

# 数学標準問題集・解答篇

Ver.1.4.0

最終更新日：2022 年 09 月 26 日



---

## はじめに

---

試験等からの引用は [ ] で示しています.

訂正, 誤字脱字衍字などは, **Instagram** の DM, または, [ruyurl0707@gmail.com](mailto:ruyurl0707@gmail.com) からお願いします.

---

## 更新情報

2022.09.01 【Ver.1.4.0】 1.6 複素数 ??, 8.4 関数の展開 ??, 9.2 導関数 ?? を追加.

2022.08.27 【Ver.1.2.0】 デザインを変更.



## 目次

---

<b>第 1 章</b>	<b>数と式の計算</b>	<b>9</b>
1.1	式の展開 . . . . .	9
1.2	因数分解 . . . . .	9
1.3	剰余定理・因数定理 . . . . .	9
1.4	分数式 . . . . .	9
1.5	実 数 . . . . .	9
1.6	複素数 . . . . .	9
<b>第 2 章</b>	<b>方程式・不等式</b>	<b>11</b>
2.1	いろいろな方程式 . . . . .	11
2.2	判別式 . . . . .	11
2.3	解と係数の関係 . . . . .	11
2.4	いろいろな不等式 . . . . .	11
2.5	比例式・恒等式 . . . . .	11
2.6	等式／不等式の証明 . . . . .	11
<b>第 3 章</b>	<b>集合・命題</b>	<b>13</b>
3.1	集 合 . . . . .	13
3.2	命 題 . . . . .	13
<b>第 4 章</b>	<b>初等関数 1</b>	<b>15</b>
4.1	2 次関数 . . . . .	15
4.2	冪関数 . . . . .	15
4.3	関数 $f$ の性質 . . . . .	15
4.4	分数関数 . . . . .	15
4.5	無理関数 . . . . .	15
4.6	逆関数・合成関数 . . . . .	15
4.7	指数関数 . . . . .	15
4.8	対数関数 . . . . .	15
<b>第 5 章</b>	<b>初等関数 2 – 三角関数, 双曲線関数</b>	<b>17</b>
5.1	三角関数の相互関係 . . . . .	17
5.2	三角形への応用 . . . . .	17
5.3	加法定理と三角関数の性質 . . . . .	17
5.4	三角関数を含む方程式・不等式 . . . . .	17
5.5	逆三角関数・双曲線関数・逆双曲線関数 . . . . .	17

<b>第 6 章</b>	<b>平面図形</b>	<b>19</b>
6.1	点と直線 . . . . .	19
6.2	2 次曲線 . . . . .	19
6.3	不等式と領域 . . . . .	19
<b>第 7 章</b>	<b>場合の数</b>	<b>21</b>
7.1	場合の数 . . . . .	21
7.2	2 項定理 . . . . .	21
7.3	多項定理 . . . . .	21
<b>第 8 章</b>	<b>数 列</b>	<b>23</b>
8.1	数 列 . . . . .	23
8.2	漸化式 . . . . .	24
8.3	数学的帰納法 . . . . .	24
8.4	関数の展開 . . . . .	24
<b>第 9 章</b>	<b>1 変数関数の微分</b>	<b>27</b>
9.1	関数の極限 . . . . .	27
9.2	導関数 . . . . .	27
9.3	微分の応用 . . . . .	27
<b>第 10 章</b>	<b>1 変数関数の積分</b>	<b>29</b>
10.1	不定積分 . . . . .	29
10.2	定積分 . . . . .	29
10.3	積分の応用 . . . . .	29
10.4	1 変数関数の微分積分の発展 . . . . .	29
<b>第 11 章</b>	<b>ベクトル</b>	<b>31</b>
11.1	平面ベクトル . . . . .	31
11.2	空間ベクトル . . . . .	31
<b>第 12 章</b>	<b>行 列</b>	<b>33</b>
12.1	行 列 . . . . .	33
12.2	連立 1 次方程式 . . . . .	33
<b>第 13 章</b>	<b>行列式</b>	<b>35</b>
13.1	行列式 . . . . .	35
13.2	線形変換 . . . . .	35
13.3	固有値 . . . . .	35
<b>第 14 章</b>	<b>2 変数以上の関数の微分</b>	<b>37</b>
14.1	多変数関数の極限 . . . . .	37
14.1.1	$\varepsilon$ - $\delta$ 論法, $\varepsilon$ - $N$ 論法 . . . . .	37
14.2	偏微分 . . . . .	37
14.3	合成関数の微分 . . . . .	37

