Sur quelques généralités sur les graphes

Séance 4. Théorie des graphes
Enseignant: K.Meslem

U.S.T.H.B, le 27 Octobre 2021

3ème LIC RO Section A

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe sans boucle où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $U = \{u_1, \dots, u_m\}$.

La **matrice d’incidence sommets-arcs** de G est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}$ à coefficients 1,-1 ou 0 telle que:

Matrice d'incidence sommets-arcs

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe sans boucle où $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$.

La **matrice d'incidence sommets-arcs** de G est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}$ à coefficients 1,-1 ou 0 telle que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & I(u_j) = x_i \\ -1 & T(u_j) = x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Matrice d'incidence sommets-arcs

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe sans boucle où $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$.
La **matrice d'incidence sommets-arcs** de G est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}$ à coefficients 1,-1 ou 0 telle que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & I(u_j) = x_i \\ -1 & T(u_j) = x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

Exemple

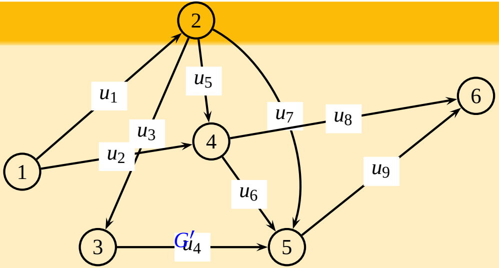


Figure:

Exemple

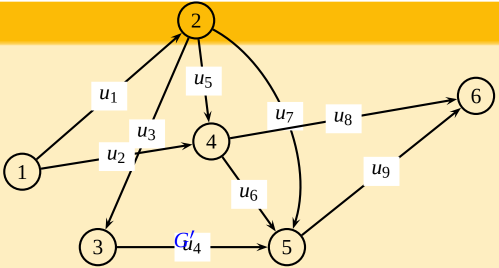


Figure:

La matrice d'incidence est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice d’incidence sommets-arcs

Remarques

Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;

Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^+_{G'}(x_4)$ $\quad |\{j : a_{4,j} = -1\}| = 3 = d^-_{G'}(x_4)$

Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^+_{G'}(x_4)$ $\qquad$ $|\{j : a_{4,j} = -1\}| = 3 = d^-_{G'}(x_4)$

Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^+_{G'}(x_4)$ $|\{j : a_{4,j} = -1\}| = 3 = d^-_{G'}(x_4)$

Définition

Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^+_{G'}(x_4)$ $\qquad$ $|\{j : a_{4,j} = -1\}| = 3 = d^-_{G'}(x_4)$

Définition

- Une matrice régulière M d'ordre p est dite **unimodulaire** si son déterminant est soit +1 soit -1.

Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^+_{G'}(x_4)$ $\qquad$ $|\{j : a_{4,j} = -1\}| = 3 = d^-_{G'}(x_4)$

Définition

- Une matrice régulière M d'ordre p est dite **unimodulaire** si son déterminant est soit +1 soit -1.
- Une matrice rectangulaire M à coefficients $n \times m$ est dite **totalement unimodulaire** ssi les sous-matrices carrées régulières extraites de M sont unimodulaires.

Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^+_{G'}(x_4)$ $\qquad$ $|\{j : a_{4,j} = -1\}| = 3 = d^-_{G'}(x_4)$

Définition

- Une matrice régulière M d'ordre p est dite **unimodulaire** si son déterminant est soit +1 soit -1.
- Une matrice rectangulaire M à coefficients $n \times m$ est dite **totalement unimodulaire** ssi les sous-matrices carrées régulières extraites de M sont unimodulaires.

Toute matrice A d'incidence sommets-arcs d'un graphe $G = (X, U)$ est totalement unimodulaire.

Matrice d’incidence sommets-arcs

Preuve

Matrice d'incidence sommets-arcs

Preuve

- La matrice A contient exactement deux termes non nuls par colonne, dont l'un est +1 et l'autre est -1.

