



Dynamic Meteorology Review

Ryan

ryanfjordstar@outlook.com



创建于: 2025 年 12 月 6 日

更新于: 2025 年 12 月 24 日 (Version 1.1)

前言

本复习资料基于老师上课的进度整理，夹杂个人理解，用于复习本学期动力气象课程的知识点，不负责预测考试与否；若与老师的说法有出入，为了绩点着想，建议以老师的为主。

本资料无图，会省略部分推导，但是核心推导基本保留，图片请参照本人所写的 Holton 读书笔记 或自行查阅老师 PPT 影像资料，特此声明。

本资料完成仓促，如果有误、有疑问或者任何建议，请邮件联系。如果有本人微信/qq 也欢迎直接私信联系，本人也欢迎大家通过各种方式加我微信/qq（等一串小红点.jpg）。

PPT 鸣谢：23 级老资历李鸿涛和张耀太

模板鸣谢：Ethan

目录

| | |
|---|-----------|
| 1 Basic Equation for Atmospheric Motion | 5 |
| 1.1 Inertia Coordinate Case | 5 |
| 1.1.1 Equation of motions | 5 |
| 1.1.2 Mass Conservation | 5 |
| 1.1.3 Ideal Gas Law | 6 |
| 1.1.4 Internal Energy Equation | 6 |
| 1.1.5 Control Equations | 6 |
| 1.2 Rotating Frame | 6 |
| 1.3 Cartesian Rectangular Coordinates | 8 |
| 2 Approximation | 9 |
| 2.1 Scale Analysis | 9 |
| 2.2 Boussinesq Approximation | 10 |
| 2.2.1 Equation of motion | 11 |
| 2.2.2 Ideal Gas Law | 12 |
| 2.2.3 Equation of Continuity | 12 |
| 2.2.4 Internal Energy Equation | 12 |
| 3 Pressure Coordinate | 14 |
| 4 Taylor-Proudman Theorem | 17 |
| 5 Circulation and Vorticity | 18 |
| 5.1 Circulation | 18 |
| 5.2 Vorticity | 19 |
| 5.3 Potential Vorticity | 21 |
| 5.4 Helicity | 22 |
| 6 Geostrophic Adjustment | 24 |
| 6.1 Ageostrophic Wind in Natural Coordinate | 24 |
| 6.1.1 Ageostrophic Wind | 24 |
| 6.1.2 Natural coordinate | 25 |
| 6.2 Shallow Water Equation | 26 |
| 6.3 Geostrophic Adjustment Example | 28 |
| 6.4 Quasi-Geostrophic Theorem | 29 |
| 7 Waves | 31 |
| 7.1 Basics of Waves | 31 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 7.1.1 | Concepts | 31 |
| 7.1.2 | Linear Perturbation Theory and Standard Wave Solution | 32 |
| 7.2 | Inertial Wave | 33 |
| 7.3 | Sound Wave | 34 |
| 7.4 | Gravity Wave | 34 |
| 7.4.1 | External Gravity Wave | 35 |
| 7.4.2 | Inertia-External Gravity Wave | 35 |
| 7.4.3 | Internal Gravity Wave | 35 |
| 7.4.4 | Inertia-Internal Gravity Wave | 37 |
| 7.5 | Rossby Waves | 38 |
| 8 | Dynamic Linear Instability | 40 |
| 8.1 | Instability | 40 |
| 8.2 | Inertial Instability | 40 |
| 8.3 | Symmetric Instability | 41 |
| 8.4 | Barotropic Instability | 42 |
| 8.5 | Baroclinic Instability | 44 |
| 8.6 | Kelvin-Helmholtz Instability | 46 |
| 9 | Energy | 50 |
| 9.1 | Concepts | 50 |
| 9.2 | Total Mechanical Energy Equation | 52 |
| 9.2.1 | Total Kinetic Energy Equation | 52 |
| 9.2.2 | Total Potential Energy Equation | 52 |
| 9.2.3 | Total Mechanical Energy Equation | 53 |
| 9.3 | Energy of Zonal-Mean Flow and Eddies | 53 |
| 9.3.1 | Concepts | 53 |
| 9.3.2 | Zonal-Mean Kinetic Energy | 54 |
| 9.3.3 | Zonal-Mean Available Potential Energy | 56 |
| 9.4 | Energy Conversion | 57 |
| 10 | Boundary Layer Dynamics | 58 |
| 10.1 | Concepts | 58 |
| 10.2 | Equations for the Boundary Layer | 58 |
| 10.3 | Log-law in the surface layer | 59 |
| 10.4 | Ekman Spirals | 60 |
| 11 | For Final Exam | 63 |

