ctf——Crypto

CTF（Capture The Flag）是信息安全领域中一种极具挑战性和趣味性的竞赛形式，参赛者通过破解各种加密、解密、编程和逆向工程等任务来获得"旗帜"（Flag）。在CTF竞赛中，密码学方向的任务主要涉及各种加密算法、解密技巧和密码破解的应用。具体来说，CTF密码学方向的任务通常包括经典密码破解（如凯撒密码、维吉尼亚密码等）、现代加密算法的攻击、密钥恢复、哈希碰撞以及密码协议的漏洞分析等。

需要运用对密码学知识的理解和实际操作技能，解决与加密算法、密文分析、数据泄露、漏洞利用等相关的问题。这考验了选手对密码学理论的掌握，还要求具备一定的编程能力、逆向思维以及创新性的解决问题的能力。CTF密码学方向的任务既可以是理论性的，如对传统密码学算法的分析，也可以是实践性的，如模拟现代加密算法的攻击。

Crypto方向题目类型：

1. 经典加密算法破解

- **对称加密（如AES、DES）**：这些题目通常会给出加密文本和一些已知信息（比如密钥、明文等），考察选手如何通过分析和算法攻击破解加密数据。
- **非对称加密（如RSA、ECC）**：RSA是CTF比赛中最常见的加密方式之一，题目可能包括公钥加密、私钥泄漏、密钥恢复、数字签名等，一般需要利用数学知识（如素因数分解、扩展欧几里得算法）破解这些加密。
- **哈希函数（如MD5、SHA）**：这些题目一般会给出某个哈希值，要求选手找出原始数据，或是利用碰撞攻击、字典攻击等方法破解哈希值。

2. 编码和加密算法的组合

- 很多Crypto题目涉及到某种加密算法与编码方式（如Base64、Hex、URL编码等）结合，需要首先解码，再进行加密破解或逆向解密。

3. 流密码与分组密码

- **流密码（如RC4）**：流密码生成的加密文本可能与某种特定的结构有关，需要通过分析密文流来恢复密钥。
- **分组密码（如DES、AES）**：这类题目中，密文可能采用了某种模式（如ECB、CBC），破解时需要注意模式的特性，并利用它们的弱点进行攻击。

4. 密码学漏洞利用

- 这些题目通常会涉及到加密算法的漏洞或设计缺陷，选手需要找到漏洞并利用它进行破解。常见的漏洞包括**时间攻击**、**侧信道攻击**、**重放攻击**、**密钥恢复**等。
- 例如，某些加密算法可能使用不安全的随机数生成器，或者密钥长度不够，攻击者可以利用这些弱点进行攻击。

5. 数学问题

- 密码学问题往往需要一定的数学基础，特别是数论、代数、概率论等。常见的数学题目包括**素数分解**、**离散对数问题**、**欧几里得算法**等。
- 例如，RSA加密的安全性基于大数分解的困难性，所以如果你能利用某些优化算法对大数分解进行攻击，就能破解RSA。

6.古典密码

古典密码（Classical Cryptography）是指在现代计算机技术普及之前使用的加密技术，通常是通过简单的数学或逻辑方法来对信息进行加密和解密。常见的有凯撒密码、单表替换密码、栅栏密码、维吉尼亚密码、摩尔斯密码等等。

数论基础

1.整除

定义

设 a 和b是两个整数，且$b \neq 0$。如果存在一个整数 k，使得 $a = b \cdot k$，则称 b 整除 a，记作 $b \mid a$。

例子

1. $3 \mid 6$，$6 = 3 \cdot 2$
2. $5 \mid 10$，$10 = 5 \cdot 2$
3. $4 \mid 12$，$12 = 4 \cdot 3$
4. $7 \mid 21$，$21 = 7 \cdot 3$

整除的性质

1. **自反性**：对于任何整数 a，都有$a \mid a$。
2. **传递性**：如果 $a \mid b$ 且 $b \mid c$，那么 $a \mid c$。
3. **线性组合**：如果 $a \mid b$且 $a \mid c$，那么对于任何整数 m和 n，都有 $a \mid (mb + nc)$。
4. **倍数性质**：如果 $a \mid b$，那么对于任何整数k，都有$a \mid (bk)$。
5. **因数性质**：如果 $a \mid b$且 $b \neq 0$，那么 $|a| \leq |b|$。
6. **唯一性**：如果$a \mid b$且$b \mid a$，那么 $a = \pm b$。

2.同余

定义

设 a 和b 是两个整数，m是一个正整数。如果a和b 除以 m的余数相同，即 $amodm = bmodm$，那么我们称 a和b模 m同余，记作$a \equiv b(modm)$。

