$

2. Линейность. Если $f(M) = \alpha_1 f_1(M) + \alpha_2 f_2(M)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, то

$$\int_L f(M) dl = \alpha_1 \int_L f_1(M) dl + \alpha_2 \int_L f_2(M) dl.$$

3. Если $f \equiv 1$ на L , то $\int_L dl = |L|$, где $|L|$ — длина кривой L .

4. Интегрирование неравенств. Если во всех точках кривой L справедливо неравенство $g(M) \leq f(M)$, то

$$\int_L g(M) dl \leq \int_L f(M) dl.$$

5. Теорема о среднем. Существует такая точка $M^* \in L$, что

$$\int_L f(M) dl = f(M^*)|L|.$$

Отметим, что теорема о среднем справедлива только для непрерывной функции, тогда как свойства 1, 2, 4 могут быть переформулированы и для интегрируемых функций, не являющихся непрерывными.

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода. Рассмотрим вопрос о вычислении криволинейного интеграла 1-го рода в том случае, когда кривая L является гладкой кривой, а функция f непрерывна. Пусть L задана параметрически:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T, \quad t \in [t_1, t_2], \quad t_1 < t_2,$$

где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[t_1, t_2]$ функции. Тогда справедливо равенство

$$\int_L f(M) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (2.1)$$

В случае функции двух переменных f и гладкой кривой L в \mathbb{R}^2 формула для вычисления криволинейного интеграла имеет вид

$$\int_L f(M) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (2.2)$$

Поскольку для одной и той же гладкой кривой существуют различные способы параметризации, важно отметить, что значение криволинейного интеграла не зависит от способа параметризации кривой.

Пример 2.1. Вычислить интеграл $I = \int_L (xy^2 + z) dl$, где кривая L

задана параметрически
$$\begin{cases} x(t) = 2t, \\ y(t) = t^2\sqrt{3}, \\ z(t) = t^3 \end{cases} \quad \text{при } t \in [0, 1].$$

Решение. Вычислим $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} =$
 $= \sqrt{2^2 + (2t\sqrt{3})^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{9t^4 + 12t^2 + 4} = 3t^2 + 2$. Следовательно, по формуле (2.1), имеем

$$I = \int_0^1 (6t^5 + t^3)(3t^2 + 2) dt = \int_0^1 (18t^7 + 15t^5 + 2t^3) dt = 5.25. \bullet$$

Пример 2.2. Вычислить интеграл $I = \int_L (x + y)^2 dl$ по ломаной, соединяющей точки $(1, 1)$, $(2, 3)$ и $(2, 6)$.

Решение. Применим свойство аддитивности. Найдем интеграл по отрезку с концами $(1, 1)$ и $(2, 3)$. Возьмем параметризацию $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \end{cases}$ где t меняется от 0 до 1. Тогда по формуле (2.2)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{[(1,1),(2,3)]} (x+y)^2 dl = \int_0^1 \left((1+t) + (1+2t) \right)^2 \sqrt{((1+t)')^2 + ((1+2t)')^2} dt = \\ &= \int_0^1 (2+3t)^2 \sqrt{1^2 + 2^2} dt = \sqrt{5} \int_0^1 (2+3t)^2 dt = \frac{\sqrt{5}}{9} (2+3t)^3 \Big|_0^1 = 13\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Найдем интеграл по отрезку вертикальной прямой, соединяющему точки $[(2, 3), (2, 6)]$. Введем параметризацию $\begin{cases} x = 2, \\ y = t, \end{cases}$ где $t \in [3, 6]$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{[(2,3),(2,6)]} (x+y)^2 dl = \int_3^6 (2+t)^2 \sqrt{(2')^2 + (t')^2} dt = \\ &= \int_3^6 (t+2)^2 dt = \frac{(t+2)^3}{3} \Big|_3^6 = 129. \end{aligned}$$

По свойству аддитивности $I = I_1 + I_2 = 13\sqrt{5} + 129$. •

Пример 2.3. Найти интеграл $I = \int_L (x^2 + y^2) dl$, где L – окружность радиуса 3 с центром в начале координат.

Решение. Введем параметризацию окружности: $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases}$ где $t \in [0, 2\pi]$. Имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_l (x^2 + y^2) dl = \int_0^{2\pi} (9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t) \sqrt{((3 \cos t)')^2 + ((3 \sin t)')^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 9 \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 27 dt = 54\pi. \bullet \end{aligned}$$

Пример 2.4. Найти массу части эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, лежащей

в первой координатной четверти, если плотность равна произведению координат: $\rho(x, y) = xy$.

Решение. Уравнение части эллипса в параметрической форме имеет вид $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Находим массу, вычисляя криволинейный интеграл 1-го рода от плотности

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 3 \sin t \sqrt{4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt = -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 + 5 \cos^2 t} \cos t d(\cos t) = \\ &= 6 \int_0^1 \sqrt{4 + 5t^2} t dt = \frac{3}{5} \int_4^9 \sqrt{s} ds = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} s^{3/2} \Big|_4^9 = \frac{2}{5} (27 - 8) = \frac{38}{5}. \bullet \end{aligned}$$

Упражнения. Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода:

2.1. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl, L : \begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$

2.2. $\int_L xy dl, L$: ломаная, соединяющая точки $(-1, 2), (3, 14), (5, 14)$.

2.3. Найти массу окружности $x^2 + y^2 = 3$, если плотность равна квадрату ординаты.

2.4. $\int_L (x^2 + y^2)z dl, L : \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$

2.5. $\int_L (x + y + z) dl, L$: ломаная с вершинами $(0, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 5, 3)$.

2.6. $\int_L y dl, L : \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$

2.7. $\int_L (x + y) dl, L$: окружность с центром в точке $(-2, 3)$ радиуса 2.

Криволинейный интеграл 2-го рода. Пусть задана кусочно-гладкая кривая L , соединяющая точки A и B . Выберем одно из двух возможных направлений на кривой. Например, считая точку A началом L , а B — концом. Кривую L с выбранным на ней направлением будем называть ориентированной кривой и обозначим $L_+ = \smile AB$, а ту же кривую с противоположным направлением обозначим $L_- = \smile BA$.

Введем разбиение ориентированной кривой L_+ точками N_i ($i = 0, 1, \dots, m$), такое, что $N_0 = A$, $N_m = B$. Обозначим часть кривой, соединяющей точки N_i и N_{i+1} , через l_i , а вектор $\overrightarrow{N_i N_{i+1}}$ через $\overrightarrow{\Delta l_i}$. Рангом разбиения $\{N_i\}$ назовем число $\lambda = \max_{0 \leq i \leq m-1} \|\overrightarrow{\Delta l_i}\|$. Выберем на каждом участке кривой точку $M_i \in l_i$ (рис. 2.2).

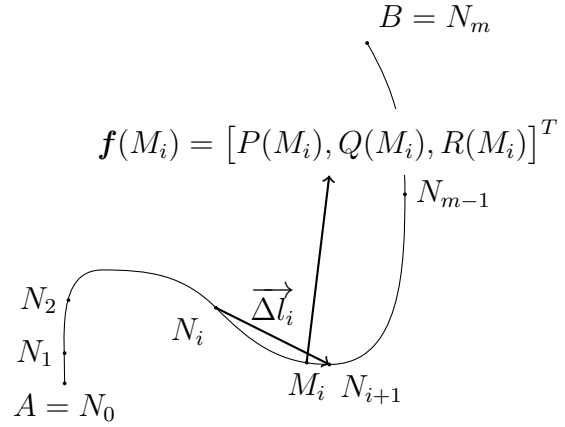


Рис. 2.2

Пусть ограниченная векторная функция

$$\mathbf{f}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$$

задана и непрерывна в некоторой окрестности кривой L . Тогда интегральная сумма для криволинейного интеграла 2-го рода

$$\sum_{i=0}^{m-1} \langle \mathbf{f}(M_i), \overrightarrow{\Delta l_i} \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} (P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i)$$

имеет предел при $\lambda \rightarrow 0$. Этот предел называется криволинейным интегралом 2-го рода от вектор-функции \mathbf{f} по кривой L_+ и обозначается

$$\int_{L_+} \langle \mathbf{f}(M), d\mathbf{l} \rangle = \int_{\smile AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

где $d\mathbf{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ в пространстве \mathbb{R}^3 , $d\mathbf{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ в пространстве \mathbb{R}^2 .

