Généralités et concepts de base

Séance 2. Théorie des graphes
Enseignant: K.Meslem

U.S.T.H.B, le 14 Octobre 2021

3ème LIC RO Section A

Exemple 3

Problème

On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients non gradués, l'un de 5 litres et l'autre de 3 litres.

- Comment doit-on faire (à l'aide d'un graphe)?

Exemple 3

Problème

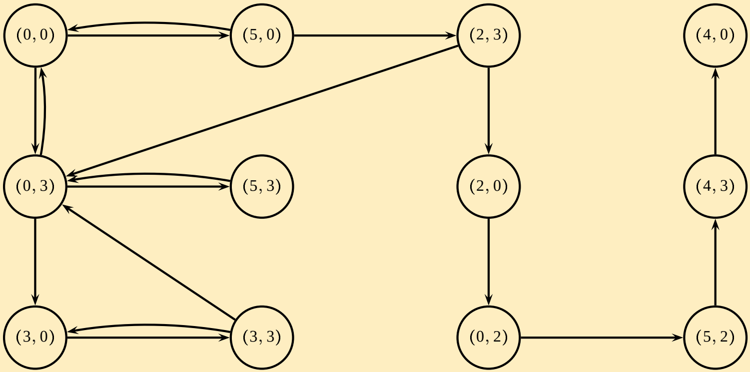
On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients non gradués, l'un de 5 litres et l'autre de 3 litres.

- Comment doit-on faire (à l'aide d'un graphe)?

- Les sommets: couples ordonnés (a, b)
  a volume d'eau dans le récipient $5L$;
  b volume d'eau dans le récipient 3L
- Les arcs: un arc existe si on peut passer d'un état à un autre état.

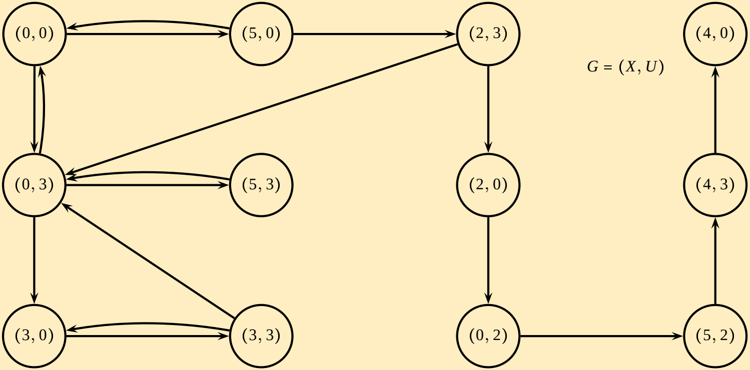
Exemple 3

Le graphe



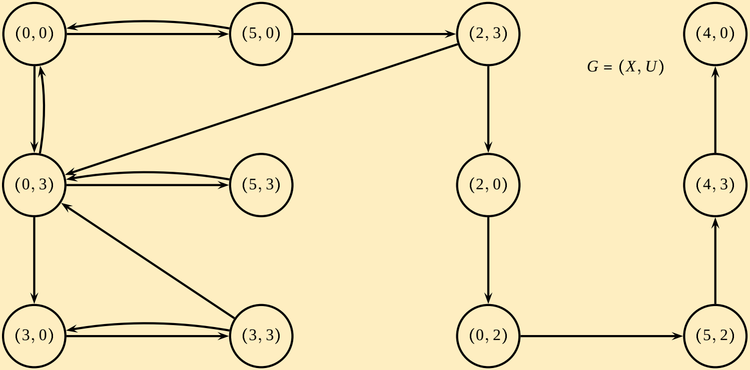
Rappels: Questions

Le graphe



Rappels: Questions

Le graphe

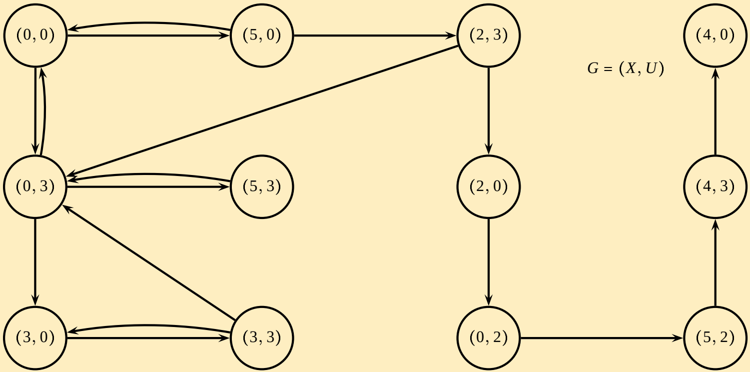


- L'ordre et la taille de G ?

ordre n=12
taille m=17

Rappels: Questions

Le graphe

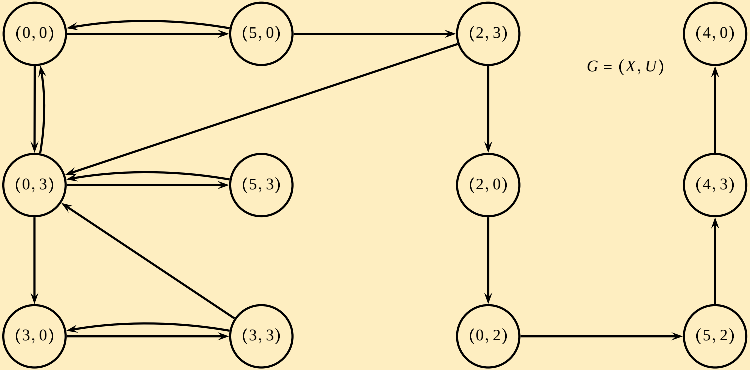


- Pour quelle valeur de *p*, *G* est un *p*-graphe?

