

数值分析 code2 实验报告

张景浩 PB20010399

2023.3.15

1 问题介绍

给出一个定义在 $[-1,1]$ 上的函数：

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, x \in [-1, 1]$$

并取两组不同的插值节点，构造 Newton 插值多项式 $p_N(x)$ ，插值节点选取方式如下：

1. $x_i = 1 - \frac{2}{N}i, i = 0, 1, \dots, N$ (union point)

2. $x_i = -\cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi), i = 0, 1, \dots, N$ (Chebyshev point)

并计算两组插值节点下构造出的插值多项式与原函数的如下误差

$$\max_i \{|f(y_i) - p(y_i)|, y_i = \frac{i}{50} - 1, i = 0, 1, \dots, 100\}$$

对 $N=5, 10, 20, 40$ 比较以上两组节点的结果，并在一张图中画出 $N=20$ 时 $f(x)$ 的数值计算结果。

2 解决方法

构造 Newton 型插值多项式：

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

，其中 $a_i = f[x_0, \dots, x_i]$

计算差商表：

for i=1:n

for j=n:-1:i

y[j]=(y[j]-y[j-1])/(x[j]-x[j-i])

end

end

3 编译环境及使用方法

本程序使用 matlab 编译，使用时直接调用 outcome.m 文件即可。

4 实验结果

N	Max Error of grid(1)	Max Error of grid(2)
5	4.326923×10^{-1}	5.559113×10^{-1}
10	1.915643	1.089290×10^{-1}
20	5.827813×10^{-2}	1.532509×10^{-2}
40	7.868904×10^{-4}	2.738598×10^{-4}

表 1: 两组不同的插值点构造出的牛顿多项式与原函数的误差比较

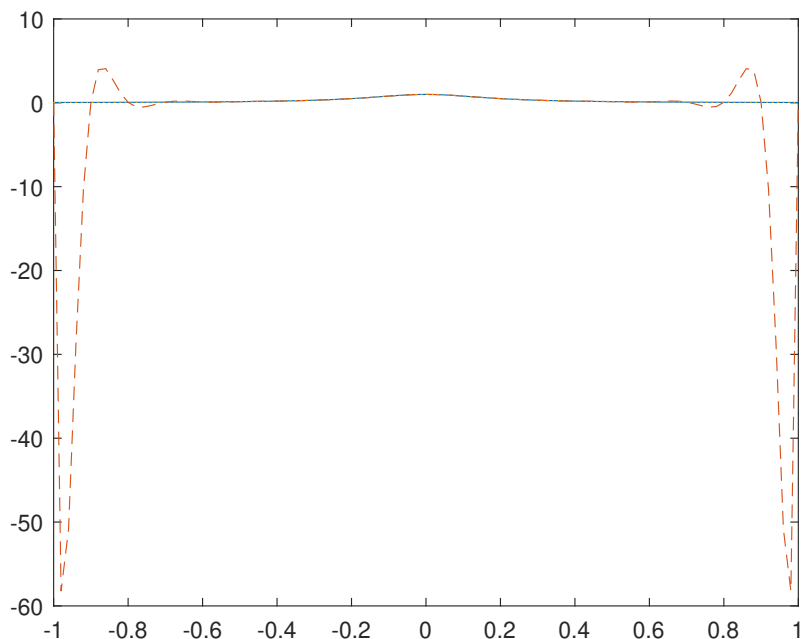


图 1: 插值多项式以及原函数的图像

5 总结

观察图像并结合实验结果可知, 随着插值点数量的增大, 由均匀插值点构造出的 Newton 插值多项式与原函数之间的最大误差增大, 这说明此时的插值多项式并不能在整体上很好的拟合原函数; 反观由 Chebyshev 插值点构造的 Newton 插值多项式与原函数之间的最大误差减小, 这说明此时的插值多项式可以很好的在整体上拟合原函数。又因为插值多项式的唯一性, 可以得出 Chebyshev 插值点构造出的插值多项式能更好的拟合原函数。但是由图像以及比较两组节点的结果后我们发现, 均匀插值点构造的插值多项式在局部能具备好的拟合性, 但是在靠近区间边界时拟合性很差, 而 Chebyshev 插值点构造出的插值多项式在整体上具备更优秀的拟合性。这和 Chebyshev 结点插值误差定理吻合。

A Computer Code

Here we include the computer code.

```
1 function f = newtonPolynomia(s,t,N,x)
2 %构造牛顿插值多项式
3 f=zeros(1,101);
4 for i = 2:N+1
5     for j = N+1:-1:i
6         s(j)=(s(j)-s(j-1))/(t(j)-t(j-i+1));
7     end
8 end
9 for j=1:101
10    f(j)=s(N+1);
11    for i=N+1:-1:2
12        f(j)=s(i-1)+(x(j)-t(i-1))*f(j);
13    end
14 end
15
16 function err = errorFunc(f,g)
17 x=zeros(1,101);
18 for i=1:101
19     x(i)=abs(f(i)-g(i));
20 end
21 err=max(x);
22 end
23
24 N=5;
25 x=zeros(1,101);
26 for i=1:101
27     x(1,i)=(i-1)/50-1;
28 end
29 f=zeros(1,101);
30 g=zeros(1,101);
31 h=zeros(1,101);
32 for i=1:101
33     f(1,i)=1.0/(1+25*x(1,i)^2);
34 end
35 while N<=40
36     fprintf('N=%d\n',N);
37     s=zeros(1,N+1);
38     t=zeros(1,N+1);
39     %构造均匀插值点
40     for i=0:N
41         t(i+1)=1-i*2/N;
42     end
43     for i=0:N
44         s(i+1)=1/(1+25*t(i+1)^2);
```

```

45     end
46     g=newtonPolynomia(s,t,N,x);
47     err_1=errorFunc(f,g);
48     %构造 chebyshev 插值点
49     for i=0:N
50         t(i+1)=-cos(pi*(2*i+1)/(2*N+2));
51     end
52     for i=0:N
53         s(i+1)=1.0/(1+25*(t(i+1)^2));
54     end
55     h=newtonPolynomia(s,t,N,x);
56     err_2=errorFunc(f,h);
57     if N==20
58         g_1=g;
59         h_1=h;
60     end
61     fprintf('Max Error of grid(1): %e\n',err_1);
62     fprintf('Max Error of grid(2): %e\n',err_2);
63     fprintf('\n');
64     N=N*2;
65 end
66 plot(x,f,x,g_1,'—',x,h_1,':');

```