14.4	全微分 . . . . .	37
14.5	偏微分の応用 . . . . .	37
<b>第 15 章</b>	<b>2 変数以上の関数の積分</b>	<b>39</b>
15.1	2 重積分 . . . . .	39
15.2	3 重積分 . . . . .	39
15.3	広義重積分 . . . . .	39
15.4	重積分における変数変換 . . . . .	39
<b>第 16 章</b>	<b>微分方程式</b>	<b>41</b>
<b>第 17 章</b>	<b>確 率</b>	<b>43</b>
<b>第 18 章</b>	<b>データ</b>	<b>45</b>
<b>第 19 章</b>	<b>ベクトル解析</b>	<b>47</b>
<b>第 20 章</b>	<b>ラプラス変換</b>	<b>49</b>
<b>第 21 章</b>	<b>フーリエ解析</b>	<b>51</b>
<b>第 22 章</b>	<b>複素関数</b>	<b>53</b>

## 注意事項

- 特に指定が無い限り,  $i$  は虚数単位を,  $\pi$  は円周率を,  $e$  はネピア数を表す:

$$i^2 = -1, \quad \pi = 3.141592\dots, \quad e = 2.718281\dots$$

- $\mathbb{N}$  は自然数全体の集合,  $\mathbb{Z}$  は整数全体の集合,  $\mathbb{Q}$  は有理数全体の集合,  $\mathbb{R}$  は実数全体の集合,  $\mathbb{C}$  は複素数全体の集合を表す:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- ベクトルは第 14 章までは  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\dots$  で, 第 15 章からは  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\dots$  で表す.





---

1.1 式の展開

1

2

---

1.2 因数分解

---

1.3 剰余定理・因数定理

---

1.4 分数式

---

1.5 実数

---

1.6 複素数

??

**【複素数】**

求める数を  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) とおいて両辺 2 乗すると

$$z^2 = i = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

実部は 0, 虚部は 1 なので

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

解いて  $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  (複号同順).

$$\therefore \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \dots\dots (答)$$

---

## 2.1 いろいろな方程式

---

## 2.2 判別式

---

## 2.3 解と係数の関係

---

## 2.4 いろいろな不等式

---

## 2.5 比例式・恒等式

---

## 2.6 等式／不等式の証明

---



---

**3.1 集 合**

---

---

**3.2 命 題**

---



---

#### 4.1 2次関数

---

#### 4.2 冪関数

---

#### 4.3 関数 $f$ の性質

---

#### 4.4 分数関数

---

#### 4.5 無理関数

---

#### 4.6 逆関数・合成関数

---

#### 4.7 指数関数

---

#### 4.8 対数関数





## 初等関数 2 – 三角関数，双曲線関数

---

**5.1 三角関数の相互関係**

---

**5.2 三角形への応用**

---

**5.3 加法定理と三角関数の性質**

---

**5.4 三角関数を含む方程式・不等式**

---

**5.5 逆三角関数・双曲線関数・逆双曲線関数**



---

**6.1 点と直線**

---

---

**6.2 2 次曲線**

---

---

**6.3 不等式と領域**

---



---

**7.1 場合の数**

---

---

**7.2 2項定理**

---

---

**7.3 多項定理**

---



## 8.1 数 列

## 1 【等差数列】

- (1)
- $2, \boxed{7}, 12, \boxed{17}, \boxed{22}, \dots$

初項 2, 公差 5 なので

$$a_n = 5n - 3 \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (2)
- $\boxed{-27}, -23, \boxed{-19}, \boxed{-15}, -11, \dots$

