

Homework2 Program Report

张景浩 PB20010399

2023.3.19

1 问题描述

本次实验的目标是通过 Radial basis functions 算法实现图像的变形，并分析经算法实现的变形后图像中出现白色空洞或条纹的原因，并对该现象给出解决方案。

2 算法原理

2.1 RBF 算法

RBF 算法给出的坐标变换公式：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i b_i(\mathbf{x})$$

$$b_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i|^2 + d}$$

其中 $b_i(\mathbf{x})$ 是径向基函数， d 为常数， \mathbf{p}_i 为约束点， \mathbf{a}_i 为变量通过求解以下方程组获得：

$$f(\mathbf{p}_i) = \mathbf{q}_i, i = 1, \dots, n$$

其中 \mathbf{q}_i 为目标点坐标。但在具体的实现中，将坐标变换公式修正为：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i b_i(\mathbf{x}) + \mathbf{x}$$

这样处理的目的是在原来的变换上增加一个恒等映射，维持了变换的连续性，让变换在全局上都具备良好的性质。

2.2 对白色缝隙出现原因及处理方法

从宏观上来看，白色缝隙出现的原因是在图像变形中存在压缩和拉伸的操作，导致一些位置原本的像素点移动到其他位置，而又没有新的像素点填充进来；而从具体的算法中分析发现，因为在变换后存在一步对变换后坐标向下取整的操作，导致一些变换后 (x,y) 坐标在相同整数区间的点被映为同一个点，又因为两个像素矩阵中点的个数相同，加之变换后矩阵初值为 $[255,255,255]$ ，这就出现了一些没有被赋予 rgb 值的点保持了白色，也就是白色的缝隙。

从分析中我们发现，这些白色像素点的出现是难以避免的，所以只能通过后续的操作进行“填补”。下面称没有被变换映射到的点为“问题点”，称被映射到的点为“正常点”。首先，我想到通过递归的方法，即对像素点进行搜索，发现问题点后转而搜索其周围的八个点，若这八个点都是正常点，则取其插值进行填充；若否，则对这八个点中的问题点重复上述操作。但我很快发现了问题：在这个方法中会出现复数个问题点之间反复递归导致死循环，所以这个方法被放弃。接着我选择了一种简单直观的方法进行填补，即搜索所有像素点，发现问题点后立即采用下面的方式进行简单的插值：

$$\begin{aligned} im2(i, j, k) = & \frac{1}{4}min(im2(i-1, j-1, k), im2(i+1, j+1, k)) \\ & + \frac{1}{4}min(im2(i-1, j, k), im2(i+1, j, k)) + \frac{1}{4}min(im2(i-1, j+1, k), im2(i+1, j-1, k)) \\ & + \frac{1}{4}min(im2(i, j-1, k), im2(i, j+1, k)) \end{aligned}$$

其中 $im2(i, j, k)$ 代表 (i, j) 处的像素点，位置关系如下矩阵所示：

$$\begin{bmatrix} (i-1, j-1) & (i-1, j) & (i-1, j+1) \\ (i, j-1) & (i, j) & (i, j+1) \\ (i+1, j-1) & (i+1, j) & (i+1, j+1) \end{bmatrix}$$

即对问题点周围的八个点相对两点为一组，取其对应 RGB 中最小值取平均，这是考虑到在初始矩阵中像素点为白色，对应的 RGB 都是最大值。在最初的设想中，是要重复对像素矩阵搜索，直到问题点个数小于某一给定整数。但是经试验后发现，重复搜索需要耗费大量时间，但是填补效果与仅执行一遍相差不大，故在实验中仅搜索了一次。实际上，我们可以在第一次搜索中标记问题点，后续只需在标记点中再次搜索问题点即可。

3 代码实现

本次实验使用 matlab 进行编译，代码框架由课堂上以及 assignment2 中给出，算法具体的实现详见 RBFImageWarp.m 和 fRBF.m 文件。

4 测试结果

实验结果如下所示，分别输入并执行了四次向不同方向的变形指令， $d = 1000$ 。

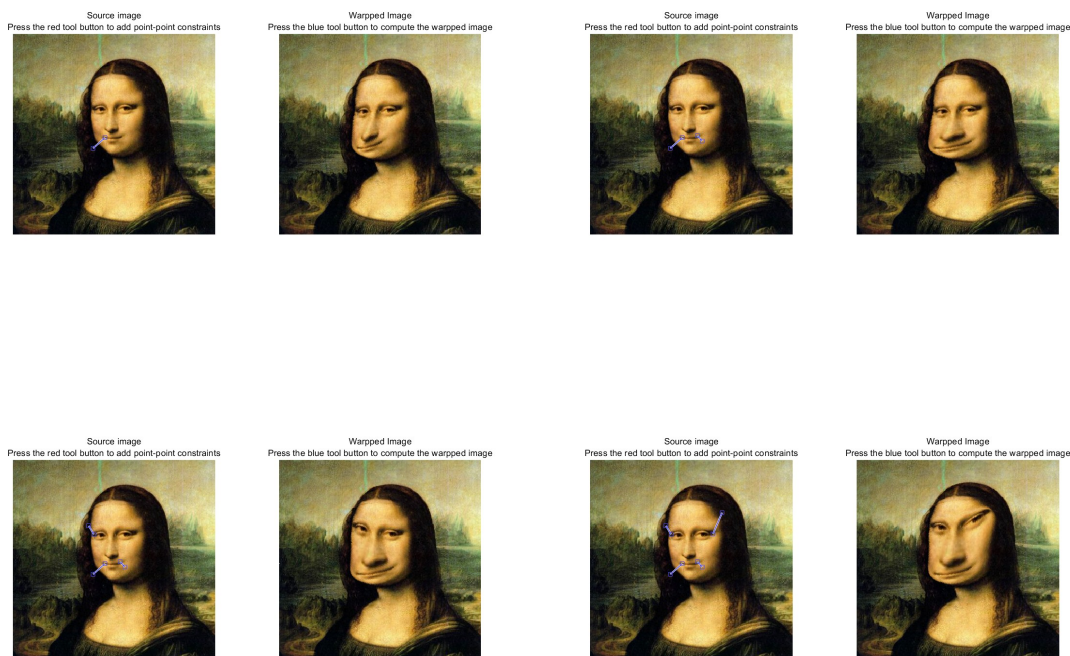


图 1: 4 times image warping

5 总结

1. 在实验过程中发现，使用修正前的坐标变换公式得到的图像基本失去了原图的信息，只有从左上角到中央的部分区域出现了一些色素点，其余地方均为白色；而使用修正后的坐标变换公式得到的图像就是基于原图经过变形指令后的结果。

2. 经过对常数 d 的不同赋值发现， d 的大小与 RBF 变换作用的范围有关，这里的“范围”是指变换前后图像中肉眼可见的变化范围。 d 的取值越大，变换影响的范围就越大；反之，变换影响就更加局部。多次尝试发现， d 取 1000 时，变换结果更贴近个人对变形指令的主观预

期。

3. 如果只是简单的经过 RBF 变换，得到的结果图中会出现沿变形指令方向涟漪形白色缝隙，且越靠近变形指令越密集。推测出现这样现象的原因是由于全局像素点都沿变形指令所给方向移动导致，且越靠近变形指令映射像集中重叠的更严重，进而白色缝隙更密集。

4. 采用了 2.2 中给出的填补方法后，图像中的白色缝隙基本消失，达到了修正图像的目的，这说明该填补方法能够处理出现的白色缝隙，故没有再尝试更加复杂但相对健全的改进方案。