1 Basic Equation for Atmospheric Motion

1.1 Inertia Coordinate Case

控制方程组是由牛顿第二定律（运动方程）、质量守恒（连续性方程）、理想气体状态方程和热力学第一定律（内能方程）组成的，前两者是纯动力学方程，连接热力学过程与动力学过程的桥梁是热力学参数密度 ρ 和压强 p ，具体来说是理想气体状态方程。下面一一解释：

1.1.1 Equation of motions

表达式：

$$\left(\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right)_a = \vec{g}_m - \alpha \nabla p_a + \vec{F}_a$$

其中，下标 a 表示惯性坐标系， $\vec{g}_m = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}$ 表示引力，在地球大气中我们通常取常数， $-\alpha \nabla p_a$ 是气压梯度力，梯度是从低指向高的，而真实情况下气体是被从高压推向低压的，所以有一个负号， \vec{F}_a 是分子粘性力，被定义为 $\gamma \nabla^2 \vec{V}_a + \frac{\gamma}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{V}_a)$ ，通常也有写为 $\nu \nabla^2 \vec{V}$ ，通常在大气中雷诺数比较大，以至于这一项可以忽略，但是在进行数值计算的时候，为了计算稳定性，我们必须加上粘性项。

整个方程的含义就是，惯性坐标系下，重力、气压梯度力和粘性力决定了流体的加速度。

需要注意的是，在流体中，物质导数 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)$ ，即是说，导数本身既包含在方程所描述位置上物理量的变化，也包括该物理量从周围流入的量。后者被称为平流项，我们有时也会把它拿出来表示。

通常，控制方程组的形式都是一边是物理量的时间导数（变化率），另一边是导致该物理量发生变化的“因”。

1.1.2 Mass Conservation

表达式：

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_a + \rho \nabla \cdot \vec{V}_a = 0$$

这么写是习惯使然，为了理解物理意义，我们移项：

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_a = -\rho \nabla \cdot \vec{V}_a$$

直观看其物理意义，左边就是局地密度变化，右边是局地密度变化的因，也就是密度乘上负散度。注意，正散度意味着向量场是向四面八方辐散的，这会导致密度损失，而左边为正的时候需要密度增加，所以右边需要加一个负号。

如果从物质导数中分离出平流项，由链式法则，我们有：

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_a + (\nabla \cdot \rho \vec{V}_a)_a = 0$$

1.1.3 Ideal Gas Law

表达式：

$$p = \rho RT$$

这就是理想气体状态方程

1.1.4 Internal Energy Equation

表达式：

$$C_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

这就是热力学第一定律。

1.1.5 Control Equations

所以控制方程组就是

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right)_a = \vec{g}_m - \alpha \nabla p_a + \vec{F}_a \\ \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_a + \rho \nabla \cdot \vec{V}_a = 0 \\ p = \rho RT \\ C_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dt} \end{cases}$$

1.2 Rotating Frame

我们主要考虑地球大气中的现象，因此需要在旋转坐标系下考虑。控制方程组中除了运动方程外，其余三个式子实际上并不受到坐标系变换影响。所以我们主要考虑运动方程。运动方程中，压力梯度力、重力和粘性力与坐标系无关。

在旋转坐标系中，我们有坐标变换：

$$\frac{d_a}{dt} = \frac{d}{dt} + \frac{d_e}{dt}$$

其中没有加下标意味着在旋转坐标系（或者说相对于旋转坐标系）中的运动情况，下标 e 意味着在惯性系视角下，旋转坐标系给我们描述对象带来的运动。事实上在旋转坐标系下，可以推导出

$$\frac{d_a}{dt} = \frac{d}{dt} + \vec{\Omega} \times$$

这里的 $\vec{\Omega}$ 指的是旋转坐标系的旋转矢量，沿旋转轴，指向按右手法则，大小为旋转角速度。

代入向量 \vec{r} 可得：

$$\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d \vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \vec{V}_a = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

