Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Serra
Av. dos Sabiás, 330 – Morada de Laranjeiras – 29166-630 – Serra – ES

Bacharelado em Sistemas de Informação
Álgebra Linear - 2024/2
Transformações Lineares - Lista 4

Nome: ____

Professor: Fidelis Zanetti de Castro

Data: 04/12/2024

Atenção: Nesta lista estou usando a notação (x_1, x_2) em vez de $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (2x + y, x - 3y)$.

   a) Verifique se T é linear, mostrando que satisfaz as propriedades de aditividade e homogeneidade.

   b) Encontre a matriz associada à transformação T em relação à base canônica.

   c) Determine $T(1, 2)$ e interprete geometricamente o resultado.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{bmatrix}$, com $t \in \mathbb{R}$.

   a) Encontre o determinante de A em função de t.

   b) Determine os valores de t para os quais A é inversível.

   c) Calcule a inversa de A para um valor específico de t em que A seja inversível.

3. Considere os vetores $v = (3, 2)$, $u_1 = (1, 1)$, e $u_2 = (2, -1)$.

   a) Verifique se v é uma combinação linear de u_1 e u_2.

   b) Caso v seja uma combinação linear, determine os escalares α_1 e α_2 tais que $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$.

   c) Conclua se o conjunto $\{v, u_1, u_2\}$ é linearmente independente.

4. Considere a matriz de rotação $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

   a) Determine $R(\pi/4)$, a matriz de rotação de $45°$.

   b) Aplique $R(\pi/4)$ ao vetor $(1, 0)$ e interprete o resultado geometricamente.

   c) Mostre que a matriz $R(\theta)$ preserva o comprimento dos vetores.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x - y, 2y + z, x + z)$.

a) Encontre a matriz associada à transformação T.

b) Determine o núcleo $\ker(T)$ de T.

c) Verifique se T é injetiva e/ou sobrejetiva.

6. Considere os vetores $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$.

    a) Determine se o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente.

    b) Caso o conjunto seja linearmente dependente, encontre uma relação de dependência linear entre os vetores.

    c) Determine uma base para o subespaço gerado pelos vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$.

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x + y, y - x)$.

    a) Encontre a matriz associada à transformação T.

    b) Determine se T é injetiva, utilizando o determinante da matriz associada.

    c) Verifique se T é sobrejetiva, justificando sua resposta.

8. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (3x - y, 2x + 4y)$.

    a) Verifique se T é bijetiva, calculando o determinante da matriz associada.

    b) Determine $T(1, -1)$ e $T(0, 2)$.

    c) Caso T seja bijetiva, encontre a matriz de T^{-1}.

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

    a) Verifique se A é inversível, utilizando o determinante.

    b) Caso A seja inversível, calcule sua inversa explicitamente.

    c) Determine se a transformação linear associada a A é injetiva e sobrejetiva.

10. Considere o cisalhamento vertical definido pela matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, onde $k \in \mathbb{R}$.

    a) Aplique S ao vetor $(2, 1)$ para $k = 3$.

    b) Mostre que S preserva a orientação dos vetores no plano.

    c) Interprete geometricamente o efeito do cisalhamento vertical no caso $k > 0$.

11. Seja a base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ para $\mathbb{R}^3$.

    a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base, verificando se os vetores são linearmente independentes.

    b) Encontre as coordenadas do vetor $v = (2, 3, 1)$ em relação à base $\mathcal{B}$.

    c) Construa a matriz de mudança de base da base canônica para a base $\mathcal{B}$.

12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x, y, z) = (x + y, y - z)$.

    a) Determine a matriz associada à transformação T.

    b) Encontre o núcleo $\ker(T)$.

    c) Determine se T é sobrejetiva, justificando sua resposta.

13. Considere os vetores $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, e $v_3 = (1, 1, 0)$.

    a) Verifique se o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente.
    b) Caso não seja, encontre uma relação de dependência linear entre os vetores.
    c) Determine uma base para o subespaço gerado por $\{v_1, v_2, v_3\}$.

