

# 数学・物理 回憶錄

最終更新日: 2023 年 09 月 08 日

# 第1章 電磁気学 I

電磁気学に入る前に、この章で必要なベクトル解析の知識を確認する。詳しくはベクトル解析の章を見ていただきたい。

## 1.1 線積分、面積分、体積分

電磁気学を学ぶには、線積分、面積分、体積分の3つの積分の知識が必要不可欠である。

### ◆ A ◆ スカラー場の線積分

**線積分**とは、ある線分に沿って物理量を足していくことである。

空間上に曲線  $C$  がある。この  $C$  を**経路**という。線積分は、その経路上の各点に存在する物理量（今から説明するのはスカラー場  $f$ ）を足して合わせていくことを考える。経路上の位置  $\mathbf{r}$  に存在するスカラー場  $f(\mathbf{r})$  が与えられているとする。

まず、経路  $C$  を  $n$  個の小区間に分割する。 $C$  の始点を点 A、終点を点 B として A から順に、分点

$$A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = B$$

をとる。点  $P_k$  の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_k$  とし、 $\Delta s_k = P_k - P_{k-1}$  とする。

この小区間  $\Delta s_k$  とスカラー場  $f(\mathbf{r}_k)$  をかけたものを足し合わせていく：

$$\sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}_k) \Delta s_k$$

ここで、 $n$  を無限大までに増やして小区間の長さを限りなく 0 に近づかせると次のように積分の形に表すことができる。これを経路  $C$  に沿うスカラー場の線積分という。

$$\sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}_k) \Delta s_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_C f(\mathbf{r}) ds \quad (1.1)$$

### ◆ B ◆ ベクトル場の線積分

経路  $C$  上にベクトル場  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  が与えられているとする。

ベクトルの線積分も基本的な考え方はスカラーのときと同じである。ただし、ベクトル場の線積分では、**ベクトル場の経路に沿った方向の成分**を積分する。この成分は、ベクトル  $\mathbf{F}$  と単位接線ベクトル  $\mathbf{t}$  の内積で求めることができる。よって、ベクトル場  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  の線積分は以下の式である。

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} ds = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (1.2)$$

経路の始点 A と終点 B が一致している曲線（経路）を**閉曲線**という。例えば  $C: x^2 + y^2 = 1$  は円なので閉曲線である。経路が閉曲線の場合の線積分を**周回積分**といい、次のように表す。

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} ds \quad (1.3)$$

### ◆ C ◆ スカラー場の面積分

**面積分**とは、ある面全体について物理量を足し合わせていくことである。

空間上に曲面  $S$  があり、 $S$  上でスカラー場  $f(\mathbf{r})$  が定義されているとする。曲面を網目状の微小な面積  $\Delta S$  に分け、それにスカラー場  $f(\mathbf{r})$  を掛けたものを足し合わせることを考える。そして、分割数を増やして  $\Delta S \rightarrow 0$  としていけば面積分が得られる。

$$\int_S f(\mathbf{r}) dS \quad (1.4)$$

ここで注意なのが、**青緑色**の  $S$  は、曲面  $S$  上の面積分という意味での  $S$  であり、**水色**の  $S$  は、面積の  $S$  という意味である。

$dS$  は微小な長方形の面積なので  $dS = dxdy$  である。よって、式 (1.4) は

$$\iint_D f(\mathbf{r}) dxdy \quad (1.5)$$

のように表すこともできる。 $D$  は曲面  $S$  が定義されている領域である。

### ◆ D ◆ ベクトル場の面積分

曲面  $S$  上にベクトル場  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  が与えられているとする。

ベクトル場の面積分では、ベクトル場の単位法線ベクトル方向の成分を積分する。この成分は、ベクトル  $\mathbf{F}$  と単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の内積で求めることができる。よって、ベクトル場  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  の面積分は以下の式である。

$$\int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.6)$$

球面のような閉じた面を閉曲面という。曲面が閉曲面の場合の面積分は次のように表す。

$$\oint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.7)$$

### ◆ E ◆ 体積分

体積分とは、ある体積領域全体について物理量を足し合わせていくことである。

空間上に体積領域  $V$  があり、 $V$  上でスカラー場  $f(\mathbf{r})$  が定義されているとする。この領域を微小な体積領域  $\Delta V$  に分け、それにスカラー場  $f(\mathbf{r})$  を掛けたものを足し合わせることを考える。そして、分割数を増やして  $\Delta V \rightarrow 0$  としていけば体積分が得られる。

