Homework6 Program Report

张景浩 PB20010399

2023.5.1

1 问题描述

参考文献 [1] 中的 Lapalce surface editing 算法，实现基于均匀权重和 cot 权重的 Laplace 网格变形。

2 算法原理

2.1 Laplace 网格形变

网格 M=(V,E)，V 表示点，E 表示边，一个点 v_i 的 1-邻域为一组邻接点的集合 $\{v_{i_k}\}_{k=1}^{d_i}$，每个邻接点对应的权重为 $\mu_{i,j}$，$j=1,\cdots,d_i$。此时我们给出点 v_i 的 Laplace 坐标

$$\delta_i = \mathscr{L} = v_i - \sum_{j=1}^{d_i} \frac{1}{\mu_{i,j}} v_{i_j}$$

记网络的邻接矩阵为 A，权重矩阵为 W，则我们有网格的 Laplace 算子 $L = I - WA$，称 $\Delta = LV = \{\delta_i\}$ 为网格的 laplacian 坐标。Laplace 坐标拥有平移不变性，但是对线性变换敏感。因为 L 的 rank 为 n-1，这意味着当我们确定一个点的坐标，就可以通过 Δ 解出 V 的全部点坐标。

在文章给出的算法中，我们通过固定变形后的一些点的前提下，通过 Δ 的不变性来还原变换后的网络 $M' = (V', E)$。因为固定一个点就可以还原 V，所以在固定了一组点的前提下对 V 的恢复会出现一些误差，我们通过最小化这个误差来得到目标网格编辑后的结果。误差公式为

$$min\ \mathscr{E}(V') = \sum_{i=1}^{n} ||\delta_i - \mathscr{L}(v_i')||^2 + \sum_{i \in X} ||v_i' - u_i||^2$$

其中 X 是固定点的下标，u_i，$i \in X$ 是对应的坐标。我们通过最小二乘法解得这个误差的最优解，就可以得到变形后的网格结果。

以上 Laplace 坐标是在全局坐标下的，所以并不具备旋转不变性。当网格整体存在旋转的时候，Laplace 坐标值会发生改变，此时就需要对 Laplace 坐标进行处理，得到新的误差公式

$$min\ \mathscr{E}(V') = \sum_{i=1}^{n} ||T_i(V')\delta_i - \mathscr{L}(v_i')||^2 + \sum_{i \in X} ||v_i' - u_i||^2$$

在增加了旋转项之后，通过旋转初始 Laplace 坐标来拟合变换后的 Laplace 坐标，其中的旋转项 $T_i(V')$ 是一个关于 V' 的函数，通过解决最优化问题

$$\min_{T_i}(||T_i v_i - v_i'||^2 + \sum_{j=1}^{d_i} ||T_i v_{i_j} - v_{i_j}'||^2)$$

