



Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Serra  
Av. dos Sabiás, 330 – Morada de Laranjeiras – 29166-630 – Serra – ES

## Bacharelado em Sistemas de Informação

### Álgebra Linear - 2024/2

#### Lista 5 – VETORES (produtos escalar e vetorial)

Nome: \_\_\_\_\_

Professor: Fidelis Zanetti de Castro

Data: 24/01/2025

1. Considere os pontos  $A = (-1, 2, 3)$ ,  $M = (-1, 3, 2)$  e  $N = (1, 1, 3)$ . O triângulo  $ABC$  tem ângulos  $A = 90^\circ$  e  $B = 30^\circ$ , e os vértices  $B$  e  $C$  pertencem à reta  $MN$ . Encontre os vértices  $B$  e  $C$ .
2. Que condições devem satisfazer os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  para que o vetor  $\vec{a} + \vec{b}$  divida o ângulo formado por eles em dois ângulos iguais?
3. Mostre que o segmento de reta que liga um vértice de um paralelogramo ao ponto médio de um dos lados opostos **trissecta** a diagonal (isto é, intersecta a diagonal em um ponto que a divide em dois segmentos, um tendo um terço do comprimento da diagonal e o outro tendo dois terços do comprimento da diagonal).
4. Sejam  $\vec{u} = (-1, 1, 1)$  e  $\vec{v} = (2, 0, 1)$  dois vetores. Encontre os vetores  $\vec{w}$  que são paralelos ao plano determinado por  $O$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , perpendiculares a  $\vec{v}$ , e tais que  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 7$ .
5. Seja  $\vec{v} \neq \vec{0}$  um vetor do  $\mathbb{R}^3$  e sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os ângulos que  $\vec{v}$  faz com os eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Mostre que:
  - (a) Se  $\|\vec{v}\| = 1$ , então  $\vec{v} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ .
  - (b) Para um vetor  $\vec{v}$  qualquer, vale que  $\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ .
  - (c)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .
6. Estude o ângulo entre os vetores  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  no plano. Faça o mesmo no  $\mathbb{R}^3$  em relação a  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ . Escrevendo os vetores  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  e  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ , verifique que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xa\vec{i} \cdot \vec{i} + yb\vec{j} \cdot \vec{j}$ . Faça um estudo semelhante no espaço  $\mathbb{R}^3$ .
7. Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e é igual à sua metade.
8. Demonstre que se  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais tais que  $\alpha(2, 3) + \beta(3, 2) = \vec{0}$ , então  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ . Qual a conclusão geométrica que podemos tirar do item acima?
9. O vetor  $\vec{w}$  é ortogonal aos vetores  $\vec{u} = (2, 3, -1)$  e  $\vec{v} = (1, -2, 3)$  e  $\vec{w} \cdot (2, -1, 1) = -6$ . Encontre  $\vec{w}$ .

10. Encontre o ponto  $Q$  do espaço tal que o vetor com origem no ponto  $P = (1, 0, 1)$  e com extremidade em  $Q$  tenha norma, direção e sentido iguais ao vetor  $(1, -2, 1)$ .
11. Determine os ângulos internos de um triângulo  $ABC$ , sendo  $A = (3, -3, 3)$ ,  $B = (2, -1, 2)$  e  $C = (1, 0, 2)$ .
12. Mostre que as três bissetrizes de um triângulo se interceptam em um único ponto.
13. Se de um ponto qualquer  $R$  dentro de um paralelogramo  $ABCD$  são traçados segmentos de reta paralelos aos lados, são formados quatro novos paralelogramos (isto é, o paralelogramo original é a união destes quatro paralelogramos menores). Mostre que as diagonais de quaisquer dois destes paralelogramos (que não sejam as diagonais que se intersectam no ponto  $R$ ) se intersectam na reta suporte de uma das diagonais do paralelogramo original.
14. Mostre que a soma dos vetores que partem de um vértice de um tetraedro para os pontos médios das arestas opostas é nula.
15. Prove que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.
16. Demonstre que se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são vetores perpendiculares, então  $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$ .
17. Mostre que o produto escalar de dois vetores é igual ao produto de suas normas vezes o cosseno do ângulo entre eles.
18. Encontre um vetor unitário ortogonal aos vetores  $\vec{a} = (1, 2, 3)$  e  $\vec{b} = (4, 5, 6)$ .
19. Verifique que o volume de um paralelepípedo cujas arestas adjacentes são  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  é dado por  $\|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\|$ .
20. Mostre que a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos seus lados.
21. Determine a equação do plano que contém os pontos  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  e  $C = (0, 0, 1)$ .
22. Mostre que a soma dos vetores que partem de um ponto fixo para os vértices de um triângulo é igual à soma dos vetores que partem do ponto fixo para os pontos médios dos lados do triângulo.
23. Prove que as diagonais de um losango se cruzam em ângulos retos.
24. Verifique que o centroide de um triângulo divide cada mediana na razão  $2 : 1$ .
25. Verifique se os pontos  $A = (1, 2, 4)$ ,  $B = (-1, 0, 2)$ ,  $C = (0, 2, 2)$  e  $D = (-2, 1, 3)$  estão no mesmo plano ou não.
26. A análise de similaridade entre textos é amplamente utilizada em diversas áreas, como identificação de plágio, classificação de textos, mecanismos de busca, entre outros. Essa análise pode ser realizada por meio da vetorização dos textos utilizando o método **TF-IDF** (Term Frequency-Inverse Document Frequency), combinado com a métrica de **distância dos cossenos**.