$$\int_V f(\mathbf{r}) dV \quad (1.8)$$

## 1.2 ベクトル場の微分：勾配、発散、回転

### ◆ A ◆ ハミルトンの演算子

ハミルトンの演算子は、以下のような形式的なベクトルであり、ナブラと読む。

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^\top \quad (1.9)$$

ナブラの定義や逆三角形の2辺の太さが太いことから、 $\nabla$  はベクトルの形をしていることは明らかである。勿論、 $\frac{\partial}{\partial x}$  だけでは成り立たず、 $\frac{\partial f}{\partial x}$  のように微分される関数がないといけない。では何故こんなものがあるのかというと、後の勾配、発散、回転の式を表すのに便利だからだ。これらは電磁気学で出てくる大切な概念である。

例えば、 $\nabla f$  と表せば、ベクトルのスカラー倍と見做すことができ

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^\top f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right]^\top$$

と、スカラー関数  $f$  を  $x, y, z$  で偏微分したものをそれぞれの成分とするベクトルを表すことができる。尚、これは勾配の定義そのものである。

また、ベクトル関数  $\mathbf{F}$  を内積の形でかければ、

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^\top \cdot [F_x \quad F_y \quad F_z]^\top = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

となる。これは、発散の定義である。

外積の形でかければ

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^\top \times [F_x \quad F_y \quad F_z]^\top = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & F_x \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & F_y \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & F_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial F_z}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \mathbf{k} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \mathbf{i} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \mathbf{j} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \mathbf{k} \\ &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。これは、回転の定義である。

## ◆ B ◆ 勾配 (グラディエント)

スカラー場  $\varphi(x, y, z)$  が直交座標で定義されているとする。このとき、 $x$  についての偏微分を  $x$  成分、 $y$  についての偏微分を  $y$  成分、 $z$  についての偏微分を  $z$  成分とするベクトル場を  $\varphi$  の勾配またはグラディエントといい、 $\text{grad } \varphi$  や  $\nabla \varphi$  で表す。

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]^T \quad (1.10)$$

勾配はそれぞれの点において  $\varphi$  が最も増大する方向を指し示す。勾配の向きは等位面に垂直で、大きさはどれくらい増大しているかを表す。等位面の間隔が狭いとき、勾配が急峻になっているので、 $\nabla \varphi$  の大きさ (矢印の長さ) が大きく、間隔が広いとき、勾配が緩やかなので、 $\nabla \varphi$  の大きさは小さい。

《注》勾配は、入力をスカラー場として、ベクトル場を出力する。

## ◆ C ◆ 発散 (ダイバージェンス)

ベクトル場  $\mathbf{F}(x, y, z)$  が直交座標で定義されているとする。このとき、 $\mathbf{F}$  の  $x$  成分  $F_x$  を  $x$  で、 $y$  成分  $F_y$  を  $y$  で、 $z$  成分  $F_z$  を  $z$  で偏微分したあと、それらを足し合わせたものを  $\mathbf{F}$  の発散またはダイバージェンスといい、 $\text{div } \mathbf{F}$  や  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  で表す。

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.11)$$

発散は、それぞれの点においてベクトル場  $\mathbf{F}$  の流入出を評価する。例えば、 $\mathbf{v}(x, y, z)$  は点  $(x, y, z)$  での流体の速度を示すとする。ある空間に 3 辺の長さが  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  の微小な直方体を考える。この直方体に流入する流体の量を  $V_{\text{in}}$ 、流出する流体の量を  $V_{\text{out}}$  とするとき、 $V_{\text{out}} - V_{\text{in}} > 0$  なら、流出量の方が多いので、この直方体の中に蛇口のようなものがあってそこから流体が「湧き出て」いることを表す。逆に  $V_{\text{out}} - V_{\text{in}} < 0$  なら、流出量の方が少ないので、この直方体の中に排水溝のようなものがあってそこに流体が「吸い込まれて」いることを表す。証明は略すが、この直方体の中から流れ出る流体は

$$V_{\text{out}} - V_{\text{in}} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = (\text{div } \mathbf{v}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