Замечание 2.3. С физической точки зрения криволинейный интеграл 2-го рода равен работе силового поля \mathbf{f} при перемещении материальной точки по кривой L_+ из точки A в точку B . \otimes

Ясно, что при изменении направления прохождения кривой на противоположное меняется знак $\overrightarrow{\Delta l_i}$, поэтому и криволинейный интеграл 2-го рода меняет знак:

$$\int_{L_-} \langle \mathbf{f}(M), d\mathbf{l} \rangle = - \int_{L_+} \langle \mathbf{f}(M), d\mathbf{l} \rangle.$$

Если L — замкнутая кривая, положительным считается направление обхода против часовой стрелки.

Для криволинейного интеграла 2-го рода справедливы свойства аддитивности и линейности.

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.

Рассмотрим вопрос о вычислении криволинейного интеграла 2-го рода в том случае, когда кривая L является гладкой кривой, а функция f непрерывна. Пусть L задана параметрически:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T, \quad t \in [t_A, t_B],$$

где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{\smile AB} \langle \mathbf{f}(M), d\mathbf{l} \rangle &= \int_{\smile AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \right. \\ &\quad \left. + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для плоской кривой $L_+ = \smile AB$ и вектор-функции $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ формула (2.3) принимает вид

$$\int_{\smile AB} \langle \mathbf{f}(M), d\mathbf{l} \rangle = \int_{t_A}^{t_B} \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt. \quad (2.4)$$

Отметим, что значение криволинейного интеграла 2-го рода не зависит от способа параметризации гладкой кривой, по которой берется интеграл.

Пример 2.5. Вычислить интеграл $I = \int_{\smile ABC} \left\langle \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle$, где $\smile ABC$ – ломаная с вершинами $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(4, 3)$.

Решение. По свойству аддитивности

$$I = \int_{\smile ABC} \langle \mathbf{f}(M), d\mathbf{l} \rangle = \int_{[A,B]} \langle \mathbf{f}(M), d\mathbf{l} \rangle + \int_{[B,C]} \langle \mathbf{f}(M), d\mathbf{l} \rangle.$$

На отрезке AB введем параметризацию: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t. \end{cases}$ Точке A соответ-

ствуется значение параметра $t_A = 0$, точке B соответствует $t_B = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{[A,B]} \left\langle \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle &= \int_0^1 \left(((1+t) + (1+2t))1 + ((1+t) - (1+2t))2 \right) dt = \\ &= \int_0^1 ((2+3t) + 2(-t)) dt = \int_0^1 (t+2) dt = \left(\frac{t^2}{2} + 2t \right) \Big|_0^1 = 2.5. \end{aligned}$$

Отрезок BC соединяет точки с одинаковыми ординатами, это отрезок горизонтальной прямой $y = 3$, следовательно, $dy = 0$, x меняется от 2 до 4. Имеем:

$$\int_{[B,C]} \left\langle \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = \int_2^4 (x+3) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_2^4 = 12.$$

$$\text{Окончательно } I = \int_{\sim ABC} \left\langle \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = 2.5 + 12 = 14.5. \bullet$$

Пример 2.6. Вычислить интеграл $I = \int_{L_+} xy^2 dx + yx^2 dy$, где L_+ — верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 4$, направление обхода — против часовой стрелки.

Решение. Так как $xy^2 dx + yx^2 dy = \left\langle \begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle$, можно вычислить этот интеграл по формуле (2.4). Параметризуем окружность:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi]. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left(8 \cos t \sin^2 t \cdot (-2 \sin t) + 8 \cos^2 t \sin t \cdot 2 \cos t \right) dt = \\ &= 16 \int_0^\pi (-\cos t \sin^3 t + \sin t \cos^3 t) dt = 16 \int_0^\pi \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = \\ &= 8 \int_0^\pi \sin(2t) \cos(2t) dt = 4 \int_0^\pi \sin(4t) dt = -\cos(4t) \Big|_0^\pi = 0. \bullet \end{aligned}$$

Пример 2.7. Вычислить интеграл $I = \int_{\smile AB} \left\langle \begin{bmatrix} 2xy \\ 3x + y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle$, где

$\smile AB$ — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(3, 9)$.

Решение. Так как кривая задана явным уравнением, то можно взять за параметр переменную x : $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in [1, 3]$. Имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\smile AB} \left\langle \begin{bmatrix} 2xy \\ 3x + y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = \int_1^3 (2t^3 \cdot 1 + (3t + t^2) \cdot 2t) dt = \\ &= \int_1^3 (4t^3 + 6t^2) dt = (t^4 + 2t^3) \Big|_1^3 = 132. \bullet \end{aligned}$$

Пример 2.8. Вычислить интеграл $I = \int_{\smile AB} \left\langle \begin{bmatrix} 3x^2 \\ xy \\ yz \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle$, $\smile AB$ —

отрезок прямой от точки $A(1, 1, 1)$ до точки $B(2, 4, 5)$.

Решение. Введем следующую параметризацию: $x = 1 + t$, $y = 1 + 3t$, $z = 1 + 4t$. Очевидно, $t_A = 0$, $t_B = 1$. Тогда:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\smile AB} \left\langle \begin{bmatrix} 3x^2 \\ xy \\ yz \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = \int_0^1 (3(1+t)^2 + 3(1+t)(1+3t) + 4(1+3t)(1+4t)) dt = \\ &= \int_0^1 (60t^2 + 46t + 10) dt = (20t^3 + 23t^2 + 10t) \Big|_0^1 = 53. \bullet \end{aligned}$$

Пример 2.9. Вычислить интеграл $I = \oint_{L_+} y dx - xz dz$, где L_+ —

замкнутый контур, являющийся пересечением цилиндра $y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $x + 2y + z = 1$, направление обхода положительно относительно оси Ox .

Решение. Так как контур лежит на цилиндре, можно ввести параметризацию $y = 2 \cos t$, $z = 2 \sin t$ ($t \in [0, 2\pi]$). Кроме того, контур принадлежит плоскости, поэтому

$$x = 1 - 2y - z = 1 - 4 \cos t - 2 \sin t.$$

Найдем

$$dx = (4 \sin t - 2 \cos t) dt, \quad dz = 2 \cos t dt$$

и подставив в интеграл:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t(4 \sin t - 2 \cos t) - (1 - 4 \cos t - 2 \sin t)2 \sin t \cdot 2 \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin(2t) - 2 - 2 \cos(2t) + 16 \cos^2 t \sin t + 8 \sin^2 t \cos t) dt = \\ &= \left(-\cos(2t) - 2t - \sin(2t) - \frac{16}{3} \cos^3 t + \frac{8}{3} \sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = -4\pi. \bullet \end{aligned}$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

$$2.8. \int_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle, L_+ : \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$2.9. \int_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} xy \\ x+y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle, L_+: \text{прямоугольник с вершинами } (0; 0), (3; 0), (3; 5), (0; 5) \text{ (обход против часовой стрелки)}.$$

$$2.10. \int_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} x^2 + y \\ x + y^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle, L_+: x^2 + y^2 = 9, y \geq 0 \text{ (обход против часовой стрелки)}.$$

$$2.11. \int_{L_-} \left\langle \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle, L: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ (обход по часовой стрелке)}.$$

$$2.12. \int_{\smile_{ABC}} \left\langle \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle, \text{ где } \smile_{ABC} - \text{ломаная с вершинами } A(0, 0, 0), B(1, 2, 3), C(3, 4, 9).$$

$$2.13. \int_{L_-} \left\langle \begin{bmatrix} -yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle, L: \text{винтовая линия } \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in [\pi, 0].$$

Вычислить криволинейные интегралы. Сделать чертеж:

$$2.14. \int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy, L: \text{часть параболы } y = x^2 \text{ от точки } A(0; 0) \text{ до точки } B(1; 1).$$

2.15. $\int_L (x^2 + 2xy)dx$, L : часть окружности $x^2 + y^2 = 1$ над осью Ox (обход

контура происходит в сторону увеличения координаты x).

2.16. $\int_L (x - y)dy$, L : часть параболы $y = x^2 - 1$ под осью Ox (обход контура

происходит в сторону увеличения координаты x .)