例子

$15 \equiv 3(mod12)$，$15mod12 = 3$且$3mod12 = 3$

$22 \equiv 10(mod6)$，$22mod6 = 4$且$10mod6 = 4$

$100 \equiv 25(mod75)$，$100mod75 = 25$且$25mod75 = 75$

同余的性质

1. **自反性**：对于任何整数 a 和正整数m，都有 $a \equiv a(mod m)$。
2. **对称性**：如果 $a \equiv b(mod m)$，那么 $b \equiv a(mod m)$。
3. **传递性**：如果$a \equiv b(mod m)$且$b \equiv c(mod m)$，那么 $a \equiv c(mod m)$。
4. **线性组合**：如果 $a \equiv b(mod m)$且$c \equiv d(mod m)$，那么对于任何整数k和l，都有 $ka + lc \equiv kb + ld(mod m)$
5. **乘法性质**：如果 $a \equiv b(mod m)$，那么对于任何整数k，都有 $ak \equiv bk(mod m)$。
6. **除法性质**：如果 $a \equiv b(mod m)$且k是 a和b的公因数，

3.逆元

定义

在数论中，逆元通常指的是模m的逆元。设 a 是一个整数，m是一个正整数，如果存在一个整数b，使得 $a \cdot b \equiv 1(mod m)$，那么我们称 b 是 a模 m的逆元，记作 $a^{-1} \equiv b(mod m)$

此外，逆元的范围属于1 ~（m-1）

例子

1. 求 3模 7 的逆元：
   - 我们需要找到一个整数 b，使得$3 \cdot b \equiv 1(mod 7)$。
   - $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1(mod 7)$。
   - 因此，3 模 7的逆元是 5
2. 求 2 模 9 的逆元：
   - 我们需要找到一个整数 b，使得 $2 \cdot b \equiv 1(mod 9)$。
   - $2 \cdot 5 = 10 \equiv 1(mod 9)$
   - 因此，2 模 9的逆元是 5。

逆元的性质

1. **唯一性**：如果 a 模 m的逆元存在，那么它是唯一的。
2. **存在性**：a模 m 的逆元存在当且仅当 a和 m互质，即 $gcd(a, m) = 1$。
3. **逆元的逆元**：如果 b是 a模 m的逆元，那么 a是 b模 m的逆元。

4.欧拉函数

定义

在数论中，欧拉函数 $\phi(n)$ 表示小于或等于 n的正整数中与n互质的数的个数。

性质

1. **积性函数**：如果 a和 b 互质，即 $gcd(a,b)=1$那么 $\phi(ab)=\phi(a)\cdot\phi(b)$
2. $\phi(1)=1$：显然，1 与任何数互质。
3. **质数的欧拉函数**：对于质数p， $\phi(p)=p-1$
4. **质数幂的欧拉函数**：对于质数的幂 p^k， $\phi(p^k)=p^k-p^{k-1}$
5. **一般计算公式**：如果 $n=\prod p_it_i$，其中 p_i 是质数，t_i为正整数，那么

$$\phi(n)=n\prod(1-\frac{1}{p_i})$$

例子

1. **计算 φ(10)**：
   - 小于或等于 10 的正整数中与 10 互质的数有：1, 3, 7, 9。
   - φ(10)=4。
2. **计算 φ(12)**
   - 小于或等于 12 的正整数中与 12 互质的数有：1, 5, 7, 11。
   - φ(12)=4
   - $\phi(12)=\phi(3)*\phi(4)=(3-1)*(2^2-2^1)=4$

5.欧拉定理

定义

欧拉定理（Euler's Theorem）是数论中的一个重要定理，它描述了模运算中的一些性质。具体来说，对于任意整数 a 和正整数 n，如果 a 和 n 互质（即 $gcd(a,n)=1$），那么有：
$a^{\phi(n)}\equiv1(modn)$ 其中$\phi(n)$是欧拉函数，表示小于或等于n的正整数中与 n互质的数的个数。

例子

1. **计算3^{83} 的最后两位数**：
   - 首先，我们需要计算 $\phi(100)$。因为 $100=2^2\times5^2$，所以：
     $$\phi(100)=100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=40$$
   - 由于$gcd(3,100)=1$，根据欧拉定理，我们有：$3^{40}\equiv1(mod100)$
   - 因此：$3^{83}=3^3\times3^{80}=3^3\times(3^{40})^2\equiv3^3\times1^2=27(mod100)$
   - 最后两位数是 27。

6.费马小定理

费马小定理（Fermat's Little Theorem）是数论中的一个基本定理。具体来说，如果p是一个质数，且a是一个不被p整除的整数（即$gcd(a,p)=1$，那么有：$a^{p-1}\equiv1(modp)$

例子

计算：$2^{10} mod 11$

费马小定理的应用

费马小定理在数论、密码学、计算机科学等领域有广泛的应用。例如，在RSA 加密算法中，费马小定理被用来简化模幂运算。此外，费马小定理还可以用于素性测试，即判断一个数是否为质数。

7.群

群是一个集合G，配备了一个二元运算 •，满足以下四个公理：

1. **封闭性**：对于所有 $a, b \in G$，运算 $a, b \in G$的结果也在G中。
2. **结合律**：对于所有 $a, b, c \in G$，有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. **单位元**：存在一个元素 $e \in G$，使得对于所有 $e \in G$，有$e \cdot a = a \cdot e = a$
4. **逆元**：对于每个 $a \in G$，存在一个元素 $b \in G$，使得 $a \cdot b = b \cdot a = e$