で表すことができる。直方体の体積は  $\Delta x \Delta y \Delta z$  なので、これで割ると  $\text{div } \mathbf{v}$  は単位時間における単位体積あたりでの直方体の中から流出した流体の体積を表す。 $\text{div } \mathbf{v} > 0$  のとき「湧き出し」、 $\text{div } \mathbf{v} < 0$  のとき「吸い込む」、 $\text{div } \mathbf{v} = 0$  のときは流れ入った流体はそのまま流れ出る。

《注》発散は、入力をベクトル場として、スカラー場を出力する。

## ◆ D ◆ 回転 (ローテーション)

ベクトル場  $\mathbf{F}(x, y, z)$  が直交座標で定義されているとする。このとき、次のように定義されるものを  $\mathbf{F}$  の回転またはローテーションといい、 $\text{rot } \mathbf{F}$  や  $\nabla \times \mathbf{F}$  で表す。

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & F_x \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & F_y \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

回転は、それぞれの点においてベクトル場  $\mathbf{F}$  の回転の向きや強さを表している。 $\text{rot } \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$  のとき  $\mathbf{F}$  が回転軸に対して渦巻いている、つまり回転する要素があるということになる。

《注》回転は、入力をベクトル場として、ベクトル場を出力する。

# 1.3 クーロン力と電場

## ◆ A ◆ クーロン力 (静電気力)

クーロン力が起こる原因になるものを電荷という。電荷には正負があり、正の電荷をもつ代表的なものに陽子、負の電荷をもつ代表的なものに電子がある。電荷の量を電荷量といい、 $q$  と表す。単位は C である。

1 C は 1 A の電流を 1 秒間流した時に流れる電荷量なので

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s} \quad (1.13)$$

である。

陽子と電子の電荷量は大きさが同じで向きが反対である。陽子と電子の電荷の大きさを電気素量といい、 $e$  で表す。

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.14)$$

つまり、陽子の電荷量は  $+e$ 、電子の電荷量は  $-e$  である。

電荷は陽子と陽子、電子と電子のように同符号であるとき、2つの電荷の間に反発する力（斥力）が働く。また、陽子と電子のように異符号であるとき、2つの電荷の間に引き合う力（引力）が働く。このような力を**クーロン力**といい、以下の法則が成り立つ。

### クーロンの法則

2つの点電荷があり、それぞれの電荷量を  $Q, q$  とする。 $Q$  から  $q$  へ向かうベクトルを  $\mathbf{r}$  とするとき、点電荷  $q$  に働くクーロン力は

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (1.15)$$

である。 $\epsilon_0$  は真空の誘電率である。また、**青緑色**はクーロン力の大きさ、**水色**はクーロン力の向きを表す。

### クーロン力の大きさ

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  は定数である。 $\epsilon_0$  は真空の誘電率<sup>1)</sup> で、 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8.987552 \times 10^9 \text{ V}^2/\text{N}$  である。この定数値はクーロンの法則が成り立つように辻褃合わせで決められた値であるのでそこまで深く考える必要はない。クーロン力は電荷量に比例し、2点間の距離  $|\mathbf{r}|$  の2乗に反比例する。

### クーロン力の向き

$Q$  と  $q$  が同符号の場合、 $q$  には引力が働くので向きは  $\mathbf{r}$  と同じ向きになる。また、**水色**は向きのみを表すため、大きさが変わってはいけけないので絶対値で割って大きさを1にする。

### 重ね合わせの原理

電荷が  $q, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  と複数個あったとする。また、 $Q_1$  が  $q$  に及ぼすクーロン力を  $\mathbf{F}_1$ 、 $\dots$ 、 $Q_n$  が  $q$  に及ぼすクーロン力を  $\mathbf{F}_n$  とするとき、 $q$  が受けるクーロン力はそれぞれのクーロン力の和で表すことができる（**重ね合わせの原理**）。

### クーロン力の重ね合わせの原理

$Q_i$  から  $q$  へ向かうベクトルを  $\mathbf{r}_i$  とするとき、点電荷  $q$  が受けるクーロン力は、

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (1.16)$$

$$= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\mathbf{r}_i|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \quad (1.17)$$

