Généralités et concepts de base

Séance 3. Théorie des graphes
Enseignant: K.Meslem

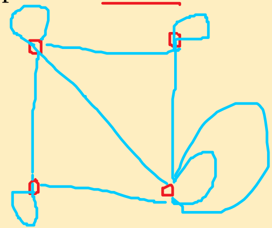
U.S.T.H.B, le 20 Octobre 2021

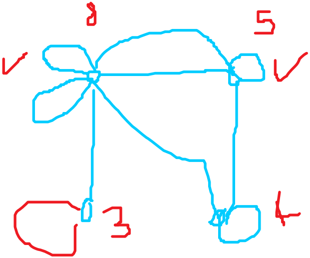
3ème LIC RO Section A

Rappels

Rappels

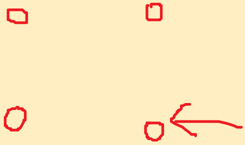
1. Peut-on avoir un graphe G d'ordre 4 et de taille 10 ? Si oui proposer un tel graphe





Rappels

1. Peut-on avoir un graphe G d'ordre 4 et de taille 10 ? Si oui proposer un tel graphe
2. Donner un graphe simple d'ordre 4 avec un nombre minimum d'arêtes;

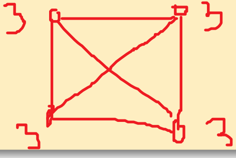


$n = 4$

$m = 0$

Rappels

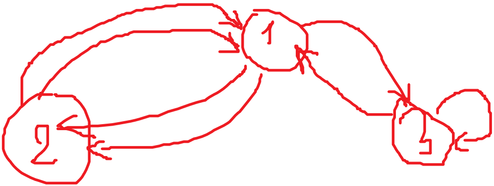
1. Peut-on avoir un graphe G d'ordre 4 et de taille 10 ? Si oui proposer un tel graphe
2. Donner un graphe simple d'ordre 4 avec un nombre minimum d'arêtes;
3. Donner un graphe simple d'ordre 4 avec un nombre maximum d'arêtes;



6 ✓

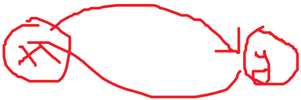
Rappels

1. Peut-on avoir un graphe G d'ordre 4 et de taille 10 ? Si oui proposer un tel graphe
2. Donner un graphe simple d'ordre 4 avec un nombre minimum d'arêtes;
3. Donner un graphe simple d'ordre 4 avec un nombre maximum d'arêtes;
4. Soit $G = (X, U)$ où $X = \{1, 2, 3\}$. Sachant que G est 2-graphe symétrique, proposer G;



Rappels

1. Peut-on avoir un graphe G d'ordre 4 et de taille 10 ? Si oui proposer un tel graphe
2. Donner un graphe simple d'ordre 4 avec un nombre minimum d'arêtes;
3. Donner un graphe simple d'ordre 4 avec un nombre maximum d'arêtes;
4. Soit $G = (X, U)$ où $X = \{1, 2, 3\}$. Sachant que G est 2-graphe symétrique, proposer G;
5. Rappeler nous ce qu'est la multiplicité d'une paire de sommet x, y du graphe $G = (X, U)$

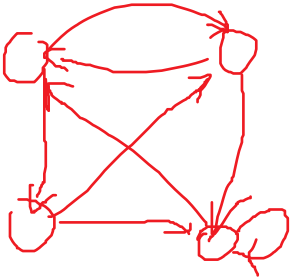


Les graphes complets

Définition

Un graphe $G = (X, U)$ est dit **complet** si:

$$m_G(x,y) = m_G^+(x,y) + m_G^-(x,y) \geq 1 \text{ pour tout } x, y \in X \ x \neq y$$



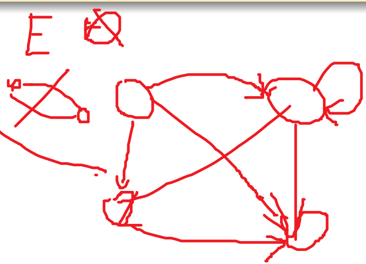
Les graphes complets

Définition

Un graphe $G = (X, U)$ est dit **complet** si:

$$m_G(x,y) = m_G^+(x,y) + m_G^-(x,y) \geq 1 \text{ pour tout } x, y \in X \; x \neq y$$

- Si G est un 1-graphe, il est complet ssi $(x,y) \notin U \Rightarrow (y,x) \in U$
- Un graphe **simple complet** à n sommets se dénote par K_n.



