自补图与 Ramsey 图

谢继国
（兰州师范高等专科学校　甘肃兰州　730070）

摘　要：讨论了自补图的构造方法、自补图与 Ramsey 图的关系，给出了顶点数不超过 101 的所有含 4m＋1 型素数顶点的自补图.

关键词：自补图；R（k，k）－Ramsey 图；k－点团；k－独立点集
中图分类号：O157.5　　文献标识码：A　　文章编号：1008－9020(2003)02－007－03

自补图是一类强对称的无向简单图．在二着色 Ramsey 数 R（k，k）的研究中，自补图常被用到[1]．Hong Zhang 利用有限单群的分类方法，给出了存在 n 顶点自补图的充要条件[2]．本文讨论顶点个数为 4m＋1（$m\in N^*$）的素数时自补图的构造方法、自补图与 Ramsey 图的关系，进而给出顶点数不超过 101 的全部含 4m＋1 型素数个顶点的自补图的结构，并给出了这些自补图在求解 Ramsey 下界数时的地位（若 n 顶点图 G 是一个 R（k，l）－Ramsey 下界图，则 n＋1 为一个 R（k，l）－Ramsey 下界数）.

1. 有关概念

定义 1　设 $G<V_G,\ E_G>$ 和 $H<V_H,\ E_H>$ 都是 n 阶标定图．如果 $|E_G|=|E_H|$，且有双映射 f：$v_G\to v_H$，$v_i\to h_i$，$i=1,2,\cdots,n$，使得 $(h_i,h_j)\in E_H$ 当且仅当 $(v_i,v_j)\in E_G$ 成立，则称 f 为 V_G 到 V_H 上的一个同构映射，且称图 G 与 H 同构，记为 $G\cong H$.

定义 2　设 G 是一个 n 阶无向简单图，G_1、G_2 都是 G 的子图．如果 G_1 是一个 k（$k\leqslant n$）阶完全图（即 $G_1=K_k$），则称 G_1 为 G 的一个 k 一点团．如果 G_2 是 l 个孤立顶点（G_2 中任何两个顶点都不相邻），则称 G_2 为 G 的一个 l 一独立点集（记为 $\overline{K}_l$）.

定义 3　设 $G<V_G,\ E_G>$ 和 $H<V_G,\ E_H>$ 都是 n 阶标定图．如果把图 G 与图 H 的对应顶点互相重合便得到一个 n 阶完全图 K_n，则称图 H 为图 G 的补图，且记 $H=\overline{G}$.

定义 4　设 G 是一个 n 阶标定图．如果图 G 与它的补图 $\overline{G}$ 同构（即 $G\cong\overline{G}$），则称图 G 为一个自补图.

定义 5　设 G 是一个无向简单图，如果图 G 中既不含 k—点团、也不含 l 一独立点集，则称图 G 为一个 R（k，l）－Ramsty 下界图，且称自然数 $|V_G|+1$ 为一个 R（k，l）－Ramsey 下界数.

定义 6　设 n 是正整数．如果所有 n 阶无向简单图都满足：或者含有 k—点团，或者含有 l－独立点集，但至少存在一个 n－1 阶的无向单图 G，使得图 G 既不含 k－点团、也不含 l－独立点集，则称 n 为 R（k，l）－Ramsey 数，记为 n＝R（k，l）．且称图 G 为 R（k，l）－Ramsey 图.

根据定义 5，对于给定的正整数对（k，l），R（k，l）－Ramsey 图是指所有的 R（k，l）－Ramsey 下界图中含顶点个数（阶数）最多的图．例如图 1 中的四个图都是 R（3，3）－Ramsey 下界图，但只有 G_4 才是 R（3，3）－Ramsey 图[1].