初項  $-27$ , 公差 4 なので

$$a_n = 4n - 31 \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (3)
- $2, \boxed{\frac{3}{2}}, \boxed{1}, \boxed{\frac{1}{2}}, 0, \dots$

初項 2, 公差  $-\frac{1}{2}$  なので

$$a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{5}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (4)
- $\boxed{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}, \boxed{\sqrt{2}+1}, \boxed{\sqrt{2}+2}, \sqrt{2}+3, \dots$

初項  $\sqrt{2}-1$ , 公差 1 なので

$$a_n = n + \sqrt{2} - 2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (5)
- $1, \boxed{\frac{\sqrt{2}+2}{3}}, \boxed{\frac{2\sqrt{2}+1}{3}}, \sqrt{2}, \boxed{\frac{4\sqrt{2}-1}{3}}, \dots$

初項 1, 公差  $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$  なので

$$a_n = \frac{\sqrt{2}-1}{3}n - \frac{\sqrt{2}-4}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (6)
- $\boxed{\log \frac{3}{4}}, \boxed{\log \frac{3}{2}}, \log 3, \log 6, \boxed{\log 12}, \dots$

初項  $\log \frac{3}{4}$ , 公差  $\log 2$  なので

$$a_n = \log 2^n + \log \frac{3}{8} \quad \dots\dots (\text{答})$$

## 2 【等差数列】

## 3 【等差数列】

## 4 【等差数列】

## 5 【等差数列】

## 6 【等差数列】

7 【等差数列】

8 【等差数列】

9 【等差数列】

## 8.2 漸化式

## 8.3 数学的帰納法

## 8.4 関数の展開

### 1 【数列の極限の性質】

- (1) 偽 反例 :  $a_n = n + 1, b_n = n$
- (2) 偽 反例 :  $a_n = n + \frac{1}{n}, b_n = n$
- (3) 真 証明 :  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} = \alpha - 0 = \alpha$
- (4) 偽 反例 :  $a_n = 1 + (-1)^n, b_n = 1 - (-1)^n$
- (5) 偽 反例 :  $a_n = n, b_n = \frac{1}{n}$
- (6) 偽 反例 :  $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{1}{n}$
- (7) 偽 反例 :  $a_n = -n$
- (8) 偽 反例 :  $a_n = 1, b_n = \frac{1}{n}$
- (9) 偽 反例 :  $a_n = 1, b_n = 1 + \frac{1}{n}$
- (10) 偽 反例 :  $a_n = \sqrt{n}$
- (11) 偽 反例 :  $a_n = (-1)^n$



数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  が収束し、各極限値が  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  であるとき

[1]  $\lim_{n \rightarrow \infty} (Aa_n \pm Bb_n) = A\alpha \pm B\beta$  (線形性, ただし  $A, B$  は定数)

[2]  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha\beta$

[3] すべての  $n$  について  $a_n \leq b_n$  または  $a_n < b_n \implies \alpha \leq \beta$

[4]  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0$

数列が収束しないとき, 上の性質は成り立つとは限らない.

(1)  $a_n, b_n$  は収束していないので常に成り立つとは限らない.

(8)  $\beta \neq 0$  であれば真である.

(9)  $\alpha \leq \beta$  であれば真である.

(11)  $\{a_n\}$  が無限大に発散するならば真である.

??



