第 1 章　応用数学 A I – ちょっと復習

1.1　導関数の表し方

導関数の表し方には主に次の 3 種類がある.

◆ A ◆　Lagrange 記法

プライム記号を用いた記法である. 次のような表し方がある.

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f^{(n)}(x),\quad y',\quad y'',\quad y^{(n)},\quad (xe^x)' \tag{1.1}$$

◆ B ◆　Leibniz 記法

数学の分野で広く使用される. この記法だと「$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ は, y を x で微分するんだ」と視覚的に分かりやすい.「2 階微分方程式」の章では**この Leibniz 記法を用いる**.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}(xe^x)}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xe^x) \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\quad \frac{\mathrm{d}^nf(x)}{\mathrm{d}x^n},\quad \frac{\mathrm{d}^n(xe^x)}{\mathrm{d}x^n},\quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x),\quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(xe^x) \tag{1.3}$$

◆ C ◆　Newton 記法

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{rdt^2} \tag{1.4}$$

微分回数をドットで表すため, あまり高階では使われないので速度 $\dot{x}$, 加速度 $\ddot{x}$ のように 1 階, 2 階微分が頻繁に表れる物理学, 工学の分野で使用されることが多い. なお, この記法では t で微分する（**時間微分**）ことが暗黙のルールである.

第 2 章　応用数学 A Ｉ – 2 階微分方程式

2.1　2 階微分方程式の解

2 階微分 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ が最高階の微分方程式を **2 階微分方程式**という．2 階微分方程式の一般解は普通 **2 個の任意定数を含む**．また，特殊解は

$$x(0)=1,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(0)=4 \tag{2.1}$$

のような**初期条件**から求める方法と

$$x(0)=1,\quad x(1)=\frac{1}{2} \tag{2.2}$$

のような**境界条件**から求める方法がある．この 2 つの違いは独立変数 t の特定の値をとるか，異なる値をとるかである．

2 階微分方程式のうち，次の形の微分方程式を **2 階-線形-微分方程式**という．

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q(t)x=r(t) \tag{2.3}$$

このうち，$r(t)=0$ の場合を**斉次方程式**といい，$r(t)\neq 0$ の場合を**非斉次方程式**という．

2 階-斉次-線形-微分方程式の解について，以下の重要な性質がある．

定理 2.1: 重ね合せの原理

斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q(t)x=0 \tag{2.4}$$

について，$x=x_1(t)$, $x=x_2(t)$ がこの微分方程式の解であるとき，

$$x=Cx_1+Dx_2 \qquad (C,\ D \text{ は任意定数}) \tag{2.5}$$

もこの微分方程式の解である．

微分方程式の解が 2 つ分かれば，その 1 次結合の関数も解であるという定理である．

$x = x_1,\ x = x_2$ の 1 次結合

$$Cx_1 + Dx_2 \tag{2.6}$$

が**恒等的に** 0 **になる**には，$C = D = 0$ 以外無いとき，$x_1,\ x_2$ は **1 次独立**であるという．具体的には，x_1 と x_2 が定数倍でないときに 1 次独立であるという．

Tip ［1 次独立の例］

$x = 1$ と $x = t$ は 1 次独立である．

$x = t^2$ と $x = 3t^2$ は 1 次独立でない．

2 つの関数が 1 次独立であるかどうかを調べるのに次の定理がある．

定理 2.2: 1 次独立の判定

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_1 \text{ と } x = x_2 \text{ は 1 次独立} \tag{2.7}$$

註）逆は成り立たない．

この行列式を**ロンスキアン**といい，$W(x_1,\ x_2)$ で表す．つまり

$$W(x_1,\ x_2) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_1 \text{ と } x = x_2 \text{ は 1 次独立} \tag{2.8}$$

Tip ［1 次独立の判定（ロンスキアンを使用）］

$$\begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - t \cdot 0 = 1 \neq 0 \tag{2.9}$$

$$\begin{vmatrix} t^2 & 3t^2 \\ 2t & 6t \end{vmatrix} = 6t^3 - 6t^3 = 0 \tag{2.10}$$

重ね合せの原理は，斉次線形微分方程式の 2 つの解の 1 次結合である関数も解であることを表すが，この 2 つの解が 1 次独立であるとき 1 次結合の解はこの微分方程式の一般解になる．