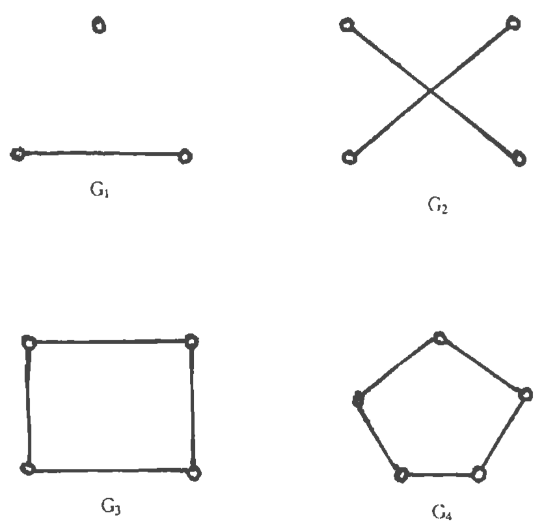

图 1　R（3，3）－Ramsey 下界图

2. 自补图的性质与构造

定理 1　设 G 是 n 阶的强对称自补图，则 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$.

证明　设 $G=G<V_G,\ E_G>$．因为 G 是 n 阶

自补图，所以 $V_G=V_{\bar{G}}$，$|V_G|=n$ 且 $|E_G|=|E_{\bar{G}}|$．由于 $E_{K_n}=E_G\cup E_{\bar{G}}$，$E_G\cap E_{\bar{G}}=\phi$，$|E_{K_n}|=\frac{n(n-1)}{2}$，且 K_n 中每个顶点的度数均为 $\frac{n-1}{2}$，所以 $|E_G|=|E_{\bar{G}}|=\frac{n(n-1)}{4}$．注意到图 G 的强对称性，图 G 的每个顶点的度数均相等，且为 $\frac{n-1}{4}$．$\frac{n-1}{4}\in N^*$．故 $n\equiv 1\pmod 4$．

定理 2　设 $n=4m+1$（$m\in N^*$）是一个素数，则存在含 n 个顶点的循环图 G，使得 $G\cong\bar{G}$（即 G 是自补图）．

证明　证明过程可分三步：

1）　4m＋1 型的素数确定一个 4m 级排列 $\pi_{4m}=j_1j_2\cdots j_{4m}$．

因为 $n=4m+1$（$m\in N^*$）是一个素数，所以模 n 的剩余类环 $Z_n=\{[0],[1],\cdots,[4m]\}$ 对剩余类的加法和乘法构成一个有限素域．令 $Z_n^*=\{[1],[2],\cdots,[4m]\}$，则 Z_n^* 对于剩余类的乘法构成一个 4m 阶的循环群[3]．即存在 $l\in N^*$，$2\leqslant l\leqslant 4m$，使得 $Z_n^*=\langle l\rangle=\{[l],[l^2],\cdots,[l^{4m}]\}$．

令 $j_i\in N^*$，$1\leqslant j_i\leqslant 4m$，使得 $j_i\equiv l^i\pmod n$，$i=1,2,\cdots,4m$，则由循环群生成元的性质，$j_1j_2\cdots j_{4m}$ 构成数码 1，2，…，4m 的一个 4m 级排列，且 $j_{4m}=1$．我们记 4m 级排列 $j_1j_2\cdots j_{4m}$ 为 π_{4m}．

2）　4m 级排列 π_{4m} 确定一个 n 阶 0－1 循环矩阵 A．

对 4m 级排列 $\pi_{4m}=j_1j_2\cdots j_{4m}$ 用 0、1 交错赋值，然后按自然排列 $12\cdots 4m$ 的顺序调整 0、1 的位置，并在该序列前加数 0，便得到 n 元 0－1 序列 $s=0a_1a_2\cdots a_{4m}$，而且 S 中每个元素 a_i 都唯一地对应着一个自然数 p（$1\leqslant p\leqslant 4m$），使得 j_p 赋值 a_i．因为 $n-i\in N^*$，且 $1\leqslant n-i\leqslant 4m$（$1\leqslant i\leqslant 4m$），所以对 a_{n-i} 来说，也有唯一的自然数 q（$1\leqslant q\leqslant 4m$），使得 j_q 赋值 a_{n-i}．从而有 $i=j_p$，$n-i=j_q$，推出 $j_q=n-j_p$．