Les graphes complets

Les complets K_n

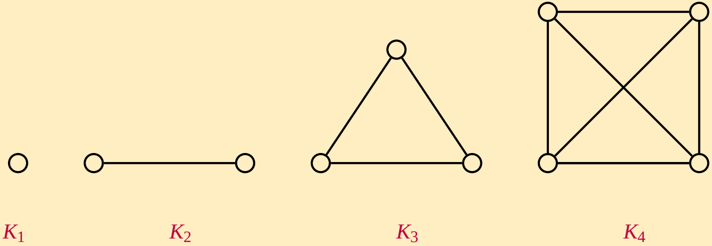
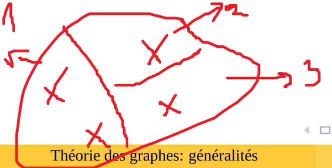


Figure: Les complets K_n



Les graphes bipartis

Définition

Un graphe G est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles non vides X_1, X_2 i.e:

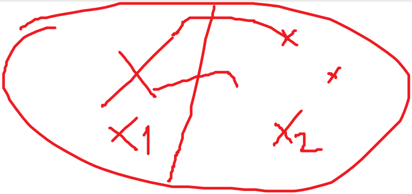
$X = X_1 \cup X_2$;

$X_1 \cap X_2 = \emptyset$

Les graphes bipartis

Définition

Un graphe G est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles non vides X_1, X_2 i.e:
$X = X_1 \cup X_2$;
$X_1 \cap X_2 = \emptyset$
de sorte que tous deux sommets dans X_1 (ou X_2) ne sont pas adjacents.
Ainsi, le graphe est noté $G = (X_1 \cup X_2, U)$ (ou $G = (X_1 \cup X_2, E)$).



Les graphes bipartis

Définition

Un graphe G est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles non vides X_1, X_2 i.e:

$X = X_1 \cup X_2$;

$X_1 \cap X_2 = \emptyset$

de sorte que tous deux sommets dans X_1 (ou X_2) ne sont pas adjacents.

Ainsi, le graphe est noté $G = (X_1 \cup X_2, U)$ (ou $G = (X_1 \cup X_2, E)$).

Questions:

Le graphe des glaces est-il biparti ?

Les graphes bipartis

Définition

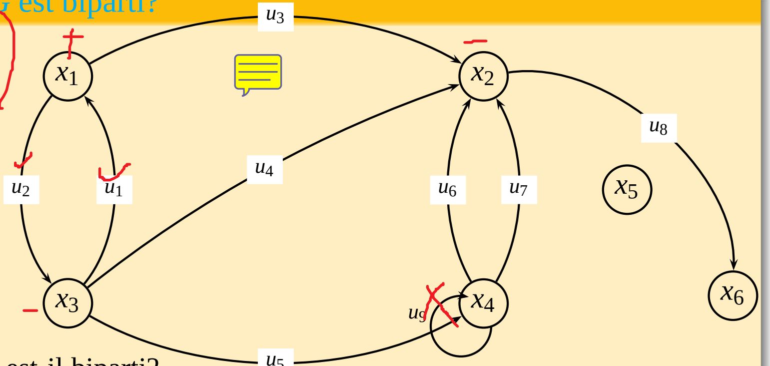
Un graphe G est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles non vides X_1, X_2 i.e:

$X = X_1 \cup X_2$;

$X_1 \cap X_2 = \varnothing$

Questions: G est biparti?

$G_1 = (X, U)$



Le graphe G_1 est-il biparti?