物体在惯性坐标系下的加速度则可以表示为：

$$\begin{aligned} \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} &= \frac{d \vec{V}_a}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V}_a \\ &= \frac{d(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} + \vec{\Omega} \times (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d \vec{V}}{dt} + \vec{\Omega} \times \frac{d \vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d \vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \Omega^2 \vec{R} \end{aligned}$$

这里的 \vec{R} 是 \vec{r} 在 \vec{r} 所在纬圈平面上的投影，可以表示为 $\vec{R} = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{\Omega})}{\Omega^2} \vec{\Omega}$ 。

于是我们可以有

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \vec{V}_a}{dt} \right)_a &= \vec{g}_m - \alpha \nabla p_a + \vec{F}_a \\ &= \frac{d \vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \Omega^2 \vec{R} \\ \frac{d \vec{V}}{dt} &= \vec{g}_m - \alpha \nabla p_a + \vec{F}_a - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \Omega^2 \vec{R} \end{aligned}$$

可见在旋转坐标系下，会多出两项，分别是科氏力 $-2\vec{\Omega} \times \vec{V}$ 和惯性离心力 $\Omega^2 \vec{R}$ 。由于地球上自转角速度的数值比较小，所以通常可以忽略惯性离心力。

1.3 Cartesian Rectangular Coordinates

同样是旋转坐标系，但是我们还没有建立过标准正交基，因此描述运动十分不便。为此我们通常在切平面上描述大气，然后切于纬圈指向正东、切于经圈指向正北、垂直切平面指向上方的单位向量分别记为 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 。

这样的话速度就能表示为

$$\vec{V} := u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

求物质导数可得

$$\frac{d\vec{V}}{dt} := \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + \frac{dw}{dt}\vec{k} + u\frac{d\vec{i}}{dt} + v\frac{d\vec{j}}{dt} + w\frac{d\vec{k}}{dt}$$

经过推导（见Holton 动力气象引论学习笔记 · 第二章：基本守恒方程第三节（即 Holton 书上的 2.3））可得

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{i}}{dt} &= \frac{u}{r \cos \phi} (\sin \phi \vec{j} - \cos \phi \vec{k}) \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= -\frac{u \tan \phi}{r} \vec{i} - \frac{v}{r} \vec{k} \\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= \frac{u}{r} \vec{i} + \frac{v}{r} \vec{j}\end{aligned}$$

这里 r 为地球半径。由于地球半径极大，地表风速在数量级上不能及，且本课程聚焦于中低纬度，因此三项都可以近似忽略。近似通常是通过尺度分析进行的，详见下一章。

最终我们能够得到的表达式仍然是

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g} - \alpha \nabla p_a + \vec{F}_a - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}.$$

2 Approximation

2.1 Scale Analysis

量纲分析，或叫尺度分析，的目的是通过比较不同项的大小，进行近似，以及通过分离出无量纲数来作为近似的判据。量分为无单位且约为 1 的量，以及带单位的尺度量（通常为 10 的 n 次方）。

举个例子，水平方向的加速度（考虑上一章最后被忽略的单位向量导数，将其中带有 \vec{i} 的部分都加上）公式为：

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{r} \tan \phi + \frac{uw}{r} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega \sin \phi v - 2\Omega \cos \phi w + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

作分解 $x = L \cdot x'$, $y = L \cdot y'$, 依此类推，需要注意的是， $t = \frac{L}{U} \cdot t'$, $\delta p = \Delta P \cdot \delta p'$ 。然后将其代入可得：

$$\frac{U^2}{L} \frac{du'}{dt'} - \frac{U^2}{r} u' v' \tan \phi + \frac{WU}{r} u' w' = -\frac{\alpha \Delta P}{L} \frac{\delta p'}{\partial x'} + 2\Omega \sin \phi U v' - 2\Omega \cos \phi W w' + \nu \frac{U}{H^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}$$

