МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“

Е. З. БОРЕВИЧ Е. В. ФРОЛОВА С. И. ЧЕЛКАК

РЯДЫ ФУРЬЕ

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2017

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“

Е. З. БОРЕВИЧ Е. В. ФРОЛОВА С. И. ЧЕЛКАК

РЯДЫ ФУРЬЕ

Электронное учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2017

УДК 512.64 (07)
ББК В143я7
Б82

Б82 Боревич Е. З., Фролова Е. В., Челкак С. И. Ряды Фурье: электрон. учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2017. 57 с.

ISBN ?

Рассмотрены следующие темы: ряды Фурье, краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразование Фурье. Соответствует унифицированной рабочей программе дисциплины „Математический анализ“ для студентов 1-го курса (2-й семестр)факультета электротехники и автоматики и для студентов 2-го курса (3-й семестр)факультета электроники и открытого факультета.

Предназначено для студентов всех направлений и специальностей перечисленных факультетов.

УДК 512.64 (07)
ББК В143я7

Рецензенты: кафедра высшей математики СПбГПУ; д-р физ.-мат. наук, проф. Я. И. Белопольская (СПбГАСУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве электронного учебного пособия

ISBN ?

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В курсе линейной алгебры изучались линейные пространства конечной размерности и было показано, что если в пространстве выбран базис, то любой вектор этого пространства может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов, т. е. разложен по базису. Отмечалось также, что коэффициенты разложения легче всего вычисляются для ортогонального или ортонормированного базиса. Здесь будем изучать вопрос о разложении вектора по ортогональной системе векторов в бесконечномерном линейном пространстве, элементами которого являются функции. Такие разложения приводят к рядам Фурье.

1.1. Линейные нормированные пространства. Скалярное произведение

Напомним некоторые определения (понятия), возможно уже известные читателю из курса алгебры [1].

Определение 1.1. *Множество элементов* $\mathcal{L} = \{a, b, c, ...\}$ *называется линейным векторным пространством, если для любых его элементов определены операции сложения и умножения на числа, которые обладают естественными свойствами.*

Сложение. Для любых элементов $a, b \in \mathcal{L}$ *определен элемент* $a + b$ *(их сумма), который также принадлежит* $\mathcal{L}$ *и при этом:*
1. $a + b = b + a$ *(коммутативность сложения), для любых* $a, b \in \mathcal{L}$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(ассоциативность сложения), для любых* $a, b, c \in \mathcal{L}$.
3. *Существует элемент* $\emptyset$ *(нулевой элемент* $\mathcal{L}$*) такой, что* $a+\emptyset = \emptyset+a = a$ *для любого* $a \in \mathcal{L}$.

Умножение на числа. Для любого элемента $a \in \mathcal{L}$ *и любого числа* λ *(вещественного или комплексного) определен элемент* λa*, также принадлежащий* $\mathcal{L}$ *и при этом:*
4. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \quad a \in \mathcal{L}$.
5. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a, \quad a \in \mathcal{L}$.
6. $1 \cdot a = a, \quad a \in \mathcal{L}$.
Дополнительно эти две операции связаны дистрибутивным законом:
7. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \quad a, b \in \mathcal{L}$.

Если рассматривается умножение только на вещественные числа, будем называть соответствующие пространства вещественными, в противном случае – комплексными.

Примером линейного векторного пространства является, например, множество векторов на плоскости с обычными операциями сложения и умножения на (вещественные) числа.

Пусть $\mathcal{L}$ – линейное векторное пространство, его элементы (векторы) будем называть также точками этого пространства. В этом пособии будем рассматривать линейные векторные пространства, элементами которых являются функции (такие пространства называются функциональными) с естественными операциями сложения и умножения на числа.

Определение 1.2. *Пусть* $x_1, ..., x_n \in \mathcal{L}$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, *выражение* $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$ *называется линейной комбинацией элементов* x_1, x_2, ..., x_n *с коэффициентами* λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Определение 1.3. *Конечная система векторов* x_1, ..., x_k *называется линейно независимой. если равенство нулевому элементу их линейной комбинации возможно только в том случае, если все коэффициенты равны нулю, т. е.*

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k = \emptyset \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0.$$

Определение 1.4. *Бесконечная система векторов* $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, *называется линейно независимой, если любая её конечная подсистема линейно независима.*

В курсе алгебры [1] рассматривались n-мерные линейные пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, в которых любая система $n+1$ векторов является линейно зависимой. Если в пространстве существуют бесконечные системы линейно независимых векторов, оно не является n-мерным ни при каком n. Такие пространства называются бесконечномерными.

Определение 1.5. *Вещественная функция* $\|\cdot\| : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ *называется нормой в линейном пространстве* $\mathcal{L}$, *если выполнены следующие условия* (*аксиомы*) :

1. $\|x\| \geq 0$, для любых $x \in \mathcal{L}$.
2. $\|x\| = 0 \iff x = \emptyset$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Линейное пространство с введенной на нем нормой называется линейным нормированным пространством.

Пример 1.1. $C([a;b])$ – пространство всех непрерывных на $[a;b]$ функций с нормой

$$\|f\|_{C([a;b])} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Пример 1.2. Норму в пространстве n-мерных векторов $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_j \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, можно вводить различными способами. Например, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$; $\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j|$.

Важный класс нормированных пространств составляют пространства со скалярным произведением. В конечномерном случае эти пространства называют евклидовыми или эрмитовыми, если рассматриваются вещественные или комплексные константы соответственно.

Определение 1.6. *Отображение* $(\cdot,\cdot) : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{C}$, *определенное на множестве упорядоченных пар векторов из* $\mathcal{L}$, *называется скалярным произведением, если оно обладает следующими свойствами (аксиомы) :*

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$.
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, *для любого* $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.
4. $(x, x) \geq 0$, *для любого* $x \in \mathcal{L}$.
5. $(x, x) = 0 \iff x = \emptyset$.

Если $\mathcal{L}$ – вещественное пространство, то комплексное сопряжение в п. 1 надо убрать. В этом случае п. 1 означает просто симметричность скалярного произведения:

$$(x, y) = (y, x).$$

В линейном пространстве со скалярным произведением всегда есть норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, порождаемая им.

Определение 1.7. *Векторы* x, y *линейного пространства со скалярным произведением называются ортогональными, если их скалярное произведение* (x, y) *равно нулю.*

Определение 1.8. *Система векторов* $\{x_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, *называется ортогональной, если векторы, входящие в эту систему, попарно ортогональны, т. е.*

$$(x_i, x_k) = 0,\ i \neq k.$$

Можно показать, что всякая ортогональная система векторов является линейно независимой.

Определение 1.9. *Система векторов* $\{x_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, *называется ортонормированной, если они попарно ортогональны и норма каждого вектора равна единице, т. е.*

$$(x_i, x_k) = \delta_i^k = \begin{cases} 0,\ i \neq k, \\ 1,\ i = k. \end{cases}$$

1.2. Пространства функций $L_2([a;b])$ и $L_2([a;b];\rho(x))$

Далее в этом пособии ограничимся рассмотрением кусочно-непрерывных на $[a;b]$ функций, т. е. непрерывных всюду, за исключением конечного числа точек, в каждой из которых разрыв первого рода (или устранимый разрыв). Для таких функций, очевидно, $\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx < +\infty$. Это множество является линейным пространством.

Введем скалярное произведение

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g}(x)\,dx. \tag{1.1}$$

Если f и g являются вещественнозначными функциями, то (1.1) сводится к

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Свойства 1–4 определения 1.6, очевидно, выполнены вследствие соответствующих свойств интеграла. Свойство (аксиома) 5 определения 1.6 будет выполнено в том случае, если отождествить функции, отличающиеся друг от друга лишь на конечном множестве точек. Поэтому будем отождествлять кусочно-непрерывные функции, отличающиеся значениями в точках разрыва, или примем дополнительную договоренность о значении в точке разрыва [3], полагая

$$f(x_i) = \frac{\lim\limits_{x\to x_i-0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_i+0} f(x)}{2},$$

т. е. считая значение f в точке разрыва равным полусумме правого и левого ее пределов в этой точке.

Если рассматриваем пространство функций, непрерывных на $[a;b]$, то этой неприятности нет, так как

$$\begin{cases} \int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx = 0 \\ f \in C([a;b]) \end{cases} \implies f(x) \equiv 0,\ x \in [a;b].$$

Множество кусочно-непрерывных функций с введенным соотношением (1.1) будем называть пространством $L_2([a;b])$.

Скалярное произведение (1.1) порождает норму в $L_2([a;b])$:

$$\|f\|_{L_2([a;b])} = \sqrt{\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx}. \tag{1.2}$$

Для вещественнозначной функции (1.2) принимает вид

$$\|f\|_{L_2([a;b])} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}.$$

Эти понятия обобщаются на случай весового пространства. Пусть функция $\rho\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и положительна. Множество всех кусочно-непрерывных комплекснозначных функций $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ является линейным пространством и обозначается $L_2([a;b];\rho)$. В этом пространстве вводится скалярное произведение $(f, g \in L_2([a;b];\rho))$:

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g}(x)\rho(x)\,dx,$$

которое порождает норму

$$\|f\|_{L_2([a;b];\rho)} = \sqrt{\int\limits_a^b |f(x)|^2\rho(x)\,dx}.$$

Замечание 1.1. В функциональном анализе рассматривается целая шкала нормированных пространств $L_p([a;b])$ при каждом $p \geq 1$, норма в которых определяется равенством

$$\|f\|_{L_p([a;b])} = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \ p \geq 1.$$

Выбор $p = 2$ обусловлен тем, что L_2 – пространство со скалярным произведением (гильбертово) и можно ставить вопрос о разложении по ортогоналным системам функций.

1.3. Тригонометрическая система функций

Предложение 1.1. *Тригонометрическая система функций*

$$\{1, \sin(kx), \cos(kx),\ k \in \mathbb{N}\} \tag{1.3}$$

ортогональна в $L_2([-\pi, \pi])$.

Доказательство. Сначала проверим ортогональность 1 всем остальным функциям системы:

$$\begin{aligned} (1, \sin(kx)) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\, dx = -\frac{1}{k}\, \cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ (1, \cos(kx)) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, dx = \frac{1}{k}\, \sin(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Остается показать, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\, dx = 0,\ n \neq m,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx = 0,\ n \neq m,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\, dx = 0,\ \text{для любых } n, m \in \mathbb{N}.$$

Эти равенства легко проверяются, если воспользоваться формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и применить (1.4).

Система (1.3) не является нормированной, так как

$$\|1\|^2_{L_2([-\pi;\pi])} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

$$\|\sin(nx)\|^2_{L_2([-\pi;\pi])} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(2nx)}{2}\, dx = \pi,$$

$$\|\cos(nx)\|^2_{L_2([-\pi;\pi])} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2nx)\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2nx)}{2}\, dx = \pi.$$

Соответствующая ортонормированная система:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx),\ k\in\mathbb{N}\right\}.$$

Из предложения 1.1 вытекает ортогональность тригонометрической системы

$$\left\{1,\ \sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right),\ \cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right),\ k\in\mathbb{N}\right\}$$

в $L_2([-l;l])$. (Замена $t=\dfrac{\pi x}{l}$.)

Другие примеры ортогональных систем функций в $L_2([a;b];\rho)$ приводятся в 3, 4, где также указывается на источники ортогональных систем функций (показано, в каких задачах появляются ортогональные системы и возникают ряды Фурье по ним).

2. РЯДЫ ФУРЬЕ

2.1. Общая теория рядов Фурье

Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство со скалярным произведением, $\{e_j\}$, $j=1,...,n$, – ортогональная система элементов в $\mathcal{L}$. Фиксируем произвольный элемент $y\in\mathcal{L}$ и поставим задачу найти линейную комбинацию $a_1e_1+...+a_ne_n$, которая дает в пространстве $\mathcal{L}$ наилучшее приближение элемента y в том смысле, что осуществляет минимум выражения

$$\|y-(a_1e_1+...+a_ne_n)\|. \qquad (2.1)$$

Если пространство $\mathcal{L}$ n-мерное, то $e_1,...,e_n$ образуют базис и (2.1) обращается в нуль, если a_j – коэффициенты разложения y по этому базису. Если размерность $\mathcal{L}$ больше n или $\mathcal{L}$ бесконечно мерно, то в общем случае равенство нулю (2.1) не достигается.

Ограничимся случаем вещественного пространства. Воспользовавшись свойствами скалярного произведения и ортогональностью системы векторов $\{e_j\}$, имеем

$$\|y-(a_1e_1+...+a_ne_n)\|^2=\left(y-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k,\ y-\sum_{j=1}^{n}a_je_j\right)=$$

$$=(y,y)-2\sum_{k=1}^{n}a_k(y,e_k)+\sum_{k=1}^{n}a_k^2\|e_k\|^2=$$

$$=\|y\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\|e_k\|^2-2a_k(y,e_k)+\frac{(y,e_k)^2}{\|e_k\|^2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(y,e_k)^2}{\|e_k\|^2}=$$

$$= \|y\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \|e_k\| - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|} \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(y, e_k)^2}{\|e_k\|^2}. \tag{2.2}$$

Очевидно, значение правой части в (2.2) будет наименьшим, если выбрать коэффициенты a_k так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \|e_k\| - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|} \right)^2 = 0.$$

Это достигается при

$$a_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2},\ k = 1, ..., n. \tag{2.3}$$

Отметим, что формула (2.3) верна и в случае комплексного пространства.

