数学· 物理 回憶録

最終更新日: 2023 年 11 月 13 日

0-2

【注意】

- 1. ベクトルは $[]$ で表す。また,原則列ベクトル表記 $m{a}=\begin{bmatrix} a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}$ とする.紙面上の関係で行ベクトル表記で表すときは転置行列を表す \top を付けて $m{a}=\begin{bmatrix} a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}^{\top}$ と表す.
- 2. i, j, k はそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸方向の基本ベクトルとする.

第1章 微分法

1.1 微分法

◆ A ◆ 関数の連続

関数 f(x) の極限値について

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \tag{1.1}$$

が成り立つ. また, $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在して

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1.2}$$

が成り立つとき、f(x) は x=a で連続であるという.

◆ B ◆ 微分可能性

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1.3}$$

が存在するとき、関数 f(x) は x=a に於いて微分可能であるという. このとき、次が成り立つ.

$$f(x)$$
 は $x=a$ で微分可能 \implies $f(x)$ は $x=a$ で連続 $\tag{1.4}$

◆ C ◆ 導関数

次の式で定義される関数を f(x) の導関数という.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.5}$$

導関数の性質と公式

cを定数とする.

第2章 積分法

第3章 数列の極限

第4章 関数の展開

第5章 偏微分法

関数の極限

関数 $f(x,\,y)$ に於いて,点 $(x,\,y)$ が点 $(a,\,b)$ 以外の点を取りながら $(a,\,b)$ に限りなく近づくとき,関数の値が C に限りなく近 づくならば、f(x, y) は C に収束するといい、

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = C \tag{5.1}$$

と表す. Cを極限値という.

このとき、(x, y) がどんな近づき方で (a, b) に近づいても極限値がある一定の値 C になることが必要である.

例えば、
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$
 について、 $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ を考える.

(i) 点を直線
$$y=x$$
 上で近づけると $f(x,\ y)=\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$ であるから $\frac{1}{2}$ に収束する.

(ii) 点を直線
$$y=2x$$
 上で近づけると $f(x, y)=\frac{x+x-2}{x^2+(2x)^2}=\frac{2}{5}$ であるから $\frac{2}{5}$ に収束する.

よって、極限値はない.

関数 f(x, y) の定義域内の点 P(a, b) について,

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$
(5.2)

が成り立つとき、f(x, y) は点 P で連続であるという.

5.2 偏導関数

関数 z = f(x, y) に於いて

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{5.3}$$

f(x, y) の x についての偏導関数といい、 f_x とも表す、また、

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$
(5.4)

を f(x, y) の y についての偏導関数といい、 f_y とも表す.

 $x\left(y\right)$ について偏微分可能であるとは、点 $x=a\left(y=b\right)$ での偏微分係数が存在することである。また、偏微分係数 $f_x(a,\ b),\ f_y(a,\ b)$ はそれぞれ点 $(a,\ b)$ の x 軸方向の傾き、y 軸方向の傾きを表す.

◆ A ◆ 高階偏導関数

 $z=f(x,\ y)$ で、2 階偏微分可能で全て連続のとき $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 一般に n 階偏微分可能で全て連続のとき、n=k+l とすると $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^l}$ は全て等しい.

◆ B ◆ 全微分可能性

- f(x, y) が点 (a, b) で全微分可能 \implies f(x, y) は (a, b) で連続かつ (a, b) で偏微分可能
- f(x, y) の $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ が (a, b) で存在してそれらが連続である \implies f(x, y) は (a, b) で全徴分可能
- f(x, y) が偏微分可能であっても全微分可能ではない (全微分の方が強い概念).

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y} \tag{5.5}$$

Tip [導出]

関数 f(x, y) の Δx , Δy に対する増加量 Δf は

$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x}_{\Delta x \text{ についての増加量}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y}_{E \text{ いっしての増加量}} + \varepsilon$$
接平面の公式

更に、 $\lim_{(\Delta x,\ \Delta y)\to(0,\ 0)} rac{arepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$ であれば、 $f(x,\ y)$ は全微分可能という.

ここで、 $\lim_{(\Delta x, \ \Delta y) \to (0, \ 0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ を、「 ε は $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ より高位の無限小」という.これは、「 ε は $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ とは比べ物にならないくらい速く0に近付く」という意味である.

◆ C ◆ 接平面の方程式

曲面 z = f(x, y) 上の点 (a, b, f(a, b)) に於ける接平面の方程式

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b)$$

$$(5.6)$$

曲面 f(x, y, z) = 0 上の点 (a, b, c) に於ける接平面の方程式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{bmatrix} = 0 \tag{5.7}$$

これは、陰関数の微分法と式 (5.6) から分かる。また、これより曲面 f(x, y, z) = 0 の法線ベクトルは以下である。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}^{\top} \tag{5.8}$$

◆ D ◆ チェーン・ルール(連鎖律)

チェーン・ルール (1)

 $z=f(x,\ y)$ が全微分可能で、 $x=x(t),\ y=y(t)$ が微分可能であるとき、z は t の関数である.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
 (5.9)

チェーン・ルール (2)

z=f(x,y) が全微分可能で、x=x(u,v), y=y(u,v) が偏微分可能であるとき

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$
 (5.10)

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \tag{5.11}$$

◆ E ◆ 陰関数の微分法

f(x, y) = 0 によって表された x の関数 y の導関数

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y} \tag{5.12}$$

Tip [導出]

陰関数 y(x) より、f(x, y(x)) = 0. 両辺微分して

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \left(\because \frac{dx}{dx} = 1\right)$$
 (5.13)

f(x, y, z) = 0 によって表された x, y の関数 z の導関数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial z} \qquad \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (5.14)$$

5.2 偏導関数 5-3

Tip [導出]

陰関数 z(x, y) より、f(x, y, z(x, y)) = 0. 両辺 x で偏微分して

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \left(\because \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \ \frac{\partial y}{\partial x} = 0\right)$$
 (5.15)

両辺yで偏微分すると第2式が得られる.

◆ F ◆ 2 変数のテイラーの定理

f(x, y) が n 次までの連続な偏導関数を持つとき $(C^n$ 級関数),

$$\frac{d^n f}{dt^n} = D^n f = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f$$

レおくし

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{1!}Df(a, b) + \frac{1}{2!}D^2f(a, b) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(a, b) + \underbrace{\frac{1}{n!}D^nf(a+\theta h, b+\theta k)}_{R-1}$$
(5.16)

を満たす θ (0 < θ < 1) が存在する (テイラーの定理).

 $\sharp \, t$, $R_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ rowards

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{1!}Df(a, b) + \frac{1}{2!}D^2f(a, b) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(a, b) + \frac{1}{n!}D^nf(a, b) + \dots$$
 (5.17)

が成り立つ (テイラー展開)

Tip [補足]

 $z=f(x,\ y)$ で、x=a+ht、y=b+kt とすると、 $z=f(a+ht,\ b+kt)$ より、1 変数 t の関数になる、微分して

$$\frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}$$
(5.18)

ここで,
$$D = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)$$
 とおくと, $\frac{df}{dt}$ は $Df = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f$ と書ける.

次に, $\frac{d^2f}{dt^2}$ を考える.式 (5.18) より

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

今, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ は 2 変数 x,y の関数なので,チェーン・ルールより

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{dy}{dt} = h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} = h \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

よって、代入して
$$\frac{d^2f}{dt^2} = h\left(h\frac{\partial^2f}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2f}{\partial u\partial x}\right) + k\left(h\frac{\partial^2f}{\partial x\partial u} + k\frac{\partial^2f}{\partial u^2}\right)$$

第 2 次偏導関数が存在し、ともに連続とすると $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}$ なので、

$$\frac{d^2f}{dt^2} = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = D^2 f \tag{5.19}$$

このように、 D を用いると

$$\frac{d^n f}{dt^n} = D^n f = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \tag{5.20}$$

と略記することができる。

a=b=0 としたときのテイラーの定理をマクローリンの定理という. h, k の代わりに x, y でよく表す.

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}Df(0, 0) + \frac{1}{2!}D^{2}f(0, 0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(0, 0) + \frac{1}{n!}D^{n}f(\theta x, \theta y)$$
 (5.21)

を満たす θ (0 < θ < 1) が存在する.

◆ G ◆ 包絡線

変数 x, y の他に任意定数 α を含んでいる方程式

$$f(x, y, \alpha) = 0 \tag{5.22}$$

は α を変化させて得られる全ての曲線の集合(曲線群)を表している.これを曲線群の方程式という.

曲線群の全ての曲線に接する曲線 or 直線を曲線群の包絡線という。 包絡線上の点 (x, y) は

$$f(x, y, \alpha) = 0, \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha) = 0$$
 (5.23)

を満たす.この2式を求めて、 α を消去すると包絡線の方程式が求まる.

5.3 極値問題

◆ A ◆ 2 変数関数の極値

ヘッシアン $H(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$ とおくと、点 (a, b) に於いて

[1] H>0のとき

$$f_{xx} > 0$$
 \Longrightarrow 点 (a, b) で極小をとる $f_{xx} < 0$ \Longrightarrow 点 (a, b) で極大をとる (5.24)

[2] H < 0 のとき

$$\mathrm{L}(a, b)$$
 では極値を取らない. (5.25)

[3] H = 0 のとき

極値の判定は出来ない.

Tip [証明]

テイラーの定理より

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Df(a, b) + \frac{1}{2}D^2f(a+\theta h, b+\theta k) \quad (0 < \theta < 1)$$

(a, b) で極値を取るので、 $Df(a, b) = h \cdot 0 + k \cdot 0 = 0$ より

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}D^2f(a+\theta h, b+\theta k)$$

となる。ここで、簡単のため

$$A = f_{xx}(a + \theta h, b + \theta k), \qquad B = f_{xy}(a + \theta h, b + \theta k), \qquad C = f_{yy}(a + \theta h, b + \theta k)$$

とおくと、 $f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)$

h, k が十分 0 に近ければ、 $AC-B^2, A$ の符号はそれぞれ H, f_{xx} の符号に等しくなる.

変形して

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{A}{2} \left\{ \left(h + \frac{B}{A}k \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}k^2 \right\}$$

[1] H > 0 (即ち, $AC - B^2 > 0$) のとき

 $f_{xx}>0$ (A>0) ならば、 $f(a+h,\ b+k)>f(a,\ b)$ (下に凸) より、極小

 $f_{xx} < 0$ (A < 0) ならば、 $f(a+h,\ b+k) < f(a,\ b)$ (上に凸) より、極大

- [2] H < 0 (即ち、 $AC B^2 < 0$) のとき

 $AC - B^2 < 0$ より、 $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ は h, k によって正にも負にもなる.

(イ) A=C=0のとき

 $AC - B^2 < 0$ より $B \neq 0$ なので、 $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 2Bhk$ は h, k によって正にも負にもなる.

◆ B ◆ 条件付極値問題

xy 平面上の点(x,y) が条件 $\varphi(x,y)=0$ で表される曲線上を動くとき。平面x=f(x,y) が極値を取り得る点

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{f_y}{\varphi_y} \quad (\varphi_x, \ \varphi_y \neq 0) \tag{5.26}$$

5.3 極値問題 5-5

Tip [導出]

方程式 $\varphi(x, y) = 0$ の y が x の関数、即ち $\varphi(x, y(x)) = 0$ とすると、陰関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} / \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{5.27}$$

このとき、関数 z=f(x,y) は x の関数となるのでチェーン・ルールより、極値をとるとき

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{5.28}$$

式 (5.28) に式 (5.27) を代入して

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = 0$$

整理すると得られる.

ラグランジュの未定乗数法

 $f(x,\ y)$ は条件 $\varphi(x,\ y)=0$ のもとで、 $(a,\ b)$ で極値をとるとする。 $\varphi_x(a,\ b)\neq 0$ または $\varphi_y(a,\ b)\neq 0$ であれば

$$\begin{cases} f_x(a, b) = \lambda \cdot \varphi_x(a, b) \\ f_y(a, b) = \lambda \cdot \varphi_y(a, b) \end{cases}$$
 を満たす λ が存在 (5.29)

Tip [導出]

式
$$(5.26)$$
 で、 $\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=\lambda$ とおくことによって得られる.

【条件付極値問題で、最大値・最小値を問われたとき】

 $\varphi(x,y)=0$ が端点をもたない場合、z=f(x,y) が連続関数であれば、極値を取り得る点が最大値・最小値になる.

第6章 重積分法

6.1 2 重積分

◆ A ◆ 定義

$$\iint_{D} f(x, y) dxdy = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{i}, \eta_{j}) \Delta x_{i} \Delta y_{j}$$

$$(6.1)$$

◆ B ◆ 性質

$$\left| \iint_{D} f(x, y) \, dx dy \right| \le \iint_{D} |f(x, y)| \, dx dy \tag{6.2}$$

◆ C ◆ 累次積分(逐次積分)

累次積分(1)

 $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$ とする.

$$\iint_{D} f(x, y) \, dx dy = \int_{a}^{b} \left\{ \int_{c}^{d} f(x, y) \, dy \right\} dx = \int_{c}^{d} \left\{ \int_{a}^{b} f(x, y) \, dx \right\} dy \tag{6.3}$$

範囲に関数が含まれている場合は変数を含んでいる方を先に計算する.

