Généralités et concepts de base

Séance 1. Théorie des graphes
Enseignant: K.Meslem

U.S.T.H.B, le 13 Octobre 2021

3ème LIC RO Section A

Exemples

Exemple 1

Anis invite quatre de ses amis durant une soirée d'été. Il dispose dans son surgélateur de 5 boîtes de glaces à des arômes différents à savoir : Fraise, Noisette, Réglisse, Tiramisu et Vanille.

Exemples

Exemple 1

Anis invite quatre de ses amis durant une soirée d'été. Il dispose dans son surgélateur de 5 boîtes de glaces à des arômes différents à savoir : Fraise, Noisette, Réglisse, Tiramisu et Vanille.

Voulant inviter ses amis à prendre ces glaces, il demande à chacun d'entre eux de proposer deux préférences parmi ces arômes.

Exemples

Exemple 1

Anis invite quatre de ses amis durant une soirée d'été. Il dispose dans son surgélateur de 5 boîtes de glaces à des arômes différents à savoir : Fraise, Noisette, Réglisse, Tiramisu et Vanille.

Voulant inviter ses amis à prendre ces glaces, il demande à chacun d'entre eux de proposer deux préférences parmi ces arômes.
Bouchra préfère les goûts Vanille et Réglisse ; Chakib opte pour la Noisette et le Tiramisu et Dalila choisit la Fraise et la Vanille. Par contre, Ekram est fun de Réglisse et Tiramisu.

Exemples

Exemple 1

Anis invite quatre de ses amis durant une soirée d'été. Il dispose dans son surgélateur de 5 boîtes de glaces à des arômes différents à savoir : Fraise, Noisette, Réglisse, Tiramisu et Vanille.

Voulant inviter ses amis à prendre ces glaces, il demande à chacun d'entre eux de proposer deux préférences parmi ces arômes.
Bouchra préfère les goûts Vanille et Réglisse ; Chakib opte pour la Noisette et le Tiramisu et Dalila choisit la Fraise et la Vanille. Par contre, Ekram est fun de Réglisse et Tiramisu.

Sachant que Anis préfère la Fraise et la Noisette, peut-on avoir satisfaction des goûts de ces cinq amis ?

Exemples

Remarques

- La façon la plus efficace de simplifier la situation de recherche est d'avoir recours à une " représentation " interprétant les hypothèses complexes du problème.

Exemples

Remarques

- La façon la plus efficace de simplifier la situation de recherche est d'avoir recours à une " représentation " interprétant les hypothèses complexes du problème.
- Cette représentation est un **graphe**

Exemples

Remarques

- La façon la plus efficace de simplifier la situation de recherche est d'avoir recours à une " représentation " interprétant les hypothèses complexes du problème.
- Cette représentation est un **graphe**
- Il suffit de considérer des **points** représentant les personnes présentes en cette soirée et les différents goûts de glace;

Exemples

Remarques

- La façon la plus efficace de simplifier la situation de recherche est d'avoir recours à une " représentation " interprétant les hypothèses complexes du problème.
- Cette représentation est un **graphe**
- Il suffit de considérer des **points** représentant les personnes présentes en cette soirée et les différents goûts de glace;
- Et déterminer le lien entre ces points lorsque une personne préfère un goût donné.

Exemples

Remarques

- La façon la plus efficace de simplifier la situation de recherche est d'avoir recours à une " représentation " interprétant les hypothèses complexes du problème.
- Cette représentation est un **graphe**
- Il suffit de considérer des **points** représentant les personnes présentes en cette soirée et les différents goûts de glace;
- Et déterminer le lien entre ces points lorsque une personne préfère un goût donné.
- Ces points sont $\{A, B, C, D, E\} \cup \{F, N, R, T, V\}$: **sommets**

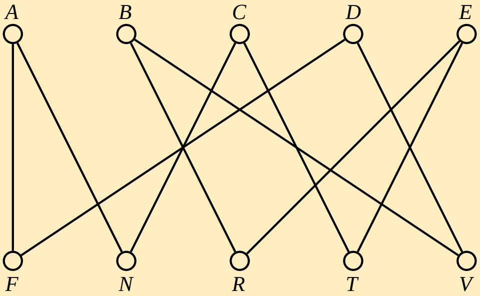
Exemples

Remarques

- La façon la plus efficace de simplifier la situation de recherche est d'avoir recours à une " représentation " interprétant les hypothèses complexes du problème.
- Cette représentation est un **graphe**
- Il suffit de considérer des **points** représentant les personnes présentes en cette soirée et les différents goûts de glace;
- Et déterminer le lien entre ces points lorsque une personne préfère un goût donné.
- Ces points sont $\{A, B, C, D, E\} \cup \{F, N, R, T, V\}$: **sommets**
- Le lien est donné dans la figure suivante:

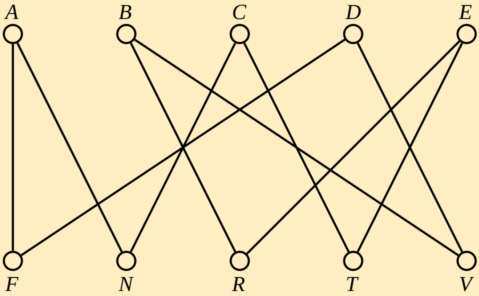
Exemples

Modélisation à l'aide d'un graphe



Exemples

Modélisation à l’aide d’un graphe



La solution détaillée sera étudiée ultérieurement

Exemples

Exemple 2.

- Nassim et Abderrahmane disposent de deux tas d'allumettes contenant chacun trois allumettes.

Exemples

Exemple 2.

