数学標準問題集・解答篇

Ver.1.4.0

最終更新日： **2022 年 09 月 26 日**

はじめに

試験等からの引用は [ ] で示しています.

訂正，誤字脱字衍字などは，**Instagram** の DM，または，`ruyurl0707@gmail.com` からお願いします.

更新情報

2022.09.01【`Ver.1.4.0`】 **1.6** 複素数 $\boxed{??}$ ，**8.4** 関数の展開 ?? ，**9.2** 導関数 $\boxed{??}$ を追加.

2022.08.27【`Ver.1.2.0`】 デザインを変更.

目次

注意事項

- 特に指定が無い限り，i は虚数単位を，π は円周率を，e はネピア数を表す：

$$i^2 = -1, \quad \pi = 3.141592..., \quad e = 2.718281...$$

- $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合，$\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合，$\mathbb{C}$ は複素数全体の集合を表す：

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- ベクトルは**第 14 章**までは $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \cdots$ で，**第 15 章**からは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}, \cdots$ で表す.

第 1 章
数と式の計算

1.1　式の展開

$\boxed{\mathbf{1}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

1.2　因数分解

1.3　剰余定理・因数定理

1.4　分数式

1.5　実　数

1.6　複素数

$\boxed{??}$　**【複素数】**

求める数を $z = a + bi \ (a,\ b \in \mathbb{R})$ とおいて両辺 2 乗すると

$$z^2 = i = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

実部は 0，虚部は 1 なので

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

解いて $a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ b=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（複号同順）.

$\therefore \sqrt{i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\sqrt{i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ $\quad\cdots\cdots$ **(答)**

第 2 章
方程式・不等式

2.1　いろいろな方程式

2.2　判別式

2.3　解と係数の関係

2.4　いろいろな不等式

2.5　比例式・恒等式

2.6　等式／不等式の証明

第 3 章
集合・命題

3.1 集　合

3.2 命　題

第 4 章
初等関数 1

4.1 2 次関数

4.2 冪関数

4.3 関数 f の性質

4.4 分数関数

4.5 無理関数

4.6 逆関数・合成関数

4.7 指数関数

4.8 対数関数

第 5 章
初等関数２ －三角関数，双曲線関数

5.1　三角関数の相互関係

5.2　三角形への応用

5.3　加法定理と三角関数の性質

5.4　三角関数を含む方程式・不等式

5.5　逆三角関数・双曲線関数・逆双曲線関数

第 6 章
平面図形

6.1 点と直線

6.2 2 次曲線

6.3 不等式と領域

第 7 章
場合の数

7.1 場合の数

7.2 2 項定理

7.3 多項定理

第 8 章
数　列

8.1　数　列

$\boxed{\mathbf{1}}$ **【等差数列】**

(1) $2,\ \boxed{7},\ 12,\ \boxed{17},\ \boxed{22},\ \cdots$

初項 2，公差 5 なので

$a_n = 5n-3$　$\cdots\cdots$ **(答)**

(2) $\boxed{-27},\ -23,\ \boxed{-19},\ \boxed{-15},\ -11,\ \cdots$

初項 -27，公差 4 なので

$a_n = 4n-31$　$\cdots\cdots$ **(答)**

(3) $2,\ \boxed{\dfrac{3}{2}},\ \boxed{1},\ \boxed{\dfrac{1}{2}},\ 0,\ \cdots$

初項 2，公差 $-\dfrac{1}{2}$ なので

$a_n = -\dfrac{1}{2}n + \dfrac{5}{2}$　$\cdots\cdots$ **(答)**

(4) $\boxed{\sqrt{2}-1},\ \sqrt{2},\ \boxed{\sqrt{2}+1},\ \boxed{\sqrt{2}+2},\ \sqrt{2}+3,\ \cdots$