Matrice d’incidence sommets-arcs

Preuve

- La matrice A contient exactement deux termes non nuls par colonne, dont l’un est +1 et l’autre est -1.
- Considérons $\mathcal{A}$ une sous-matrice régulière de la matrice A d’ordre p.
- Par récurrence sur p, montrons que $\det \mathcal{A} = \pm 1$:

Matrice d'incidence sommets-arcs

Preuve

- La matrice A contient exactement deux termes non nuls par colonne, dont l'un est +1 et l'autre est -1.
- Considérons $\mathcal{A}$ une sous-matrice régulière de la matrice A d'ordre p.
- Par récurrence sur p, montrons que $\det \mathcal{A} = \pm 1$:
- Si $p = 1$ alors la sous-matrice est réduite au coefficient +1 ou au coefficient -1.
  La proposition est vraie.
- Supposons maintenant que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre $p - 1$ où $p \leq n$ et montrons la proposition est vraie à l'ordre p:

Matrice d'incidence sommets-arcs

Preuve

- La matrice A contient exactement deux termes non nuls par colonne, dont l'un est +1 et l'autre est -1.
- Considérons $\mathcal{A}$ une sous-matrice régulière de la matrice A d'ordre p.
- Par récurrence sur p, montrons que $\det \mathcal{A} = \pm 1$:
- Si $p = 1$ alors la sous-matrice est réduite au coefficient +1 ou au coefficient -1.
  La proposition est vraie.
- Supposons maintenant que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre $p - 1$ où $p \leq n$ et montrons la proposition est vraie à l'ordre p:
- Comme $\mathcal{A}$ est régulière, $\mathcal{A}$ ne contient aucune colonne nulle.

Matrice d'incidence sommets-arcs

Preuve

- La matrice A contient exactement deux termes non nuls par colonne, dont l'un est +1 et l'autre est -1.
- Considérons $\mathcal{A}$ une sous-matrice régulière de la matrice A d'ordre p.
- Par récurrence sur p, montrons que $\det \mathcal{A} = \pm 1$:
- Si $p = 1$ alors la sous-matrice est réduite au coefficient +1 ou au coefficient -1.
  La proposition est vraie.
- Supposons maintenant que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre $p - 1$ où $p \leq n$ et montrons la proposition est vraie à l'ordre p:
- Comme $\mathcal{A}$ est régulière, $\mathcal{A}$ ne contient aucune colonne nulle.
- Si chaque colonne contient deux coefficients non nuls, alors les vecteurs lignes sont dépendants vu que leur somme est nulle.

Matrice d'incidence sommets-arcs

Preuve

- La matrice A contient exactement deux termes non nuls par colonne, dont l'un est +1 et l'autre est -1.
- Considérons $\mathcal{A}$ une sous-matrice régulière de la matrice A d'ordre p.
- Par récurrence sur p, montrons que $\det \mathcal{A} = \pm 1$:
- Si $p = 1$ alors la sous-matrice est réduite au coefficient +1 ou au coefficient -1.
  La proposition est vraie.
- Supposons maintenant que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre $p - 1$ où $p \leq n$ et montrons la proposition est vraie à l'ordre p:
- Comme $\mathcal{A}$ est régulière, $\mathcal{A}$ ne contient aucune colonne nulle.
- Si chaque colonne contient deux coefficients non nuls, alors les vecteurs lignes sont dépendants vu que leur somme est nulle.
- Par conséquent, il existe une colonne de $\mathcal{A}$ ayant un seul coefficient non nul $a_{i_0 j_0} \in \{\pm 1\}$.

