Optimisation TD 1
Descente de gradient et méthode de Newton

C. Frindel

30 septembre 2019

Le but du TP est de tester et de comparer deux méthodes d'optimisation vues en cours : la descente de gradient et la méthode de Newton, toutes deux étant des méthodes dites de descente. Les fichiers `surface3d_demo.py` et `lines3d_demo.py` permettent, respectivement, de représenter une surface et une trajectoire en 3-D avec la bibliothèque matplotlib. Ils constitueront donc des outils de visualisation particulièrement adaptés à cette étude.

1 Cas 1 : Fonction convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

On se propose de rechercher le minimum de la fonction $f(x, y) = (x - y)^4 + 2x^2 + y^2 - x + 2y$.

1. Tracer dans `matplotlib` la fonction et repérer le minimum global et (éventuellement) les minima locaux. Commenter.
2. Calculer le gradient g de la fonction f. Quelle est son expression ?
3. Implémenter la méthode de descente de gradient. Testez les différents critères d'arrêt vus en classe et commentez (commencez par le plus facile).
4. Faire tourner l'algorithme pour le point de départ $(x_0, y_0) = (1, 1)$ et pour un pas quasi unitaire de 0.9.
5. En combien d'itérations converge l'algorithme ? De même, quelle est la solution renvoyée par l'algorithme ainsi que son erreur relative ?
6. Tracer avec matplotlib la trajectoire $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ de l'algorithme et la fonction f. Tester d'autres valeurs pour les paramètres de l'algorithme (point de départ, conditions d'arrêt, pas) et étudier les trajectoires résultantes.
7. Calculer la Hessienne de la fonction f. Quelle est son expression ?
8. Implémenter la méthode de Newton. L'arrêt du calcul sera conditionné par les mêmes conditions que pour la méthode de descente de gradient.
9. Faire tourner l'algorithme pour le point de départ $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
10. En combien d'itérations converge l'algorithme ? De même, quelle est la solution renvoyée par l'algorithme ainsi que son erreur relative ?
11. Tracer avec matplotlib la trajectoire $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ de l'algorithme et la fonction f. Tester d'autres valeurs pour les paramètres de l'algorithme (point de départ, conditions d'arrêt, pas) et étudier les trajectoires résultantes.
12. Comparer les résultats des deux méthodes.

2 Cas 2 : Fonction non convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

On se propose de rechercher le minimum de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$.

1. Tracer dans `matplotlib` la fonction et repérer le minimum global et (éventuellement) les minima locaux. Justifier ce que vous voyez.

2. Faire tourner l'algorithme de descente de gradient avec les mêmes conditions d'arrêt du calcul que précédemment. Prendre un pas de 0.01. Tester les points de départ $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et $(x_0, y_0) = (-5, 5)$. Commenter vos résultats.
3. Faire tourner l'algorithme de Newton avec les mêmes conditions d'arrêt du calcul que précédemment. Tester les mêmes points de départ. Commenter vos résultats.
4. Comparer les résultats des deux méthodes. Et expliquer pourquoi elles n'ont pas le même comportement pour le point de départ $(x_0, y_0) = (-5, 5)$.

3 Cas 3 : Fonction non convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On se propose finalement de rechercher le minimum de la fonction $f(x) = x^4 - x^3 - 20x^2 + x + 1 + y^4 - y^3 - 20y^2 + y + 1$.

1. Tracer dans `matplotlib` la fonction et repérer le minimum global et (éventuellement) les minima locaux. Justifier ce que vous voyez.
2. Faire tourner l'algorithme de descente de gradient avec les mêmes conditions d'arrêt du calcul que précédemment. Prendre un pas de 0.01. Tester les points de départ $(x_0, y_0) = (3, 4)$, $(x_0, y_0) = (-3, -3)$ et $(x_0, y_0) = (-4, -3)$. Commenter vos résultats.
3. Faire tourner l'algorithme de Newton avec les mêmes conditions d'arrêt du calcul que précédemment. Tester les mêmes points de départ. Commenter vos résultats.
4. Expliquer pourquoi la solution renvoyée par les deux algorithmes dépend du point de départ choisi. Quelle devrait être la solution à renvoyer dans tous les cas ?
5. Conclure sur les avantages et les inconvénients de ces méthodes, appelées "méthodes de descente".