Définition

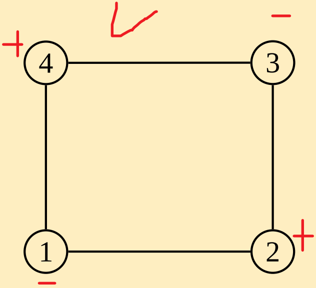
Un graphe G est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles non vides X_1, X_2 i.e:

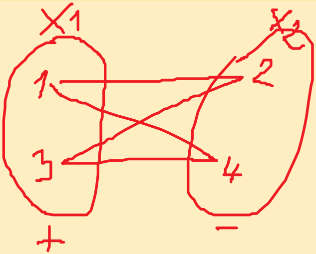
$X = X_1 \cup X_2$;

$X_1 \cap X_2 = \emptyset$

Questions:

Le graphe suivant est-il biparti?





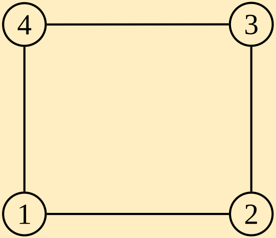
Les graphes bipartis

Définition

Un graphe G est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles non vides X_1, X_2 i.e:
$X = X_1 \cup X_2$;
$X_1 \cap X_2 = \emptyset$

Questions:

Le graphe suivant est-il biparti?



Il est biparti: $X = \{1, 3\}$ et $Y = \{2, 4\}$

Les graphes bipartis

Définition

Un graphe G est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles non vides X_1, X_2 i.e:

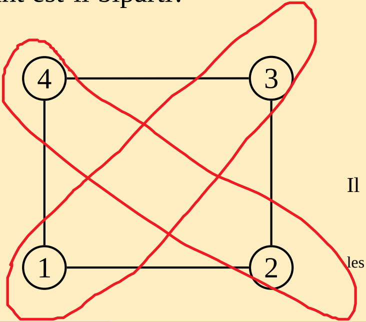
$X = X_1 \cup X_2$;

$X_1 \cap X_2 = \emptyset$

Questions:

Le graphe suivant est-il biparti?

$n = 4$ $m = 4$



X_1 X_2

2 1 1 2

Il est biparti: $X = \{1, 3\}$ et $Y = \{2, 4\}$

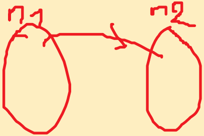
les degrés des sommets de X puis leur somme. De même pour Y

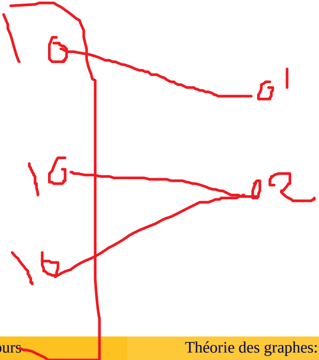
Les graphes bipartis

Lemme

Soit $G = (X \cup Y, U)$ un graphe biparti d'ordre $n = n_1 + n_2$ et de taille m avec $X = \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_{n_2}\}$. On a:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n_1} d_G(x_i) = m = \sum_{i=1}^{i=n_2} d_G(y_i)}$$





Les graphes bipartis

Lemme

Soit $G = (X \cup Y, U)$ un graphe biparti d'ordre $n = n_1 + n_2$ et de taille m avec $X = \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_{n_2}\}$. On a:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n_1} d_G(x_i) = m = \sum_{i=1}^{i=n_2} d_G(y_i)}$$

Preuve

Tout arc du graphe biparti a une extrémité dans le sous-ensemble X et l'autre extrémité dans le sous-ensemble Y.

Les graphes bipartis

Lemme

Soit $G = (X \cup Y, U)$ un graphe biparti d'ordre $n = n_1 + n_2$ et de taille m avec $X = \{x_1, \dots, x_{n_1}\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_{n_2}\}$. On a:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n_1} d_G(x_i) = m = \sum_{i=1}^{i=n_2} d_G(y_i)}$$

Preuve

Tout arc du graphe biparti a une extrémité dans le sous-ensemble X et l'autre extrémité dans le sous-ensemble Y.
En comptant la somme des degrés des sommets d'un des sous-ensembles, on retrouve le nombre des arcs de G.