G est un 1 graphe et non 2 : chaque arc se produit maxi 1 fois

Rappels: Questions

Le graphe

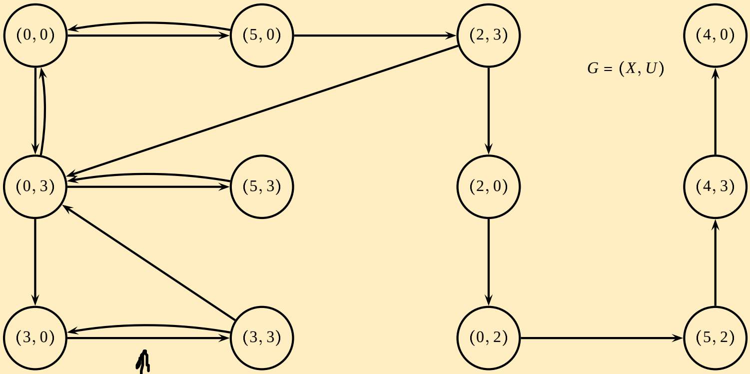


- Les successeurs et les prédécesseurs du sommet $(0, 3)$?

\gamma^+(0,3): 00; 30; 53 \gamma^-(03)= 00, 53, 33, 23

Rappels: Questions

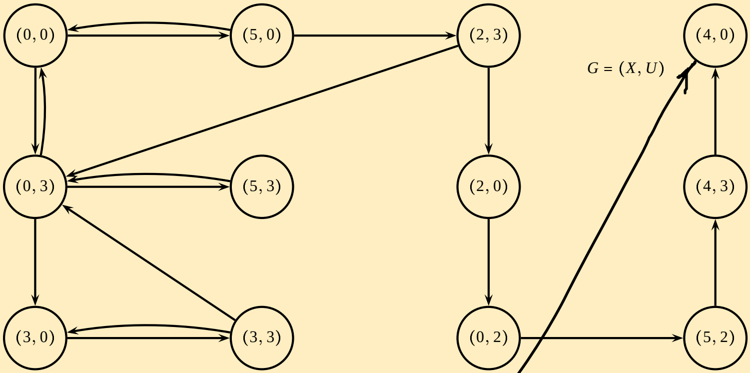
Le graphe



- Le graphe G contient-il ~~une~~ boucle? des arcs ~~multiples~~? des arcs parallèles?

Rappels: Questions

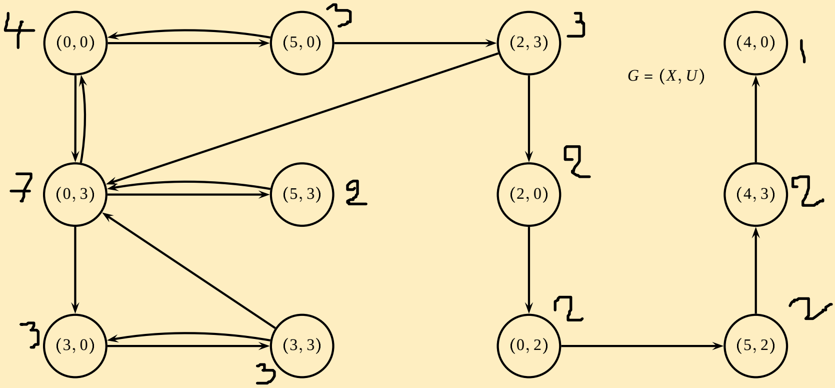
Le graphe



- Existe-il un sommet qui n'a pas de successeurs ou de prédécesseurs?

Rappels: Questions

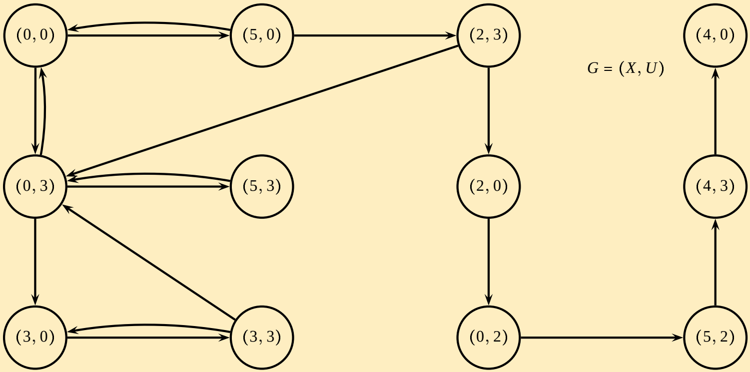
Le graphe



- Donner le degré de chaque sommet;

Rappels: Questions

Le graphe



- Peut-on écrire $G = (\cancel{U}, \Gamma^+)$?

Exemple

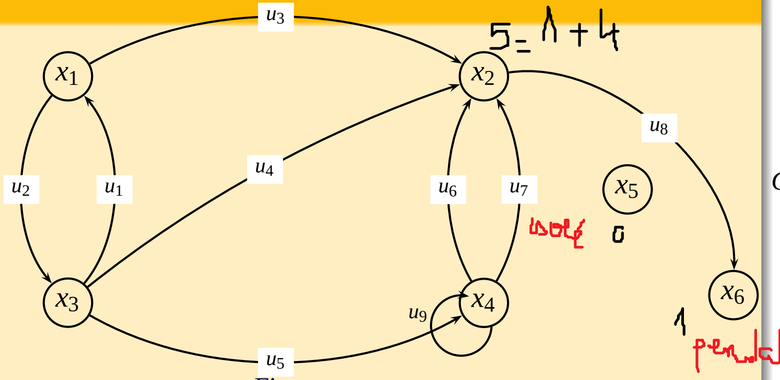
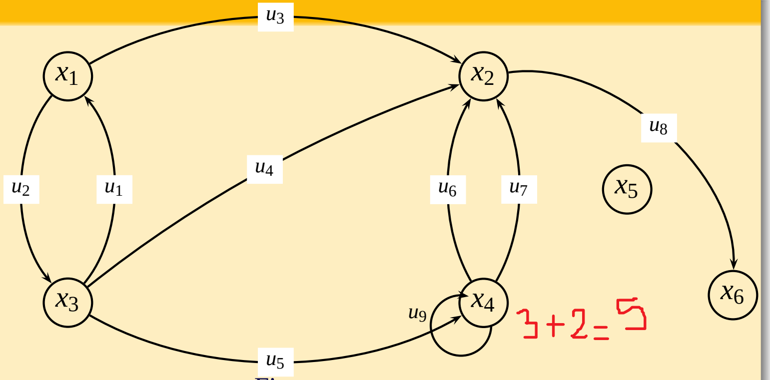


Figure:

Exemple



$3+2=5$

Figure:

✓ $d^+_{G_1}(x_1) = 2$; $d^-_{G_1}(x_1) = 1$ et $d_{G_1}(x_1) = 3$.

