第 1 章　微分積分Ⅱ – ちょっと復習

1.1　2 重積分の計算 (1) – 累次積分（逐次積分）

累次積分 (1)

$D = \{(x,\ y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ とする．

$$\iint_D f(x,\ y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,\ y)\,dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,\ y)\,dx \right\} dy \quad (1.1)$$

第 2 項では，先に y で積分してから x で積分している．第 3 項では先に x で積分してから y で積分している．x から先に計算するか y から先に計算するかで計算量が大きく変わることがある．

範囲に関数が含まれている場合は変数を含んでいる方を先に積分する．

累次積分 (2)

(1)　$D = \{(x,\ y) \mid a \leq x \leq b,\ \boxed{\varphi_1(x)} \leq y \leq \boxed{\varphi_2(x)}\}$ とする．

$$\iint_D f(x,\ y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\boxed{\varphi_1(x)}}^{\boxed{\varphi_2(x)}} f(x,\ y)\,dy \right\} dx \qquad (1.2)$$

(2)　$D = \{(x,\ y) \mid \boxed{\psi_1(y)} \leq x \leq \boxed{\psi_2(y)},\ c \leq y \leq d\}$ とする．

$$\iint_D f(x,\ y)\,dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\boxed{\psi_1(y)}}^{\boxed{\psi_2(y)}} f(x,\ y)\,dx \right\} dy \qquad (1.3)$$

1.2　2 重積分の計算 (2) – 積分順序の交換

累次積分 (2) のように，範囲に関数（x や y の式）が含まれている場合は先にそちらを計算しなければならない．しかし，先に計算しなければいけないのにその積分が難しいことがある．そのときは**積分順序を交換する**ことで，積分できる

場合がある.

関数を含む範囲が $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ のように y が x の関数で表されているときは，$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$ のように x が y の関数で表されるようにする．殆どの場合 $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ の逆関数をそれぞれ求めれば良い．但し，大小関係が変わることがあるので積分領域 D を図示した方が良い.

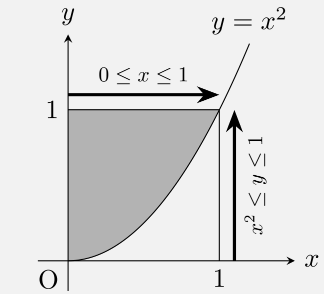
Tip［例題 (1)］

次の 2 重積分を計算せよ.

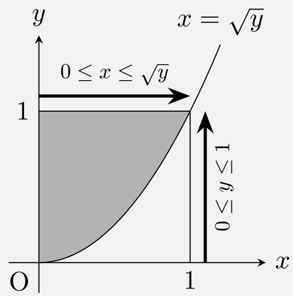
$$\iint_D xe^{y^2}\,dxdy \qquad D = \{(x,\ y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}$$

---

y の範囲に関数が含まれているので，先に y から積分しなければならなが，$\displaystyle\int e^{y^2}\,dy$ は計算することが出来ない．但し，$\displaystyle\int x\,dx$ は積分できるので x から積分したい．そこで，積分順序を交換して x から積分できるようにする．D を図示すると左図のようになる．これは，x の範囲を定数で固定したとき，y の範囲は x 座標によって変わるので関数で表されている.



x の範囲を定数にするとき
（y の範囲を関数にする）



y の範囲を定数にするとき
（x の範囲を関数にする）

これを x の範囲が関数で表されるようにしよう．まず，グラフを $x =$ の形にしないといけないので逆関数を求めると

$$x = \sqrt{y}$$

y の範囲を固定する．領域の y 座標は 0 以上 1 以下にあるので　$0 \leq y \leq 1$

x 座標は 0 以上 $\sqrt{y}$ 以下にあるので　$0 \leq x \leq \sqrt{y}$

よって，

$$\iint_D xe^{y^2}\,dxdy \qquad D=\{(x,\ y)\mid 0\leq x\leq\sqrt{y},\ 0\leq y\leq 1\}$$

x から積分して

$$\text{与式}=\int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}\,dx\right\}dy \overset{\substack{x\text{ で積分するとき }e^{y^2}\text{ は定数扱い}\\ \downarrow}}{=} \int_0^1 e^{y^2}\left\{\int_0^{\sqrt{y}} x\,dx\right\}dy$$

$$=\int_0^1 e^{y^2}\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}\right\}dy=\int_0^1 e^{y^2}\left\{\frac{1}{2}y\right\}dy$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}ye^{y^2}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 ye^{y^2}\,dy$$

$$\underset{\frac{du}{dy}=2y}{\overset{u=y^2}{=\!=\!=}}\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{2}\frac{du}{dy}e^u\,dy=\frac{1}{4}\int_0^1 e^u\,du=\frac{1}{4}\Big[e^u\Big]_{u=0}^{u=1}=\frac{1}{4}(e-1)$$