Les graphes bipartis complets

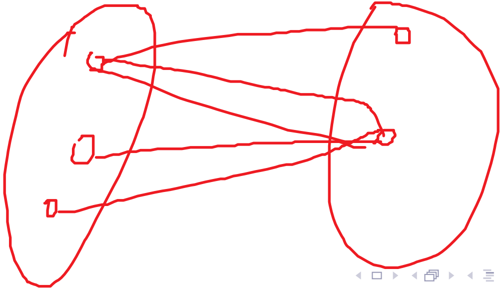
Définition

Les graphes bipartis complets

Définition

Un graphe $G = (X_1 \cup X_2, U)$ biparti est dit **biparti-complet** si :

$$\forall\ x_1 \in X_1 \text{ et } \forall\ x_2 \in X_2 : m_G(x_1, x_2) \geq 1.$$



Les graphes bipartis complets

Définition

Un graphe $G = (X_1 \cup X_2, U)$ biparti est dit **biparti-complet** si :

$$\forall\ x_1 \in X_1 \text{ et } \forall\ x_2 \in X_2 \colon m_G(x_1, x_2) \geq 1.$$

Si de plus, le graphe $G = (X_1 \cup X_2, E)$ est simple:
G est dit biparti-complet et est noté $K_{p,q}$ où $|X_1| = p$ et $|X_2| = q$ si:

$$\forall x_1 \in X_1\ \forall x_2 \in X_2 \colon x_1 x_2 \in E.$$

$K_{1,1} \cong K_2$

$K_{2,2}$

Les graphes bipartis complets

Exemples

Les graphes bipartis complets

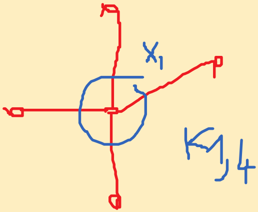
Exemples

- Le K_2 peut être considéré comme $K_{1,1}$

Les graphes bipartis complets

Exemples

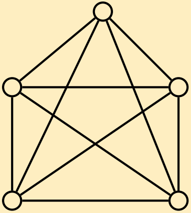
- Le K_2 peut être considéré comme $K_{1,1}$
- Le $K_{1,p}$ $(p \geq 2)$ est dit étoile



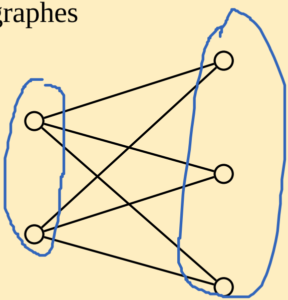
Les graphes bipartis complets

Exemples

- Le K_2 peut être considéré comme $K_{1,1}$
- Le $K_{1,p}$ $(p \geq 2)$ est dit étoile
- Caractérisons ces deux graphes



(a). ..... K_5



(b). ..... $K_{2,3}$

Figure:

Le complémentaire d'un graphe simple

Définition

Le complémentaire d'un graphe simple

Définition

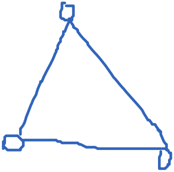
Soit $G = (X, E)$ un graphe simple.
Le **graphe complémentaire** de G, est $\overline{G} = (X, \overline{E})$ dont l'ensemble des sommets est X et :

Le complémentaire d'un graphe simple

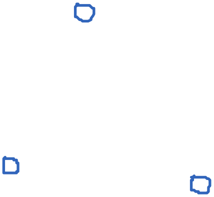
Définition

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple.
Le **graphe complémentaire** de G, est $\overline{G} = (X, \overline{E})$ dont l'ensemble des sommets est X et :

$$xy \in \overline{E} \Leftrightarrow xy \notin E$$



K_3



$\overline{K_3}$

Le complémentaire d'un graphe simple

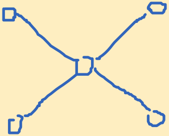
Définition

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple.
Le **graphe complémentaire** de G, est $\overline{G} = (X, \overline{E})$ dont l'ensemble des sommets est X et :

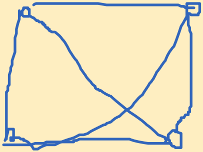
$$xy \in \overline{E} \Leftrightarrow xy \notin E$$