**例** 点  $A_1(a, 0)$  に点電荷  $Q$ 、点  $A_2(-a, 0)$  に点電荷  $Q$ 、点  $D(0, d)$  に点電荷  $q$  がある。このとき、 $q$  にかかるクーロン力を求めよ。

$$\overrightarrow{A_1D} = \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} -a \\ d \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{A_2D} = \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} \quad \text{とする。よって}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\sqrt{a^2 + d^2})^3} \begin{bmatrix} -a \\ d \end{bmatrix} + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\sqrt{a^2 + d^2})^3} \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\sqrt{a^2 + d^2})^3} \left( \begin{bmatrix} -a \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} \right) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\sqrt{a^2 + d^2})^3} \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## ◆ B ◆ 電場 (1)

クーロン力は、何かの物体に接触していなくても発生する力である。これからある点電荷  $A$  があつたとき、その点電荷  $A$  が周りの空間に影響を及ぼして、その空間の中に点電荷  $B$  が置かれたときに  $A$  による影響を受けてクーロン力が働くのではない

1) 真空の誘電率についてはここでは触れない。そういうものだとして認識してもよい。なお、真空の誘電率は、 $c$  を光の速さ、 $\mu_0$  を真空の透磁率とすると  $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$  で求められる。

かと考えることにする。そのような影響を表す量を**電場**といい、 $E$ で表す。

ここで、クーロンの法則による表し方を変えてみる（一先ず、クーロン力の大きさ（スカラー）だけを考える）。

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \\ &= Q_2 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

式(1.18)をこういう見方で考える。

- [1]  $Q_2$  の存在は置いて、点電荷  $Q_1$  があることによって  $Q_1$  が周りの空間にある影響  $E$  を作り出す（本来はベクトル  $E$ ）。これは式(1.18)の青緑色の部分に該当する。
- [2]  $Q_2$  は、 $E$  を感じてクーロン力を受ける。

## 電場 (1)

電荷に力を作用させる電氣的な空間（このような空間のことを**場**と呼ぶ。特に、場の値がベクトルであるとき**ベクトル場**という）。

では、このことをベクトルでまとめる。

## 電場 (2)

原点にある電荷  $Q_1$  があって、この電荷が周りの空間のある1点  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  に

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (1.19)$$

だけの電場を作っていると考える。そして、その電場に入った電荷  $Q_2$  は、電場から

$$\mathbf{F} = Q_2 \mathbf{E} \quad (1.20)$$

と表せる力を受ける。電場  $\mathbf{E}$  の単位は N/C である。よって、電場は「1C の電荷に働くクーロン力」ということもできる。

電場の向きは  $\mathbf{r}$  に平行である。 $Q_2 < 0$  であれば、 $\mathbf{r}$  と反対向きになる。

## ◆ C ◆ 電荷の分布

今までは点電荷について進めてきたが、実際電荷は空間にどのように分布しているか考える。

**点電荷**は、空間のある1点に存在する電荷で、大きさをもたない。これでは現実味に欠けるので、空間的な広がりを与えていく。

まず、点電荷がある1方向に広がって分布する**線電荷**を考える。このとき、単位長さ（MKS 単位系では 1m）あたりの電荷量を**線電荷密度**といい、 $\lambda$  で表す。単位は C/m である。経路  $C$  上に存在する電荷の総量、つまり経路  $C$  にある総電荷  $Q$  は、以下のように線積分で求めることができる。

$$Q = \int_C \lambda dl \quad (1.21)$$

しかし、この線電荷は1方向には広がりを持つが、太さを持たない線であることが条件である。これではまだ非現実的なので、もう1方向に広がって分布する**面電荷**を考える。面  $H$  上の面電荷について、単位面積（MKS 単位系では  $1\text{m}^2$ ）あたりの電荷量を**面電荷密度**といい、 $\sigma$  で表す。単位は  $\text{C}/\text{m}^2$  である。面  $H$  上に存在する電荷の総量（総電荷） $Q$  は、以下のように面積分で求めることができる。

$$Q = \int_H \sigma dS \quad (1.22)$$

しかし、これも面に厚みがないものとするので、これでも現実的な電荷分布とは言えない。更にもう1方向に広がって分布する電荷を考える。これは風船のような空間の体積領域  $V$  の内部に電荷が分布していると考え。このとき、単位体積（MKS 単位系では  $1\text{m}^3$ ）あたりの電荷量を**電荷密度**といい、 $\rho$  で表す。単位は  $\text{C}/\text{m}^3$  である。体積領域  $V$  に存在する電荷の総量（総電荷） $Q$  は、以下のように体積分で求めることができる。

$$Q = \int_V \rho dV \quad (1.23)$$

## ◆ D ◆ 電場 (2)