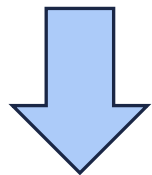


L1ノルム正則化

-ADMMによる解法-

問題説明

Total Variationで画像の滑らかさを評価



TV正則化 (L1正則化)

$$\|b - Ax\|_2^2 + \lambda \|Dx\|_1$$



隣り合うピクセルの差を求める行列

式変形

$$\min \|b - Ax\|_2^2 + \lambda \|Dx\|_1$$

$$= \min \|b - Ax\|_2^2 + \lambda \|y\|_1 \quad s.t. \quad Dx = y$$

拡張ラグランジュ

$$L(x, y, z) := \|b - Ax\|_2^2 + \lambda \|y\|_1 + z^T (Dx - y) + \frac{\rho}{2} \|Dx - y\|^2$$

通常のラグランジュ ←

↑
ペナルティ項

更新アルゴリズム

$$x \leftarrow \underset{x}{\operatorname{argmin}} L(x, y, z)$$

$$y \leftarrow \underset{y}{\operatorname{argmin}} L(x, y, z)$$

$$z \leftarrow z + \rho(Dx - y)$$

xの更新

Lをxについて整理

$$L = \frac{1}{2} x^T (2A^T A + \rho D^T D) x - x^T (2A^T b - D^T z + \rho D^T y) + \text{const}$$

$$H = 2A^T A + \rho D^T D, \quad g = 2A^T b - D^T z + \rho D^T y \quad \text{とおく}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} (H + H^T) x - g = 0 \quad \text{を解く}$$

$$x = H^{-1} g$$

yの更新

Lをyについて整理


$$L = \lambda \|y\|_1 + \frac{\rho}{2} \left\| y - \left(Dx + \frac{1}{\rho} z \right) \right\|^2 + \text{const}$$

$w = Dx + \frac{1}{\rho} z$ とおく。

$$\operatorname{argmin}_y L \Leftrightarrow \operatorname{argmin}_y \frac{L}{\rho}$$

$$y = \operatorname{prox}_{\frac{\lambda}{\rho} \|\cdot\|_1} [w] = S_{\frac{\lambda}{\rho}}(w) = \operatorname{sign}(w) \max(|w| - \frac{\lambda}{\rho}, 0)$$

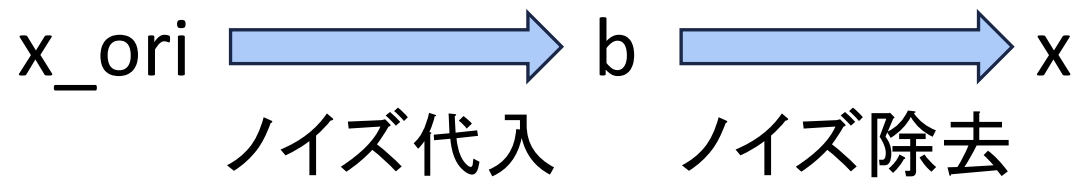
実装

1. x_{ori}  b
ノイズ加える
2. A, λ, D, ρ を定義
3. x, y, z を初期化
4. x, y, z を規定回数更新
5. PSNRや収束度合いグラフを出力

PSNR

画像がどれだけ復元されたかの尺度

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{\|x_{ori} - b\|^2 / len(x_{ori})} [dB]$$