Определение 2.1. *Пусть* $\{e_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, *– ортогональная система векторов в линейном пространстве* $\mathcal{L}$. *Числа* $a_j = \dfrac{(y, e_j)}{\|e_j\|^2}$, $j \in \mathbb{N}$, *называются коэффициентами Фурье элемента* y *по этой системе.*

Если система $\{e_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, ортонормирована, то

$$a_j = (y, e_j),\ j \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Следствие 2.1. *Отметим, что в конечномерном случае выражения* (2.3) ((2.4)) *совпадают с формулами для коэффициентов разложения по ортогональному* (*ортонормированному*) *базису.*

Определение 2.2. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k e_k$, *где* $a_k = \dfrac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2}$, *называется рядом Фурье элемента* y *по ортогональной системе* $\{e_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. *В этом случае пишут*

$$y \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e_k.$$

Из приведённых выше рассуждений вытекает

Предложение 2.1. *Для ортогональной системы* $\{e_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, *в* $\mathcal{L}$ *среди всех сумм вида* $a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n$ *наименьшее отклонение от элемента* y *по норме данного пространства имеет* n*-я частичная сумма ряда Фурье элемента* y (*т. е. она дает наилучшее приближение элемента* y *с помощью линейных комбинаций*).

Если a_k – коэффициенты Фурье (2.3), то из (2.2) следует равенство

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2, \tag{2.5}$$

часто называемое тождеством Бесселя.

Из неотрицательности левой части (2.5) вытекает справедливость неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \leq \|y\|^2,$$

которое остаётся верным и при $n \to \infty$.

Предложение 2.2. *Для любого элемента $y \in \mathcal{L}$ и любой ортогональной системы справедливо неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 \|e_k\|^2 \leq \|y\|^2. \tag{2.6}$$

Определение 2.3. *Система элементов $\{e_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, в $\mathcal{L}$ называется полной, если для каждого элемента $y \in \mathcal{L}$ и* для любых $\varepsilon > 0$ *существует номер $n = n(\varepsilon, y)$, n элементов этой системы: e_{k_1}, ..., e_{k_n} и числа λ_1, ..., λ_n, такие, что выполняется неравенство*

$$\|y - (\lambda_1 e_{k_1} + ... + \lambda_n e_{k_n})\| < \varepsilon.$$

Теорема 2.1 [2], [3]. *Ортогональная система $\{e_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, является полной тогда и только тогда, когда* для любых *$y \in \mathcal{L}$ ряд Фурье элемента y по этой системе сходится к самому элементу y по норме пространства $\mathcal{L}$, т. е.*

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0.$$

Для коэффициентов Фурье по полной ортогональной системе функций неравенство Бесселя (2.6) переходит в равенство Парсеваля

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 \|e_k\|^2,$$

которое в случае ортонормированной системы имеет вид

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2. \tag{2.7}$$

Равенство Парсеваля (2.7) есть ни что иное, как теорема Пифагора (хорошо известная читателю в 2-мерном пространстве), записанная в терминах коэффициентов Фурье.

2.2. Ряд Фурье по тригонометрической системе функций

Как показано в 1.3, тригонометрическая система функций (1.3)

$$\{1,\ \sin(kx),\ \cos(kx),\ k \in \mathbb{N}\}$$

ортогональна в $L_2([-\pi;\pi])$.

Пусть функция $f \in L_2([-\pi;\pi])$, ее коэффициенты Фурье, отвечающие функциям 1, $\cos(kx)$, $\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, принято обозначать соответственно $\dfrac{a_0}{2}$, a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$.

В соответствии с общими формулами (2.3) имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{(f,1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,\\
a_n &= \frac{(f,\cos(nx))}{\|\cos(nx)\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt,\\
b_n &= \frac{(f,\sin(nx))}{\|\sin(nx)\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Множитель $\dfrac{1}{2}$ при a_0 поставлен для того, чтобы придать единообразие формулам. Действительно, в этом случае

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt,\ \ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Ряд Фурье по тригонометрической системе функций имеет вид

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right). \tag{2.9}$$

Теорема 2.2 [3]. *Тригонометрическая система* (1.3) *является полной в пространстве* $L_2([-\pi;\pi])$.

Вследствие полноты тригонометрической системы для любых $f \in L_2([-\pi;\pi])$ ряд Фурье (2.9) сходится к f по норме этого пространства, а именно:

$$\lim_{n\to+\infty}\left\| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)\right\|_{L_2([-\pi,\pi])} = 0.$$

Из общей теории вытекает, что среди всех тригонометрических многочленов именно частичная сумма ряда Фурье $S_n(x)$ дает наилучшую аппроксимацию функции f (в смысле того, что разность $f(x) - S_n(x)$ имеет наименьшую норму в $L_2([-\pi;\pi])$. Неравенство Бесселя имеет вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Так как тригонометрическая система полна, справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{2.10}$$

Тождество (2.10) показывает, что не всякий сходящийся тригонометрический ряд может быть рядом Фурье некоторой функции из $L_2([-\pi;\pi])$.

Пример 2.1 [2]. Тригонометрический ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ сходится на $\mathbb{R}$, но не является рядом Фурье ни для какой функции $f \in L_2([-\pi;\pi])$, так как ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ расходится.

Замечание 2.1. Если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ является периодической с периодом 2π и на сегменте $[-\pi;\pi]$ принадлежит пространству L_2, то для нее также справедливо разложение (2.9). При этом в формулах (2.8) можно брать интеграл по любому отрезку длины 2π.

С точки зрения конкретных задач анализа важно установить условия, при которых ряд (2.9) сходится к функции f в каждой точке.

Будем называть функцию $f\colon [a;b] \to R$ кусочно-гладкой на $[a;b]$, если она и ее первая производная непрерывны на $[a;b]$ везде, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

Теорема 2.3 (Дирихле). *Если f – периодическая с периодом 2π и кусочно-гладкая на $[-\pi;\pi]$ функция, то сумма ряда Фурье $S(x)$ равна значению функции f в каждой точке непрерывности и равна полусумме правого и левого пределов функции f в точках разрыва:*

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x+0} f(t) + \lim_{t\to x-0} f(t)\right).$$

Все эти рассуждения легко переносятся на функции, заданные на $[-l;l]$. Система функций

$$\left\{1,\ \cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right),\ \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right),\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

ортогональна в $L_2([-l;l]$, так как при замене $t = \dfrac{\pi x}{l}$ приходим к тригонометрической системе на $[-\pi;\pi]$, которая ортогональна в $L_2([-\pi;\pi])$.

Для функции $f \in L_2([-l;l])$ коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\frac{\pi k t}{l}\right)\,dt,\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ b_k &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\left(\frac{\pi k t}{l}\right)\,dt,\ k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

а ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right) + b_k\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\right). \tag{2.12}$$

Равенство Парсеваля принимает вид

$$\int\limits_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx = l\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right]. \tag{2.13}$$

Формулы (2.11)–(2.13) верны и для периодической функции f с периодом $2l$.

2.3. Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Приведем 2 легко проверяемых утверждения об интегралах по симметричному относительно нуля промежутку, возможно уже известных из курса математического анализа.

Предложение 2.3. *Если $f\colon [-l;l] \to \mathbb{R}$ интегрируема и является четной $(f(-x) = f(x))$, то*

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

Предложение 2.4. *Если $f : [-l;l] \to \mathbb{R}$ интегрируема и является нечетной $(f(-x) = -f(x))$, то*

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0.$$

Так как $\sin\left(\dfrac{\pi kx}{l}\right)$ на $[-l;l]$ – нечетная функция, а $\cos\left(\dfrac{\pi kx}{l}\right)$ – четная, для четной функции f по предложению 2.4 обращаются в нуль все коэффициенты b_k. Четная функция f раскладывается в тригонометрический ряд Фурье только по косинусам

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right),$$

где вследствие предложения 2.3 коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^1 f(t)\cos\left(\frac{\pi kt}{l}\right)\,dt,\ \ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Аналогично, если $f(x)$ – нечетная функция на $[-l;l]$, то по предложению 2.4 равны нулю все коэффициенты a_k (так как $f(x)\cos\left(\dfrac{\pi kx}{l}\right)$ – нечетная). Нечетная функция раскладывается в ряд Фурье только по синусам

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right),$$

где вследствие предложения 2.3 коэффициенты вычисляются по формулам

$$b_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(t)\sin\left(\frac{\pi kt}{l}\right)\,dt,\ \ k \in \mathbb{N}.$$

2.4. Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме

Напомним формулы Эйлера:

$$\begin{aligned} \cos(kx) &= \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right), \\ \sin(kx) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Подставляя (2.14) в ряд Фурье (2.9), имеем:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\,\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n\,\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{inx} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-inx}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

где $c_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2},\ n > 0, \\ \dfrac{a_0}{2},\ n = 0, \\ \dfrac{a_n + ib_n}{2},\ n < 0. \end{cases}$ Подставим выражения a_n, b_n в (2.8) и найдем при $n > 0$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\big(\cos(nt) - i\sin(nt)\big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt. \tag{2.15}$$

Аналогично

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt, \tag{2.16}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt. \tag{2.17}$$

Ряд $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, где коэффициенты вычисляются по формулам (2.15)–(2.17), называется рядом Фурье в комплексной форме.

Равенство Парсеваля: $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$

Можно показать, что система функций $\{e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$ ортогональна в пространстве комплекснозначных функций $L_2([-\pi;\pi])$. Это следует из очевидного равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0,\ n \neq m, \\ 2\pi,\ n = m. \end{cases}$$

Из общей формулы (2.3) находим

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx,\ n \in \mathbb{Z},$$

что совпадает с (2.15)–(2.17).

Все эти формулы переносятся на $[-l;l]$:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{l}}\,dx,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Упражнения.

1. Покажите, что если $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ имеет период $\dfrac{2\pi}{m}$, то ее коэффициенты Фурье (2.8) a_k, b_k равны нулю, если k не кратно m.

2. Покажите, что если $f\colon [-\pi;\pi]\to\mathbb{R}$, то $c_k = \overline{c}_{-k}$, $k\in\mathbb{N}$.

3. Разложите $f\colon [0;\pi]\to\mathbb{C}$, $f\in L_2([0;\pi])$ в ряд Фурье по системе функций $\{\cos(kx)\}$, $k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$.

4. Разложите $f\colon [0;\pi]\to\mathbb{C}$, $f\in L_2([0;\pi])$ в ряд Фурье по системе функций $\{\sin(kx)\}$, $k\in\mathbb{N}$.

5. Разложите на промежутке $[0,\pi]$ функцию $f(x)=x$ в ряды Фурье по синусам и косинусам.

6. Покажите, что $\operatorname{sgn} x = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$, $|x|<\pi$.

7. Покажите, что $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n} = \dfrac{\pi-x}{2}$, $0<x<2\pi$. Нарисуйте график суммы этого ряда на всей числовой оси. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4}$ при $x\in(0,\pi)$.

8. Разложите функцию $f(x)=x^2$, $|x|\le\pi$, в ряд Фурье. Воспользовавшись полученным результатом, найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

9. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)=\dfrac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{3}$ на отрезке $[0,\pi]$. С помощью полученного разложения найдите суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

10. Пусть $f(x)$, $g(x)$ – кусочно-непрерывные 2π-периодические функции и $c_k(f)$, $c_k(g)$ – их коэффициенты Фурье. Найдите коэффициенты Фурье $c_k(h)$, $h(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt$.

11. Для непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям $f(-\pi) = f(\pi)$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ докажите неравенство (неравенство Виртингера)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,dx.$$

3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\rho(x)}\,(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \tag{3.1}$$

где $\rho(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – непрерывные на $[a,b]$ функции. Предположим, что $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$, $p(x) \geq p_0 > 0$ при любом $x \in [a,b]$. Так как (3.1) – линейное уравнение 2-го порядка, множество всех решений уравнения (3.1) представимо в виде $y(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y^*(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения, а $y^*(x)$ – частное решение уравнения (3.1).

Вместе с уравнением (3.1) рассмотрим граничные условия

$$R_1 y'(a) - S_1 y(a) = t_1, \;\; R_2 y'(b) + S_2 y(b) = t_2, \tag{3.2}$$

где $R_1 S_1 \geq 0$, $R_2 S_2 \geq 0$ и $R_1^2 + S_1^2 > 0$, $R_2^2 + S_2^2 > 0$.

Определение 3.1. *Задача о нахождении функции* $y(x)$, *удовлетворяющей уравнению* (3.1) *и краевым условиям* (3.2), *называется краевой задачей.*

Если $R_1 = R_2 = 0$, $S_1 = -1$, $S_2 = 1$, то условия (3.2) имеют вид $y(a) = t_1$, $y(b) = t_2$; эти краевые условия принято называть условиями Дирихле, а соответствующую краевую задачу – задачей Дирихле.

При $S_1 = S_2 = 0$, $R_1 = R_2 = 1$ условия (3.2) сводятся к условиям $y'(a) = t_1$, $y'(b) = t_2$, которые называются краевыми условиями Неймана (а краевая задача – задачей Неймана).

При $R_1 \neq 0$, $S_1 \neq 0$ краевое условие вида (3.2) часто называют третьим краевым условием.

Оказывается, что свойства краевой задачи существенно отличаются от свойств задачи Коши и, с другой стороны, имеют много общего с задачей решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L(y) \equiv -\frac{1}{\rho(x)}\left(p(x)y'\right)' + q(x)y,$$

определенный на множестве $D(L)$ дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих однородным (т. е. $t_1 = t_2 = 0$) краевым условиям (3.2). Множество $D(L)$ является линейным пространством, т. е. если $y, z \in D(L)$, то $\alpha y + \beta z \in D(L)$ при любых $\alpha, \beta \in R$, а оператор L является линейным оператором.

Определение 3.2. *Число λ называется собственным числом оператора L, если существует ненулевая функция $y(x)$ (называемая собственной функцией, соответствующей этому λ) из $D(L)$, для которой $L(y) = \lambda y$.*

Определение 3.3. *Задача нахождения собственных чисел и собственных функций задачи*

$$\begin{cases} L(y) = \lambda y, \\ R_1 y'(a) - S_1 y(a) = 0, \\ R_2 y'(b) + S_2 y(b) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

называется задачей Штурма–Лиувилля.

Множество всех собственных чисел называется спектром оператора L или спектром задачи (3.3).

Свойства оператора L оказываются аналогичными некоторым свойствам самосопряженных матриц.

