Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Serra
Rodovia ES-010 – Km 6,5 – Manguinhos – 29173-087 – Serra – ES

Bacharelado em Sistemas de Informação
Álgebra Linear - 05/02/2025 - SIMULADO PARA A PROVA 3

Professor: Fidelis Zanetti de Castro

Nome: ____

Questão:	1	2	3	4	5	Total
Pontos:	20	20	20	20	20	100
Nota:						

1. (20 pts) Considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{w} = 9\vec{i} + 21\vec{j} + 24\vec{k}$.

   a) Encontre um vetor $\vec{z}$ que seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao mesmo tempo.

   b) Determine a área do paralelogramo de lados $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   c) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$? Se é uma base, ela é positiva ou negativamente orientada?
   Observação: Para determinar se uma base é positiva ou negativamente orientada, usamos o conceito de determinante. Considere uma base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Formamos uma matriz A cujas colunas são os vetores da base:

   $$A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_n].$$

   Se $\det(A) > 0$, a base B é **positivamente orientada.**
   Se $\det(A) < 0$, a base B é **negativamente orientada.**

2. (20 pts) Seja ABC um triângulo tal que:

   $$\|\overrightarrow{AB}\| = 2, \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3}, \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{6}.$$

   a) Calcule a área do triângulo.

   b) Determine a medida, em radianos, do maior ângulo do triângulo ABC. Justifique sua resposta.

3. (20 pts) Dados os pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (2, 1, 3)$, $C = (1, 2, 1)$ e o vetor $\vec{v} = (0, 1, 2)$:

   a) Determine a equação paramétrica da reta r que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor $\vec{v}$.

   b) Determine a equação vetorial do plano α que passa pelos pontos A e B e é paralelo ao vetor $\vec{v}$.

c) Determine a equação do plano β que passa pela origem, pelo ponto C e cujo vetor normal $\vec{n}_\beta$ é perpendicular ao vetor $\vec{n}_\alpha$ (o vetor normal ao plano α da letra b). Observação: Dado um plano em $\mathbb{R}^3$, o vetor normal ao plano satisfaz a seguinte propriedade: para qualquer vetor $\mathbf{v}$ pertencente ao plano, o produto escalar entre ele e $\mathbf{v}$ é zero. Isso significa que o vetor normal é ortogonal a qualquer direção dentro do plano.

4. (20 pts) Mostre que o produto escalar de dois vetores é igual ao produto de suas normas vezes o cosseno do ângulo entre eles.

5. (20 pts) Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$. Use a relação $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ para mostrar que

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}.$$