例子：

- 整数集合Z在加法运算下构成一个群，单位元是 0，每个元素a逆元是$-a$
- 非零有理数集合 Q^* 在乘法运算下构成一个群，单位元是 1，每个元素 a的逆元是 $\frac{1}{a}$

RSA

密钥生成

RSA密钥生成包括以下步骤：
①选择两个大质数p和q
②计算n=pq
③欧拉公式φ(n)=(p-1)(q-1)
④选择一个整数e，使得1<e<φ(n)，且e和φ(n)互质
⑤计算e关于φ(n)的模逆元d，即ed≡1(mod φ(n))
此时就能得到公钥pk=(e, n)，私钥sk=(d, n)

RSA加密和解密

给定明文M，加密过程如下：

- 计算C≡M**e (mod n)，得到的C就是密文。

给定密文C，解密过程如下：

- 计算M≡C**d (mod n)，得到的M就是解密后的明文。

对称密码

一、基础知识

（一）异或

运算规则：同为0，异为1

0⊕0=0	**1⊕1=0**
0⊕1=1	1⊕0=1

（二）常见三种运算符

1. ^，异或计算
2. |，有1则1，全0才0 （析取）
3. &，有0则0，全1才1（合取）

（三）奇偶校验

奇偶校验是一种校验代码传输正确性的方法。根据被传输的一组二进制代码的数位中“1”的个数是奇数或偶数来进行校验。

采用奇数的称为奇校验，反之，称为偶校验。采用何种校验是**事先规定好**的。通常专门设置一个奇偶校验位，用它使这组代码中“1”的个数为奇数或偶数。

用奇校验，则当接收端收到这组代码时，校验“1”的个数是否为奇数，从而确定传输代码的正确性。

（四）有限域

有限域是包括有限个元素、能进行加减乘除运算的集合

- 单位元：任何元素与单位元做运算，得到的都是该元素，单位元是唯一的。
- 逆元：A与B做运算，得到的结果是单位元，则A和B互为该运算下的逆元
- 封闭性：运算元素和结果都在域中有对应元素
- 结合律
- 交换律
- 分配律
- 无零因子

用处：将四则运算精简为二则运算加和乘

有限域$GF(p)$

p一定为素数，运算是模p的运算，域中有p个元素，p为素数保证每个元素都有加法和乘法逆元

例：$GF(p)$，其中 p = 7

- 加：$(a \oplus b)(mod\ 7) = (a + b)(mod\ 7)$
- 减：$(a \ominus b)(mod\ 7) = (a + (-b))(mod\ 7)$，-b为 b 的加法逆元
- 乘：$(a \otimes b)(mod\ 7) = (a \times b)(mod\ 7)$
- 除：$(a \oslash b)(mod\ 7) = (a/b)(mod\ 7) = (a \times (b^{-1}))(mod\ 7)$，$b^{-1}$是 b 的乘法逆元

  在这里，已知$5 \otimes 3 = 1$，所以$6 \oslash 5 = 6 \otimes 3 = 4$，除法运算要求在有限域$GF(7)$内，满足封闭性

符合二进制的域$GF(2^m)$

$GF(2)$：只有0和1元素，01相加减都需要模2，符合异或运算

扩展域： 如果有限域的阶不是素数，则在这个有限域内加法和乘法操作就不能模p，$m>1$ 的域称为扩展域。扩展域的元素可以用多项式表示，且扩展域内的计算也可以通过多项式运算得到。

扩展域$GF(2^m)$： 在AES中包含256个元素的有限域可以用$GF(2^8)$。该域的每一个元素都可以用一个字节表示。

每个元素 $A \in GF(2^8)$ 都可以表示为：$A(x)=b_7x^7+\ldots\ldots+b_1x+b_0, b_i \in GF(2)=0,1$

简单举例：$1=1, 2=x, 3=1+x, 4=x^2, 5=1+x^2, 6=x+x^2, \ldots\ldots$

运算

加法： 异或

例：$57+66=01010111+01100110=00110001=31$，这里的57、66和31均为16进制

乘法： 先乘再加，最后模，这里的模多项式采用$m(x)=x^8+x^4+x^3+x+1$

$$
\begin{aligned}
&57 \times 66 = 01010111 \times 01100110 \\
&= (x^6+x^4+x^2+x+1) \times (x^6+x^5+x^2+x) \\
&= x^{12}+x^{10}+x^8+x^7+x^6+x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5 \\
&+ x^8+x^6+x^4+x^3+x^2+x^7+x^5+x^3+x^2+x \\
&= x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^7+x^6+x^4+x(mod\ x^8+x^4+x^3+x+1) \\
&= x^7+x^5+x^4+x^3+x+1
\end{aligned}
$$

二、分组密码

定义：将明文消息分割成固定长度的数据块，并使用相同的密钥和算法对每个数据块进行加密

例：加密FOUR_AND_FOUR利用分组密码可以先加密FOUR，再加密_AND_，最后加密FOUR，即一次加密明文中一个字符块

（一）分组模式

分为ECB（电子密码本）、CBC（密码块链接）、CFB（密码反馈），OFB（输出反馈），前两种模式使用分组密码，后两种模式将分组密码当作流密码使用，另外常见还有CTR（计数器），是OFB的变种