Exemple

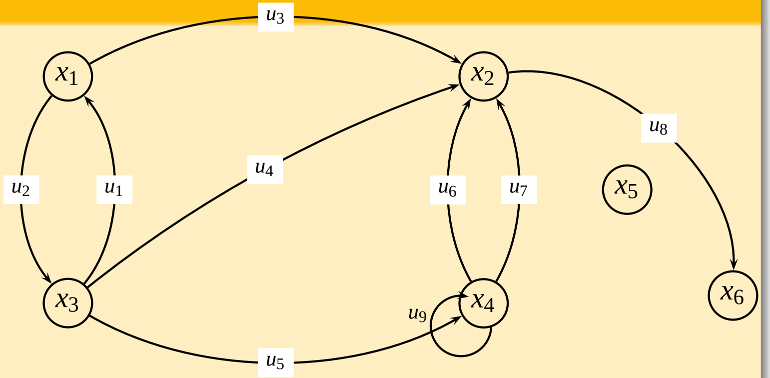


Figure:

✓ $d^+_{G_1}(x_1) = 2$; $d^-_{G_1}(x_1) = 1$ et $d_{G_1}(x_1) = 3$.

✓ $d^+_{G_1}(x_4) = 3$; $d^-_{G_1}(x_4) = 2$ et $d_{G_1}(x_4) = 5$ car la boucle est comptée deux fois.

Exemple

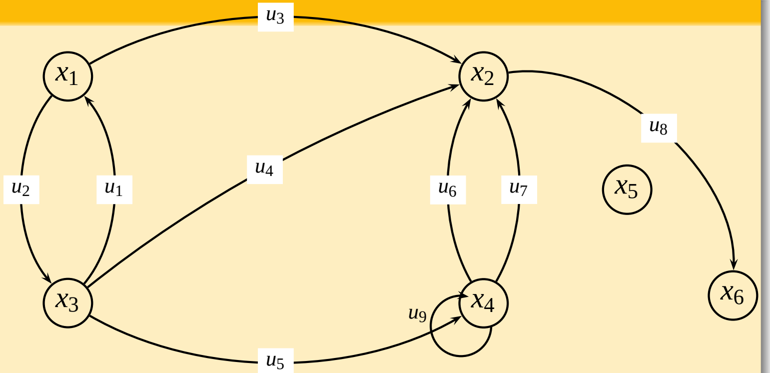


Figure:

- ✓ $d^+_{G_1}(x_1) = 2$; $d^-_{G_1}(x_1) = 1$ et $d_{G_1}(x_1) = 3$.
- ✓ $d^+_{G_1}(x_4) = 3$; $d^-_{G_1}(x_4) = 2$ et $d_{G_1}(x_4) = 5$ car la boucle est comptée deux fois.
- ✓ Le sommet x_5 vérifie : $d_{G_1}(x_5) = 0$. Un sommet ayant un degré nul dans G est dit **sommet isolé**

Exemple

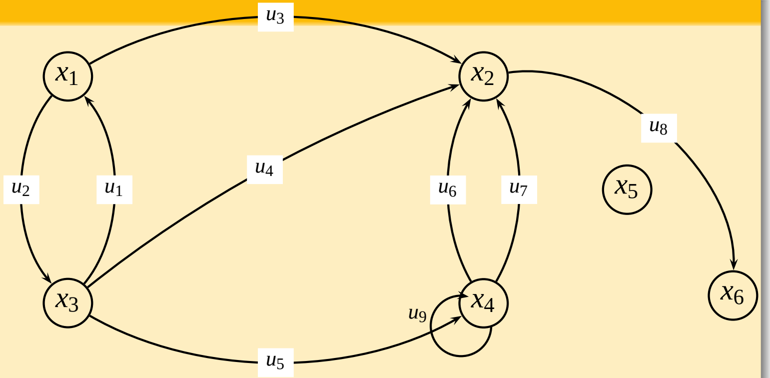


Figure:

- ✓ $d^+_{G_1}(x_1) = 2$; $d^-_{G_1}(x_1) = 1$ et $d_{G_1}(x_1) = 3$.
- ✓ $d^+_{G_1}(x_4) = 3$; $d^-_{G_1}(x_4) = 2$ et $d_{G_1}(x_4) = 5$ car la boucle est comptée deux fois.
- ✓ Le sommet x_5 vérifie : $d_{G_1}(x_5) = 0$. Un sommet ayant un degré nul dans G est dit **sommet isolé**
- ✓ Le sommet $d_{G_1}(x_6) = 1$. Un sommet qui a un degré unitaire est dit **sommet pendant**.