1.3 変数変換

置換積分の 2 変数版である．ここでは，行列式を通常 $|A|$ で表すところを絶対値と混同するのを避けるため $\det A$ と表している．

変数変換

$x=\varphi(u,\ v),\ y=\psi(u,\ v)$ について

$$\iint_D f(x,\ y)\,dxdy=\iint_{D'} f(\varphi,\ \psi)\overset{\substack{\text{行列式の絶対値}\\ \downarrow}}{\left|\det\begin{bmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{bmatrix}\right|}\,dudv \tag{1.4}$$

$\det\begin{bmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{bmatrix}$ を**ヤコビアン**といい，$\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$ や $J(u,\ v)$ で表す．また，D' は D を $u,\ v$ で表しなおした領域である．

領域 D が

$$D=\{(x,\ y)\mid a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\} \tag{1.5}$$

の形ではないとき，2 重積分を求めることが出来ない．例えば

$$D = \{(x,\ y) \mid 0 \le y + 2x \le 2,\ 0 \le y - 2x \le 2\} \tag{1.6}$$

などである．このようなときは

$$D' = \{(u,\ v) \mid a' \le u \le b',\ c' \le v \le d'\} \tag{1.7}$$

の形にすることで解くことが出来る．例で言うと $u = y + 2x,\ v = y - 2x$ と置けばいい.

Tip ［例題 (2)］

次の 2 重積分を計算せよ.

$$\iint_D (x - 2y)e^{x+y}\,dxdy \qquad D = \{(x,\ y) \mid 1 \le x - 2y \le 3,\ 0 \le x + y \le 1\}$$

このままだと計算出来ないので，変数変換を行う．$u = x - 2y,\ v = x + y$ と置くと領域は

$$D' = \{(u,\ v) \mid 1 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 1\}$$

と表される．また，$x,\ y$ について解くと

$$x = \frac{u + 2v}{3}, \quad y = \frac{v - u}{3}$$

なので，ヤコビアンは

$$\det\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

よって

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \iint_{D'} u\,e^v \left|\frac{1}{3}\right| dudv \\ &= \frac{1}{3}\int_1^3 \left\{\int_0^1 u\,e^v\,dv\right\}du \overset{\text{被積分関数が } u \text{ の関数と } v \text{ の関数の積なので分離できる}}{=} \frac{1}{3}\left(\int_1^3 u\,du\right)\left(\int_0^1 e^v\,dv\right) \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^3\left[e^v\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot(e-1) = \frac{4}{3}(e-1) \end{aligned}$$

第 2 章　微分積分 II – 広義積分

例えば，D が原点を中心とする円の場合，原点 (0, 0) では $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は定義出来ない．このような関数の積分をする方法を学ぶ．また，領域が閉じているのではなく無限に広がっている場合も考えることが出来る．

2.1　領域に関数の値の定義されない点が含まれている場合

領域 D を

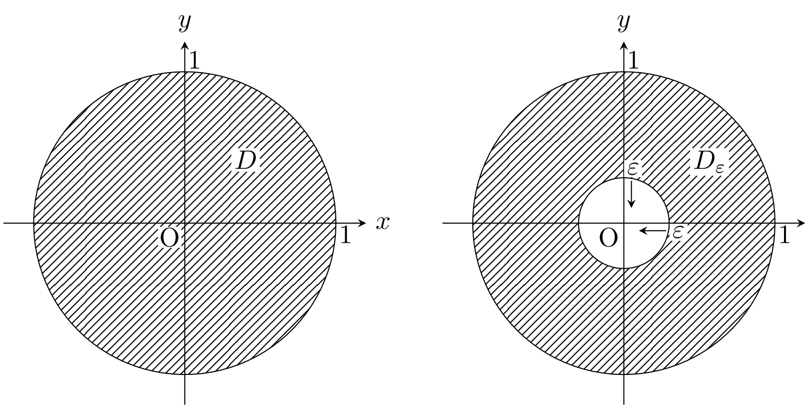
$$D = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \tag{2.1}$$

とする（下図左）．このとき，$\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ は点 $(0,\ 0)$ では定義されない（**特異点**という）ので，積分することが出来ない．ここで

$$D_\varepsilon = \{(x,\ y) \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \tag{2.2}$$

とする（下図右）．そして，$\displaystyle\iint_{D_\varepsilon} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算して $\varepsilon \to 0$ の極限値をとれば，D_ε は限りなく D に近づくので元の積分を求めることが出来る．つまり

$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{D_\varepsilon} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy \tag{2.3}$$



2.2 領域が無限に広がっている場合

領域 D を

$$D = \{(x,\ y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\} \tag{2.4}$$

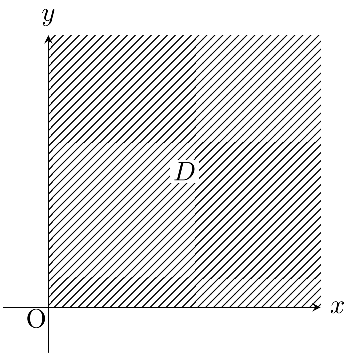
として（下図左）$\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を考える．

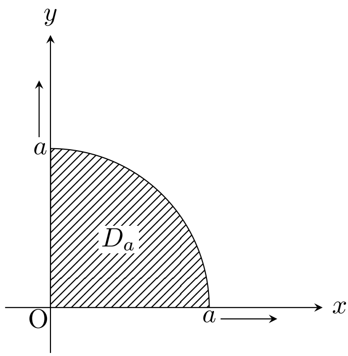
このとき，まず

$$D_a = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\} \tag{2.5}$$

として（下図右）．領域を適当に制限する．そして，$\displaystyle\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を計算して $a \to \infty$ の極限値をとれば，D_a は限りなく無限に広がるので元の積分を求めることが出来る．つまり

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \tag{2.6}$$





第 3 章　微分積分 II － 2 重積分のいろいろな応用

公式を覚えるだけ.