Matrice d'incidence sommets-arcs

Preuve

- La matrice A contient exactement deux termes non nuls par colonne, dont l'un est +1 et l'autre est -1.
- Considérons $\mathcal{A}$ une sous-matrice régulière de la matrice A d'ordre p.
- Par récurrence sur p, montrons que $\det \mathcal{A} = \pm 1$:
- Si $p = 1$ alors la sous-matrice est réduite au coefficient +1 ou au coefficient -1.
  La proposition est vraie.
- Supposons maintenant que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre $p - 1$ où $p \leq n$ et montrons la proposition est vraie à l'ordre p:
- Comme $\mathcal{A}$ est régulière, $\mathcal{A}$ ne contient aucune colonne nulle.
- Si chaque colonne contient deux coefficients non nuls, alors les vecteurs lignes sont dépendants vu que leur somme est nulle.
- Par conséquent, il existe une colonne de $\mathcal{A}$ ayant un seul coefficient non nul $a_{i_0 j_0} \in \{\pm 1\}$.
  En développant par rapport à la j_0 ème colonne de $\mathcal{A}$, on aura:
  $\det \mathcal{A} = a_{i_0 j_0} . k$ où k = déerminant d'une sous-matrice de A d'ordre $p - 1$.
  Par hypothèse de récurrence $\det \mathcal{A} = \pm 1$. $\square$

Matrice d'incidence sommets-arêtes

Définition

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté avec $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ sans boucles.

La **matrice d'incidence** sommets-arêtes de G est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}$ à coefficients 0 et 1 telle que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{l'arête } e_j \text{ incidente au sommet } x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

En considérant le graphe complet K_3 induit par x_1, x_2, x_3 ayant $e_1 = x_1x_2$; $e_2 = x_1x_3$ et $e_3 = x_2x_3$ comme arêtes, la matrice d'incidence sommets-arêtes est donnée comme suit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

En considérant le graphe complet K_3 induit par x_1, x_2, x_3 ayant $e_1 = x_1x_2$; $e_2 = x_1x_3$ et $e_3 = x_2x_3$ comme arêtes, la matrice d'incidence sommets-arêtes est donnée comme suit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas totalement unimodulaire sachant que son déterminant vaut -2.

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (X, U)$ un 1-graphe avec au plus une boucle par sommet et posons $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La **matrice d'adjacence** **sommets-sommets** $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}$ à coefficients 0 et 1 telle que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & u = (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (X, U)$ un 1-graphe avec au plus une boucle par sommet et posons $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La **matrice d'adjacence** **sommets-sommets** $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}$ à coefficients 0 et 1 telle que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & u = (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On peut définir la matrice d'adjacence B pour un graphe $G = (X, U)$ qui n'est pas nécessairement 1-graphe.
  Dans ce cas: $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}$ avec:

$$b_{ij} = m_G^+(x_i x_j)$$

Matrice d’adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (X, U)$ un 1-graphe avec au plus une boucle par sommet et posons $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La **matrice d’adjacence** **sommets-sommets** $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}$ à coefficients 0 et 1 telle que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & u = (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

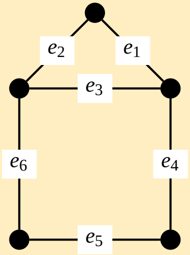
- On peut définir la matrice d’adjacence B pour un graphe $G = (X, U)$ qui n’est pas nécessairement 1-graphe.
  Dans ce cas: $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}$ avec:
  $$b_{ij} = m_G^+(x_i x_j)$$
- La matrice d’adjacence sommets-sommets B d’un graphe simple est **symétrique** ($\forall i, j$: $b_{ij} = b_{ji}$).

