基于 FFT 的 Chebyshev 插值

张景浩 PB20010399

2023 年 4 月 30 日

1 问题介绍

完成利用快速傅里叶变换 (FFT) 实现 Chebyshev 插值的子程序，并在 Chebyshev 节点个数 $N = 16\ 32, 64, 128$ 时，在 $x \in [-1, 1]$ 上插值下列函数:
$f_1(x) = |\sin 6x|^3 - \cos 5e^x$
$f_2(x) = \frac{1}{1+25x^2} - \sin 20x$
选择合适的节点数，绘制原函数与插值函数，并证明 Chebyshev 插值多项式的逼近结果。逼近结果可以通过如下两个定理进行验证:
定理 2：对于整数 $m \geq 0$，函数 f 以及其到 m-1 阶的导数 $f^{(m-1)}$ 在 [-1,1] 上绝对连续，并且其 m 阶导数 $f^{(m)}$ 是有界变差的，全变差记为 V。那么对于任意的 $k \geq m+1$，函数 f 的 Chebyshev 系数满足

$$|c_k| \leq \frac{2V}{\pi(k-m)^{m+1}}$$

并且 Chebyshev 插值多项式满足

$$||f - p_n|| \leq \frac{4V}{\pi m(n-m)^m}.$$

定理 3：设 f 是 [-1,1] 上的解析函数, 在 Bernstein 椭圆 E_ρ 内解析连续并且有界 M。其中 Bernstein 椭圆是焦点为 ± 1，半长轴和半短轴和为 ρ。那么 Chebyshev 系数满足 $|c_0| \leq M$ 以及

$$|c_k| \leq 2M\rho^{-k}, \quad k \geq 1$$

并且 Chebyshev 插值多项式满足

$$||f - p_n||_\infty \leq \frac{4M\rho^{-n}}{\rho - 1}.$$

若定理不适用，请说明理由。

2 解决方法

2.1 Chebyshev 插值

对于 Chebyshev 多项式插值，我们有如下定理:
定理 1：若 f(x) 是在 [-1,1] 上 Lipschitz 连续的函数，那么存在唯一的数列 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$，使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x), \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

其中，$T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ 是 Chebyshev 多项式。所以我们可以对 [-1,1] 上的任意 Lipschitz 连续函数 f(x) 用一系列 Chebyshev 多项式的线性组合去逼近，得到 f 的 n 次插值多项式 p_n。

因为这个插值多项式 p_n 是唯一的，表示为

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j T_j(x)$$

令 $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$，$k = 0, \cdots, n$，为插值结点，则对 $0 \le k \le n$

$$y_k = p_n(x_k) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos jk\frac{\pi}{n}$$

因此

$$a_j = \frac{1}{n\epsilon_j} \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \bar{\omega}^j k,\ j = 0, 1, \cdots, n$$

其中

$$\epsilon_0 = \epsilon_n = 2; \epsilon_1 = \cdots = \epsilon_{n-1} = 1.$$

2.2 快速 Fourier 变换

对多项式 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in \Pi_{n-1}$，不失一般性的，设 $n = 2^k$，考虑按 a_i 下标的奇偶性将 $f(x)$ 中的项分为两部分，即

$$f(x) = (a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2}) + (a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$$

令

$$f_1(x) = a_0 + a_2x + \cdots + a_{n-2}x^{\frac{n}{2}-1}$$
$$f_2(x) = a_1 + a_3x + \cdots + a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}$$

则

$$f(x) = f_1(x^2) + xf_2(x^2)$$

令 $\omega_n^k = e^{\frac{2k\pi}{n}}$，带入 $x = \omega_n^k\ (k < \frac{n}{2})$ 可得

$$f(\omega_n^k) = f_1(\omega_{\frac{n}{2}}^k) + \omega_n^k f_2(\omega_{\frac{n}{2}}^k) \qquad (1)$$

带入 $x = \omega_n^{k+\frac{n}{2}}\ (k < \frac{n}{2})$ 可得

$$f(\omega_n^{k+\frac{n}{2}}) = f_1(\omega_{\frac{n}{2}}^k) - \omega_n^k f_2(\omega_{\frac{n}{2}}^k) \qquad (2)$$

