Homework5 Program Report

张景浩 PB20010399

2023.4.11

1 问题描述

实现参考文献 [1] 中的 Tutte 参数化，将给定的开放网络边界固定至简单平面凸多边形，通过求解基于某个给定权重的 Laplace 方程获得网络内部顶点的参数化坐标。

2 算法原理

2.1 Tutte 参数化

对于没有隧道且有且仅有一条边界线的流形网格体，将其边界顶点有序地落在一个凸多边形上，并且保证其内部的顶点是其邻居的图凸线性组合，这样得到的 (u, v) 坐标参数化是双射的。

对于参数化后的每一个非边界顶点 $\boldsymbol{p}_i$，要保证其为邻居顶点 $\boldsymbol{p}_{i,j}$ 的凸线性组合，则有：

$$w_{i,1}\boldsymbol{p}_{i,1} + w_{i,2}\boldsymbol{p}_{i,2} + \cdots + w_{i,d_i}\boldsymbol{p}_{i,d_i} = \boldsymbol{p}_i \quad (w_{i,j} \in (0,1))$$

移项得到:

$$w_{i,1}\boldsymbol{p}_{i,1} + w_{i,2}\boldsymbol{p}_{i,2} + \cdots - \boldsymbol{p}_i + \cdots = 0 \quad (w_{i,j} \in (0,1)$$

用向量的形式表达：

$$\begin{bmatrix} w_{i,1} & w_{i,2} & \cdots & -1 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{i,1} \\ \boldsymbol{p}i,2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_i \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

将所有顶点都表示出来就得到 Laplace 方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{i,1} & w_{i,2} & \cdots & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_i & v_i \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1\ bound & 1\ bound \\ u_2\ bound & 2\ bound \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

接下来只需要求解线性方程组，就能够得到网格内部顶点的参数化坐标。

权重的选取会影响线性方程组解除的 uv 图与原网格体相比的形变，形变越小，参数化就越合理。

2.2 权重计算

2.2.1 均匀权重

$$w_{i,1} = w_{i,2} = \cdots = w_{i,d_i} = \frac{1}{d_i}$$

2.2.2 Floater 权重 [1]

设 ang(a,b,c) 是指在向量 a-b 和 c-b 之间的夹角，我们选择网络内部顶点 x_i 及其所有邻居点 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_{d_i}}$，对应在二维平面上有点 $\boldsymbol{p}$ 以及 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_{d_i}$ 满足：

$$||\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}|| = ||x_{j_k} - x_i||,\ ang(\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_{k+1}) = 2\pi ang(x_{j_k}, x_i, x_{j_{k+1}})/\theta_i \quad k = 1, \cdots, d_i$$

其中，$\theta_i = \sum_{k=1}^{d_i} ang(x_{j_k}, x_i, x_{j_{k+1}})$，$x_{j_{d_i+1}} = x_{j_1}, \boldsymbol{p}_{d_i+1} = \boldsymbol{p}_1$。我们以任意的 $\boldsymbol{p}_l$ 为起点，总能找到两个相邻的点 $\boldsymbol{p}_{r(l)}, \boldsymbol{p}_{r(l)+1}$，使得 $\boldsymbol{p}$ 在这三个点围成的三角形内部，得到 $\boldsymbol{p}$ 的重心坐标

$$\boldsymbol{p} = \delta_1 \boldsymbol{p}_l + \delta_2 \boldsymbol{p}_{r(l)} + \delta_3 \boldsymbol{p}_{r(l)+1}$$

令 $\mu_{k,l}$ 满足：$k = 1, \cdots, d_i$，有 $\mu_{l,l} = \delta_1, \mu_{r(l),l} = \delta_2, \mu_{r(l)+1,l} = \delta_3$，其余的 $\mu_{k,l} = 0$。这样一来，我们有

$$\boldsymbol{p} = \sum_{k=1}^{d_i} \mu_{k,l} \boldsymbol{p}_k,\ \sum_{k=1}^{d_i} \mu_{k,l} = 1, \mu_{k,l} \geq 0$$

遍历 $l = 1, \cdots, d_i$，定义

$$\lambda_{i,j_k} = \frac{1}{d_i} \sum_{l=1}^{d_i} \mu_{k,l},\ k = 1, \cdots, d_i$$

这就是 Floater 权重。

3 代码实现

本次实验使用 matlab 进行编译，代码框架由 Agreement5 给出，算法具体的实现详见 unionWeight.m 和 floaterWeight.m 文件。

4 测试结果

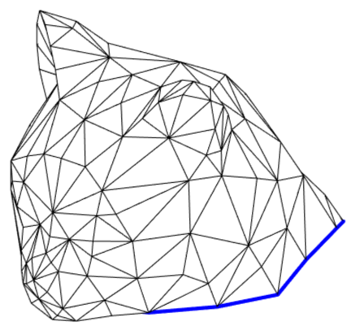
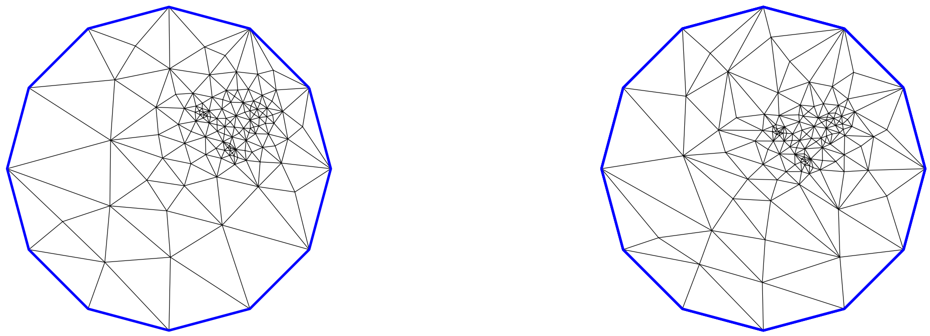


图 1: Cathead



基于均匀权重的 Tutte 参数化　　基于 Floater 权重的 Tutte 参数化

图 2: Tutte 参数化结果

5　总结

观察图 2 中的实验结果发现，Tutte 参数化可以将一个空间中的网格体可逆地映射到平面的一个凸多边形中，方便我们处理三维空间中的网格体问题。在此基础上，Floater 参数化是一个保形的参数化，在面对类似纹理、颜色等与网格体中每个三角面片形状有关系的问题时，能够得到更好的处理效果。在计算 Floater 权重时，我发现不同的计算方法会影响到网络体在二维平面参数化的最终结果，推测可能是由于大量的乘除法以及三角运算导致舍入误差不同，例如直接使用相邻角的正切值计算所得结果就比构造权重矩阵要更好一些，这些计算方法都在 floaterWeight.m 文件中给出。

参考文献

[1] Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. CAGD1997