累次積分(2)

[1] $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ とする.

$$\iint_{D} f(x, y) dxdy = \int_{a}^{b} \left\{ \int_{\varphi_{1}(x)}^{\varphi_{2}(x)} f(x, y) dy \right\} dx \tag{6.4}$$

[2] $D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}$ とする.

$$\iint_{D} f(x, y) dxdy = \int_{c}^{d} \left\{ \int_{\psi_{1}(y)}^{\psi_{2}(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$
 (6.5)

◆ D ◆ 積分順序の交換

Tip [例題 (1)]

$$y = \sqrt{x}$$
と $y = \frac{1}{2}x$ に囲まれた領域

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le 4, \frac{1}{2}x \le y \le \sqrt{x} \right\}$$
$$= \left\{ (x, y) \mid y^2 \le x \le 2y, \ 0 \le y \le 2 \right\}$$

Tip [例題 (2)]

$$y = \log x \iff x = e^y \ \sharp \ \mathcal{D}$$

$$\int_{1}^{e} \left\{ \int_{0}^{\log x} f(x, y) \, dy \right\} dx = \int_{0}^{1} \left\{ \int_{e^{y}}^{e} f(x, y) \, dx \right\} dy$$

◆ E ◆ 変数変換

変数変換

 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ について

$$\iint_{D} f(x, y) dxdy = \iint_{D'} f(\varphi, \psi) \left| \det \begin{bmatrix} x_{u} & x_{v} \\ y_{u} & y_{v} \end{bmatrix} \right| dudv$$
(6.6)

$$\det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$$
 をヤコビアンといい, $\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$ や $J(u,\ v)$ で表す.また, D' は D を $u,\ v$ で表しなおした領域である.

◆ F ◆ 極座標変換

 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ より

$$\iint_{D} f(x, y) dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \left| \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \right| drd\theta$$
$$= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdrd\theta \tag{6.7}$$

◆ G ◆ 広義積分

領域に関数の定義されない部分が含まれている場合

Tip [例題]

D が不等式 $x^2 + y^2 \le 1$ の表す領域とするとき

$$\iint_{D} (x^{2} + y^{2})^{-\frac{3}{4}} dx dy$$

第7章 微分方程式

7.1 1 階線形常微分方程式

以下の形の微分方程式を1階線形常微分方程式という.

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \tag{7.1}$$

このとき、Q(t)=0の場合、即ち

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = 0 (7.2)$$

の場合を**斉次**といい、 $Q(t) \neq 0$ の場合、即ち

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \tag{7.3}$$

の場合を非斉次という.

◆ A ◆ 変数分離形

1階微分方程式で.

$$\frac{dx}{dt} = F(x)G(t) \tag{7.4}$$

のように、xの関数とtの関数の積になる形を変数分離形という.

【解法】

$$\frac{dx}{dt} = 2tx$$

を例にする.

[1] 左辺をxだけの式、右辺をtだけの式にする.

$$\frac{dx}{x} = 2t \, dt$$

[**2**] ∫をつけて両辺積分する.

$$\int \frac{dx}{x} = \int 2t \, dt$$

$$\log |x| = t^2 + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

[**3**] xについて解く.

$$x = \pm e^{t^2 + C_1} = \pm e^{C_1} e^{t^2}$$

$$\pm e^{C_1} = C$$
 とおいて

$$x = Ce^{t^2}$$
 (C は任意定数)

◆ B ◆ 定数変化法

1 階線形常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \tag{7.5}$$

の一般解を求める。まず、Q(t)=0 といた斉次方程式を解く。これは変数分離形で解ける。その結果を用いて非斉次方程式の一般解を導く。

【解法】

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = 4t^2 + 1\tag{7.6}$$

を例にする.

[1] まず、斉次方程式

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = 0\tag{7.7}$$

の一般解を求める.

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dt}{t}$$

$$\log |x| = -\log |t| + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

$$\log |x| + \log |t| = C_1$$

$$\log |xt| = C_1$$

$$\pm e^{C_1} = xt$$

$$\pm e^{C_1} = C \text{ とおいて}$$

$$x = \frac{C}{t}$$

[2] これは斉次方程式の一般解である. 求めたいのは

第8章 ベクトル

8.1 ベクトルの成分表示

$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{j} + a_3 \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\tag{8.1}$$

8.2 ベクトルの大きさ(ノルム)

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{8.2}$$

8.3 内積(スカラー積) $a\cdot b$

 $\mathbf{0}$ でない 2 つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} のなす角が θ ($0 \le \theta \le \pi$) のとき,

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta \tag{8.3}$$

$$= \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{8.4}$$

内積の性質

[1]
$$a \cdot b = b \cdot a$$
 $a \cdot a = |a|^2$

$$[2] \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

[3]
$$k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b})$$
 $(k \in \mathbb{R})$

[4] (i)
$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

(ii)
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

[5] $a \neq 0$, $b \neq 0$ $\emptyset \$ $b \notin a \perp b \iff a \cdot b = 0$

8.4 外積(ベクトル積) $a \times b$

 ${f 0}$ でない ${f 2}$ つのベクトル ${f a}$, ${f b}$ のなす角が ${f \theta}$ $(0<\theta<\pi)$ のとき,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta)\mathbf{e} \tag{8.5}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & a_x & b_x \\ \mathbf{j} & a_y & b_y \\ \mathbf{k} & a_z & b_z \end{bmatrix}$$
(8.6)

e は、a, b, e がこの順で右手系を成す向き。a=0, b=0 のとき、又は $\theta=0$, π のときは $a \times b=0$ とする.

外積の性質

$$[1] \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

[2] (i)
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

(ii)
$$(a+b) \times c = a \times c$$

[3]
$$k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b})$$
 $(k \in \mathbb{R})$

[4] (i)
$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

(ii)
$$i \times j = k$$
, $j \times k = i$, $k \times i = j$

[5]
$$a \neq 0$$
, $b \neq 0$ のとき、 $a /\!\!/ b \iff a \times b = 0$

 $oldsymbol{a}$ と $oldsymbol{b}$ の成す平行四辺形の面積S は

$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \tag{8.7}$$

で求められる.

8.5 三重積

◆ A ◆ スカラー三重積

3つのベクトルa, b, cについて

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cos \varphi \tag{8.8}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}$$
(8.9)

をスカラー三重積という. φ は a と $b \times c$ の成す角である.

スカラー三重積の性質

 $[1] \quad \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

[2] a, b, c が同一平面上になく、この順で右手系を成すとき、a, b, c の成す平行六面体の体積 V は

$$V = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \tag{8.10}$$

で求められる.

[1] は、行列式の性質から分かる.[2] について、 $m{a},\ m{b},\ m{c}$ がこの順で左手系を成すとき $\left(rac{\pi}{2}<arphi\leq\pi
ight)$,V は

$$V = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \tag{8.11}$$

である.

◆ B ◆ ベクトル三重積

3つのベクトルa, b, cについて

$$a \times (b \times c)$$
 (8.12)

をベクトル三重積という.

Lagrange の公式

$$[\mathbf{1}] \quad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

[2]
$$(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$$

8.6 ベクトルの平行条件・垂直条件

 $a \neq 0$, $b \neq 0$ のとき

- [1] $a /\!\!/ b \iff a \times b = 0 \iff b = ka$ を満たす $k \in \mathbb{R}$ が存在
- $[2] \quad \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

8.7 図形への応用

◆ A ◆ 内分点

 $\mathbf{A}(\boldsymbol{a})$ と $\mathbf{B}(\boldsymbol{b})$ を結ぶ線分を m:n に内分する点の位置ベクトル $\mathbf{P}(\boldsymbol{p})$

$$p = \frac{na + mb}{m + n} \tag{8.13}$$

◆ B ◆ 外分点

 $\mathbf{A}(m{a})$ と $\mathbf{B}(m{b})$ を結ぶ線分を m:n に外分する点の位置ベクトル $\mathbf{Q}(m{q})$

$$q = \frac{-na + mb}{m - n} \tag{8.14}$$

◆ C ◆ 中点

A(a) と B(b) を結ぶ線分の中点の位置ベクトル M(m)

$$m = \frac{a+b}{2} \tag{8.15}$$

◆ D ◆ 重心

A(a), B(b), C(c) を結んでできる三角形の重心の位置ベクトル G(g)

$$g = \frac{a+b+c}{3} \tag{8.16}$$

◆ E ◆ 直線のベクトル方程式

直線上の1点をP(p)とする.

[1] A(a) を通り **u** に平行

$$p = a + tu \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{8.17}$$

[**2**] A(a), B(b) を通る

$$p = (1-t)a + tb \qquad (u = b - a とする) \tag{8.18}$$

[3] A(a) を通り、 $n(\neq 0)$ に垂直な直線

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) = 0 \tag{8.19}$$

直線が ax+by+c=0 のとき、 $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} a\\b \end{bmatrix}$

◆F◆ 直線との距離

直線 ax + by + c = 0 と $A(x_0, y_0)$ との距離

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{8.20}$$

◆ G ◆ 三角形の面積

 $\triangle OAB$ に於いて、 $\overrightarrow{OA} = a$ 、 $\overrightarrow{OB} = b$ としたときの三角形の面積 S

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$$
 $S = \frac{1}{2}|a_x b_y - a_y b_x|$ (平面の場合) (8.21)

◆ H ◆ 円のベクトル方程式

中心 C(c), 半径 r の円のベクトル方程式

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{c}) = r^2 \tag{8.22}$$

◆ I ◆ 平面のベクトル方程式

 $\mathbf{A}(\boldsymbol{a})$ を通り、 \boldsymbol{n} に垂直な平面のベクトル方程式

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) = 0 \tag{8.23}$$

平面が ax + by + cz + d = 0 のとき、 $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

◆ J ◆ 球面のベクトル方程式

中心 C(c), 半径 r の球面のベクトル方程式

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{c}) = r^2 \tag{8.24}$$

◆ K ◆ 平面との距離

平面 ax + by + cz + d = 0 と A (x_0, y_0, z_0) との距離

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{8.25}$$

第9章 行列

第10章 行列式

第11章 線形変換

第12章 固有値とその応用

第13章 ベクトル空間

13.1 数ベクトル空間

◆ A ◆ 数ベクトル空間

平面のベクトル全体、空間のベクトル全体の集合をそれぞれ \mathbb{R}^2 、 \mathbb{R}^3 と表す:

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(13.1)$$

これを拡張して、n 個の実数の組を n 次元数ベクトルといい、その全体を n 次元数ベクトル空間 \mathbb{R}^n という、

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(13.2)$$

《注》ベクトルを行ベクトルによって書くこともある.

ベクトルの性質

x, y, z がベクトルで、 λ, μ がスカラーのとき

- $[1] \quad x + y = y + x$
- [2] (x+y)+z=x+(y+z)
- [3] x + 0 = x
- [4] x + (-x) = 0
- [5] $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$
- [6] $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- [7] $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
- [8] 1x = x

◆ B ◆ 線形独立

m 個の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_m$ について

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = \mathbf{0} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$
(13.3)

が成り立つとき、これらのベクトルは線形独立(1次独立)であるという。(13.3)の否定として

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \dots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0}$$

を満たす $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ のうち少なくとも1つに0でない組が存在するとき、線形従属であるという。

線形独立であるかの調べ方

|例| 次の4次元数ベクトル x_1, x_2, x_3 は線形独立か線形従属か.

$$oldsymbol{x}_1 = egin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ oldsymbol{x}_2 = egin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ oldsymbol{x}_3 = egin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

 $|\mathbf{m}|$ $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ とおくと

$$egin{bmatrix} egin{bmatrix} m{x}_1 & m{x}_2 & m{x}_3 \end{bmatrix} egin{bmatrix} \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \end{bmatrix} = m{0} \iff egin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \ 1 & -1 & 2 \ -1 & 2 & 1 \ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \end{bmatrix} = m{0}$$

 $\begin{bmatrix} m{x}_1 & m{x}_2 & m{x}_3 & m{0} \end{bmatrix}$ に対し掃き出し法を行うと

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ なので、 x_1, x_2, x_3 は線形独立.

◆ C ◆ 基底

 \mathbb{R}^n に於いて、その基本ベクトルを次のように定義する.

$$\mathbf{e}_{1} = \begin{bmatrix} 1\\0\\.\\.\\.\\0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_{2} = \begin{bmatrix} 0\\1\\.\\.\\.\\0 \end{bmatrix}, \ \cdots, \ \mathbf{e}_{n} = \begin{bmatrix} 0\\0\\.\\.\\.\\1 \end{bmatrix}$$
(13.4)

基本ベクトルは線形独立である。また、 \mathbb{R}^n の任意のベクトルは、基本ベクトルの線形結合で表される。

一般に \mathbb{R}^n の m 個のベクトルの組 $\Gamma = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ が、次の性質(=基本ベクトルの性質)

- (I) それらは線形独立である.
- (II) \mathbb{R}^n の任意のベクトルは、それらの線形結合で表される.

を満たすとき、ベクトルの個数 m は n に等しい.このとき、ベクトルの組 $\Gamma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ を \mathbb{R}^n の基底という.また.

- [1] m > n のとき、 a_1, a_2, \dots, a_m は線形従属.
- [2] m < n のとき、 a_1, a_2, \dots, a_m の線形結合で表されないベクトルが存在する.

\mathbb{R}^n の基底の条件

 \mathbb{R}^n における n 個のベクトルの組 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ について、次の条件は同値である.