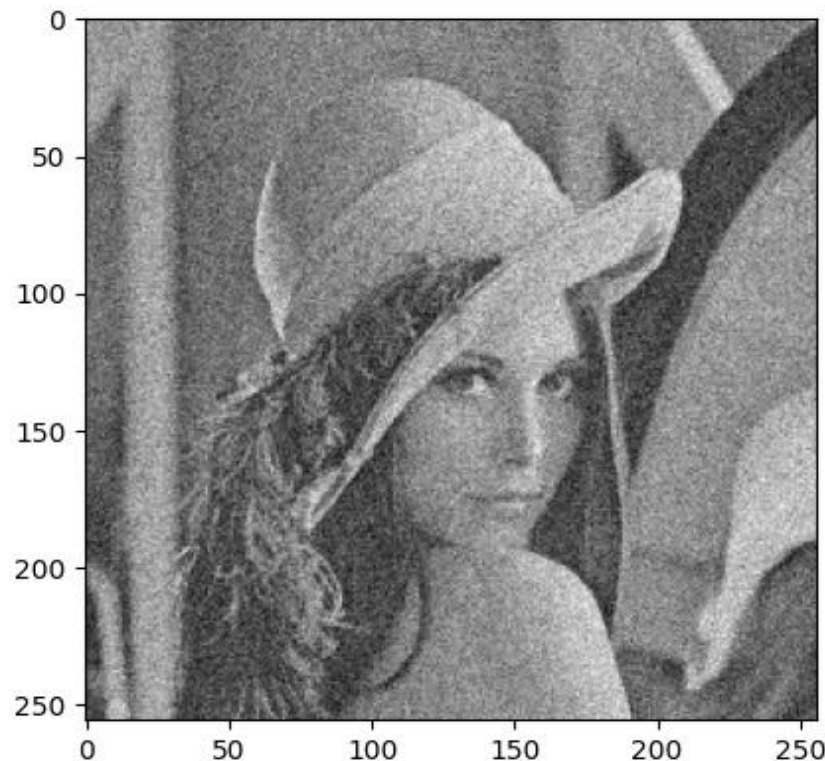


PSNR1	x_{ori}	b
PSNR2	x_{ori}	x

実験結果

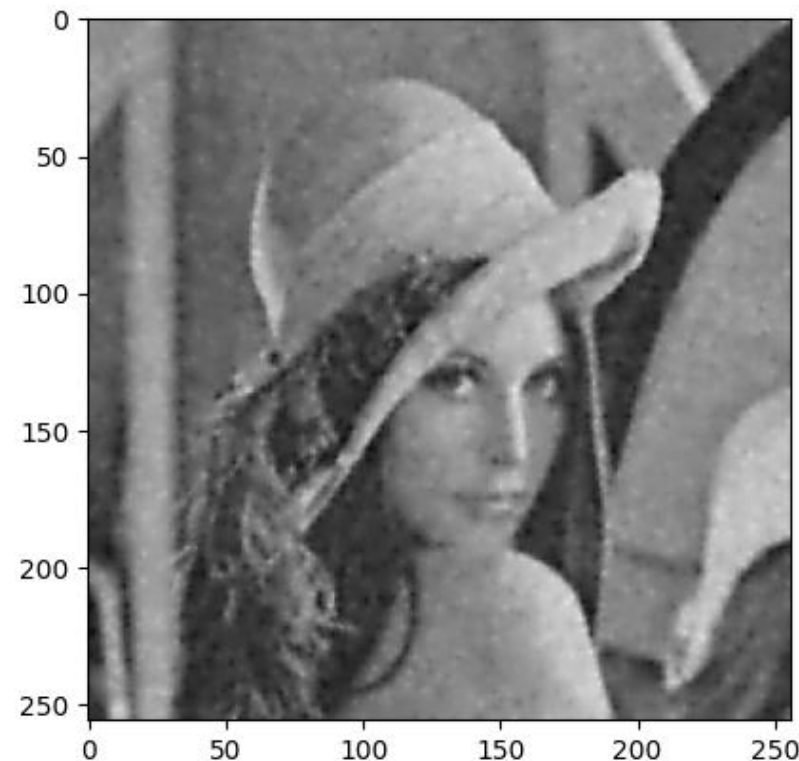


原画像 : x_{ori}



ノイズ入り画像 : b

PSNR1=70.03

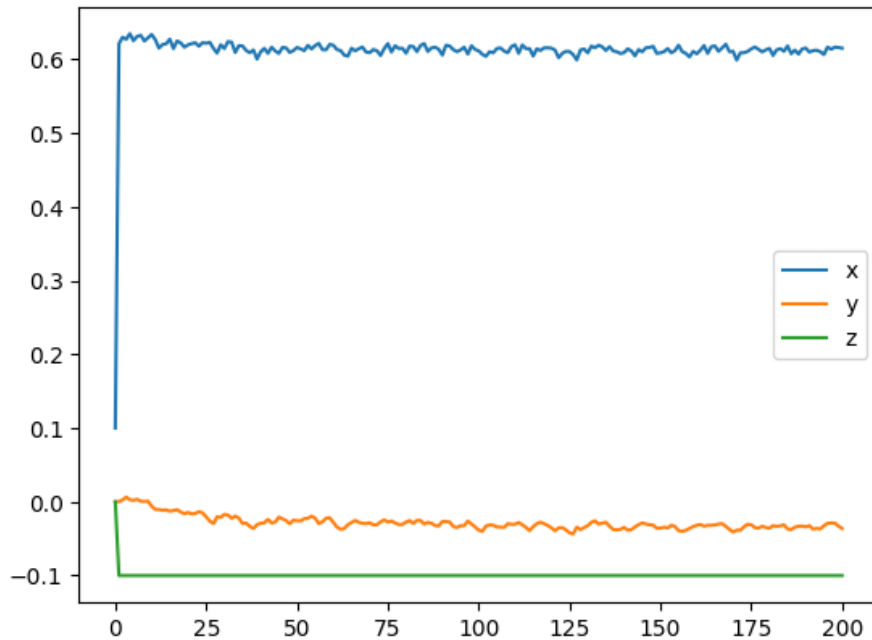


ノイズ除去画像 : x

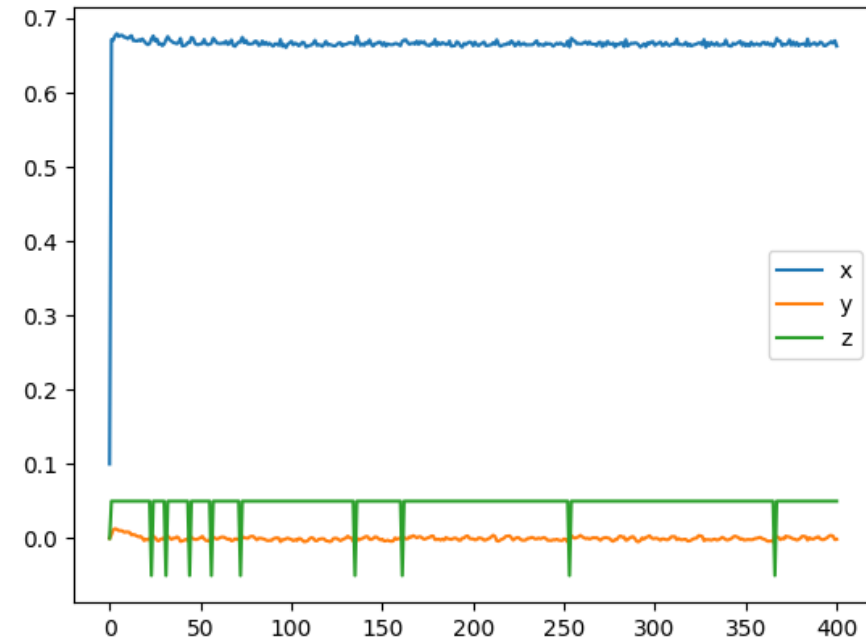
$\lambda=0.1$, $\rho=10$, repeat=200,

PSNR2=76.82

実験結果（収束グラフ）



$\lambda=0.1, \rho=10, \text{repeat}=200$



$\lambda=0.05, \rho=10, \text{repeat}=400$

- xはある程度収束する
- zはxとyに影響受ける $\rightarrow Dx-y$ の符号が変わる \rightarrow 急激に変わる

$$z \leftarrow z + \rho(Dx - y)$$

実験結果 (PSNRの差)

λ	ρ	repeat	PSNR1	PSNR2	PSNR2 - PSNR1
0.05	1	100	70.07	75.61	5.54
0.05	10	200	70.07	76.17	6.1
0.05	10	400	70.07	76.18	6.11
0.1	10	200	70.03	76.82	6.79
0.1	20	300	70.05	76.86	6.81
0.1	20	600	70.10	76.90	6.8
0.1	100	600	70.06	76.92	6.86
0.2	10	200	70.06	75.71	5.65

考察

$$L(x, y, z) := \|b - Ax\|_2^2 + \lambda \|y\|_1 + z^T (Dx - y) + \frac{\rho}{2} \|Dx - y\|^2$$

- λ : 大 \rightarrow TV項の影響: 大 \rightarrow 画像は滑らかに(ぼける)
- ρ : 大 \rightarrow 制約条件の影響: 大 \rightarrow 更新回数: 大
 \rightarrow 原画像に近づく
- λ は0.1、 ρ は理論上収束するならできるだけ大きいほうが良い

まとめ

- ADMMはL1ノルム正則化を解く手法
- PSNRはノイズ除去度合いの指標
- $\lambda = 0.1, \rho = 10, \text{repeat}=200$ 最適
- $\rho : 10 \rightarrow 100$ は $\rho : 1 \rightarrow 10$ に比べ、PSNRが大きくなる
- $\lambda : 0.1 \rightarrow 0.2$ はPSNRが減少