- Nassim et Abderrahmane disposent de deux tas d'allumettes contenant chacun trois allumettes.
- A tour de rôle, chacun peut enlever une ou deux allumettes de l'un des tas à chaque tour de jeu.

Exemples

Exemple 2.

- Nassim et Abderrahmane disposent de deux tas d'allumettes contenant chacun trois allumettes.
- A tour de rôle, chacun peut enlever une ou deux allumettes de l'un des tas à chaque tour de jeu.
- Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie. Comment trouver une stratégie gagnante pour Nassim , si elle existe, sachant qu'il sera le premier à jouer?

Exemples

Exemple 2.

- Nassim et Abderrahmane disposent de deux tas d'allumettes contenant chacun trois allumettes.
- A tour de rôle, chacun peut enlever une ou deux allumettes de l'un des tas à chaque tour de jeu.
- Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie. Comment trouver une stratégie gagnante pour Nassim , si elle existe, sachant qu'il sera le premier à jouer?

Questions

Comment modéliser cette situation à l'aide d'un "graphe"?

Exemples

Exemple 2.

- Nassim et Abderrahmane disposent de deux tas d'allumettes contenant chacun trois allumettes.
- A tour de rôle, chacun peut enlever une ou deux allumettes de l'un des tas à chaque tour de jeu.
- Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie. Comment trouver une stratégie gagnante pour Nassim , si elle existe, sachant qu'il sera le premier à jouer?

Questions

Comment modéliser cette situation à l'aide d'un "graphe"?
Quelles sont les éventuelles configurations possibles des tours du jeu?
Comment peut-on les représenter?

Modélisation à l'aide d'un graphe

Le graphe

- Chaque point ("***sommet***") représente une éventuelle configuration des tours du jeu.

Modélisation à l'aide d'un graphe

Le graphe

- Chaque point ("***sommet***") représente une éventuelle configuration des tours du jeu.
- Ce point peut être donné à l'aide d'un couple de chiffres exprimant le nombre d'allumettes dans chaque tas (l'ordre des tas n'est pas nécessaire).

Modélisation à l'aide d'un graphe

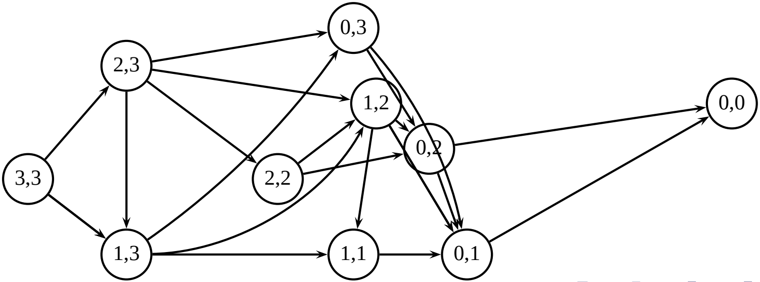
Le graphe

- Chaque point ("***sommet***") représente une éventuelle configuration des tours du jeu.
- Ce point peut être donné à l'aide d'un couple de chiffres exprimant le nombre d'allumettes dans chaque tas (l'ordre des tas n'est pas nécessaire).
- La liaison entre les sommets se fait à l'aide d'une ligne dirigée.

Modélisation à l'aide d'un graphe

Le graphe

- Chaque point ("***sommet***") représente une éventuelle configuration des tours du jeu.
- Ce point peut être donné à l'aide d'un couple de chiffres exprimant le nombre d'allumettes dans chaque tas (l'ordre des tas n'est pas nécessaire).
- La liaison entre les sommets se fait à l'aide d'une ligne dirigée.



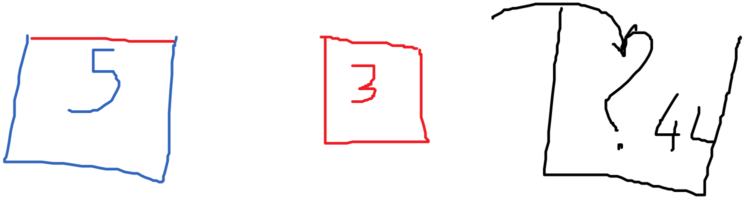
Encore un exemple !!!!

Encore un exemple !!!!

Problème

On dispose de deux récipients non gradués, l'un de 5 litres et l'autre de 3 litres.
On veut prélever 4 litres de liquide.

- Comment doit-on faire (à l'aide d'un graphe)?



Encore un exemple !!!!

Problème

On dispose de deux récipients non gradués, l'un de 5 litres et l'autre de 3 litres.
On veut prélever 4 litres de liquide.

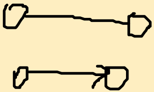
- Comment doit-on faire (à l'aide d'un graphe)?

Modélisation à l'aide d'un graphe

A vous de me proposer la solution (via gmail ou facebook). Pour demain!!

Notion de graphe

- Un graphe est une structure très simple qui est constituée d'un ensemble de **sommets** et d'une famille de **liens** entre certains couples de ces sommets.



Notion de graphe

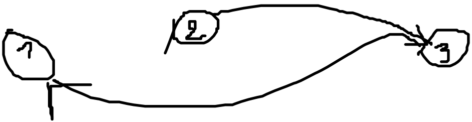
- Un graphe est une structure très simple qui est constituée d'un ensemble de **sommets** et d'une famille de **liens** entre certains couples de ces sommets.
- Un graphe peut modéliser des relations de conflits entre individus ou objets, un réseau de communication, ou encore des relations de domination non-réciproque entre personnes, etc.