2.17. $\int_L xy dx + z^2 dy + (x - y)dz$, L : отрезок прямой от точки $A(1, 0, 2)$

до точки $B(2, -1, 0)$.

2.18. $\int_L (x + z)dx + (x + y)dy + y^2 dz$, L : отрезок прямой от точки $A(2, 1, 0)$

до точки $B(-1, 1, 1)$.

2.19. $\int_L (z^2 - y)dx + yx dy + (x^2 + y)dz$, L : отрезок прямой от точки $A(1, 2, 0)$

до точки $B(-1, 0, 2)$.

Найти работу силы \mathbf{F} при перемещении по траектории L от точки M к точке N :

2.20. $\mathbf{F} = (2x + 3y)\mathbf{i} + (3x - 4y)\mathbf{j}$, $L : x^2 + y^2/9 = 1$ ($x \geq 0$), $M(0, 3)$, $N(0, -3)$.

2.21. $\mathbf{F} = (2xy^3 + 4y)\mathbf{i} + (3x^2y^2 + 4x)\mathbf{j}$, $L : x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$), $M(2, 0)$, $N(-2, 0)$.

2.22. $\mathbf{F} = (y^2 - e^x y)\mathbf{i} + (2xy + e^x y)\mathbf{j}$, $L : y = x^2$, $M(-1, 1)$, $N(1, 1)$.

2.23. $\mathbf{F} = (x^2 + \sin y)\mathbf{i} + (1 + x \cos y)\mathbf{j}$, L : отрезок прямой $M(-4, 0)$, $N(0, 2)$.

2.24. $\mathbf{F} = (x^2 + 3xy^2 + 2)\mathbf{i} - (3x^2y - y^3)\mathbf{j}$, $L : x^2 + y^2 = 4$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$), $M(2, 0)$, $N(0, 2)$.

2.25. $\mathbf{F} = \left(12x^2y + \frac{1}{y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x}{2y} + x + 1\right)\mathbf{j}$, $L : y = x^2 + 1$, $M(1, 2)$, $N(-1, 2)$.

2.2. Формула Грина

Криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутой кривой L_{\pm} принято обозначать символом

$$\oint_{L_{\pm}} \langle \mathbf{f}(M), d\mathbf{l} \rangle.$$

Пусть замкнутая кривая L разбивает плоскость \mathbb{R}^2 на две области: ограниченную область D и неограниченную область $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Направление

на L_+ согласовано с D так, что при движении по L_+ область D остается слева (рис. 2.3). Таким образом, положительным является направление против часовой стрелки, отрицательным – по часовой.

Криволинейный интеграл 2-го рода (в \mathbb{R}^2) по замкнутой кривой L тесно связан с двойным интегралом по области, ограниченной этой кривой.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. (Формула Грина)

Пусть D – ограниченная область в \mathbb{R}^2 с кусочно-гладкой границей L . Пусть функция $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ непрерывно дифференцируема на \bar{D} . Тогда справедливо равенство

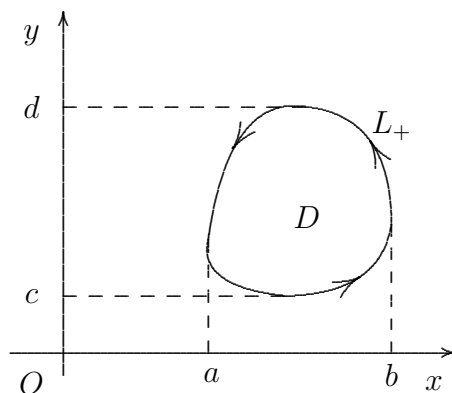


Рис. 2.3

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L_+} P dx + Q dy. \quad (2.5)$$

Доказательство теоремы 2.2 можно найти в учебнике [2]. Приведем несколько примеров ее применения.

Пример 2.10. Вычислить интеграл $I = \oint_{L_-} \left\langle \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle$, где L_- –

граница треугольника с вершинами $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(4, 3)$ (обход против часовой стрелки), двумя способами.

Решение. I способ. Вычислим этот интеграл непосредственно. По свойству аддитивности нужно вычислить сумму трех интегралов по сторонам треугольника. Два из них вычислены в примере 2.5. Для отрезка $[C, A]$

можно ввести параметризацию $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 1 + 2t. \end{cases}$ Точке C соответствует значение параметра $t_C = 1$, точке A – значение параметра $t_A = 0$. Следовательно,

$$\int_{[C,A]} \left\langle \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = \int_1^0 ((2+5t)3 + 2t) dt = - \int_0^1 (17t + 6) dt = -14.5.$$

Отсюда $\oint_{L_-} \left\langle \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = 2.5 + 12 - 14.5 = 0$.

II способ. Вычислим этот интеграл используя теорему Грина. Так как

контур обходится против часовой стрелки, имеем

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L_-} \left\langle \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = - \oint_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = \\ &= - \iint_{\Delta ABC} \left(\frac{\partial(x-y)}{\partial x} - \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \right) dS = \iint_{\Delta ABC} (1-1) dS = 0. \bullet \end{aligned}$$

Пример 2.11. Вычислить интеграл $I = \oint_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle$, где L_+ –

граница верхнего полуокруга $x^2 + y^2 \leq 4$, двумя способами.

Решение. I способ. Интеграл по верхней полуокружности найден в примере 2.6, он равен нулю. Найдем интеграл по отрезку $[-2, 2]$. Введем параметризацию $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \end{cases} \quad t \in [-2, 2]$. Имеем:

$$\int_{[-2,2]} \left\langle \begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = \int_{-2}^2 0 dt = 0.$$

Таким образом, $I = \oint_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = 0$.

II способ. Используя теорему Грина, имеем

$$\oint_{L_+} \left(\begin{bmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right) = \iint_{x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0} (2xy - 2xy) dS = 0. \bullet$$

Пример 2.12. Вычислить интеграл $I = \oint_{L_+} \left(\begin{bmatrix} -x^2y \\ xy^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right)$ по окруж-

ности $x^2 + y^2 = 9$ двумя способами.

Решение. I способ. Введем параметризацию окружности $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$

При обходе против часовой стрелки параметр t меняется от 0 до 2π . Имеем:

$$I = \oint_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} -x^2y \\ xy^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} (-27 \cos^2 t \sin t (-3 \sin t) + 27 \cos t \sin^2 t \cdot 3 \cos t) dt = \\
&= 81 \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{81}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{81}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt = \\
&= \frac{81}{4} \left(t - \frac{\sin(4t)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{81\pi}{2}.
\end{aligned}$$

II способ. Вычислим интеграл используя теорему Грина:

$$I = \oint_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} -x^2 y \\ xy^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy,$$

где D – круг $x^2 + y^2 \leq 9$. Переходя к полярным координатам, находим:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{\tilde{D}} r^2 \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r^3 dr = \\
&= 2\pi \int_0^3 r^3 dr = \frac{2\pi r^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{2}. \bullet
\end{aligned}$$

Упражнения. Вычислить интегралы, используя теорему Грина. Обход контура производится в положительном направлении:

2.26. $\oint_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} xy \\ x+y \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle$, L_+ : граница прямоугольника с вершинами $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 5)$, $(0, 5)$.

2.27. $\oint_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} x^2 + y \\ x + y^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle$, L_+ : граница области $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ y \geq 0. \end{cases}$

2.28. $\oint_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle$, L_+ : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

2.29. $\oint_{L_+} \left\langle \begin{bmatrix} yx^2 \\ -xy^2 \end{bmatrix}, d\mathbf{l} \right\rangle$, L_+ : $x^2 + y^2 = 5$.

2.30. $\oint_{L_+} (1 - x^2)dx + x(1 + y^2)dy$, L_+ : $x^2 + y^2 = 1$.

2.31. $\oint_{L_+} (x^2 + xy^2) dy$, L_+ : граница прямоугольника с вершинами $A(-1, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, -1)$.

2.32. $\oint_{L_+} (1 - xy) dx + x^2 dy$, L_+ : граница прямоугольника с вершинами $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$, $D(1, -1)$.

2.33. $\oint_{L_+} x dx + (x + y) dy$, L_+ : контур, образованный параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$.

2.34. $\oint_{L_+} y^2 dx + (x - 2y) dy$, L_+ : контур, образованный параболой $x = 1 - y^2$ и осью Oy .

