Equations se ramenant à des équations à variables séparables

1) Equation du type $y' = f(ax+by+c)$, $b \neq 0$.

On pose $U(x) = ax+by+C$.

$U' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{U'-a}{b}$.

$\frac{1}{b}(U'-a) = f(U) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = b f(U) + a$.

$$\frac{du}{bf(U)+a} = dx.$$

Exemple: $y' = (x-y+3)^2 \dots (E)$.

$U = x-y+3 \longrightarrow U' = 1-y' \Rightarrow y' = 1-U'$.

$(E) \Leftrightarrow 1-U' = U^2$. ($u = \pm 1$ solutions.)

si $u \neq \pm 1$: $\frac{du}{1-u^2} = dx$.

$$\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right] du = \int dx.$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln|1+u| - \ln|1-u|\right] = x+k.$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = x+k$$

$$\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = 2x+\alpha.$$

$$\frac{1+u}{1-u} = C e^{2x}$$

$$u = \frac{ce^{2x}-1}{ce^{2x}+1} = x-y+3.$$

(1) ... $y = (x+3) - \left(\frac{ce^{2x}-1}{Ce^{2x}+1}\right)$ $C \in \mathbb{R}^*$.

$u = \pm 1 \Rightarrow \underbrace{y = x+2}_{u=1}$ et $\underbrace{y = x+4}_{u=-1}$.

$y = x+4$ correspond à $C=0$ dans (1).
d'où les solutions de l'équation (E).

$$\begin{cases} y = (x+3) - \left(\dfrac{Ce^{2x}-1}{Ce^{2x}+1}\right) \; ; C \in \mathbb{R}. \\ y = x+2 \end{cases}$$

<u>Définition</u>:
On appelle solution singulière d'une équation toute solution non déduite de l'intégrale générale en prenant une valeur particulière de C.

2) <u>Equation du type</u> $y' = f(y/x) \dots (E)$.

On pose $z = y/x \Rightarrow y = zx$ $\quad (z = z(x))$.

$$z'x + z = f(z).$$

$$z'x = f(z) - z.$$

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}.$$

<u>Exemple</u>: $(y-x)y' + y = 0$

$$y' = \frac{y}{x-y} = \frac{y/x}{1-y/x} = f(y/x).$$

$$z'x + z = \frac{z}{1-z}. \qquad (z = z(x))$$

$$z'x = \frac{z^2}{1-z} \qquad (z=0 \text{ solution}).$$

$$\frac{1-z}{z^2}\, dz = \frac{dx}{x}. \qquad (\text{si } z \neq 0).$$

$$\int \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\right) dz = \ln|x| + K.$$

$$-\frac{1}{z} - \ln|z| = \ln|x| + K.$$

$$-\frac{x}{y}-\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\ln|x|+K$$

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=C \quad , C\in\mathbb{R} \text{ et } y=0$$

3) <u>Equations différentielles homogènes</u>: $y'=f(x,y)$.

l'équation $y'=f(x,y)$ est dite homogène si pour tout λ : $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$.

$$y'=f(x,y)=f(1,y/x)=g(y/x)$$

<u>Exemple</u>: Résoudre l'équation :

$$(y^2-x^2)\,y'+2xy=0 \quad \ldots\ (1)$$

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}=f(x,y) \quad \text{(homogène)}.$$

on pose $z=y/x$.

$$(1)\Rightarrow z'x+z=\frac{2z}{1-z^2} \qquad (\text{pour } x\neq 0).$$

$$z'x=\frac{z+z^3}{1-z^2} \qquad (z=0 \text{ solution})$$

$$\frac{1-z^2}{z(1+z^2)}\,dz=\frac{dx}{x} \qquad (\text{si } z\neq 0).$$

$$\int\left[\frac{1}{z}-\frac{2z}{1+z^2}\right]dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|-\ln(1+z^2)=\ln|x|+K.$$

$$\ln\left(\frac{|z|}{1+z^2}\right)=\ln|x|+K.$$

$$\frac{z}{1+z^2}=Cx \quad , C\in\mathbb{R}^*$$

$$\frac{y/x}{1+y^2/x^2} = Cx \Rightarrow \frac{y}{x^2+y^2} = C.$$

$y=0$ solution donc la solution générale.

$$\frac{y}{x^2+y^2} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque:
Dans certains cas d'équations homogènes, on trouve la solution sous forme paramétrique.

Exemple: $(x^2+xy)\,y' = y^2$.

$$y' = \frac{y^2}{x^2+xy} = \frac{(y/x)^2}{1+y/x}. \quad \text{on pose } z = y/x.$$

$$z'x + z = \frac{z^2}{1+z}.$$

$$z'x = \frac{-z}{1+z}. \qquad (z=0 \text{ solution}).$$

$$\frac{1+z}{z}\,dz = -\frac{dx}{x}. \qquad (\text{si } z \neq 0).$$

$$\ln|z| + z = -\ln|x| + K.$$

$$\ln|z e^z| = \ln\frac{1}{|x|} + K.$$

$$z e^z = \frac{C}{x}. \qquad C \in \mathbb{R}^*.$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{z e^z} \\ y = \dfrac{C}{e^z} \end{cases} \qquad \text{et } y = 0$$

4) Équation du type : $y' = \dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ .... (1)

- Si $c_1 = c = 0$ l'équation est homogène.
- Si $c \neq 0$ ou $c_1 \neq 0$ on pose $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$.

Donc $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx_1}$.

$$(1) \Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + ah + by_1 + bk + c}{a_1x_1 + a_1h + b_1y_1 + b_1k + c_1}.$$

On choisit h et k tels que :

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases} \quad \dots (2)$$

- Si le système (2) admet une solution unique alors on obtient une équation homogène du type

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1} \text{ à résoudre.}$$

- Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ i.e : $ab_1 = a_1b$.

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda.$$

$$(1) \Rightarrow y' = \frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1} = f(ax+by).$$

On pose $z = ax + by$ pour trouver une équation à variables séparables.

Exemples : Résoudre les équations :

1) $y' = \dfrac{x+y-3}{x-y-1}$.

2) $y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$.