1. **ECB**

   一般给定密钥后，相同的明文块会有相同的密文块，如果明文块反复出现，对应的密文块也会多次出现，会为破解密文提供线索

   加密：

   电子密码本仅适合加密短消息，明文重复少，破解几率低

   解密：

2. **CBC**

   在块密码中增加反馈机制链接，即用每个块来修饰下一个块的加密

   加密：

(1) 如图所示，第1步有两个输入：第1个明文块和一个随机文本块。随机文本块是初始化向量（IV），没有特殊含义，只是为了使每个消息独特。将第1个明文块和IV异或再用密钥加密，生成密文块1

(2) 将密文块1跟明文块2异或后再用密钥加密得出密文块2，依次类推

注：IV仅在第1个明文块中使用，但用相同的密钥加密

解密：

关于填充，一般情况下明文长度是不符合分块要求的，需要对此进行填充。

常见填充方式如下：

1. **ISO 10126：** 规定应在最后一个块的末尾用随机字节进行填充，填充边界应由最后一个字节指定。

   这种填充方式中，填充字符串的最后一个字节为填充字节的长度，其他为随机字节

   例如：现在有3bytes，块大小为8bytes，需要填充5bytes，则最后一个为 05，其他全部为 00

   原数据：66 6F 72

   填充后的数据：66 6F 72 81 A3 00 23 05

2. **PKCS7：** 假设需要填充n (n>0) 个字节才对齐，填充n个字节，每个字节都是n ； 如果数据本身就已经对齐了，则填充一块长度为块大小的数据，每个字节都是块大小；PKCS7填充字节的范围在 **1-255** 之间 ， 填充方式为上面的 填充数据为填充字节的长度，填充如下：

```
01
02 02
03 03 03
04 04 04 04
05 05 05 05 05
06 06 06 06 06 06
```

当且仅当N小于256时才有用。

原数据：66 6F 72

填充后的数据：66 6F 72 05 05 05 05 05

3. **PKCS5：** 将数据填充到8的倍数，填充数据计算公式是，假如原数据长度为len，利用该方法填充后的长度是 len + (8 - (len % 8)), 填充的数据长度为 8 - (len % 8)，块大小固定为8字节，和PKCS7的区别在于，5的填充块大小为8bytes，而7的填充块大小可以在1-255bytes之间。
4. **ISO/IEC 7816-4：** 第一个字节是值为 '80' （十六进制） 的强制字节，如果需要，后跟 0 到 *N* − 1 个设置为 '00' 的字节，直到到达块的末尾

   例如：66 6F 72 80 00 00 00 00
5. **Zero padding：** 所有需要填充的字节都用零填充。比如66 6F 72 00 00 00 00 00。它通常应用于二进制编码的字符串(以null 结尾的字符串)，因为null字符通常可以作为空格被剥离。

（二）DES

DES使用56位的密钥和64位的明文块进行加密，初始密钥实际上也是64位，但在开始之前，丢弃了密钥的每个第8位，得到56位密钥。丢弃之前可进行奇偶校验，以确保密钥不包含任何错误。

(1)初始置换

初始置换只发生一次，且只发生在第一轮之前，例如，初始置换指定要将原始明文块的第1位替换成原始明文块的第58位，第2位替换成第50位等。

完成初始置换后，生成的64位置换明文块被分为两半，各32位，左半块是左明文(L0)，右半块是右明文(R0)，对这两块执行16轮操作

58	50	42	34	26	18	10	2
60	52	44	36	28	20	12	4
62	54	46	38	30	22	14	6
64	56	48	40	32	24	16	8
57	49	41	33	25	17	9	1
59	51	43	35	27	19	11	3
61	53	45	37	29	21	13	5
63	55	47	39	31	23	15	7

(2)获取子密钥

在进入第一轮之前，还需要对密钥进行处理生成子密钥，每一轮将使用不同的子密钥参与运算。DES加密算法的密钥长度为56位，一般表示为 64 位(每个第 8 位用于奇偶校验)，将用户提供的 64 位初始密钥经过一系列的处理得到K1,K2,...,K16，分别作为1~16轮运算的16个子密钥。

1. 将64位密钥去掉8个校验位，用密钥置换 PC-1 置换剩下的56位密钥。

   PC-1 置换表如下

57	49	41	33	25	17	9
1	58	50	42	34	26	18
10	2	59	51	43	35	27
19	11	3	60	52	44	36
63	55	47	39	31	23	15
7	62	54	46	38	30	22
14	6	61	53	45	37	29
21	13	5	28	20	12	4

2. 将56位分成前28位C0和后28位D0。
3. 根据轮数，这两部分分别循环左移1位或2位

轮次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
位数	1	1	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1

4. 移动后，将两部分合并成56位后通过压缩置换 PC-2 后得到48位子密钥。

   PC-2 置换表如下

14	17	11	24	1	5
3	28	15	6	21	10
23	19	12	4	26	8
16	7	27	20	13	2
41	52	31	37	47	55
30	40	51	45	33	48
44	49	39	56	34	53
46	42	50	36	29	32