因为 $j_q\equiv l^q\pmod n$，即 $n\mid(l^q-j_q)$，所以 $n\mid(l^q-n+j_p)$．而 $n\mid(l^p-i_p)$，所以 $n\mid(l^p+l^q-n)$，从而有 $n\mid(l^p+l^q)$．不妨设 $1\leqslant q\leqslant p\leqslant 4m$，则 $n\mid l^q(l^{p-q}+1)$．由于 $l^q\equiv j_q\pmod n$，$1\leqslant j_q\leqslant 4m<n$，所以 $n\nmid l^q$，从而

$$n\mid(l^{p-q}+1)\qquad(1)$$

此外，因为 $l^{4m}\equiv 1\pmod n$，即 $n\mid(l^{4m}-1)$，所以 $n\mid(l^{4m}+l^{p-q})$ 即 $n\mid l^{p-q}(l^{4m-p+q}+1)$．由于 $n\nmid l^{p-q}$，故

$$n\mid(l^{4m-p+q}+1)\qquad(2)$$

由（1）、（2）两式，有

$$l^{p-q}\equiv l^{4m-p+q}\equiv n-1\pmod n.$$

注意到 $1\leqslant p-q\leqslant 4m$ 且 $1\leqslant 4m-p+q\leqslant 4m$，可推得 $p-q=4m-q+p$，即 $p-q=2m$．所以 p 与 q 具有相同的奇偶性．从而在 4m 级排列 $\pi_{4m}=j_1j_2\cdots j_q\cdots j_p\cdots j_{4m}$ 的 0、1 赋值中，j_p 与 j_q 具有相同的赋值．利用 $j_p=i$，$j_q=n-i$ 便知，在 0－1 序列 $S=0a_1\cdots a_{4m}$ 中，对于每一个 $1\leqslant i\leqslant 4m$ 有 $a_{n-i}=a_i$，从而以 0－1 序列 S 为生成元，可以生成 n 阶循环矩阵 A，使得 A 作为某一 n 阶循环图 G 的邻接矩阵[4]．

3）　以 A 为邻接矩阵的循环图 G 是一个 n 阶自补图．

如果把序列 $S=0a_1a_2\cdots a_{4m}$ 中的每一个 a_i 都进行 0 和 1 的对换（若 $a_i=0$，则令 $b_i=1$，否则令 $b_i=0$），则得到新的 n 元 0－1 序列 $S'=0b_1b_2\cdots b_{4m}$，且由 S' 生成的 n 阶循环矩阵 B 必为图 G 的补图 $\bar{G}$ 的邻接矩阵[4]．

此外，如果把图 G 的顶点标号 0、1、2、…、4m 依次换为 0、j_1、j_2、…、j_{4m}，则图 G 的邻接矩阵 A 就变成了矩阵 B，说明 $\bar{G}\cong G$，即 G 为自补图．

定理 2 的证明过程，给出了含 4m＋1 型素数个顶点的自补图的构造方法：

1°　对给定素数 $n=4m+1$，求有限素域 Z_n 对应的 4m 阶循环乘群 $Z_n^*=\{[1],[2],\cdots,[4m]\}$ 的生成元 l，使得 $Z_n^*=\langle l\rangle$．

2°　利用同余式 $l^i\equiv j_i\pmod n$，求数码 1，2，…，4m 的 4m 级排列 $\pi_{4m}=j_1j_2\cdots j_{4m}$．

3°　对排列 π_{4m}，用 0、1 交错赋值并调整 0、1 的排列次序，求 n 阶循环矩阵 A 的生成序列 $S=0a_1a_2\cdots a_{4m}$．

4°　利用 S 求与之对应的自补图 G．

3. 自补图与 Ramsey 图的关系

定理 3　设 G 是 n 阶无向单图．若 G 是自补图，则必有自然数 k（$1\leqslant k\leqslant n$），使得 G 是一个 R(k，k)－Ramsey 下界图．反之不然．