14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$.

    a) Encontre a matriz associada à transformação T.
    b) Determine se T é bijetiva, calculando o determinante da matriz associada.
    c) Se T for bijetiva, encontre a matriz de T^{-1}.

15. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (2x - y, x + 3y)$.

    a) Mostre que T é injetiva, verificando o determinante da matriz associada.
    b) Aplique T aos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$, interpretando o resultado geometricamente.
    c) Determine o conjunto imagem de T.

16. Em um projeto de processamento de imagens, você está trabalhando com uma transformação linear T que rotaciona uma imagem em 45 graus e depois aplica um fator de escala de 1,5. Considere o ponto $P = (2, 3)$ em uma imagem.

    a) Implemente uma função em Python que aplique esta transformação linear T a um ponto qualquer.
    b) Aplique a transformação ao ponto P e visualize graficamente o ponto original e o transformado.
    c) Prove que T é uma transformação linear mostrando que $T(ax+by) = aT(x)+bT(y)$.

```python
def rotate_scale(point, angle_degrees, scale):
    angle_rad = np.radians(angle_degrees)
    rotation_matrix = np.array([
        [np.cos(angle_rad), -np.sin(angle_rad)],
        [np.sin(angle_rad), np.cos(angle_rad)]
    ])
    scaled_rotation = scale * rotation_matrix
    return np.dot(scaled_rotation, point)

```

17. Você está desenvolvendo um sistema de criptografia onde cada letra é representada por um vetor em $\mathbb{R}^2$. O sistema usa três vetores base: $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (1, 1)$. Uma mensagem secreta foi codificada como uma combinação linear desses vetores: $m = 2v_1 - 1,5v_2 + 0,5v_3$.

    a) Escreva um programa que determine os coeficientes da combinação linear que resulta no vetor $m = (1, 5; -1)$.
    b) Implemente uma função que verifica se um vetor qualquer pode ser escrito como combinação linear dos vetores base.
    c) Crie uma visualização que mostre os vetores base e o vetor m no plano cartesiano.

18. Em um simulador de física 2D, você precisa implementar uma transformação linear que represente a reflexão de um objeto em relação a uma reta que passa pela origem e forma um ângulo θ com o eixo x.

a) Implemente uma função que realize esta transformação para um ângulo θ qualquer.

b) Aplique a transformação a um triângulo com vértices nos pontos $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, 2)$.

c) Mostre que a composição de duas reflexões consecutivas com o mesmo ângulo resulta na transformação identidade.

19. Em um software de animação 2D, você precisa criar uma função de interpolação entre duas poses de um personagem. Cada pose é representada por um conjunto de pontos no plano.

$$\text{Pose inicial: } P_1 = [(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)]$$
$$\text{Pose final: } P_2 = [(1, 1), (3, 1), (3, 3), (1, 3)]$$

a) Implemente uma função que calcule poses intermediárias como combinações lineares das poses inicial e final.

b) Gere e visualize 5 poses intermediárias entre P_1 e P_2.

c) Prove que todas as poses intermediárias formam um conjunto convexo.

20. Em um projeto de processamento de sinais de áudio, você está trabalhando com uma transformação linear que aplica um filtro a um sinal discreto. O filtro é definido pela transformação $T(x[n]) = 0,5x[n] + 0,3x[n-1] + 0,2x[n-2]$

a) Implemente esta transformação linear em Python para um sinal de entrada arbitrário.

b) Aplique a transformação a um sinal senoidal e plote o sinal original e o transformado.

c) Demonstre que esta transformação é linear verificando as propriedades de aditividade e homogeneidade.

```python
t = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
signal = np.sin(t)

def apply_filter(signal):
    output = np.zeros_like(signal)
    for n in range(2, len(signal)):
        output[n] = 0.5*signal[n] + 0.3*signal[n-1] + 0.2*signal[n-2]
    return output

```