

数值分析 code4 实验报告

张景浩 PB20010399

2023.4.10

1 问题介绍

利用 Richardson 外推计算下列函数在给定点处的导数值, $h=1$, 并输出相应的三角阵列。

1. $y = \ln x, x = 3, M = 3$

2. $y = \tan x, x = \sin^{-1}(0.8), M = 4$

3. $y = \sin(x^2 + \frac{1}{3}x), x = 0, M = 5$

2 解决方法

使用 Richardson 外推算法:

1. 选取一个方便计算的初始 h 值 ($h=1$), 并计算 $M-1$ 个数:

$$D(n, 0) = \phi(h/2^n) \quad (0 \leq n \leq M)$$

其中 $\phi(h) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)]$ 是数值微分公式。

2. 用下列公式计算:

$$D(n, k) = \frac{4^k}{4^k - 1} D(n, k-1) - \frac{1}{4^k - 1} D(n-1, k-1)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, M; n = k, k+1, \dots, M$ 。

3 编译环境及使用方法

本程用 matlab 编译, 使用时直接调用 outcome.m 文件即可。

4 实验结果

n	D(n,0)	D(n,1)	D(n,2)	D(n,3)
0	0.3465736			
1	0.3364722	0.3331051		
2	0.3341082	0.3333201	0.3333345	
3	0.3335264	0.3333325	0.3333333	0.3333333

表 1: $y = \ln x, x = 3, M = 3$

n	D(n,0)	D(n,1)	D(n,2)	D(n,3)	D(n,4)
0	-1.3061863				
1	6.4653364	9.0558439			
2	3.2090999	2.1236878	1.6615440		
3	2.8729801	2.7609402	2.8034236	2.8215487	
4	2.8009018	2.7768757	2.7779381	2.7775336	2.7773609

表 2: $y = \tan x, x = \sin^{-1}(0.8), M = 4$

n	D(n,0)	D(n,1)	D(n,2)	D(n,3)	D(n,4)	D(n,5)
0	0.1767840					
1	0.3214776	0.3697088				
2	0.3322976	0.3359042	0.3336506			
3	0.3331962	0.3334958	0.3333352	0.3333302		
4	0.3333067	0.3333435	0.3333333	0.3333333	0.3333333	
5	0.3333271	0.3333340	0.3333333	0.3333333	0.3333333	0.3333333

表 3: $y = \sin(x^2 + \frac{1}{3}x), x = 0, M = 5$

5 总结

观察实验结果可知, 由 Richardson 外推法得到的三角阵列可以很快的收敛到该点对应的导数。我们通过低阶估计之间的相互运算达到更高阶的截断误差, 在减小截断误差的同时大大减少了计算量。

A Computer Code

Here we include the computer code.

```

1 function D = richardson(h,M,f,x)
2 % Richardson 外推
3 % input-h,M,f,x
4 % output-D(Richardson 三角阵列)
5 D=zeros(M+1);
6 for n=0:M
7     D(n+1,1)=2^(n-1)*(f(x+h/2^n)-f(x-h/2^n))/h;
8 end
9 for k=1:M
10     for n=k:M
11         D(n+1,k+1)=D(n+1,k)+(D(n+1,k)-D(n,k))/(4^k-1);
12     end
13 end
14 end
15

```

```

16 function y=f(x)
17 y=sin(x^2+x/3);
18 end
19
20 h=1;
21 % y=@atan; x=sqrt(2); M=4;
22 % y=@log; x=3; M=3;
23 % y=@tan; x=asin(0.8); M=4;
24 y=@f; x=0; M=5;
25 D=richardson(h,M,y,x);
26 for i=1:M+1
27     fprintf('%d\t',i-1);
28     for j=1:M+1
29         fprintf('& %.7f\t',D(i,j));
30     end
31     fprintf('%s ','\\ ');
32     fprintf('\n');
33 end

```