Notion de graphe

- Un graphe est une structure très simple qui est constituée d'un ensemble de **sommets** et d'une famille de **liens** entre certains couples de ces sommets.
- Un graphe peut modéliser des relations de conflits entre individus ou objets, un réseau de communication, ou encore des relations de domination non-réciproque entre personnes, etc.
- Il est supposé, tout au long de ces chapitres, que l'ensemble des sommets, qui modélisent ces objets mathématiques, est **fini**.

Notion de graphe

- Un graphe est une structure très simple qui est constituée d'un ensemble de **sommets** et d'une famille de **liens** entre certains couples de ces sommets.
- Un graphe peut modéliser des relations de conflits entre individus ou objets, un réseau de communication, ou encore des relations de domination non-réciproque entre personnes, etc.
- Il est supposé, tout au long de ces chapitres, que l'ensemble des sommets, qui modélisent ces objets mathématiques, est **fini**.
- Dans certaines situations, l'orientation est nécessaire (le sens): nous traitons d'abord les graphes orientés



Graphes: Concept orienté

Graphes: Concept orienté

Definition

Un **graphe** $G = (X, U, I, T)$ (On notera $\underline{G = (X, U)}$ pour plus de commodité) est déterminé par:

Graphes: Concept orienté

Definition

Un **graphe** $G = (X, U, I, T)$ (On notera $G = (X, U)$ pour plus de commodité) est déterminé par:

- Un ensemble X fini ($X \neq \varnothing$) d'éléments distincts appelés **sommets** représentés par des points $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$;

Graphes: Concept orienté

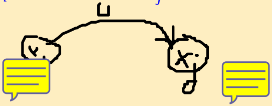
Definition

Un **graphe** $G = (X, U, I, T)$ (On notera $G = (X, U)$ pour plus de commodité) est déterminé par:

- Un ensemble X fini ($X \neq \varnothing$) d'éléments distincts appelés **sommets** représentés par des points $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;
- Un ensemble U de *couples ordonnés* de sommets appelés **arcs** notés $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ avec:

$$u = (x_i, x_j);\ i, j \in \{1, \dots, n\}$$

où tout arc u est représenté par une ligne dirigée du sommet x_i vers le sommet x_j à l'aide d'une flèche



Graphes: Concept orienté

Definition

Un **graphe** $G = (X, U, I, T)$ (On notera $G = (X, U)$ pour plus de commodité) est déterminé par:

- Un ensemble X fini ($X \neq \emptyset$) d'éléments distincts appelés **sommets** représentés par des points $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;
- Un ensemble U de *couples ordonnés* de sommets appelés **arcs** notés $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ avec:

$$u = (x_i, x_j);\ i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

où tout arc u est représenté par une ligne dirigée du sommet x_i vers le sommet x_j à l'aide d'une flèche

- Deux applications I et T définies comme suit:

$$\begin{array}{llll} I: & U & \to & X \\ & (x, y) & \mapsto & I(x, y) = x \ \text{extrémité Initiale} \end{array}$$

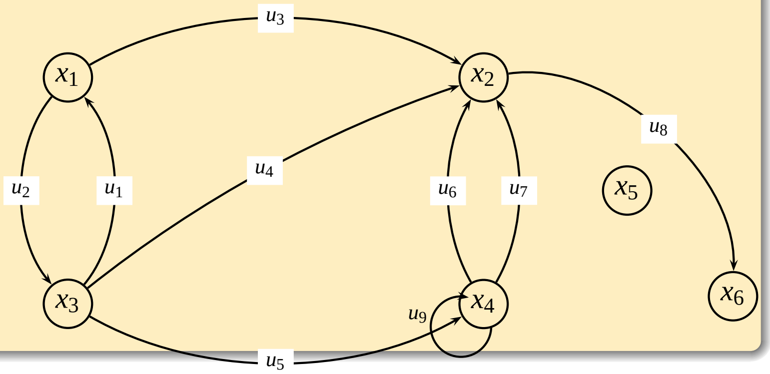
$$\begin{array}{llll} T: & U & \to & X \\ & (x, y) & \mapsto & T(x, y) = y \ \text{extrémité Terminale} \end{array}$$

Graphes: Concept orienté

Soit $G_1 = (X, U)$ le graphe orienté défini par $X = \{x_1, \ldots, x_6\}$ et $U = \{u_1, \ldots, u_9\}$

:

$G_1 = (X, U)$



Un peu de vocabulaire

- Combien de sommets nous disposons ? i.e $|X| =?$ et le graphe a combien d'arcs? i.e $|U| =?$

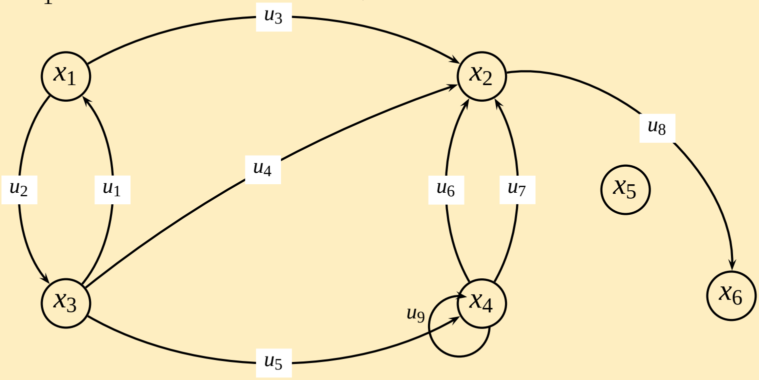
Un peu de vocabulaire

- ✓ On note: $n = |X|$ et $m = |U|$.
  L'**ordre** (resp. la **taille**) d'un graphe G est l'entier n (resp. l'entier m).