- [1] $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ は \mathbb{R}^n の基底.
- [2] a_1, a_2, \cdots, a_n は線形独立.
- [3] 行列 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ は正則. 即ち $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \neq 0$

◆ D ◆ 基底の変換

 \mathbb{R}^n の基底 $\{a_j\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ を単に a. 標準基底 $\{e_j\}$ を e と表す. \mathbb{R}^n の任意のベクトル x は、a の線形結合 $x = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n$ (13.5)

で一意的に表される。このとき、スカラー y_1, y_2, \cdots, y_n を \boldsymbol{x} の \boldsymbol{a} に関する成分といい

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{a} \tag{13.6}$$

で表すこととする.



第 15 章 データの整理

第16章 確率分布

第17章 推定と検定

第 18 章 ベクトル解析

18.1 ベクトル関数の微分法

◆ A ◆ ベクトル関数の極限と連続

$$t_0$$
 を定数, $m{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ を定ベクトルとする. t をスカラー変数とするベクトル関数 $m{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$ について, t が t_0 に限りなく

近づくときの f(t) の極限は次で定義される.

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{c}| = 0 \iff \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{c}$$
(18.1)

$$\iff \lim_{t \to t_0} f_1(t) = c_1, \quad \lim_{t \to t_0} f_2(t) = c_2, \quad \lim_{t \to t_0} f_3(t) = c_3$$
 (18.2)

また、 $\lim_{t \to t_0} m{f}(t) = m{f}(t_0)$ が成立するとき、 $m{f}(t)$ は $t = t_0$ で連続であるという.

◆ B ◆ ベクトル関数の微分法

ベクトル関数 f(t) に於いて、次式を f(t) の導関数という.

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t} = \begin{bmatrix} \frac{df_1(t)}{dt} & \frac{df_2(t)}{dt} & \frac{df_3(t)}{dt} \end{bmatrix}^{\top}$$
(18.3)

微分法の公式

f(t), g(t) をベクトル関数、 $\varphi(t)$ をスカラー関数、c を定ベクトルとする.

$$[1] \quad \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{0}$$

[2]
$$\frac{d(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{g}}{dt}$$
 (複号同順)

[3]
$$\frac{d(\varphi \mathbf{f})}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{f} + \varphi \frac{d\mathbf{f}}{dt}$$

[4]
$$\frac{d(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}$$

[5]
$$\frac{d(\mathbf{f} \times \mathbf{g})}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \frac{d\mathbf{g}}{dt}$$

$$\label{eq:continuous_problem} [\mathbf{6}] \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{f}}{\varphi} \right) = \frac{\frac{d\mathbf{f}}{dt} \, \varphi - \mathbf{f} \, \frac{d\varphi}{dt}}{\varphi^2} \qquad (\varphi \neq 0)$$

[7]
$$t = \psi(u)$$
 をスカラー関数とすると $\frac{df}{du} = \frac{df}{dt} \frac{d\psi}{du}$ (合成関数の微分法)

◆ C ◆ 接線ベクトル

点 P の位置ベクトルが $m{r} = egin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ のようにベクトル関数であるとき,t が変化するにつれて P はある曲線 C を描く.この C

を $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ の表す曲線という.

以下,特に断りがない限り,r(t) は何度でも微分可能で $\frac{dr}{dt} \neq 0$ とする.

t の微小変化 Δt に対応する r(t) の変化を Δr とすると $\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$ である.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$
(18.4)

を曲線 C の点 P における接線ベクトルという.

「例」
$$r(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{bmatrix}$$
 ならば、接線ベクトルは $\frac{d}{dt} r(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 4t^3 \end{bmatrix}$ である.特に、 $t = 1$ の位置 $r(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ における接線ベクトルは $\frac{d}{dt} r(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ である.

◆ D ◆ 単位接線ベクトル

接線ベクトルを自身の大きさで割った、大きさ1の接線ベクトルを単位接線ベクトルtという.

$$t = \frac{\frac{dr}{dt}}{\left|\frac{dr}{dt}\right|} \tag{18.5}$$

曲線上のある定点 A を基準として、そこからの長さ s によって位置ベクトル r(s) を定義する方法をとる。A,P の位置ベクトルをそれぞれ $r(\alpha)$,r(t) とすると、AP の長さ s が次のようになるので、 $\frac{ds}{dt}$ が求められる。

$$s = s(t) = \int_{0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^{2} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^{2}} dt \tag{18.6}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}} = \left|\frac{dr}{dt}\right|$$
(18.7)

よって、 $\frac{d r}{d s}$ は合成関数の微分法より

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|}$$
(18.8)

これは式(18.5)と同じ式である. よって次が成り立つ.

単位接線ベクトル

$$t = \frac{\frac{dr}{dt}}{\left|\frac{dr}{dt}\right|} = \frac{dr}{ds} \tag{18.9}$$

一方、 $t \cdot t = |t|^2 = 1$ の両辺を t で微分すると、内積の微分公式より、 $2\frac{dt}{dt} \cdot t = 0$ なので、 $\frac{dt}{dt} \cdot t = 0$ である。つまり、 $\frac{dt}{dt} \perp t$ が成立する $\left(\frac{dt}{dt} \neq \mathbf{0}$ ならば $\right)$. よって、次を単位主法線ベクトルとし、n で表すと

$$n = \frac{\frac{dt}{dt}}{\left|\frac{dt}{dt}\right|} \tag{18.10}$$

となる.

単位主法線ベクトル

$$n = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{t}}{dt}\right|} = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{ds}}{\left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|}$$
(18.11)

18.2 2 変数ベクトル関数の微分法

◆ A ◆ 2 変数ベクトル関数の極限と連続

 $u_0,\ v_0$ を定数。 $oldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ を定ベクトルとする。 $u,\ v$ をスカラー変数とするベクトル関数 $oldsymbol{f}(u,\ v) = \begin{bmatrix} f_1(u,\ v) \\ f_2(u,\ v) \\ f_3(u,\ v) \end{bmatrix}$ について、

(u, v) が (u_0, v_0) に限りなく近づくときの f(u, v) の極限は次で定義される.

$$\lim_{(u, v) \to (u_0, v_0)} |f(u, v) - c| = 0$$

$$\iff \lim_{(u, v) \to (u_0, v_0)} \mathbf{f}(u, v) = \mathbf{c} \tag{18.12}$$

$$\iff \lim_{(u, v) \to (u_0, v_0)} f_1(u, v) = c_1, \quad \lim_{(u, v) \to (u_0, v_0)} f_2(u, v) = c_2, \quad \lim_{(u, v) \to (u_0, v_0)} f_3(u, v) = c_3$$

$$(18.13)$$

また、 $\lim_{(u, v) \to (u_0, v_0)} \mathbf{f}(u, v) = \mathbf{f}(u_0, v_0)$ が成立するとき、 $\mathbf{f}(u, v)$ は $(u, v) = (u_0, v_0)$ で連続であるという.

◆ B ◆ ベクトル関数の偏微分法

領域 D で定義されたベクトル関数 f(u, v) に於いて

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{f}(u + \Delta u, v) - \mathbf{f}(u, v)}{\Delta u} = \left[\frac{\partial f_1(u, v)}{\partial u} \quad \frac{\partial f_2(u, v)}{\partial u} \quad \frac{\partial f_3(u, v)}{\partial u} \right]^{\top}$$
(18.14)

をf(u, v)のuについての偏導関数といい、 $f_u(u, v)$ とも表す。また

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\mathbf{f}(u, v + \Delta v) - \mathbf{f}(u, v)}{\Delta v} = \left[\frac{\partial f_1(u, v)}{\partial v} \quad \frac{\partial f_2(u, v)}{\partial v} \quad \frac{\partial f_3(u, v)}{\partial v} \right]^{\top}$$
(18.15)

をf(u, v)のvについての偏導関数といい、 $f_v(u, v)$ とも表す。

$$egin{bmatrix} m{m{g}} & m{f}(u,\ v) = egin{bmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{bmatrix}$$
の偏導関数は

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1\\0\\2u \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0\\1\\2v \end{bmatrix} \tag{18.16}$$

また、次のチェーン・ルールが成り立つ.

チェーン・ルール

[1] u, v がともにスカラー変数 t の関数のとき

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \tag{18.17}$$

[2] u, v がともにスカラー変数 s, t の変数のとき

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s}, \qquad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$
(18.18)

◆ C ◆ 接平面

空間内の点 P の位置ベクトルが $m{r} = egin{bmatrix} x(u, & v) \\ y(u, & v) \\ z(u, & v) \end{bmatrix}$ のようにベクトル関数であるとき、点 (u, v) が領域 D を動くと、P は 1 つの

曲面Sを描く. このSを $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ の表す曲面という.

 $m{r}(u,\,v)$ が D で連続な偏導関数をもつとする. v を一定にして u を変化させると $m{r}$ は S 上で 1 つの曲線(u 曲線)を描く. よって、 $\dfrac{\partial m{r}(u,\,v)}{\partial u}$ は u 曲線上の P における接線ベクトルを与える.

同様に、u を一定にして v を変化させると r は S 上で 1 つの曲線(v 曲線)を描く.よって, $\frac{\partial r(u,\ v)}{\partial v}$ は v 曲線上の P における接線ベクトルを与える.

このとき、外積の性質より $\frac{\partial r}{\partial u}$ と $\frac{\partial r}{\partial v}$ が平行ならば $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \mathbf{0}$ なので、 $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq \mathbf{0}$ ならば、この 2 つの接線ベクトルを含む平面 H が存在する。この H を S の点 P における接平面という。その法線ベクトルは

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & x_u & x_v \\ \mathbf{j} & y_u & y_v \\ \mathbf{k} & z_u & z_v \end{vmatrix}$$
 (18.19)

である.

 $\boxed{\textbf{\textit{q}}}$ ベクトル関数 $m{r} = m{r}(u,\ v) = egin{bmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ u^2 \end{bmatrix}$ を例にとって、詳しく見ていく、

- [1] 与式の表す曲面の、x, y, z に関する方程式 $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ より $x^2 + y^2$ を計算すると u^2 なので、 $z = u^2$ となる. よって、 $z = x^2 + y^2$.
- $\frac{v=\frac{\pi}{2} \text{ のときの } u \text{ 曲線}}{x=u\cos\frac{\pi}{2}=0, \ y=u\sin\frac{\pi}{2}=u \text{ なので}, \ z=0^2+y^2=y^2. \ \text{ これは平面 } x=0 \text{ 上の放物線である}.}$
- [3] u=1 のときのv 曲線 $x=\cos v,\ y=\sin v$ より、z=1. これは平面 z=1 上の半径 1 の円である.
- [5] $\underbrace{(u, v) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)}_{}$ における接平面の法線ベクトル $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & x_u & x_v \\ \boldsymbol{j} & y_u & y_v \\ \boldsymbol{k} & z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & 0 & -1 \\ \boldsymbol{j} & 1 & 0 \\ \boldsymbol{k} & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

18.3 空間曲線

◆ A ◆ 曲率

曲線 r=r(s) の単位接線ベクトル $t=\frac{dr}{ds}$ について次の $\kappa\in\mathbb{R}$ を曲線の曲率という.

$$\kappa = \left| \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right| \tag{18.20}$$

 κ は曲線の局所的な曲がり具合である.この値が大きいほどカーブが急になる. Δt が十分に小さいとき, $|\Delta t| \approx \Delta \theta$ と見做すことができ, $\kappa = \left| \frac{d \theta}{d s} \right|$ と表すこともできるので, $\kappa =$ は回転角の変化率であるとも言える.

- [1] 半径 a の円の曲率は $\kappa=\frac{1}{a}$ で、半径が大きくなるほど曲線の曲がり具合が小さくなる.
- [2] 直線の曲率は $\kappa = 0$ である.

曲率の逆数を曲率半径といい、 σ で表す.

$$\sigma = \frac{1}{\kappa} \tag{18.21}$$

- [1] 半径 a の曲率半径は $\sigma=a$ である. $\kappa=0$ のときは $\sigma=\infty$ と定義する.
- [2] 直線の曲率半径は $\sigma = \infty$ である.

◆ B ◆ 振率

◆ C ◆ 速度・加速度

18.4 スカラー場の勾配

◆ A ◆ 勾配

D で定義されたスカラー場 $f(x,\ y,\ z)$ について、その偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial z}$ を係数とするベクトル $\frac{\partial f}{\partial x}$ $i + \frac{\partial f}{\partial y}$ $j + \frac{\partial f}{\partial z}$ を考えると、領域 D にあるベクトル場が定義される。これをスカラー場 f の勾配といい、 $\operatorname{grad} f$ で表す。形式的なベクトル $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ を使って、 ∇f で表すこともある。 ∇ を $\operatorname{Hamilton}$ の演算子と呼ばれ、ナブラと読む。

スカラー場の勾配

スカラー場 f(x, y, z) の勾配 $\operatorname{grad} f$ とは次のベクトル場である.

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right]^{\top}$$
(18.22)

cを定数とすると、方程式 $f(x,\ y,\ z)=c$ は一般に 1 つの曲面を表す、これを f の等位面という、c をパラメータとすると方程

式は等位面の群を表す. 点 P を通る等位面上に P を通る任意の曲線 $m{r}(t) = egin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ を描くと

$$f(x(t), y(t), z(t)) = c$$

を満たす. 両辺をtで微分すると、チェーン・ルールより

$$\begin{split} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= 0 \\ \iff \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 0 \\ \iff \nabla f \perp \frac{d\mathbf{r}}{dt} \end{split}$$

となる.

これは点 P に対応するベクトル場 ∇f は,P を通る等位面上の曲線の接線ベクトル $\frac{dr}{dt}$ に垂直になる.また,曲線は任意であるから次のことが言える.