Теорема 3.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *оператор L является симметричным оператором в $L_2([a; b]; \rho(x))$, т. е. для любых $y, z \in D(L)$ справедливо равенство $(L(y), z) = (y, L(z))$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2([a; b]; \rho(x))$;*

2) *оператор L – ограниченный снизу оператор в $L_2([a; b]; \rho(x))$, т. е. для любого $y \in D(L)$ верно неравенство $(L(y), y) \geq \gamma \|y\|^2$, где $\gamma = \min\limits_{[a,b]} q(x)$;*

3) *если $\gamma = \min\limits_{[a;b]} q(x) > 0$, то оператор L является положительно определенным оператором;*

4) *спектр оператора L вещественный;*

5) *спектр оператора L дискретный, т. е. представляет собой последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$;*

6) *последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничена снизу, причем* $\lambda_n \geq \geq \min\limits_{[a,b]} q(x)$ *при любом* $n \in N$ *и ее единственной предельной точкой является* $+\infty$, *т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$*;*

7) *при некоторых положительных постоянных* A *и* B *неравенства* $An^2 \leq \lambda_n \leq Bn^2$ *верны для всех достаточно больших* n*;*

8) *каждому собственному числу соответствует одна (с точностью до знака) собственная функция* $y_n(x)$*, для которой* $\|y_n\| = 1$*; собственные функции, соответствующие разным собственным числам, ортогональны в* $L_2([a;b];\rho(x))$*;*

9) *система собственных функций* $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *является полной системой в* $L_2([a;b];\rho(x))$*, и значит, любая функция из этого пространства может быть разложена в сходящийся к ней в* $L_2([a;b];\rho(x))$ *ряд Фурье (по системе* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$*);*

10) *если* $y \in D(L)$*, то соответствующий ряд Фурье абсолютно сходится при любом* $x \in (a,b)$ *к функции* $y(x)$*; этот ряд можно почленно дифференцировать 2 раза, и полученные ряды будут сходиться, соответственно, к* $y'(x)$ *поточечно и к* $y''(x)$ *в* $L_2([a;b];\rho(x))$.

Докажем некоторые утверждения этой теоремы. Пусть $y, z \in D(L)$, тогда

$$(L(y), z) = \int\limits_a^b L(y)\overline{z}\rho(x)\,dx = -\int\limits_a^b (py')'\overline{z}\,dx + \int\limits_a^b q(x)y\overline{z}\rho(x)\,dx.$$

Интегрируя в первом интеграле по частям, получим

$$(L(y), z) = -py'\overline{z}\Big|_a^b + \int\limits_a^b py'\overline{z}'\,dx + \int\limits_a^b q(x)y\overline{z}\rho(x)\,dx.$$

Аналогично

$$(y, L(z)) = -py\overline{z}'\Big|_a^b + \int\limits_a^b py'\overline{z}'\,dx + \int\limits_a^b q(x)y\overline{z}\rho(x)\,dx$$

и, следовательно,

$$(L(y), z) - (y, L(z)) = p(y\overline{z}' - y'\overline{z})\Big|_a^b.$$

Покажем, что это число равно нулю. Действительно, из граничных условий в точке b при $R_2 \neq 0$ находим

$$y(b)\overline{z}'(b) - y'(b)\overline{z}(b) = -y(b)\frac{S_2\overline{z}(b)}{R_2} + \frac{S_2 y(b)}{R_2}\overline{z}(b) = 0.$$

При $R_2 = 0$ имеем $y(b) = z(b) = 0$ и также $y(b)z'(b) - y'(b)z(b) = 0$. Точно так же проверяется равенство $y(a)\overline{z}\,'(a) - y'(z)\overline{z}(a) = 0$. Таким образом, $(L(y), z) - (y, L(z)) = 0$ и утверждение 1 теоремы доказано. Далее, при $y \in D(L)$

$$(L(y), y) = -\int\limits_a^b (py')'\overline{y}\,dx + \int\limits_a^b q(x)|y|^2\rho(x)\,dx =$$

$$= -py'\overline{y}\Big|_a^b + \int\limits_a^b p|y'|^2\,dx + \int\limits_a^b q(x)|y|^2\rho(x)\,dx \ge \int\limits_a^b p|y'|^2\,dx + \int\limits_a^b q(x)|y|^2\rho(x)\,dx,$$

так как $y'(b)\overline{y}(b) = y'(a)\overline{y}(a) = 0$ при $R_1 = R_2 = 0$, а при $R_2 \ne 0$ $-p(b)y'(b)\overline{y}(b) = p(b)\dfrac{S_2}{R_2}\,|y|^2(b) \ge 0$ в силу положительности функции $p(x)$ и условия $S_2 \ge 0$. Аналогично, $p(a)y'(a)\overline{y}(a) = p(a)\dfrac{S_1}{R_1}\,|y|^2(a) \ge 0$ при $R_1 \ne 0$. Кроме того, из положительности функций $p(x)$, $\rho(x)$ следует, что

$$\int\limits_a^b p|y'|^2\,dx \ge 0, \quad \int\limits_a^b q(x)|y|^2\rho(x)\,dx \ge \min_{[a,b]} q(x) \int\limits_a^b |y|^2\rho(x)\,dx = \min_{[a,b]} q(x)\|y\|^2.$$

Эти неравенства приводят к доказательству утверждения 2. Вещественность спектра и ортогональность собственных функций являются простыми алгебраическими следствиями симметричности оператора L. Именно, если λ – собственное число, а y – соответствующая ему собственная функция, то $L(y) = \lambda y$ и $(L(y), y) = \lambda(y, y) = \lambda\|y\|^2$. С другой стороны, из симметричности оператора и свойств скалярного произведения получим

$$(L(y), y) = (y, L(y)) = (y, \lambda y) = \overline{\lambda}(y, y) = \overline{\lambda}\|y\|^2.$$

Таким образом, $(\lambda - \overline{\lambda})\|y\|^2 = 0$ и, значит, $\lambda = \overline{\lambda}$ (т. е. λ – вещественно), так как $\|y\|^2 \ne 0$.

Если теперь λ и μ – различные собственные числа (вещественные) и y, z – соответствующие им собственные функции, то

$$\begin{aligned} &(L(y), z) = (\lambda y, z) = \lambda(y, z), \\ &(L(y), z) = (y, L(z)) = (y, \mu z) = \overline{\mu}(y, z) = \mu(y, z) \end{aligned}$$

и, значит, $(\lambda - \mu)(y, z) = 0$. Отсюда следует равенство $(y, z) = 0$, т. е. ортогональность функций y и z в $L_2([a, b]; \rho(x))$.

Оценка собственных чисел, приведенная в утверждении 6 теоремы, легко следует из ограниченности снизу оператора L.

Упражнение. Докажите утверждение из п. 8 теоремы о единственности (с точностью до знака) нормированной собственной функции, отвечающей каждому собственному числу. Заметим, что в этом случае собственное число называют простым. Если некоторому собственному числу оператора соответствует несколько линейно независимых собственных функций, то собственное число называется кратным.

Остальные утверждения сформулированной теоремы доказывать не будем. Отметим, что наиболее важными являются утверждения 9 и 10, их доказательства весьма трудны. Утверждение 10 о свойствах рядов Фурье по полной ортогональной системе функций $\{y_n\}$ называется теоремой Стеклова.

Знание спектра задачи Штурма–Лиувилля и системы ее собственных функций позволяет решить задачу (3.1), (3.2) методом Фурье. Общая схема решения соответствует одному из методов решения систем линейных уравнений с самосопряженной матрицей.

Сначала найдем какую-нибудь функцию $v(x)$, дважды дифференцируемую и удовлетворяющую краевым условиям (3.2). Положим $y(x) = u(x) + v(x)$. Тогда для функции $u(x)$ получим краевую задачу

$$L(u) = f(x) - L(v) = g(x), \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} R_1 u'(a) - S_1 u(a) = 0, \\ R_2 u'(b) + S_2 u(b) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Решение $u(x)$ задачи (3.4), (3.5) будем искать в виде ряда Фурье по системе $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ собственных функций оператора L:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n y_n(x). \tag{3.6}$$

Так как $u \in D(L)$, то краевые условия (3.5) для $u(x)$ удовлетворяются автоматически и ряд (3.6) можно дважды почленно дифференцировать. Тогда из уравнения (3.4) получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \lambda_n y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n y_n(x),$$

где g_n – коэффициенты Фурье функции g. В силу единственности разложения в ряд Фурье найдем, что $u_n = \dfrac{g_n}{\lambda_n}$, если $\lambda_n \neq 0$ при всех $n \in N$. При этом решение задачи (3.4), (3.5) имеет вид

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\lambda_n}\, y_n(x).$$

Таким образом, условие $\lambda_n \neq 0$ является достаточным условием однозначной разрешимости краевой задачи (3.1), (3.2). Для выполнения условия $\lambda_n \neq 0$ достаточным является справедливость неравенства $q(x) \geq q_0 > > 0$ при всех $x \in [a, b]$, так как в этом случае $\lambda_n \geq q_0$ при любом $n \in N$.

Если же $\lambda_{n_0} = 0$ при некотором n_0, то решение задачи (3.4), (3.5) существует не для любой функции $g(x)$. Ясно, что для разрешимости краевой задачи достаточно условия

$$g_{n_0} = \frac{1}{\|y_{n_0}\|^2} \int\limits_a^b g(x) y_{n_0} \rho(x)\, dx = 0. \tag{3.7}$$

Можно доказать, что решение существует только при выполнении этого условия. Равенство (3.7) представляет собой условие ортогональности в $L_2([a, b]; \rho(x))$ функции $g(x)$ и собственной функции $y_{n_0}(x)$, соответствующей собственному числу $\lambda_{n_0} = 0$. Оно является обобщением на дифференциальные операторы так называемой альтернативы Фредгольма, известной в теории систем линейных уравнений. Если для функции $g(x)$ выполнено условие (3.7), то краевая задача (3.4), (3.5) имеет бесконечно много решений

$$u(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \frac{g_n}{\lambda_n} y_n(x) + C y_{n_0}(x),$$

где C – произвольная константа.

Изучим подробно спектр оператора L, задаваемого дифференциальным оператором $L(y) = -y''$ (т. е. $\rho(x) \equiv p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$) и однородными граничными условиями (условиями (3.2) при $t_1 = t_2 = 0$). Задача Штурма–Лиувилля имеет вид

$$-y'' = \lambda y, \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} R_1 y'(a) - S_1 y(a) = 0, \\ R_2 y'(b) + S_2 y(b) = 0. \end{cases}$$

Так как $q(x) \equiv 0$, то $\lambda_n \geq 0$ при всех $n \in N$. Если $\lambda = 0$, то $y(x, C_1, C_2) = = C_1 x + C_2$ будет общим решением уравнения (3.8) и из краевых условий (3.5) следует, что постоянные C_1 и C_2 должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} R_1 C_1 - S_1 a C_1 - S_1 C_2 = 0, \\ R_2 C_1 + S_2 b C_1 + S_2 C_2 = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Система (3.9) имеет ненулевое решение при условии

$$\det \begin{bmatrix} R_1 - aS_1 & -S_1 \\ R_2 + bS_2 & S_2 \end{bmatrix} = R_1 S_2 + R_2 S_1 + (b - a) S_1 S_2 = 0,$$

а последнее равенство возможно только при $S_1 = S_2 = 0$, т. е. для краевых условий Неймана. Таким образом, $\lambda = 0$ принадлежит спектру оператора L только в случае задачи Неймана, и этому собственному числу соответствует собственная функция $y_0(x) \equiv 1$. Условие разрешимости (3.7) краевой задачи при этом имеет вид

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0,$$

и при выполнении этого условия решение задачи Неймана определено с точностью до постоянного слагаемого.

Если $\lambda > 0$, то обозначим $\lambda = \mu^2$ и рассмотрим общее решение уравнения (3.8):

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x).$$

Задача сводится к нахождению постоянных C_1, C_2 (не равных нулю одновременно), при которых будут выполнены условия (3.9). Вычисляя значения $y(a)$, $y(b)$, $y'(a)$, $y'(b)$, получим для C_1, C_2 систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -(R_1\mu\sin(\mu a) + S_1\cos(\mu a))C_1 + (R_1\mu\cos(\mu a) - S_1\sin(\mu a))C_2 = 0, \\ -(R_2\mu\sin(\mu b) - S_2\cos(\mu b))C_1 + (R_2\mu\cos(\mu b) + S_2\sin(\mu b))C_2 = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Однородная система уравнений (3.10) имеет ненулевое решение только в том случае, когда определитель соответствующей матрицы равен нулю. Таким образом, должно быть выполнено равенство

$$\det\begin{bmatrix} -(R_1\mu\sin(\mu a) + S_1\cos(\mu a)) & R_1\mu\cos\mu a) - S_1\sin(\mu a) \\ -(R_2\mu\sin(\mu b) - S_2\cos(\mu b)) & R_2\mu\cos(\mu b) + S_2\sin(\mu b) \end{bmatrix} =$$

$$= R_1R_2\mu^2\sin(\mu l) - (R_1S_2 + R_2S_1)\mu\cos(\mu l) - S_1S_2\sin(\mu l) = 0,$$

где $l = b - a$.