Un peu de vocabulaire

- ✓ On note: $n = |X|$ et $m = |U|$.
  L'**ordre** (resp. la **taille**) d'un graphe G est l'entier n (resp. l'entier m).
- ✓ Le graphe G_1 est d'ordre 6 et de taille 9.

$G_1 = (X, U)$



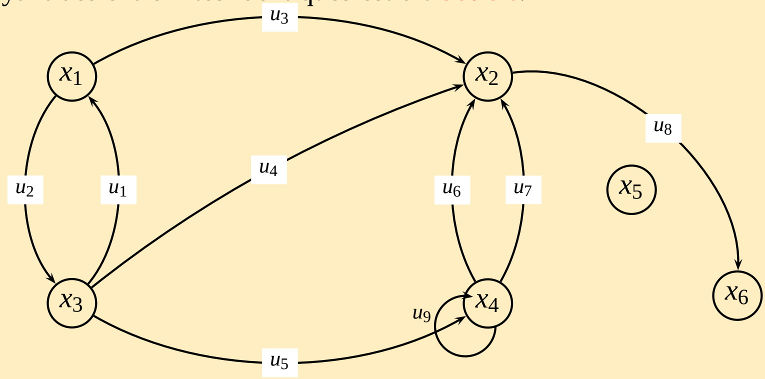
Un peu de vocabulaire

- ✓ Un arc ayant des extrémités identiques est dit **boucle**.

Un peu de vocabulaire

✓ Un arc ayant des extrémités identiques est dit **boucle**.

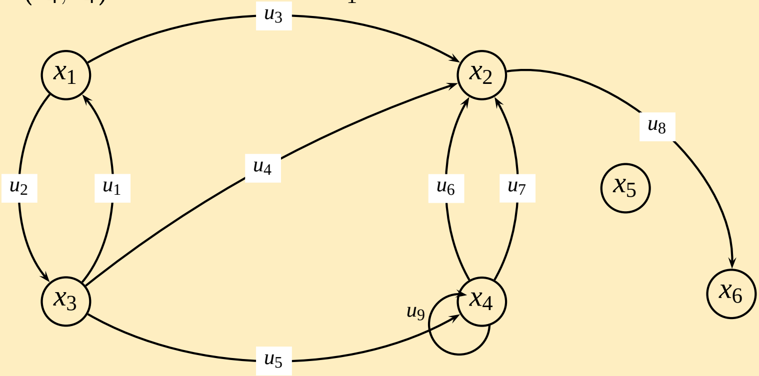
$G_1 = (X, U)$



Un peu de vocabulaire

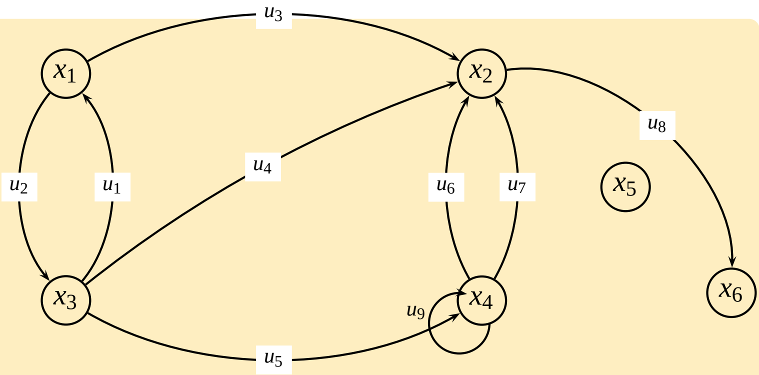
✓ Un arc ayant des extrémités identiques est dit **boucle**.
L'arc $u_9 = (x_4, x_4)$ est une boucle de G_1

$G_1 = (X, U)$

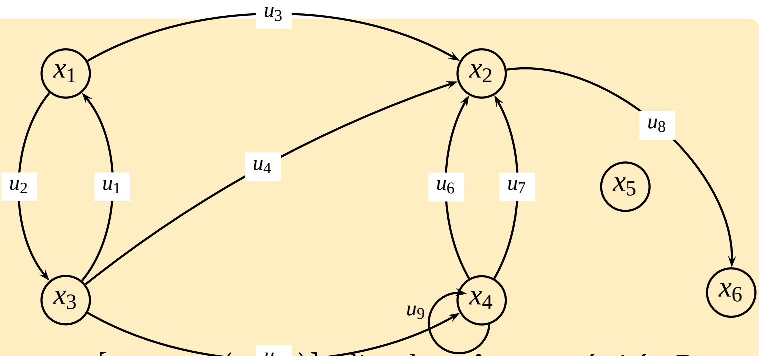


Un peu de vocabulaire

$G_1 = (X, U)$



$G_1 = (X, U)$

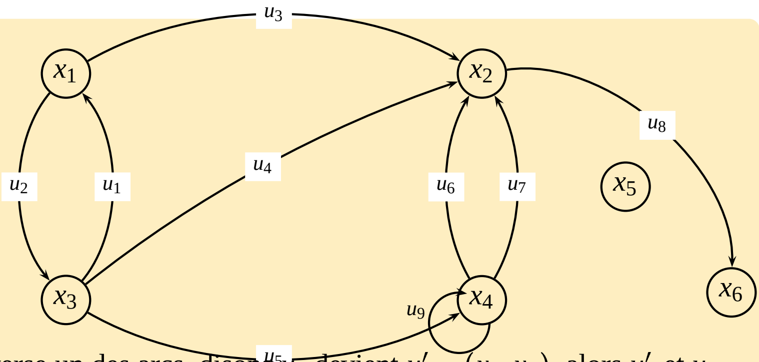


- ✓ Les arcs u_6 et u_7 $[u_6 = u_7 = (x_4, x_2)]$ relient les mêmes extrémités. De tels arcs sont dits **multiples**