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Exemple

- La matrice B_1 est la matrice d'adjacence de la Maison H

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

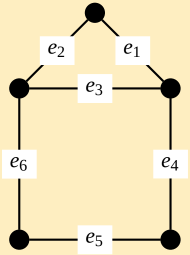


Matrice d'adjacence sommets-sommets

Exemple

- La matrice B_1 est la matrice d'adjacence de la Maison H

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Matrice d’adjacence sommets-sommets

La matrice d’adjacence sommets-sommets du graphe suivant est :

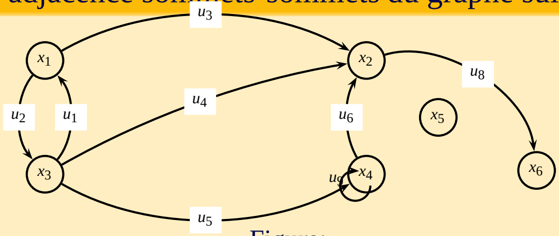


Figure:

La matrice d'adjacence sommets-sommets du graphe suivant est :

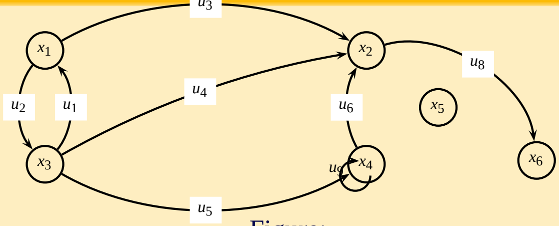


Figure:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Isomorphisme

Définition

Isomorphisme

Définition

Soient $G_1 = (X_1, U_1)$ et $G_2 = (X_2, U_2)$ deux graphes.
Un **isomorphisme** de G à G' est une bijection $\varphi : X_1 \to X_2$ tel que:

$$\forall\ x, y \in X \colon (x, y) \in U \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in U'$$

Isomorphisme

Définition

Soient $G_1 = (X_1, U_1)$ et $G_2 = (X_2, U_2)$ deux graphes.
Un **isomorphisme** de G à G' est une bijection $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ tel que:

$$\forall\ x, y \in X \colon (x, y) \in U \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in U'$$

- Autrement dit, il existe une bijection entre l'ensemble des sommets de chaque graphe tout en préservant l'incidence des arcs aux sommets.

Isomorphisme

Définition

Soient $G_1 = (X_1, U_1)$ et $G_2 = (X_2, U_2)$ deux graphes.
Un **isomorphisme** de G à G' est une bijection $\varphi : X_1 \to X_2$ tel que:

$$\forall\ x, y \in X:\ (x, y) \in U \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in U'$$

- Autrement dit, il existe une bijection entre l'ensemble des sommets de chaque graphe tout en préservant l'incidence des arcs aux sommets.
- Si G_1 et G_2 sont **isomorphes** et on note: $\boxed{G_1 \simeq G_2}$.

Isomorphisme

Définition

Soient $G_1 = (X_1, U_1)$ et $G_2 = (X_2, U_2)$ deux graphes.
Un **isomorphisme** de G à G' est une bijection $\varphi : X_1 \to X_2$ tel que:

$$\forall\ x, y \in X\colon\ (x, y) \in U \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in U'$$

- Autrement dit, il existe une bijection entre l'ensemble des sommets de chaque graphe tout en préservant l'incidence des arcs aux sommets.
- Si G_1 et G_2 sont **isomorphes** et on note: $\boxed{G_1 \simeq G_2}$.
- Deux graphes sont isomorphes s'ils ont les mêmes caractéristiques et les mêmes invariants.

Exemple

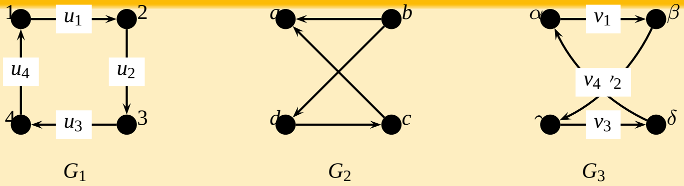


Figure:

Isomorphisme

Exemple

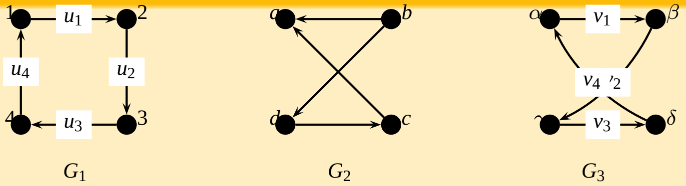


Figure:

- $G_1 \ncong G_2$: il existe un sommet de degré extérieur nul dans G_2 (le sommet a) et un tel sommet n'existe pas dans G_1.