定理 2.3: 2 階斉次線形微分方程式の一般解

斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + q(t)x = 0 \tag{2.11}$$

について，$x = x_1(t)$，$x = x_2(t)$ がこの微分方程式の **1 次独立な**解であるとき，

$$x = Cx_1 + Dx_2 \qquad (C,\ D \text{ は任意定数}) \tag{2.12}$$

は**この微分方程式の一般解**である．

2.2　定数係数 2 階斉次線形微分方程式

一般的な 2 階線形微分方程式は解くのが難しいが，$p(t)$，$q(t)$ が定数 a，b であるときは解き方が確立されている．

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + bx = 0 \qquad (a,\ b \text{ は実数定数}) \tag{2.13}$$

の解を考える．左辺が 0 になるような関数 $x(t)$ を考えないといけないので，$\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}$ の項と $a\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ の項と bx の項の関数の形をおおよそ同じにしたい．例えば，$x = t^3$ として微分方程式に代入すると

$$6t + 3at^2 + bt^3 = 0 \tag{2.14}$$

となり，a，b がどうであれ全て足しても 0 にならない．

微分しても形が変わらない関数に指数関数がある．$x = e^{\lambda t}$（λ は定数）とおくと，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda e^{\lambda t} \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \lambda^2 e^{\lambda t} \tag{2.15}$$

となり，定数 λ 倍の違いになるので，左辺を 0 にすることが出来る．

では，一般解を求めよう．微分方程式 (2.13) の解として，$x = e^{\lambda t}$ と仮定して代入すると

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0 \iff (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0 \tag{2.16}$$

となる．求めたいのは，左辺が 0 となるような λ の値である．$e^{\lambda t} > 0$ なので，両辺 $e^{\lambda t}$ で割って

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.17}$$

が導ける．この 2 次方程式を**特性方程式**という．2 次方程式なので λ の値が 3 種類あるからそれぞれの場合について一般解を求めよう．

◆ A ◆　λ が異なる 2 つの実数解のとき

実数解が λ_1，λ_2 のとき $e^{\lambda_1 t}$，$e^{\lambda_2 t}$ は

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \tag{2.18}$$

$$= \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \tag{2.19}$$

$$= \underbrace{\boxed{(\lambda_2 - \lambda_1)}}_{\lambda_2 \neq \lambda_1} \underbrace{e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}_{> 0} \neq 0 \tag{2.20}$$

より 1 次独立なので，定理 2.3 から

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}) \tag{2.21}$$

が一般解である．

◆ B ◆　λ が 2 重解のとき

$x = e^{\lambda t}$ は微分方程式の解である．そして，もう 1 つ，$e^{\lambda t}$ と 1 次独立な解を求めなければならない．$x = Ce^{\lambda t}$ (C は任意定数) も解なので，**定数変化法**を用いてこの定数 C を関数 $C(t)$ に置き換えたら見つかるのではないかと推測して求める．

$$x = C(t)e^{\lambda t} \tag{2.22}$$

とおいて，両辺を t で微分すると（積の微分法）

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} e^{\lambda t} + \lambda C e^{\lambda t} \tag{2.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 C}{\mathrm{d}t^2} e^{\lambda t} + 2\lambda \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} e^{\lambda t} + \lambda^2 C e^{\lambda t} \tag{2.24}$$

これらを微分方程式に代入すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda t}+2\lambda\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}+\lambda^2Ce^{\lambda t}\right)+a\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}+\lambda Ce^{\lambda t}\right)+bCe^{\lambda t}=0 \tag{2.25}$$

展開して整理すると

$$\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda t}+2\lambda\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}+\lambda^2Ce^{\lambda t}+a\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}+a\lambda Ce^{\lambda t}+bCe^{\lambda t}=0 \tag{2.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda t}+\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}(2\lambda+a)+Ce^{\lambda t}(\lambda^2+a\lambda+b)=0 \tag{2.27}$$

ここで

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{2.28}$$

で，解と係数の関係より

$$\lambda+\lambda=-a \quad\Longleftrightarrow\quad 2\lambda+a=0 \tag{2.29}$$

なので

$$\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda t}+\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}\cdot 0+Ce^{\lambda t}\cdot 0=0 \tag{2.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda t}=0 \tag{2.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{2.32}$$