В случаях $R_1 = R_2 = 0$ или $S_1 = S_2 = 0$ (т. е. для краевых условий Дирихле или Неймана) это уравнение сводится к уравнению $\sin(\mu l) = 0$, имеющему положительными корнями числа $\mu_n = \dfrac{\pi n}{l}$, $n \in N$. Итак, в случае краевых условий Дирихле спектром является множество

$$\left\{\lambda_n : \ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ n \in N\right\},$$

а в случае краевых условий Неймана – множество

$$\left\{\lambda_n : \ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ n \in N \cup \{0\}\right\}.$$

Соответствующие собственные функции найдем, решив при $\mu = \mu_n = \sqrt{\lambda_n}$ систему (3.10). Для краевых условий Дирихле получим $C_1 = 0$, $C_2 = C$, где C – произвольная постоянная. Взяв $C = 1$, получим собственные функции (при краевых условиях Дирихле):

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right),\ n \in N.$$

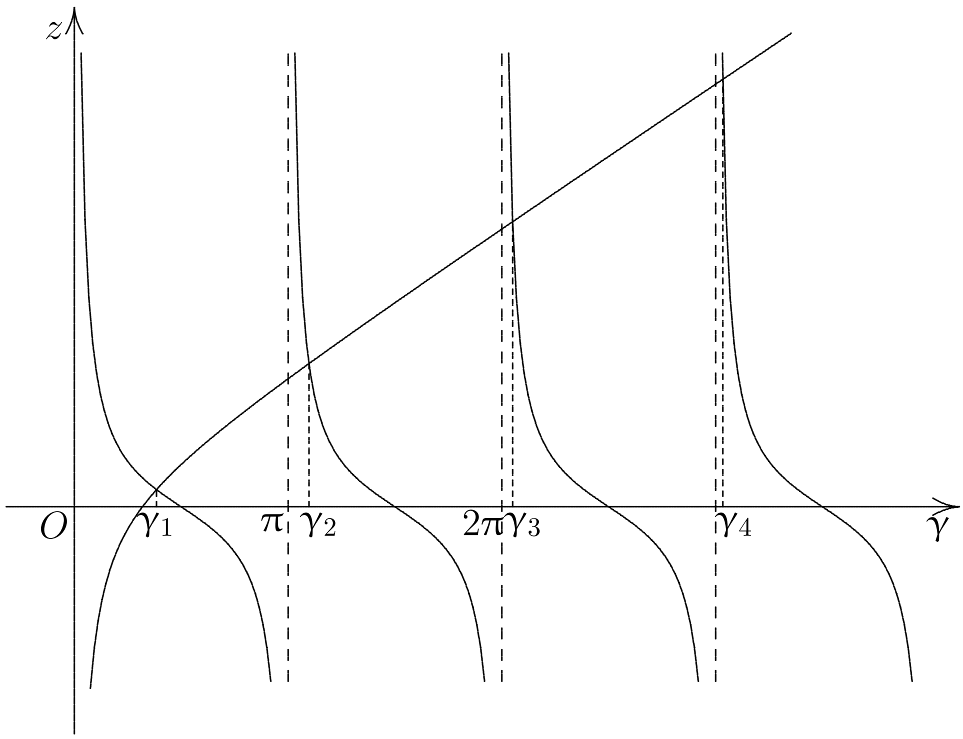
Аналогично для краевых условий Неймана найдем, что собственными функциями будут

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right),\ n \in N \cup \{0\}.$$

Если же краевые условия не являются условиями Дирихле или Неймана, то рассматриваемое уравнение равносильно следующему:

$$\operatorname{ctg}\gamma = \left(\frac{R_1 R_2}{l}\gamma - \frac{S_1 S_2}{\gamma}\,l\right)\frac{1}{R_1 S_2 + R_2 S_1} \equiv \varphi(\gamma),\ \gamma = \mu l. \qquad (3.11)$$

Геометрически очевидно (рисунок), что уравнение (3.11) имеет бесконечно много положительных решений γ_n, $n = 1, 2, \ldots$.



На рисунке изображены графики функций $z = \operatorname{ctg}\gamma$ и $z = a\gamma - \dfrac{b}{\gamma}$ при $a > 0$, $b > 0$. Первые 3 положительных корня уравнения $\operatorname{ctg}\gamma = a\gamma - \dfrac{b}{\gamma}$ обозначены γ_1, γ_2, γ_3.

Итак, если краевые условия не являются условиями Дирихле и Неймана, то спектром рассматриваемой задачи будет множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n = \left(\dfrac{\gamma_n}{l}\right)^2$, где γ_n – положительные корни уравнения (3.11). Соответствующие собственные функции получим, решив при $\mu = \mu_n$ систему (3.10). Решение имеет вид

$$C_1 = (R_1\mu_n \cos(\mu_n a) - S_1 \sin(\mu_n a))C,$$
$$C_2 = (R_1\mu_n \sin(\mu_n a) + S_1 \cos(\mu_n a))C,$$

где C – произвольная константа. Взяв $C = 1$, найдем собственные функции

$$y_n(x) = R_1\mu_n \cos(\mu_n(x-a)) + S_1 \sin(\mu_n(x-a)),\ \ \mu_n = \frac{\gamma_n}{l}, \tag{3.12}$$

Как уже отмечалось, система собственных функций $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2([a;b];1)$. Нормы $\|y_n(x)\|$ легко вычисляются. Действительно, учитывая (3.12), найдем

$$\|y_n\|^2 = \int\limits_a^b [R_1\mu_n \cos(\mu_n(x-a)) + S_1 \sin(\mu_n(x-a))]^2\, dx =$$

$$= \frac{l}{2}(R_1^2\mu_n^2 + S_1^2) + \frac{1}{2}R_1S_1 + \frac{1}{4\mu_n}\left(R_1^2\mu_n^2 - S_1^2\right)\sin(2\mu_n l) - \frac{1}{2}\, R_1S_1\cos(2\mu_n l). \tag{3.13}$$

Кроме того, здесь $\sin(2\mu_n l)$ и $\cos(2\mu_n l)$ могут быть выражены через $\operatorname{ctg}(\mu_n l)$ с использованием известных формул тригонометрии, что часто приводит к упрощению равенства (3.13).

Рассмотрим еще оператор $L(y) = -y''$ с граничными условиями

$$y(-\pi) = y(\pi),\ \ y'(-\pi) = y'(\pi), \tag{3.14}$$

называемыми периодическими граничными условиями. Найдем спектр и систему собственных функций этой задачи. Легко доказать, что и в этом случае оператор L будет симметричным и неотрицательно определенным (сделайте это самостоятельно в качестве упражнения). Таким образом, спектр рассматриваемой задачи по-прежнему вещественный и неотрицательный.

Если $\lambda = 0$, то множество решений уравнения $-y'' = \lambda y$ есть $y = C_1x + C_2$ и условия (3.14) приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} -\pi C_1 + C_2 = \pi C_1 + C_2, \\ C_1 = C_1, \end{cases}$$

которая имеет решение $C_1 = 0$, $C_2 = C$. Таким образом, $\lambda = 0$ является собственным числом и соответствующая собственная функция $y_0(x) = 1$.

При $\lambda = \mu^2 > 0$ множество решений уравнения $-y'' = \lambda y$ имеет вид $y = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$. Условия (3.14) сводятся к системе уравнений

$$\begin{cases} 2C_2 \sin(\pi\mu) = 0, \\ 2\mu C_1 \sin(\pi\mu) = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Ясно, что для существования ненулевого решения этой системы должно быть выполнено условие $\sin(\pi\mu) = 0$, т. е. $\mu = n$. При этом условии решением системы (3.15) является любая пара (C_1, C_2). Следовательно, $\lambda = n^2$, $n \in N$, является точкой спектра, а собственной функцией будет

$$y_n(x) = C_1 \cos(nx) + C_2 \sin(nx).$$

Взяв $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ или $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, получим две функции $y_n^{(1)}(x) = \cos(nx)$, $y_n^{(2)}(x) = \sin(nx)$, которые, очевидно, линейно независимы и обе являются собственными функциями, отвечающими одному и тому же собственному числу $\lambda_n = n^2$. Таким образом, в этом случае (в отличие от краевых условий (3.2)) собственные числа не являются простыми (при $n > 0$). Говорят, что в этом случае кратность собственного числа равна двум. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$, соответствующие различным собственным числам, как и в случае условий (3.2), ортогональны в $L_2([-\pi; \pi]; 1)$ (докажите). Легко проверить, что и указанные собственные функции $y_n^{(1)}(x)$, $y_n^{(2)}(x)$ (отвечающие одному собственному числу) также ортогональны. Вообще говоря, можно выбрать две линейно независимые собственные функции для $\lambda = n^2$ и не ортогональные между собой, например $y_1 = \sin nx$, $y_2 = \sin nx + \cos nx$. Однако такой выбор неудобен.

Итак, спектр рассматриваемой задачи есть множество $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n = n^2$, $n \in N \cup \{0\}$. Собственное число $\lambda_0 = 0$ простое, все остальные собственные числа двукратные. Система собственных функций $\{y_0, y_n^{(1)}, y_n^{(2)}\} \equiv \{1, \cos(nx), \sin(nx)\}$ ортогональна в $L_2([-\pi; \pi]; 1)$.

Отметим, что эта задача Штурма–Лиувилля приводит к классической тригонометрической системе ортогональных функций, разложения по которой функций из $L_2([-\pi; \pi]; 1)$ являются классическими рядами Фурье. Полнота этой системы и сходимость рядов обсуждались в разделе, посвященном рядам Фурье.

В заключение отметим, что задача Штурма–Лиувилля является важнейшим источником появления ортогональных систем функций и, соответственно, многие факты из теории рядов Фурье являются следствиями свойств задачи Штурма–Лиувилля, т. е. решений дифференциальных уравнений.

4. НЕКОТОРЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

4.1. Уравнение Бесселя и функции Бесселя

Дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{4.1}$$

называется уравнением Бесселя; это – линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Отметим, что в точке $x = 0$ коэффициенты уравнения (4.1) не ограничены и, следовательно, решения этого уравнения могут быть не определены при $x = 0$. Будем рассматривать уравнение (4.1) при вещественных p; ясно, что можно считать $p \geq 0$.

Покажем, что уравнение Бесселя имеет решение, остающееся ограниченным при $x = 0$. Попробуем найти решение в виде так называемого обобщенного степенного ряда

$$y = x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n. \tag{4.2}$$

Здесь α – вещественное число, которое вместе с коэффициентами y_n подлежит определению. Для того чтобы число α было однозначно определено, необходимо выполнение условия $y_0 \neq 0$. Поскольку функция x^{α} определена в вещественном анализе только при $x \geq 0$ (при $\alpha \geq 0$), далее рассматриваем решение (4.2) при $x \geq 0$. Если ряд (4.2) сходится, то, как известно из теории степенных рядов, его можно дифференцировать почленно (любое число раз) в области его сходимости.

Итак, предположим, что ряд (4.2) сходится, тогда

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) y_n x^{n+\alpha-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) y_n x^{n+\alpha-2}.$$

Функция y будет решением уравнения (4.1), если при ее подстановке в (4.1) получится тождество. Таким образом, должно быть

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) y_n x^{n+\alpha-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) y_n x^{n+\alpha-2} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 y_n x^{n+\alpha-2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\alpha)^2 - p^2\right] y_n x^{n+\alpha-2} + \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+\alpha} = 0. \tag{4.3}$$

Поскольку $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+\alpha} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} y_{n-2} x^{n+\alpha-2}$, то равенство (4.3) принимает вид

$$\Big\{ (\alpha^2 - p^2) y_0 + \left[(\alpha+1)^2 - p^2\right] y_1 x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[(n+\alpha)^2 - p^2\right] y_n + y_{n-2}\right] x^n \Big\} x^{\alpha-2} = 0. \tag{4.4}$$

Это равенство заведомо будет выполнено, если все коэффициенты ряда, входящего в (4.4), будут нулевыми, другими словами, если будут выполнены равенства

$$\begin{cases} (\alpha^2 - p^2) y_0 = 0, \\ \left[(\alpha+1)^2 - p^2\right] y_1 = 0, \\ \left[(\alpha+n)^2 - p^2\right] y_n + y_{n-2} = 0, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{4.5}$$

Из первого уравнения этой системы и условия $y_0 \neq 0$ следует, что число α должно удовлетворять уравнению $\alpha^2 - p^2 = 0$. Это уравнение имеет 2 решения при $p > 0$: $\alpha_+ = p$ и $\alpha_- = -p$ и единственное решение $\alpha = 0$ при $p = 0$. Выберем в качестве числа α решение α_+ при $p > 0$. Тогда $(\alpha+1)^2 - p^2 = 2p + 1 \neq 0$ и из второго уравнения системы (4.5) находим $y_1 = 0$. Далее, $(\alpha+n)^2 - p^2 = n(2p+n) \neq 0$ и из последнего уравнения системы (4.5) получим

$$y_n = -\frac{y_{n-2}}{n(n+2p)}, \quad n \geq 2.$$

Из этого соотношения при $n = 3$ находим $y_3 = -\dfrac{y_1}{3(3+2p)} = 0$ и аналогично $y_5 = y_7 = ... = y_{2k+1} = 0$ для всех коэффициентов y_n с нечетными индексами. Для коэффициентов y_{2k} найдем

$$y_{2k} = -\frac{y_{2k-2}}{2k(2k+2p)} = \frac{y_{2k-4}}{2k(2k+2p)(2k-2)(2k+2p-2)} = ... =$$

$$= (-1)^k \frac{y_0}{2k(2k+2p)(2k-2)(2k+2p-2)...2(2+2p)} =$$

$$= (-1)^k \frac{y_0}{2^{2k} k!(p+1)(p+2)...(p+k)}.$$

Таким образом, решение (если оно существует в указанном виде) должно быть следующим:

$$y(x) = y_0 x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+1)...(p+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{4.6}$$

Для доказательства того, что эта функция действительно является решением уравнения Бесселя, достаточно доказать сходимость ряда, входящего в равенство (4.6). Простое применение признака Даламбера (сделайте это самостоятельно в качестве упражнения) показывает, что рассматриваемый степенной ряд сходится при всех $x \in R$ и, следовательно, функция $y(x)$ является решением уравнения Бесселя. Запишем представление для $y(x)$ в более компактном виде. Из свойств функции $\Gamma(p)$ следует, что

$$\Gamma(p+k+1) = (p+k)\Gamma(p+k) = (p+k)(p+k-1)\Gamma(p+k-1) = ... =$$

$$= (p+k)(p+k-1)...(p+1)\Gamma(p+1),$$

так что

$$(p+1)...(p+k) = \frac{\Gamma(k+p+1)}{\Gamma(p+1)}$$

и

$$y(x) = y_0 2^p \Gamma(p+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}.$$

В качестве стандартного решения уравнения Бесселя, ограниченного в точке $x = 0$, выбирается функция

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p},$$

соответствующая выбору $y_0 = \dfrac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ и называемая *функцией Бесселя*. Отметим, что $J_0(0) = 1$, $J_p(0) = 0$ при $p > 0$.