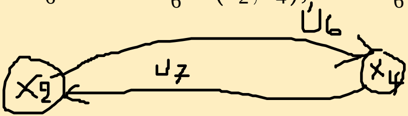
T(u6)=T(u7) et I(U6)=I(u7) : arcs multiples

Un peu de vocabulaire

$G_1 = (X, U)$

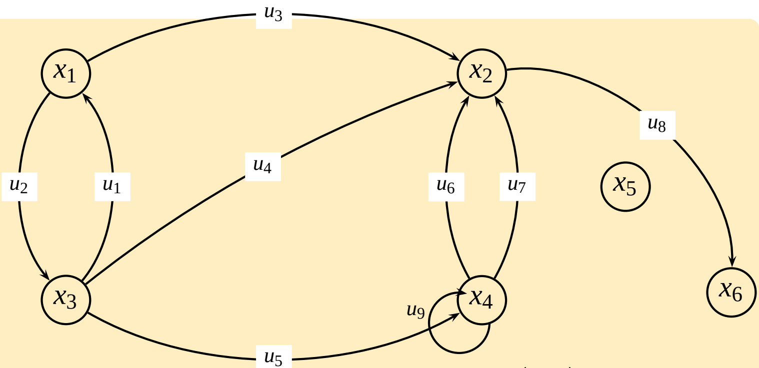


✓ Si on inverse un des arcs, disons u_6 devient $u'_6 = (x_2, x_4)$, alors u'_6 et u_7 sont dit **arcs parallèles**



Un peu de vocabulaire

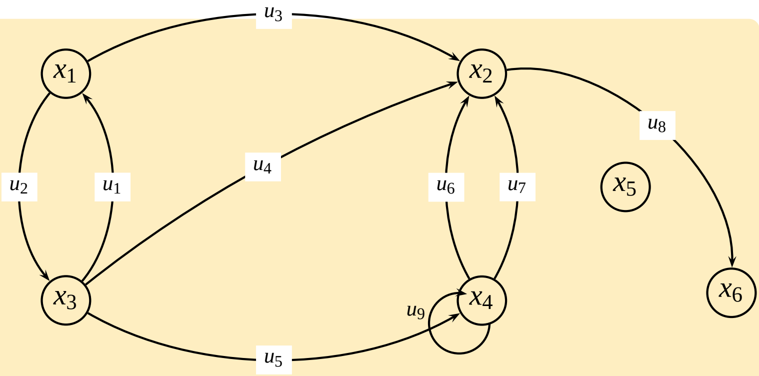
$G_1 = (X, U)$



✓ Un graphe G est dit ***p*-graphe** ($p \geq 1$) si tout élément (x, y) de U ne peut apparaitre plus que p fois.

Un peu de vocabulaire

$G_1 = (X, U)$



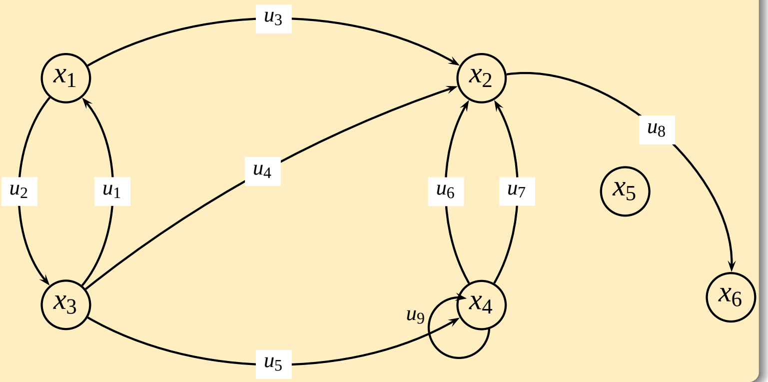
Le graphe G_1 est un 2-graphe

Un peu de vocabulaire

- ✓ Deux sommets x et y sont dits **adjacents** dans G s'il existe un arc les reliant dans G (ou ils sont voisins)

✓ Deux sommets x et y sont dits **adjacents** dans G s'il existe un arc les reliant dans G (ou ils sont voisins)

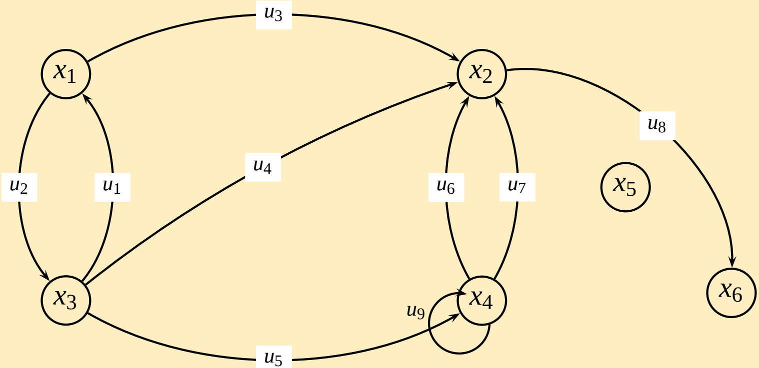
$G_1 = (X, U)$



Un peu de vocabulaire

- ✓ Deux sommets x et y sont dits **adjacents** dans G s'il existe un arc les reliant dans G (ou ils sont voisins)