3.1　曲面積

D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z = f(x,\ y)$ の D に対応する部分の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy \tag{3.1}$$

3.2　平均

D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z = f(x,\ y)$ の D に於ける**平均**の高さ h は

$$h = \frac{\displaystyle\iint_D f(x,\ y)\, dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy} \tag{3.2}$$

←領域 D の面積

3.3　重心

D を xy 平面上の領域とするとき，D の**重心** $\mathrm{G}(\overline{x},\ \overline{y})$ は

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x\, dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy}, \quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_D y\, dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy} \tag{3.3}$$

第 4 章　微分積分 II – 1 階微分方程式

ここでは，独立変数を t，従属変数を x として，関数を $x = f(t)$ のように表す．

微分方程式を解くとは与えられた微分方程式を満たす未知関数 $x = f(t)$ を求めることである．

一般的に，n 階微分方程式の解は n 個の任意定数を含む．このような任意定数を含んでいる解を**一般解**という．対し，任意定数がある特定の値を取ったときの解を**特殊解**という．また，任意定数にどんな値を代入しても得られない解を**特異解**という．

Tip［例］

次の 1 階微分方程式，2 階微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + 2tx = e^{-t^2} \qquad\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

の一般解はそれぞれ

$$x = (t + C)e^{-t^2} \qquad\qquad x = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

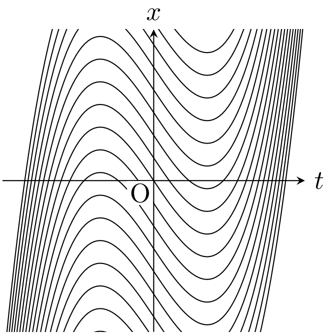
但し，C, C_1，C_2 は任意定数.

また，それぞれの初期条件が「$t = 0$ のとき $x = 0$」,「$t = 0$ のとき $x = 1$, $\dfrac{dx}{dt} = 3$」のときの特殊解は，$C = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ なので

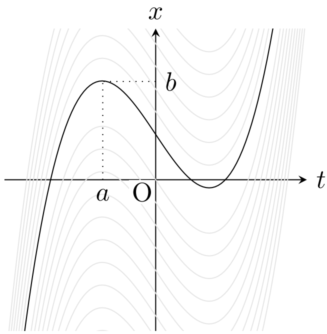
$$x = te^{-t^2} \qquad\qquad x = e^{-t}(\cos 2t + 2 \sin 2t)$$

普通，特殊解を求めるとき C の値は「$t = 0$ のとき $x = 1$」のように条件から導きだす．このような条件を**初期条件**という．

次の図のように，微分方程式の解が表す曲線を**解曲線**という．一般解の解曲線は任意定数を含むため無数にある．初期条件を満たす特殊解は定数 C の値が一意に定まるため，1 つの解曲線が定まる．