(3)轮函数f

轮函数F的作用是将输入的32比特数据和48比特子密钥进行加密输出32比特

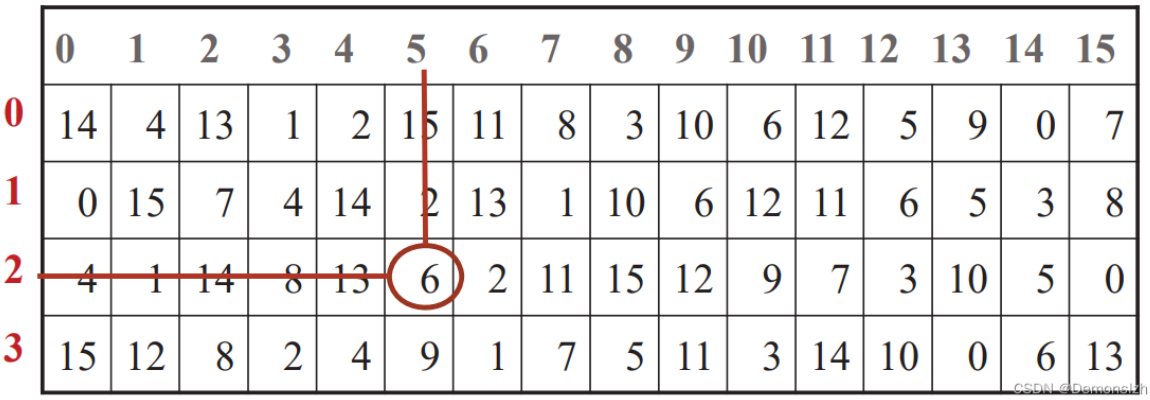
扩展置换E：将数据的右半部分`Ri`从32位扩展为48位。位选择函数(也称E盒)。

异或：扩展后的48位输出`E(Ri)`与压缩后的48位密钥Ki作异或运算；

S盒替换：将异或得到的48位结果分成八个6位的块，每一块通过对应的一个S盒产生一个4位的输出。（8个不同s盒压缩处理）

\	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	14	4	13	1	2	15	11	8	3	10	6	12	5	9	0	7
1	0	15	7	4	14	2	13	1	10	6	12	11	9	5	3	8
2	4	1	14	8	13	6	2	11	15	12	9	7	3	10	5	0
3	15	12	8	2	4	9	1	7	5	11	3	14	10	0	6	13

例如输入`101010`到S1中。S1会将这六位的第一位和第六位拿出来`10`作为S1的行，中间四位`0101`拿出来作为S1的列。我们转换成十进制，此时映射到这个S盒的位置就是`(2,5)`对应S盒的**第3行第6列**（索引都从0开始数）。



P盒置换：将S盒得到的输出再和P盒进行置换操作。

16	7	20	21	29	12	28	17
1	15	23	26	5	18	31	10
2	8	24	14	32	27	3	9
19	13	30	6	22	11	4	25