Les degrés dans les graphes

Etant donné un graphe $G = (X, U)$ où $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

- La suite $d_{G_1}(x_1), d_{G_1}(x_2), ..., d_{G_1}(x_n)$ est dite **séquence des degrés** des sommets de G
- Le **degré minimum** dans G, noté $\delta(G)$, est: $\delta(G) = \min_{x \in X} d_G(x)$.
- De même, **le degré maximum** $\Delta(G)$ est donné comme suit: $\Delta(G) = \max_{x \in X} d_G(x)$
- Un graphe G ayant des sommets de même degré k ($k \in \mathbb{N}$) est dit ***k*-régulier**

Les degrés dans les graphes

Etant donné un graphe $G = (X, U)$ où $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

- La suite $d_{G_1}(x_1), d_{G_1}(x_2), \ldots, d_{G_1}(x_n)$ est dite **séquence des degrés** des sommets de G
- Le **degré minimum** dans G, noté $\delta(G)$, est: $\delta(G) = \min_{x \in X} d_G(x)$.
- De même, **le degré maximum** $\Delta(G)$ est donné comme suit: $\Delta(G) = \max_{x \in X} d_G(x)$
- Un graphe G ayant des sommets de même degré k ($k \in \mathbb{N}$) est dit ***k*-régulier**
  Autrement dit la séquence de ses degrés est n fois k où n est l'ordre de G.

Exemples : Voir les graphes étudiés

Les degrés dans les graphes

Théorème Fondamental des Graphes

Soit $G = (X, U)$ graphe avec $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Alors, on a:

Les degrés dans les graphes

Théorème Fondamental des Graphes

Soit $G = (X, U)$ graphe avec $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Alors, on a:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} d_G(x_i) = 2m}$$

Les degrés dans les graphes

Théorème Fondamental des Graphes

Soit $G = (X, U)$ graphe avec $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Alors, on a:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} d_G(x_i) = 2m}$$

Preuve

Chaque arc de G est à la fois incident extérieur à un sommet de G et incident intérieur à un sommet de G.

Les degrés dans les graphes

Théorème Fondamental des Graphes

Soit $G = (X, U)$ graphe avec $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Alors, on a:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} d_G(x_i) = 2m}$$

Preuve

Chaque arc de G est à la fois incident extérieur à un sommet de G et incident intérieur à un sommet de G.
En sommant les degrés qui comptent l'incidence extérieure et intérieure, les arcs seront comptés deux fois.$\square$

Formule des degrés

Lemme

Dans un graphe $G = (X, U)$ d'ordre n et de taille m. On a:

Formule des degrés

Lemme

Dans un graphe $G = (X, U)$ d'ordre n et de taille m. On a:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} d_G^+(x_i) = \sum_{i=1}^{i=n} d_G^-(x_i) = m}$$

Formule des degrés

Lemme

Dans un graphe $G = (X, U)$ d'ordre n et de taille m. On a:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} d_G^+(x_i) = \sum_{i=1}^{i=n} d_G^-(x_i) = m}$$

Preuve

Exercice.

Encore les degrés!!!

Déterminons la séquence des degrés de ce graphe

Encore les degrés!!!

Déterminons la séquence des degrés de ce graphe

$G_1 = (X, U)$

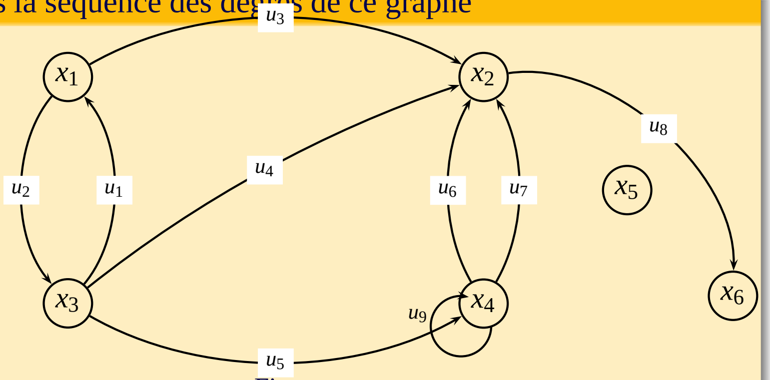


Figure:

3, 5, 4, 5, 0, 1

Encore les degrés!!!

Déterminons la séquence des degrés de ce graphe

$G_1 = (X, U)$

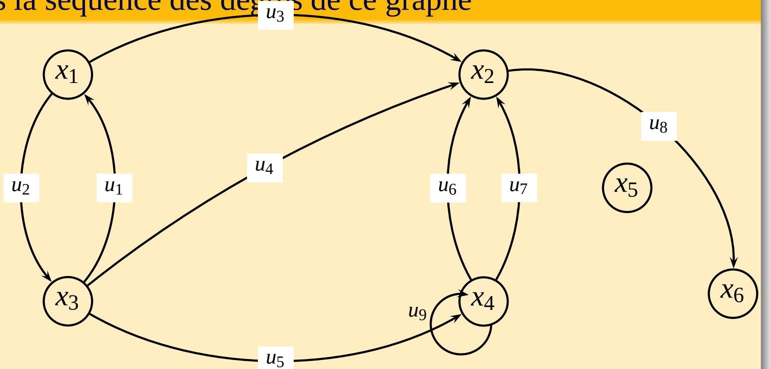


Figure:

Combien de sommets sont de degrés impairs? 4

$|\{x \in X \; d(x) = 1[2]\}| = 0[2]$

Encore les degrés!!!

Lemme

Pour tout graphe G le nombre de sommets de degrés impairs est pair i.e:

Encore les degrés!!!

Lemme

Pour tout graphe G le nombre de sommets de degrés impairs est pair i.e:

$$\boxed{|\{x \in X : \quad d_G(x) \equiv 1[2]\}| \equiv 0[2]}$$

Encore les degrés!!!

Lemme

Pour tout graphe G le nombre de sommets de degrés impairs est pair i.e:

$$\boxed{|\{x \in X : \ d_G(x) \equiv 1[2]\}| \equiv 0[2]}$$

Preuve

Exercice: (Indi. Par absurde) utiliser la formule des degrés.

Graphes non orientés

Remarque

- Dans l'étude de certaines propriétés des graphes, il arrive que les arcs ne jouent aucun rôle.
  On s'intéresse simplement à l'existence d'un ou de plusieurs arcs entre deux sommets sans préciser l'ordre.

