数值分析 code12 实验报告

张景浩 PB20010399

2023.5.18

1 问题介绍

编写有限差分法求解线性两点边值问题的通用子程序，并计算如下边值问题：

a.$\begin{cases} x'' = -x \\ x(0) = 3 \quad x(\dfrac{\pi}{2}) = 7 \end{cases}$

b.$\begin{cases} x'' = 2e^t - x \\ x(0) = 2 \quad x(1) = e + \cos 1 \end{cases}$

其中，n=10,20,40,80,160，并计算误差阶。

2 解决方法

2.1 边值问题：有限差分法

求解边值问题

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ x(a) = \alpha \quad x(b) = \beta \end{cases}$$

设区间 [a,b] 用点 $a = t_0, t_1, \cdots, t_{n+1} = b$ 分割，我们假设

$$t_i = a + ih \quad 0 \le i \le n+1 \quad h = (b-a)/(n+1)$$

由 Taylor 展开

$$x'(t) = \frac{1}{2h}(x(t+h) - x(t-h)) + O(h^2)$$

$$x''(t) = \frac{1}{h^2}(x(t-h) - 2x(t) + x(t+h)) + O(h^2)$$

用 y_i 表示 $x(t_i)$ 的近似值，得到离散形式

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ h^{-2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = f(t_i, y_i, (2h)^{-1}(y_{i+1} - y_{i-1})) \quad (1 \le i \le n) \\ y_{n+1} = \beta \end{cases}$$

我们假定 f 关于 x 和 x' 是线性的，则它具有以下形式

$$f(t, x, x') = u(t) + v(t)x + w(t)x'$$

离散方程组可以写成

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ (-1-\frac{1}{2}hw_i)y_{i-1} + (2+h^2v_i)y_i + (-1+\frac{1}{2}hw_i)y_{i+1} = -h^2u_i \quad (1 \le i \le n) \\ y_{n+1} = \beta \end{cases}$$

其中

$$u_i = u(t_i) \quad v_i = v(t_i) \quad w_i = w(t_i)$$

记

$$a_i = -1 - \frac{1}{2}hw_{i+1}$$
$$d_i = 2 + h^2v_i$$
$$c_i = -1 + \frac{1}{2}hw_i$$
$$b_i = -h^2u_i$$

解线性方程组

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & & \\ a_1 & d_2 & c_2 & & & \\ & a_2 & d_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_0\alpha \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n - c_n\beta \end{bmatrix}$$

得到函数值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$。

3 编译环境及使用方法

本程用 matlab 编译，使用时调用 outcome.m 文件。

4 实验结果

n	error	order
10	4.72810e-03	-
20	1.29793e-03	1.86505
40	3.40224e-04	1.93166
80	8.71739e-05	1.96452
160	2.20637e-05	1.98222

边值问题 a 的误差阶

n	error	order
10	2.44006e-04	-
20	6.71202e-05	1.86210
40	1.76067e-05	1.93062
80	4.51145e-06	1.96447
160	1.14188e-06	1.98217

边值问题 b 的误差阶

表 1: 两个边值问题的误差阶对比

5 总结

通过实验结果可以看出，有限差分法求解线性两点边值问题的误差随着 n 的增大而减小，且误差阶在 2 左右，符合对于有限差分法误差阶的理论分析。

A Computer Code

Here we include the computer code.

```
function [x,t]=finite_difference(u,v,w,n,x0,xn,a,b)
% 有限差分法解二阶微分方程
% 输入：二阶微分u,v,w，分割n，边界条件x0,xn，求解区间[a,b]
% 输出：函数值x，取值点t
t=linspace(a,b,n+2);
h=(b-a)/(n+1);

a=-1-h*w(t(3:n+1))/2;
d=2+h^2*v(t(2:n+1));
c=-1+h*w(t(2:n))/2;

b=-h^2*u(t(2:n+1));b=b.';
a0=-1-h*w(t(2))/2;cn=-1+h*w(t(n+1))/2;
b(1)=b(1)-a0*x0;b(n)=b(n)-cn*xn;

A=diag(a,-1)+diag(d)+diag(c,1);
x=A\b;
x=[x0 x.' xn];
end
```