一般解（C は任意定数）
$x = f(t) + C$



初期条件「$t = a$ のとき $x = b$」を
満たす $x = f(t) + C$ の特殊解

4.1 変数分離形

1 階微分方程式で，

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \tag{4.1}$$

のように，導関数が x の関数と t の関数の積に分けられる微分方程式を**変数分離形**の微分方程式という．

変数分離形の微分方程式の解き方

変数分離形の微分方程式は以下の手順で解く．

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \tag{4.2}$$

(1) 左辺を x だけの式，右辺を t だけの式にする．

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)\,dt \tag{4.3}$$

(2) 両辺の不定積分をとる．

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\,dt \tag{4.4}$$

Tip ［詳しく解説］

【例題】次の 1 階微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{t}$$

の一般解を求めよ．

通常，x が 0 になるときとならないときで場合分けしなければならないが，微分方程式の解を求めるときは複雑になる為，場合分けせずに計算を進める．

左辺を x だけの式，右辺を t だけの式にすると

$$\frac{dx}{x} = \frac{2}{t}dt$$

両辺積分して

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2}{t}dt$$

$$\log|x| = 2\log|t| + C \quad （C \text{ は任意定数}）$$

↑両辺積分するが，積分定数は右辺に纏めておく

これより，指数と対数の関係から

指数法則 $e^{a+b} = e^a e^b$

$$|x| = e^{2\log|t|+C} = e^C e^{2\log|t|} = e^C|t|^2 = e^C t^2$$

$e^{\log a} = a$

従って，絶対値を外して

$$x = \pm e^C t^2$$

ここで，$\pm e^C = C_1$ とおくと

$$x = C_1 t^2 \quad （C_1 \text{ は任意定数}）$$

問題 4.1. 次の 1 階微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = x$

(2) $x\dfrac{dx}{dt} = -t$

4.2 同次形

次の形の 1 階微分方程式を**同次形**の微分方程式という．

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right) \tag{4.5}$$

導関数が $\dfrac{x}{t}$ の式で表せることが出来れば $u = \dfrac{x}{t}$ とおくことで変数分離形で解くことが出来る．

Tip ［例題］

$t^2 \dfrac{dx}{dt} = x^2$ の一般解を求めよ．

両辺 t^2 で割って

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{x}{t}\right)^2$$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと，$x = tu$

$$\begin{aligned}
\frac{d(tu)}{dt} = u^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{dt}{dt}u + t\frac{du}{dt} = u^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad t\frac{du}{dt} = u^2 - u \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{du}{u(u-1)} = \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

両辺の不定積分をとって

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u(u-1)} = \int \frac{dt}{t} \quad &\Longleftrightarrow \quad \int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{dt}{t} \\
&\Longleftrightarrow \quad \log|u-1| - \log|u| = \log|t| + C \\
&\Longleftrightarrow \quad \log\left|\frac{u-1}{u}\right| = \log|t| + C \\
&\Longleftrightarrow \quad \left|\frac{u-1}{u}\right| = e^{\log|t|+C} = e^{\log|t|}e^C = e^C|t| \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{u-1}{u} = \pm e^C t
\end{aligned}$$

ここで，$\pm e^C = C_1$ とおくと

$$\begin{aligned}
\frac{u-1}{u} = C_1 t \quad &\Longleftrightarrow \quad u = \frac{1}{1 - C_1 t} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x}{t} = \frac{1}{1 - C_1 t}
\end{aligned}$$

$$\iff \quad x = \frac{t}{1 - C_1 t} \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

4.3 1 階線形微分方程式

$p(t)$, $q(t)$ が t の関数のとき

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0 \tag{4.6}$$

の形の微分方程式を**斉次 1 階線形微分方程式**という.

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t) \tag{4.7}$$

の形の微分方程式を**非斉次 1 階線形微分方程式**という.

1 階線形微分方程式の解き方 1（定数変化法）

非斉次 1 階線形微分方程式は以下の手順で解く.

$$\boxed{\frac{dx}{dt}} + p(t)x = q(t) \tag{4.8}$$

(1)　$q(t) = 0$ とした斉次微分方程式を解く. →変数分離形

$$x = Ce^{-\int p(t)\,dt} \tag{4.9}$$

(2)　**(1)** の解の任意定数 C を t の関数 $C(t)$ とおいて, (4.8) に代入する.

$$x = C(t)e^{-\int p(t)\,dt} \tag{4.10}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(C(t)e^{-\int p(t)\,dt}\right)} + p(t) \cdot C(t)e^{-\int p(t)\,dt} = q(t) \tag{4.11}$$

(3)　計算して $C(t)$ を求める.

$$\boxed{\frac{dC(t)}{dt}e^{-\int p(t)\,dt} - C(t)p(t)e^{-\int p(t)\,dt}} + p(t)C(t)e^{-\int p(t)\,dt} = q(t) \tag{4.12}$$

$$\frac{dC(t)}{dt}e^{-\int p(t)\,dt} = q(t) \tag{4.13}$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = q(t)e^{\int p(t)\,dt} \tag{4.14}$$

$$C(t) = \int q(t)e^{\int p(t)\,dt} + C \tag{4.15}$$

(4) (4.10) に代入する.

$$x = \left(\int q(t)e^{\int p(t)\,dt} + C\right)e^{-\int p(t)\,dt} \quad (C \text{ は任意定数}) \tag{4.16}$$

非斉次 1 階線形微分方程式は，もう 1 つの解き方がある．次の微分方程式を解くことを考える.

$$\frac{dx}{dt} + x = e^t \quad \Longleftrightarrow \quad x' + x = e^t \tag{4.17}$$

左辺が何かの導関数の形になれば以下の様に両辺積分するだけで求められる.

$$(\square)' = (\text{何かの関数}) \tag{4.18}$$

$$\square = \int (\text{何かの関数}) \tag{4.19}$$

(4.17) の左辺をよく見てみよう．関数 e^t をかけてみると

$$e^t\frac{dx}{dt} + xe^t = e^te^t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d(xe^t)}{dt} = e^{2t}$$

(4.18) の形になったので，両辺 t で積分すれば

$$xe^t = \frac{1}{2}e^{2t} + C \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}e^t + Ce^{-t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

e^t の肩にある t は 1 の原始関数の 1 つである．つまり，(4.8) で，$e^{\int p(t)\,dt}$ をかければ (4.18) の形になることが分かる．$e^{\int p(t)\,dt}$ を**積分因子**という.