この式を両辺 t で積分すると

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=C_1 \tag{2.33}$$

$$C=C_1t+C_2 \qquad (C_1,\ C_2\ \text{は任意定数}) \tag{2.34}$$

これで $C(t)$ が求まったので式 (2.22) に代入して

$$x=C_1te^{\lambda t}+C_2e^{\lambda t} \tag{2.35}$$

となる．

$$\begin{vmatrix} te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t}+\lambda te^{\lambda t} & \lambda e^{\lambda t} \end{vmatrix}=\lambda t\big(e^{\lambda t}\big)^2-\big(e^{\lambda t}\big)^2-\lambda t\big(e^{\lambda t}\big)^2=\big(e^{\lambda t}\big)^2\neq 0 \tag{2.36}$$

より，$te^{\lambda t}$ と $e^{\lambda t}$ は 1 次独立なので，一般解である．

◆ C ◆　λ が 2 つの異なる虚数解のとき

虚数解が $\lambda_1 = p + iq$ と $\lambda_2 = p - iq$ のとき $e^{\lambda_1 t}$，$e^{\lambda_2 t}$ は，これらは

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \tag{2.37}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(p+iq+p-iq)t} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{2pt} \neq 0 \tag{2.38}$$

より 1 次独立なので，

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{(p+iq)t} + A_2 e^{(p-iq)t} \qquad (A_1,\ A_2\ \text{は任意定数}) \tag{2.39}$$

は微分方程式の一般解である．もう少し形を整理してみよう．$e^{\lambda_1 t}$，$e^{\lambda_2 t}$ は，指数法則とオイラーの公式[1)] より

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(p+iq)t} = e^{pt+iqt} = e^{pt} e^{iqt} = e^{pt}(\cos qt + i \sin qt) \tag{2.40}$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{(p-iq)t} = e^{pt-iqt} = e^{pt} e^{-iqt} = e^{pt}(\cos qt - i \sin qt) \tag{2.41}$$

であるので一般解は

$$x = A_1 e^{(p+iq)t} + A_2 e^{(p-iq)t} \tag{2.42}$$

$$= A_1 e^{pt}(\cos qt + i \sin qt) + A_2 e^{pt}(\cos qt - i \sin qt) \tag{2.43}$$

$$= A_1 e^{pt} \cos qt + i A_1 e^{pt} \sin qt + A_2 e^{pt} \cos qt - i A_2 e^{pt} \sin qt \tag{2.44}$$

$$= e^{pt}(A_1 \cos qt + i A_1 \sin qt + A_2 \cos qt - i A_2 \sin qt) \tag{2.45}$$

$$= e^{pt}\bigl\{(A_1 + A_2)\cos qt + i(A_1 - A_2)\sin qt\bigr\} \tag{2.46}$$

と変形できる．ここで，新たに $C_1 = A_1 + A_2$，$C_2 = i(A_1 - A_2)$ とおけば微分方程式の一般解は

$$x = e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) \tag{2.47}$$

と表される．では纏めよう．

1）　$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

定理 2.4: 定数係数 2 階斉次線形微分方程式の一般解

定数係数 2 階斉次線形微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + bx = 0 \qquad (a,\ b \text{ は実数定数}) \tag{2.48}$$

の一般解は，特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.49}$$

の解に応じて，次の式で与えられる．

(1) 異なる 2 つの実数解 λ_1，λ_2 をもつとき

$$x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}) \tag{2.50}$$

(2) 2 重解 λ をもつとき

$$x = (C_1 + C_2t)e^{\lambda t} \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}) \tag{2.51}$$

(3) 異なる 2 つの虚数解 $p \pm iq$（p，q は実数）をもつとき

$$x = e^{pt}(C_1\cos qt + C_2\sin qt) \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}) \tag{2.52}$$

Tip ［例題］

次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 5\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 6x = 0$　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 6\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 9x = 0$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = 0$

斉次方程式の一般解は，特性方程式を解いて，上の定理の通りに解の値を代入するだけで求められる．

(1) 特性方程式は $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

これを解くと $\lambda = 2,\ 3$

よって，定理 2.4 より，求める一般解は

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}) \tag{2.53}$$

(2) 特性方程式は $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

これを解くと $\lambda = -3$（2 重解）

よって，定理 2.4 より，求める一般解は

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-3t} \qquad （C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}） \tag{2.54}$$

(3) 特性方程式は $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

これを解くと $\lambda = -1 \pm i2$

よって，定理 2.4 より，求める一般解は

$$x = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) \qquad （C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}） \tag{2.55}$$

問題 2.1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x = 0$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4x = 0$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4x = 0$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{17}{4}x = 0$

解答 2.1. C_1，C_2 は任意定数.