## 1 変数関数の微分

## 9.1 関数の極限

## ?? 【中間値の定理】

**証明**  $f(x) = \text{左辺}$  とすると、絶対値の十分大きな  $x_+ > 0$ ,  $x_- < 0$  に対して  $f(x_+) > 0$ ,  $f(x_-) < 0$  となるから、中間値の定理より区間  $(x_-, x_+)$  に少なくとも 1 つの実数解を持つ. //

## 9.2 導関数

## ?? 【高次導関数】

ライプニッツの公式より

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \sum_{k=0}^n {}^nC_k \frac{d^k(x^2)}{dx^k} \frac{d^{n-k}(\cos x)}{dx^{n-k}}$$

いま,  $k \geq 3$  なら  $\frac{d^k(x^2)}{dx^k} = 0$  なので

$$\begin{aligned} \frac{d^{100} f}{dx^{100}}(x) &= {}_{100}C_0 x^2 \frac{d^{100}(\cos x)}{dx^{100}} + {}_{100}C_1 (x^2)' \frac{d^{99}(\cos x)}{dx^{99}} + {}_{100}C_2 (x^2)'' \frac{d^{98}(\cos x)}{dx^{98}} \\ &= x^2 \cos x + 200x \sin x - 9900 \cos x \end{aligned}$$

よって

$$\frac{d^{100} f}{dx^{100}}(\pi) = -\pi^2 + 0 + 9900 = 9900 - \pi^2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

## 9.3 微分の応用

## ?? 【ロピタルの定理】

$r > 1$ , 任意の正の  $x$  について,  $(x+1)^{r+1} - x^{r+1} > 0$  が成り立つことに注意すると, 対数の連続性より

$$\begin{aligned} \log g(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \log((x+1)^{r+1} - x^{r+1})^{\frac{1}{r}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \log((x+1)^{r+1} - x^{r+1}) \end{aligned}$$

ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\log g(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{r+1} \log(x+1) - x^{r+1} \log x}{(x+1)^{r+1} - x^{r+1}} && \leftarrow r \text{ について微分することに注意.} \\ &= \frac{(x+1) \log(x+1) - x \log x}{(x+1) - x} \\ &= \log \frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}\end{aligned}$$

よって

$$g(x) = \frac{(x+1)^{x+1}}{x^x} = (x+1) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

したがって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1 \cdot e = e \quad \dots\dots (\text{答})$$

[The 82nd William Lowell Putnam Mathematical Competition, 2021]

---

### 10.1 不定積分

---

### 10.2 定積分

---

### 10.3 積分の応用

---

### 10.4 1 変数関数の微分積分の発展



---

## 11.1 平面ベクトル

### 1 【ベクトルの和, 差, 実数倍】

(1) 与式  $= 2\vec{a} - 4\vec{b} - 3\vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} - 5\vec{b}$

(2) 与式  $= 6\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{a} - 4\vec{b} = 4\vec{a} - 7\vec{b}$

(3) 与式  $= 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} - 2\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$

### 2 【ベクトルの和, 差, 実数倍】

(1) 与式  $\iff 3\vec{x} = 3\vec{a} + 9\vec{b}$  より  $\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}$

(2) 与式  $\iff 2\vec{x} + 4\vec{b} - 3\vec{x} - 3\vec{a} = \vec{0}$  より  $\vec{x} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$

### 3 【平行な単位ベクトル】

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{2}$$

---

## 11.2 空間ベクトル





---

**12.1 行 列**

---

---

**12.2 連立 1 次方程式**

---



---

**13.1 行列式**

---

---

**13.2 線形変換**

---

---

**13.3 固有値**

---



## 2 変数以上の関数の微分

---

## 14.1 多変数関数の極限

### 14.1.1 $\varepsilon$ - $\delta$ 論法, $\varepsilon$ - $N$ 論法

---

## 14.2 偏微分

---

## 14.3 合成関数の微分

---

## 14.4 全微分

---

## 14.5 偏微分の応用



## 2 変数以上の関数の積分

---

### 15.1 2 重積分

---

### 15.2 3 重積分

---

### 15.3 広義重積分

---

### 15.4 重積分における変数変換













---

第18章  
データ

---



---

## 第 19 章 ベクトル解析

---









---

第 21 章  
フーリエ解析

---



