数学特論・講義録

最終更新：2024 年 9 月 25 日

CHAPTER

目次

CHAPTER 1 第1週

数学特論の講義内容

(1) 1 変数複素関数論
(2) Cauchy の積分公式
(3) 実積分への応用
(4) 多変数複素関数とは
(5) 擬凸性と岡の定理
(6) 大沢·竹腰の拡張定理

数学用語解説

◆A◆ ギリシャ文字

表 1.1 ギリシャ文字一覧

大文字	小文字	読み方		大文字	小文字	読み方	
A	α	Alpha	アルファ	N	ν	Nu	ニュー
B	β	Beta	ベータ	Ξ	ξ	Xsi	グザイ（クシー）
Γ	γ	Gamma	ガンマ	O	o	Omikron	オミクロン
Δ	δ	Delta	デルタ	Π	π, ϖ	Pi	パイ
E	ϵ, ε	Epsilon	イプシロン	P	ρ, ϱ	Rho	ロー
Z	ζ	Zeta	ゼータ	Σ	σ	Sigma	シグマ
H	η	Eta	イータ（エータ）	T	τ	Tau	タウ
Θ	θ, ϑ	Theta	シータ	Υ	υ	Upsilon	ウプシロン
I	ι	Iota	イオタ	Φ	ϕ, φ	Phi	ファイ（フィー）
K	κ	Kappa	カッパ	X	χ	Chi	カイ
Λ	λ	Lambda	ラムダ	Ψ	ψ	Psi	プサイ（プシー）
M	μ	Mu	ミュー	Ω	ω	Omega	オメガ

◆B◆ 数学用語

(1) **定義**（**Definition**）
数学の概念の意味や内容を定めたもの．絶対に守らないといけない．

(2) **定理**（**Theorem**）
正しいことが確かめられた数学の主張で重要なもの．(2)〜(5) はそれが正しいことだという**証明**（**Proof**）が必要．

(3) **命題**（**Proposition**）
少し軽めの主張．

(4) **補題**（**Lemma**）
定理や命題を証明するために補助的に使われる主張．

(5) **系**（**Corollary**）
定理の結論から直ちに得られる主張．

◆ C ◆ 数の集合

(1) $\mathbb{N}$ 自然数の集合．
(2) $\mathbb{Z}$ 整数の集合．
(3) $\mathbb{Q}$ 有理数の集合．
(4) $\mathbb{R}$ 実数の集合．
(5) $\mathbb{C}$ 複素数の集合．

Tip ［例］

複素数 z は，実数 a，b を用いて

$$z = a + ib \tag{1.1}$$

と表される．このとき，$z \in \mathbb{C}$，a，$b \in \mathbb{R}$．

◆ D ◆ 集合･論理記号

まずは，『新基礎数学 改訂版』p.61 を参照して復習．

(1) $A \subset B$
A は B の部分集合．$\boxed{\text{例}}$ $A = \{1,\ 2\}$，$B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ のとき $A \subset B$

(2) $a \in A$
a は A の要素（元）．$\boxed{\text{例}}$ $A = \{x \mid x > 5\}$ のとき，7 は A の元．

(3) $\{x \mid P(x)\}$，$\{\ ;\ \}$，$\{\ :\ \}$
集合の書き表し方の 1 つ．条件 $P(x)$ を満たす対象だけを全て集めた集合．

(4) $A \quad \Longrightarrow \quad B$
「A ならば B」．

(5) $A \quad \Longleftrightarrow \quad B$
同値．「A ならば B」かつ「B ならば A.」

(6) $A \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad B$
主に定義するときに用いる．

(7) $A \coloneqq B$，$\triangleq$，$\equiv$

A というものを B で定義するという意味.

(8) $\forall$

Any（任意の）. $\boxed{\text{例}}$ ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ $\cdots$ 任意の正数 ε.

(9) $\exists$

Exist（存在する）. $\boxed{\text{例}}$ ${}^{\exists}N \in \mathbb{N}$ $\cdots$ ある自然数 N が存在する.

(10) s.t.

Such that（のような）. $\boxed{\text{例}}$ A s.t. B $\cdots$ A であるような B.

(11) $A \cap B$

A と B の積集合.

(12) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

(13) $A \cup B$

A と B の和集合.

(14) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

(15) $S \backslash A,\ S - A$

A の差集合. 集合 S から集合 A を除いた集合. $\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ $\cdots$ 実数から有理数を除いた集合＝無理数の集合.

