

基于 Loop 细分提升小波的网格去噪

张景浩 PB20010399

2023 年 6 月 25 日

1 实验背景

在对空间中的网格进行多尺度编辑时，我们注意到由细分生成的网格具有很好的细分连通性，可以构造小波进行分解与重构，实现多分辨率的网格处理。为了降低算法的复杂度，使其能够在大规模网格上进行运用，我们将提升小波的格式应用到细分小波的构造中，实现细分小波变换的快速算法。在本次实验中，我们利用提升思想来构造 Loop 细分格式的细分小波，并通过对细分小波的分解与重构，完成对带噪声网格的降噪处理。

2 算法原理

我们假设一个顶点 V 的 1-邻域顶点为 $V_i, i = 0, \dots, n-1$ ，对应的 n 条边的新边点是 e_i ，对应到 V 的新顶点是 v ，由边点的细分格式有

$$e_i = \frac{3}{8}(V + V_i) + \frac{1}{8}(v_{i-1} + V_{i+1})$$

对上述所有 n 个边点求和得

$$\sum_i e_i = \frac{3n}{8}V + \frac{5}{8} \sum_i V_i$$

另一方面，由顶点得细分格式有

$$v = \alpha_n V + \beta_n \sum_i V_i$$

其中，

$$\alpha_n = \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n}\right)^2, \quad \beta_n = \frac{1 - \alpha}{n}$$

由上式可以得到

$$\sum_i V_i = \frac{8}{5} \sum_i e_i - \frac{3n}{5}V$$

于是

$$v = \gamma_n V + \delta_n \sum_i e_i$$

其中

$$\gamma_n = \frac{8}{5}\alpha_n - \frac{3}{5}, \quad \delta_n = \frac{8}{5}\beta_n$$

Loop 细分的提升小波重构算法为:

$$\begin{cases} e \leftarrow e + \frac{3}{8}(v_0 + v_1) + \frac{1}{8}(v_2 + v_3), & \forall e, \\ v \leftarrow \gamma_n v, & \forall v, \\ v_i \leftarrow v_i + \delta_n e, & \forall e, i = 0, 1. \end{cases}$$

Loop 细分的提升小波分解算法为:

$$\begin{cases} v_i \leftarrow v_i - \delta_n e, & \forall e, i = 0, 1, \\ v \leftarrow \frac{1}{\gamma_n} v, & \forall v, \\ e \leftarrow e - \frac{3}{8}(v_0 + v_1) - \frac{1}{8}(v_2 + v_3), & \forall e. \end{cases}$$

这样的构造方法虽然简单高效,但是得到的小波尺度函数缺乏正交性,从而得到的多分辨率逼近效果不佳。因此,我们给出具备一定正交性的新的细分小波构造方法, ω_i 的取值参考书 P235 表 8.1。

新的 Loop 细分的提升小波重构算法为:

$$\begin{cases} v_i \leftarrow v_i + \omega_i e, & \forall e, i = 0, 1, 2, 3, \\ e \leftarrow e + \frac{3}{8}(v_0 + v_1) + \frac{1}{8}(v_2 + v_3), & \forall e, \\ v \leftarrow \gamma_n v, & \forall v, \\ v_i \leftarrow v_i + \delta_n e, & \forall e, i = 0, 1. \end{cases}$$

新的 Loop 细分的提升小波分解算法为:

$$\begin{cases} v_i \leftarrow v_i - \delta_n e, & \forall e, i = 0, 1, \\ v \leftarrow \frac{1}{\gamma_n} v, & \forall v, \\ e \leftarrow e - \frac{3}{8}(v_0 + v_1) - \frac{1}{8}(v_2 + v_3), & \forall e, \\ v_i \leftarrow v_i - \omega_i e, & \forall e, i = 0, 1, 2, 3, \end{cases}$$