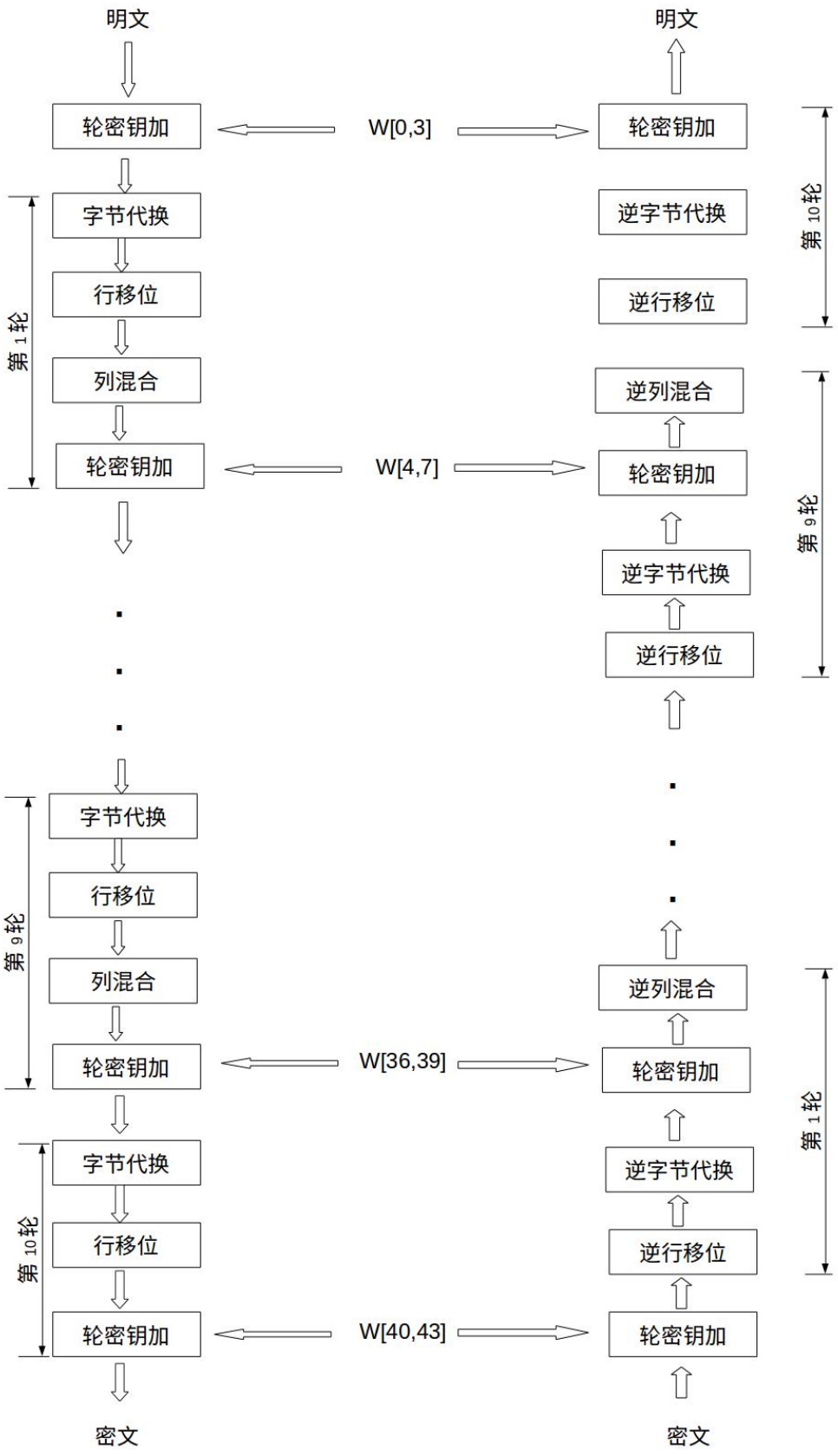
(4)逆置换

也叫最终置换，DES加密过程最后的逆置换IP−1，是初始置换的逆过程。经过16次迭代运算后，进行逆置换，即得到密文输出。逆置换正好是初始置的逆运算。例如，第1位经过初始置换后，处于第40位，而通过逆置换，又将第40位换回到第1位。置换表如下：

40	8	48	16	56	24	64	32	39	7	47	15	55	23	63	31
38	6	46	14	54	22	62	30	37	5	45	13	53	21	61	29
36	4	44	12	52	20	60	28	35	3	43	11	51	19	59	27
34	2	42	10	50	18	58	26	33	1	41	9	49	17	57	25

（三）AES

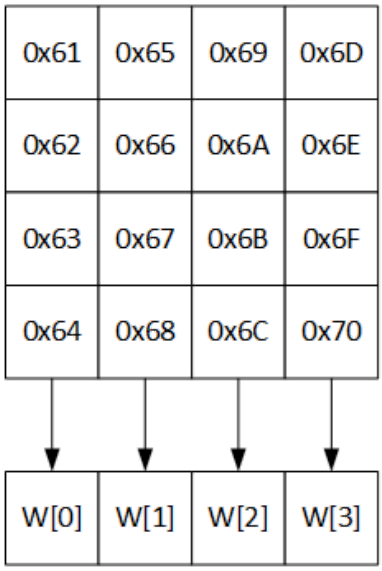
1. 加密

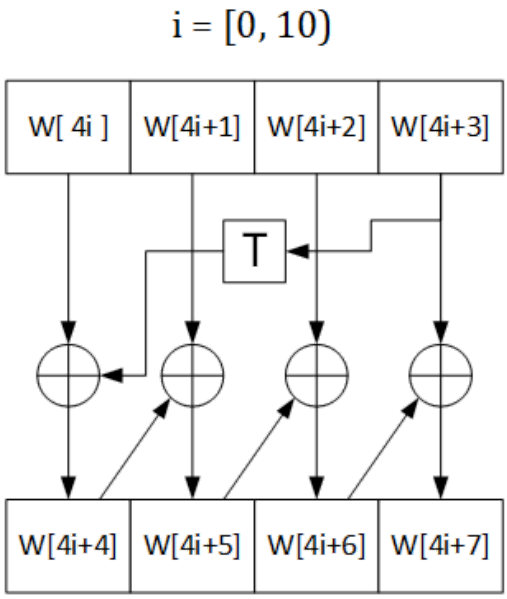

明文
明文
轮密钥加
W[0,3]
轮密钥加
字节代换
逆字节代换
行移位
逆行移位
第10轮
第1轮
列混合
逆列混合
轮密钥加
W[4,7]
轮密钥加
逆字节代换
逆行移位
第9轮
字节代换
行移位
列混合
逆列混合
轮密钥加
W[36,39]
轮密钥加
第9轮
字节代换
逆字节代换
行移位
逆行移位
第10轮
第1轮
轮密钥加
W[40,43]
轮密钥加
密文
密文

秘钥扩展

示例秘钥key = “abcdefghijklmnop”={0x61, 0x62,...,0x6F,0x70}。

AES128中原始秘钥key为16字节，运算中需要11个矩阵大小的秘钥，每一列所包含的32位记为一个uint32_t W，所以秘钥扩展一共需要生产44个列W，即uint32_t W[44]。