证明　因为 G 是 n 阶对称自补图，所以 $\bar{G}\cong G$ 且 G 的每个顶点度数均为 $\frac{n-1}{4}$，因此 G 的点团最

多含$\frac{n+3}{4}$个顶点．令 $k\in N^{*}$，$k>\frac{n+3}{4}$，则G不含k点团．

此外，$\bar{G}$与G同构，因而对上述k，$\bar{G}$也不含k点团即G不含k－独立点集．故G是一个R（k，k）－Ramsey下界图．

反之，如果G是一个R（k，k）－Ramsey下界图，则不妨取k＝3，n＝4，使得图1中的图G_3便满足G的条件．但显然，图G_3的补图是图1中的G_2．并不与G_3同构．说明G_3不可能是自补图．

定理3说明R（k，k）－Ramsey下界图未必是自补图．但到目前为止，我们能够证明的R（k，k）图只有两个：R（3，3）图和R（4，4）图，且这两个图都是自补图．这就说明R（k，k）－Ramsey图倒有可能是自补图．

利用自补图的构造方法，对于不大于101的所有4m＋1型素数n，可构造出对应的自补图G及其在Ramsey理论中的地位，为确定Ramsey数提供依据：

n＝5，l＝2，π_4＝2431，S＝01001．自补图G＝C_5（1），且G为R（3，3）－Ramsey图．

n＝13，l＝2，S＝0101100001101．自补图G＝C_{13}（1，3，4），且G为R（4，4）－Ramsey下界图．

n＝17，l＝3，S＝01101000110001011．自补图G＝C_{17}（1，2，4，8），且G为R（4，4）－Ramsey图．

n＝29，l＝2，S＝0100111101000100100 0101111001．自补图G＝C_{29}（1，4，5，6，7，9，13），且G为R（5，5）－Ramsey下界图．

n＝37，l＝2，S＝0101100101111000100001000111101001101．自补图G＝C_{37}（1，3，4，7，9，10，11，12，16），且G为R（5，5）－Ramsey下界图．

n＝41，l＝7，S＝011011001110000010101101010000011100 11011．自补图G＝C_{41}（1，2，4，5，8，9，10，16，18，20），且G为R（6，6）－Ramsey下界图．（值得注意的是，对于n＝41，存在R（5，5）－Ramsey下界图C_{41}（1，3，5，8，12，13，16，17，18，19），但它并非自补图）．

n＝53，l＝2，S＝01001011011101011100000011001100000011101011101101001．自补图G＝C_{53}（1，4，6，7，9，10，11，13，15，16，17，24，25），且G为R（6，6）－Ramsey下界图．

n＝61，l＝2，S＝0101110001001111100110100101000000101001011001111110010001110 1．自补图G＝C_{61}（1，3，4，5，9，12，13，14，15，16，19，20，22，25，27），且G为R（6，6）－Ramsey下界图．

n＝73，l＝5，S＝0111101011001000101100011101000010011110010000101110001101000100110101111．自补图G＝C_{73}（1，2，3，4，6，8，9，12，16，18，19，23，24，25，27，32，35，36），且G为R（6，6）－Ramsey下界图．

n＝89，l＝3，S＝01101100111100001110111001000000101010011010110101100101010000001001110111000011110011011．自补图G＝C_{89}（1，2，4，5，8，9，10，11，16，17，18，20，21，22，25，32，34，36，39，40，42，44），且G为R（6，6）－Ramsey下界图．

n＝97，l＝5，S＝0111101011011000101000101101000111011000000110011110011000000110111000101101000101000110110101111．自补图G＝C_{97}（1，2，3，4，6，8，9，11，12，16，18，22，24，25，27，31，32，33，35，36，43，44，47，48），且G为R（6，6）－Ramsey下界图．

n＝101，l＝2，S＝01001110010001101101111111000011010011000001010101001010101000001100101100001111111011011000100111001．自补图G＝C_{101}（1，4，5，6，9，13，14，16，17，19，20，21，22，23，24，25，30，31，33，36，37，43，45，47，49），且G是R（6，6）－Ramsey下界图．

参考文献：

[1] R. L. Graham. Ramsey Theory. New York：A Wiley－Interscience Publication，1980.

[2] H. Zhang. Self－complementary symmetric graphs. J. Graph Theory，1992（16）.

[3] 辛未．抽象代数．郑州：河南大学出版社，1988.

[4] N. Biggs. Algebraic Graph Theory. London：Cambridge University Press. 1973.

责任编辑：蒋德璋