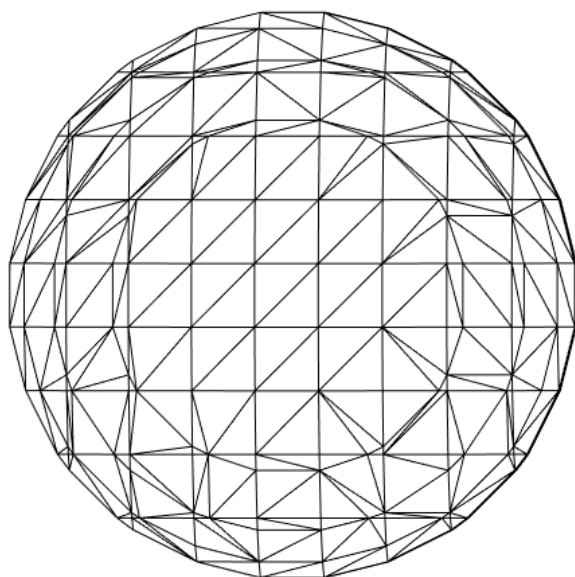
3 编译环境及实验说明

本次实验使用 Matlab 进行编译,使用时直接运行 loop_subdivision_test.m 文件即可。

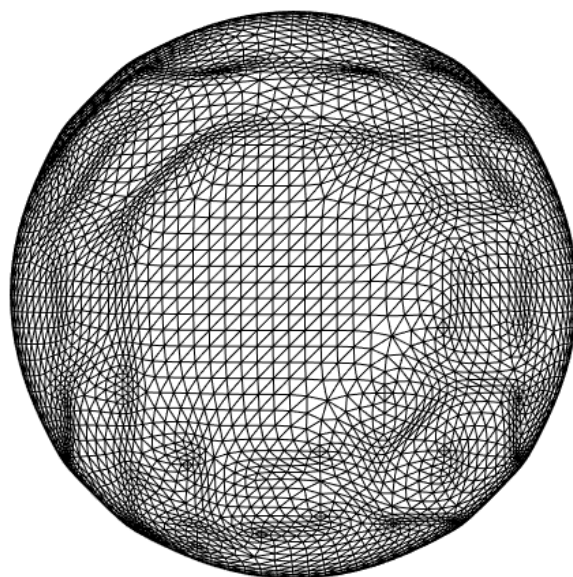
在本次实验中,由于存在许多人工设置的参数和算法,统一说明如下:

1. 由于本次实验的算法仅适用于封闭的曲面,所以实验对象为 Ball.obj 和 Matrix.obj。
2. 受制于实验设备,本次实验的实验对象均是给定一个几何模型,通过两层的 Loop 细分得到的网格模型,然后再该网格模型的顶点上加入白噪声。
3. 在添加噪声的过程中,我们以网格顶点在均匀权重下的 Laplace 坐标为该顶点处的法方向,并以 Laplace 坐标模长为标准,在倍数 $[0, 4]$ 下在法方向上添加噪声。
4. 在去噪的过程中,我们利用 Loop 细分提升小波对该网格模型做小波分解,并设置阈值为所有小波系数的模平均值的两倍,将所有模小于阈值的小波系数置零,然后利用小波重构算法得到去噪后的模型。