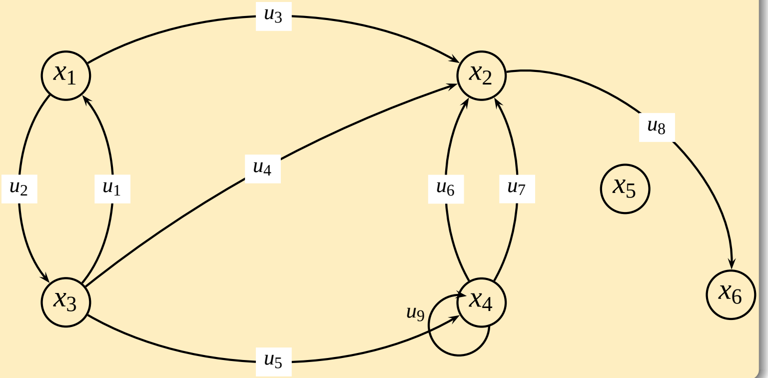
$G_1 = (X, U)$



Dans G_1, les sommets x_2 et x_3 sont adjacents. Les sommets x_2 et x_5 ne le sont pas.

✓ Deux arcs u et v sont dits **adjacents** dans G s'ils partagent une extremité commune dans G.

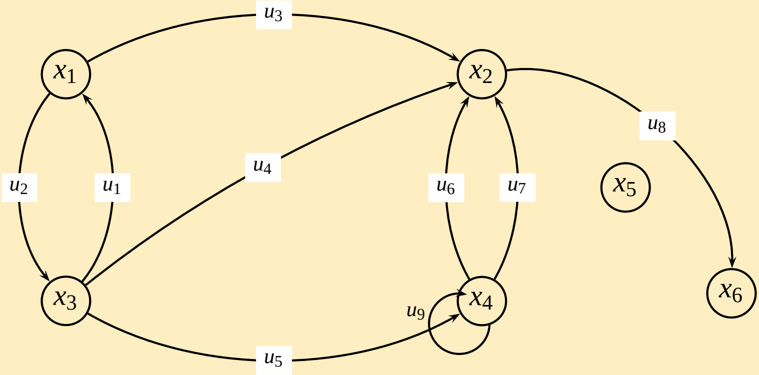
$G_1 = (X, U)$



Un peu de vocabulaire

✓ Deux arcs u et v sont dits **adjacents** dans G s'ils partagent une extremité commune dans G.

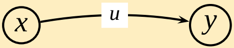
$G_1 = (X, U)$



Les arcs u_4 et u_8 sont adjacents dans G_1.

Graphes: Concept orienté

✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité initiale d'un arc u alors:



Graphes: Concept orienté

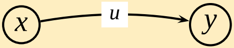
✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité initiale d'un arc u alors:

$$x \xrightarrow{u} y$$

l'arc u est dit **incident** à x vers **l'extérieur**

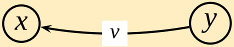
Graphes: Concept orienté

- ✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité initiale d'un arc u alors:



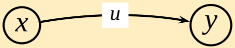
l'arc u est dit **incident** à x vers **l'extérieur**

- ✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité terminale d'un arc v alors:



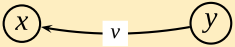
Graphes: Concept orienté

✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité initiale d'un arc u alors:



l'arc u est dit **incident** à x vers **l'extérieur**

✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité terminale d'un arc v alors:



l'arc v est dit **incident** à x vers **l'intérieur**

Graphes: Concept orienté

- ✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité initiale d'un arc u alors:

$$x \xrightarrow{u} y$$

l'arc u est dit **incident** à x vers **l'extérieur**

- ✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité terminale d'un arc v alors:

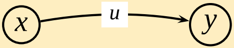
$$x \xleftarrow{v} y$$

l'arc v est dit **incident** à x vers **l'intérieur**

L'arc u_1 est ..... x_3

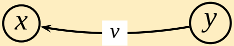
Graphes: Concept orienté

✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité initiale d'un arc u alors:



l'arc u est dit **incident** à x vers **l'extérieur**

✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité terminale d'un arc v alors:

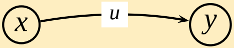


l'arc v est dit **incident** à x vers **l'intérieur**

L'arc u_1 est ..... $x_3$incident au sommet x_3 vers l'extérieur dans G_1.

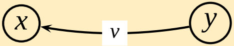
Graphes: Concept orienté

✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité initiale d'un arc u alors:



l'arc u est dit **incident** à x vers **l'extérieur**

✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité terminale d'un arc v alors:



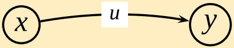
l'arc v est dit **incident** à x vers **l'intérieur**

L'arc u_1 est ..... $x_3$incident au sommet x_3 vers l'extérieur dans G_1.

L'arc u_9 est ....x_4

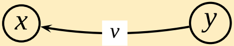
Graphes: Concept orienté

✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité initiale d'un arc u alors:



l'arc u est dit **incident** à x vers **l'extérieur**

✓ Si un sommet x d'un graphe G est une extrémité terminale d'un arc v alors:



l'arc v est dit **incident** à x vers **l'intérieur**

L'arc u_1 est ..... $x_3$incident au sommet x_3 vers l'extérieur dans G_1.
L'arc u_9 est ....x_4 incident au sommet x_4 vers l'extérieur et vers l'intérieur
.

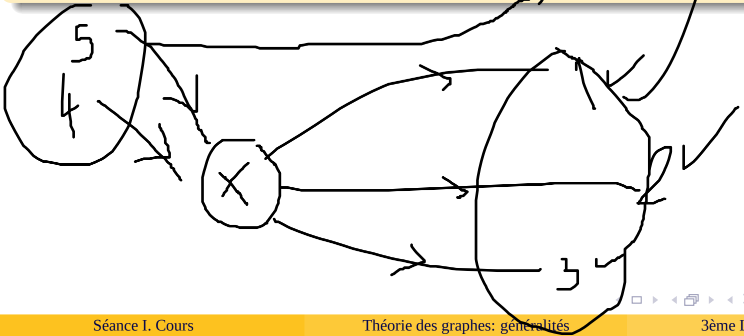
Un peu de Vocabulaire

- Un sommet y de G est un **successeur** du sommet x s'il existe un arc u dans G ayant son extrémité initiale en x et son extrémité terminale en y $I(u) = x$ et $T(u) = y$.
  L'ensemble des successeurs de x se note $\boxed{\Gamma_G^+(x)}$.