1 階線形微分方程式の解き方 2（積分因子）

非斉次 1 階線形微分方程式は以下の手順で解く.

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t) \tag{4.20}$$

(1) 両辺に積分因子 $e^{\int p(t)\,dt}$ をかける.

$$e^{\int p(t)\,dt}\frac{dx}{dt} + p(t)e^{\int p(t)\,dt}x = q(t)e^{\int p(t)\,dt} \tag{4.21}$$

(2)　左辺を導関数の形に整理する．

$$\frac{d(xe^{\int p(t)\,dt})}{dt} = q(t)e^{\int p(t)\,dt} \tag{4.22}$$

(3)　両辺の不定積分をとる．

$$\int \frac{d(xe^{\int p(t)\,dt})}{dt} = \int q(t)e^{\int p(t)\,dt} \tag{4.23}$$

$$xe^{\int p(t)\,dt} = \int q(t)e^{\int p(t)\,dt} \tag{4.24}$$

$$x = \left(\int q(t)e^{\int p(t)\,dt}\right)e^{-\int p(t)\,dt} \tag{4.25}$$

問題 4.2. 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1)　$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{t}x = 4t^2 + 1$　　(2)　$\dfrac{dx}{dt}\cos t + x\sin t = 1$

問題 4.3. 次の初期条件を満たす微分方程式の解を求めよ．

(1)　$\dfrac{dx}{dt} + t^2x = t^2,\ x(0) = a$　　(2)　$\dfrac{dx}{dt} + x\tan t = \dfrac{1}{\cos t},\ x(0) = 1$

解答 4.2. C は任意定数．

(1)　$x = t^3 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{C}{t}$　　(2)　$x = \sin t + C\cos t$

解答 4.3. a は定数．

(1)　$x = 1 + (a-1)e^{-\frac{t^3}{3}}$　　(2)　$x = \sin t + \cos t$

第５章　線形代数Ⅱ－ちょっと復習

5.1 転置行列

転置行列とは，行列 A の第 i 行を第 i 列に，第 j 列を第 j 行にした行列であり，${}^tA$ と書く．

$$ {}^tA = {}^t\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.1} $$

転置行列の性質

$$ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \tag{5.2} $$

5.2 内積

3 次元列ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$ の**内積**は次のように定義される．

$$ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = p_xq_x + p_yq_y + p_zq_z \tag{5.3} $$

また，転置した ${}^t\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の行列の積を計算すると

$$ {}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = p_xq_x + p_yq_y + p_zq_z \tag{5.4} $$

よって，内積は行列の積で表すことが出来る．

$$ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = {}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} \tag{5.5} $$

第 6 章　線形代数 II – 直交行列と直交変換

正方行列 A について

$$
{}^t\!AA = E \tag{6.1}
$$

を満たすとき，A は**直交行列**であるという．式 (??) より，${}^t\!A$ は A の逆行列である．変換を表す行列が直交行列 A であるとき，この変換を**直交変換**という．この直交変換は**変換前と変換後でベクトルの内積や大きさを変えない線形変換**である．任意のベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ について

$$
f(\boldsymbol{p}) \cdot f(\boldsymbol{q}) = {}^t\!f(\boldsymbol{p}) f(\boldsymbol{q}) = {}^t(A\boldsymbol{p})(A\boldsymbol{q}) = {}^t\boldsymbol{p}\,{}^t\!AA\boldsymbol{q} = {}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} \tag{6.2}
$$

ここで $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$ とすると

$$
f(\boldsymbol{p}) \cdot f(\boldsymbol{p}) = |f(\boldsymbol{p})|^2 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|^2 \tag{6.3}
$$

$$
|f(\boldsymbol{p})| = |\boldsymbol{p}| \tag{6.4}
$$

直交行列の同値な定義

線形変換 f を表す行列 A が直交行列である　(6.5)

$\Longleftrightarrow$　$A^{-1} = {}^t\!A$　(6.6)

$\Longleftrightarrow$　任意のベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ について　$f(\boldsymbol{p}) \cdot f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$　(6.7)

$\Longleftrightarrow$　任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ について　$|f(\boldsymbol{p})| = |\boldsymbol{p}|$　(6.8)

つまり，A が直交行列であるとき，(6.6)A の逆行列は A を転置するだけで求められ，(6.7)2 つのベクトルの変換後の内積は変換前の内積に等しく，(6.8) 変換後のベクトルの大きさは変換前のベクトルの大きさに等しい．

直交行列の重要な性質

$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$ が直交行列であるとき

$$
|\boldsymbol{x}_1| = |\boldsymbol{x}_2| = \cdots = |\boldsymbol{x}_n| = 1,\ \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = 0 \tag{6.9}
$$

第７章　線形代数II – 固有値と固有ベクトル

7.1　固有値とは？

1 次変換の章での通り，線形変換 f が行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ で表されているとき，ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ は，

$$f(\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x}_1 \not\parallel f(\boldsymbol{x}_1) \quad \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \not\parallel \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \tag{7.2}$$