得到。

2.2 权重计算

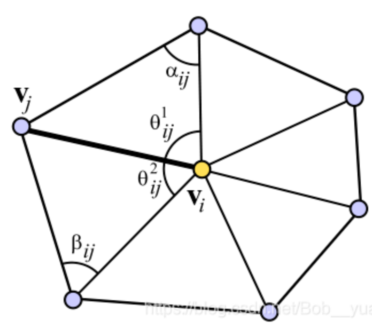
2.2.1 均匀权重

$$\mu_{i,j} = \frac{1}{d_i}, \quad j = 1, \cdots, d_i$$

2.2.2 cot 权重

如下图所示，给定一个点 v_i 及其 1-邻域

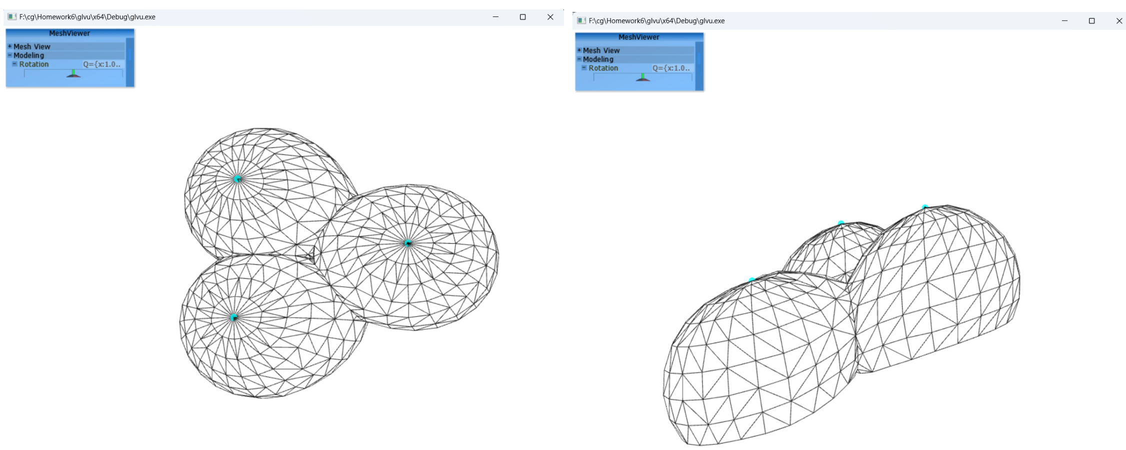
$$\omega_{i,j} = \frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}}{2},\ \mu_{i,j} = \frac{\omega_{i,j}}{\sum_{j=1}^{d_i} \omega_{i,j}}, \quad j = 1, \cdots, d_i$$



3 代码实现

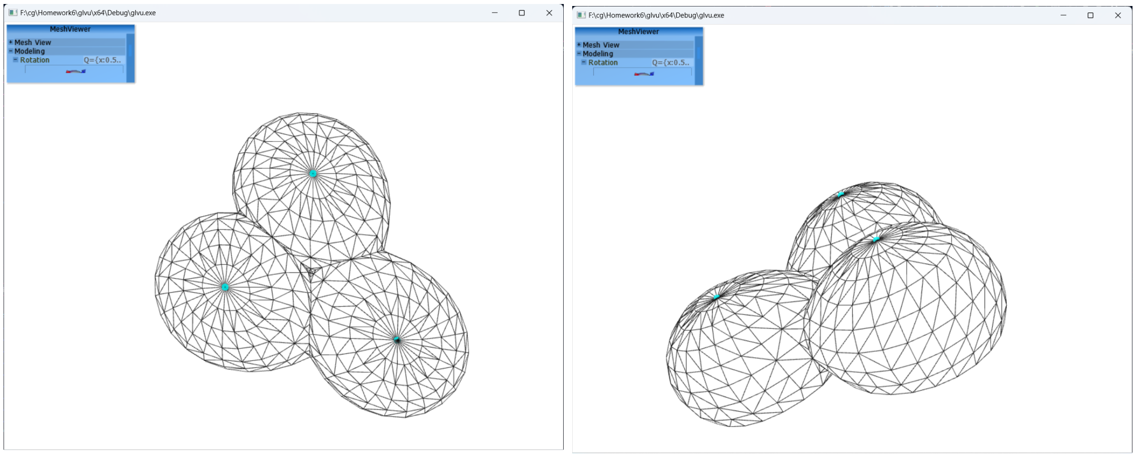
本次实验使用了 assignment6 中的纯 C++ 框架，运行 glvu.sln 文件即可，算法的具体实现见 main.cpp 中相关函数。Laplace 网格的形变与旋转都可以做到基本实时响应，并输出当前位置的旋转四元数组。