(16) $\complement A,\ A^c$

A の補集合. 差集合のうち，集合 S が全体集合 U である場合に用いる.

(17) $\sqcup$

非交和. 交わりを持たない和. その族に属する部分集合のどの 2 つとも互いに素であること.

(18) $f : D \longrightarrow R$

写像 f. 集合 D の各元に対して集合 R の元をただ 1 つ対応させること.

$\boxed{\text{例}}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\cdots$ 実数から実数を対応させる写像（関数）. $f(x) = x^2$ など.

(19) $x \overset{f}{\longmapsto} y$

元 x が写像 f によって y に写されること.

◆E◆ 解析系

(1) C^n 級関数

関数が n 回微分可能で，n 次導関数が連続関数である関数. $\boxed{\text{例}}$ 多項式関数，sin, cos, e^x は何回でも微分可能で導関数が連続なので C^∞ 級関数.

(2) $\mathrm{Re}(z)$

複素数 z の実部. $\boxed{\text{例}}$ $z = a + ib$ のとき，$\mathrm{Re}(z) = a$.

(3) $\mathrm{Im}(z)$

複素数 z の虚部. $\boxed{\text{例}}$ $z = a + ib$ のとき，$\mathrm{Im}(z) = b$.

(4) $\|z\|$

z のノルム. 平面･空間ベクトルでの大きさに相当する.

1.1　位相（general topology）

集合論と複素数の計算は既知とする．
複素数を n 個並べた $\{z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n\}$ 全体の集まりを $\mathbb{C}^n$ と書く：

$$\mathbb{C}^n = \big\{(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n) \mid z_j \in \mathbb{C}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\big\} \tag{1.2}$$

◆ A ◆　開集合·閉集合の定義

定義 1.1: 開集合

$D \subset \mathbb{C}^n$ は**開集合**であるということは，以下を満たすことを言う：

(1)　D 内の任意の z に対して，十分小さな正数 δ が存在するような $B^n(z,\ \delta)$ が D の部分集合である．
(2)　$B^n(z,\ \delta)$ は，z と ζ の距離が δ 未満である集合である．

これを論理記号で書くと

$$D \subset \mathbb{C}^n \text{ が}\textbf{開集合} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^{\forall}z \in D,\ {}^{\exists}\delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad B^n(z,\ \delta) \subset D \tag{1.3}$$

ただし，$B^n(z,\ \delta) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid \|z-\zeta\| < \delta\}$，　$\|\zeta - z\| := \sqrt{(\zeta_1 - z_1)^2 + \cdots + (\zeta_n - z_n)^2}$.
つまり，開集合 D の中の任意の点では必ず $B^n(z,\ \delta)$ が定義できる．

定義 1.2: 閉集合

$D \subset \mathbb{C}^n$ は**閉集合**であるということは，以下を満たすことを言う：

(1)　$\mathbb{C}^n$ から D を除いた集合（D の補集合）が開集合である．

これを論理記号で書くと

$$D \subset \mathbb{C}^n \text{ が}\textbf{閉集合} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \complement D = \big\{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid \zeta \notin D\big\} \text{ が開集合である．} \tag{1.4}$$

定義 1.3: コンパクト集合

K が**コンパクトである**ということは，以下を満たすことを言う：

$$K \subset \mathbb{C}^n \text{ がコンパクトである} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad K \text{ が有界}^{1)} \quad \text{かつ} \quad \text{閉集合である} \tag{1.5}$$

◆ B ◆　位相境界の定義

開集合又は閉集合 $A \subset \mathbb{C}^n$ に対して，A を含む最小の閉集合を $\overline{A}$ と表し，A の**閉包**という．このとき，

$$\partial A = \overline{A} - A \tag{1.6}$$

を A の**位相境界**という．

1)　十分大きな円板 $B^n(0,\ L)$ に K が含まれること．

$\overline{A} \subset B$ かつ $\overline{A}$ がコンパクトであるとき，A は B に**コンパクトに埋め込まれている**といい，$A \Subset B$ と表す．

1.2 点列の定義

定義 1.4: 点列の極限（ε-N 論法）

点列 $\{z_\nu\} \subset \mathbb{C}^n$ が，$\alpha \in \mathbb{C}^n$ に収束するということを次のように定義する：

(1) 任意の正数 ε に対し，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在するとき，$N(\varepsilon)$ 以上の全ての ν に対して，$z_\nu - \alpha$ のノルムが ε 未満である．

これを論理記号で書くと

$$\lim_{\nu\to\infty} z_\nu = \alpha \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad {}^\forall\nu \geq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \|z_\nu - \alpha\| < \varepsilon \tag{1.7}$$