初項 $\sqrt{2}-1$，公差 1 なので

$a_n = n+\sqrt{2}-2$　$\cdots\cdots$ **(答)**

(5) $1,\ \boxed{\dfrac{\sqrt{2}+2}{3}},\ \boxed{\dfrac{2\sqrt{2}+1}{3}},\ \sqrt{2},\ \boxed{\dfrac{4\sqrt{2}-1}{3}},\ \cdots$

初項 1，公差 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$ なので

$a_n = \dfrac{\sqrt{2}-1}{3}n - \dfrac{\sqrt{2}-4}{3}$　$\cdots\cdots$ **(答)**

(6) $\boxed{\log\dfrac{3}{4}},\ \boxed{\log\dfrac{3}{2}},\ \log 3,\ \log 6,\ \boxed{\log 12},\ \cdots$

初項 $\log\dfrac{3}{4}$，公差 $\log 2$ なので

$a_n = \log 2^n + \log\dfrac{3}{8}$　$\cdots\cdots$ **(答)**

$\boxed{\mathbf{2}}$ **【等差数列】**

$\boxed{\mathbf{3}}$ **【等差数列】**

$\boxed{\mathbf{4}}$ **【等差数列】**

$\boxed{\mathbf{5}}$ **【等差数列】**

$\boxed{\mathbf{6}}$ **【等差数列】**

$\boxed{7}$ 【等差数列】

$\boxed{8}$ 【等差数列】

$\boxed{9}$ 【等差数列】

8.2 漸化式

8.3 数学的帰納法

8.4 関数の展開

1 【数列の極限の性質】

(1) 偽　反例：$a_n = n+1,\ b_n = n$

(2) 偽　反例：$a_n = n + \dfrac{1}{n},\ b_n = n$

(3) 真　証明：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_n - (a_n - b_n)\} = \alpha - 0 = \alpha$

(4) 偽　反例：$a_n = 1 + (-1)^n,\ b_n = 1 - (-1)^n$

(5) 偽　反例：$a_n = n,\ b_n = \dfrac{1}{n}$

(6) 偽　反例：$a_n = \dfrac{1}{n^2},\ b_n = \dfrac{1}{n}$

(7) 偽　反例：$a_n = -n$

(8) 偽　反例：$a_n = 1,\ b_n = \dfrac{1}{n}$

(9) 偽　反例：$a_n = 1,\ b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

(10) 偽　反例：$a_n = \sqrt{n}$

(11) 偽　反例：$a_n = (-1)^n$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束し，各極限値が $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき

[1] $\lim_{n\to\infty}(Aa_n \pm Bb_n) = A\alpha \pm B\beta$　　(線形性，ただし A，B は定数)

[2] $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

[3] すべての n について $a_n \leq b_n$ または $a_n < b_n \Longrightarrow \alpha \leq \beta$

[4] $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$

数列が収束しないとき，上の性質は成り立つとは限らない．

(1) a_n，b_n は収束していないので常に成り立つとは限らない．

(8) $\beta \fallingdotseq 0$ であれば真である．

(9) $\alpha \leq \beta$ であれば真である．

(11) $\{a_n\}$ が無限大に発散するならば真である．

$\boxed{\textbf{??}}$

第 9 章
1 変数関数の微分

9.1 関数の極限

$\boxed{??}$ 【中間値の定理】

証明 $f(x) =$ 左辺 とすると，絶対値の十分大きな $x_+ > 0$, $x_- < 0$ に対して $f(x_+) > 0$, $f(x_-) < 0$ となるから，中間値の定理より区間 $(x_-,\ x_+)$ に少なくとも 1 つの実数解を持つ． //

9.2 導関数

$\boxed{??}$ 【高次導関数】

ライプニッツの公式より

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \frac{d^k(x^2)}{dx^k}\frac{d^{n-k}(\cos x)}{dx^{n-k}}$$