Exemples

- Le complémentaire d'un graphe complet K_n est noté D_n (ou N_n)



$K_{1,4}$



$\overline{K_{1,4}}$

Le complémentaire d’un graphe simple

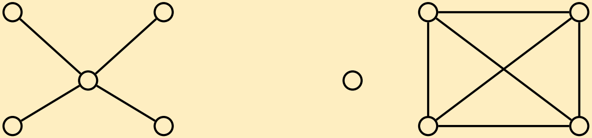
Définition

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple.
Le **graphe complémentaire** de G, est $\overline{G} = (X, \overline{E})$ dont l’ensemble des sommets est X et :

$$xy \in \overline{E} \Leftrightarrow xy \notin E$$

Exemples

- Le complémentaire d’un graphe complet K_n est noté D_n (ou N_n)



(a). $K_{1,4}$ (b). $\overline{K_{1,4}}$

Figure:

- Considérons l’exemple de jeu des allumettes

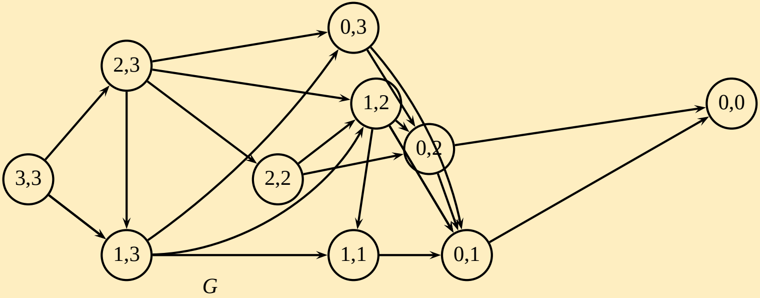


Figure:

- Considérons l'exemple de jeu des allumettes

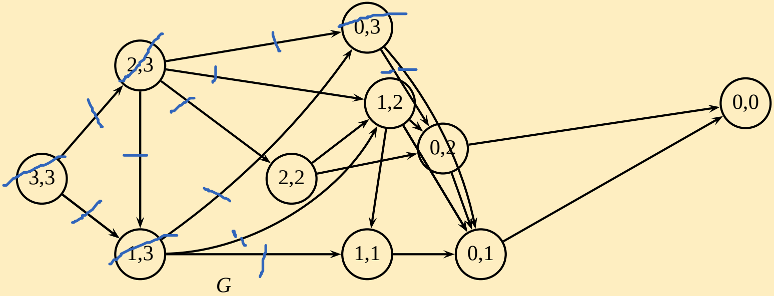


Figure:

- Si dans l'énoncé, on disposait au départ de deux tas d'allumettes dont chacun contient deux allumettes.
  Comment sera le graphe associé?

La réponse: Le graphe sera le graphe G'

La réponse: Le graphe sera le graphe G'

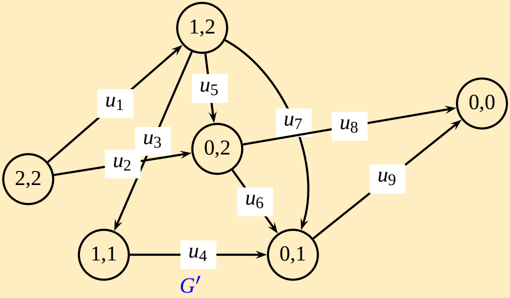


Figure:

La réponse: Le graphe sera le graphe G'

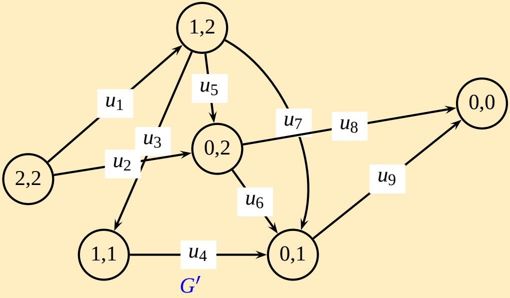


Figure:

- Ce nouveau graphe noté G' contient une partie des sommets de G, qu'on note A
- Le graphe G' contient tous les arcs de G reliant les sommets de A