と，大きさも向きも異なるベクトルに移されるのが大抵である．しかし，$\boldsymbol{x}$ を上手く選ぶと，移した後のベクトル $f(\boldsymbol{x})$ が元のベクトルをスカラー倍したかのような（＝向きが変わらない）変換であるように見えることがある．例えば $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ というベクトルは

$$f(\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x}_2 \parallel f(\boldsymbol{x}_2) \quad \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \tag{7.4}$$

より，$f(\boldsymbol{x}_2)$ は $\boldsymbol{x}_2$ を 2 倍にしたかのように見える．このようなベクトルは少なく，存在しないときもある．この $\boldsymbol{x}_2$ のベクトルを A の**固有ベクトル**，倍率 2 を A の**固有値**という．

固有値・固有ベクトルの定義を式に表すと次のようになる．

固有値・固有ベクトル

A を n 次正方行列とする．以下を満たす n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在するとき，λ を A の**固有値**，$\boldsymbol{x}$ を λ に対する**固有ベクトル**という．

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}) \tag{7.5}$$

※ $\lambda\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ のスカラー λ 倍を表す．

7.2 固有値と固有ベクトルの計算

固有値・固有ベクトルの定義より

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

左辺は行列とベクトルの積，右辺はベクトルのスカラー倍になっているので，両辺に単位行列 E を左から掛けると

$$EA\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x} \quad \Longleftrightarrow \quad A\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x}$$

これで両辺とも行列とベクトルの積になったので，移項して

$$A\boldsymbol{x} - \lambda E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{7.6}$$

ここで定義より $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なので，式 (7.6) が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つには

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{7.7}$$

でなければならない（教科書 p.111）．

$|A - \lambda E|$ を A の**固有多項式**，式 (7.7) を A の**固有方程式**という．固有値は固有方程式を解くことで求められる．つまり，A の固有値を求める場合，A から $\lambda E = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$ を引いた行列の行列式が 0 になるときの λ を求める．固有値が λ のときの固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は式 (7.6) に代入して求める．

Tip ［例題 (1)］

行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，この行列は冒頭の行列と同じである．

固有値を λ とすると

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

よって，$\lambda = -1,\ 2$ が固有値である．

固有値が $\lambda = -1$ のときの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\iff \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より，

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \iff 2x - y = 0$$

$x = \alpha$ とおくと，$y = 2\alpha$．よって，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$

固有値が $\lambda = 2$ のときの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ は

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\iff \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より，

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \iff x - 2y = 0$$

$y = \beta$ とおくと，$x = 2\beta$．よって，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2\beta \\ \beta \end{bmatrix}$ $(\beta \neq 0)$

問題 7.1. 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$　(2) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$　(3) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

※ 3 次の行列式の計算方法の例：

- サラスの方法
- 行列式の性質を使った等式変形
- 余因子展開（この問題は全て余因子展開がおすすめ）　etc...

解答 7.1. 解答例

(1) (i)　固有値 -2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$

(ii)　固有値 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(\beta \neq 0)$

(iii)　固有値 4 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_3 = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $(\gamma \neq 0)$

(2) (i)　固有値 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$

(ii) 固有値 3 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \beta+\gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\beta,\ \gamma \text{ は同時に 0 ではない定数})$$

(3) (i) 固有値 2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\alpha \neq 0)$

(ii) 固有値 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2 = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\beta \neq 0)$

第 8 章　線形代数 II – 行列の対角化

ある正方行列 A について，上手く P を選んで

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \longleftarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の固有値} \tag{8.1}$$

のような対角行列が得られたとき，このことを A の**対角化**という．また，P を**対角化行列**，A は**対角化可能**であるという．

対角化可能である必要十分条件

A が対角化可能　$\Longleftrightarrow$　n 次正方行列 A が n 個の線形独立な固有ベクトルを持つ．

対角化の方法

n 正方行列が固有値 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n をもつ（重解を含む）とき，それぞれの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_n$ とする．
$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_n$ が互いに線形独立のとき，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$ とすると

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

となる．

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が線形独立であるかを調べるためには，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix} \neq 0$ であればいい（教科書 p.114）．つまり，上の場合 $|P| \neq 0$ であればよい．

8.1 対角化行列 P のつくり方 1（重解なし）

固有ベクトルと線形独立

A の固有値が全て異なるとき，異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立である．
つまり，固有方程式が重解をもたなければ必ず対角化可能である．

Tip ［例］

行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ の対角化行列 P を求める．

固有ベクトルは

$$\lambda_1 = -1 \text{ のとき} \quad \boldsymbol{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ のとき} \quad \boldsymbol{x}_2 = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\beta \neq 0)$$

なので，例えば $\alpha = 1$，$\beta = 1$ とすると P は

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

これを用いて P を対角化すると

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

8.2　対角化行列 P のつくり方 2（重解あり）

A の固有方程式が重解をもつときは，A は必ずしも対角化可能というわけではない.

対角化可能の条件（重解あり）

> n 次正方行列 A の固有方程式 $|A-\lambda E| = 0$ が重解をもつとき，線形独立な n 個の固有ベクトルがあれば線形独立である.