いま，$k \geq 3$ なら $\dfrac{d^k(x^2)}{dx^k} = 0$ なので

$$\begin{aligned}\frac{d^{100} f}{dx^{100}}(x) &= {}_{100}\mathrm{C}_0 x^2 \frac{d^{100}(\cos x)}{dx^{100}} + {}_{100}\mathrm{C}_1 (x^2)' \frac{d^{99}(\cos x)}{dx^{99}} + {}_{100}\mathrm{C}_2 (x^2)'' \frac{d^{98}(\cos x)}{dx^{98}} \\ &= x^2 \cos x + 200x \sin x - 9900 \cos x\end{aligned}$$

よって

$$\frac{d^{100} f}{dx^{100}}(\pi) = -\pi^2 + 0 + 9900 = 9900 - \pi^2 \quad \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

9.3 微分の応用

?? 【ロピタルの定理】

$r > 1$，任意の正の x について，$(x+1)^{r+1} - x^{r+1} > 0$ が成り立つことに注意すると，対数の連続性より

$$\begin{aligned}\log g(x) &= \lim_{r \to 0} \log\bigl((x+1)^{r+1} - x^{r+1}\bigr)^{\frac{1}{r}} \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \log\bigl((x+1)^{r+1} - x^{r+1}\bigr)\end{aligned}$$

ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\log g(x) &= \lim_{r\to 0}\frac{(x+1)^{r+1}\log(x+1)-x^{r+1}\log x}{(x+1)^{r+1}-x^{r+1}} \qquad \leftarrow r \text{ について微分することに注意.}\\ &= \frac{(x+1)\log(x+1)-x\log x}{(x+1)-x}\\ &= \log\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}\end{aligned}$$

よって

$$g(x)=\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}=(x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

したがって

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1\cdot e=e \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

[The 82nd William Lowell Putnam Mathematical Competition, 2021]

第 10 章
1 変数関数の積分

10.1 不定積分

10.2 定積分

10.3 積分の応用

10.4 1 変数関数の微分積分の発展

第 11 章 ベクトル

11.1 平面ベクトル

$\boxed{1}$ 【ベクトルの和，差，実数倍】

(1) 与式 $= 2\vec{a} - 4\vec{b} - 3\vec{a} - \vec{b} = \boldsymbol{-\vec{a} - 5\vec{b}}$

(2) 与式 $= 6\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{a} - 4\vec{b} = \boldsymbol{4\vec{a} - 7\vec{b}}$

(3) 与式 $= 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} - 2\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c} = \boldsymbol{\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}}$

$\boxed{2}$ 【ベクトルの和，差，実数倍】

(1) 与式 $\Longleftrightarrow 3\vec{x} = 3\vec{a} + 9\vec{b}$ より　　$\boldsymbol{\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}}$

(2) 与式 $\Longleftrightarrow 2\vec{x} + 4\vec{b} - 3\vec{x} - 3\vec{a} = \vec{0}$ より　　$\boldsymbol{\vec{x} = -3\vec{a} + 4\vec{b}}$

$\boxed{3}$ 【平行な単位ベクトル】

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \boldsymbol{\frac{\vec{a}}{2}}$$

11.2 空間ベクトル

第 12 章
行　列

12.1　行　列

12.2　連立 1 次方程式

第 13 章
行列式

13.1 行列式

13.2 線形変換

13.3 固有値

第 14 章
2 変数以上の関数の微分

14.1 多変数関数の極限

14.1.1 ε-δ 論法，ε-N 論法

14.2 偏微分

14.3 合成関数の微分

14.4 全微分

14.5 偏微分の応用

第 15 章
2 変数以上の関数の積分

15.1　2 重積分

15.2　3 重積分

15.3　広義重積分

15.4　重積分における変数変換

第 16 章
微分方程式

第 17 章
確　率

第 18 章
データ

第 19 章
ベクトル解析

第 20 章
ラプラス変換

第 21 章

フーリエ解析

第 22 章
複素関数