Таким образом, одно решение уравнения Бесселя построено. Для нахождения общего решения уравнения Бесселя необходимо найти еще и второе решение, линейно независимое с $J_p(x)$. Обсудим кратко построение второго решения. Из рассуждений, приводящих к функции $J_p(x)$, видно, что если в качестве числа α взять значение $\alpha_- = -p$ и если при этом $(\alpha_- + n)^2 - p^2 = n(n-2p) \neq 0$ при всех $n \geq 1$, то система уравнений (4.5) также будет однозначно разрешима и можно получить и второе решение в виде обобщенного степенного ряда, которое будет иметь тот же вид, что ряд для $J_p(x)$ (при соответствующем выборе y_0), но с заменой p на $-p$. Другими словами, функция

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}, \quad x > 0, \tag{4.7}$$

также будет решением уравнения Бесселя для $p > 0$ при условии, что $n - 2p \neq 0$ при всех $n \geq 1$. Отметим, что функция $J_{-p}(x)$ не ограничена в окрестности точки $x=0$ (и не определена в самой точке $x = 0$) и, значит, решения $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ линейно независимы. Ограничение $n-2p \neq 0$ означает, что p не может быть целым или полуцелым числом. Несколько более подробное рассмотрение показывает, что для полуцелых p система (4.5) все-таки разрешима, т. е. и в этом случае функция $J_{-p}(x)$ будет решением уравнения Бесселя.

Если же $p \in N$, то система (4.5) при условии $y_0 \neq 0$ второго решения не имеет и построить второе решение уравнения Бесселя в виде обобщенного степенного ряда невозможно. Отметим, однако, что функция $\dfrac{1}{\Gamma(p)}$ продолжима на отрицательную вещественную полуось как непрерывная функция и при этом $\dfrac{1}{\Gamma(p)} = 0$ для $-p \in N \cup \{0\}$. В связи с этим формальный ряд (4.7) может быть определен и при $p \in N$, причем первые слагаемые, для которых $k - p + 1$ равно отрицательному числу или нулю, обращаются в нуль. Следовательно,

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} =$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+n+1)m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(x),$$

так как $\Gamma(m+1) = m!$ для $m \in N$. Таким образом, хотя формально функция $J_{-n}(x)$ и оказывается определенной, но она не является решением уравнения Бесселя, линейно независимым с решением $J_n(x)$.

Итак, 2 линейно независимых решения $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ уравнения Бесселя построены для $p \notin N \cup \{0\}$ (в случае $p = 0$ вообще построение единственно, так как $\alpha_+ = \alpha_- = 0$). Второе решение при $p \in N \cup \{0\}$ может быть получено следующим образом. Во-первых, при $p \notin N \cup \{0\}$ можно вместо решения $J_{-p}(x)$ взять линейную комбинацию решений $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$

$$Y_p(x) = \frac{\cos(\pi p) J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)}. \tag{4.8}$$

Во-вторых, можно доказать, что если $n \in N \cup \{0\}$, то функция $Y_n(x) = \lim\limits_{p \to n} Y_p(x)$ также будет решением уравнения Бесселя и при этом линейно независимым с решением $J_n(x)$.

Выбор в качестве линейно независимых решений пары $\{J_p(x), Y_p(x)\}$ более удобен, чем пары $\{J_p(x), J_{-p}(x)\}$, так как это возможно для любых $p \geq 0$.

Функция $Y_p(x)$, определенная равенством (4.8) для $p \notin N \cup \{0\}$ и описанным предельным переходом при $p \in N \cup \{0\}$, называется *функцией Неймана.* Доказывается, что функция Неймана не является ограниченной в окрестности нуля при всех $p \geq 0$.

Упражнения.

1. Покажите, исходя из определения, что

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x; \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

2. Докажите соотношения

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = x^{p-1}J_{p-1}(x),$$

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_p(x)\right) = -x^{-p-1}J_{p+1}(x);$$

в частности, $J_0'(x) = -J_1(x)$.

3. Используя результат упражнения 2, покажите, что

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x}J_p(x),$$

$$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J_p'(x).$$

4.2. Задача Штурма–Лиувилля для оператора Бесселя

Для $p \geq 0$ рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$B_p y = -\frac{1}{x}(xy')' + \frac{p^2}{x^2}y = -y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{p^2}{x^2}y, \tag{4.9}$$

определенный для дважды непрерывно дифференцируемых функций. Оператор B_p назовем *оператором Бесселя.* Отметим, что коэффициенты оператора B_p имеют особенность в точке $x = 0$. Для любых a, l, $0 < a < l$, для оператора (4.9) можно рассматривать задачу Штурма–Лиувилля, которая является частным случаем задачи (3.3). Однако наиболее важным является случай, когда $a = 0$ и *не выполнено* условие ограниченности коэффициентов оператора L в задаче (3.3) в окрестности левого конца промежутка. В этом случае (как и в случае бесконечного промежутка (a, b)) задачу Штурма–Лиувилля принято называть *сингулярной.* Вид краевых условий для сингулярной задачи должен быть изменен. Для оператора B_p это касается краевого условия в точке $x = 0$. Вопрос о наиболее естественных краевых условиях для сингулярных задач здесь подробно не обсуждается. Для оператора Бесселя B_p возможным краевым условием в точке $x = 0$ является требование ограниченности функции $y(x)$. В точке $x = l$ краевое условие стандартное, т. е. такое же, как в задаче (3.3). Таким образом, приходим к следующей задаче Штурма–Лиувилля для оператора B_p.

Найти собственные числа λ, при которых задача

$$\begin{cases} B_p y = \lambda y, \ 0 < x < l, \\ y(0) \text{ ограничена}, \\ R_2 y'(l) + S_2 y(l) = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

имеет нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение $y(x)$, определенное при $x \in [0, l]$. Естественно, что функция $y(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируема при $x \in (0, l)$ и непрерывна при $x \in [0, l]$. Кроме того, при $R_2 \neq 0$ производная $y'(x)$ должна быть непрерывна слева в точке $x = l$.

Для оператора Бесселя B_p функции $\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$, определяющие оператор L, очевидно таковы: $\rho(x) = p(x) = x$, $q(x) = \dfrac{p^2}{x^2}$. Ясно, что $\rho(x) \geq 0$, $p(x) \geq 0$, $q(x) > 0$. Как и для оператора L, для оператора B_p устанавливается с учетом краевого условия при $x = 0$ его симметричность в пространстве $L_2([0; l]; \rho(x)) = L_2([0; l]; x)$ и ограниченность снизу, т. е. неравенство $(B_p y, y) \geq \min\limits_{[0,l]} \dfrac{p^2}{x^2} \|y\|^2$ (докажите это самостоятельно). Отсюда, как и раньше, следует вещественность и положительность (неотрицательность для $p = 0$) спектра оператора B_p, а также ортогональность в $L_2([0; l]; x)$ собственных функций, отвечающих различным собственным числам.

Получим уравнение, которому удовлетворяют собственные числа λ_n. Дифференциальное уравнение $B_p y = \lambda y$ имеет вид

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\lambda - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0. \tag{4.11}$$

Отметим, что $\lambda > 0$ при $p > 0$ (спектр положителен), а при $p = 0$ возможен еще случай $\lambda = 0$ (спектр в этом случае неотрицателен). Этот последний случай рассмотрим позже, а пока будем считать, что $\lambda > 0$. Тогда уравнение (4.11) легко сводится к уравнению Бесселя (4.1). Именно, сделаем замену переменной $t = \sqrt{\lambda} x$ и обозначим $y(x) = u(t)$. Тогда $y'_x = u'_x = u'_t t'_x = \sqrt{\lambda} u'_t$ и $y''_{xx} = \lambda u''_{tt}$. Следовательно, уравнение (4.11) сводится к уравнению

$$\lambda u'' + \frac{1}{t} \lambda u' + \left(\lambda - \frac{p^2 \lambda}{t^2}\right) u = 0$$

относительно функции $u(t)$ или к уравнению

$$u'' + \frac{1}{t}\,u' + \left(1 - \frac{p^2}{t^2}\right) u = 0,$$

т. е. к уравнению Бесселя. Таким образом, общим решением этого уравнения является

$$u(t, C_1, C_2) = C_1 J_p(t) + C_2 Y_p(t),$$

где $J_p(t)$, $Y_p(t)$ – соответственно функции Бесселя и Неймана. Итак, множеством решений уравнения (4.11) будет

$$y(x) = C_1 J_p(\sqrt{\lambda}\,x) + C_2 Y_p(\sqrt{\lambda}\,x).$$

Кроме уравнения (4.11) функция $y(x)$ должна еще удовлетворять и краевым условиям. Поскольку функция Неймана $Y_p(t)$ при всех $p \geq 0$ не ограничена в точке $x = 0$, то условие ограниченности $y(x)$ при $x = 0$ приводит к равенству $C_2 = 0$. Спектр λ_n определяется краевым условием в точке $x = l$. Ограничимся случаем $R_2 = 0$, $S_2 = 1$, т. е. условием Дирихле в точке $x = l$. В этом случае краевое условие при $x = l$ приводит к равенству

$$J_p(\sqrt{\lambda}\,l) = 0. \tag{4.12}$$

Таким образом, вопрос сводится к решению уравнения (4.12), т. е. к вопросу о существовании нулей функции $J_p(t)$. Можно доказать, что функция $J_p(t)$ имеет бесконечно много положительных нулей $\gamma_n^{(p)}$, причем $\gamma_n^{(p)} \to \infty$ при $n \to \infty$ и $\Delta\gamma_n = \gamma_{n+1}^{(p)} - \gamma_n^{(p)} \sim \pi$ при $n \to \infty$. Следовательно, существует бесконечно много собственных чисел λ_n задачи Штурма–Лиувилля для оператора Бесселя, при этом $\sqrt{\lambda_n}\,l = \gamma_n^{(p)}$, т. е. $\lambda_n = \left(\dfrac{\gamma_n^{(p)}}{l}\right)^2$, где $\gamma_n^{(p)}$ – положительные корни уравнения $J_p(\gamma) = 0$ (для условия Дирихле при $x = l$).

При $p = 0$ необходимо также выяснить, будет ли число $\lambda = 0$ принадлежать спектру. Уравнение (4.11) в этом случае сводится к уравнению

$$\left(y'' + \frac{1}{x}\,y'\right) = \frac{1}{x}(xy')' = 0, \tag{4.13}$$

общее решение которого легко найти. Действительно, из (4.13) получаем, что $xy' = C_1$, т. е. $y' = \dfrac{C_1}{x}$ и, значит, $y = C_1 \ln x + C_2$. Условие ограниченности $y(x)$ в точке $x = 0$ приводит к равенству $C_1 = 0$. Функция $y(x) \equiv C_2 \neq 0$ удовлетворяет краевому условию при $x = l$ только в том случае, если это условие является условием Неймана ($y'(l) = 0$). Следовательно, $\lambda = 0$ будет принадлежать спектру при $p = 0$ только в случае выполнения условия Неймана в точке $x = l$. В частности, для условия Дирихле и при $p = 0$ спектр исчерпывается числами $\left(\frac{\gamma_n^{(0)}}{l}\right)^2$. Собственными функциями задачи (4.10) при $R_2 = 0$, $S_2 = 1$ будут функции

$$y_n(x) = J_p\left(\frac{\gamma_n^{(p)} x}{l}\right),$$

где по-прежнему $\gamma_n^{(p)}$ – положительные корни уравнения $J_p(\gamma) = 0$.

Эти собственные функции, как отмечалось, при $n \neq m$ ортогональны в $L_2([0; l]; x)$, т. е.

$$\int\limits_0^l x J_p\left(\frac{\gamma_n^{(p)} x}{l}\right) J_p\left(\frac{\gamma_m^{(p)} x}{l}\right) dx = 0, \quad n \neq m.$$

При разложении произвольной функции в ряд Фурье по (полной) ортогональной системе функций $\left\{J_p\left(\frac{\gamma_n^{(p)} x}{l}\right)\right\}$ необходимо еще вычислить норму $\|y_n\|$ этих функций. Ясно, что

$$\|y_n\|^2 = \int\limits_0^l x J_p^2\left(\frac{\gamma_n^{(p)} x}{l}\right) dx.$$

Покажем как вычисляется этот интеграл. Обозначим $\mu_n = \frac{\gamma_n^{(p)}}{l}$. Функция $y_n(x)$, как было показано, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}(xy_n')' + \left(\mu_n^2 - \frac{p^2}{x^2}\right) y_n = 0. \tag{4.14}$$

Аналогично, функция $z(x) = J_p(\mu x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}(xz')' + \left(\mu^2 - \frac{p^2}{x^2}\right) z = 0. \tag{4.15}$$

Умножим равенство (4.14) на $xz(x)$, а равенство (4.15) на $xy_n(x)$, вычтем один результат из другого и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$. Тогда получим равенство

$$\int\limits_0^l \left[(xy_n')'z - (xz')'y_n + (\mu_n^2 - \mu^2)xy_n z\right] dx = 0. \tag{4.16}$$

Интегрируя по частям, придем к соотношениям:

$$\int\limits_0^l (xy_n')'z\,dx = xy_n'z\big|_0^l - \int\limits_0^l xy_n'z'\,dx,$$

$$\int\limits_0^l (xz')'y_n\,dx = xy_nz'\big|_0^l - \int\limits_0^l xy_n'z'\,dx,$$

поэтому из (4.16) следует равенство

$$(xy_n'z - xy_nz')\big|_0^l = (\mu^2 - \mu_n^2)\int\limits_0^l xy_nz\,dx. \tag{4.17}$$

Здесь в левой части значение функции $xy_n'z$ в точке $x = 0$ должно пониматься в смысле $\lim\limits_{x\to 0+} xy_n'z$, поскольку производная y_n', вообще говоря, не ограничена в точке $x = 0$. Действительно, для $p > 0$

$$y_n(x) = J_p(\mu_n x) = O\left((\mu_n x)^p\right) = O(x^p)$$

при $x \to 0+$ и

$$y_n'(x) = (J_p(\mu_n x))' = \mu_n J_p'(\mu_n x) = \mu_n O\left((\mu_n x)^{p-1}\right) = O(x^{p-1})$$

при $x \to 0+$.

