数值分析 code11 实验报告

张景浩 PB20010399

2023.5.18

1 问题介绍

给定初值问题

$$\begin{cases} x' = \dfrac{t - e^{-t}}{x + e^x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

该初值问题的解析解由等式

$$x^2 - t^2 + 2e^x - 2e^{-t} = 0$$

隐式给出。

利用五阶 Adams-Bashforth 公式计算初值问题在 t=1 的数值解，利用五阶 Runge-Kutta 公式得到初值，取节点 x_i，$i = 0, \cdots, N$，$N = 2^k, k = 3, \cdots, 8$，计算误差和误差阶。

2 解决方法

- 基于等距节点的五阶 Adams-Bashforth 公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4})$$

  其中等距结点 $x_i = x_0 + ih,\ i = 1, 2, \cdots, n$。

- 五阶 Runge-Kutta 公式

$$y(x+h) = y(x) + \frac{16}{135}F1 + \frac{6656}{12825}F3 + \frac{28561}{56430}F4 - \frac{9}{50}F5 + \frac{2}{55}F6$$

  其中
  $F1 = hf(x, y)$
  $F2 = hf(x + h/4, y + F1/4)$
  $F3 = hf(x + \frac{3}{8}h, y + \frac{3}{32}F1 + \frac{9}{32}F2)$
  $F4 = hf(x + \frac{12}{13}h, y + \frac{1932}{2197}F1 - \frac{7200}{2197}F2 + \frac{7296}{2197}F3)$
  $F5 = hf(x + h, y + \frac{439}{216}F1 - 8F2 + \frac{3680}{513}F3 - \frac{845}{4104}F4)$
  $F6 = hf(x + \frac{1}{2}h, y - \frac{8}{27}F1 + 2F2 - \frac{3544}{2565}F3 + \frac{1859}{4104}F4 - \frac{11}{40}F5)$

使用五阶 Runge-Kutta 公式计算出 y_1, y_2, y_3, y_4 后使用五阶 Adams-Bashforth 公式计算初值问题的解。

3 编译环境及使用方法

本程用 matlab 编译，使用时调用 outcome.m 文件。

4 实验结果

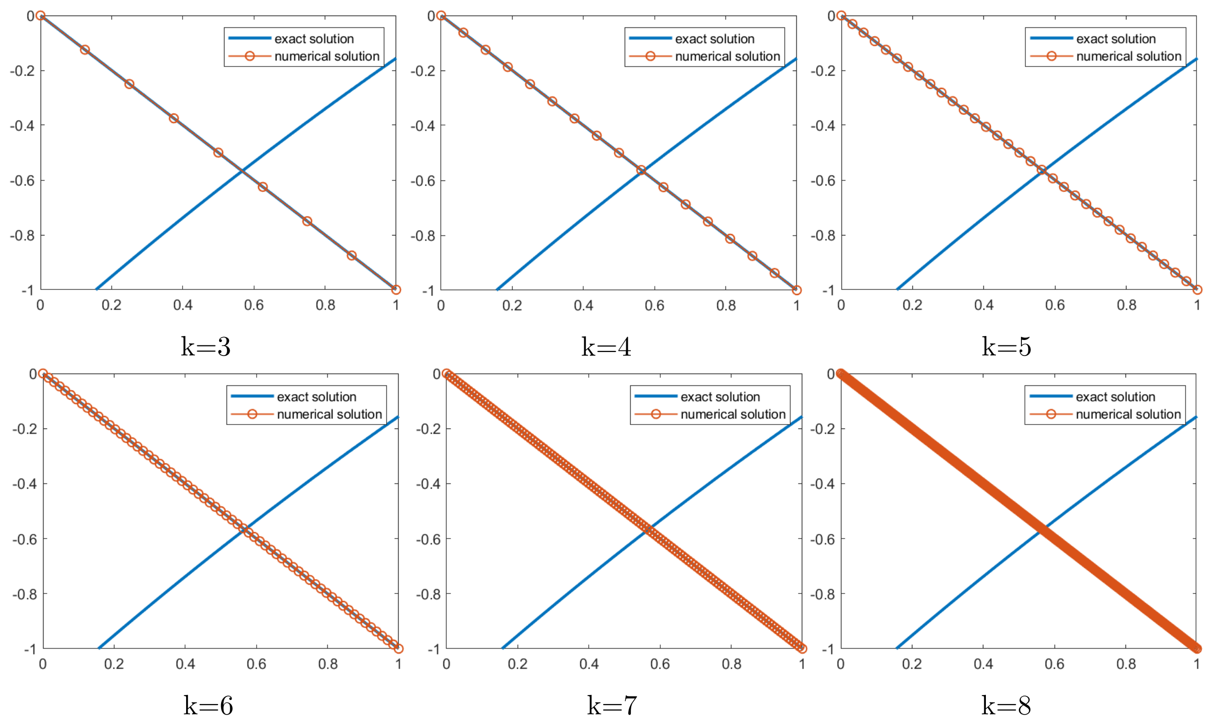

图 1: 解析解与数值解的对比

N	误差	阶
8	0.00000e+00	-
16	0.00000e+00	NaN
32	0.00000e+00	NaN
64	0.00000e+00	NaN
128	0.00000e+00	NaN
256	0.00000e+00	NaN

表 1: 五阶 Adams-Bashforth 公式的误差表格

注：由图 1 可知在 t=1 处隐方程有两解，我们选择 x=-1 作为真实解

5 总结

从图像中我们可以清楚的看到五阶 Adams-Bashforth 公式的数值解与解析解的一支完全重合，并且在误差表格中发现在 t=1 时，无论节点个数为多少，数值解与真实解的误差都小于机器精度，

导致无法计算误差阶，这说明五阶 Adams-Bashforth 公式求解初值问题的精度非常高。

A Computer Code

Here we include the computer code.

```
function x=adams_bashforth(f,x0,t)
% 5阶adams-bashforth公式
% 输入：一阶微分f，初值x0，结点t
% 输出：函数值x
N=length(t)-1;
h=(t(end)-t(1))/N;
x=rk5(f,t(1),t(5),x0,h);
for i=5:N
    x(end+1)=x(end)+h*(1901*f(t(i),x(i))-2774*f(t(i-1),x(i-1))+2616*f(t(i-2),x(i-2))-...
        1274*f(t(i-3),x(i-3))+251*f(t(i-4),x(i-4)))/720;
end
end

function x=rk5(f,a,b,x0,h)
% 5阶Runge-Kutta公式
% 输入：一阶微分f，求解区间[a,b]，步长h，初值x0
% 输出：函数值x
t=a;x=x0;
while t(end)<b
    s=t(end);
    y=x(end);

    F1=h*f(s,y);
    F2=h*f(s+h/4,y+F1/4);
    F3=h*f(s+3*h/8,y+3*F1/32+9*F2/32);
    F4=h*f(s+12*h/13,y+1932*F1/2197-7200*F2/2197+7296*F3/2197);
    F5=h*f(s+h,y+439*F1/216-8*F2+3680*F3/513-845*F4/4104);
    F6=h*f(s+h/2,y-8*F1/27+2*F2-3544*F3/2565+1859*F4/4104-11*F5/40);

    t(end+1)=t(end)+h;
    x(end+1)=y+16*F1/135+6656*F3/12825+28561*F4/56430-9*F5/50+2*F6/55;
end
```