Isomorphisme

Exemple

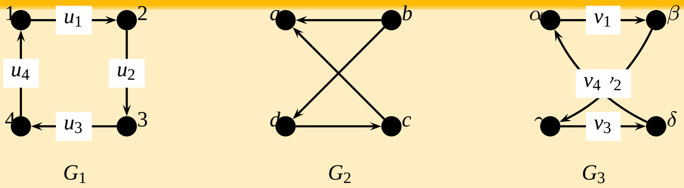


Figure:

- $G_1 \ncong G_2$: il existe un sommet de degré extérieur nul dans G_2 (le sommet a) et un tel sommet n'existe pas dans G_1.
- Par contre, $G_1 \simeq G_3$. En effet, il suffit de considérer la bijections φ:
$$\varphi(1) = \alpha\ ;\ \varphi(2) = \beta\ ;\ \varphi(3) = \gamma\ ;\ \varphi(4) = \delta \text{ et } \psi(u_i) = v_i \text{ pour tout } i = 1, 4$$

Isomorphisme

Exemple

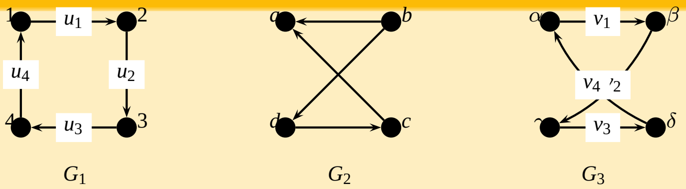


Figure:

- $G_1 \not\simeq G_2$: il existe un sommet de degré extérieur nul dans G_2 (le sommet a) et un tel sommet n'existe pas dans G_1.
- Par contre, $G_1 \simeq G_3$. En effet, il suffit de considérer la bijections φ:
  $\varphi(1) = \alpha$; $\varphi(2) = \beta$; $\varphi(3) = \gamma$; $\varphi(4) = \delta$ et $\psi(u_i) = v_i$ pour tout $i = 1, 4$
- Si les trois graphes G_1, G_2 et G_3 sont considérés sans orientation, ils seront tous les trois isomorphes.

L'hypercube Q_n

L'hypercube Q_n

- Pour un entier n ($n \geq 1$):
  Considérons le graphe dont l'ensemble des sommets X est donné par l'ensemble des tous les vecteurs :
  $$v = (v_1, v_2 \ldots, v_n) \text{ où } v_i \in \{0, 1\} \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

L'hypercube Q_n

- Pour un entier n ($n \geq 1$):
  Considérons le graphe dont l'ensemble des sommets X est donné par l'ensemble des tous les vecteurs :
  $$v = (v_1, v_2 \ldots, v_n) \text{ où } v_i \in \{0, 1\} \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$
- Deux sommets v et w sont adjacents si et seulement s'il existe:
  $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $v_{i_0} \neq w_{i_0}$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$: $v_i = w_i$

L'hypercube Q_n

- Pour un entier n ($n \geq 1$):
  Considérons le graphe dont l'ensemble des sommets X est donné par l'ensemble des tous les vecteurs :
  $$v = (v_1, v_2 \ldots, v_n) \text{ où } v_i \in \{0, 1\} \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$
- Deux sommets v et w sont adjacents si et seulement s'il existe:
  $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $v_{i_0} \neq w_{i_0}$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$: $v_i = w_i$

- Pour $n = 2$ les sommets sont $(1, 1)$ (1,0) (0,1) $(0, 0)$
- Pour $n = 2$ le sommet (1,1) est adjacent au sommet (1,0)

