数值分析 code6 实验报告

张景浩 PB20010399

2023.4.19

1 问题介绍

利用复化梯形积分公式和复化三点 Gauss 积分公式计算下列积分：

1.$\int_0^1 e^{-x^2}dx$

2.$\int_0^4 \frac{1}{1+x^2}dx$

3.$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}dx$

取结点 $x_i, i=0,\cdots,N$，N 为 $2^k, k=1,\cdots,7$，并计算相应的收敛阶。

2 解决方法

2.1 复化梯形积分公式

划分区间 $[a,b]: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，由梯形法则：

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})[f(x_i)+f(x_{i-1}))]$$

2.2 三点 Gauss 积分公式

划分区间 $[a,b]: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，在每一个子区间内利用三点 Gauss 求积公式来进行计算：

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{2}A_{ij}f(t_{ij})$$

其中，t_{ij} 和 A_ij 是子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上三次正交多项式的零点以及对应的积分系数。

3 编译环境及使用方法

本程用 matlab 编译，使用时调用 outcome.m 文件即可。

4 实验结果

	$\int_0^1 e^{-x^2}dx$		$\int_0^4 \frac{1}{1+x^2}dx$		$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}dx$	
N	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2	1.54539e-02	-	1.33006e-01	-	5.61191e-01	-
4	3.84004e-03	2.0088	3.59410e-03	5.2097	3.75927e-02	3.9000
8	9.58518e-04	2.0022	5.64261e-04	2.6712	1.92788e-04	7.6073
16	2.39536e-04	2.0006	1.44082e-04	1.9695	5.12258e-09	15.1998
32	5.98782e-05	2.0001	3.60380e-05	1.9993	8.88178e-16	22.4595
64	1.49692e-05	2.0000	9.01059e-06	1.9998	4.44089e-16	1.0000
128	3.74227e-06	2.0000	2.25272e-06	2.0000	0.00000e+00	Inf

表 1: 复化梯形积分公式

	$\int_0^1 e^{-x^2}dx$		$\int_0^4 \frac{1}{1+x^2}dx$		$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}dx$	
N	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2	3.61106e-08	-	1.26760e-04	-	6.11656e-03	-
4	4.02152e-10	6.4885	1.25931e-04	0.0095	7.38328e-04	3.0504
8	5.74218e-12	6.1300	2.45799e-07	9.0009	4.32607e-06	7.4151
16	8.77076e-14	6.0328	2.07057e-12	16.8571	1.15024e-10	15.1988
32	1.44329e-15	5.9253	4.55191e-14	5.5074	8.88178e-16	16.9826
64	0.00000e+00	Inf	6.66134e-16	6.0945	0.00000e+00	Inf
128	0.00000e+00	NaN	2.22045e-16	1.5850	0.00000e+00	NaN

表 2: 复化三点 Gauss 积分公式

5 总结

在表 1 中我们发现，对于一般的函数，复化梯形积分以 2 阶速度收敛，但是积分 3 的函数具有周期性，根据 Euler-Maclaurin 公式，复化梯形积分会以任意阶精度收敛。在表 2 中我们发现，复化三点 Gauss 积分的收敛速度非常快，能快速的将积分误差降低至机器精度。在误差降低至双精度以下后，误差阶的计算就出现了 Inf 和 NaN 的情况，积分运算的结果均经过 mathematica 的检验。

A Computer Code

Here we include the computer code.

```
function I=trapezoidIntegral(f,x)
    I=0;
    n=length(x);
    for k=2:n
        I=I+(x(k)-x(k-1))*(f(x(k-1))+f(x(k)));
```

```
    end
    I=I/2;
end

function J=gaussIntegral(f,x)
% s=[0 0.538469310105683 0.906179845938664];
% A=[0.568888888888889 0.478628670499366 0.236926885056189];
s=[0 0.7745966692414834];
A=[0.8888888888888888 0.5555555555555556];
n=length(x);
I=zeros(1,n-1);
for i=1:n-1
    u=(x(i)+x(i+1))/2;
    I(i)=A(1)*f(u);
    u=((x(i+1)-x(i))*s(2)+x(i)+x(i+1))/2;
    v=((x(i)-x(i+1))*s(2)+x(i)+x(i+1))/2;
    I(i)=I(i)+A(2)*(f(u)+f(v));
    I(i)=(x(i+1)-x(i))*I(i)/2;
end
J=sum(I);
end
```