4 测试结果



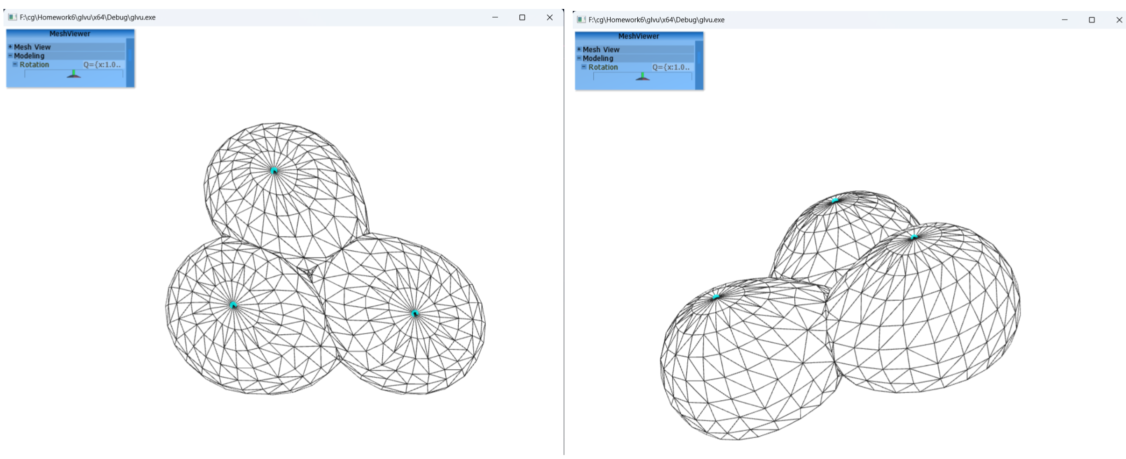
俯视图　　　　　　　　侧视图

图 1: 基于均匀权重的 Laplace 网格编辑效果



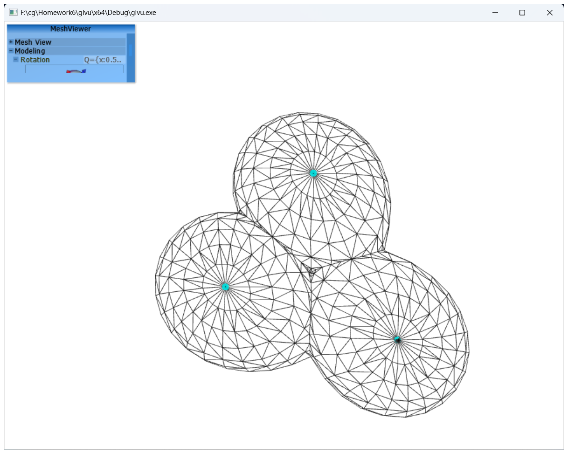
俯视图　　侧视图

图 2: 基于均匀权重的 Laplace 网格编辑效果，增加旋转 R={0.535 0.591 0.603 0.005}

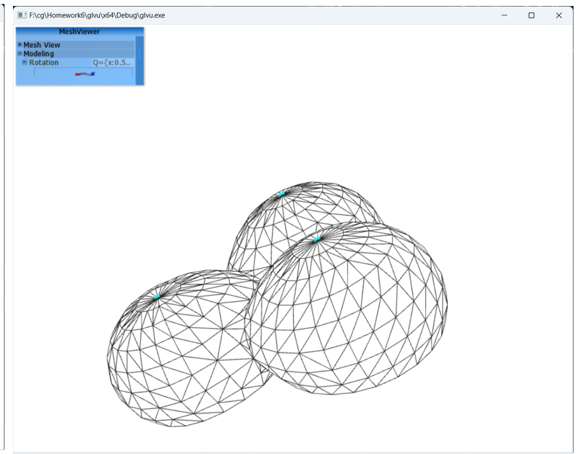


俯视图　　侧视图

图 3: 基于 cot 权重的 Laplace 网格编辑效果



俯视图



侧视图

图 4: 基于均匀权重的 Laplace 网格编辑效果，增加旋转 R={0.626 0.509 0.487 -0.335}

5 总结

结合图 1 和图 2 来看，Laplace 网格形变能够在尽可能保持网格原有结构的条件下，基于变换后的固定点对整个网格进行变换。在 Laplace 坐标下，我们能够更好的注重于网格的形状本身，不必考虑原有的坐标系统，方便了网格的各种操作。从变形结果来看，基于均匀权重 Laplace 坐标下的网格形变整体比较均衡，形变命令会作用逐渐作用到网格的整体，而基于 cot 权重 Laplace 坐标下的网格形变保留了更多的球体结构，形变命令更明显作用在了靠近球体交接的部分。在增加了对于特定点的旋转之后，得到的结果与之前的并没有明显的差别，只是形状略有改变。

参考文献

[1] O. Sorkine et al. Laplacian Surface Editing. SGP 2004