数值分析 code8 实验报告

张景浩 PB20010399

2023.5.2

1 问题介绍

使用四阶 Runge-Kutta 方法求解以下初值问题：

$$\begin{cases} x' = \lambda x + \cos t - \lambda \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

在区间 $[0, 5]$ 上比较在不同 λ 取值下的解析解和数值解，步长 h=0.01，并观察 λ 对数值准确性的影响。

2 解决方法

常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2.1 四阶 Runge-Kutta 方法

$$x(t + h) = x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

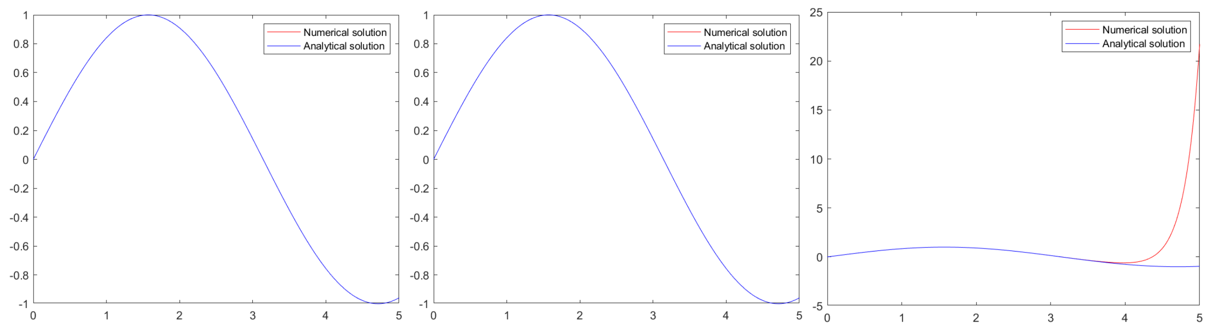
其中

$$\begin{cases} F_1 = hf(t, x) \\ F_2 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1) \\ F_3 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_2) \\ F_4 = hf(t + h, x + F_3) \end{cases}$$

3 编译环境及使用方法

本程用 matlab 编译，使用时调用 outcome.m 文件，手动输入参数 λ。

4 实验结果



λ=-10　　　　λ=-5　　　　λ=5

图 1: λ=-5,-10,5 时，初值问题解析解和数值解的比较

λ	-5	-4	-3	-2	-1	0
error	2.60622e-09	1.63811e-09	8.92432e-10	3.68426e-10	6.94097e-11	3.51363e-12
λ	1	2	3	4	5	
error	4.11960e-09	2.27681e-06	5.81185e-04	1.20274e-01	2.26730e+01	

表 1: 初值问题解析解与数值解误差

5 总结

从图 1 中可以看出，参数 λ 的值对于初值问题数值解的准确性有着很明显的影响。结合表 1 中的数据我们发现，$|\lambda|$ 越靠近 0 时，解析解与数值解之间的误差越小，而 $|\lambda|$ 远离 0 时，负半轴上的误差增长的十分缓慢，依旧保持着一个很小的误差，而正半轴上误差增长十分迅速，很快就将误差提升到了肉眼可以分辨的程度，并且结合图像发现误差都是在区间的末端明显增加，符合单步法的局部截断误差积累。

A Computer Code

Here we include the computer code.

```
function y = rungeKutta(f,a,b,h,x)
% input-f 函数一阶导数
%          a,b 函数定义域
%          h 步长
%          x 初始值
% output-y 格点函数
n=(b-a)/h+1;
y=zeros(1,n);
y(1)=x;t=a;
for i=2:n
    x=y(i-1);
```

```
    F1=h*f(t,x);
    F2=h*f(t+h/2,x+F1/2);
    F3=h*f(t+h/2,x+F2/2);
    F4=h*f(t+h,x+F3);
    y(i)=x+(F1+2*F2+2*F3+F4)/6;t=t+h;
end
end
```