勾配 abla f の意味

 $\pm P$ における勾配 ∇f は、P における等位面の法線ベクトルになる。

任意の単位ベクトル $e=\begin{bmatrix}e_x\\e_y\\e_z\end{bmatrix}$ について、点 P から e の方向に Δs だけ動いた時の f の微分係数(接線の傾き)を調べる.これを方向微分係数 $\frac{df}{ds}$ という.

方向微分係数

$$\frac{df}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x + e_x \Delta s, y + e_y \Delta s, z + e_z \Delta s) - f(x, y, z)}{\Delta s}$$

$$= \nabla f \cdot e \tag{18.23}$$

証明 P から e の方向に Δs だけ離れた点の座標は $(x+e_x\Delta s,\ y+e_y\Delta s,\ z+e_z\Delta s)$ なので、f の変化率はチェーン・ルールより

$$\frac{d}{ds}f(x + e_x \Delta s, \ y + e_y \Delta s, \ z + e_z \Delta s)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d}{ds}(x + e_x \Delta s) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d}{ds}(y + e_y \Delta s) + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d}{ds}(z + e_z \Delta s)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}e_x + \frac{\partial f}{\partial y}e_y + \frac{\partial f}{\partial z}e_z = \nabla f \cdot e$$

となる.

このとき、 ∇f と e の成す角を θ とすると

$$\nabla f \cdot e = |\nabla f||e|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

となり、 $\theta=0$ のとき正の最大値をとる.すなわち.勾配=法線ベクトルの方向への方向微分係数が最大となる.方程式

$$f(x, y, z) = c_i$$
 $(c = 1, 2, \cdots)$

で、 c_1 での方向微分係数より、 c_2 での方向微分係数の値の方が大きいとき、

第 19 章 ラプラス変換

19.1 定義と基本的性質

◆ A ◆ ラプラス変換の定義

関数 f(t) は、 $t \in \mathbb{R}_{>0}$ で定義され、s を t と無関係な実数とする.このとき次のような関数 F(s) を考える.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to +0}} \int_{\varepsilon}^T e^{-st} f(t) dt$$
 (19.1)

これは、関数 f(t) に関数 F(s) を対応させる規則を与えている。その対応を $\mathcal L$ で表す。 $\mathcal L$ を適用させた F(s) を f(t) のラプラス変換といい。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad \sharp \, \mathcal{L}i\sharp \quad f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \tag{19.2}$$

と表す. f(t) を原関数. F(s) を像関数という. 一般に $s \in \mathbb{C}$ であるが. ここでは $s \in \mathbb{R}$ とする.

例1 f(t) = 1 のラプラス変換 $\mathcal{L}[1]$

$$F(s) = \infty[1] = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

 $s \leq 0$ のとき, $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) = \infty$ なので存在しない.

 $\boxed{ m{\theta} \ \mathbf{2} } \quad f(t) = t \ \mathcal{O}$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[t]$

$$\begin{split} F(s) &= \mathcal{L}[t] = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} t \, dt = \lim_{T \to \infty} \left\{ \left[-\frac{e^{-st}}{s} t \right]_0^T + \int_0^T \frac{e^{-st}}{s} \, dt \right\} = \lim_{T \to \infty} \left\{ -\frac{e^{-sT}}{s} T - \left[\frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^T \right\} \\ &= \lim_{T \to \infty} \left\{ -\frac{e^{-sT}T}{s} - \frac{e^{-sT}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{1}{s^2} \end{split}$$

ccc. s > 0 oct

$$\begin{split} &\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{e^{-sT}T}{s}\right) = -\frac{1}{s}\lim_{T\to\infty}\frac{T}{e^{sT}} = -\frac{1}{s}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{se^{sT}} = 0\\ &\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{e^{-sT}}{s^2}\right) = -\frac{1}{s^2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{e^{sT}} = 0 \end{split}$$

例3 $f(t) = e^{\alpha t} (\alpha \text{ は定数}) のラプラス変換 <math>\mathcal{L}[e^{\alpha t}]$

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} e^{\alpha t} dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-(s-\alpha)t} dt = \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \right]_0^T$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left(-\frac{1}{s-\alpha} \left\{ e^{-(s-\alpha)T} - 1 \right\} \right) = \frac{1}{s-\alpha} \quad (s > \alpha)$$

 $s-\alpha \leq 0$, 即ち $s \leq \alpha$ のとき, 極限値は存在しない.

例4 $f(t) = \sin \omega t$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\sin \omega t]$

$$F(s) = \mathcal{L}[\sin \omega t] = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} \sin \omega t \, dt$$

$$I_1 = \int_0^T e^{-st} \sin \omega t \, dt \, とする.$$

$$I_{1} = \int_{0}^{T} e^{-st} \sin \omega t \, dt = \left[\frac{1}{-s} e^{-st} \sin \omega t \right]_{0}^{T} - \int_{0}^{T} \frac{1}{-s} e^{-st} \omega \cos \omega t \, dt$$

$$= \frac{1}{-s} e^{-sT} \sin \omega T + \frac{\omega}{s} \int_{0}^{T} e^{-st} \cos \omega t \, dt$$

$$= \frac{1}{-s} e^{-sT} \sin \omega T + \frac{\omega}{s} \left\{ \left[\frac{1}{-s} e^{-st} \cos \omega t \right]_{0}^{T} - \int_{0}^{T} \frac{1}{-s} e^{-st} (-\omega \sin \omega t) \, dt \right\}$$

$$= \frac{1}{-s} e^{-sT} \sin \omega T + \frac{\omega}{s} \left\{ \left(\frac{1}{-s} e^{-sT} \cos \omega T + \frac{1}{s} \right) - \frac{\omega}{s} I_{1} \right\}$$

よって、 I_1 について解くと

$$I_1 = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} \left\{ -\frac{1}{s} e^{-sT} \sin \omega T - \frac{\omega}{s^2} e^{-sT} \cos \omega T + \frac{\omega}{s^2} \right\}$$

 $s>0 \; \text{Olling} \; \lim_{T\to\infty} e^{-sT} \sin \omega T = \lim_{T\to\infty} e^{-sT} \cos \omega T = 0 \; \text{for} \; ,$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \lim_{T \to \infty} I_1 = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (s > 0)$$

同様にすると、
$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$
 $(s > 0)$

◆ B ◆ 単位ステップ関数

次のように定義される関数 H(t) を **Heaviside** の階段関数という.

$$H(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$
 (19.3)

《注》t=0 に於ける値は任意に決めることができる.

また、次のように定義される関数 U(t) を単位ステップ関数という.

$$U(t) = \begin{cases} 0 & (t \le 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$
 (19.4)

関数 U(t-a) は U(t) を t 軸方向に a 平行移動して得られる.

 $a\geq 0$ のときの $\mathcal{L}[U(t-a)]$ を求める. $t-a\leq 0$,即ち $t\leq a$ のときは U(t-a)=0,t>a のときは U(t-a)=1 なので

$$F(s) = \mathcal{L}[U(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st} U(t-a) \, dt = \int_0^a e^{-st} U(t-a) \, dt + \int_a^\infty e^{-st} U(t-a) \, dt = \int_a^\infty e^{-st} \, dt$$
$$= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_a^\infty = -\frac{1}{s} \lim_{t \to \infty} \left(e^{-st} - e^{-as} \right)$$

ここで、s > 0 のとき $\lim_{t \to \infty} e^{-st} = 0$ なので

$$F(s) = -\frac{1}{s} \cdot (-e^{-as}) = \frac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0)$$

である.

19.2 ラプラス変換の基本的性質

◆ A ◆ ラプラス変換の線形性

関数 f(t), g(t), 定数 a, b に対し

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \tag{19.5}$$

が成り立つ. これによって、項別にラプラス変換をすることで求めることができる.

◆ B ◆ ラプラス変換の相似性

関数 f(t)、定数 $\lambda > 0$ に対し、 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ とする. このとき

$$\mathcal{L}[f(\lambda t)] = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right) \tag{19.6}$$

が成り立つ. 即ち, t 軸方向に $\frac{1}{\lambda}$ 倍してからラプラス変換すると, F(s) を s 軸方向に λ 倍したものを $\frac{1}{\lambda}$ 倍したものになる.

$$x = f(t) \qquad \xrightarrow{\mathcal{L}} \qquad X = F(s)$$

$$t 軸方向に \frac{1}{\lambda} \ \text{ fo} \qquad \qquad \qquad \boxed{s 軸方向に \lambda 倍して X 軸方向に $\frac{1}{\lambda} \ \text{ fo}}$

$$x = f(\lambda t) \qquad \xrightarrow{\mathcal{L}} \qquad X = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$$$

◆ C ◆ 第 1 移動定理(像関数の移動法則)

関数 f(t)、定数 α に対し、 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ とする. このとき

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)] = F(s-\alpha) \tag{19.7}$$

が成り立つ. 即ち,原関数に $e^{\alpha t}$ をかけたものをラプラス変換すると,像関数は F(s) を s 軸方向に α 平行移動したものになる.

$$x=f(t) \qquad \xrightarrow{\mathcal{L}} \qquad X=F(s)$$

$$e^{\alpha t} \text{ をかける} \qquad \qquad \qquad \text{s 軸方向に } \alpha \text{ 平行移動}$$

$$x=e^{\alpha t}f(t) \qquad \xrightarrow{\mathcal{L}} \qquad X=F(s-\alpha)$$

◆ D ◆ 第 2 移動定理(原関数の移動法則)

ラプラス変換は t>0 の範囲で行うので、単位ステップ関数 U(t) をかけても変わらない。このとき、関数 f(t)、定数 $\mu>0$ に対し、 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ とすると

$$\mathcal{L}[f(t-\mu)U(t-\mu)] = e^{-\mu s}F(s) \tag{19.8}$$

が成り立つ. 即ち、原関数を t 軸方向に μ 移動したものをラプラス変換すると、像関数は F(s) に $e^{-\mu s}$ をかけたものになる.

$$x=f(t)$$
 $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $X=F(s)$ \boxed{t} 軸方向に μ 移動 $\boxed{\wp}$ $\boxed{e^{-\mu s}}$ をかける
$$x=f(t-\mu)U(t-\mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} X=e^{-\mu s}F(s)$$

◆ E ◆ 微分法則

原関数 f(t) のラプラス変換を F(s) とすると次が成り立つ.

1 階の微分法則

[1]
$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(+0)$$
 (原関数の微分法則)
[2] $\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$ (像関数の微分法則)

f(+0) は、 $t \to +0$ のときの f(t) の極限値を表す.原関数の微分法則は微分方程式に使われることがある.原関数や像関数の微分法則を繰り返し使うと以下を得る.

高次微分法則

[1]
$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(+0) - s^{n-2} f'(+0) - s^{n-3} f''(+0) - \cdots - f^{(n-1)}(+0)$$
 (原関数の高次微分法則)
[2] $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$ (像関数の高次微分法則)

◆ F ◆ 積分法則

原関数 f(t) のラプラス変換を F(s) とすると積分についての次が成り立つ.

積分法則

[1]
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$
 (原関数の積分法則)
[2] $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$ (像関数の積分法則)

例
$$\int_0^t e^{-2\tau}\,d\tau\,\, {\it O}\, {\it j}\, {\it j$$

であるので

$$\mathcal{L}\left[\int_{0}^{t} e^{-2\tau} d\tau\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s(s+2)}$$

◆ G ◆ たたみこみ

区間 $[0, \infty)$ で定義された関数 f(t), g(t) に対し

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$
 (19.9)

を f(t) と g(t) のたたみこみまたは合成積という。たたみこみのラプラス変換について、次の関係が成り立つ。

たたみこみのラプラス変換

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] \tag{19.10}$$

例 $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$ について、たたみこみ (f * g)(t) を求める.

$$(f * g)(t) = \int_0^t \sin \tau \cos(t - \mu) d\tau$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^t \{\sin t + \sin(2\tau - t)\} d\tau$$
$$= \frac{1}{2} \left[\tau \sin t - \frac{1}{2} \cos(2\tau - t)\right]_0^t$$
$$= \frac{1}{2} t \sin t$$

たたみこみのラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t\sin t\right] = \mathcal{L}[\sin t * \cos t] = \mathcal{L}[\sin t]\mathcal{L}[\cos t]$$
$$= \frac{1}{s^2 + 1} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

19.3 ラプラス変換の表

◆ A ◆ 主な性質

-			
原関数	像関数		
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$		
f(at)	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) (a>0)$		
$e^{\alpha t}f(t)$	F(s-lpha)		
$f(t-\mu)U(t-\mu)$	$e^{-\mu s}F(s) \qquad (\mu > 0)$		
f'(t)	sF(s) - f(+0)		
$f^{(n)}(t)$	$s^{n}F(s) - s^{n-1}f(+0) - s^{n-2}f'(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0)$		
tf(t)	-F'(s)		
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$		
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$rac{F(s)}{s}$		
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$		

♦ B ♦ いろいろな関数のラプラス変換

原関数	像関数		
1	$\frac{1}{s}$		
t	$\frac{1}{s^2}$		
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$		
$e^{lpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$		
$te^{lpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$		
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$		
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$		
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$		
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$		
$t\cos\omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$		
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$		
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$		
U(t-lpha)	$\frac{e^{-as}}{s} (a \ge 0)$		
$\sinh \omega t$ $\cosh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$ $\frac{s}{s^2 - \omega^2}$		

第 20 章 フーリエ解析

第 21 章 複素解析

第22章 力学 [

22.1 ベクトル,速度,加速度

◆ A ◆ 点の位置の表し方

無限に広い平面にある点 P の位置を表すのには、基準となる物体(基準体)が必要、基準体を 1 つの点 O とすれば、P の位置を表すものに、距離はあるが方向はない、よって、基準体は大きさを持ったものでなくてはならない、時が経っても形の変わらないものを剛体という、この剛体上に 2 つの定点 A、B をとれば、AP、BP の長さによって P の位置は決まる。

点 P の位置を表すのには OP の長さ r を使って、 $\overrightarrow{OP} = r$ のようにベクトルで書き表す.これを位置ベクトルという.x 軸と \overrightarrow{OP} の成す角を φ とすると (x,y) と (r,φ) の関係は

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{22.1}$$

座標系のとり方はいろいろある.