Para transformar textos em vetores numéricos, utilizamos a técnica TF-IDF, que avalia a importância de uma palavra em um documento com base na frequência da palavra no texto e na frequência da palavra em todos os textos.

As fórmulas utilizadas são:

$$\text{TF}_{t,d} = \frac{\text{Número de ocorrências do termo } t \text{ no documento } d}{\text{Número total de termos no documento } d}$$

$$\text{IDF}_t = \log \left( \frac{\text{Número total de documentos}}{\text{Número de documentos contendo o termo } t} \right)$$

$$\text{TF-IDF}_{t,d} = \text{TF}_{t,d} \times \text{IDF}_t$$

Após a vetorização, a similaridade entre dois textos é calculada por meio do **coseno do ângulo** entre os vetores. A fórmula para a similaridade dos cossenos é:

$$\text{similaridade}(A, B) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$$

Onde:

- $\vec{A} \cdot \vec{B}$  é o produto escalar entre os vetores  $A$  e  $B$ .
- $\|\vec{A}\|$  e  $\|\vec{B}\|$  são as normas (ou módulos) dos vetores  $A$  e  $B$ .

A similaridade varia de 0 (vetores ortogonais, ou seja, textos sem similaridade) a 1 (vetores paralelos, ou seja, textos idênticos).

Considere as seguintes frases:

- F1: “O morango é uma fruta rica em antioxidantes e vitamina C.”
- F2: “Carros modernos utilizam energia elétrica para reduzir a emissão de poluentes.”
- F3: “O suco de laranja é uma fonte natural de vitamina C e nutrientes essenciais.”

O vocabulário resultante dessas frases é: {morango, fruta, rica, antioxidantes, vitamina, C, carros, modernos, utilizam, energia, elétrica, reduzir, emissão, poluentes, suco, laranja, fonte, natural, nutrientes, essenciais}.

A seguir, calculamos o TF-IDF de cada termo. Por exemplo, o termo “vitamina” aparece:

- 1 vez em F1, com  $\text{TF} = 1/9$ .
- 1 vez em F3, com  $\text{TF} = 1/11$ .
- Em 2 dos 3 documentos, com  $\text{IDF} = \log(3/2)$ .

**Tabela de TF-IDF (parcial):**

Termo	TF-IDF (F1)	TF-IDF (F2)	TF-IDF (F3)
morango	0.287	0	0
vitamina	0.128	0	0.119
energia	0	0.287	0

Após a vetorização, os vetores podem ser usados para calcular a similaridade dos cossenos entre as frases.

Os cinco textos a seguir serão utilizados na análise.

Texto 1 - O morango é uma fruta amplamente cultivada e consumida no mundo inteiro. Sua composição rica em antioxidantes e vitamina C torna-o essencial para dietas saudáveis. Além disso, o cultivo sustentável de morangos tem ganhado destaque em práticas agrícolas.

Texto 2 - Os veículos elétricos representam uma revolução no setor automotivo, reduzindo drasticamente a emissão de poluentes e promovendo alternativas sustentáveis. A utilização de baterias recarregáveis é um dos fatores-chave dessa transformação.

Texto 3 - As frutas cítricas, como laranja e limão, são fontes naturais de vitamina C. O consumo regular dessas frutas é benéfico para a saúde, fortalecendo o sistema imunológico e contribuindo para a prevenção de doenças.

Texto 4 - A tecnologia moderna está focada em desenvolver soluções sustentáveis. Carros elétricos, energia solar e práticas agrícolas inovadoras são exemplos claros de como a tecnologia pode ajudar na preservação ambiental.

Texto 5 - Os sucos naturais, especialmente de frutas como laranja e morango, são populares em diversas culturas. Eles são ricos em nutrientes, ajudam na hidratação e fornecem vitaminas essenciais para o corpo humano.

- (a) Realize a vetorização dos cinco textos utilizando TF-IDF. Apresente os cálculos em forma de tabela, destacando pelo menos os cinco termos mais relevantes para cada texto.
- (b) Calcule a similaridade dos cossenos entre os pares de textos (1-2, 1-3, 1-4, 1-5, etc.).
- (c) Identifique quais textos têm maior similaridade entre si e justifique por que isso ocorre com base no conteúdo.
- (d) Analise os textos com menor similaridade. Quais fatores levaram a essa menor correlação?
- (e) Proponha três aplicações práticas de análise de similaridade textual no contexto de ciência de dados ou tecnologia.