La réponse: Le graphe sera le graphe G'

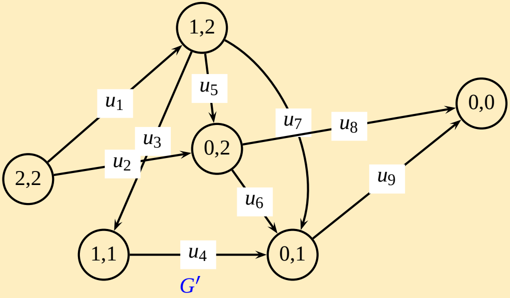


Figure:

- Ce nouveau graphe noté G' contient un partie des sommets de G, qu'on note A
- Le graphe G' contient tous les arcs de G reliant les sommets de A
- Un tel graphe est dit **sous-graphe induit par** A

Une autre question!!

En considérant le même jeu, on dispose, cette fois-ci:

- Deux tas de trois allumettes chacun au départ.
- La règle du jeu est d’enlever uniquement une allumette à un tas.

Une autre question!!

En considérant le même jeu, on dispose, cette fois-ci:

- Deux tas de trois allumettes chacun au départ.
- La règle du jeu est d'enlever uniquement une allumette à un tas.

Quel est le graphe modélisant cette situation?

La réponse: Le graphe sera le graphe G''

La réponse: Le graphe sera le graphe G''

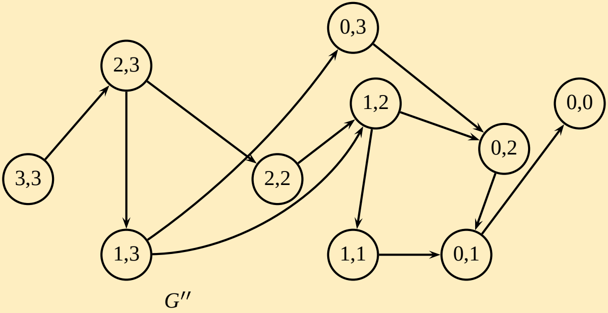


Figure:

La réponse: Le graphe sera le graphe G''

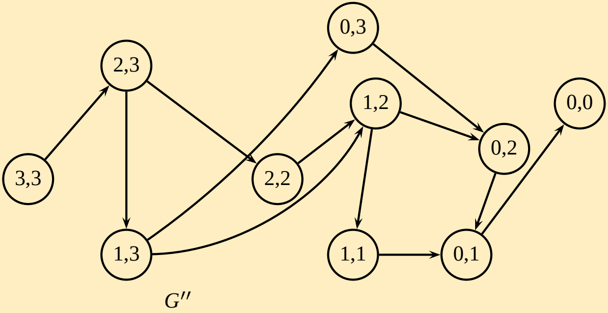


Figure:

- Ce nouveau graphe noté G'' contient un partie tous les sommets de G
- Le graphe G'' contient une partie des arcs de G reliant les sommets de A

La réponse: Le graphe sera le graphe G''

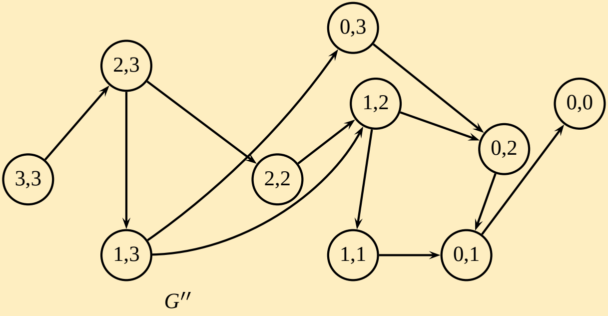


Figure:

- Ce nouveau graphe noté G'' contient un partie tous les sommets de G
- Le graphe G'' contient une partie des arcs de G reliant les sommets de A
- Un tel graphe est dit **graphe partiel**

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe; $A \subset X$ et $V \subset U$ avec $A \neq \emptyset$ et $V \neq \emptyset$.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe; $A \subset X$ et $V \subset U$ avec $A \neq \emptyset$ et $V \neq \emptyset$.