例 原点を共通に持つ 2 つの座標系の軸が $\frac{\pi}{4}$ の角をつくっている。(1) 任意の点 P の座標 (x, y), (x', y') の間にはどんな関係があるか:(2) $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ を示せ:(3) $ax^2 + 2hxy + ay^2 = 1$ で示される曲線の方程式を x', y' を使って表せ。

(1) 図で、P から x 軸と x' 軸にそれぞれ垂線 PA、PB を下す。A から x' 軸に垂線 AA' を下すと

$$x' = OB + OA' + A'B = OA \cos \frac{\pi}{4} + AP \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$
 (22.2)

また

$$y' = AP\cos\frac{\pi}{4} - OA\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$$
 (22.3)

式 (22.2), 式 (22.3) が x', y' を x, y で表す式である. x, y について解けば

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \tag{22.4}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \tag{22.5}$$

(2) (1) より

$$x^{2} + y^{2} = x^{2} + y^{2} \tag{22.6}$$

(3) 与式に代入すると

$$(a+h)x'^{2} + (a-h)y'^{2} = 1$$

空間の直交座標系は、右手の親指、人差し指、中指の順に $x,\ y,\ z$ 軸をとる(右手座標系)。極座標では、x 軸と r の正射影の成す角を φ 、z 軸と r の成す角を θ とする。 φ は経度、 θ は緯度にあたる。 $(x,\ y,\ z)$ と $(r,\ \varphi,\ \theta)$ の関係は

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \qquad y = r \sin \theta \sin \varphi, \qquad z = r \cos \theta$$
 (22.7)

となる.

◆B ◆ 速度ベクトル

速度または速度ベクトルvは

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$
 (22.8)

で求める

P 点の位置を辿ると曲線を描く(軌道または径路)。 時間の差 Δt が小さいほど, $|\Delta r|$ と軌道に沿っての長さ Δs の比が 1 に近づくので v=|v| は

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$
 (22.9)

となる. これを速さという.

22-2 第 22 章 力学 I

◆ C ◆ 加速度ベクトル

加速度または加速度ベクトルaは

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{22.10}$$

で求める.

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)$$
 (a, α は定数) (22.11)

で表される運動は

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega a \sin(\omega t + \alpha) \tag{22.12}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x \tag{22.13}$$

となる。加速度はいつも原点の方を向いており、その大きさは原点からの距離に比例している。この運動を単振動という。x は $\pm a$ の間を往復する。 $\omega t + \alpha$ の値によって x の値が決まるので位相という。 α を初期位相という。

◆ D ◆ 1 節 問題

- [1] 空間の 1 つの点の位置の極座標を r, θ , φ とする. r, θ , φ 方向(r 方向は θ , φ を一定にして r だけが増すような方向。他も同様)の方向余弦を求めよ。
- [2] 3つのベクトル A, B, C を 1 つの点 O から引くときこれらが一平面内にあるための条件を求めよ.
- [3] 2 つの点 A, B の位置ベクトルを A, B とする. A, B 両方の点を通る直線の方程式は

$$r = (1 - \lambda)A + \lambda B$$

であることを証明せよ.

[4] 1つの平面(xy 平面)内にあるベクトル A の成分が $A_x = A\cos\omega t,\ A_y = A\sin\omega t$ ($A,\ \omega$ は定数)で与えられるとき A と $\frac{dA}{dt}$ とは互いに直角になっていることを証明せよ.

22.2 運動の法則

◆ A ◆ 慣性の法則(運動の第1法則)

すべての物体は、加えられた力によってその状態が変化させられない限り、静止或いは等速直線運動の状態を続ける(慣性系の存在).

2つの座標系 S 系:O-xyz E S' 系:O-x'y'z' を考える。S' 系は S 系に対して並進運動(平行移動)をしていると考える。このとき、空間内に質点 m があり、力 F が作用しているとする。S 系での位置ベクトルは r, S' 系での位置ベクトルは r' である。また、O から見た O' の位置ベクトルを R とする。すると

$$r = R + r' \tag{22.14}$$

の関係がある. これを用いると速度, 加速度はそれぞれ

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \tag{22.15}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \tag{22.16}$$

となる. 従って、運動方程式 (C 節を参照) より

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + m\frac{s^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F}$$
(22.17)

${f S}$ 系に対して ${f S}'$ 系が等速直線運動をしている場合

このとき R の加速度は 0 なので

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0}$$

よって

$$S \stackrel{\mathcal{K}}{\approx} m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \tag{22.18}$$

$$S' \tilde{R} \qquad m \frac{d^2 \mathbf{r'}}{dt^2} = \mathbf{F} \tag{22.19}$$

22.2 運動の法則 22-3

従って、どちらの系でも同様に運動を記述できる.

S 系に対して S' 系が加速度運動をしている場合

このとき

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \neq \mathbf{0}$$

なので

$$S \stackrel{\mathcal{K}}{=} m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \tag{22.20}$$

$$S' \stackrel{\mathcal{R}}{\approx} m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$$
 (22.21)

力が働かない場合(F=0)を考えると

$$S \stackrel{\mathcal{K}}{=} m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0} \tag{22.22}$$

$$S' \not\stackrel{\mathcal{R}}{=} m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = -m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \tag{22.23}$$

S系では等速直線運動,S'系では加速度運動が観測される.従って $-m\frac{d^2{m R}}{dt^2}$ を見かけの力(慣性力)とする.第1法則が成り立つ系を慣性系,成り立たない系を非慣性系という.

非慣性系で運動方程式を記述するには

$$m\frac{d^2\mathbf{r'}}{dt^2} = \mathbf{F'} = \mathbf{F} - m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$
(22.24)

と置き換える.

慣性系の問題の解き方

- [1] 慣性系から見た動体の加速度 α を書き入れ、全ての力を書き込んで運動方程式を立てる.
- [2] 非慣性系から見た、動体の中にある物体に働く慣性力を書き込む.
- [3] 物体に働く慣性力以外の力を書き込む.
- [4] 慣性力を含む物体の運動方程式を立てる(非慣性系の運動方程式). 静止している場合はつり合いの式を書く.
- [5] 運動方程式(つり合いの式)を解く.

◆ B ◆ ガリレイ変換

2 つの慣性系 S(O, x, y, z) と S'(O', x', y', z') で、 $x \parallel x', y \parallel y', z \parallel z'$ とし、O' は S の座標系で (x_0, y_0, z_0) にあり、一定の速度 $\mathbf{v}_0 = (u, v, w)$ であるとする.

任意の点 P の座標を (x, y, z), (x', y', z') とすれば

$$x = x_0 + x'$$
 $y = y_0 + y'$ $z = z_0 + z'$ (22.25)

$$x' = x - x_0$$
 $y' = y - y_0$ $z' = z - z_0$ (22.26)

である. これらをtで微分すると

$$u = u_0 + u'$$
 $v = v_0 + v'$ $w = w_0 + w'$ (22.27)

$$u' = u - u_0$$
 $v' = v - v_0$ $w' = w - w_0$ (22.28)

となる.式 (22.27) を更に t で微分すると $\frac{du_0}{dt}=0,\; \frac{dv_0}{dt}=0,\; \frac{dw_0}{dt}=0$ なので

$$\frac{du}{dt} = \frac{du'}{dt} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{dw'}{dt} \qquad (22.29)$$

となる. 式 (22.25)~式 $(\ref{eq:condition})$ をガリレイ変換という. 例えば、式 (22.28) は速度 u で飛んでいる鳥を同方向に速度 u_0 で走っている列車から見ると相対的に $u-u_0$ の速度で飛んでいるように見えるということ.

v が一定であるとき、S が慣性系ならば S' も慣性系である.

◆ C ◆ 力と加速度(運動の第2法則)

質点に他の物体から力が働いた結果、加速度が生じる. このとき

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \tag{22.30}$$

が成り立つ(運動方程式).

22-4 第 22 章 力学 I

《注》運動方程式は[結果] = [原因] というように書くことが多い.

運動の変化は、運動量 p=mv を用いて

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1)$$

と表される. 運動の変化は加えられた駆動力 (=力×力を加えた時間) によって起こるので、

$$\Delta p = F \Delta t \tag{22.31}$$

と書くことができる.しかし,実際 $m{F}$ は変化するので積分を用いることで一般化ができる.力を時間で積分したものを力積 $m{I}$ といい

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \, dt$$

で定義される. つまり運動の変化 Δp は力積 I に等しい.

運動の変化率は式 (22.31) から

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F$$

と書ける. $\Delta t \rightarrow 0$ のとき

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{22.32}$$

で、質点の運動量の時間微分は、その瞬間に加えられた力に等しいことを意味する、運動量の定義式よりこれは

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \tag{22.33}$$

と書くこともできる.

ここで、F はその物体に加えられた力の合力を指し、m はその質点の慣性質量とする.

運動方程式は

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$$

より、F が一定のとき質量が大きいほど加速度の変化が小さい。物体が運動の状態を続けようとする性質を慣性ということからm は慣性質量と呼ばれる。

◆ D ◆ 作用・反作用の法則(運動の第3法則)

2 個の質点 1,2 があり、互いに力を及ぼしているとき、質点 1 が質点 2 から受ける力 F_{12} は、質点 2 が質点 1 から受ける力 F_{21} と大きさが同じで向きが反対である。つまり

$$F_{12} = -F_{21} \tag{22.34}$$

である(作用・反作用の法則).

林檎が落下しているとき、林檎が地球から受ける力(重力)と地球が林檎から受ける力は作用・反作用の関係にある。また、林檎が机の上で静止しているとき、林檎が机から受ける力(垂直抗力)と机が林檎から受ける力も作用・反作用の関係にある。しかし、林檎が地球から受ける力(重力)と林檎が机から受ける力(垂直抗力)は作用・反作用の関係ではなく、つり合いの関係である。

◆ E ◆ 2 節 問題

- [1] 滑らかな水平面上にある板(質量 M)の上を人(質量 m)が板に対して加速度 a で歩くとき、板は水平面上に対してどのような加速度を持つか、また、人と板とが互いに水平に及ぼしあう力はどれだけか。
- [2] 水平な滑らかな床の上に一様な鎖(質量 M, 長さ l)を一直線に置いてその一端を一定の力 F で引っ張る。鎖の各点での張力を求めよ。
- [3] 惑星が太陽から惑星の質量に比例し、太陽からの距離の 2 乗に反比例する引力を受けて太陽のまわりを円運動を行うものとする。 いろいろな惑星が太陽の周りを回る周期 T と、円運動の半径 a との間には

$$\frac{T^2}{a^3}$$
 = 惑星によらない定数

の関係があることを示せ、この関係はケプラーの第3法則に相当する.

[4] 太陽系は銀河系の中心から 30000 光年の距離で、およそ $250\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ の速さで銀河系の中心を中心として等速円運動をしている。銀河系の形は図のようになっており、太陽系は銀河系の各恒星からの万有引力を受けている。銀河系の恒星は空間に散らばっているが、大雑把にいって太陽系に働く力は、銀河系全体の質量がその中心に集中していると考えても大体の程度のことはいえるであろう。太陽のまわりの地球の運動の速度は $30.0\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ として、銀河系の総質量と太陽の質量との比を求めよ。

[5] 中性子星と呼ばれる星は中性子が万有引力によって結び付けられてたもので、原子核と同様な密度(およそ $10^{12}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$)を持つ、中性子星は球形で、自転しているとして、赤道で中性子星が飛び去らないための回転の周期の最小値を求めよ、

22.3 簡単な運動

◆ A ◆ 落体の運動

鉛直上方に y 軸をとり、適当な高さの点を原点とする。質量 m の質点を y 軸上で運動させると下向きに加速度を持っているので、下向きに力が働く、よって運動方程式は

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -F$$

加速度は物体によらず一定である。元々物体が慣性質量を持つことと、地球が物体を引っ張る(万有引力)ことは独立なことである。よって、「加速度が物体によらず一定であること」は、慣性質量 m と重力 (F) が比例していなければならない。これは歴史の中で確かめられたので

$$F = mg$$

とすれば運動方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\tag{22.35}$$

となる。これを積分して

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C$$

ここで、初速度を v_0 とすれば、t=0を代入して

$$\frac{dy}{dt} = C \iff v_0 = C$$

なので

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0$$

となる. これを更に積分して

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C'$$

投げ出した時の位置を原点とすれば、t=0を代入して

$$0 = C'$$

よって

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

となる

◆ B ◆ 粘性抵抗力が働く場合の落体運動

物体の運動が遅いとき、粘性抵抗力がはたらき

$$F = -\alpha v \tag{22.36}$$

の形で与えられる. また、物体の運動が速いときは慣性抵抗力がはたらき

$$F = \begin{cases} -\beta v^2 & v > 0 \text{ O } \xi \text{ } \\ +\beta v^2 & v < 0 \text{ O } \xi \text{ } \end{cases}$$
 (22.37)

の形で与えられる.