(1) $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$

(2) $x = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}$

(3) $x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

(4) $x = e^{\frac{1}{2}t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$

2.3 定数係数 2 階非斉次線形微分方程式

次に，**2 階-非斉次-線形微分方程式**の一般解を挙げる．要は，非斉次方程式を求めるためには，何か 1 つでもいいので非斉次方程式の特殊解を求め，斉次方程式の一般解を足すだけで求められる．

定理 2.5: 2 階非斉次線形微分方程式の一般解

非斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q(t)x=r(t) \tag{2.56}$$

の一般解は，この微分方程式の 1 つの特殊解 $x = u(t)$ と斉次方程式の解 $x=Cx_1+Dx_2$ の和

$$x=u+Cx_1+Dx_2 \qquad (C,\ D \text{ は任意定数}) \tag{2.57}$$

である．

では，定数係数 2 階非斉次線形微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+bx=r(t) \qquad (a,\ b \text{ は実数定数}) \tag{2.58}$$

の一般解を考えよう．非斉次方程式の一般解を x，非斉次方程式の特殊解を x_0，斉次方程式の一般解を X とすると定理 2.5 より，

$$x=X+x_0 \tag{2.59}$$

であるので

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+bx=r(t) \iff \frac{\mathrm{d}^2(X+x_0)}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}(X+x_0)}{\mathrm{d}t}+b(X+x_0)=r(t) \tag{2.60}$$

である．微分の線形性を利用して整理すると

$$\frac{\mathrm{d}^2(X+x_0)}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}(X+x_0)}{\mathrm{d}t}+b(X+x_0) \tag{2.61}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2}+a\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}\right)+b(X+x_0) \tag{2.62}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}+bX\right)+\left(\frac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}+bx_0\right)=r(t) \tag{2.63}$$

ここで，X は斉次方程式の一般解なので $\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}+a\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}+bX=0$ より

$$\frac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}+bx_0=r(t) \tag{2.64}$$

を満たす特殊解 x_0 を求める必要がある．求める方法は幾つかあるが，ここでは**未定係数法**を使った解法を紹介する．

◆ A ◆　$r(t)$ が n 次多項式の場合

例えば $r(t)$ が 2 次多項式の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+6x=6t^2+2t \tag{2.65}$$

の特殊解 x_0 を考えよう．多項式は微分すると次数が下がるから，x，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ のうち，最高次数は x である．x_0 が 2 次多項式 $x_0 = t^2$ だと右辺の $6t^2$ と一致する．この場合，$-5\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = -10t$，$\frac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2} = 2$ だから，右辺の $2t+0$ と一致する為に x_0 に 1 次，0 次の項（定数項）を設定しなければならない．結局，$x_0 = At^2+Bt+C$ と予想し，微分方程式に代入して右辺と一致するように係数部分を求める．

一般に，$r(t)$ が n 次多項式のときは

$$x = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \cdots + Z \qquad (A,\ B,\ C,\ \cdots,\ Z \text{ は定数}) \tag{2.66}$$

のように特殊解を n 次多項式と予想する．

Tip ［非斉次方程式の一般解（1・$r(t)$ が n 次多項式の場合)］

微分方程式 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+6x=6t^2+2t$ の一般解を求めよ．

まず，斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+6x=0 \tag{2.67}$$

の一般解を求めると $x = C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$　（C_1，C_2 は任意定数）