2.35. $\oint_{L_+} (x - y) dx + x(y - x) dy$, L_+ : эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

2.3. Вычисление площадей используя криволинейный интеграл 2-го рода

Как уже отмечалось, площадь плоской области равна двойному интегралу по этой области от функции, тождественно равной единице. Если в формуле Грина взять $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$, то $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ и, согласно (2.5), получим:

$$|D| = \iint_D dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D_+} x dy. \quad (2.6)$$

Аналогично, выбирая $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = 0$, получим

$$|D| = - \oint_{\partial D_+} y dx. \quad (2.7)$$

Справедлива также более симметричная формула, вытекающая из (2.6) и (2.7):

$$|D| = \frac{1}{2} \oint_{\partial D_+} x dy - y dx. \quad (2.8)$$

Формулами (2.6) – (2.8) удобно пользоваться, если надо найти площадь области, граница которой задана параметрически.

Пример 2.13. Найти площадь, ограниченную аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0$$

и прямой $y = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.6). На отрезке горизонтальной прямой $y = 0$, $dy = 0$, поэтому

$$|D| = \oint_{\partial D_+} x dy = - \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) a \sin t dt = -a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt + a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt.$$

Вычислим первый интеграл, применяя формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{2\pi} t \sin t dt = (-t \cos t) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt = -2\pi.$$

Вычислим второй интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin(2t)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Искомая площадь

$$|D| = -a^2(-2\pi) + a^2\pi = 3a^2\pi. \bullet$$

Упражнения.

2.36. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b .

2.37. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

2.4. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Пусть в трехмерной области Ω задана непрерывно дифференцируемая функция U . Рассмотрим векторное поле $\mathbf{F} = \nabla U$. Если представить вектор-функцию \mathbf{F} в виде $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, то получим, что $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$. Такое векторное поле называют **потенциальным**, а функцию U – потенциалом векторного поля \mathbf{F} .

Для потенциального векторного поля криволинейный интеграл 2-го рода по кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки A и B и лежащей в области Ω , не зависит от кривой и равен разности значений потенциала в конце и в начале пути:

$$\int_{\smile_{AB}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{l} \rangle = \int_{\smile_{AB}} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = U(B) - U(A).$$

Можно показать, что если для всех точек $A, B \in \Omega$ криволинейный интеграл 2-го рода $\int_{\smile_{AB}} P dx + Q dy + R dz$ не зависит от пути интегрирования, следующего от точки A к точке B в области Ω , то векторное поле \mathbf{F} потенциально (т. е. существует такая функция U , что $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$).

Очевидно, что если криволинейный интеграл 2-го рода от функции \mathbf{F} не зависит от пути интегрирования в области Ω , то интеграл от \mathbf{F} по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в Ω , равен нулю. Другими словами, циркуляция потенциального векторного поля по замкнутому контуру равна нулю.

В пространстве \mathbb{R}^2 непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ является потенциальным, если выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.9)$$

Пример 2.14. Вычислить интеграл $I = \int_L xy^2 dx + x^2 y dy$, где L — ломаная, соединяющая точки $A(1, 4)$, $B(2, 7)$, $C(14, 9)$, $D(5, 2)$ (от точки A к точке D).

Решение. Поскольку функции $P(x, y) = xy^2$, $Q(x, y) = x^2 y$ непрерывно дифференцируемы и выполняется условие (2.9): $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$, то криволинейный интеграл 2-го рода от функции $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ не зависит от пути интегрирования. В качестве пути интегрирования можем выбрать произвольную кусочно-гладкую кривую, соединяющую точки A и D . Удобно, например, выбрать ломаную, состоящую из отрезков, параллельных координатным осям. Пусть K — точка с координатами $(1, 2)$, тогда

по свойству аддитивности

$$I = \int_L xy^2 dx + x^2 y dy = \int_{\smile_{AK}} xy^2 dx + x^2 y dy + \int_{\smile_{KD}} xy^2 dx + x^2 y dy = I_1 + I_2.$$

В качестве \smile_{AK} возьмем отрезок вертикальной прямой, направленный от точки A к точке K . На этом отрезке $x = 1$, $dx = 0$, y меняется от 4 до 2, следовательно,

$$I_1 = \int_4^2 y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_4^2 = -6.$$

В качестве \smile_{KD} возьмем отрезок горизонтальной прямой, направленный от точки K к точке D . На этом отрезке $y = 2$, $dy = 0$, x меняется от 1 до 5, следовательно,

$$I_2 = \int_1^5 4x dx = 2x^2 \Big|_1^5 = 48.$$

Окончательно получим

$$I = \int_L xy^2 dx + x^2 y dy = I_1 + I_2 = -6 + 48 = 42. \bullet$$

Упражнения. Вычислить криволинейные интегралы, предварительно проверив их независимость от пути интегрирования:

$$\text{2.38.} \quad \int_{(1,2)}^{(2,3)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy.$$

$$\text{2.39.} \quad \int_{(1,-2)}^{(1,2)} (y + \ln(x+1)) dx + (e^y + x) dy.$$

$$\text{2.40.} \quad \int_{(0,0)}^{(2,1)} y dx + x dy. \quad \text{2.41.} \quad \int_{(1,1)}^{(2,-2)} (x + 3y) dx + (y + 3x) dy.$$

$$\text{2.42.} \quad \int_{(1,1)}^{(2,2)} \frac{y^2}{2x^2} dx + \left(2 - \frac{y}{x} \right) dy. \quad \text{2.43.} \quad \int_{(0,1)}^{(3,2)} (x^2 - y) dx - (x - y^2) dy.$$

2.5. Поверхностные интегралы

Поверхностный интеграл 1-го рода. Рассмотрим гладкую поверхность S . Пусть в каждой точке этой поверхности задана функция f . Разобьем эту поверхность на части S_i , $i = 1, \dots, n$. $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$. В каждой части S_i выделим точку M_i и через $|S_i|$ обозначим площадь этой части поверхности. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) |S_i|.$$

Эту сумму назовем интегральной суммой для функции f . Если существует предел интегральной суммы при стремлении максимального диаметра S_i к нулю, то он называется интегралом по поверхности S от функции f , или поверхностным интегралом 1-го рода от функции f по поверхности S . Для этого интеграла принято обозначение

$$\iint_S f \, ds.$$

Следовательно, по определению

$$\iint_S f \, ds = \lim_{\max \text{diam}(S_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) |S_i|.$$

Можно показать, что если функция f непрерывна на поверхности S , то поверхностный интеграл существует (см., например, [3, гл. 5, § 51.1]).

Из определения ясно, что если $f \equiv 1$ на S , то поверхностный интеграл равен площади поверхности, т. е.

$$\iint_S ds = |S|.$$

Если функция f задает поверхностную плотность, то интеграл $\iint_S f \, ds$ равен массе поверхности.

Свойства поверхностного интеграла 1-го рода.

1. Линейность. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\iint_S (\alpha f + \beta g) \, ds = \alpha \iint_S f \, ds + \beta \iint_S g \, ds.$$

2. Аддитивность. Пусть $S = S_1 \cup S_2$ и площадь $S_1 \cap S_2$ равна нулю, тогда

$$\iint_{S_1 \cup S_2} f \, ds = \iint_{S_1} f \, ds + \iint_{S_2} f \, ds.$$

3. Интегрирование неравенств. Если для любой точки M , принадлежащей S , выполнено неравенство $f(M) \leq g(M)$, то

$$\iint_S f \, ds \leq \iint_S g \, ds.$$

4. Теорема о среднем. Если функция f непрерывна на \bar{S} , то существует такая точка M^* , что

$$\iint_S f \, ds = f(M^*)|S|.$$

Заметим, что эти свойства совпадают со свойствами обычного двойного интеграла.

Вычисление поверхностных интегралов 1-го рода определяется способом задания поверхности.

Пусть поверхность в декартовых координатах задается уравнением $z = \Phi(x, y)$ и пусть D — проекция поверхности на плоскость Oxy , тогда

$$\iint_S f \, ds = \iint_D f(x, y, \Phi(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy. \quad (2.10)$$

Пусть поверхность задана параметрически, т.е. представляет собой множество точек из \mathbb{R}^3 , радиусы-векторы \mathbf{r} которых удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta) = [x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)]^T, \quad (\xi, \eta) \in D,$$

где D — ограниченная замкнутая область в \mathbb{R}^2 ; (ξ, η) — координаты точек в D , а x, y, z — непрерывно дифференцируемые функции.