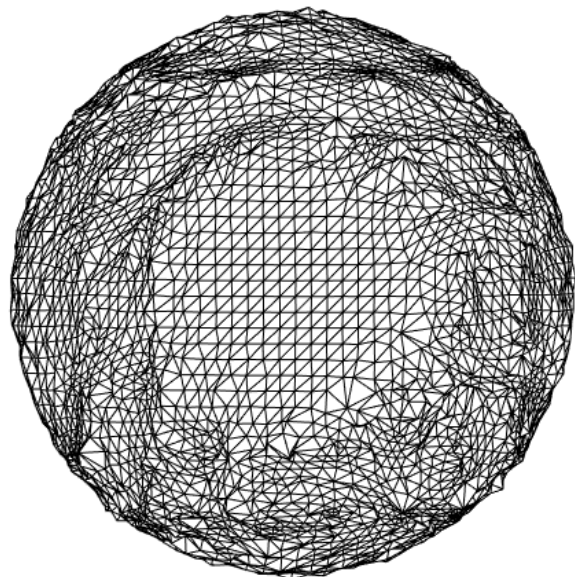
4 实验结果



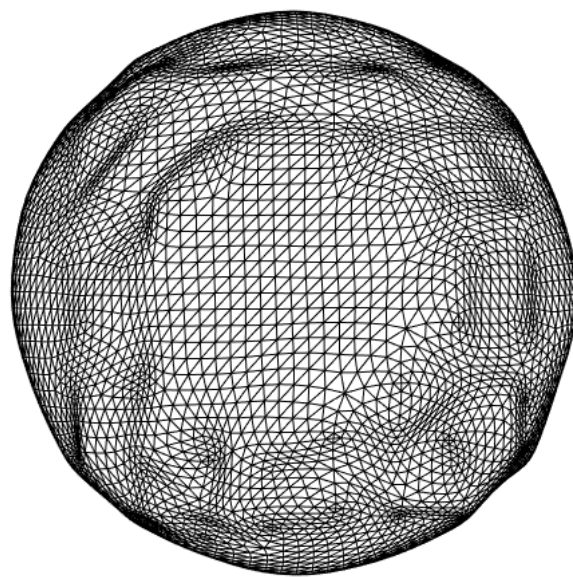
源网格



两次 Loop 细分结果网格



随机增加噪声后的网格



使用 Loop 细分提升小波去噪后的网格

图 1: 基于 Loop 细分提升小波的网格去噪实验结果

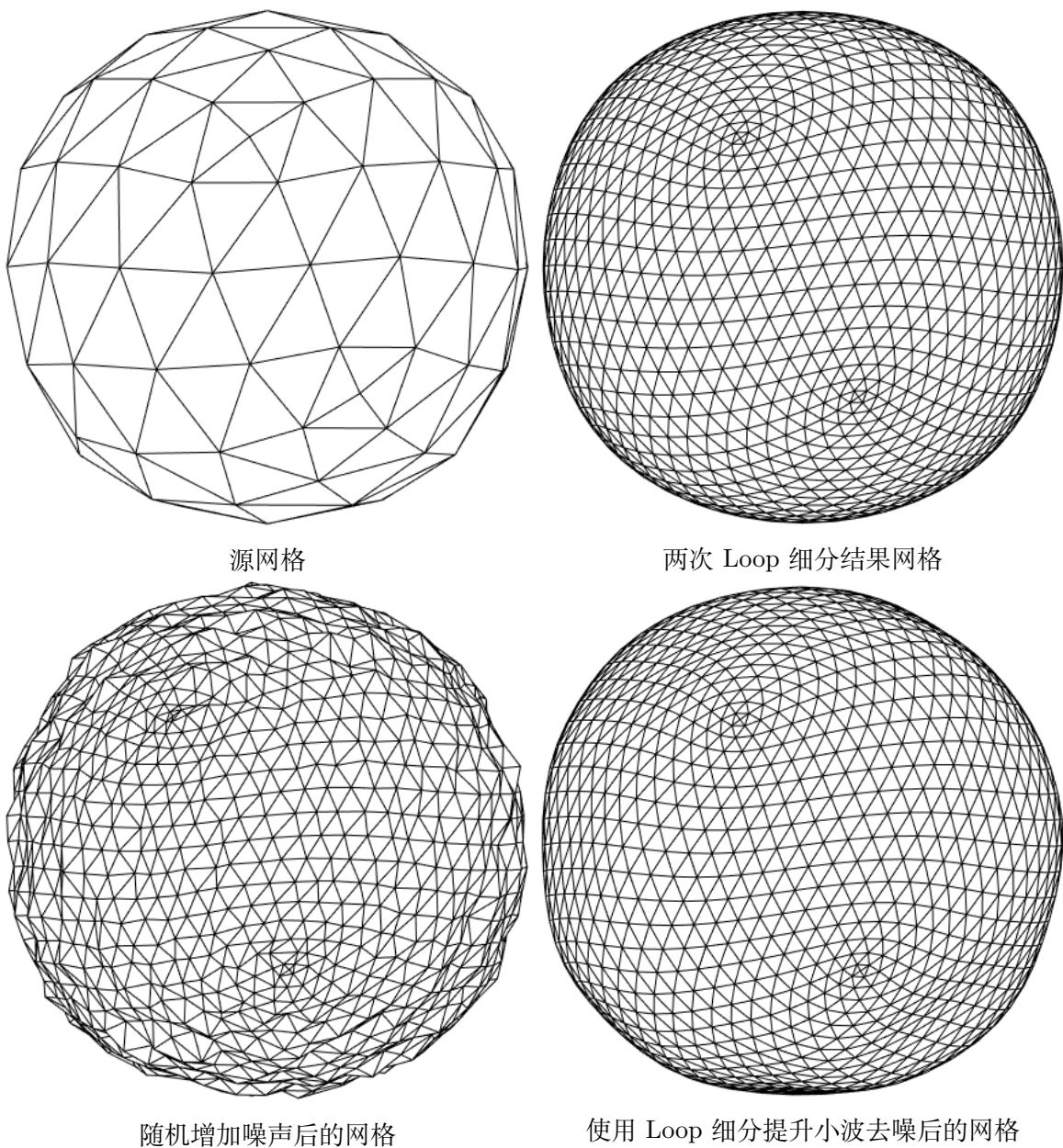


图 2: 基于 Loop 细分提升小波的网格去噪实验结果

5 结果分析与总结

通过实验结果我们可以看出 Loop 细分提升小波对于网格噪声的去噪效果是十分优秀的，在对噪声的处理上基本做到的对网格的还原。对比两个实验对象的 Loop 细分网格和去噪后的网格可以发现，二者在肉眼观察下完全一致，这是由于 Loop 细分网格具有一定的细分连通性，使得我们可以构造小波对网格进行分解和重构，从多尺度对网格进行处理，将较小的噪声系数置零从而达到更好的去噪效果。同时，我们将提升思想运用到小波处理中，极大程度地提高了算法的效率。