次に，非斉次方程式の右辺は 2 次式なので，特殊解を

$$x_0 = At^2+Bt+C \qquad (A,\ B,\ C \text{ は定数}) \tag{2.68}$$

と予想する．微分方程式に代入すると

$$2A-5(2At+B)+6(At^2+Bt+C)=6t^2+2t \tag{2.69}$$

展開して次数について整理して

$$2A-10At-5B+6At^2+6Bt+6C=6t^2+2t \tag{2.70}$$

$$6At^2+(-10A+6B)+(2A-5B+6C)=6t^2+2t \tag{2.71}$$

係数比較して

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ -10A + 6B = 2 \\ 2A - 5B + 6C = 0 \end{cases} \tag{2.72}$$

これを解くと $A = 1$，$B = 2$，$C = \dfrac{4}{3}$ なので，特殊解は

$$x_0 = t^2 + 2t + \frac{4}{3} \tag{2.73}$$

よって，求める一般解は

$$x = t^2 + 2t + \frac{4}{3} + C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}) \tag{2.74}$$

◆ B ◆　$r(t)$ が指数関数 Ce^{at}（C は定数）のとき

$x_0 = Ae^{at}$（A は定数）とすれば，左辺は全て e^{at} の項が出てくるので，

$$x_0 = Ae^{at} \qquad (A \text{ は定数}) \tag{2.75}$$

と予想する．

Tip ［非斉次方程式の一般解（2・$r(t)$ が指数関数の場合)］

微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 6\dfrac{dx}{dt} + 9x = 4e^{-2t}$ の一般解を求めよ．

まず，斉次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0 \tag{2.76}$$

の一般解を求めると $x = (C_1 + C_2t)e^{-3t}$　（C_1，C_2 は任意定数）

次に，非斉次方程式の右辺は指数関数なので，特殊解を

$$x_0 = Ae^{-2t} \qquad (A \text{ は定数}) \tag{2.77}$$

と予想する．微分方程式に代入すると

$$4Ae^{-2t} + 6 \cdot (-2Ae^{-2t}) + 9Ae^{-2t} = 4e^{-2t} \tag{2.78}$$

展開して整理して

$$Ae^{-2t} = 4e^{-2t} \tag{2.79}$$

係数を比較すると $A = 4$ なので，特殊解は

$$x_0 = 4e^{-2t} \tag{2.80}$$

よって，求める一般解は

$$x = 4e^{-2t} + (C_1 + C_2 t)e^{-3t} \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}) \tag{2.81}$$

◆ C ◆　$r(t)$ が指数関数 Ce^{at}（C は定数）で且つ，斉次方程式の一般解になる場合

非斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 6x = e^{2t} \tag{2.82}$$

を解くことを考えよう．斉次方程式の一般解は

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \tag{2.83}$$

である．次に，$r(t)$ が e^{2t} なので，$x_0 = Ae^{2t}$ と予想するのは**間違いである**．なぜなら，斉次方程式の一般解で $C_1 = A$，$C_2 = 0$ とすれば $x = Ae^{2t}$ と斉次方程式の一般解になってしまう．これは，非斉次方程式の特殊解とはなれない．このときは t をかけて

$$x_0 = t \cdot Ae^{2t} \qquad (A \text{ は定数}) \tag{2.84}$$

としてやれば，$\dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = \boxed{Ae^{2t}} + 2Ate^{2t}$ と Ae^{2t} の項が出てくるので求めることが出来る．

Tip ［非斉次方程式の一般解（3・$r(t)$ が指数関数で斉次方程式の一般解の場合)］

微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 5\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 6x = e^{2t}$ の一般解を求めよ．

まず，斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 6x = 0 \tag{2.85}$$

の一般解を求めると $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$ 　（C_1，C_2 は任意定数）
次に，非斉次方程式の右辺は指数関数で斉次方程式の一般解なので，特殊解を

$$x_0 = Ate^{-2t} \qquad （A \text{ は定数}） \tag{2.86}$$

と予想する．微分方程式に代入すると

$$(4A + 4At)e^{2t} - 5(A + 2At)e^{2t} + 6Ate^{2t} = e^{2t} \tag{2.87}$$

展開して整理して

$$-Ae^{2t} = e^{2t} \tag{2.88}$$

係数を比較すると $A = -1$ なので，特殊解は

$$x_0 = -te^{2t} \tag{2.89}$$

よって，求める一般解は

$$x = -te^{2t} + C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \qquad （C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}） \tag{2.90}$$