前面的这些系数就代表这一项的尺度，对典型的中尺度天气系统，我们对这些系数有习惯上的估计（见 Holton 动力气象引论学习笔记 · 第二章：基本守恒方程 第四节（即 Holton 书上的 2.4））。

此部分有很多需要说明的地方。首先，这里我们定义 $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$ 。其次，量纲分析的过程中，对一切微分，我们实际上将其视作差分，如 du/dt 是 $\delta u/\delta t$ ，在这里不需要区分 δ, ∂, d 。考虑气压的时候， $\frac{\partial p}{\partial x}$ 应视作 $\frac{\delta p}{\delta x}$ ，因此我们需要估计的是 δp 的尺度。而其他出现微分的量，如距离、速度、时间，这些的变化尺度与其本身的尺度是一致的，因此不需要作区分，而水平方向气压的变化幅度通常不超过一百帕，在天气尺度甚至不超过五十百帕，相比气压本身一千百帕的尺度是产生了数量级差异的，因此需要单独考虑。在垂直方向上，气压的衰减则明显得多，比如从地表到对流层顶，气压从一千百帕下降到一两百百帕，衰减的数量级几乎要追上气压本身了，因此会用地表气压来 P_0 代替 ΔP 。（见 Holton 动力气象引论学习笔记 · 第二章：基本守恒方程 的 2.4.4（即 Holton 书上的 2.4.4））。

最后我们来说一下怎么使用 Scale Analysis 的结果。代入我们所关心尺度的天气系统的典型值（在本课程中是中纬天气尺度现象），然后只考虑其中尺度最大的项，如水平运动中，科氏力项 $-2\Omega v \sin \phi$ 的尺度 $f_0 U$ 和气压梯度力 $-\alpha \frac{\partial p}{\partial x}$ 的尺度 $\frac{\Delta P}{\rho L}$ 都达到了 10^{-3} 数量级，比其他项都大，因此这两项占主导。此时忽略其他项是合法的，如什么惯性离心项、曲率项（即含地球半径 r 的项）。此时我们得到的就是所谓的“地转平衡”。

但是在进行近似的时候有几点需要注意：

- 如果单一项比其他项都大，理论上我们似乎可以忽略其他项，但是这样会得到诸如 $\frac{du}{dt} = 0$ 这样的结果，其物理意义就是风场不再演化了，这个情形是平凡的，静止的，因此也不能解释大气中丰富的运动现象（注意，动力气象本身是服务于解释现象、理解物理过程、帮助天气预报的，因此我们的很多动机是以观测和预报为标准的！），所以我们需要至少两个项。
- 如果某个项虽然尺度小，但是阶数是最大的，或者有最高阶导数，则通常也需要保留（像是作业那种问 Final 的可以不保留，除非是边界层）。其原因十分复杂，知道就行。真要解释的话，从数学上说，方程中最高阶导数项的存在，决定了微分方程的阶数，微分方程的阶数又决定了需要多少个边界条件才能得到一个唯一的解；在物理上说，这些项往往描述了耗散和精细结构，也能避免达朗贝尔悖论；从数值计算上说，有粘性项的模型才有更好的计算稳定性……
- 含时间的项是特殊的，分析不含时间得到的运动方程叫“诊断（Diagnosis）”，我们无法得到其演化信息，就好像“地转平衡”永远只是“平衡”，这个情形是平凡的，静止的，因此也不能解释大气中丰富的运动现象。而如果我们需要分析演化，则需要增加含时项，在控制方程里就是时间导数，即使这一项不大（其实在中纬天气尺度系统中也挺大了）。此时我们叫这种过程“预测（Prognosis）”。对应的方程也称之为“诊断方程” / “预后方程”

尺度分析的另一作用是得到无量纲数。简单来说就是拿两个项的尺度作比，用来诊断项的相对大小。比如传说中的 Rossby 数就是惯性项和科氏力项的比值

$$Ro = \frac{U^2}{L}/f_0 U = \frac{U}{f_0 L}$$

如果 Ro 远小于 1（通常是大尺度），这意味着科氏力作用非常显著，地转效应必须被考虑，但是惯性项就可以忽略了，也就是“准地转平衡”；反之在小尺度我们可以不考虑科氏力，而主要关心科氏力。而对 Ro 约为 1 的情形则更加 tricky，通常是中尺度系统，此时科氏力和惯性项都要考虑。