Обозначим $\mathbf{r}_\xi = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right]^T$; $\mathbf{r}_\eta = \left[\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]^T$. Дополнительно предположим, что для всех точек из D

$$\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta \neq \mathbf{0}.$$

Пусть на поверхности задана непрерывная функция $f(M)$. Тогда

$$\iint_S f \, ds = \iint_D f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) \|\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta\| \, d\xi \, d\eta.$$

Пример 2.15. Вычислить массу поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченной сверху плоскостью $z = h$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до начала координат. Коэффициент пропорциональности равен C .

Решение. Согласно условию, плотность $f(x, y, z) = C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и поэтому масса конической поверхности вычисляется по формуле

$$m = \iint_S C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds.$$

Поверхность конуса проектируется на плоскость Oxy в круг $D : x^2 + y^2 \leq h^2$, поэтому, используя (2.10), получаем

$$\begin{aligned} m &= \iint_S C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds = \\ &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1} dx dy = \\ &= \iint_D C\sqrt{2(x^2 + y^2)} \cdot \sqrt{2} dx dy = 2C \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Перейдя к полярным координатам, вычислим этот двойной интеграл и получим: $m = 2C \cdot \frac{2\pi h^3}{3} = \frac{4\pi h^3 C}{3}$. •

Пример 2.16. Найти массу поверхности части геликоида $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = 2v$ ($0 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq \pi$), если поверхностная плотность равна $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Найдем частные производные радиуса-вектора \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v :

$$\mathbf{r}_u = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_v = \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 2 \end{bmatrix}$$

и определим их векторное произведение:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 2 \end{bmatrix} = 2 \sin v \mathbf{i} - 2 \cos v \mathbf{j} + u \mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{4 \sin^2 v + 4 \cos^2 v + u^2} = \sqrt{4 + u^2},$$

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^\pi dv \int_0^3 u \sqrt{4+u^2} du = \pi \int_0^3 u \sqrt{4+u^2} du = \frac{\pi}{2} \int_0^3 \sqrt{4+u^2} d(u^2+4) = \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} (u^2+4)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{3} (13\sqrt{13} - 8) . \bullet
 \end{aligned}$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

2.44. $\iint_S xyz ds$, где S — часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

2.45. $\iint_S x ds$, где S — часть сферы радиуса R , лежащая в первом октанте.

2.46. $\iint_S \frac{ds}{r^2}$, где S — боковая поверхность цилиндра $x^2+y^2=1$, ограни-

ченной плоскостями $z=0$ и $z=H$, а r — расстояние от точки поверхности до начала координат.

Поверхностные интегралы 2-го рода. Пусть S — некоторая гладкая поверхность. В каждой точке такой поверхности можно провести две единичные нормали \mathbf{n}_+ и \mathbf{n}_- , направленные в противоположные стороны. Рассмотрим произвольную замкнутую кривую, целиком лежащую на поверхности и не пересекающую границу поверхности. Если после возвращения в исходную точку при движении точки по кривой направление нормали не меняется на противоположное, то такую поверхность будем называть *двухсторонней*.

Далее будем рассматривать только двухсторонние поверхности. Отметим еще, что не все поверхности являются двухсторонними. Например, лист Мёбиуса не является двухсторонней поверхностью (рис. 2.4). Поверхность с выбранным направлением нормали будем называть *ориентированной*.

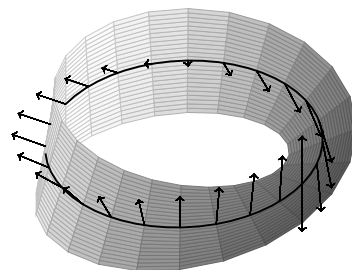


Рис. 2.4

Пусть задана ориентированная поверхность S , на которой определена некоторая вектор-функция $\mathbf{F} = [P, Q, R]^T$ и единичный вектор нормали \mathbf{n} . Скалярное произведение $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle$ представляет собой функцию, определенную в каждой точке поверхности S . Поверхностный интеграл 1-го рода от функции $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle$ называется потоком вектора \mathbf{F} через поверхность S

в направлении \mathbf{n} и обозначается

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds.$$

Можно показать, что для единичного вектора нормали справедливо равенство $\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$, где α, β, γ — углы, которые \mathbf{n} образует с осями координат. Тогда $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$. Теперь поток вектора можно записать следующим образом:

$$\Pi = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds. \quad (2.11)$$

Так как поток векторного поля есть частный случай поверхностного интеграла 1-го рода, то он обладает свойствами линейности и аддитивности. Кроме того при изменении ориентации поверхности (т. е. при изменении направления нормали) поток меняет знак.

Отметим, что если \mathbf{F} — поле скоростей жидкости, то поток — это объем жидкости, проходящей через заданную поверхность в единицу времени.

Пусть S — поверхность, которая в явной форме задается в декартовых координатах одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} z &= \phi(x, y), \text{ где } (x, y) \in D_{xy} \text{ (проекция } S \text{ на плоскость } Oxy); \\ y &= \psi(x, z), \text{ где } (x, z) \in D_{xz} \text{ (проекция } S \text{ на плоскость } Oxz); \\ x &= \chi(y, z), \text{ где } (y, z) \in D_{yz} \text{ (проекция } S \text{ на плоскость } Oyz). \end{aligned}$$

Из рис. 2.5 видно, что

$$\Delta x \Delta y = \Delta S |\cos \gamma|.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\pm \Delta x \Delta y = \Delta S \cos \gamma. \quad (2.12)$$

Аналогично получаются равенства

$$\pm \Delta y \Delta z = \Delta S \cos \alpha, \quad \pm \Delta x \Delta z = \Delta S \cos \beta. \quad (2.13)$$

Знак плюс или минус выбирается в зависимости от направления нормали. Знак плюс в равенстве (2.12) ставится, если угол между выбранным направлением нормали и осью Oz острый. Если же угол между выбранным направлением нормали и осью Oz тупой, то выбираем знак минус. Выбор знака в (2.13) осуществляется аналогично.

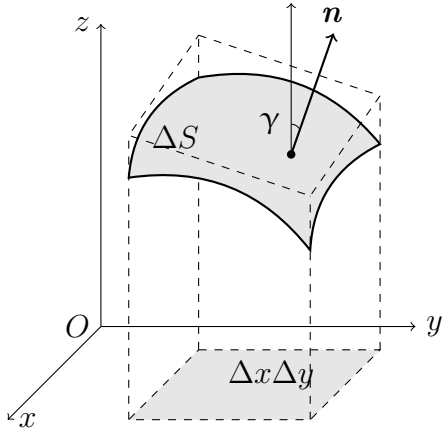


Рис. 2.5

Таким образом, интеграл (2.11) превращается в следующий:

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds = \iint_S \pm P dy dz \pm Q dx dz \pm R dx dy,$$

где

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz &= \iint_{D_{yz}} P(\chi(y, z), y, z) dy dz; \\ \iint_S Q(x, y, z) dx dz &= \iint_{D_{xz}} P(x, \psi(x, z), z) dx dz; \\ \iint_S R(x, y, z) dx dy &= \iint_{D_{xy}} P(x, y, \phi(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Иногда интеграл (2.11) сразу записывают в виде

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy,$$

где знаки уже учтены в функциях P, Q, R . Такую запись принято называть **поверхностным интегралом 2-го рода**.