结合 (1)、(2) 两式，我们只需要求出 $f_1(\omega_{\frac{n}{2}}^k)$ 和 $f_2(\omega_{\frac{n}{2}}^k)$ 就可以得到 $f(\omega_n^k)$ 和 $f(\omega_n^{k+\frac{n}{2}})$ 的值，所以 $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(1)$，最终以时间复杂度 O(nlogn) 得到 DFT 的结果。

2.3 算法

step1. 计算 $y_{2k-i} = y_i$，$i = 1, \cdots, k-1$.

step2. 利用 FFT 计算

$$(y_0, \cdots, y_{2k-1}) \to (Y_0, \cdots, Y_{2k-1})$$

.

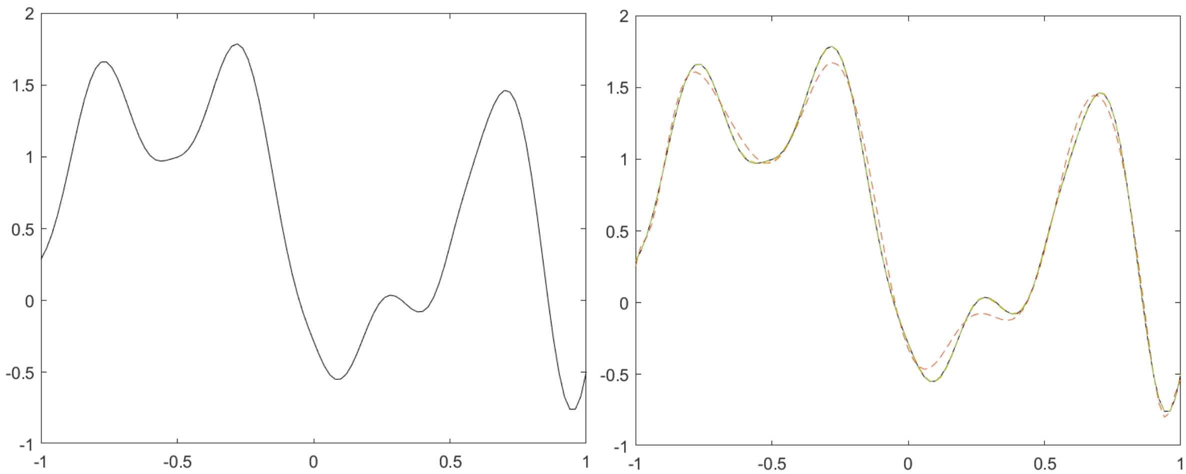
step3. 计算 $a_k = \frac{1}{n}Y_k$，$k = 1, \cdots, n-1; a_0 = \frac{1}{2n}Y_0; a_n = \frac{1}{2n}Y_n$.