自由落下で、空気抵抗がある場合を考える.鉛直下向きにy軸をとると、運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v \tag{22.38}$$

である.変数分離して

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha v}{m} \iff dv = \left(g - \frac{\alpha v}{m}\right)dt$$

$$\iff \frac{dv}{g - \frac{\alpha}{m}v} = dt$$

両辺積分すると

$$\int \frac{dv}{g - \frac{\alpha}{m}v} = \int dt \iff -\frac{m}{\alpha} \log \left| g - \frac{\alpha}{m}v \right| = t + C$$

$$\iff \log \left| g - \frac{\alpha}{m}v \right| = -\frac{\alpha}{m}t + C$$

$$\iff g - \frac{\alpha}{m}v = \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t + C\right)$$

$$\iff \frac{\alpha}{m}v = g - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t + C\right)$$

$$\iff v = \frac{m}{\alpha} \left\{ g - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t + C\right) \right\} = \frac{m}{\alpha} \left\{ g - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \exp(C) \right\}$$

ここで、初期条件より t=0, v=0 なので

$$0 = \frac{m}{\alpha} \{ g - \exp(C) \} \iff \exp(C) = g$$

よって

$$v = \frac{mg}{\alpha} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \right\} \tag{22.39}$$

となる

式 (22.39) で、 $t \to \infty$ とすると

$$v_{\infty} = \frac{mg}{\alpha} \tag{22.40}$$

となる. v_{∞} を終端速度といい、これより大きくなることはない.

◆ C ◆ 慣性抵抗力が働く場合の落体運動

半径が大きくなると粘性抵抗力より慣性抵抗力の方が支配的になる. よって, 運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \beta v^2 \tag{22.41}$$

となる. 先程と同じように変数分離して

$$\frac{dv}{g - \frac{\beta}{m}v^2} = dt$$

両辺積分すると

右辺 = t + C

よって

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{g\beta}}\log\left|\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{\beta}{m}}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{\beta}{m}}\,v}\right| = t + C \quad \stackrel{2C\sqrt{\frac{g\beta}{m}}=C'}{\Longleftrightarrow} \quad \log\left|\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{\beta}{m}}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{\beta}{m}}\,v}\right| = 2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}} + C'$$

$$\iff \frac{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{\beta}{m}}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{\beta}{m}}\,v} = e^{2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}}+C'}$$

$$\iff \sqrt{g}+\sqrt{\frac{\beta}{m}}\,v = \left(\sqrt{g}-\sqrt{\frac{\beta}{m}}\,v\right)e^{2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}}+C'}$$

(前頁の続き)
$$\iff \sqrt{\frac{\beta}{m}} \, v + \sqrt{\frac{\beta}{m}} \, v e^{2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}} + C'} = \sqrt{g} \, e^{2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}} + C'} - \sqrt{g}$$

$$\iff \sqrt{\frac{\beta}{m}} \, v \left(1 + e^{2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}} + C'} \right) = \sqrt{g} \left(e^{2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}} + C'} - 1 \right)$$

$$\iff v = -\sqrt{\frac{mg}{\beta}} \, \frac{1 - e^{2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}} + C'}}{1 + e^{2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}} + C'}}$$

となる. 初期条件より t=0, v=0 なので

$$0 = 1 - e^{C'} \iff C' = 0$$

トって

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{\beta}} \frac{1 - e^{2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}}}}{1 + e^{2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}}}}$$

$$(22.42)$$

となる. ここで、分子分母に $e^{-2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}}}$ をかけると

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{\beta}} \frac{e^{-2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}}} - 1}{e^{-2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}}} + 1} = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \frac{1 - e^{-2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}}}}{1 + e^{-2t\sqrt{\frac{g\beta}{m}}}}$$

なので、 $t \to \infty$ とすると

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \tag{22.43}$$

と. 終端速度が求められる.

◆ D ◆ 放物運動

質量 m の物体を、仰角(地表と成す角) θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 、速さ v_0 で放り投げた場合の運動を考える。空気抵抗を無視すると、任意の点での物体に加わる力は重力だけなので運動方程式は次のようになる.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$
 $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$ (22.44)

これらの微分方程式を解くと次のようになる.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = C_x$$

$$x = C_x t + D_x$$

$$\frac{dy}{dt} = C_y$$

$$y = C_y t + D_y$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + C_z$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_z t + D_z$$

放物運動は 2 次元平面内の運動なので、xz 平面内での運動と考えると、t=0 のとき ${m r}=(0,\ 0,\ 0)$ 、 ${m v}_0=(v_0\cos\theta,\ 0,\ v_0\sin\theta)$ なので、代入すると

$$\frac{d}{dt}x(0) = v_0 \cos \theta = C_x$$

$$\frac{d}{dt}y(0) = 0 = C_y$$

$$x(0) = 0 = D_x$$

$$y(0) = 0 = D_y$$

$$\frac{d}{dt}z(0) = v_0 \sin \theta = C_z$$

$$z(0) = 0 = D_z$$

なので, 特殊解は

$$x = v_0 t \cos \theta \qquad \qquad y = 0 \qquad \qquad z = v_0 t \sin \theta \qquad (22.45)$$

となる.

◆ E ◆ 粘性抵抗力が働く場合の放物運動

図を描くと、任意の点での物体に加わる力は重力 mg と粘性抵抗力 $-\alpha v$ である、水平方向を x 軸、鉛直方向を z 軸とすると

$$m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k} \qquad \qquad -\alpha \mathbf{v} = -\alpha v_x \mathbf{i} - \alpha v_z \mathbf{k}$$

となる. また、初期条件は先程と同じとする. 運動方程式は

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x \qquad m\frac{dv_z}{dt} = -mg - \alpha v_z \qquad (22.46)$$

となる.

22-8 第 22 章 力学 I

◆ F ◆ 3 節問題

- [1] 全質量 M の風船が α の加速度で落ちている。逆に上向きに加速度 α の運動をするためにはどれだけの質量の砂袋を捨てなければならないか。
- [2] 軽い定滑車に糸をかけてその両端に質量 m_1 , m_2 の質量をつるして放す。両質点の加速度を求めよ。また、糸の張力を求めよ。(この装置をアトウッドの装置とよぶ)。
- [3] 前の問題で滑車を β の加速度で引き上げるとき、両質点の滑車に対する加速度と糸の張力はどうなるか、
- [4] 地上から一定の速さで石を投げるとき地面の達することのできる区域の面積は S_0 である。地上から上方 h のところから同じ速さで投げると区域は $S_h=S_0+2h\sqrt{\pi s_0}$ で与えられることを証明せよ。
- [5] 物体を投げるときの初速を知りたいがこれを直接に測ることが難しい。それで投射距離と時間を測定してこれを求めたいと考える。公式を求めよ。
- [6] 図に示すように、正、負に帯電した平行金属板(偏向板)の間に電子(質量 m)を両板に走らせる。電子には一方の力 eE (e: 電子の荷電, E: 電場の強さ)が負の方から正の方に働く。電子が偏向板の間を<math>l だけ走ってその端に来たとき、はじめ目指していた位置からどれだけずれるか。またそのときはじめの方向とどれだけの角をつくる方向に運動するか。
- [7] 空気抵抗が速さに比例する大きさ (kmV) を持つときの放物運動で、抵抗が小さいとして放物距離の近似式を求めよ、
- [8] 放物運動を行う物体に及ぼす空気の抵抗が $m\phi(V)$ (ただし、 ϕ は任意の関数)であるとき、速さ V、鉛直線と軌道の接線のつくる角 ψ の関係は

$$\frac{1}{V}\,\frac{dV}{d\psi} = -\frac{\psi(V)}{g\sin\psi} - \cot\psi$$

を積分することによって求められることを示せ.

- [9] 前の問題で $\phi(V) = mkV^2$ の場合どうなるかを論ぜよ.
- [10] 角振動数 ω_0 で単振動を行っている質点に、角振動数 $\omega_1,\;\omega_2$ の周期的な 2 つの力が作用するときこの質点はどのような運動を行うか
- [11] 上の問題で質点にT を周期とする周期的な力f(t) が働く時を考えよ. f(t) の平均値は0とする.

22.4 運動方程式の変換

◆ A ◆ 4 節問題

[1] 螺旋

 $x = a\cos\phi$, $y = a\sin\phi$, $z = k\phi$ (a, k は定数)

の接線, 主法線, 陪法線の方向を求めよ.

この螺旋に沿って上向きに一定の速さ V で昇る点の加速度を求めよ.

[2] 環面

$$x = (c + a\sin\theta)\cos\phi, \quad y = (c + a\sin\theta)\sin\phi, \quad z = a\cos\theta$$

の上を運動する点の子午線方向($\phi=$ 一定)で θ だけが増す方向),法線方向,方位角方向(ϕ だけが増す方向)の加速度成分を求めよ.

[3] (x, y) 面を運動する点の描く軌道が $r = a \sin n\phi$ (a, n) は定数)で与えられ、加速度 $\dot{\phi}$ が r^2 に反比例するとき、この点の加速度を求めよ、

第23章 力学Ⅱ

23.1 力学的エネルギー 面積の原理

◆ A ◆ 5 節問題

[1] 平面内を運動する質点に働く力の成分が質点の座標をx,yとして

$$X=axy, \quad Y=\frac{1}{2}ax^2$$

で与えられるとき、保存力かどうか調べよ、保存力ならば位置エネルギーはどうなるか、

[2] 一平面内を運動する質点に働く力の成分が、質点の座標を x, y として

$$X = axy, \quad Y = by^2$$

で与えられるとき、保存力かどうか調べよ、また、x 軸上の (r,0) で与えられる点 A から、y 軸上の (0,r) で与えられる点 C まで、円周 ABC に沿ってゆく場合と、弦 AB'C に沿ってゆく場合とで、この力の行う仕事を比較せよ。

- [3] 次の諸式を証明せよ.
 - (a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
 - (b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$
 - (c) $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = 0$
- [4] A, B, C がこの順に右手系 (一般に互いに直角でなくでよい) をつくっているとすれば

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$$

はA, B, C を稜(かど)とする六面体の体積であることを証明せよ.

[5] 1 つの単位ベクトルを n とすれば、任意のベクトル A は

$$A = (A \cdot n)n + n \times (A \times n)$$

と書くことができることを示せ.

- [6] 滑らかな水平板の上においてある質点に糸を結び付け、その糸を板にあけた穴 O に通しておく. 質点を, はじめ O のまわりにある角速度で運動させ、糸を引っ張って O と質点との距離を変えるとき、質点の角速度はどう変わっていくか.
- [7] 一平面内で

$$r = a(1 + c\cos\varphi) \qquad (0 < c < 1)$$

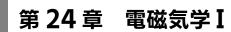
で与えられる軌道を描く質点に働く中心力はどんな力か.

23.2 単振り子の運動と惑星の運動

23.3 非慣性系に相対的な運動

23.4 質点系の運動量と角運動量

23.5 剛体のつりあいと運動



電磁気学に入る前に、この章で必要なベクトル解析の知識を確認する、詳しくはベクトル解析の章を見ていただきたい、

24.1 諸定義

◆ A ◆ ハミルトンの演算子

位置ベクトルを $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とする.以下で定義される微分演算子のベクトルをハミルトンの演算子といい,ナブラと読む.

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^{\top}$$
 (24.1)

ナブラの定義や逆三角形の 2 辺の太さが太いことから、 ∇ はベクトルの形をしていることは明らかである。勿論。 $\frac{\partial}{\partial x}$ だけでは成り立たず、 $\frac{\partial f}{\partial x}$ のように微分される関数がないといけない。では何故こんなものがあるのかというと、後の勾配、発散、回転の式を表すのに便利だからだ。これらは電磁気学で出てくる大切な概念である。

例えば、 ∇f と表せば、ベクトルのスカラー倍と見做すことができ

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^{\top} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}^{\top}$$

と、スカラー関数 f を x, y, z で偏微分したものをそれぞれの成分とするベクトルを表すことができる。尚、これは勾配の定義そのものである。

また、ベクトル関数 F を内積の形でかければ、

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^{\top} \cdot \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^{\top} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

となる. これは、発散の定義である.

外積の形でかければ

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^{\top} \times \begin{bmatrix} F_{x} & F_{y} & F_{z} \end{bmatrix}^{\top} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & F_{x} \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & F_{y} \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & F_{z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial F_{z}}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial F_{x}}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial F_{y}}{\partial x} \mathbf{k} - \frac{\partial F_{y}}{\partial z} \mathbf{i} - \frac{\partial F_{z}}{\partial x} \mathbf{j} - \frac{\partial F_{x}}{\partial y} \mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{\partial F_{z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{y}}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_{x}}{\partial z} - \frac{\partial F_{z}}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_{y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{x}}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{x}}{\partial z} - \frac{\partial F_{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial F_{y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{x}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

となる. これは、回転の定義である.

◆ B ◆ ラプラシアン (Laplacian)

以下で定義される微分演算子をラプラシアンという.