Пусть дана незамкнутая поверхность S , которая взаимно-однозначно проектируется на плоскость Oxy в область D_{xy} . В этом случае поверхность S можно задать уравнением $z = \phi(x, y)$, и из равенства $\Delta S = \frac{\Delta x \Delta y}{|\cos(\gamma)|}$ следует, что вычисление потока через выбранную сторону поверхности S сводится к вычислению двойного интеграла по формуле

$$\Pi = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds = \iint_{D_{xy}} \frac{\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle}{|\cos(\gamma)|} \Big|_{z=\phi(x,y)} dx dy. \quad (2.14)$$

Здесь единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности S находится по формуле

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla(z - \phi(x, y))}{|\nabla(z - \phi(x, y))|} = \pm \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

а $\cos \gamma$ равен коэффициенту при орте \mathbf{k} в последней формуле:

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Если угол γ между осью Oz и выбранной нормалью \mathbf{n} острый, то в последних двух формулах берется знак „+“. В ситуации, когда угол γ тупой, в этих формулах берется знак „–“. Если поверхность S удобно проецировать на координатные плоскости Oyz и Oxz , для вычисления потока пользуются соответственно формулами:

$$\Pi = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds = \iint_{D_{yz}} \frac{\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle}{|\cos(\alpha)|} \Big|_{x=\chi(y,z)} dy dz ,$$

$$\Pi = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds = \iint_{D_{xz}} \frac{\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle}{|\cos(\beta)|} \Big|_{y=\psi(x,z)} dx dz .$$

Косинусы углов α и β находятся по формулам:

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2 + 1}} ,$$

$$\cos \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 + 1}} .$$

Пример 2.17. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = 2\mathbf{k}$ через площадку, перпендикулярную оси Oz и имеющую форму прямоугольника со сторонами 1 и 3 в положительном направлении оси Oz (рис. 2.6).

Решение. По определению потока $\Pi = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds$, где $\mathbf{F} = 2\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Следовательно, $\langle \mathbf{F}, \mathbf{k} \rangle = 2$ и $\Pi = \iint_S 2 ds = 2|S| = 2 \cdot 3 = 6$.

Заметим, что в этом примере поток не зависит от расположения прямоугольника относительно плоскости Oxy и расстояния до этой плоскости. •

Пример 2.18. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F} = \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки на поверхности S , а S — полная поверхность прямого кругового цилиндра высотой H с радиусом основания R и осью Oz .

Решение. Поверхность S состоит из боковой поверхности σ_1 , верхнего основания σ_2 и нижнего основания σ_3 (рис. 2.7). В силу свойства аддитивности искомый поток будет равен сумме трех потоков: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, где Π_1, Π_2, Π_3 — потоки данного поля через поверхности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответственно.

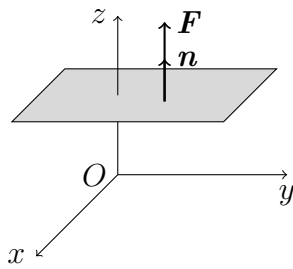


Рис. 2.6

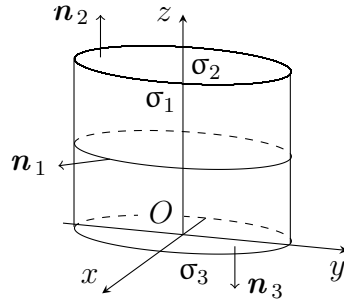


Рис. 2.7

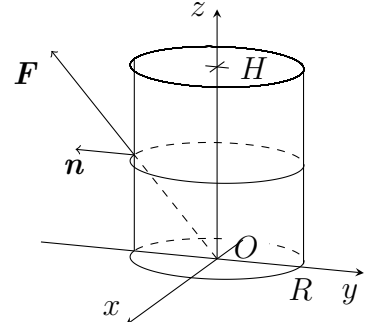


Рис. 2.8

На боковой поверхности σ_1 внешняя нормаль \mathbf{n}_1 параллельна плоскости Oxy , и поэтому $\mathbf{n}_1 = \frac{1}{R}[x, y, 0]^T$. Тогда $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_1 \rangle = \frac{1}{R}(x^2 + y^2 + 0) = R$. Следовательно,

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_1 \rangle ds = R \iint_{\sigma_1} ds = R \cdot 2\pi R H = 2\pi R^2 H.$$

На верхнем основании σ_2 нормаль \mathbf{n}_2 параллельна оси Oz , и поэтому $\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$. Тогда $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_2 \rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{k} \rangle = H$ и, значит,

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_2 \rangle ds = H \iint_{\sigma_2} ds = \pi R^2 H.$$

На нижнем основании σ_3 вектор $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ перпендикулярен нормали $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{k}$. Поэтому $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_3 \rangle = \langle \mathbf{r}, -\mathbf{k} \rangle = 0$, следовательно,

$$\Pi_3 = \iint_{\sigma_3} 0 ds = 0.$$

Искомый поток будет равен $\Pi = 3\pi R^2 H$. •

В некоторых случаях для вычисления потока векторного поля через данную поверхность удобно не проектировать ее на координатные плоскости, а выбрать на самой поверхности простую систему координат.

Пример 2.19. Найти поток вектора

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону боковой поверхности кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = H$ (рис. 2.8).

Решение. Данная поверхность является частью кругового цилиндра, поэтому для вычисления потока целесообразно перейти к цилиндрическим

координатам $x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, z = z$. Тогда

$$\Pi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dz,$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(x^2 + y^2 - R^2)}{\|\nabla(x^2 + y^2 - R^2)\|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R} = \frac{R \cos \varphi \mathbf{i} + R \sin \varphi \mathbf{j}}{R} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}.$$

Скалярное произведение на поверхности цилиндра

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = R(\cos \varphi)^2 + R(\sin \varphi)^2 = R.$$

Окончательно находим

$$\Pi = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz = 2\pi R^2 H. \quad \bullet$$

Пример 2.20. Найти поток вектора $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ через часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостью $z = 2$. Нормаль берется внешняя по отношению к области, ограниченной параболоидом (рис. 2.9).

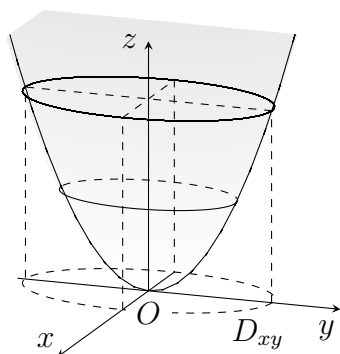


Рис. 2.9

Решение. Данная поверхность взаимно-однозначно проецируется на плоскость Oxy в круг $D_{xy} = \{x^2 + y^2 \leq 2\}$. Находим единичную нормаль к поверхности S :

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla(z - \phi(x, y))}{|\nabla(z - \phi(x, y))|} = \pm \frac{-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

По условию задачи нормаль \mathbf{n} образует тупой угол с осью Oz , поэтому перед дробью следует взять минус. Следовательно,

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Отсюда следует, что

$$\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} < 0,$$

поэтому

$$ds = \frac{dx \, dy}{|\cos \gamma|} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dx \, dy.$$

Находим скалярное произведение $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$. В силу (2.14) искомый поток

$$\Pi = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds = \iint_{D_{xy}} (2y^3 - z)|_{z=x^2+y^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} (2y^3 - y^2 - x^2) dx dy.$$

Заметим, что область интегрирования D_{xy} представляет собой круг радиуса $R = \sqrt{2}$ с центром в начале координат. Введя полярные координаты $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{D_{xy}} (2r^3 \sin^3 \phi - r^2)r dr d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{2}} (2r^4 \sin^3 \phi - r^3) dr = \\ &= -2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}} = -2\pi. \bullet \end{aligned}$$

Если поверхность задана параметрически:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta) = [x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)]^T, \quad (\xi, \eta) \in D,$$

то для вычисления потока (поверхностного интеграла 2-го рода) удобно использовать формулу

$$\iint_{S_+} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds = \iint_D \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi, \eta)), \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta \rangle d\xi d\eta. \quad (2.15)$$

Пример 2.21. Вычислить интеграл

$$\Pi = \iint_S \frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z},$$

где S — часть поверхности эллипсоида

$$x = a \cos u \cos v, y = b \sin u \cos v, z = c \sin v, u \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right), v \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right),$$

ориентированного внешней нормалью.

Решение. Так как функции $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ положительны, а углы, образованные внешней нормалью с осями координат, острые, Π положителен. Воспользуемся (2.15) для вычисления интеграла. Так как

$$x_u = -a \sin u \cos v, \quad y_u = b \cos u \cos v, \quad z_u = 0,$$

$$x_v = -\cos u \sin v, \quad y_v = -b \sin u \sin v, \quad z_v = c \cos v,$$

то

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{a \cos u \cos v} & \frac{1}{b \sin u \cos v} & \frac{1}{c \sin v} \\ -a \sin u \cos v & b \cos u \cos v & 0 \\ -a \cos u \sin v & -b \sin u \sin v & c \cos v \end{bmatrix} = p \cos v,$$

где

$$p = \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}.$$

Отсюда получаем:

$$\Pi = p \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} du \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos v dv = p \frac{\pi}{12} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{(\sqrt{2} - 1)\pi}{24} \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right). \bullet$$

Упражнения.