Аналогичные равенства справедливы и для функции $z(x)$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0+} xy_n'z = \lim\limits_{x\to 0+} xO(x^{p-1})O(x^p) = \lim\limits_{x\to 0+} O(x^{2p}) = 0$ при $p > 0$. При $p = 0$ имеем $z(0) = 1$, $y_n'(0) = 0$ и также $\lim\limits_{x\to 0+} xy_n'z = 0$. Точно так же показывается, что $\lim\limits_{x\to 0+} xy_nz' = 0$.

Заметив еще, что $y_n(l) = 0$ (это следует из определения собственных чисел), получим из (4.17) равенство

$$(\mu^2 - \mu_n^2)\int\limits_0^l xy_nz\,dx = ly_n'(l)z(l). \tag{4.18}$$

Если в этом равенстве положить $\mu = \mu_m \neq \mu_n$, то $z(x) = y_m(x)$, $z(l) = 0$ и из (4.18) следует ортогональность функций $y_n(x)$ и $y_m(x)$. Для вычисления нормы $\|y_n\|$ перепишем равенство (4.18) в виде

$$\int\limits_0^l xy_nz\,dx = l\,\frac{y_n'(l)z(l)}{\mu^2 - \mu_n^2} \tag{4.19}$$

и вычислим предел правой части при $\mu \to \mu_n$. Это легко сделать, используя правило Лопиталя. Именно,

$$\lim_{\mu\to\mu_n} \frac{ly_n'(l)z(l)}{\mu^2-\mu_n^2} = ly_n'(l)\lim_{\mu\to\mu_n} \frac{J_p(\mu l)}{\mu^2-\mu_n^2} = ly_n'(l)\lim_{\mu\to\mu_n} \frac{[J_p(\mu l)]'_\mu}{2\mu} =$$

$$= ly_n'(l)\lim_{\mu\to\mu_n} \frac{J_p'(\mu l)l}{2\mu} = l^2 y_n'(l)\frac{J_p'(\mu_n l)}{2\mu_n}.$$

Учитывая также, что $y_n'(l) = [J_p(\mu_n x)]'_x\Big|_{x=l} = \mu_n J_p'(\mu_n l)$, получим из равенства (4.19) соотношение

$$\|y_n\|^2 = \int\limits_0^l x y_n^2\,dx = \frac{l^2}{2}\left[J_p'(\mu_n l)\right]^2.$$

Сформулируем полученный результат. Задача Штурма–Лиувилля для оператора Бесселя с краевым условием Дирихле в точке $x = l$

$$\begin{cases} B_p y = \lambda y,\ 0 < x < l, \\ y(0) \text{ ограничена},\ y(l) = 0 \end{cases}$$

имеет спектр $\lambda_n = \left(\dfrac{\gamma_n^{(p)}}{l}\right)^2$, где $\gamma_n^{(p)}$ – положительные корни уравнения $J_p(\gamma) = 0$, и соответствующие им собственные функции $y_n(x) = J_p\left(\dfrac{\gamma_n^{(p)}x}{l}\right)$. При этом

$$\|y_n\|^2 = \int\limits_0^l x J_p^2\left(\frac{\gamma_n^{(p)}x}{l}\right)dx = \frac{l^2}{2}\left[J_p'(\gamma_n^{(p)})\right]^2.$$

Упражнения.

1. Найдите спектр, собственные функции и их норму для краевой задачи (4.10) при $R_2 = 1$, $S_2 = 0$ (условия Неймана).

2. Разберите случай краевых условий третьего рода ($R_2 = 1$, $S_2 = h$) в задаче (4.10).

3. Разложите в ряд Фурье по системе $\left\{J_0\left(\dfrac{\gamma_n^{(0)}x}{l}\right)\right\}$ на отрезке $[0, l]$ функции: а) $f(x) = 1$; б) $f(x) = a^2 - x^2$; в) $f(x) = J_0(\alpha x)$.

4. Разложите в ряд Фурье по системе собственных функций задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} B_0 y = \lambda y,\ 0 < x < l, \\ y(0) \text{ ограничена},\ y'(l) = 0 \end{cases}$$

функцию $f(x) = x^2$.

4.3. Некоторые другие сингулярные задачи Штурма–Лиувилля

Приведем справочные сведения для некоторых задач Штурма–Лиувилля.

1. Оператор $Ly = -\left((1-x^2)y'\right)'$ будем называть оператором Лежандра, а задачу Штурма–Лиувилля на отрезке $[-1,1]$ для него – *задачей Штурма–Лиувилля для оператора Лежандра*:

$$\begin{cases} -\left((1-x^2)y'\right)' = \lambda y, \ -1 < x < 1, \\ y(\pm 1) \text{ ограничены.} \end{cases} \tag{4.20}$$

Отметим, что эта задача сингулярна в обеих точках $x \pm 1$, что и находит отражение в краевых условиях.

Спектром задачи (4.20) является множество $\lambda_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Собственными функциями этой задачи являются полиномы $y_n(x) = P_n(x)$, причем $P_n(x)$ – полином степени n. Для $P_n(x)$ справедлива *формула Родрига*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]. \tag{4.21}$$

Полиномы, определяемые формулой (4.21), называются *полиномами Лежандра.* Выбор в равенстве (4.21) коэффициента $\dfrac{1}{2^n n!}$ определяется дополнительными соображениями. При этом $P_n(1) = 1$. Из формулы Родрига видно, что при $n = 2k$ полином Лежандра является четной функцией, а при $n = 2k+1$ – нечетной. Поэтому $P_n(-1) = (-1)^n$. Полиномы Лежандра в соответствии с общей теорией ортогональны на промежутке $[-1,1]$ в $L_2([-1;1];1)$, т. е. просто в $L_2([-1;1])$:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0, \ n \neq m. \tag{4.22}$$

Для квадрата нормы $\|P_n(x)\|^2$ справедлива следующая формула:

$$\|P_n(x)\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}, \ n \geq 0. \tag{4.23}$$

Упражнения.

1. Используя формулу Родрига, найдите полиномы Лежандра $P_n(x)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

2. Используя формулу Лейбница для производной произведения, докажите равенство $P_n(1) = 1$.

3. Используя формулу Родрига и многократное интегрирование по частям, докажите соотношения (4.22) и (4.23).

4. Докажите основные рекуррентные соотношения при $n \geq 1$:

$$(1-x^2)P_n'(x) = n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)],$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(P_{n+1}'(x) - xP_n'(x)\right) = \frac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)\right),$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Отметим, что в математической физике и квантовой механике возникает важная задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\sin\vartheta}(\sin\vartheta u')' = \lambda u, \ 0 < \vartheta < \pi, \\ u(0), \ u(\pi) \text{ ограничены}, \end{cases} \tag{4.24}$$

которая заменой переменной $\cos\vartheta = x$ приводится к задаче (4.20). Спектр задачи (4.24) такой же, как и у (4.20), т.е. $\lambda_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, ...$, а собственные функции $u_n(\vartheta) = P_n(\cos\vartheta)$. Функции $u_n(\vartheta)$ ортогональны в $L_2([0;\pi];\sin\vartheta)$ и

$$\|u_n\|^2 = \int\limits_0^\pi u_n^2(\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

2. Оператор $L_m y = -\left((1-x^2)y'\right)' + \dfrac{m^2}{1-x^2}\, y$ назовем *присоединенным оператором Лежандра.* Задача Штурма–Лиувилля для этого оператора

$$\begin{cases} L_m y = \lambda y, \ -1 < x < 1, \\ y(\pm 1) \text{ ограничены}, \end{cases} \tag{4.25}$$

как и задача (4.20), является сингулярной в точках $x = \pm 1$. Отметим, что задача (4.25) зависит от параметра m. При $m = 0$ она совпадает с задачей для оператора Лежандра. Далее будем считать, что $m \in N$.

Спектром задачи (4.25) является то же множество $\lambda_n = n(n+1)$, что и в задаче (4.20), но при $n \geq m$, т.е. $n = m, m+1, m+2, \ldots$. При этом собственному числу $\lambda_n = n(n+1)$ соответствует собственная функция

$$y_n(x) = P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

где $P_n(x)$ – полином Лежандра степени n. Функция $P_n^{(m)}(x)$ называется *присоединенной функцией Лежандра* порядка m.

Функции $P_n^{(m)}(x)$ и $P_k^{(m)}(x)$ при $n \neq k$, $n \geq m$, $k \geq m$ ортогональны на промежутке $[-1, 1]$, т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x)\, dx = 0,\ n \neq k,\ n \geq m,\ k \geq m,$$

а для нормы функции $P_n^{(m)}(x)$ справедливо равенство

$$\|P_n^{(m)}(x)\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} \left[P_n^{(m)}(x)\right]^2\, dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Отметим, что обычно полагают $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$.

Функция $P_n^{(m)}(x)$ при четном m является полиномом, что сразу видно из ее определения, но при нечетном m уже полиномом не является. Однако функции $P_n^{(m)}(\cos\vartheta)$, которые важны в математической физике и квантовой механике, являются тригонометрическими полиномами при всех $m \in N \cup \{0\}$.

5. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

5.1. Интегральная формула Фурье, эвристические соображения

Пусть $f(x)$ – кусочно-гладкая на $[-l, l]$ функция. Будем дополнительно считать, что в любой своей точке разрыва x_i (их конечное число и все разрывы первого рода) значение $f(x_i)$ определено равенством

$$f(x_i) = \frac{1}{2}(f(x_i + 0) + f(x_i - 0)).$$

Тогда по теореме Дирихле (см. 2.2) функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\left\{e^{i\frac{\pi k x}{l}}\right\}$, т. е. для любых $x \in [-l, l]$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{l}}, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) e^{-i\frac{\pi n t}{l}}\, dt.$$

Обозначим $\xi_n = \dfrac{\pi n}{l}$, тогда $\Delta\xi_n = \xi_n - \xi_{n-1} = \dfrac{\pi}{l}$ и, значит, $\dfrac{1}{l} = \dfrac{\Delta\xi_n}{\pi}$.

Введем также функцию

$$c(\xi) = \int\limits_{-l}^{l} f(t)e^{-i\xi t}\,dt,$$

тогда $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\,c(\xi_n)\Delta\xi_n$. Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\xi_n x}c(\xi_n)\Delta\xi_n. \tag{5.1}$$

Полученное равенство верно при любом $x \in [-l, l]$ для указанного класса функций $f(x)$. Дальнейшие рассуждения являются только эвристическими. Посмотрим, что может произойти с равенством (5.1) при $l \to +\infty$. Так как $\Delta\xi_n \to 0$ при $l \to +\infty$, то сумма в правой части (5.1) формально совпадает с интегральной суммой для интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}c(\xi)\,d\xi.$$

Подчеркнем, однако, что это – несобственный интеграл, а в этом случае само понятие интегральной суммы теряет смысл и, тем более, указанный интеграл не обязан быть близким к рассматриваемой сумме.

Учитывая также, что при $l \to +\infty$

$$c(\xi) = \int\limits_{-l}^{l} f(t)e^{-i\xi t}\,dt \;\to\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}\,dt$$

(разумеется, если последний интеграл существует), можно ожидать, что предельный переход при $l \to +\infty$ приведет к равенству

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi, \tag{5.2}$$

где

$$F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}\,dt. \tag{5.3}$$

Еще раз отметим, что приведенные рассуждения не доказывают равенство (5.2), а только указывают на его правдоподобность. Строгое обоснование этих эвристических соображений весьма затруднительно, но, тем не менее, равенство (5.2) оказывается верным для широкого класса функций $f(x)$. Приведем соответствующую теорему. Уточним сначала, что в приведенных эвристических рассуждениях, во-первых, комплексный ряд Фурье сходится, вообще говоря, только в смысле симметричных частных сумм и, во-вторых, функция $c(\xi)$ определена как интеграл по симметричному промежутку. Это приводит к тому, что интегралы в (5.2) и (5.3) должны пониматься в смысле главного значения, т. е. как пределы по симметричным промежуткам.

Теорема 5.1. *Если функция $f(x)$ - кусочно-гладкая при $x\in(-\infty,\infty)$ (т. е. кусочно-гладкая на любом промежутке $[-l,l]$ и имеет конечное число разрывов первого рода) и, кроме того, абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, т. е. интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ сходится. Тогда* для любых $x\in\mathbb{R}$ *справедливо равенство*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}\,dt\,d\xi. \tag{5.4}$$

Формула (5.4) называется интегральной формулой Фурье.

Замечание 5.1. 1) Отметим, что в условиях теоремы 5.1 функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и, значит, интеграл $F(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}\,dt$ сходится абсолютно (и равномерно по $\xi\in\mathbb{R}$). Ясно, что в этом случае главное значение интеграла существует и совпадает с $F(\xi)$;

2) в любой точке непрерывности функции $f(x)$ выполнено равенство

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x);$$

3) только лишь требования кусочной непрерывности $f(x)$ без условия кусочной гладкости, как и в случае теоремы Дирихле, недостаточно для справедливости интегральной формулы Фурье (5.4).

5.2. Преобразование Фурье, простейшие свойства

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{F}[f](\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}\,dt, \tag{5.5}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi. \tag{5.6}$$

Естественно, что функции $\mathcal{F}[\{](\xi)$ и $\mathcal{F}^{-\infty}[\{](\S)$ определены только в случае существования соответствующих интегралов. Ясно, что достаточным условием этого является абсолютная интегрируемость функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$. В условиях теоремы 5.1 интегральная формула Фурье означает, что

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f](\xi)](x). \tag{5.7}$$

В точке непрерывности функции $f(x)$ равенство (5.7) сводится к

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f](\xi)](x). \tag{5.8}$$

Определение 5.1. *Функция* $\mathcal{F}[f](\xi)$*, заданная равенством* (5.5)*, если она определена, называется прямым преобразованием Фурье функции* $f(x)$*.*

Функция $\mathcal{F}^{-1}[f](x)$*, заданная равенством* (5.6)*, называется обратным преобразованием Фурье функции* $f(\xi)$*.*

Отметим, что обозначение $\mathcal{F}^{-1}$ и сам термин “обратное преобразование Фурье” оправданны соотношениями (5.7) и (5.8), которые (в условиях теоремы 5.1) показывают, что последовательное применение к функции $f(x)$ преобразований $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ не изменяет функцию (в ее точках непрерывности). Это можно записать и в виде

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = E[f], \tag{5.9}$$

где E – тождественный оператор.Здесь $f(x)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условиям теоремы 5.1 . Другими словами, справедливо равенство $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = E$, которое означает, что $\mathcal{F}^{-1}$ является (левым) обратным оператором для оператора $\mathcal{F}$, определенного на непрерывных функциях, удовлетворяющих условиям теоремы 5.1 .