- Un sommet y de G est un **successeur** du sommet x s'il existe un arc u dans G ayant son extrémité initiale en x et son extrémité terminale en y $I(u) = x$ et $T(u) = y$.

  L'ensemble des successeurs de x se note $\boxed{\Gamma_G^+(x)}$.
- Un sommet y de G est un **prédécesseur** du sommet x s'il existe un arc v de la forme $v = (y, x)$ dans G.

  L'ensemble des prédécesseurs de x se note $\boxed{\Gamma_G^-(x)}$.



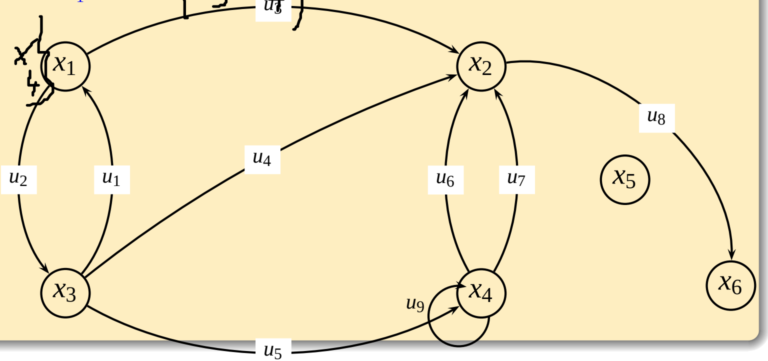
Un peu de Vocabulaire

- Un sommet y de G est un **successeur** du sommet x s'il existe un arc u dans G ayant son extrémité initiale en x et son extrémité terminale en y $I(u) = x$ et $T(u) = y$.

  L'ensemble des successeurs de x se note $\boxed{\Gamma^+_G(x)}$.

- $\Gamma^+_{G_1}(x_3)$? $\quad \Gamma^-_{G_1}(x_4)? = \{x_3\ x_4\}$

$= \{x_1, x_2\ x_4\}$



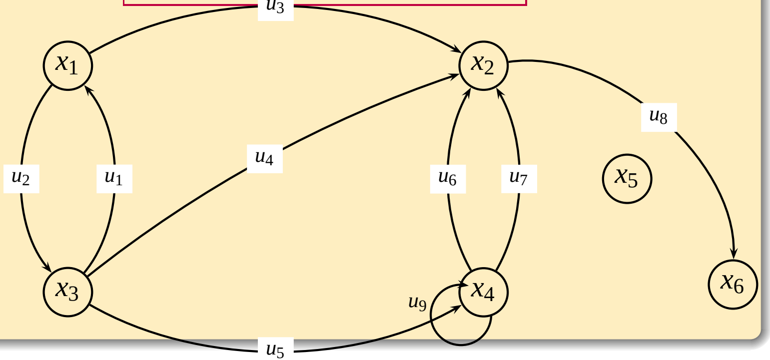
$G_1 = (X, U)$

Un peu de Vocabulaire

- L'ensemble des sommets **voisins** de x dans G est noté $\Gamma_G(x)$ ou $N_G(x)$ avec :

$$\boxed{\Gamma_G(x) = N_G(x) = \Gamma_G^-(x) \cup \Gamma_G^+(x)}$$

$G_1 = (X, U)$



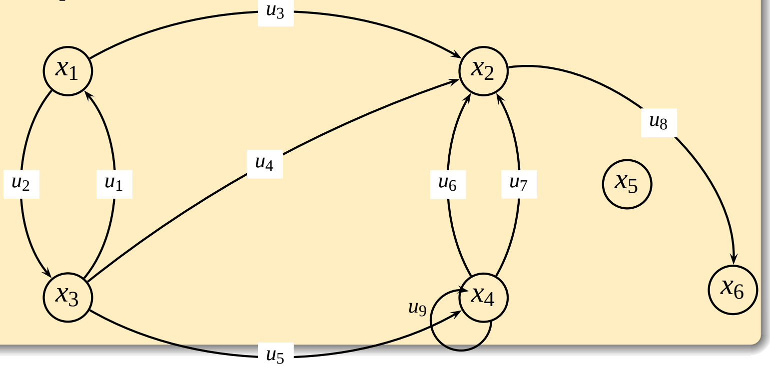
Un peu de Vocabulaire

- On peut définir l'**application multivoque** dans X, notée Γ_G^+ qui associe à chaque sommet x de G l'ensemble de ses successeurs.

Un peu de Vocabulaire

Il est à noter que cet ensemble peut être vide.