3 编译环境及使用方法

实验程序完全由 matlab 编译，没有额外引用的库文件，使用时直接运行 main.m 文件即可。

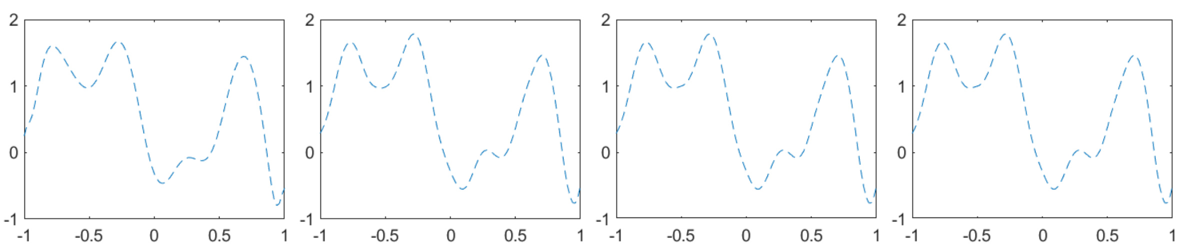
4 实验结果

4.1 $f_1(x) = |\sin 6x|^3 - \cos 5e^x$



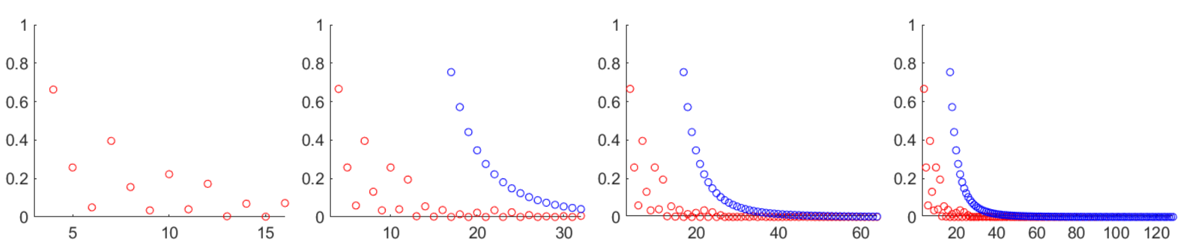
原函数图像　　Chebyshev 插值多项式图像

图 1: 原函数图像与插值多项式图像的对照



N=16　　N=32　　N=64　　N=128

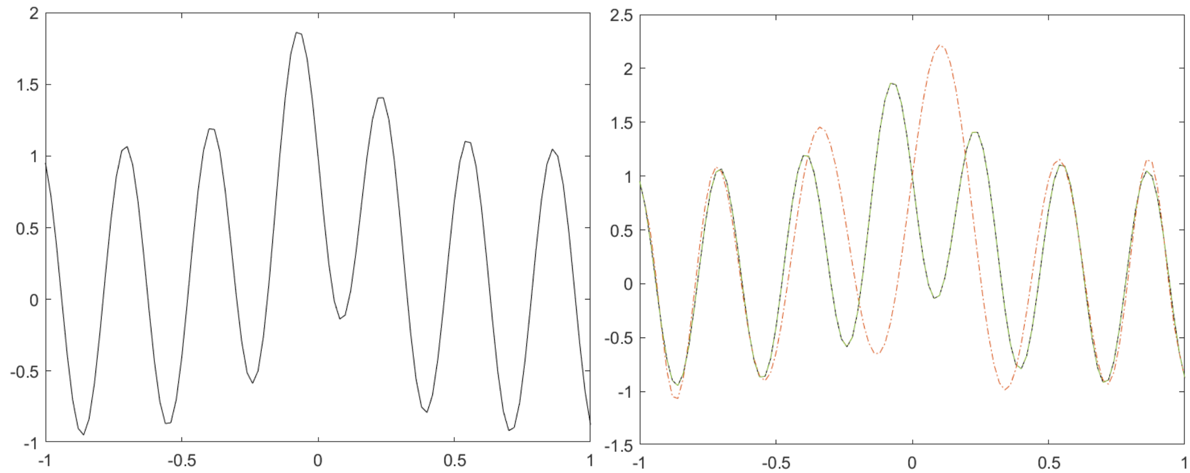
图 2: 不同的 Chebyshev 结点个数的插值多项式图像



N=16　　N=32　　N=64　　N=128

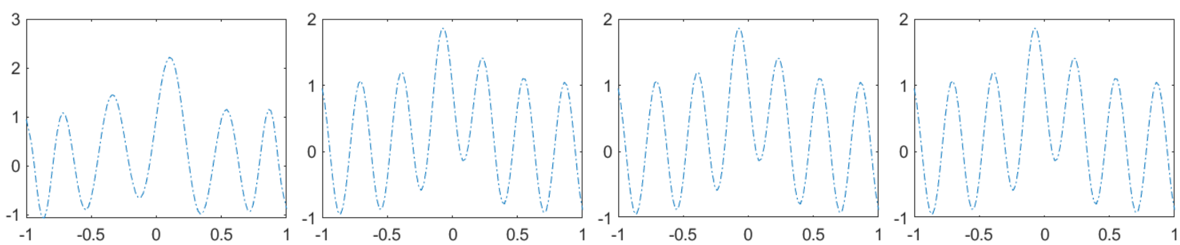
图 3: 定理 2 的验证

4.2 $f_2(x) = \frac{1}{1+25x^2} - \sin 20x$



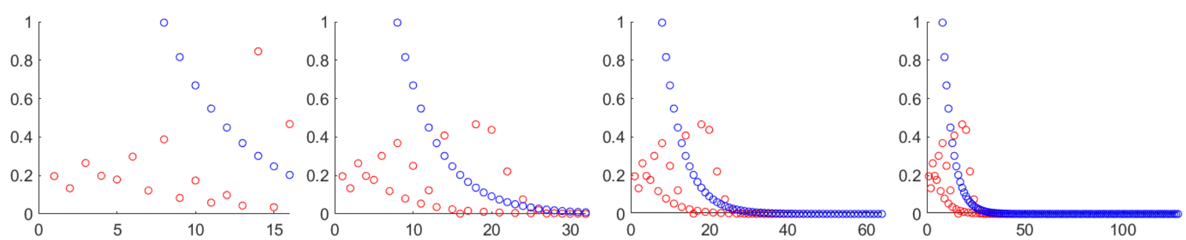
原函数图像　　Chebyshev 插值多项式图像

图 4: 原函数图像与插值多项式图像的对照



N=16　　N=32　　N=64　　N=128

图 5: 不同的 Chebyshev 结点个数的插值多项式图像



N=16　　N=32　　N=64　　N=128

图 6: 定理 3 的验证

4.3 误差阶对比

N	f_1	order	f_2	order
16	1.24199e-01	-	2.32799e+00	-
32	1.48364e-02	3.0654	1.63661e-03	10.4742
64	9.70714e-04	3.9339	2.85381e-06	9.1636
128	1.07751e-04	3.1713	8.41993e-12	18.3706

表 1: f_1 和 f_2 的误差以及误差阶对比