Иногда наряду с введенными используются и обозначения $\mathcal{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \widetilde{f}(x)$. Кроме того, иногда в формуле (5.5) вместо коэффициента $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ пишут коэффициент $\dfrac{1}{2\pi}$, а в формуле (5.6) тогда вместо коэффициента $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ должна стоять единица. Использование коэффициентов $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ в обеих формулах (5.5) и (5.6) более удобно из соображений симметричности этих формул.

Доказательство теоремы 5.1 или, что то же самое, равенства (5.7) основывается на изучении свойств преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье. Не будем приводить доказательство теоремы, но рассмотрим некоторые свойства операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$.

Предложение 5.1. *Если $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, т. е. сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ (в этом случае будем писать $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$), то преобразование Фурье $\mathcal{F}[f](\xi)$ определено при всех $\xi \in \mathbb{R}$.*

Доказательство этого предложения непосредственно следует из оценки

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}\,dt\right| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

и сходимости последнего интеграла. Более того, в этом случае интеграл в (5.5) сходится в обычном смысле, а не только в смысле главного значения, и сходимость интеграла равномерна по $\xi \in \mathbb{R}$.

Пример 5.1. Покажем, что функция $f(x) = \dfrac{\sin ax}{x}$, $a > 0$, имеет преобразование Фурье, и найдем его. Естественно, функцию $f(x)$ считаем доопределенной при $x = 0$ по непрерывности, т. е. $f(0) = a$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{t}\, e^{-i\xi t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at\cos \xi t}{t}\,dt - i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at\sin \xi t}{t}\,dt.$$

Так как функция $\dfrac{\sin at\sin\xi t}{t}$ нечетная, то V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin at\sin \xi t}{t}\,dt = 0$. Более того, если $|\xi| \ne a$, то этот интеграл сходится и в обычном смысле (хотя и не абсолютно) и его значение также нулевое в силу нечетности подынтегральной функции. Для первого интеграла получим (так как здесь подынтегральная функция четная)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at\cos\xi t}{t}\,dt = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin at\cos\xi t}{t}\,dt = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin(a+\xi)t + \sin(a-\xi)t}{t}\,dt.$$

Поскольку при $b > 0$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin bt}{t}\,dt = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = \lim_{A\to+\infty} \mathrm{Si}(A) = \frac{\pi}{2},$$

а при $b < 0$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin bt}{t}\,dt = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin(-bt)}{t}\,dt = -\frac{\pi}{2},$$

то

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin bt}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}(b),$$

где $\mathrm{sign}(b) = \begin{cases} 1, \ b > 0, \\ 0, \ b = 0, \\ -1, \ b < 0. \end{cases}$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin at \cos \xi t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\big[\,\mathrm{sign}(a+\xi) + \mathrm{sign}(a-\xi)\big] = \begin{cases} 0, \ |\xi| > a, \\ \pi/2, \ |\xi| = a, \\ \pi, \ |\xi| < a. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin ax}{x}\right](\xi) = \begin{cases} 0, \ |\xi| > a, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \ |\xi| = a, \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \ |\xi| < a. \end{cases}$$

Отметим, что функция $f(x) = \dfrac{\sin ax}{x}$ не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, так как интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{|\sin ax|}{|x|}\,dx$ расходится.

Пример 5.1 показывает, что преобразование Фурье может существовать не только для $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ и, значит, это условие является достаточным (предложение 5.1), но не необходимым условием существования преобразования Фурье.

Пример 5.2. Вычислим обратное преобразование Фурье функции

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, \ |\xi| > a, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \ |\xi| = a, \quad a > 0. \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \ |\xi| < a, \end{cases}$$

Ясно, что $f(\xi)$ – кусочно-гладкая функция (со скачками при $\xi = \pm a$) и $f(\xi) = 0$ при $|\xi| > a$. Поэтому интеграл (5.6), очевидно, сходится и

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi = \int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{2}\, e^{i\xi x}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-a}^{a} \cos \xi x\, d\xi + \frac{i}{2} \int\limits_{-a}^{a} \sin \xi x\, d\xi = \int\limits_{0}^{a} \cos \xi x\, d\xi = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Примеры 5.1 и 5.2 вместе показывают, что для функции $\dfrac{\sin ax}{x}$ справедлива интегральная формула Фурье, хотя эта функция и не удовлетворяет условиям теоремы 5.1 (не является абсолютно интегрируемой). Таким образом, и условия теоремы 5.1 не являются необходимыми для справедливости равенства (5.7) или (5.8). На самом деле условия, при которых верно (5.7), могут быть значительно ослаблены по сравнению с условиями теоремы 5.1 , но вопрос этот чрезвычайно сложен и обсуждать его не будем, ограничившись приведенными примерами.

Пример 5.3. Вычислим преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-b^2x^2}$, $b > 0$. По определению преобразования Фурье получим

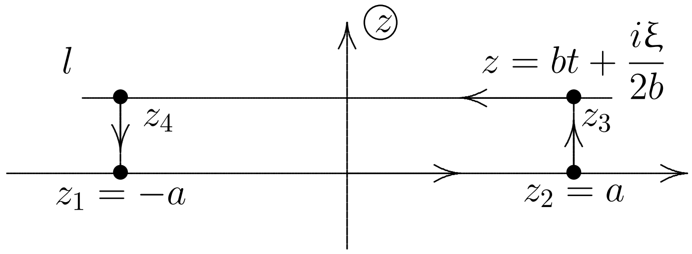
$$\mathcal{F}\left[e^{-b^2x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-b^2t^2 - i\xi t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(bt + \frac{i\xi}{2b}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4b^2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4b^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(bt + \frac{i\xi}{2b}\right)^2}\, dt.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменных $z = bt + \dfrac{i\xi}{2b}$. Тогда $dt = \dfrac{1}{b}\, dz$, а контур интегрирования (прямая $\mathbb{R}$ на комплексной плоскости t) перейдет в прямую $z = bt + \dfrac{i\xi}{2b}$, $t \in \mathbb{R}$, на плоскости z (рисунок соответствует случаю $\xi > 0$), которую обозначим l. Тогда

$$\mathcal{F}\left[e^{b^2x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} b}\, e^{-\frac{\xi^2}{4b^2}} \int\limits_{l} e^{-z^2}\, dz,$$

и осталось вычислить интеграл по l.



Рассмотрим указанный на рисунке контур L – прямоугольник с вершинами в точках $z_1 = -a$, $z_2 = a$, $z_3 = a + \dfrac{i\xi}{2b}$, $z_4 = -a + \dfrac{i\xi}{2b}$. Так как функция e^{-z^2} всюду регулярна, то по теореме Коши $\int\limits_L e^{-z^2}\,dz = 0$. Кроме того, легко показать, что $\int\limits_{z_2}^{z_3} e^{-z^2}\,dz \to 0$ при $a \to +\infty$ и также $\int\limits_{z_4}^{z_1} e^{-z^2}\,dz \to 0$ (установите эти соотношения самостоятельно). Поэтому, переходя к пределу при $a \to +\infty$ в равенстве $\int\limits_L e^{-z^2}\,dz = 0$, получим, что

$$\int\limits_l e^{-z^2}\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\,dz.$$

Как известно из курса анализа, последний интеграл равен $\sqrt{\pi}$. Следовательно,

$$\mathcal{F}\left[e^{-b^2x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}b}\, e^{-\frac{\xi^2}{4b^2}}, \quad b > 0.$$

В частности, при $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ получим $\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, т. е. функция $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ является неподвижной точкой преобразования $\mathcal{F}$.

Предложение 5.2. *Если* $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, *то*
1) $\lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \mathcal{F}[f](\xi) = 0$,
2) $\mathcal{F}[f](\xi)$ *непрерывна при всех* $\xi \in \mathbb{R}$.

Доказательство этого предложения не приводится, отметим только, что утверждение 1) обычно называется леммой Римана–Лебега.

Пример 5.1 показывает, что если условие $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ не выполнено, то утверждение 2) предложения 5.2 может также не выполняться.

Из определения операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ очевидно следует, что

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi)$$

и, кроме того,

$$\mathcal{F}[f(-x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-i\xi t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\xi\tau}\,d\tau = \mathcal{F}^{-1}[f(x)](\xi).$$

Используя эти 2 соотношения, получим

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[f](x)\right](\xi) = \mathcal{F}\big[\mathcal{F}[f](-x)\big](\xi) = \mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f](x)\big](\xi).$$

Поскольку для непрерывной $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 5.1 , $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = E$ (см. (5.9)), то для таких $f(x)$ верно также равенство

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = E, \tag{5.10}$$

означающее, что $\mathcal{F}^{-1}$ является и правым обратным к оператору $\mathcal{F}$ (по крайней мере для функций, удовлетворяющих условиям теоремы 5.1).

Преобразование Фурье играет очень важную роль в различных разделах математики (например, теория вероятностей, математическая физика и т. д.). Преобразование Фурье обладает рядом замечательных свойств. Изучение этих свойств для достаточно широких классов функций требует значительного аналитического аппарата. Ограничимся тем, что докажем некоторые свойства преобразования Фурье для достаточно узкого (но вместе с тем и важного) класса функций.

5.3. Пространство S быстро убывающих функций. Свойства оператора $\mathcal{F}$ на пространстве S

Рассмотрим множество S функций $f(x)$, определенных на $\mathbb{R}$ и обладающих следующими двумя свойствами:

1) $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, т. е. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$;

2) функция f и все ее производные убывают при $x \to \pm\infty$ быстрее любой степени x^n, другими словами,

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^n f^{(m)}(x) = 0, \text{ для любых } n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Заметим, что S – непустое множество. Например, $e^{-x^2} \in S$ (докажите самостоятельно).

Теорема 5.2 (свойства множества S).
1. *Если $f \in S$, то $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.*
2. *S – линейное пространство.*

3. *Если* $f \in S$, *то* $x^k f(x) \in S$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$.

4. S *замкнуто относительно умножения, т. е. если* $f, g \in S$, *то* $fg \in S$.

5. S *замкнуто относительно операции дифференцирования, т. е. если* $f \in S$, *то* $f^{(k)}(x) \in S$ *при любом* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Поскольку если $f \in S$, то $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$ и при $x \geq x_0$ справедлива оценка $|f(x)| < \dfrac{C}{x^2}$ с некоторой постоянной C. Отсюда следует сходимость интеграла $\int\limits_{x_0}^{\infty} |f(x)|\,dx$. Аналогично доказывается сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{x_0} |f(x)|\,dx$, и значит, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, что означает справедливость утверждения 1). Утверждение 2) непосредственно следует из определения множества S. Утверждение 3) достаточно доказать для $k = 1$. В этом случае ясно, что $xf(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и по формуле Лейбница

$$(xf(x)^{(m)} = xf^{(m)}(x) + mf^{(m-1)}(x)$$

и

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n((xf(x))^{(m)} = \lim_{x\to\pm\infty} x^{n+1} f^{(m)}(x) + m \lim_{x\to\pm\infty} x^n f^{(m-1)}(x) = 0,$$

так как оба предела равны нулю по определению S.

Аналогично применение формулы Лейбница приводит к доказательству утверждения 4). Действительно, если $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$, то $fg \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ и

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k)} g^{(m-k)};$$

поэтому

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n (fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lim_{x\to\pm\infty} (x^n f^{(k)} g^{(m-k)}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lim_{x\to\pm\infty} (x^n f^{(k)}(x)) \lim_{x\to\pm\infty} g^{(m-k)}(x) = 0,$$

так как каждый из входящих в эту сумму пределов равен нулю по определению множества S. Доказательство утверждения 5), как и утверждения 2), непосредственно следует из определения множества S.

Линейное пространство S принято называть пространством быстро убывающих функций, или пространством Шварца. Ясно, что для $f \in S$

определено как преобразование Фурье $\mathcal{F}[f]$, так и обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}[f]$. Операторы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ являются линейными операторами на S. Кроме того, любая функция f из S, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 5.1 и, значит, для $f \in S$ справедливы равенства (5.9) и (5.10):

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big] = \mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[f]\big] = E[f] = f.$$

Приведем еще некоторые свойства оператора $\mathcal{F}$ для функций $f \in S$.

Теорема 5.3. *Если $f \in S$, то $\mathcal{F}\big[f^{(m)}\big](\xi) = (i\xi)^m \mathcal{F}[f]$.*

Доказательство. Отметим, прежде всего, что по теореме 5.2 , утверждение 5, $f^{(m)} \in S$ и, значит, преобразование Фурье $\mathcal{F}\big[f^{(m)}\big]$ определено. Далее, интегрируя по частям, получим

$$\mathcal{F}\big[f^{(m)}\big](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(t) e^{-i\xi t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f^{(m-1)}(t) e^{-i\xi t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\xi) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(m-1)}(t) e^{-i\xi t}\, dt \right] =$$

$$= \ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(f^{(m-1)}(t) + i\xi f^{(m-2)}(t) + \ldots$$

$$\ldots + (i\xi)^{m-2} f'(t) + (i\xi)^{m-1} f(t) \Big) e^{-i\xi t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + (i\xi)^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} |\, dt =$$

$$= \frac{(i\xi)^m}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t}\, dt = (i\xi)^m \mathcal{F}[f],$$

так как $\lim\limits_{t \to \pm\infty} f^{(k)}(t) = 0$ при любом k (поскольку $f \in S$).