◆ D ◆　$r(t)$ が三角関数 $A\cos at + B\sin at$（A，B は定数）

$\sin at$ を微分すると $a\cos at$，$\cos at$ を微分すると $-a\sin at$ が出てくるので，

$$x_0 = A\cos at + B\sin at \qquad （A,\ B \text{ は定数}） \tag{2.91}$$

と予想すればよい．

Tip ［非斉次方程式の一般解（4・$r(t)$ が三角関数の場合)］
微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = 2\sin 3t$ の一般解を求めよ．

まず，斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = 0 \tag{2.92}$$

の一般解を求めると $x = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$　（C_1，C_2 は任意定数）
次に，非斉次方程式の右辺は三角関数なので，特殊解を

$$x_0 = A\cos 2t + B\sin 2t \qquad （A,\ B \text{ は定数}） \tag{2.93}$$

と予想する．微分方程式に代入すると

$$(-9A\cos 3t - 9B\sin 3t) + 2(-3A\sin 3t + 3B\cos 3t) + 5(A\cos 3t + B\sin 3t) = 2\sin 3t \tag{2.94}$$

展開して整理して

$$(-4A + 6B)\cos 3t + (-6A - 4B)\sin 3t = 2\sin 3t \tag{2.95}$$

係数比較して

$$\begin{cases} -4A + 6B = 0 \\ -6A - 4B = 2 \end{cases} \tag{2.96}$$

これを解くと $A = -\dfrac{3}{13}$，$B = -\dfrac{2}{13}$ なので，特殊解は

$$x_0 = -\frac{3}{13}\cos 3t - \frac{2}{13}\sin 3t \tag{2.97}$$

よって，求める一般解は

$$x = -\frac{3}{13}\cos 3t - \frac{2}{13}\sin 3t + e^{-t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) \quad （C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}） \tag{2.98}$$

◆ E ◆　$r(t)$ が三角関数 $A\cos at + B\sin at$（A，B は定数）で且つ，斉次方程式の一般解になる場合

指数関数のとき（C 節）と同様に $r(t)$ が斉次方程式の一般解である場合がある．例えば，非斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4x = \cos 2t \tag{2.99}$$

に於いて，斉次方程式の一般解は

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \tag{2.100}$$

なので，$x_0 = A\cos at + B\sin at$ とすると，斉次方程式の一般解となる．このときは同様に t をかけて

$$x_0 = t(A\cos at + B\sin 2t) \tag{2.101}$$

とする．

Tip ［非斉次方程式の一般解（5・$r(t)$ が三角関数で斉次方程式の一般解の場合)］

微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4x = \cos 2t$ の一般解を求めよ.

まず，斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4x = 0 \tag{2.102}$$

の一般解を求めると $x = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$　（C_1，C_2 は任意定数）

次に，非斉次方程式の右辺は三角関数なので，特殊解を

$$x_0 = t(A\cos 2t + B\sin 2t) \qquad （A，B \text{ は定数}） \tag{2.103}$$

と予想する．微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned}&\{-4A\sin 2t + 4B\cos 2t + t(-4A\cos 2t - 4B\sin 2t)\}\\ &\qquad + 4t(A\cos 2t + B\sin 2t) = \cos 2t\end{aligned} \tag{2.104}$$

展開して整理して

$$-4A\sin 2t + 4B\cos 2t = \cos 2t \tag{2.105}$$

係数比較して

$$\begin{cases} -4A = 0 \\ \quad 4B = 1 \end{cases} \tag{2.106}$$

これを解くと $A = 0$，$B = \dfrac{1}{4}$ なので，特殊解は

$$x_0 = \frac{1}{4}t\sin 2t \tag{2.107}$$

よって，求める一般解は

$$x = \frac{1}{4}t\sin 2t + C_1\cos 2t + C_2\sin 2t \qquad （C_1，C_2 \text{ は任意定数}） \tag{2.108}$$

2.4 連立微分方程式

普通の連立方程式と同じように，どちらか一方の文字を消去して 1 つの文字だけの微分方程式を解く．

Tip ［連立微分方程式］

次の連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x + 2y + 6t & (2.109) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x - 5y & (2.110) \end{cases}$$