2.47. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = 3\mathbf{j}$ через треугольную площадку с вершинами в точках $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(0, 2, 0)$, $M_3(0, 2, 2)$, в сторону, где расположено начало координат.

2.48. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) через площадку, перпендикулярную оси Oz и имеющую форму круга радиуса R , в положительном направлении оси Oz .

2.49. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ через внешнюю поверхность прямого кругового конуса, вершина которого находится в начале координат, радиус основания равен R и высота равна H (ось конуса идет по оси Oz).

2.50. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ через верхнюю сторону треугольника, получаемого пересечением плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ с координатными плоскостями.

2.51. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = (x - 2y + 1)\mathbf{i} + (2x + y - 3z)\mathbf{j} + (3y + z)\mathbf{k}$ через часть внешней стороны поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной в первом октанте.

2.52. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

2.53. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через боковую поверхность кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченного снизу плоскостью $x + y + z = 1$, а сверху плоскостью $x + y + z = 2$ (в направлении внешней нормали).

Вычислить поверхностные интегралы:

2.54. $\iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy$, где S — внешняя сторона куба, образованного плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$.

2.55. $\iint_S xy \, dy \, dz + yz \, dx \, dz + xz \, dx \, dy$, где S — внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

2.56. $\iint_S z^2 \, dx \, dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.57. $\iint_S xz \, dy \, dz + xy \, dx \, dz + yz \, dx \, dy$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостей $x = 0, y = 0, z = 0, z = H$.

2.58. $\iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy$, где поверхность S задана параметрически: $x = u \cos v, y = u \sin v, z = 2 \cos v - u$ ($u \geq 0$) и ограничена плоскостями $x = 0$ и $z = 0$.

2.6. Формула Остроградского–Гаусса

Теорема 2.3. (Остроградский–Гаусс) Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^3 , ее граница S — замкнутая гладкая поверхность. Пусть в $\bar{\Omega}$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{F} = [P, Q, R]^T$. Тогда

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, ds = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz. \quad (2.16)$$

Сумма частных производных

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{F}$$

называется **дивергенцией** векторного поля \mathbf{F} .

Формула (2.16) связывает поток векторного поля \mathbf{F} через поверхность S и тройной интеграл от дивергенции этого поля по области, ограниченной поверхностью S .

Учитывая последнее равенство, формула Остроградского–Гаусса может быть переписана в виде

$$\Pi = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, ds = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz. \quad (2.17)$$

Пример 2.22. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ через произвольную замкнутую поверхность S в направлении ее внешней нормали.

Решение. Вычислим дивергенцию этого векторного поля

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(zx)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, для любой замкнутой поверхности S по формуле (2.17) имеем

$$\Pi = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds = \iiint_D 0 dx dy dz = 0. \bullet$$

Пример 2.23. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F} = [x, y, z]^T$ через замкнутую поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Решение. Вычислим дивергенцию данного векторного поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Теперь по формуле (2.17) имеем

$$\Pi = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds = \iiint_D 3 dx dy dz = 3|D| = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \bullet$$

Пример 2.24. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

через замкнутую поверхность

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z = 0 \quad (z \geq 0).$$

Решение. Используя теорему Остроградского–Гаусса, получим

$$\Pi = \iiint_D (2x + 2y + 2z) dx dy dz.$$

Интеграл удобно вычислять в сферических координатах:

$$\Pi = 2 \iiint_D (r \sin \theta \cos \phi + r \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\sin \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi + \cos \theta) d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}. \bullet$$

Пример 2.25. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 36z^2\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $3x + 2y + z = 6$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), двумя способами: непосредственно по определению потока и с помощью теоремы Остроградского–Гаусса.

Решение. Сначала вычислим поток, используя теорему Остроградского–Гаусса. Для этого найдем дивергенцию этого векторного поля

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(5)}{\partial x} + \frac{\partial(-x)}{\partial y} + \frac{\partial(36z^2)}{\partial z} = 72z.$$

Теперь, используя (2.17) получим:

$$\Pi = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds = \iiint_D 72z dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{6-3x-2y} 72z dz.$$

Здесь множество D_{xy} — треугольник, образованный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $3x + 2y = 6$. Вычислим теперь интеграл:

$$\Pi = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{6-3x-2y} 72z dz = \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \int_0^{6-3x-2y} 72z dz = 648.$$

Вычислим поток данного векторного поля непосредственно, используя (2.11). Ясно, что поток через полную поверхность тетраэдра равен сумме четырех потоков Π_x , Π_y , Π_z и Π_1 через, соответственно, грани в плоскостях $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и верхнюю грань.

Для грани в плоскости $x = 0$ внешней нормалью будет вектор $-\mathbf{i}$, $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = -5$, поэтому поток через эту грань

$$\Pi_x = \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (-5) dz = \frac{5}{4} (6-2y) \Big|_0^3 = -45.$$

Для грани в плоскости $y = 0$ внешней нормалью будет вектор $-\mathbf{j}$,

$\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = x$ и

$$\Pi_y = \int_0^2 dx \int_0^{6-3x} x dz = \int_0^2 x(6-3x) dx = (3x^2 - x^3) \Big|_0^2 = 4.$$

Для грани в плоскости $z = 0$ внешней нормалью будет вектор $-\mathbf{k}$, $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = 36z^2 \equiv 0$ и $\Pi_z = 0$.

Наконец, для верхней грани $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$ и

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = \frac{15 - 2x + 36z^2}{\sqrt{14}} \Big|_{z=6-3x-2y} = \frac{1}{\sqrt{14}} (15 - 2x + 36(6 - 3x - 2y)^2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{14}} (15 - 2x + 36(6 - 3x - 2y)^2) \sqrt{14} dx dy = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (15 - 2x + 36(6 - 3x - 2y)^2) dy = 689. \end{aligned}$$

Окончательно, $\Pi = \Pi_x + \Pi_y + \Pi_z + \Pi_1 = 648$. •

Упражнения. Используя теорему Остроградского–Гаусса, вычислить потоки векторных полей через замкнутые поверхности S :

2.59. $\mathbf{F} = (1 + 2x)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $S: x^2 + y^2 = z^2, z = 4$.

2.60. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; $S: x^2 + y^2 = 4 - z, z = 0, z \geq 0$.

2.61. $\mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$; $S: x^2 + z^2 = y^2, y = 1, y \geq 0$.

2.62. $\mathbf{F} = (3x + yz)\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + (2z - xy)\mathbf{k}$; S : поверхность тетраэдра с вершинами в точках $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 6)$.

Найти поток векторного поля \mathbf{F} через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали двумя способами: по определению и с помощью теоремы Остроградского–Гаусса:

2.63. $\mathbf{F} = -4x^2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$; $S: x^2 + y^2 = 4, z^2 = x^2 + y^2$.

2.64. $\mathbf{F} = 7xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 7xz\mathbf{k}$; $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = 0, y = 0, z = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

2.65. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $S: (2 - z)^2 = x^2 + y^2, z = 0, (0 \leq z \leq 2)$.

2.7. Формула Стокса

Пусть в \mathbb{R}^3 в декартовых координатах задана дифференцируемая вектор-функция $\mathbf{F} = [P, Q, R]$. Тогда формальный определитель

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & Q \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & R \end{bmatrix}$$

связывает с полем \mathbf{F} новое векторное поле, которое называется **ротором** поля \mathbf{F} .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. (Стокс) *Циркуляция вектора \mathbf{F} по замкнутому контуру L равна потоку ротора этого вектора через произвольную гладкую поверхность S , натянутую на контур L . Предполагается, что ориентация нормали к поверхности S согласована с ориентацией контура L так, чтобы из конца вектора нормали обход контура в выбранном направлении был виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 2.10).*

Другими словами, справедлива формула

$$\oint_L \langle \mathbf{F}, d\mathbf{l} \rangle = \iint_{S_+} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds. \quad (2.18)$$

Формула Стокса связывает между собой криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру и поверхностный интеграл 2-го рода по поверхности, натянутой на этот контур. Можно показать, что формула Грина (2.5) есть частный случай формулы Стокса.

