



Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Serra  
Rodovia ES-010 – Km 6,5 – Manguinhos – 29173-087 – Serra – ES

## Bacharelado em Sistemas de Informação

### Álgebra Linear - 05/02/2025 - SIMULADO PARA A PROVA 3

Professor: Fidelis Zanetti de Castro

Nome: \_\_\_\_\_

|          |    |    |    |    |    |       |
|----------|----|----|----|----|----|-------|
| Questão: | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | Total |
| Pontos:  | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100   |
| Nota:    |    |    |    |    |    |       |

1. (20 pts) Considere os vetores  $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  e  $\vec{w} = 9\vec{i} + 21\vec{j} + 24\vec{k}$ .

- Encontre um vetor  $\vec{z}$  que seja ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  ao mesmo tempo.
- Determine a área do paralelogramo de lados  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é uma base do  $\mathbb{R}^3$ ? Se é uma base, ela é positiva ou negativamente orientada?

**Observação:** Para determinar se uma base é positiva ou negativamente orientada, usamos o conceito de determinante. Considere uma base  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  no espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ . Formamos uma matriz  $A$  cujas colunas são os vetores da base:

$$A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n].$$

Se  $\det(A) > 0$ , a base  $B$  é **positivamente orientada**.

Se  $\det(A) < 0$ , a base  $B$  é **negativamente orientada**.

2. (20 pts) Seja  $ABC$  um triângulo tal que:

$$\|\vec{AB}\| = 2, \quad \|\vec{AC}\| = \sqrt{3}, \quad \text{e} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \sqrt{6}.$$

- Calcule a área do triângulo.
- Determine a medida, em radianos, do maior ângulo do triângulo  $ABC$ . Justifique sua resposta.

3. (20 pts) Dados os pontos  $A = (1, 0, 2)$ ,  $B = (2, 1, 3)$ ,  $C = (1, 2, 1)$  e o vetor  $\vec{v} = (0, 1, 2)$ :

- Determine a equação paramétrica da reta  $r$  que passa pelo ponto  $A$  e é paralela ao vetor  $\vec{v}$ .
- Determine a equação vetorial do plano  $\alpha$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  e é paralelo ao vetor  $\vec{v}$ .

- c) Determine a equação do plano  $\beta$  que passa pela origem, pelo ponto  $C$  e cujo vetor normal  $\vec{n}_\beta$  é perpendicular ao vetor  $\vec{n}_\alpha$  (o vetor normal ao plano  $\alpha$  da letra b). Observação: Dado um plano em  $\mathbb{R}^3$ , o vetor normal ao plano satisfaz a seguinte propriedade: para qualquer vetor  $\mathbf{v}$  pertencente ao plano, o produto escalar entre ele e  $\mathbf{v}$  é zero. Isso significa que o vetor normal é ortogonal a qualquer direção dentro do plano.
4. (20 pts) Mostre que o produto escalar de dois vetores é igual ao produto de suas normas vezes o cosseno do ângulo entre eles.
5. (20 pts) Seja  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $\vec{u} = (x, y, z)$  e  $\vec{v} = (a, b, c)$ . Use a relação  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  para mostrar que

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$