2.2 Boussinesq Approximation

布辛涅斯克近似（Bolei 老师译为包辛尼斯克），是在热力学变量的变化相对背景场变化很小的情形下进行的近似。这些变量在垂直方向才有明显的变化，在水平方向上变化较小，因此我们将其分解为只关于高度的基态和关于三个方向以及时间的摄动项：

$$\begin{pmatrix} T \\ \rho \\ p \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_s(z) \\ \rho_s(z) \\ p_s(z) \\ \theta_s(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T'(x, y, z, t) \\ \rho'(x, y, z, t) \\ p'(x, y, z, t) \\ \theta'(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

注意，基态和完整的变量都符合运动方程，因此可以基于此对完整的方程进行化简。

2.2.1 Equation of motion

首先考虑运动方程，其中受影响的只有压力梯度力，下面进行分析：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_s + \rho'} \frac{\partial p_s + p'}{\partial x} \\ (\text{基态与 } x \text{ 无关}) &= -\frac{1}{\rho_s + \rho'} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ (\text{提出 } \rho_s) &= -\frac{1}{\rho_s} \frac{1}{1 + \frac{\rho'}{\rho_s}} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ (\text{对小量作一阶泰勒展开}) &\approx -\frac{1}{\rho_s} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_s}\right) \frac{\partial p'}{\partial x} \\ (\text{展开}) &= -\left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{\rho'}{\rho_s^2}\right) \frac{\partial p'}{\partial x} \\ (\text{展开}) &= -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\rho'}{\rho_s^2} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ (\text{忽略基态的-2 次方}) &\approx -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p'}{\partial x} \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p'}{\partial x} + fv \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p'}{\partial y} - fu \end{aligned}$$

对垂直方向也类似，不过由于垂直方向基态不能完全略去，会有所不同：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_s + \rho'} \frac{\partial p_s + p'}{\partial z} \\ (\text{代入 } dp_s = -\rho_s g dz) &= -\frac{1}{\rho_s + \rho'} \left(-\rho_s g + \frac{\partial p'}{\partial z}\right) \\ (\text{对 } \rho \text{ 如法炮制}) &\approx -\frac{1}{\rho_s} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_s}\right) \left(-\rho_s g + \frac{\partial p'}{\partial z}\right) \\ (\text{展开并忽略基态的-2 次方}) &\approx g - \frac{\rho'}{\rho_s} g - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p'}{\partial z} \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{\rho'}{\rho_s} g - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p'}{\partial z}$$

2.2.2 Ideal Gas Law

理想气体状态方程写为

$$(p_s + p') = (\rho_s + \rho')R(T_s + T')$$

$$(\text{取对数}) \quad \ln(p_s + p') = \ln(\rho_s + \rho') + \ln R + \ln(T_s + T')$$

$$(\text{提取基态}) \quad \ln p_s(1 + \frac{p'}{p_s}) = \ln \rho_s(1 + \frac{\rho'}{\rho_s}) + \ln R + \ln T_s(1 + \frac{T'}{T_s})$$

$$(\text{一阶泰勒展开}) \quad \ln p_s + \frac{p'}{p_s} = \ln \rho_s + \frac{\rho'}{\rho_s} + \ln R + \ln T_s + \frac{T'}{T_s}$$

$$(\text{基态也满足方程, 故消去}) \quad \frac{p'}{p_s} = \frac{\rho'}{\rho_s} + \frac{T'}{T_s}$$