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z}$$
 (24.2)

24.2 ベクトル場の微分:勾配,発散,回転

◆ A ◆ 勾配(グラディエント)

スカラー場 $\varphi(x,y,z)$ が直交座標で定義されているとする。このとき、x についての偏微分を x 成分、y についての偏微分を y 成分、z についての偏微分を z 成分とするベクトル場を φ の勾配またはグラディエントといい、 $\operatorname{grad} \varphi$ や $\nabla \varphi$ で表す。

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]^{\top}$$
(24.3)

勾配はそれぞれの点において φ が最も増大する方向を指し示す。勾配の向きは等位面に垂直で、大きさはどれくらい増大しているかを表す。等位面の間隔が狭いとき、勾配が急峻になっているので、 $\nabla \varphi$ の大きさ(矢印の長さ)が大きく、間隔が広いとき、勾配が緩やかなので、 $\nabla \varphi$ の大きさは小さい。

《注》勾配は、入力をスカラー場として、ベクトル場を出力する.

◆ B ◆ 発散(ダイヴァージェンス)

ベクトル場 F(x, y, z) が直交座標で定義されているとする.このとき,F の x 成分 F_x を x で,y 成分 F_y を y で,z 成分 F_z を z で偏微分したあと.それらを足し合わせたものを F の発散またはダイヴァージェンスといい. $\operatorname{div} F$ や $\nabla \cdot F$ で表す.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$
 (24.4)

発散は、それぞれの点においてベクトル場 F の流入出を評価する。例えば、v(x, y, z) は点 (x, y, z) での流体の速度を示すとする。ある空間に 3 辺の長さが Δx , Δy , Δz の微小な直方体を考える。この直方体に流入する流体の量を $V_{\rm in}$, 流出する流体の量を $V_{\rm out}$ とするとき、 $V_{\rm out}-V_{\rm in}>0$ なら、流出量の方が多いので、この直方体の中に蛇口のようなものがあってそこから流体が「湧き出て」いることを表す。逆に $V_{\rm out}-V_{\rm in}<0$ なら、流出量の方が少ないので、この直方体の中に排水溝のようなものがあってそこに流体が「吸い込まれて」いることを表す。証明は略すが、この直方体の中から流れ出る流体は

$$V_{\text{out}} - V_{\text{in}} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z = (\text{div } \boldsymbol{v}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

で表すことができる。直方体の体積は $\Delta x \Delta y \Delta z$ なので,これで割ると ${\rm div}\, {\bf v}$ は単位時間における単位体積あたりでの直方体の中から流出した流体の体積を表す。 ${\rm div}\, {\bf v}>0$ のとき「湧き出し」, ${\rm div}\, {\bf v}<0$ のとき「吸い込む」。 ${\rm div}\, {\bf v}=0$ のときは流れ入った流体はそのまま流れ出る.

《注》発散は、入力をベクトル場として、スカラー場を出力する.

◆ C ◆ 回転 (ローテーション)

ベクトル場 F(x, y, z) が直交座標で定義されているとする。このとき、次のように定義されるものを F の回転またはローテーションといい、 ${\rm rot}\,F$ や $\nabla \times F$ で表す。

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & F_x \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & F_y \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$
(24.5)

回転は、それぞれの点においてベクトル場 F の回転の向きや強さを表している、 ${
m rot}\,F
eq 0$ のとき F が回転軸に対して渦巻いている、つまり回転する要素があるということになる。

《注》回転は、入力をベクトル場として、ベクトル場を出力する.

24.3 線積分,面積分,体積分

◆ A ◆ 線積分

曲線 $C: r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ に沿うスカラー場 $\varphi(r)$ の線積分は、s を曲線の長さとすると

$$\int_{C} \varphi \, \mathrm{d}s = \int_{C}^{\beta} \varphi \, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \, dt = \int_{C}^{\beta} \varphi \, \left| \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \tag{24.6}$$

また、ベクトル場 $m{A}(m{r})$ の線積分は、 $\mathrm{d}m{r} = egin{bmatrix} \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z \end{bmatrix}$ とすると

$$\int_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{0}^{\beta} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \tag{24.7}$$

24.4 クーロン力と電場

◆ A ◆ クーロンカ(静電気力)

クーロン力が起こる原因になるものを**電荷**という。電荷には正負があり、正の電荷をもつ代表的なものに陽子、負の電荷をもつ代表的なものに電子がある。電荷の量を**電気量**といい、qと表す。単位はCである。

1Cは1Aの電流を1秒間流した時に流れる電気量なので

$$1 C = 1 A \cdot s \tag{24.8}$$

である

陽子と電子の電気量は大きさが同じで向きが反対である. 陽子と電子の電荷の大きさを電気素量といい, eで表す.

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \,\mathrm{C}$$
 (24.9)

つまり、陽子の電気量は+e、電子の電気量は-eである.

電荷は陽子と陽子、電子と電子のように同符号であるとき、2 つの電荷の間に反発する力(斥力)が働く、また、陽子と電子のように異符号であるとき、2 つの電荷の間に引き合う力(引力)が働く、このような力をクーロン(Coulomb)力といい、以下の法則が成り立つ。

クーロンの法則

2 つの点電荷があり、それぞれの電気量を $Q,\ q$ とする. Q から q へ向かうベクトルを ${\boldsymbol r}$ とするとき、点電荷 q に働く クーロン力は

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{24.10}$$

である。 ε_0 は真空の誘電率である。また、青緑色はクーロン力の大きさ、水色はクーロン力の向きを表す。

クーロンカの大きさ

 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ は定数である。 ε_0 は真空の誘電率 1)で, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\approx 8.987552\times 10^9\,\mathrm{V}^2/\mathrm{N}$ である。この定数値はクーロンの法則が成り立つように辻褄合わせで決められた値であるのでそこまで深く考える必要はない。クーロン力は電気量に比例し,2 点間の距離 |r| の 2 乗に反比例する。

クーロンカの向き

Q と q が同符号の場合、q には引力が働くので向きは r と同じ向きになる。また、水色は向きのみを表すため、大きさが変わってはいけないので絶対値で割って大きさを 1 にする。

重ね合わせの原理

電荷がq, Q_1 , Q_2 , \cdots , Q_n と複数個あったとする。また, Q_1 がq に及ぼすクーロン力を F_1 , \cdots , Q_n がq に及ぼすクーロン力を F_n とするとき,q が受けるクーロン力はそれぞれのクーロン力の和で表すことができる(重ね合わせの原理).

クーロン力の重ね合わせの原理

 Q_i から q へ向かうベクトルを r_i とするとき、点電荷 q が受けるクーロン力は、

$$\mathbf{F} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{F}_i \tag{24.11}$$

$$= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=0}^n \frac{Q_i}{|\mathbf{r}_i|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|}$$
 (24.12)

例 点 $A_1(a, 0)$ に点電荷 Q, 点 $A_2(-a, 0)$ に点電荷 Q, 点 D(0, d) に点電荷 q がある. このとき、q にかかるクーロン力を求めよ.

¹⁾ 真空の誘電率についてはここでは触れない。そういうものだと認識してもよい。なお、真空の誘電率は、c を光の速さ、 μ_0 を真空の透磁率とすると $\varepsilon_0=\frac{1}{c^2\mu_0}$ で求められる。

$$\begin{split} \overrightarrow{\mathbf{A}_{1}} \overrightarrow{\mathbf{D}} &= \boldsymbol{r}_{1} = \begin{bmatrix} -a \\ d \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{\mathbf{A}_{2}} \overrightarrow{\mathbf{D}} &= \boldsymbol{r}_{2} = \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} \ \boldsymbol{\xi} \, \boldsymbol{\xi} \, \boldsymbol{\xi} \, . \quad \boldsymbol{\xi} \, \boldsymbol{\tau} \, \boldsymbol{\zeta} \\ &\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{1} + \boldsymbol{F}_{2} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{qQ}{|\boldsymbol{r}_{1}|^{2}} \frac{\boldsymbol{r}_{1}}{|\boldsymbol{r}_{1}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{qQ}{|\boldsymbol{r}_{2}|^{2}} \frac{\boldsymbol{r}_{2}}{|\boldsymbol{r}_{2}|^{2}} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{\boldsymbol{r}_{1}}{|\boldsymbol{r}_{1}|^{3}} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{\boldsymbol{r}_{2}}{|\boldsymbol{r}_{2}|^{3}} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{(\sqrt{a^{2} + d^{2}})^{3}} \begin{bmatrix} -a \\ d \end{bmatrix} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{(\sqrt{a^{2} + d^{2}})^{3}} \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{(\sqrt{a^{2} + d^{2}})^{3}} \left(\begin{bmatrix} -a \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} \right) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{(\sqrt{a^{2} + d^{2}})^{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \end{split}$$

◆B◆ 電場(1)

クーロン力は、何かの物体に接触していなくても発生する力である。これからある点電荷 A があったとき、その点電荷 A が周りの空間に影響を及ぼしていて、その空間の中に点電荷 B が置かれたときに A による影響を受けてクーロン力が働くのではないかと考えることにする。そのような影響を表す量を電場といい、E で表す。

ここで、クーロンの法則による表し方を変えてみる(一先ず、クーロン力の大きさ(スカラー)だけを考える)。

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$= Q_2 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \right)$$
(24.13)

式 (24.13) をこういう見方で考える.

- [1] Q_2 の存在は置いといて、点電荷 Q_1 があることによって Q_1 が周りの空間にある影響 E を作り出す(本来はベクトル E). これは式 (24.13) の青緑色の部分に該当する.
- [2] Q_2 は、E を感じてクーロン力を受ける.

電場(1)

電荷に力を作用させる電気的な空間(このような空間のことを場と呼ぶ.特に、場の値がベクトルであるときベクトル場という).

では、このことをベクトルでまとめる.

電場 (2)

原点にある電荷 Q_1 があって、この電荷が周りの空間のある 1 点 $\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$ に

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}|^2} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$
(24.14)

だけの電場を作っていると考える.そして,その電場に入った電荷 Q_2 は,電場から

$$F = Q_2 E (24.15)$$

と表せる力を受ける。電場 E の単位は N/C である。よって、電場は「1C の電荷に働くクーロン力」ということもできる。

電場の向きはrに平行である. $Q_2 < 0$ であれば、rと反対向きになる.

◆ C ◆ 電荷の分布

今までは点電荷について進めてきたが、実際電荷は空間にどのように分布しているか考える.

点電荷は、空間のある 1 点に存在する電荷で、大きさをもたない。これでは現実味に欠けるので、空間的な広がりを与えていく、まず、点電荷がある 1 方向に広がって分布する線電荷を考える。このとき、単位長さ(MKS 単位系では 1 m)あたりの電気量を線電荷密度といい、 λ で表す。単位は C/m である。経路 C 上に存在する電荷の総量、つまり経路 C にある総電荷 Q は、以下のように線積分で求めることができる。

$$Q = \int_{C} \lambda \, \mathrm{d}l \tag{24.16}$$

しかし、この線電荷は 1 方向には広がりを持つが、太さを持たない線であることが条件である。これではまだ非現実的なので、もう 1 方向に広がって分布する面電荷を考える。面 H 上の面電荷について、単位面積(MKS 単位系では $1 \,\mathrm{m}^2$)あたりの電気量

を面電荷密度といい, σ で表す.単位は C/m^2 である.面 H 上に存在する電荷の総量(総電荷)Q は,以下のように面積分で求めることができる.

$$Q = \int_{H} \sigma \, \mathrm{d}S \tag{24.17}$$

しかし、これも面に厚みがないものとするので、これでも現実的な電荷分布とは言えない。更にもう 1 方向に広がって分布する電荷を考える。これは風船のような空間の体積領域 V の内部に電荷が分布していると考える。このとき、単位体積(MKS 単位系では $1\,\mathrm{m}^3$)あたりの電気量を電荷密度といい、 ρ で表す。単位は $\mathrm{C/m}^3$ である。体積領域 V に存在する電荷の総量(総電荷)Qは、以下のように体積分で求めることができる。

$$Q = \int_{V} \rho \, \mathrm{d}V \tag{24.18}$$

◆ D ◆ 電場(2)

電荷が先程述べた通り 3次元的に分布しているとする。この電荷が分布している体積領域 V の外側に点(点の位置ベクトルを r とする)があるとして,その点に作られる電場を表現する。重ね合わせの原理から,外側の点で作られる電場は,体積領域 V の中にあるすべての電荷からの影響の総和である.

まず、体積領域 V の中の微小体積 $\mathrm{d}V$ を考え、 $\mathrm{d}V$ の中にある電荷が作る微小電場 $\mathrm{d}E$ を求める。 $\mathrm{d}V$ の中に存在する電荷の総量は式 (24.18) より、 $\rho\,\mathrm{d}V$ である。さらに、 $\mathrm{d}V$ が存在する場所の位置ベクトルを r' とすると式 (24.14) より $\mathrm{d}E$ は次のように表される。

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
(24.19)

r-r' は、微小体積(位置ベクトルr')から体積領域の外側の点(位置ベクトルr)へ向かうベクトルである.

体積領域 V の中の微小体積 $\mathrm{d}V$ の中にある電荷が作る電場を求めたので、V の中にある電荷が作る電場は領域 V で体積分することによって求めることができる.

電場(3)-電場の一般的な表現

$$E(r) = \int_{V} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(r')dV}{|r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|} dV$$
(24.20)

第25章 電磁気学 II

第 26 章 電磁気学 III

第 27 章 コンピュータアーキテクチャ

27.1 基本アーキテクチャ

◆ A ◆ 基本ハードウェア構成

コンピュータは.

- [1] プロセッサ (**CPU**)
- [**2**] メインメモリ
- [3] 入出力装置(外部装置で、キーボードとディスプレイ)

で構成させる. [1], [2] を纏めて内部装置という.