例えば，$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = -2$(重解)，4 であるが，定数の選び方で 3 個の線形独立な固有ベクトルが求まるので対角化可能である．一方，$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1$（重解）であるが，2 個の線形独立な固有ベクトルを持たないので対角化不可能である.

問題 8.1. 問題 7.1 の 3 つの行列をそれぞれ対角化可能であれば対角化せよ（それぞれの行列の固有値と固有ベクトルは解答 7.1 に記してある）.

解答 8.1. 対角化の仕方は何通りもあるので普通，対角化行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ を示すセットで必要がある.

(1)　$P = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(2)　$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，$|P| = -2 \neq 0$ より 3 つのベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は線形独立である．$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(3)　線形独立な固有ベクトルは 3 つ持たないので，対角化不可能である.

8.3 対角化行列 P のつくり方 3（対称行列の場合）

注意! 対称行列と直交行列を混合しないこと.

対称行列 $${}^tA = A \tag{8.5}$$

行と列を入れ替えても（転置しても）変わらない行列

直交行列 $${}^tAA = A\,{}^tA = E \tag{8.6}$$

転置すると逆行列になる行列

対称行列の対角化

n 次対称行列は固有値が重複するしないに関わらず必ず対角化可能である.

対称行列の場合，異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立だけでなく，更に直交するという性質がある.

対称行列の固有ベクトル

対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する.

つまり，対称行列の固有値を λ, μ $(\lambda \neq \mu)$，それぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_\lambda$, $\boldsymbol{x}_\mu$ とすると $\boldsymbol{x}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_\mu = 0$.

対称行列の対角化の方法

任意の対称行列は直交行列 T によって対角化可能である.

Tip ［例題 (重解なし)］

対称行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を直交行列により対角化せよ.

(I) 固有値を求める．

$$|A-\lambda E|=0 \qquad \therefore \lambda=-2,\ 1,\ 4$$

(II) 固有ベクトルを求める．

(i) $\lambda=-2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は

$$\boldsymbol{x}_1=\alpha\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \quad (\alpha\neq 0)$$

(ii) $\lambda=1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ は

$$\boldsymbol{x}_2=\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad (\beta\neq 0)$$

(iii) $\lambda=4$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_3$ は

$$\boldsymbol{x}_3=\gamma\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad (\gamma\neq 0)$$

(III) 直交座標 T を求める為，大きさ 1 で互いに直交する固有ベクトルを求める．

それぞれの固有ベクトルの大きさは $|\boldsymbol{x}_1|=\sqrt{2}\,\alpha$, $|\boldsymbol{x}_2|=\beta$, $|\boldsymbol{x}_3|=\sqrt{2}\,\gamma$ なので，大きさを 1 にするために $\alpha=\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta=1$ として

$$\boldsymbol{x}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$直交行列\ T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} とおくと$$

$$T^{-1}AT = {}^tTAT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

重解があるとき，固有ベクトルは k 重解となる固有値に対する固有ベクトルの中から互いに直交し大きさが 1 となるものを k 個選ぶことが出来る（例題のやり方以外に**グラム・シュミットの直交化法**という方法でも出来る）.

Tip ［例題 (重解あり)］

$$対称行列\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} を直交行列により対角化せよ.$$

(I)　固有値を求める.

$$|A - \lambda E| = 0 \qquad \therefore \lambda = -4,\ 2(2\ 重解)$$

(II)　固有ベクトルを求める.

(i)　$\lambda = -4$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は

$$\boldsymbol{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\alpha \neq 0)$$

(ii)　$\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ は

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2\beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\beta,\ \gamma\ は同時に\ 0\ でない定数)$$

(III) T を求める為大きさ 1 で互いに直交する固有ベクトルを 3 つ求める.
$|\boldsymbol{x}_1| = \sqrt{6}\,\alpha$ なので $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ として

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\beta = 0,\ \gamma = 1$ とすると $|\boldsymbol{x}_2| = \sqrt{2}$ なので

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

更に，$\lambda = 2$ に属し $\boldsymbol{x}_2$ と直交する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_3$ を求める.

$$\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma - 2\beta + \gamma) = \sqrt{2}(\gamma - \beta) = 0$$

を満たせばよい．よって，$\beta = \gamma = 1$ とおけば $|\boldsymbol{x}_3| = \sqrt{3}$ なので，改めて $\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおく.