$G_1 = (X, U)$

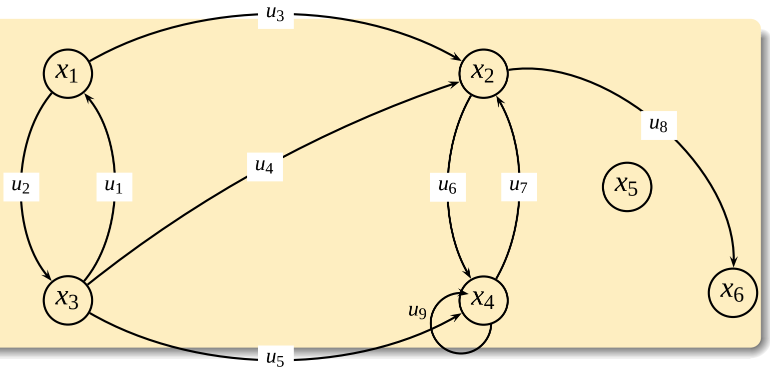


Un peu de Vocabulaire

- Un 1-graphe $G = (X, U)$ étant complètement défini par la fonction multivoque Γ_G^+ peut être noté $G = (X, \Gamma^+)$.

Un peu de Vocabulaire

$G' = (X, \Gamma^+)$



Degré d'un sommet d'un graphe

Degré d'un sommet

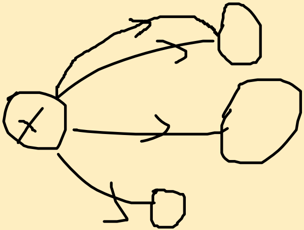
Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. Considérons x, y deux sommets de G:

Degré d'un sommet d'un graphe

Degré d'un sommet

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. Considérons x, y deux sommets de G:

- Le nombre d'arcs sortant de x du graphe G, noté $d_G^+(x)$ est le **demi-degré extérieur** de x.



Degré d'un sommet d'un graphe

Degré d'un sommet

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. Considérons x, y deux sommets de G:

- Le nombre d'arcs sortant de x du graphe G, noté $d_G^+(x)$ est le **demi-degré extérieur** de x.
- Le nombre d'arcs rentrant vers le sommet x, noté $d_G^-(x)$ est le **demi-degré intérieur** de x.

$$\boxed{d_G^+(x) = |\{u \in U : I(u) = x;\}|} \qquad \boxed{\mathrm{d}_G^-(x) = |\{u \in U : T(u) = x;\}|}$$

Degré d'un sommet d'un graphe

Degré d'un sommet

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. Considérons x, y deux sommets de G:

- Le nombre d'arcs sortant de x du graphe G, noté $d_G^+(x)$ est le **demi-degré extérieur** de x.
- Le nombre d'arcs rentrant vers le sommet x, noté $d_G^-(x)$ est le **demi-degré intérieur** de x.

$$\boxed{d_G^+(x) = |\{u \in U : I(u) = x;\}|} \qquad \boxed{\mathrm{d}_G^-(x) = |\{u \in U : T(u) = x;\}|}$$

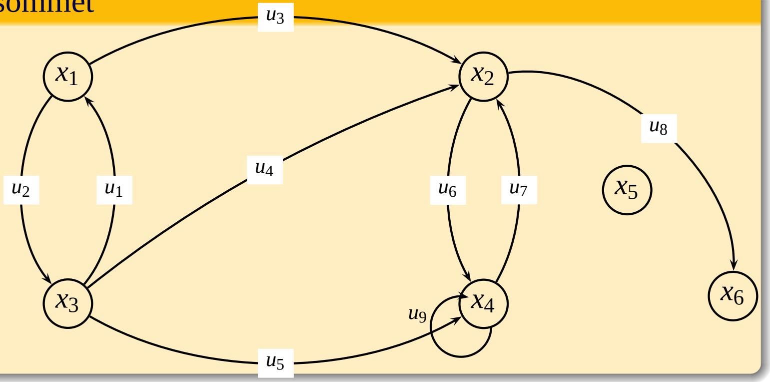
- Le degré d'un sommet x de G, noté **degré** $d_G(x)$ est donné comme suit:

$$\boxed{d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)}$$

Degré d'un sommet d'un graphe

Degré d'un sommet

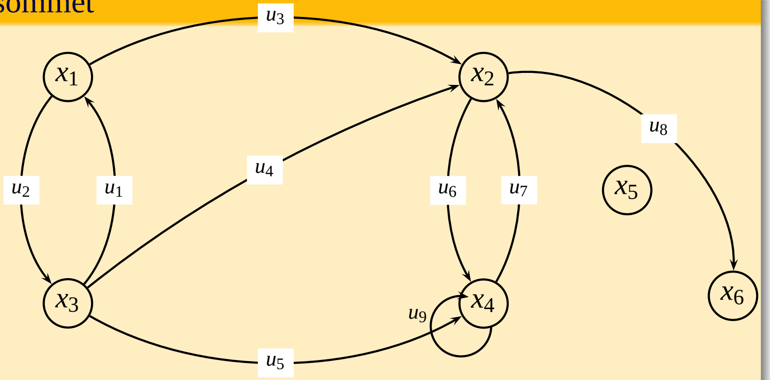
$G' = (X, \Gamma^+)$



Degré d'un sommet d'un graphe

Degré d'un sommet

$G' = (X, \Gamma^+)$



- Alors:

i	1	2	3	4	5	6	Σ
$d^+(x_i)$	2	2	3	2	0	0	9
$d^-(x_i)$	1	3	1	3	0	1	9

Fini pour cette séance!!

INSTRUCTIONS

Fini pour cette séance!!

INSTRUCTIONS

- Prendre notes à partir de diapo "Graphe: concept orienté" aujourd'hui!!!

Fini pour cette séance!!

INSTRUCTIONS

- Prendre notes à partir de diapo "Graphe: concept orienté" aujourd'hui!!!
- Réfléchir au problème des récipients et les 4 litres (proposer le graphe)

Fini pour cette séance!!

INSTRUCTIONS

- Prendre notes à partir de diapo "Graphe: concept orienté" aujourd'hui!!!
- Réfléchir au problème des récipients et les 4 litres (proposer le graphe)
- A demain inchallah ☺