AES KeyExpansion

W[0-3]为直接复制的原始秘钥。

W[0] = 0x61626364.
W[1] = 0x65666768.
W[2] = 0x696A6B6C.
W[3] = 0x6D6E6F70.
W[4-43]为扩展的秘钥。

$$W[n] = \begin{cases} W[n-4] \oplus W[n-1], & \text{if n != 4的倍数.} \\ W[n-4] \oplus Mix(W[n-1]) \oplus rcon[(n/4) - 1], & \text{if n == 4的倍数.} \end{cases}$$

Mix(x)=SubWord(RotWord(x))

RotWord()为循环左移一位

SubWord()为字节替换

rcon为轮常量异或，常量数组为：

j	1	2	3	4	5
Rcon[j]	01 00 00 00	02 00 00 00	04 00 00 00	08 00 00 00	10 00 00 00
j	6	7	8	9	10
Rcon[j]	20 00 00 00	40 00 00 00	80 00 00 00	1B 00 00 00	36 00 00 00

下面举个例子：
设初始的128位密钥为：
3C A1 0B 21 57 F0 19 16 90 2E 13 80 AC C1 07 BD
那么4个初始值为：
W[0] = 3C A1 0B 21
W[1] = 57 F0 19 16
W[2] = 90 2E 13 80
W[3] = AC C1 07 BD
下面求扩展的第1轮的子密钥(W[4],W[5],W[6],W[7])。
由于4是4的倍数，所以：
W[4] = W[0] ⊕ T(W[3])
T(W[3])的计算步骤如下：

循环地将W[3]的元素移位：AC C1 07 BD变成C1 07 BD AC;
将 C1 07 BD AC 作为S盒的输入，输出为78 C5 7A 91;
将78 C5 7A 91与第一轮轮常量Rcon[1]进行异或运算，将得到79 C5 7A 91，因此，T(W[3])=79 C5 7A 91，故
W[4] = 3C A1 0B 21 ⊕ 79 C5 7A 91 = 45 64 71 B0
其余的3个子密钥段的计算如下：
W[5] = W[1] ⊕ W[4] = 57 F0 19 16 ⊕ 45 64 71 B0 = 12 94 68 A6
W[6] = W[2] ⊕ W[5] =90 2E 13 80 ⊕ 12 94 68 A6 = 82 BA 7B 26
W[7] = W[3] ⊕ W[6] = AC C1 07 BD ⊕ 82 BA 7B 26 = 2E 7B 7C 9B
所以，第一轮的密钥为 45 64 71 B0 12 94 68 A6 82 BA 7B 26 2E 7B 7C 9B。

轮密钥加： 明文矩阵P，子密钥矩阵K，轮密钥加的结果就是两个矩阵对应元素异或

字节替换： 将字节看作$GF(2^8)$上的元素，根据s盒做映射，然后对字节做如下的（$GF(2)$上可逆的）仿射变换

行移位： 第一行不变，第二行左移1，第三行左移2，第四行左移3

列混淆： 列混合通过矩阵相乘来实现，经过移位后的矩阵左乘一个固定的矩阵，得到混淆后的矩阵，如下公式所示

$$\begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & b_{0,3} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,0} & b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

上述矩阵相乘可以化简为如下表达式：

$$\begin{cases} b_{0,j} = (2 * a_{0,j}) \oplus (3 * a_{1,j}) \oplus a_{2,j} \oplus a_{3,j} \\ b_{0,j} = a_{0,j} \oplus (2 * a_{1,j}) \oplus (3 * a_{2,j}) \oplus a_{3,j} \\ b_{0,j} = a_{0,j} \oplus a_{1,j} \oplus (2 * a_{2,j}) \oplus (3 * a_{3,j}) \\ b_{0,j} = (3 * a_{0,j}) \oplus a_{1,j} \oplus a_{2,j} \oplus (2 * a_{3,j}) \end{cases}$$

其中矩阵的乘法和加法并不是通常意义上的乘法和加法，而是定义在伽罗华域上的二元运算，且使用的不可约多项式为P (x) = x 8 + x 4 + x 3 + x + 1 。其加法为模二加法，相当于异或运算，其乘法可以使用GMul表示，则上式运算可以表示为

$$\begin{cases} b_{0,j} = \mathrm{GMul}(2, a_{0,j}) \wedge \mathrm{GMul}(3, a_{1,j}) \wedge (a_{2,j}) \wedge (a_{3,j}) \\ b_{0,j} = (a_{0,j}) \wedge \mathrm{GMul}(2, a_{1,j}) \wedge \mathrm{GMul}(3, a_{2,j}) \wedge (a_{3,j}) \\ b_{0,j} = (a_{0,j}) \wedge (a_{1,j}) \wedge \mathrm{GMul}(2, a_{2,j}) \wedge \mathrm{GMul}(3, a_{3,j}) \\ b_{0,j} = \mathrm{GMul}(3, a_{0,j}) \wedge (a_{1,j}) \wedge (a_{2,j}) \wedge \mathrm{GMul}(2, a_{3,j}) \end{cases}$$