まず，どちらか一方の文字を消去して 1 つの文字だけの微分方程式にする．
今回は x を消去する．(2.110) より

$$x = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 5y \tag{2.111}$$

これを t で微分して

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{2.112}$$

この 2 式を (2.109) に代入して

$$-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2\left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 5y\right) + 2y + 6t \tag{2.113}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 7\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = -6t \tag{2.114}$$

これで y だけの微分方程式になった．これは非斉次線形微分方程式なので今までと同様に解く．斉次微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 7\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = 0 \tag{2.115}$$

の一般解を求める．特性方程式は $\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$.
これを解いて $\lambda = -3,\ -4$.
よって，斉次微分方程式の一般解は

$$y = C_1e^{-3t} + C_2e^{-4t} \quad (C_1,\ C_2\ \text{は任意定数}) \tag{2.116}$$

となる．次に非斉次微分方程式の解を $x = At + B$（A，B は定数）と予想して非斉次微分方程式に代入すると

$$7A + 2(At + B) = 6t \tag{2.117}$$

これを解いて $A = -\dfrac{1}{2}$，$B = \dfrac{7}{24}$．よって，非斉次微分方程式の一般解は

$$y = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{24} + C_1e^{-3t} + C_2e^{-4t} \tag{2.118}$$

次に x の一般解を求める．これを微分すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2} - 3C_1e^{-3t} - 4C_2e^{-4t} \tag{2.119}$$

この 2 つの式を (2.110) に代入すると

$$-\frac{1}{2} - 3C_1e^{-3t} - 4C_2e^{-4t} = -x - 5\left(-\frac{1}{2}t + \frac{7}{24} + C_1e^{-3t} + C_2e^{-4t}\right) \tag{2.120}$$

$$x = \frac{1}{2} + 3C_1e^{-3t} + 4C_2e^{-4t} + \frac{5}{2}t - \frac{35}{24} - 5C_1e^{-3t} - 5C_2e^{-4t} \tag{2.121}$$

$$x = \frac{5}{2}t - \frac{23}{24} - 2C_1e^{-3t} - C_2e^{-4t} \tag{2.122}$$

よって，求める一般解は

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t - \dfrac{23}{24} - 2C_1e^{-3t} - C_2e^{-4t} \\ y = -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{7}{24} + C_1e^{-3t} + C_2e^{-4t} \end{cases} \quad \text{（}C_1\text{，}C_2\text{ は任意定数）}$$

2.5　定数係数じゃない線形微分方程式

定数係数でない微分方程式は，今までのような解き方は使えないので，定理:2.3 の定理を使って，1 次独立な解を何らかの方法で 2 つ見付け，その 2 つの 1 次結合を一般解とする．

Tip［定数係数でない微分方程式］

次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-4x=0$$

まず，この定理は斉次**線形**微分方程式にしか使えない．よって，この微分方程式が線形微分方程式であることを確かめよう．両辺 t^2 で割って

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{4}{t^2}x=0 \tag{2.123}$$

よって，

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q(t)x=0 \tag{2.124}$$

の形になっているので線形微分方程式である．

次に何かしらの方法で解を見つけていくのだが，解の予想として $x=t^\alpha$（α は定数）として与えられた微分方程式に代入すると $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha t^{\alpha-1}$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$ なので

$$t^2\cdot\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t\cdot\alpha t^{\alpha-1}-4t^\alpha=0 \tag{2.125}$$

$$\alpha(\alpha-1)t^\alpha+\alpha t^\alpha-4t^\alpha=0 \tag{2.126}$$

$$t^\alpha\{\alpha(\alpha-1)+\alpha-4\}=0 \tag{2.127}$$

$$t^\alpha(\alpha^2-4)=0 \tag{2.128}$$

これを解くと $\alpha=\pm2$．よって，$x=t^2$ と $x=t^{-2}$ はこの微分方程式の解である．この 2 つの関数のロンスキアンは

$$W(t^2,\ t^{-2})=\begin{vmatrix} t^2 & t^{-2} \\ 2t & -2t^{-3} \end{vmatrix}=-2t^{-1}-2t^{-1}=-4t^{-1}\neq0 \tag{2.129}$$

よって，1 次独立なので，求める一般解は定理:2.3 より

$$x=C_1t^2+C_2t^{-2}\quad（C_1,\ C_2\text{ は任意定数}） \tag{2.130}$$