Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Serra
Rodovia ES-010 – Km 6,5 – Manguinhos – 29173-087 – Serra – ES

Bacharelado em Sistemas de Informação - Prova auxiliar à Prova 1

Álgebra Linear - 22/11/2024

Professor: Fidelis Zanetti de Castro

Nome: ____

Questão:	1	2	3	4	5	Total
Pontos:	20	20	20	20	20	100
Nota:						

1. (20 pts) Classifique cada afirmação abaixo em **Verdadeira**, marcando com **V**, ou **Falsa**, marcando com **F**. *Respostas sem justificativas não serão consideradas.*

   Para fins de esclarecimento: quando uma afirmação é *verdadeira*, ela deve ser provada formalmente, isto é, por meio de uma prova direta, ou uma prova por contradição, ou uma prova por indução, por contraposição, ou mesmo, por exaustão; entretanto, quando a afirmação é *falsa*, basta apresentar um único contraexemplo para ela.

   a. (   ) Todo sistema linear homogêneo é possível.

   b. (   ) Os vetores $v_1 = (1, 2, 3)^T$, $v_2 = (2, 3, 4)^T$, $v_3 = (3, 4, 5)^T$ e $v_4 = (4, 5, 6)^T$ de $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes.

   c. (   ) Se uma matriz A é não invertível, então o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ter solução.

   d. (   ) Um sistema linear com o mesmo número de equações e variáveis sempre possui uma solução única.

2. (20 pts) Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, \\ 4x - y + 2z = 6, \\ -3x + 2y + 4z = -7. \end{cases}$$

   a) Utilize o **escalonamento** para transformar o sistema em uma forma triangular superior.

   b) Resolva o sistema triangular obtido aplicando a **substituição regressiva** para encontrar os valores de x, y e z.

   Certifique-se de manter a organização dos cálculos ao realizar o escalonamento e o processo de substituição.

3. (20 pts) Considere os vetores $v_1 = (1, 2, 1)^T$, $v_2 = (2, 4, 2)^T$ e $v_3 = (3, 6, 4)^T$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, e a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por:

$$T(x, y, z) = (x + 2y, 3x - z, 2y + z).$$

   a) Verifique se os vetores v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes. Justifique sua resposta.

   b) Determine o espaço gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3. Descreva-o como um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   c) Calcule a matriz associada à transformação linear T na base canônica de $\mathbb{R}^3$.

   d) Determine se T é injetora, sobrejetora ou bijetora. Justifique com base na matriz associada.

   e) Determine a imagem do vetor $w = (1, 0, 2)^T$ pela transformação linear T.

   Atenção: $(\alpha, \beta, \gamma)^T = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$.

4. (20 pts) Uma liga de metal L_1 contém 20% de ouro e 80% de prata, uma liga L_2 tem 65% de ouro e 35% de prata, e uma liga L_3 tem a mesma quantidade de ouro e prata. Escreva um sistema linear cuja solução dê a quantidade de gramas de cada liga necessárias para se formar 100 gramas de uma nova liga composta por 60 gramas de ouro e 40 gramas de prata. Este problema tem solução única? Determine a(s) solução(ões) do sistema linear.

5. (20 pts) Use o escalonamento para encontrar os valores de $t \in \mathbb{R}$, se houver, para os quais a matriz A é inversível e, após isso, para cada valor de $t \in \mathbb{R}$, determine a inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & 2 \\ 0 & 1 & t \\ 2 & 1 & t \end{bmatrix}$$