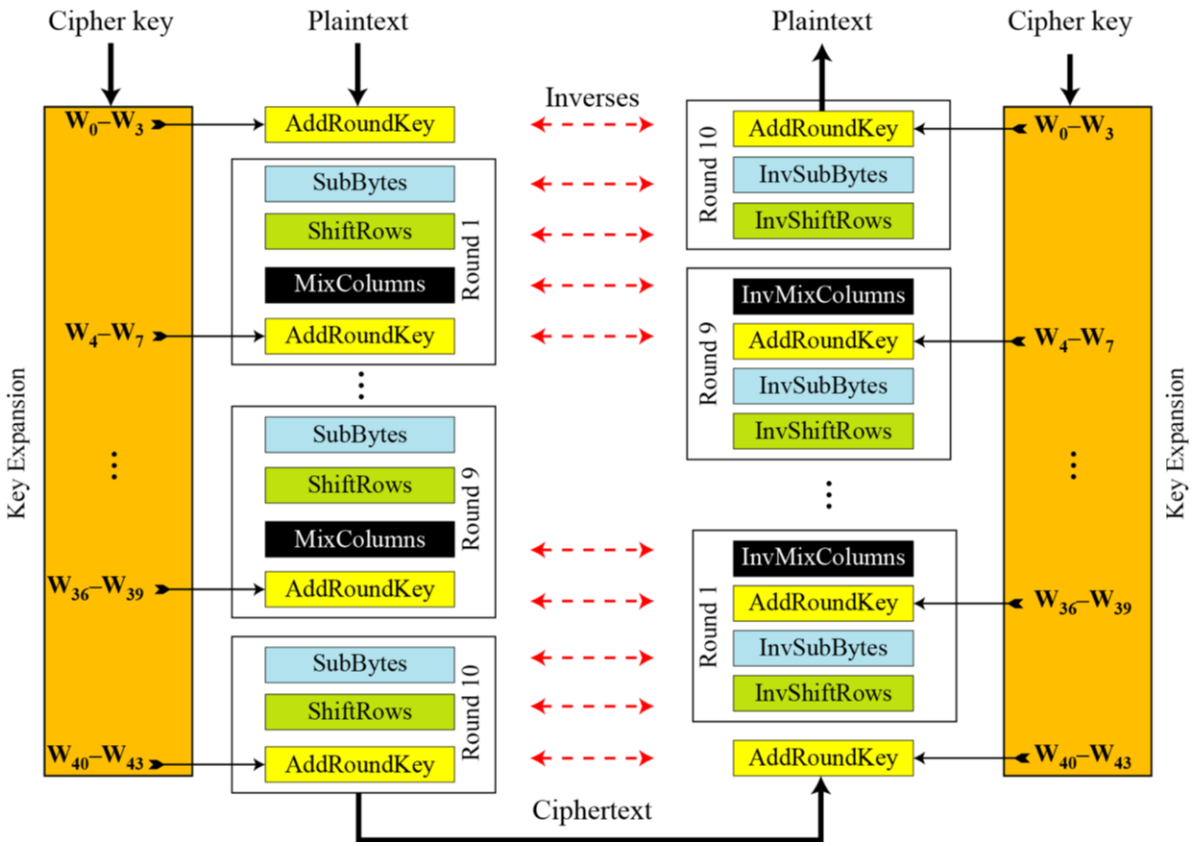
解密时**逆列混合**操作和列混合一样，只是左乘的矩阵使用如下矩阵。可以验证此矩阵B是列混合使用矩阵A的逆矩阵，两者乘积为单位矩阵，即AB=BA=E

$$\begin{bmatrix} 0E & 0B & 0D & 09 \\ 09 & 0E & 0B & 0D \\ 0D & 09 & 0E & 0B \\ 0B & 0D & 09 & 0E \end{bmatrix}$$

2. 解密

- 交换逆向行移位和逆向字节代替并不影响结果
- 交换轮密钥加和逆向列混淆并不影响结果，关键在于首先可以把异或看成域上的多项式加法，然后多项式中乘法对加法具有分配律

加解密全图



三、流密码

定义：流密码是加密和解密双方使用相同伪随机加密数据流作为密钥，明文数据每次与密钥数据流顺次对应加密，得到密文数据流。实践中数据通常是一个位（bit）并用异或（XOR）操作加密 可以理解成明文 $\oplus$ 密钥，但是密钥是由一个伪随机数生成器生成的

PRG/PRNG伪随机数生成器

伪随机序列：如果一个序列能够和等长的随机序列不可区分的话，那么它就是伪随机序列，即可以以假乱真的序列

LCG线性同余生成器

LCG的原理是通过一个递归公式生成下一个随机数，包含一个乘法因子、一个加法常数和一个模数。

$$X_{n+1} = AX_n + B(mod\ m)$$

$$其中乘法因子 0 < A < m，加法常数 0 \leq B < m，模数 m > 0$$

$$A = 13, B = 17, m = 22, X_n = 8$$

$$X_{n+1} = (13 \times 8 + 17) mod\ 22 \ = 121\ mod\ 22 = 11$$

python：

```python
import time
seed = int(time.time())
a=13
b=17
m=22
def generate_random(seed):
    while True:
        seed = (a * seed + b ) % m
        yield seed

random_generator=generate_random(seed)
```

```
12
13 for i in range(20):
14     random_number = next(random_generator)
15     print(random_number)
```