集合 D の点を項とする任意の収束する点列 $\{z_\nu\}$ の極限は必ずしも D 内の点であるとは限らない．しかし，D が $\mathbb{C}^n$ 上の閉集合であれば，このような点列の極限は必ず D の点になる．また，逆も成り立つ．よって，閉集合は点列を用いて定義することができる．

定理 1.1: 点列を用いた閉集合の定義

収束する点列 ${}^\forall\{z_\nu\} \subset D$ に対して

$$D\ \text{が閉集合} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{\nu\to\infty} z_\nu \subset D \tag{1.8}$$

$\rightsquigarrow$ 閉集合は極限値が全て入る集合のことである．

Tip ［例］

複素数 z の正の実部を部分集合 B とする：

$$B = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\right\} \tag{1.9}$$

このとき，B は閉集合であるか．

B の点を項とする任意の収束する点列の極限が B の点であればいい．

点列 $z_\nu = \dfrac{1}{\nu}$ を定めたとき，$\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} = 0$ である．しかし，0 は B の点ではないので，B は閉集合ではない．

命題 1.1: 閉包

${}^\forall\zeta \in \overline{A}$ に対して，

$$ {}^\exists\{z_\nu\} \subset A \quad \text{s.t.} \quad \lim_{\nu\to\infty} = \zeta \in \overline{A} \tag{1.10}$$

が成り立つ．また，これを用いて，A の閉包は次のように定義できる：

$$\overline{A} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid {}^\exists\{z_\nu\} \subset A \quad \text{s.t.} \quad \lim_{\nu\to\infty} z_\nu = \zeta\} \tag{1.11}$$

1.3　1 変数複素関数

◆ A ◆　関数の連続

定義 1.5: 関数の連続

関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ と収束する点列 ${}^{\forall}\{z_\nu\} \subset D$ に就いて

$$\text{関数 } f \text{ が}\textbf{連続} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{\nu\to\infty} f(z_\nu) = f\left(\lim_{\nu\to\infty} z_\nu\right) \tag{1.12}$$

定義 1.6: 滑らかな関数の定義

実 1 変数関数 $\gamma : [\alpha,\ \beta] \longrightarrow D \subset \mathbb{C}^n$ に就いて

$$\text{関数 } \gamma \text{ が}\textbf{滑らか}（\boldsymbol{C^1}\textbf{-級曲線}）\text{である} \tag{1.13}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix} \text{ の各成分が微分可能かつ } \gamma_j'(t) \text{ が連続である} \tag{1.14}$$

◆ B ◆　Jordan 曲線

定義 1.7: Jordan 曲線の定義

関数 $\gamma : [\alpha,\ \beta] \longrightarrow D$ に就いて

(1)　**Jordan 曲線**

$$\gamma \text{ が Jordan 曲線} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \gamma \text{ は滑らかである} \\ {}^{\forall}t_1 \neq t_2 \in [\alpha,\ \beta] \text{ に対し，} \quad \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \end{cases} \tag{1.15}$$

(2)　**Jordan 閉曲線**

$$\gamma \text{ が Jordan 閉曲線} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \gamma \text{ は滑らかである} \\ {}^{\forall}t_1 \neq t_2 \in (\alpha,\ \beta) \text{ に対し，} \quad \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \\ \gamma(\alpha) = \gamma(\beta) \end{cases} \tag{1.16}$$

Jordan 曲線は自己交叉なしの曲線で，Jordan 閉曲線は始点と終点以外の自己交叉がない曲線.

定理 1.2: Jordan の曲線定理

Jordan 閉曲線 $\gamma : [\alpha,\ \beta] \longrightarrow \mathbb{C}^1$ に就いて，γ は $\mathbb{C}^1$ を有界な開集合 V_1 と非有界な開集合 V_2 に分割し，

$$\mathbb{C}^1 = \gamma \sqcup V_1 \sqcup V_2 \tag{1.17}$$

が成り立つ.

有界な開集合 V_1 を γ の**内部**といい，V_2 を γ の**外部**という．γ の内部を左側に見て進む向きをを

正の向きという．

定義 1.8: 連結

$^\forall\alpha,\ \beta \in D,$ 折れ線 $\tau : [\alpha,\ \beta] \longrightarrow D$ に就いて

$$D \subset \mathbb{C}^n \text{ が}\textbf{連結} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \tau(a) = \alpha,\ \tau(b) = \beta \tag{1.18}$$