Graphes non orientés

Remarque

- Dans l'étude de certaines propriétés des graphes, il arrive que les arcs ne jouent aucun rôle.
  On s'intéresse simplement à l'existence d'un ou de plusieurs arcs entre deux sommets sans préciser l'ordre.
- D'où l'importance des **graphes non orientés** (graphes pris sans orientation)

Graphes non orientés

Graphe non orienté: $G = (X, E)$

- Les sommets sont reliés à l'aide des **arêtes**.

Graphes non orientés

Graphe non orienté: $G = (X, E)$

- Les sommets sont reliés à l'aide des **arêtes**.
- Une arête e reliant deux sommets x et y dans un graphe non orienté est notée $e = xy$.

$U = (x, y)$ arc O

NO

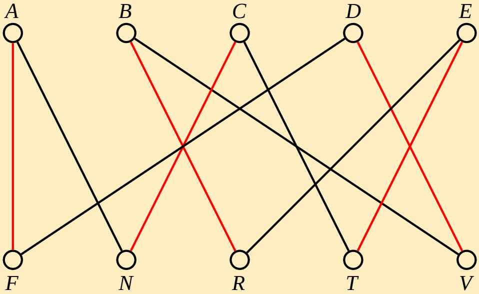
Graphes non orientés

Graphe non orienté: $G = (X, E)$

- Les sommets sont reliés à l'aide des **arêtes**.
- Une arête e reliant deux sommets x et y dans un graphe non orienté est notée $e = xy$.
- L'ensemble des arêtes est noté E.

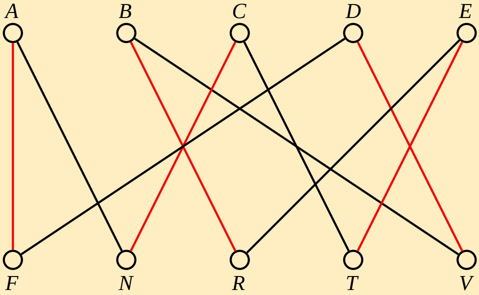
Graphes : concept non orienté

L'exemple des glaces



Graphes : concept non orienté

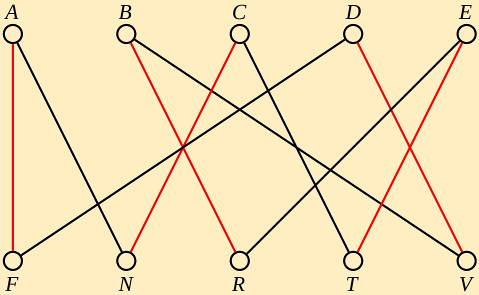
L'exemple des glaces



Le graphe $G = (X, E)$

Graphes : concept non orienté

L'exemple des glaces

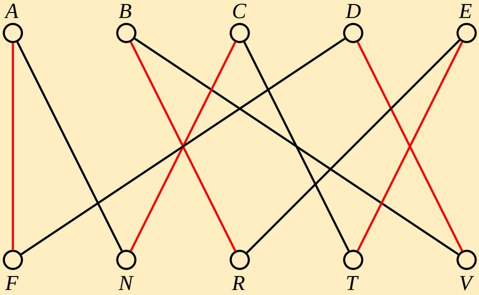


Le graphe $G = (X, E)$

$X = \{A, B, C, D, E, F, N, R, T, V\}$

Graphes : concept non orienté

L'exemple des glaces



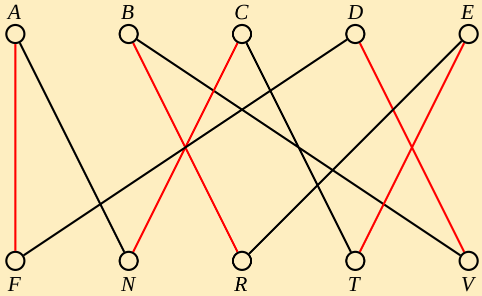
Le graphe $G = (X, E)$

$X = \{A, B, C, D, E, F, N, R, T, V\}$

$E = \{AF, AN, BR, BV, CN, CT, DF, DV, ER,$

Graphes : concept non orienté

L'exemple des glaces



Le graphe $G = (X, E)$

$X = \{A, B, C, D, E, F, N, R, T, V\}$

$E = \{AF, AN, BR, BV, CN, CT, DF, DV, ER,$

La solution donnée en rouge

Figure:

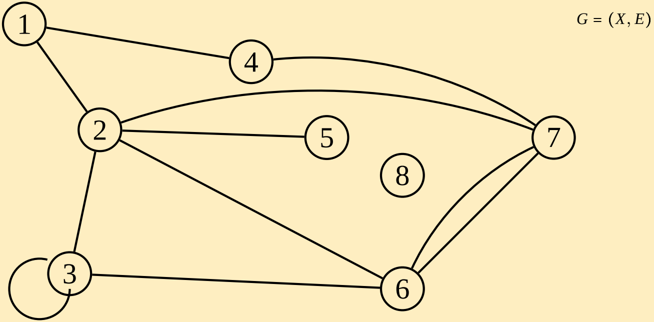
Graphes non orientés

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Graphes non orientés

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté

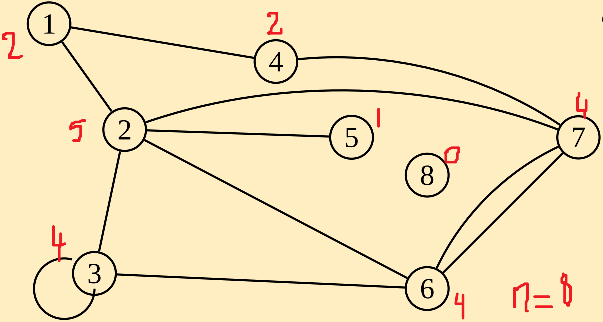


Graphes non orientés

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté

$G = (X, E)$



$n = 8$

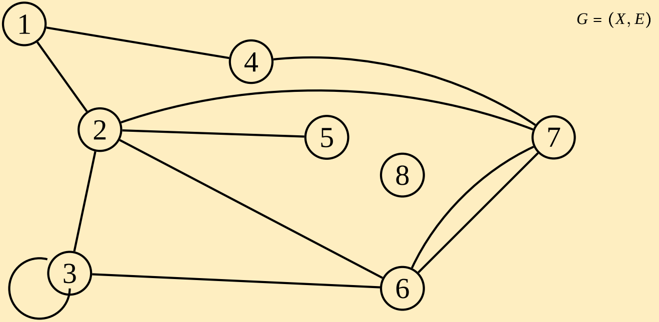
$m = 11$

- $|X| = n$: ordre de G; $|E| = m$: taille de G

Graphes non orientés

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté

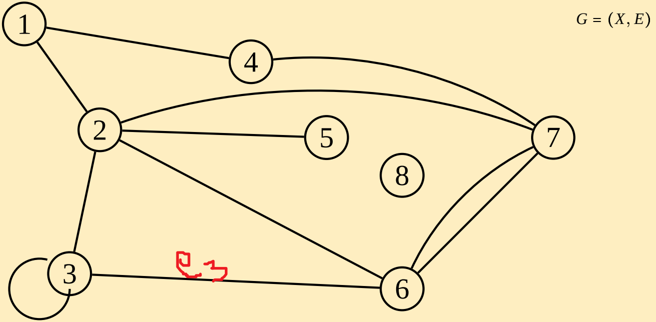


- Deux sommets sont adjacents si ...
- Deux arêtes sont adjacentes si ...

Graphes non orientés

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté

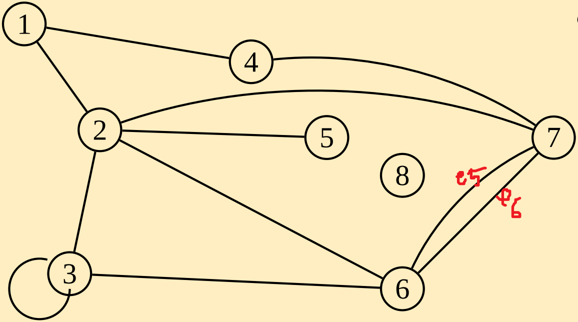


- Une arête est incidente à un sommet ... (pas d'incidence ext. ou intérieure)

Graphes non orientés

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté



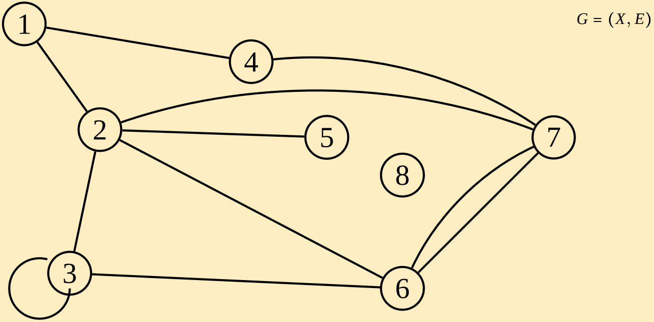
$G = (X, E)$

- Deux arêtes sont multiples ou parallèles si elles relient la même paire de sommets
  (multiples= parallèles en n. orienté)

Graphes non orientés

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté



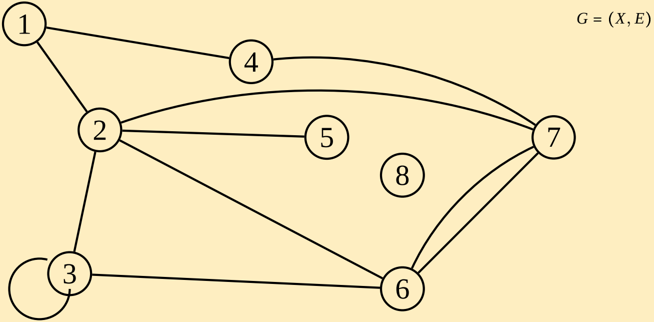
- Pour tout sommet x dans G:

  Il n'existe ni de $\Gamma^+(x)$ et $\Gamma^-(x)$ ni de $d_G^+(x)$ et $d_G^-(x)$

Graphes non orientés

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté

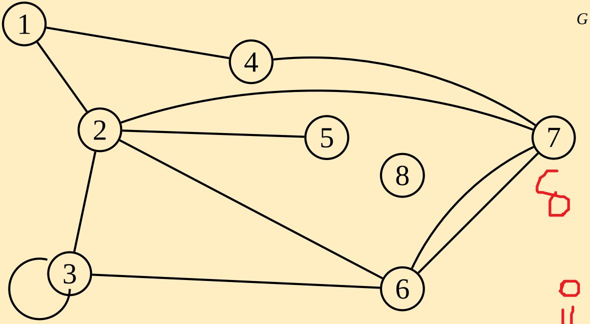


- Pour tout sommet x dans G:

  Il n'existe ni de $\Gamma^+(x)$ et $\Gamma^-(x)$ ni de $d^+_G(x)$ et $d^-_G(x)$
- Les voisins d'un sommet x est $N_G(x)$ ou $\Gamma_G(x)$ est ....
- Le degré d'un sommet x dans G est .

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté



$G = (X, E)$

$\forall x \in X$

$\delta \leq d(x) \leq \Delta$

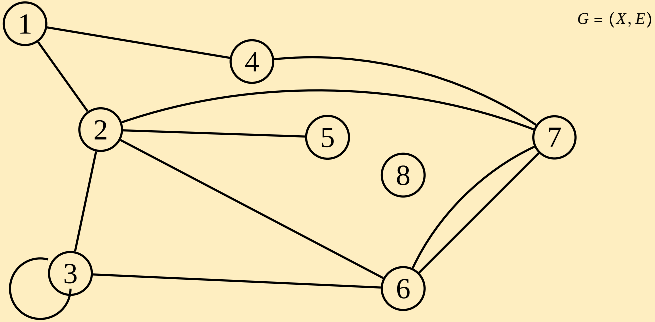
0 5

- Le degré minimum et le degré maximum sont notés $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ respectivement.