- Le **sous-graphe de G engendré** (ou **sous-graphe de G induit** par A) est le graphe G_A dont :
  - les sommets sont les éléments de A
  - les arcs sont tous les arcs de G ayant les deux extrémités dans A

  On note $\boxed{G_A = (A, \Gamma_A)}$.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe; $A \subset X$ et $V \subset U$ avec $A \neq \varnothing$ et $V \neq \varnothing$.

- Le **sous-graphe de G engendré** (ou **sous-graphe de G induit** par A) est le graphe G_A dont :
  - les sommets sont les éléments de A
  - les arcs sont tous les arcs de G ayant les deux extrémités dans A

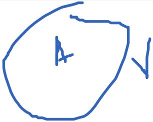
  On note $\boxed{G_A = (A, \Gamma_A)}$.
- Le **graphe partiel** de G engendré par V est le graphe dont l'ensemble des sommets est X et l'ensemble des arcs est V
  Autrement dit, le graphe partiel de G est obtenu à partir de G en éliminant les arcs qui sont dans $U \setminus V$.

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe; $A \subset X$ et $V \subset U$ avec $A \neq \varnothing$ et $V \neq \varnothing$.

- Le **sous-graphe de G engendré** (ou **sous-graphe de G induit** par A) est le graphe G_A dont :
  - les sommets sont les éléments de A
  - les arcs sont tous les arcs de G ayant les deux extrémités dans A

  On note $\boxed{G_A = (A, \Gamma_A)}$.
- Le **graphe partiel** de G engendré par V est le graphe dont l'ensemble des sommets est X et l'ensemble des arcs est V
  Autrement dit, le graphe partiel de G est obtenu à partir de G en éliminant les arcs qui sont dans $U \setminus V$.
- Le **sous-graphe partiel** de G est le graphe partiel de G_A engendré par V. Autrement dit, c'est le graphe dont tous les sommets sont tous les éléments de l'ensemble A et les arcs sont ceux de V ayant les deux extrémités dans A.



Sous-graphes de G: récapitulons!!

Sous-graphes

- Prendre une partie de sommets et tous les arcs (ou arêtes) de G

$$\Downarrow$$

SOUS-GRAPHE INDUIT $\boxed{G_A = (A, \Gamma(A))}$

- Prendre une partie des arcs ou arêtes et tous les sommets de G

$$\Downarrow$$

GRAPHE PARTIEL

- Prendre une partie de X et quelques arcs ou arêtes qui relient ces sommets

$$\Downarrow$$

SOUS-GRAPHE PARTIEL

Matrice d'incidence sommets-arcs

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe sans boucle où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $U = \{u_1, \dots, u_m\}$.
La **matrice d'incidence sommets-arcs** de G est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}$ à coefficients 1,-1 ou 0 telle que:

Matrice d'incidence sommets-arcs

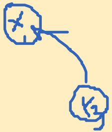
Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe sans boucle où $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$.

La **matrice d'incidence sommets-arcs** de G est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}$ à coefficients 1,-1 ou 0 telle que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & I(u_j) = x_i \\ -1 & T(u_j) = x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} & u_1 \\ x_1 & \\ x_3 & \\ x_n & \end{array} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Matrice d'incidence sommets-arcs

Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe sans boucle où $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$.

La **matrice d'incidence sommets-arcs** de G est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}$ à coefficients 1,-1 ou 0 telle que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & I(u_j) = x_i \\ -1 & T(u_j) = x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

Exemple

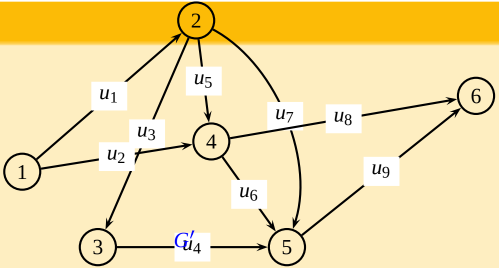


Figure:

