数值分析 code1 实验报告

张景浩 PB20010399

2023.3.12

1 问题介绍

对函数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5,5]$$

构造 Lagrange 插值多项式 $p_L(x)$，插值节点取为：

1.$x_i = 5 - \frac{10}{N}i,\ i = 0,1,\cdots,N$

2.$x_i = -5cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi),\ i = 0,1,\cdots,N$ (Chebyshev point)

并计算如下误差

$$\max_i\{|f(y_i) - p(y_i)|,\ y_i = \frac{i}{10} - 5,\ i = 0,1,\cdots,100\}$$

对 N=5,10,20,40 比较以上两组节点的结果，并在一张图中画出 N=10 时 f(x) 的数值计算结果。

2 解决方法

构造 Lagrange 型插值多项式：

$$p_L(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) \prod_{j=0,j\neq i}^{N} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

3 编译环境及使用方法

本程序使用 matlab 编译，使用时直接调用 outcome.m 文件即可。

4 实验结果

N=5

Max Error of grid(1): 4.326923e-01

Max Error of grid(2): 5.559113e-01

N=10

Max Error of grid(1): 1.915643e+00

Max Error of grid(2): 1.089290e-01

N=20

Max Error of grid(1): 5.827813e+01

Max Error of grid(2): 1.532509e-02

N=40

Max Error of grid(1): 7.868904e+04

Max Error of grid(2): 2.738598e-04

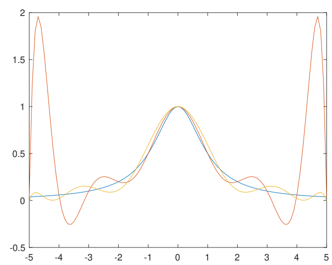

图 1: 插值多项式以及原函数的图像

5 总结

观察图像并结合实验结果可知，随着插值点数量的增大，由均匀插值点构造出的 Lagrange 插值多项式与原函数之间的最大误差增大，这说明此时的插值多项式并不能在整体上很好的拟合原函数；反观由 Chebyshev 插值点构造的 Lagrange 插值多项式与原函数之间的最大误差减小，这说明此时的插值多项式可以很好的在整体上拟合原函数。又因为插值多项式的唯一性，可以得出 Chebyshev 插值点构造出的插值多项式能更好的拟合原函数。但是由图像以及比较两组节点的结果后我们发现，均匀插值点构造的插值多项式在局部能具备好的拟合性，但是在靠近区间边界时拟合性很差，而 Chebyshev 插值点构造出的插值多项式在整体上具备更优秀的拟合性。

A Computer Code

Here we include the computer code.

```
function y = uniformPoint(x,N)
%均匀插值点
arr=zeros(1,N+1);
for i=0:N
    arr(i+1)=5-(10/N)*i;
end
y=0;
l=ones(1,N+1);
for i=0:N
    for j=0:i-1
        l(i+1)=l(i+1)*(x-arr(j+1))/(arr(i+1)-arr(j+1));
    end
```

```
    for j=i+1:N
        l(i+1)=l(i+1)*(x-arr(j+1))/(arr(i+1)-arr(j+1));
    end
    l(i+1)=l(i+1)/(1+arr(i+1)^2);
    y=y+l(i+1);
end
end

function err = errorFunc_1(N)
%由均匀插值点构造出的Lagrange插值多项式与原函数之间的最大误差
y=zeros(1,101);
for i=1:101
    y(i)=(i-1)/10-5;
%       fprintf('%f\t',uniformPoint(y(1,i),N));
    y(i)=abs(uniformPoint(y(i),N)-1.0/(1+y(i)^2));
end
% fprintf('\n');
err=max(y);
end

function y = chebyshevPoint(x,N)
%切比雪夫插值点
arr=zeros(N+1);
for i=0:N
    arr(i+1)=-5*cos(pi*(2*i+1)/(2*N+2));
end
y=0;
l=ones(1,N+1);
for i=0:N
    for j=0:i-1
        l(i+1)=l(i+1)*(x-arr(j+1))/(arr(i+1)-arr(j+1));
    end
    for j=i+1:N
        l(i+1)=l(i+1)*(x-arr(j+1))/(arr(i+1)-arr(j+1));
    end
    l(i+1)=l(i+1)/(1+arr(i+1)^2);
    y=y+l(i+1);
end
end

function err = errorFunc_2(N)
%由Chebyshev插值点构造的Lagrange插值多项式与原函数之间的最大误差
y=zeros(1,101);
for i=1:101
    y(i)=(i-1)/10-5;
%       fprintf('%f\t',chebyshevPoint(y(i),N));
    y(i)=abs(chebyshevPoint(y(i),N)-1.0/(1+y(i)^2));
```

```
end
% fprintf('\n');
err=max(y);
end

N=5;
while N<=40
    fprintf('N=%d\n',N);
    err_1=errorFunc_1(N);
    err_2=errorFunc_2(N);
    fprintf('Max Error of grid(1): %e\n',err_1);
    fprintf('Max Error of grid(2): %e\n',err_2);
    fprintf('\n');
    N=N*2;
end
x=zeros(1,101);
for i=1:101
    x(1,i)=(i-1)/10-5;
end
f=zeros(1,101);
for i=1:101
    f(1,i)=1.0/(1+x(1,i)^2);
end
y_1=zeros(1,101);
for i=1:101
    y_1(1,i)=uniformPoint(x(1,i),10);
end
y_2=zeros(1,101);
for i=1:101
    y_2(1,i)=chebyshevPoint(x(1,i),10);
end
plot(x,f,x,y_1,x,y_2);
```