Graphes non orientés

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté

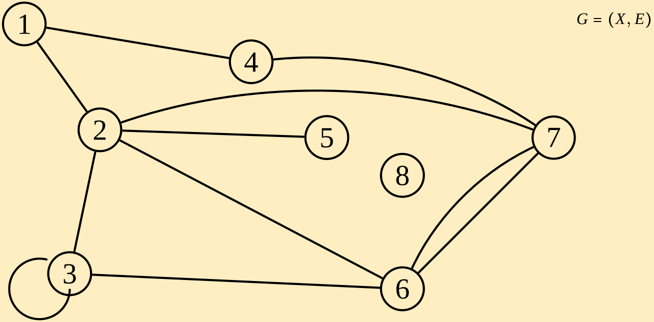


- Un graphe est dit *p*-graphe si ..

Graphes non orientés

Les définitions proposées précédemment s'injectent (pas toutes) dans les graphes non orientés:

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté



- Un graphe G est dit k-régulier si tous les sommets partagent le même degré k $\quad \forall x \in X \quad d(x) = k$

Caractérisons un graphe...

Caractérisons un graphe...

Quelques classes des graphes orientés

Caractérisons un graphe...

Quelques classes des graphes orientés

- Les graphes symétriques;

Caractérisons un graphe...

Quelques classes des graphes orientés

- Les graphes symétriques;
- Les graphes anti-symétriques;

Caractérisons un graphe...

Quelques classes des graphes orientés

- Les graphes symétriques;
- Les graphes anti-symétriques;
- Les graphes transitifs
- . . .

Caractérisons un graphe...

Multiplicité d'une paire de sommet

On appelle **multiplicité de la paire** $\{x, y\}$ dans G $=\{X,U\}$, notée $m_G(x, y)$, la somme suivante:

$$m_G(x,y) = m_G^+(x,y) + m_G^-(x,y)$$

où:

$$m_G^+(x,y) = |\{u \in U : I(u) = x;\ T(u) = y\}|$$

Caractérisons un graphe...

Multiplicité d'une paire de sommet

On appelle **multiplicité de la paire** $\{x, y\}$ dans G, notée $m_G(x, y)$, la somme suivante:

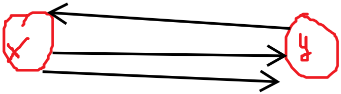
$$m_G(x, y) = m_G^+(x, y) + m_G^-(x, y)$$

où:

$$m_G^+(x, y) = |\{u \in U : I(u) = x; T(u) = y\}| = 2$$

$$m_G^-(x, y) = m_G^+(y, x) = 1$$

3



Exemple

$G = (X, U)$

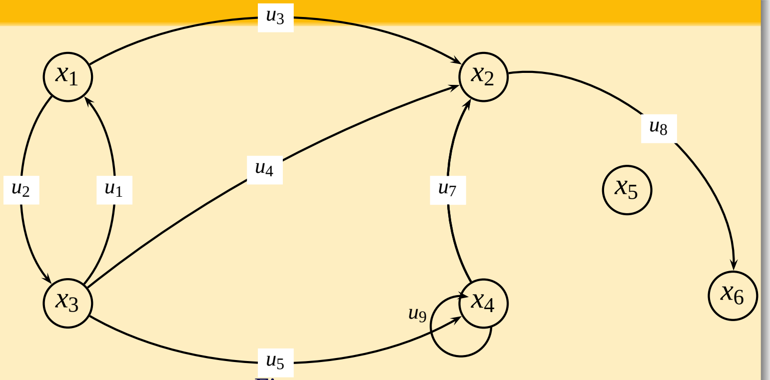


Figure:

- $m_G(x_2, x_3) = 1..;$ $\quad m_G(x_2, x_4) = 1..$
- $m_G(x_4, x_4) = 2..;$ $\quad m_G(x_2, x_5) = 0..$

Caractérisons un graphe...

- Si $x \neq y$:
  $m_G(x,y)$: le nombre d'arcs ayant comme extrémités x et y dans G.
- Si $x = y$:
  $m_G(x,y)$ est égal à **deux fois** le nombre de boucles attachées au sommet x dans G.

Caractérisons un graphe...

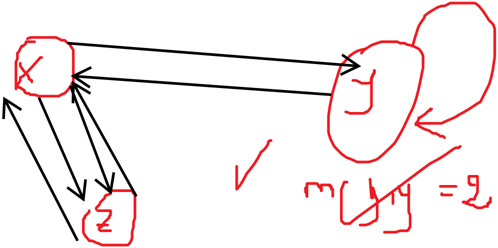
Classes de graphes

Caractérisons un graphe...

Classes de graphes

- Un graphe $G = (X, U)$ est dit **symétrique** si pour tout $x, y \in X$ on a :

$$\boxed{m_G^+(x,y) = m_G^-(x,y)}$$



$m(y,y) = 2 = 1+1$

Caractérisons un graphe...

Classes de graphes

- Un graphe $G = (X, U)$ est dit **symétrique** si pour tout $x, y \in X$ on a :

$$\boxed{m_G^+(x,y) = m_G^-(x,y)}$$

Si de plus G est un 1-graphe, G symétrique ssi $(x,y) \in U \Rightarrow (y,x) \in U$

Caractérisons un graphe...

Classes de graphes

Un graphe $G = (X, U)$ est dit **anti-symétrique** si pour toute paire $x, y \in X$ on a:

$$\boxed{m_G^+(x,y) + m_G^-(x,y) \leq 1}$$

Si G anti-symétrique $\Leftrightarrow$ "$(x,y) \in U \Rightarrow (y,x) \notin U$"

Caractérisons un graphe...

Classes de graphes

Un graphe $G = (X, U)$ est dit **anti-symétrique** si pour toute paire $x, y \in X$ on a:

$$\boxed{m_G^+(x,y) + m_G^-(x,y) \leq 1}$$

Si G anti-symétrique $\Leftrightarrow$ "$(x,y) \in U \Rightarrow (y,x) \notin U$"

Caractérisons un graphe...