27.2 内部装置のアーキテクチャ

◆ A ◆ 内部装置のハードウェア構成

コンピュータの内部装置は、プロセッサとメインメモリの 2 つの基本ハードウェア装置を内部バスで接続して構成している。このうち、プロセッサは以下の3つの主要なハードウェア装置やハードウェア機構で構成する。

- [1] 制御機構
- [2] 演算機構
- [3] レジスタ
 - [2] 演算機構と [3] レジスタはデータバスでデータを送受する.

◆ B ◆ プロセッサアーキテクチャ① 制御機構

[1] 制御機構

制御機構は、次の2つの機能を実現するハードウェア機構である.

- [a] 順序制御機構 実行するマシン命令のメモリアドレスを決定する. 即ちマシン命令の実行順序を決める.
- [b] 制御信号の生成 プロセッサ更には内部装置全体の各所に、それぞれを制御するために必要なハードウェア信号を供給する.

[2] 制御方式

命令コードから制御信号を生成することを(命令)デコードという. 制御信号の生成方法は2通りある.

[1] 配線論理制御方式(ワイヤードロジック) 論理回路でデコーダをつくる。ハードウェア的制御方式なので、動作速度は速いが、変更はできない。

単純な機能で簡潔な制御で済むマシン命令に対して適用される.

[2] マイクロプログラム制御方式 命令デコーダをプログラムで表現してデコーダをつくる. ソフトウェア的制御方式なので、動作速度は遅いが、変更ができる. このマイクロプログラムは、制御メモリという専用メモリに格納してある. 高機能で複雑な制御が必要な場合に用いられる.

現代のコンピュータはこれらを併用している.

[3] 割り込み

不測の事態や事象(割り込み要因)が生じたときに割り込み機構が発動すると、実行中のプログラム(マシン命令列)を一時中断して、割り込み処理プログラムへ制御フローが分岐する。

[4] 割り込みの必要性

- [1] 不測の事態や事象の対処
- [2] 異常や例外の検知・対処
- [3] 「ユーザプログラムから OS への通信」機能の実現
- [4] 「ハードウェア装置から OS への通信」機能の実現
- [5] ハードウェア同士の同期の実現
- [6] 通信の競合の実現

[5] 割り込み要因

割り込みを引き起こす具体的な原因や事象を「割り込み要因の発生場所」で分類する.

- [A] 内部割り込み 要因の発生場所が内部装置特にプロセッサにある割り込み、マシン命令の実行するタイミングに合わせて発生し、マシン命令の実行というソフトウェア的要因に依るので、ソフトウェア割り込みともいう。割り込みの必要性の[3] の手段.
 - (1) 命令実行例外
 - メモリアクセス例外
 - (i) 指定したメモリアドレスにマシン命令やデータがないとき
 - (ii) ページフォールト…プログラムを仮想メモリ $^{1)}$ に割り当てていてメインメモリにはまだ読み込んでいない 状態で、プログラムにアクセスしようとしたとき
 - (iii) メモリ保護違反…アクセスする権限がないメインメモリへアクセスしようとしたとき
 - 不正命令
 - (i) 命令セットにない (=定義されていない) 命令コードであるとき
 - (ii) データなのに命令として実行しようとしたとき
 - 不正オペランド オペランドで指定するアドレスにデータがないとき
 - 演算例外
 - (i) オーバーフロー $^{2)}$ を起こしたとき
 - (ii) **0** 除算…0 を除数とする除算を行ったとき
 - (2) SVC(スーパーバイザコール) OS を呼び出す SVC 命令を実行したとき. SVC 命令は以下の通り:
 - 入出力命令…ディスプレイやプリンタなど
 - ブレークポイント命令…プログラム実行の中断点(ブレークポイント 3)を OS に通知する.
- [B] 外部割り込み 要因の発生場所が外部装置特に入出力装置にある割り込み. マシン命令の実行とは無関係に発生し, 外部装置というハードウェア的要因に依るので, ハードウェア割り込みともいう. 割り込みの必要性の [4] の手段.
 - (1) 入出力割り込み 入出力装置・通信装置から OS に次の状態を知らせる割り込み
 - (i) ユーザが入力装置によってデータを正常に入力した
 - (ii) 出力装置の操作が正常に完了した
 - (iii) 入出力装置に異常があった
 - (iv) 通信装置を使って他のコンピュータが通信を要求した
 - (2) ハードウェア障害 ハードウェア装置から以下のような「障害発生」の通知
 - (i) 電源異常
 - (ii) メモリからの読み出しエラー
 - (iii) 温度異常
 - (3) リセット ユーザが電源ボタンを押したとき

複数の割り込みが発生した時,優先度を付与する.

【優先度】(高→低)

- ハードウェア障害
- リセット
- 命令実行例外
 - ページフォールト
 - メモリ保護違反
 - 演算例外

¹⁾ メインメモリ+ファイル装置で作った仮装的なメモリ.

²⁾ 演算結果が演算器そのものやレジスタの最上位ビットから溢れる場合.

³⁾ デバグ (プログラムの誤りを発見・削除する操作) 時にプログラム実行を一時中断する起点、プログラムをトレース (実行履歴を取る) する起点、

- 入出力割り込み
 - ファイル装置 (高速)
 - キーボード・プリンタ
- SVC
- ブレークポイント命令

[6] 割り込み処理

順序制御機構と OS 機能とが機能分担して処理する.

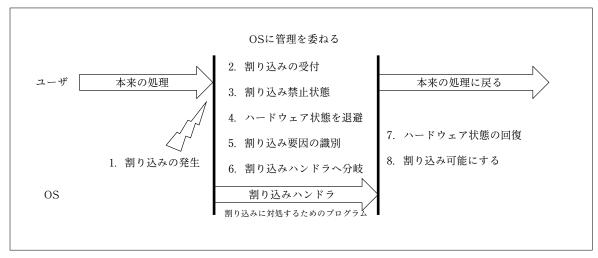


図 27.1: 割り込み処理の流れ

- 1. 割り込みの発生…27.2.B 節の [5] で紹介した要因で割り込みが発生.
- 2. 割り込みの受付…ハードウェア機構が割り込みを受付→割り込み処理開始.
- 3. 割り込み禁止状態…他の割り込みを受け付けないようにする.
- 4. ハードウェア状態を退避…ハードウェア機構によって今までのプログラムが生成していたハードウェア状態をプロセッサ内の退避領域へ退避.
- 5. 割り込み要因の識別…割り込み要因は何かを識別.
- 6. 割り込みハンドラへ分岐…割り込み要因ごとの割り込み処理プログラムへ分岐.
- 7. ハードウェア状態の回復…退避領域から今までのプログラムが生成していたハードウェア状態を回復.
- 8. 割り込み可能にする…他の割り込みを許可する.

[7] 命令パイプライン処理

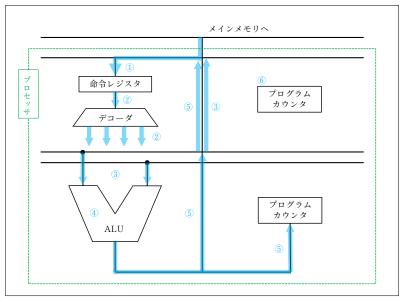


図 27.2: 命令実行サイクルの流れ

命令実行サイクルは以下の通り.

- [1] 命令取り出し(I)
- [2] 命令デコード (D)
- [**3**] オペランド取り出し(O)
- [4] 実行(E)
- [5] 結果格納(W)
- [6] 次アドレス決定

上の命令実行サイクルの1つ1つをステージという。この1連のマシン命令をプロセッサに投入して処理するとき,高速化するため命令パイプライン処理をする。命令パイプライン処理の具体的な流れは以下の通り.

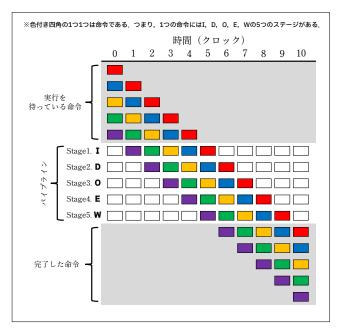


図 27.3: 命令パイプライン処理の流れ

表 27.1: 命令パイプライン処理の流れ

時間(クロック)	実行内容
0	5つ (赤、青、黄、緑、紫) の命令が実行されるのを待っている。
1	紫色の命令を取り出す.
2	紫色の命令をデコードする.
	緑色の命令を取り出す.
3	紫色の命令のオペランドを取り出す.
	緑色の命令をデコードする.
	黄色の命令を取り出す.
4	紫色の命令を実行する (実際の命令処理を行う).
	緑色の命令のオペランドを取り出す.
	黄色の命令をデコードする.
	青色の命令を取り出す.
5	紫色の命令の結果を(レジスタなどに)格納する.
	緑色の命令を実行する.
	黄色の命令のオペランドを取り出す.
	青色の命令をデコードする.
	赤色の命令を取り出す.
6	紫色の命令は完了した.
	緑色の命令の結果を格納する.
	黄色の命令を実行する.
	青色の命令のオペランドを取り出す.
	赤色の命令をデコードする.
7	緑色の命令は完了した。
	黄色の命令の結果を格納する.
	青色の命令を実行する.
	赤色の命令のオペランドを取り出す.
8	黄色の命令は完了した.
	青色の命令の結果を格納する.
	赤色の命令を実行する.
9	青色の命令は完了した.
	赤色の命令の結果を格納する.
10	赤色の命令は完了した=全命令を実行した。

このように、5つのマシン命令が完了するまでに10サイクルの時間が必要になる.

Tip [例題]

上の図のように 5 ステージで構成する命令実行サイクルを持つ命令パイプライン処理機構がある。ただし、1 ステージ時間は 10 ナノ秒とする。即ち、1 命令実行サイクルは 50 ナノ秒要する。このパイプライン機構に 100,000 個のマシン命令を投入すると、全部のマシン命令が完了するまでにはどれだけ時間がかかるか求めなさい。また、命令パイプライン処理機構がない場合と比較しなさい。

パイプライン処理をしない場合,1 つの命令につき 50 ナノ秒なので,100,000 個の命令では $50 \times 100000 = 5000000$ ナノ 秒,つまり,5 ミリ秒かかる.

パイプライン処理をする場合,まず、1 個目の命令が Stage1. に入るまでから 100,000 個目の命令が Stage1. に入るまで 10 ナノ秒ずつずれていくわけなので、10 ナノ秒 $\times 100000 = 1000000$ ナノ秒 掛かる。そのあと、100,000 個目の命令は残り 4 つのステージが残っているわけだから、10 ナノ秒 $\times 4 = 40$ ナノ秒.

つまり、合計 1000000 ナノ秒 +40 ナノ秒 =1000040 ナノ秒 =1.00004 ミリ秒 ≈ 1 ミリ秒 掛かることになる。つまり、しない場合の約 5 分の 1 で完了できる。

この例題は上の図で、「時間(クロック)」が「時間(ナノ秒)」となり、「 $0, 10, 20, \cdots, 1000040$ 」と置き換え、100,000 色の四角(命令)があると考えた場合である。

このように、命令実行サイクルをs個のステージで構成する命令パイプライン処理機構にI 個のマシン命令を投入すると、処理時間はIの値にかかわらず、パイプライン処理をしない場合の約s分の1 に短縮できる。

※例題の 5 ステージに対し 100,000 個の命令のように,ステージ数に対し命令数が十分大きくではならない($I\gg s$).でないと処理時間はそんなに変わらない.

◆ C ◆ プロセッサアーキテクチャ② 演算機構

[1] 数の表現

表 27.2: 数の表現

整数	固定小数点数表現
	小数点は最下位ビットの右に固定.
実数	浮動小数点数表現
	小数点の位置を変えて任意の精度で表現する.小数点も"0"か"1"で表現す
	る.問題として,ハードウェアは有限なので循環小数や無理数の丸め誤差が
	生れる.

[2] 演算機構とデータバス

マシン命令の転送とデータの転送の両方で共用する内部バスに対し、データ専転送だけに使用する演算機構 – レジスタ間の転送路をデータバスという.

演算器 (ALU) は、データバスに並列接続する.

[3] 加算器

四則演算は加算を基にしてできる.

- 減算 加える数を負の数にする.
- 乗算 加算の繰り返し: $a \times b$ の場合、0 を最初の加えられる数にして、a を b 回繰り返し加算する.
- 除算 減算の繰り返し: $a \div b$ の場合,a を最初の引かれる数にして,b を繰り返し引いたとき,b 未満になるまでに何回引いたかが商(計算結果)となる.

加算器で、1 個下のビットからの繰り上げも考慮したものを全加算器という。足される数を X,足す数を Y,1 個下のビットからの繰り上げを $C_{\rm in}$,当該ビットの和を S^4 ,1 個上のビットへの繰り上げを $C_{\rm out}$ とすると,真理値表は以下の通り.

⁴⁾ 例えば、2 進数の $(1)_2 + (1)_2$ をすると、 $(10)_2$ となる。このとき、S は 0、 $C_{\rm out}$ は 1 である。

表 27.3: 全加算器の真理値表

\overline{X}	Y	C_{in}	S	$C_{ m out}$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

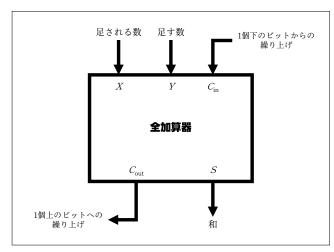


図 27.4: 全加算器のブロック図