直交行列 $T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ とおくと

$$T^{-1}AT = {}^{t}TAT = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8.4 対角化のまとめ

対角化の方法

n 次正方行列を A とする．A の固有値を λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n，それぞれに対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_n$ とする．対角化した行列を

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ とする．

(1) A が対称行列ではない場合

(I) 固有方程式が重解をもたないとき

A は必ず対角化可能．

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \text{とおくと} \quad P^{-1}AP = D \tag{8.7}$$

(II) 固有方程式が重解をもつとき

n 個の線形独立な固有ベクトルがあれば対角化可能．

n 個未満だったり，固有ベクトルを n 個並べた行列の行列式が $|P| = 0$ であれば対角化不可能．

(2) A が対称行列の場合

A は必ず直交行列 T により対角化可能．固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ は全て大きさが 1 で互いに直交しないといけない．

(I) 固有方程式が重解をもたないとき

$$T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \text{とおくと} \quad T^{-1}AT = D \tag{8.8}$$

(II) 固有方程式が重解をもつとき

k 重解となる固有値に対する固有ベクトルの中から互いに直交し大きさが 1 となるものを k 個選ぶ必要がある．

第 9 章　線形独立 II – 対角化の応用

9.1　A^n の計算

一般的に行列の積は計算量が多いので，行列の累乗の計算はとてもだるい．そこで，対角化を用いればかなり簡単に計算することが出来る．

まず初めに対角行列 D の累乗について学ぼう．対角行列であれば累乗はとても簡単に計算できる．これはもう公式として覚えておこう．

対角行列の累乗

対角行列を $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ とすると

$$D^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

次に，一般の行列 A の累乗について学ぼう．A が対角化可能であればこのようになるのであった．

$$P^{-1}AP = D \quad (P\text{ は対角化行列，}D\text{ は対角行列}) \tag{9.2}$$

両辺左から P，右から P^{-1} をかけて

$$PP^{-1}APP^{-1} = PDP^{-1} \iff A = PDP^{-1} \tag{9.3}$$

よって，A^n は

$$\begin{aligned}
A^n &= (PDP^{-1})^n && (9.4)\\
&= (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) && (9.5)\\
&= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1} && (9.6)\\
&= P\underbrace{DD\cdots D}_{n\text{ 個}}P^{-1} && (9.7)\\
&= PD^nP^{-1} && (9.8)
\end{aligned}$$

つまり，A^n を P と D を使って求められるということである．P, D は最初の対角化の計算のときにどちらも得られる．

A^n の計算方法

A を対角化可能行列とする．

(1) P を求めて A を対角化する（D が得られる）．

$$P^{-1}AP = D \tag{9.9}$$

(2) D^n を計算する (9.1)．

(3) PD^nP^{-1} を計算する．

9.2 2次形式

2次の項からなる式 F を **2次形式**という．

$$F = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (a,\ b,\ c \text{ は定数}) \tag{9.10}$$

2次形式は，行列とベクトルを使ってとてもコンパクトに書ける．

$$F = a\ x^2 \quad + \quad b\ xy \quad + \quad c\ y^2$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \tag{9.11}$$

この A の成分は上の矢印のように置く．b の係数を半分にしてそれぞれ置くことに注意．さて，この汚い (9.10) の式を下の綺麗な式で表したいとする：

$$F = \alpha x'^2 + \beta y'^2 \quad \text{（標準形という）} \tag{9.12}$$

その為には，**変数** x, y **を適切に直交変換して** x', y' と置き換える必要がある．

2 次形式の標準形の求め方

$$F = ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$ とする．

(1) A を直交行列 T により対角化する．

$$ {}^tTAT = D \iff A = TD\,{}^tT \quad (D \text{ は対角行列}) \tag{9.13}$$

(2) これを F に代入する．

$$F = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}TD\,{}^tT\boldsymbol{x} \underset{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA,\ {}^t({}^tA) = A}{=} {}^t({}^tT\boldsymbol{x})D\,{}^tT\boldsymbol{x} \tag{9.14}$$

(3) ${}^tT\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ と変数変換（行列 T による直交変換）すると

$$F = {}^t\boldsymbol{x}'D\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \tag{9.15}$$

Tip　［例題］

2 次形式 $F = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ の標準形を求めよ．

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

(1) A は対称行列なので，直交行列 T により対角化すると

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{とすると } {}^tTAT = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \iff A = T\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}{}^tT$$

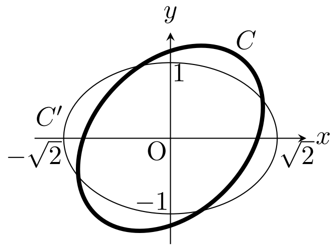
(2) F に代入して

$$F = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}T\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}{}^tT\boldsymbol{x} = {}^t({}^tT\boldsymbol{x})\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}{}^tT\boldsymbol{x}$$

(3) ${}^tT\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ とおくと

$$F = {}^t\boldsymbol{x}'\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 2x'^2 + 4y'^2$$

ここで，$C : 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$ がどんな図形か考えよう．



$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

より，行列 T は原点のまわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転する変換なので，${}^tT = T^{-1}$ は原点のまわりに $-\frac{\pi}{4}$ 回転する変換である．つまり，$\boldsymbol{x}' = {}^tT\boldsymbol{x}$ から，$C' : 2x'^2 + 4y'^2 = 4$ は，$C : 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$ を $-\frac{\pi}{4}$ 回転させた図形，即ち，C は C' を $\frac{\pi}{4}$ 回転させた図形である．下式より，C' は図のような楕円なので，C は図の太線になる．

$$C' : 2x'^2 + 4y'^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1$$