QUESTIONS

Le graphe $G = (X, U)$ avec $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
Donner l'ensemble U pour que G :

Caractérisons un graphe...

QUESTIONS

Le graphe $G = (X, U)$ avec $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
Donner l'ensemble U pour que G :

1. soit symétrique 2-graphe? Symétrique 1-graphe?

Caractérisons un graphe...

QUESTIONS

Le graphe $G = (X, U)$ avec $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
Donner l'ensemble U pour que G :

2. soit anti-symétrique?

Les graphes simples

Remarque

Ces deux classes des graphes sont exclusivement définies dans les graphes orientés.

Les graphes simples

Remarque

Ces deux classes des graphes sont exclusivement définies dans les graphes orientés.
Une classe très importante des graphes non orientés emmerge dans de nombreux travaux dans la litterature, à savoir **les graphes simples**.

Les graphes simples

Remarque

Ces deux classes des graphes sont exclusivement définies dans les graphes orientés.
Une classe très importante des graphes non orientés emmerge dans de nombreux travaux dans la litterature, à savoir **les graphes simples**.

Définition

Un graphe $G = (X, E)$ est dit **simple** si G ne contient **aucune boucle** et toute paire de sommets distincts x et y est reliée par **au plus une arête**.

Les graphes simples

Remarque

Ces deux classes des graphes sont exclusivement définies dans les graphes orientés.
Une classe très importante des graphes non orientés emmerge dans de nombreux travaux dans la litterature, à savoir **les graphes simples**.

Définition

Un graphe $G = (X, E)$ est dit **simple** si G ne contient **aucune boucle** et toute paire de sommets distincts x et y est reliée par **au plus une arête**.
Autrement dit, G est simple si G est un **1-graphe sans boucles**.

Les graphes simples

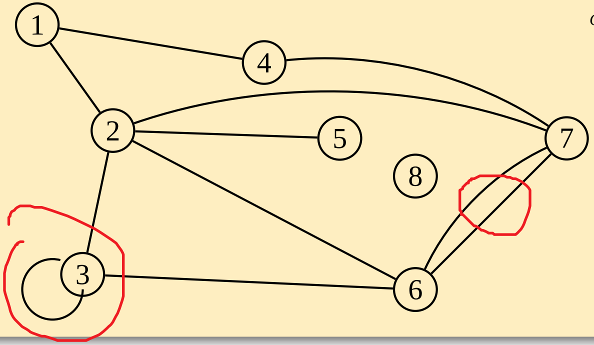
QUESTIONS

Les graphes simples

QUESTIONS

- Le graphe suivant est-il simple? Justifier

$G = (X, E)$



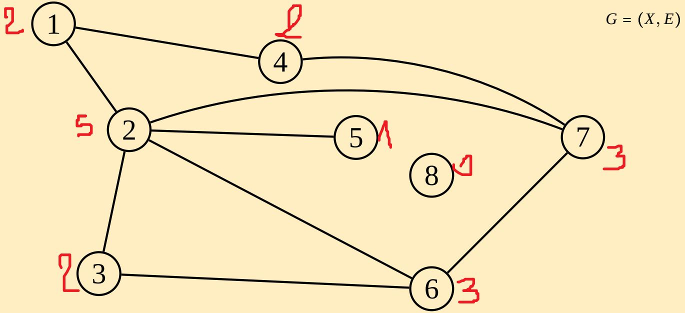
Les graphes simples

QUESTIONS

- Le graphe modélisant le problème des glaces et des arômes est-il simple?

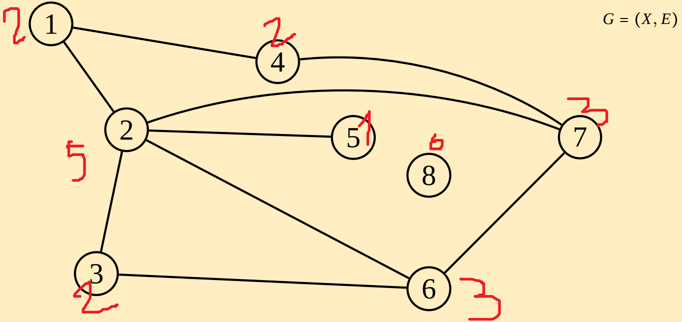
QUESTIONS

- Considérons ce graphe simple: Quelle est la relation entre le degré d'un sommet et l'ensemble des voisins de ce sommet?



QUESTIONS

- Considérons ce graphe simple: Quelle est la relation entre le degré d'un sommet et l'ensemble des voisins de ce sommet?



- Quelles sont les valeurs que peut prendre le degré d'un sommet dans un graphe simple? 0, 1, — n-1

Les graphes simples

Lemme

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple. Alors:

$i)$. Pour tout $x \in X$: $d_G(x) = |N_G(x)|$;

$ii)$. Pour tout $x \in X$: $0 \leq d_G(x) \leq n - 1$;

$iii)$. Il existe $x, y \in X$: $d_G(x) = d_G(y)$;

Les graphes simples

Lemme

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple. Alors:

i). Pour tout $x \in X$: $d_G(x) = |N_G(x)|$;

ii). Pour tout $x \in X$: $0 \leq d_G(x) \leq n - 1$;

iii). Il existe $x, y \in X$: $d_G(x) = d_G(y)$;

Preuve

i).

ii).

iii). exo

Les graphes complets

Définition

Un graphe $G = (X, U)$ est dit **complet** si:

$$m_G(x,y) = m_G^+(x,y) + m_G^-(x,y) \geq 1 \text{ pour tout } x,y \in X \; x \neq y$$

FINI POUR AUJOURD'HUI

- A préparer les premiers exercices pour les séances de TD à venir;
- Soyez plus nombreux aux séances de graphes;
- Bon courage et bon weekend et à Mercredi prochain.

☺