5 结果分析与总结

1. 从图 1 和图 2 中我们可以看出在 N=16 的时候，Chebyshev 插值多项式与原函数之间有明显的误差，当 $N \geq 32$ 的时候，Chebyshev 插值多项式与原函数之间的误差用肉眼已经难以分辨了。在图 3 中红色的点表示 Chebyshev 系数的绝对值，蓝色的点表示对应的不等式右端的值，需要说明的是，由于 Chebyshev 系数的唯一性，所以这些红点的分布是一致的，N=16 看不到蓝点是因为此时不等式右端的值大于 1。可以看到红色的点也始终在蓝色点的下方，这说明对于函数 f_1，定理 2 是成立的。结合误差表格可以看出，对于函数 f_1 而言，Chebyshev 多项式插值的误差阶大概在 $3 \sim 4$ 之间，误差最后在 10^{-4}，这样的插值多项式还是比较精确的，收敛速度也不慢。因为函数 f_1 在复平面上不是全纯函数，所以没有使用其验证定理 3。

2. 从图 4 和图 5 我们可以看出在 N=16 的时候，Chebyshev 插值多项式与原函数之间的误差是非常明显的，中间部分的波峰与波谷完全错开，但是当 $N \geq 32$ 的时候，Chebyshev 插值多项式与原函数之间的误差用肉眼已经难以分辨了。图 6 中红色的点表示 Chebyshev 系数的绝对值，蓝色的点表示对应的不等式右端的值，需要说明的是，由于 Chebyshev 系数的唯一性，所以这些红点的分布是一致的。可以看出除了 $10 < k < 30$ 的部分点之外，其余的 Chebyshev 系数均满足不等式的约束。同时 n=16 时定理 3 验证不成立，n=32,64,128 时，定理三成立。结合误差表格可以看出，对于函数 f_2 而言，Chebyshev 插值多项式的收敛速度是非常快的，达到了 10 甚至快到 20，误差也达到了 10^{-12}，结合定理 2 来看，因为函数 f_2 在 [-1,1] 上是 C^∞ 的，所以 f_2 可以以任意阶速度收敛，这也是我们没有用 f_2 去验证定理 2 的原因。