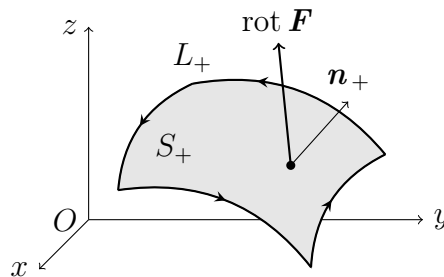


Рис. 2.10

Пример 2.26. Вычислить с помощью теоремы Стокса циркуляцию векторного поля $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ по контуру $L : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 3 \end{cases}$ в положительном (относительно оси Oz) направлении.

Решение. Для вычисления циркуляции по теореме Стокса выберем какую-нибудь поверхность S , натянутую на контур L . Естественно в качестве поверхности S взять круг, имеющий кривую L своей границей. Согласно выбранной ориентации контура нормаль \mathbf{n} к кругу необходимо взять

равной \mathbf{k} . Далее вычислим ротор

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} i & \frac{\partial}{\partial x} & y \\ j & \frac{\partial}{\partial y} & x^2 \\ k & \frac{\partial}{\partial z} & -z \end{bmatrix} = (2x - 1)\mathbf{k}.$$

Тогда по формуле Стокса (2.18) циркуляция равна:

$$\iint_S (2x - 1) ds = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 (2r \cos \phi - 1)r dr = -2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 = -4\pi.$$

Пример 2.27. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$ по контуру кривой, получающейся пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ с плоскостью $z = \sqrt{3}$ в положительном (относительно оси Oz) направлении, двумя способами: непосредственно по определению и применив теорему Стокса.

Решение. Сначала найдем циркуляцию по определению. Нетрудно видеть, что параметрическое уравнение данной кривой имеет вид

$$L : \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Тогда по формуле (2.3) циркуляция вычисляется следующим образом:

$$\oint_{L+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{l} \rangle = \int_0^{2\pi} (2\sqrt{3}(-\sin t) + 3 \cos t \cos t + 4 \sin t \cdot 0) dt = 3\pi.$$

Теперь для нахождения циркуляции воспользуемся теоремой Стокса. В качестве поверхности S , натянутой на этот контур, возьмем круг радиуса 1 с центром в точке $(0, 0, \sqrt{3})$, расположенный в плоскости $z = \sqrt{3}$. Вычислим ротор данного векторного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} i & \frac{\partial}{\partial x} & 2z \\ j & \frac{\partial}{\partial y} & 3x \\ k & \frac{\partial}{\partial z} & 4y \end{bmatrix} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Единичный вектор нормали к данной поверхности $\mathbf{n} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$, сле-

довательно, по формуле Стокса (2.18) получим:

$$\oint_{L_+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{l} \rangle = \iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS = \iint_S 3 dS = 3|S| = 3\pi. \bullet$$

Упражнения. Используя теорему Стокса найти циркуляцию векторного поля \mathbf{F} вдоль контура L_+ . Положительным считается такое направление обхода, при котором контур обходится против часовой стрелки, если смотреть на него из начала координат:

$$2.66. \mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}, L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

2.67. $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ по контуру, образованному пересечением плоскости $x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями.

$$2.68. \mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}, L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

$$2.69. \mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}, L: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$2.70. \mathbf{F} = z^2\mathbf{i}, L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$2.71. \mathbf{F} = zy^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}, L: \begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 9. \end{cases}$$

$$2.72. \mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}, L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

$$2.73. \mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}, L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4x, \\ x^2 + y^2 = 2x, \\ z \geq 0 \end{cases}$$

(направление обхода положительно относительно оси Oz).

$$2.74. \mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}, L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ 3x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

$$2.75. \mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j}, L: \begin{cases} z = x^2 + (y + 1)^2, \\ 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$2.76. \mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}, L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$2.77. \mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (2x - z)\mathbf{k}, L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Ответы к упражнениям гл. 2

- 2.1. $\frac{1}{3} \left((1 + \pi^2)^{3/2} - 1 \right)$. 2.2. $16 \left(3\sqrt{10} + 7 \right)$. 2.3. $3\sqrt{3}\pi$. 2.4. $2\sqrt{2}\pi^2$.
2.5. $4\sqrt{6} + \frac{17\sqrt{13}}{2}$. 2.6. 48. 2.7. 4π . 2.8. $-\frac{3\pi}{16}$. 2.9. $-\frac{15}{2}$. 2.10. -18.
2.11. 0. 2.12. 35. 2.13. $-\frac{\pi^2}{2}$. 2.14. $-\frac{19}{30}$. 2.15. $\frac{2}{3}$. 2.16. $\frac{4}{3}$. 2.17. $-\frac{37}{6}$.
2.18. -2. 2.19. $\frac{4}{3}$. 2.20. 0. 2.21. 0. 2.22. $2 + \frac{37}{e} - 5e$. 2.23. $\frac{70}{3}$.
2.24. $-\frac{80}{3}$. 2.25. $-\frac{242}{15}$. 2.26. $-\frac{15}{2}$. 2.27. 0. 2.28. 0. 2.29. $-\frac{25\pi}{2}$.
2.30. $\frac{5\pi}{4}$. 2.31. $\frac{4}{3}$. 2.32. 6. 2.33. $\frac{4}{3}$. 2.34. $\frac{4}{3}$. 2.35. 6π . 2.36. πab .
2.37. $\frac{3\pi a^2}{8}$. 2.38. $\ln 3 + \frac{1}{6}$. 2.39. $e^2 + e^{-2} - 4$. 2.40. 2. 2.41. -12.
2.42. $\frac{3}{2}$. 2.43. $\frac{16}{3}$. 2.44. $\frac{\sqrt{3}}{120}$. 2.45. $\frac{\pi R^3}{4}$. 2.46. $2\pi \operatorname{arctg} H$. 2.47. -3.
2.48. $\pi R^2 \gamma$. 2.49. $\frac{3\pi R^2 H}{2}$. 2.50. $\frac{26}{3}$. 2.51. $\frac{3\pi}{4}$. 2.52. $2\pi R^2$.
2.53. 2π . 2.54. 3. 2.55. $\frac{1}{8}$. 2.56. 0. 2.57. $R^2 H \left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8} \right)$. 2.58. 4.
2.59. $\frac{256\pi}{3}$. 2.60. 8π . 2.61. 0. 2.62. 10. 2.63. 0. 2.64. 16π . 2.65. 8π .
2.66. 4π . 2.67. $-\frac{4}{3}$. 2.68. 0. 2.69. 2π . 2.70. $\frac{128}{3}$. 2.71. -729π .
2.72. -27π . 2.73. 4π . 2.74. 16π . 2.75. 0. 2.76. -4π . 2.77. $2\sqrt{2}\pi$.

Список литературы

1. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы: учеб. эл. пособие / Е. З. Борович, К. В. Каврайская, С. Б. Колоницкий и др. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2012.
2. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1987.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: в 3 т. Т. 2. М.: Дрофа, 2004.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. эл. пособие: в 3 т. Т. 3. СПб.: Лань, 2009.
5. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика: в 3 т. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Дрофа, 2004.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	4
1.1. Площадь области. Двойной интеграл	4
1.2. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному в де- картовых координатах	6
1.3. Замена переменных в двойном интеграле	14
1.4. Применение двойного интеграла для вычисления площади и объема	19
1.5. Вычисление площади поверхности	23
1.6. Тройной интеграл	28
Ответы к упражнениям гл. 1	40
2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	41
2.1. Криволинейные интегралы	41
2.2. Формула Грина	52
2.3. Вычисление площадей используя криволинейный интеграл 2-го рода	56
2.4. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования	57
2.5. Поверхностные интегралы	60
2.6. Формула Остроградского–Гаусса	71
2.7. Формула Стокса	75
Ответы к упражнениям гл. 2	78
Список литературы	78

Белопольский Андрей Львович
Трегуб Вера Леонидовна
Фролова Елена Вениаминовна
Челкак Сергей Иванович
Щеглова Александра Павловна

**СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ
ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ РАЗДЕЛАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов

Подписано в печать 16.09.20. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура „Times New Roman“. Печ. л. 5,0.
Тираж 595 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5