Теорема 5.4. *Если $f \in S$, то $\mathcal{F}[f] \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, т. е. функция $\mathcal{F}[f](\xi)$ бесконечно дифференцируема. При этом*

$$\big(\mathcal{F}[f](\xi)\big)^{(m)} = \mathcal{F}\big[(-ix)^m f\big]. \tag{5.11}$$

Доказательство. Так как

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t}\, dt \tag{5.12}$$

и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-it)f(t)e^{-i\xi t}\,dt$ сходится абсолютно и равномерно по $\xi\in\mathbb{R}$, то интеграл в равенстве (5.12) можно дифференцировать по параметру ξ и

$$\big(\mathcal{F}[f](\xi)\big)'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-it)f(t)e^{-i\xi t}\,dt=\mathcal{F}\big[(-ix)f(x)\big], \tag{5.13}$$

что доказывает равенство (5.11) для $m=1$. Аналогично, так как интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-it)^2f(t)e^{-i\xi t}\,dt$ также сходится абсолютно и равномерно по ξ, равенство (5.13) тоже можно дифференцировать по ξ, что приводит к (5.11) для $m=2$. Этот процесс можно продолжать неограниченно, поскольку $x^mf\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ по теореме 5.2 для $f\in S$.

Замечание 5.2. 1) Как видно из доказательства теоремы 5.4, условие $f\in S$ для существования производной $\big(\mathcal{F}[f]\big)^{(m_0)}$ данного порядка m_0 является излишним. Ясно, что для этого достаточно абсолютной интегрируемости функций $x^kf(x)$ при $k=0,1,...,m_0$; при этом все преобразования Фурье $\mathcal{F}\big[(-ix)^kf\big]$, очевидно, существуют. Если $f(x)$ еще и ограничена в окрестности точки $x=0$, то достаточно только абсолютной интегрируемости функции $x^{m_0}f$, так как из сходимости интеграла $\int\limits_{x_0}^{\infty}|t^{m_0}f(t)|\,dt$ следует сходимость интегралов $\int\limits_{x_0}^{\infty}|t^kf(t)|\,dt$ при $k=0,1,...,m_0-1$. При этих условиях $\mathcal{F}[f]\in C^{(m_0)}(\mathbb{R})$ и равенство (5.11) остается справедливым для $m=0,1,...,m_0$.

2) Аналогично, из доказательства теоремы 5.3 видно, что если $f(x)$ абсолютно интегрируема и m_0 раз непрерывно дифференцируема и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f^{(k)}(x)=0$ при $k=0,1,...,m_0-1$, то $\mathcal{F}\big[f^{(m_0)}\big](\xi)=(i\xi)^{m_0}\mathcal{F}[f]$.

Теоремы 5.3 и 5.4 описывают связь операции дифференцирования и операции умножения функции f на функцию ix, устанавливаемую преобразованием Фурье $\mathcal{F}$. Видно, что дифференцированию функции f соответствует умножение ее Фурье-образа на $i\xi$ и, наоборот, умножению функции f на $(-ix)$ соответствует дифференцирование Фурье-образа функции f.

Кроме того, вместе с замечанием 5.2 эти теоремы устанавливают связь между гладкостью f и скоростью убывания ее Фурье-образа при $x\to\pm\infty$ (и наоборот). Именно, если $f\in C^{(m_0)}(\mathbb{R})$, $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f^{(k)}=0$ при

$k = 0, 1, ..., m_0 - 1$, то $\mathcal{F}[f] = o\big(|\xi|^{-m_0}\big)$ при $\xi \to \pm\infty$, так как в соответствии с теоремой 5.3 и замечанием 5.2

$$\frac{\mathcal{F}[f](\xi)}{|\xi|^{-m_0}} = |\xi|^{m_0}\mathcal{F}[f] = i^{-m_0}\mathcal{F}\big[f^{(m_0)}\big] \to 0$$

при $x \to \pm\infty$ в силу предложения 5.2 .

Аналогично, если функции $x^k f(x)$, $k = 0, 1, ..., m_0$, абсолютно интегрируемы (это – условие на поведение $f(x)$ при $x \to \pm\infty$; если $x^{m_0} f(x)$ монотонна в окрестности $x \to \pm\infty$, это условие означает, что $f(x)$ убывает при $x \to \pm\infty$, по крайней мере, как $|x|^{-m_0}$), то функция $\mathcal{F}[f]$ m_0 раз непрерывно дифференцируема.

Теоремы, аналогичные теоремам 5.3 и 5.4 , справедливы и для оператора $\mathcal{F}^{-1}$, т. е для обратного преобразования Фурье. Сформулируем соответствующие результаты.

Теорема 5.5. *Если $f \in S$, то*
1) $\mathcal{F}^{-1}\big[f^{(m)}\big](x) = (-ix)^m \mathcal{F}^{-1}[f]$,
2) $\big(\mathcal{F}^{-1}[f](x)\big)^{(m)} = \mathcal{F}^{-1}\big[(i\xi)^m f\big]$.

Доказательство этих утверждений аналогично доказательству теорем 5.3 , 5.4 .

Следствием теорем 5.3–5.5 является следующее утверждение.

Теорема 5.6. *Если $f \in S$, то $\mathcal{F}[f] \in S$; другими словами, преобразование Фурье $\mathcal{F}$ отображает S в S. Более того, оператор $\mathcal{F}$ отображает S на S, т. е.* для любых $g \in S$ *найдется* (*единственный*) *элемент $f \in S$, такой, что $\mathcal{F}[f] = g$.*

Доказательство. Теорема 5.4 устанавливает, что $\mathcal{F}[f] \in C^\infty(\mathbb{R})$. Покажем еще, что $|\xi|^n\big(\mathcal{F}[f]\big)^{(m)} \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$ и любых $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В соответствии с теоремами 5.4 и 5.3 имеем

$$\xi^n\big(\mathcal{F}[f]\big)^{(m)} = \xi^n \mathcal{F}\big[(-ix)^m f\big] = i^{-n}\mathcal{F}\left[\big((-ix)^m f\big)^{(n)}\right] \to 0,\ \ \xi \to \pm\infty,$$

как преобразование Фурье функции $g(x) = \big((-ix)^m f\big)^{(n)} \in S$. Тот факт, что $g \in S$, следует из теоремы 5.2 , утверждения 3) и 5). Таким образом, доказано, что $\mathcal{F}[f] \in S$. Точно так же на основании теоремы 5.5 доказывается, что если $f \in S$, то $\mathcal{F}^{-1}[f] \in S$.

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно для любых $g \in S$ указать нужный элемент $f \in S$. Ясно, что таким элементом будет $f = \mathcal{F}^{-1}[g] \in S$, поскольку для $g \in S$ справедливо равенство $\mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[g]\big] = g$. Единственность элемента f для заданного g следует из аналогичного равенства $\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big] = f$, так как если $\mathcal{F}[f] = g$, то $f = \mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big] = \mathcal{F}^{-1}[g]$.

Приведем без доказательства еще 2 утверждения относительно свойств оператора $\mathcal{F}$.

Теорема 5.7. *Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ сохраняет скалярное произведение. Точнее, если $f, g \in S$, то*

$$\big(\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g]\big) = (f, g), \tag{5.14}$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. В частности, $\|\mathcal{F}[f]\| = \|f\|$, т.е. для $f \in S$ справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f]|^2\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f|^2\, dx.$$

Равенство (5.14) для оператора $\mathcal{F}$ в терминах функционального анализа означает, что оператор $\mathcal{F}$ на S является унитарным оператором.

Второе утверждение описывает взаимодействие оператора $\mathcal{F}$ с операцией умножения двух функций. Для его формулировки необходимо ввести новое понятие.

Определение 5.2. *Для двух функций f, g, определенных и интегрируемых на $\mathbb{R}$, интеграл*

$$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\, dt,$$

если он существует, называется сверткой функций f и g и обозначается $h(x) = (f * g)(x)$.

Легко показать, что свертка – симметричная операций, т. е. $(f*g)(x) = (g * f)(x)$ (докажите самостоятельно).

Если $f, g \in S$, то свертка $f * g$ существует и, более того, $f * g \in S$.

Теорема 5.8. *Если $f, g \in S$, то*:

1. $\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$.
2. $\mathcal{F}[fg] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$.

Таким образом, операции умножения в пространстве функций соответствует (с точностью до коэффициента $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$) свертка их Фурье-образов и, наоборот, свертке в пространстве функций соответствует умножение их Фурье-образов.

Покажем на одном примере использование преобразования Фурье. Основную роль при этом играет теорема 5.3 , описывающая взаимодействие оператора $\mathcal{F}$ с дифференцированием (по существу, аналогичная ситуация и в случае использования преобразования Лапласа).

Пример 5.4 (задача Коши для уравнения теплопроводности). Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{5.15}$$

и начальному условию при $t = 0$:

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.16}$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Уравнение в частных производных (5.15) называется уравнением теплопроводности, а задача (5.15), (5.16) – задачей Коши для него.

Приведем формульное решение этой задачи, основанное на использовании преобразования Фурье. Будем предполагать, что функция $\varphi(x)$ имеет преобразование $\mathcal{F}[\varphi]$. Считаем также, что $u(x,t)$ при всех $t \geq 0$ имеет преобразование Фурье $\mathcal{F}\big[u(x,t)\big](\xi,t)$, непрерывное по t при $t \geq 0$, и функция $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ также имеет преобразование Фурье $\mathcal{F}\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$, для которого в соответствии с теоремой 5.3 справедливо равенство

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = (i\xi)^2 \mathcal{F}[u].$$

При этих допущениях, если $u(x,t)$ удовлетворяет (5.15), то

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = a^2 \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -a^2\xi^2\mathcal{F}[u].$$

Кроме того,

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(\tau,t)}{\partial t}\, e^{-i\xi\tau}\, d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\tau,t) e^{-i\xi\tau}\, d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\, \mathcal{F}[u];$$

здесь дополнительно считаем, что можно поменять порядок дифференцирования по t и интегрирования по τ. Следовательно, $\mathcal{F}[u]$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \mathcal{F}[u] = -a^2\xi^2\mathcal{F}[u]. \tag{5.17}$$

Уравнение (5.17) в отличие от (5.15) уже является обыкновенным дифференциальным уравнением (причем линейным), а не уравнением в частных производных (это – эффект использования теоремы 5.3). Общим решением уравнения (5.17) является

$$\mathcal{F}[u] = Ce^{-a^2\xi^2 t}.$$

Из начального условия (5.16) следует, что $\mathcal{F}[u]\big|_{t=0} = \mathcal{F}[\varphi]$ и, значит, $C = \mathcal{F}[\varphi]$ и $\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[\varphi]e^{-a^2\xi^2 t}$. Так как в примере 5.3 показано, что $\mathcal{F}\big[e^{-b^2x^2}\big] = \dfrac{1}{\sqrt{2}b}\,e^{-\xi^2/4b^2}$, то при $b=\dfrac{1}{2a\sqrt{t}}$ получим $e^{-a^2\xi^2 t}=\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{a\sqrt{2t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]$. Таким образом,

$$\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[\varphi]\mathcal{F}\left[\frac{1}{a\sqrt{2t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]$$

и в соответствии с утверждением 1) теоремы 5.8

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\varphi * \left(\frac{1}{a\sqrt{2t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\,dy. \tag{5.18}$$

Итак, решение задачи получено, но при весьма ограничительных предположениях. Однако теперь, имея представление (5.18) решения u, можно (и это сравнительно легко) установить сходимость интеграла в (5.18), возможность его дифференцирования по x и t и тот факт, что эта функция будет удовлетворять уравнению теплопроводности. Наибольшую трудность представляет доказательство того, что построенная функция удовлетворяет начальному условию (5.16) (в равенство (5.18) непосредственно подставить $t = 0$ нельзя!), но и это доказывается для непрерывной функции $\varphi(x)$. Здесь доказательство приводить не будем.

Упражнения.

1. Найдите преобразование Фурье следующих функций:

а) $e_a(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & |t| \le a, \\ 0, & |t| > a; \end{cases}$

б) $e_a(t)\cos\omega t$;

в) $e_a(t+2a) + e_a(t-2a)$;

г) $e_a(t-a) - e_a(t+a)$;

д) $g_a(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{|t|}{a}\right), & |t| \le a, \\ 0, & |t| > a. \end{cases}$

2. Найдите обратное преобразование Фурье функций:

а) $2i\dfrac{\sin^2\xi a}{\xi a}$;

б) $2\left(\dfrac{\sin\xi a}{\xi a}\right)^2$.

3. Найдите $\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right](\xi)$, $a>0$. Отметим, что функция $e^{-a|x|}$ не принадлежит пространству S. Докажите, что $\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right]$ является бесконечно дифференцируемой функцией, но также не входит в пространство S.

4. Докажите указанное свойство свертки: если $f, g \in S$, то свертка $f*g$ определена и $f*g \in S$.

5. Докажите теорему 5.8 .

6. Докажите, что если $|\varphi(x)| < Ce^{a|x|}$, $a>0$, то функция (5.18) удовлетворяет при $t>0$ уравнению теплопроводности.

7. Докажите, что если $\varphi \in S$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\,dt = 1$, то справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2|\varphi(x)|^2\,dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\mathcal{F}[\varphi](\xi)|^2\,d\xi \geq \frac{1}{4}.$$

В квантовой механике это неравенство приводит к так называемому соотношению неопределенностей.

Список литературы

1. Линейная алгебра: электрон. учеб. пособие / А. Л. Белопольский, Н. А. Бодунов, А. Л. Меркулов, А. П. Щеглова. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2012, 140 с.

2. Зорич В. А. Математический анализ: В 2 ч. Ч. 2. М.: Наука, 1998, 787 с.

3. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987, 353 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Боревич Елена Зеноновна
Фролова Елена Вениаминовна
Челкак Сергей Иванович

РЯДЫ ФУРЬЕ

Электронное учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов?

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура „Times New Roman“. Печ. л. 3,5.
Тираж 15 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ „ ЛЭТИ“
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5