L'hypercube Q_n

- Pour un entier n ($n \geq 1$):
  Considérons le graphe dont l'ensemble des sommets X est donné par l'ensemble des tous les vecteurs :
  $$v = (v_1, v_2 \ldots, v_n) \text{ où } v_i \in \{0,1\} \text{ pour tout } i \in \{1,2,\ldots,n\}$$
- Deux sommets v et w sont adjacents si et seulement s'il existe:
  $i_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$ tel que $v_{i_0} \neq w_{i_0}$ et pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i_0\}$: $v_i = w_i$

- Pour $n = 2$ les sommets sont $(1,1)$ (1,0) (0,1) $(0,0)$
- Pour $n = 2$ le sommet (1,1) est adjacent au sommet (1,0)
- Trouver l'ordre la taille de Q_n pour tout $n \geq 2$.
  Dresser Q_1 Q_2 Q_3
  Un exercice de la série.

L'hypercube Q_n

L'hypercube Q_n

- Pour une dimension n, nous disposons de 2^n sommets de Q_n

L'hypercube Q_n

- Pour une dimension n, nous disposons de 2^n sommets de Q_n
  ✓ Car chaque sommet est un n-uplet $u_1 u_2 \ldots u_n$
  ✓ Chaque composante u_i $(i = 1, n)$ a deux choix (soit 1 soit 0) et on a n composantes donc au total 2^n sommets

- Pour une dimension n, nous disposons de 2^n sommets de Q_n
  ✓ Car chaque sommet est un n-uplet $u_1u_2\dots u_n$
  ✓ Chaque composante u_i $(i = 1, n)$ a deux choix (soit 1 soit 0) et on a n composantes donc au total 2^n sommets
- Le degré de chaque sommet de Q_n est n
- En effet: Pour $u = u_1u_2, \dot{;} u_n$ les voisins de u:

$$N(u) = \{v_1 = \overline{u_1}u_2 \dots u_n; v_2 = u_1\overline{u_2} \dots u_n, \dots, v_n = u_1u_2 \dots \overline{u_n}\}$$

si $u_i = 1$ alors $\overline{u_i} = 0$ et si $u_i = 0$ alors $\overline{u_i} = 1$

Autrement dit u est adjacent à un vecteur avec une composante différente. Celle-ci pourrait être la 1ère, la 2ème, ..la $n$ième.

L'hypercube Q_n

- Pour une dimension n, nous disposons de 2^n sommets de Q_n
  ✓ Car chaque sommet est un n-uplet $u_1 u_2 \dots u_n$
  ✓ Chaque composante u_i $(i = 1, n)$ a deux choix (soit 1 soit 0) et on a n composantes donc au total 2^n sommets
- Le degré de chaque sommet de Q_n est n
- En effet: Pour $u = u_1 u_2 , \dot{;} u_n$ les voisins de u:

$$N(u) = \{v_1 = \overline{u_1} u_2 \dots u_n ; v_2 = u_1 \overline{u_2} \dots u_n , \dots , v_n = u_1 u_2 \dots \overline{u_n}\}$$

si $u_i = 1$ alors $\overline{u_i} = 0$ et si $u_i = 0$ alors $\overline{u_i} = 1$

Autrement dit u est adjacent à un vecteur avec une composante différente. Celle-ci pourrait être la 1ère, la 2ème, ..la $n$ième.
Remarque!!: Comme Q_n est simple : $d(x)$=nombre de voisins!!!