Exemple

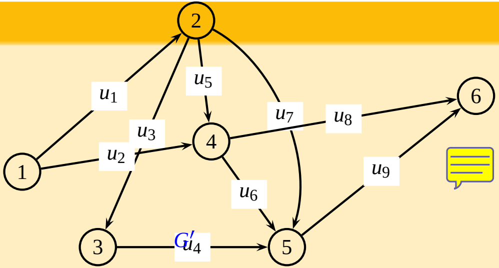


Figure:

La matrice d'incidence est

$$
A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} u_1 & u_2 & & & & & & & u_9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Matrice d’incidence sommets-arcs

Remarques

Matrice d’incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;

Matrice d’incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^+_{G'}(x_4)$ $\qquad$ $|\{j : a_{4,j} = -1\}| = \cancel{3}\,2 = d^-_{G'}(x_4)$

Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^+_{G'}(x_4)$ $\qquad |\{j : a_{4,j} = -1\}| = 3 = d^-_{G'}(x_4)$

Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^{+}_{G'}(x_4)$ $\qquad$ $|\{j : a_{4,j} = -1\}| = 3 = d^{-}_{G'}(x_4)$

Définition

Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^+_{G'}(x_4)$ $\qquad$ $|\{j : a_{4,j} = -1\}| = 3 = d^-_{G'}(x_4)$

Définition

- Une matrice régulière M d'ordre p est dite **unimodulaire** si son déterminant est soit +1 soit -1.

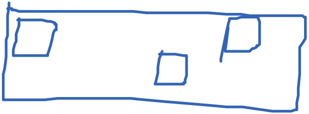
Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $|\{j : a_{4j} = 1\}| = 2 = d^+_{G'}(x_4)$ $\qquad$ $|\{j : a_{4,j} = -1\}| = 3 = d^-_{G'}(x_4)$

Définition

- Une matrice régulière M d'ordre p est dite **unimodulaire** si son déterminant est soit +1 soit -1.
- Une matrice rectangulaire M à coefficients $n \times m$ est dite **totalement unimodulaire** ssi les sous-matrices carrées régulières extraites de M sont unimodulaires.



Matrice d'incidence sommets-arcs

Remarques

- Chaque colonne de la matrice A contient un seul coefficient 1 et un seul coefficient -1;
- $\left|\{j : a_{4j} = 1\}\right| = 2 = d^{+}_{G'}(x_4)$ $\qquad$ $\left|\{j : a_{4,j} = -1\}\right| = 3 = d^{-}_{G'}(x_4)$

Définition

- Une matrice régulière M d'ordre p est dite **unimodulaire** si son déterminant est soit +1 soit -1.
- Une matrice rectangulaire M à coefficients $n \times m$ est dite **totalement unimodulaire** ssi les sous-matrices carrées régulières extraites de M sont unimodulaires.

Toute matrice A d'incidence sommets-arcs d'un graphe $G = (X, U)$ est totalement unimodulaire.

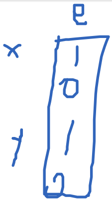
Matrice d'incidence sommets-arêtes

Définition

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté avec $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ sans boucles.

La **matrice d'incidence** sommets-arêtes de G est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}}$ à coefficients 0 et 1 telle que:

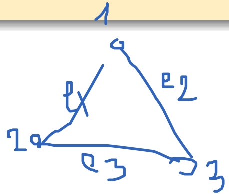
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{l'arête } e_j \text{ incidente au sommet } x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Remarque

En considérant le graphe complet K_3 induit par x_1, x_2, x_3 ayant $e_1 = x_1x_2$; $e_2 = x_1x_3$ et $e_3 = x_2x_3$ comme arêtes, la matrice d'incidence sommets-arêtes est donnée comme suit:

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Remarque

En considérant le graphe complet K_3 induit par x_1, x_2, x_3 ayant $e_1 = x_1x_2$; $e_2 = x_1x_3$ et $e_3 = x_2x_3$ comme arêtes, la matrice d'incidence sommets-arêtes est donnée comme suit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas totalement unimodulaire sachant que son déterminant vaut -2.

Graphes: concepts de base

Fini pour aujourd'hui!!

1. Revoir le cours et prendre note dans un papier!!
2. Préparer ses exercices pour demain et jeudi prochain
3. A mercredi prochain en présentiel ☺