L'hypercube Q_n

- Pour une dimension n, nous disposons de 2^n sommets de Q_n
  ✓ Car chaque sommet est un n-uplet $u_1u_2\dots u_n$
  ✓ Chaque composante u_i $(i = 1, n)$ a deux choix (soit 1 soit 0) et on a n composantes donc au total 2^n sommets
- Le degré de chaque sommet de Q_n est n
- En effet: Pour $u = u_1u_2, \dot{;} u_n$ les voisins de u:

$$N(u) = \{v_1 = \overline{u_1}u_2\dots u_n; v_2 = u_1\overline{u_2}\dots u_n, \dots, v_n = u_1u_2\dots\overline{u_n}\}$$

si $u_i = 1$ alors $\overline{u_i} = 0$ et si $u_i = 0$ alors $\overline{u_i} = 1$

Autrement dit u est adjacent à un vecteur avec une composante différente. Celle-ci pourrait être la 1ère, la 2ème, ..la $n$ième.
Remarque!!: Comme Q_n est simple : $d(x)$=nombre de voisins!!!
- La formule des degrés:

$$\sum_{x\in Q_n} d(x) = 2^n \times n = 2m$$

L'hypercube Q_n

- Pour une dimension n, nous disposons de 2^n sommets de Q_n
  ✓ Car chaque sommet est un n-uplet $u_1 u_2 \dots u_n$
  ✓ Chaque composante u_i $(i = 1, n)$ a deux choix (soit 1 soit 0) et on a n composantes donc au total 2^n sommets
- Le degré de chaque sommet de Q_n est n
- En effet: Pour $u = u_1 u_2, \dot{;} u_n$ les voisins de u:

$$N(u) = \{v_1 = \overline{u_1} u_2 \dots u_n ; v_2 = u_1 \overline{u_2} \dots u_n, \dots, v_n = u_1 u_2 \dots \overline{u_n}\}$$

si $u_i = 1$ alors $\overline{u_i} = 0$ et si $u_i = 0$ alors $\overline{u_i} = 1$

Autrement dit u est adjacent à un vecteur avec une composante différente. Celle-ci pourrait être la 1ère, la 2ème, ..la $n$ième.
Remarque!!: Comme Q_n est simple : $d(x)$=nombre de voisins!!!

- La formule des degrés:

$$\sum_{x \in Q_n} d(x) = 2^n \times n = 2m$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m = 2^{n-1} \times n}$$

Line graph $L(G)$

Line graph $L(G)$

Définition

Soit G un graphe simple.

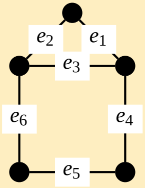
Le graphe **représentatif des arêtes** de G (ou **graphe adjoint** de G) est le graphe $L(G)$ où:

- chaque arête e_i de G lui correspond un sommet e_i^* de $L(G)$.
- Deux sommets e_i^* et e_j^* sont adjacents dans $L(G)$ ssi les arêtes e_i et e_j de G sont adjacentes dans G.

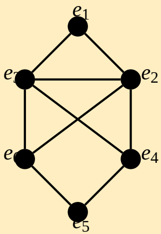
Line graphe $L(G)$

Line graphe $L(G)$

Exemple



(a). Maison H

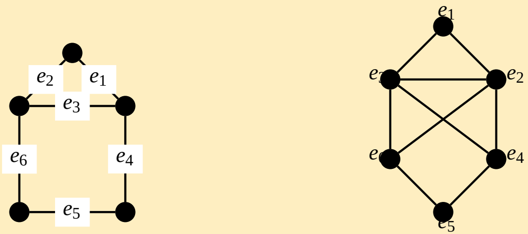


(b). Le graphe $L(H)$

Figure:

Line graphe $L(G)$

Exemple



(a). Maison H (b). Le graphe $L(H)$

Figure:

- Le graphe de Figure 6(a) est la *Maison* d'ordre 5 et de taille 6. Le graphe adjoint est d'ordre 6 et de taille 9.

Line graphe $L(G)$

Exemple

(a). Maison H (b). Le graphe $L(H)$

Figure:

- Le graphe de Figure 6(a) est la *Maison* d'ordre 5 et de taille 6.
  Le graphe adjoint est d'ordre 6 et de taille 9.
- On peut déterminer une relation entre l'ordre, la taille du graphe et de son adjoint.