2.2.3 Equation of Continuity

连续性方程写为

$$\frac{1}{\rho_s + \rho'} \frac{d(\rho_s + \rho')}{dt} = -\nabla \cdot \vec{V}$$

$$(\text{对 } \rho_s \text{ 如法炮制}) \quad \frac{1}{\rho_s}(1 - \frac{\rho'}{\rho_s}) \frac{d(\rho_s + \rho')}{dt} \approx -\nabla \cdot \vec{V}$$

$$(\text{基态只关于 } z, \text{ 所以 } \frac{d\rho_s}{dt} \text{ 只剩 } w \frac{\partial \rho_s}{\partial z}) \quad \frac{1}{\rho_s}(1 - \frac{\rho'}{\rho_s})(\frac{dp'}{dt} + w \frac{\partial \rho_s}{\partial z}) = -\nabla \cdot \vec{V}$$

$$(\text{展开并忽略基态的-2 次方}) \quad \frac{w}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial z} + \frac{1}{\rho_s} \frac{dp'}{dt} + \nabla \cdot \vec{V} \approx 0$$

2.2.4 Internal Energy Equation

此处需要使用位温的概念:

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

$$\ln \theta = \ln T + \frac{R}{c_p} \ln \left(\frac{1}{p} \right)$$

$$\theta_s = T_s$$

内能方程展开:

$$\begin{aligned}
 & (\text{方程两边除以 } T) \quad C_v \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{p}{T} \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} \\
 & (\rho \text{ 代入理想气体状态方程}) \quad C_v \frac{d \ln T}{dt} - R \frac{d \ln(\frac{p}{T})}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} \\
 & (\text{利用 } C_v + R = C_p) \quad C_p \frac{d \ln T}{dt} - R \frac{d \ln p}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} \\
 & (\text{两边除以 } C_p) \quad \frac{d}{dt} [\ln T - \frac{R}{C_p} \ln p] = \frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{TC_p} \frac{dQ}{dt} \\
 & (\text{展开 } \theta \text{ 并化简}) \quad \frac{d}{dt} \ln \theta_s (1 + \frac{\theta'}{\theta_s}) \approx w \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} + \frac{d}{dt} \frac{\theta'}{\theta_s} = \frac{1}{TC_p} \frac{dQ}{dt}
 \end{aligned}$$

然后使用 Brunt-Vaisala 频率的定义 $N^2 = g \frac{\partial \ln \theta_s}{\partial z}$, 则有

$$\frac{d}{dt} \frac{\theta'}{\theta_s} + \frac{N^2}{g} w = \frac{1}{TC_p} \frac{dQ}{dt}$$

3 Pressure Coordinate

等压坐标系的思想很简单，就是我们通常很难直接测高（地势），但是气压好测，并且气压随高度是单调的，因此自然想到用气压作为高度坐标系。由链式法则自然有（请务必记住下标！这个式子很重要）：

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_p = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_z + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p$$

这里的 x 换成 y, t 都是一样的， F 表示可以换成任意物理量。在垂直方向我们主要考虑的是垂直速度，等压坐标系下的垂直速度用 ω 来跟 w 区分，自然有

$$\omega = \frac{dp}{dt} = \frac{-\rho g dz}{dt} = -\rho g w.$$

使用上述关系还能够得到

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_p = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_z + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p \\ &= \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_z - \rho g \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p \end{aligned}$$

这里等于 0 是很显然的，因为这项就是在等 p 的情况下取的，自然无论 x 怎么变都是 0。所以我们有

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_z = \rho g \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p$$

所以压力梯度从等位势坐标系（即 z 坐标）转换成气压坐标系的时候有

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_z = -\frac{\partial g z}{\partial x} \Big|_p = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_p$$

这里的 $\Phi = gz$ 就是地势。这个推导是很容易出现问题的地方，一种常见的错误是认为

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho g \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned}$$

多了一个负号，这就是混淆了坐标平面导致的，左边是在 $dz=0$ 的情况下给出的，右边是在 $dp=0$ 的情况下给出的，二者不可能不通过链式法则就直接转换。事实上，如果想从 z 坐标系直接推导，应该是

$$\begin{aligned}
 dz &= \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p dx + \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_x dp \\
 (\text{欲求 } \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_z, \text{ 则取 } z=0) \quad - \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p dx &= \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_x dp \\
 \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_z &= \frac{dp}{dx} \\
 &= - \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p}{\frac{\partial z}{\partial p} \Big|_x} \\
 &= \rho g \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p \\
 &= \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_p
 \end{aligned}$$

总之，对水平方向的运动方程，我们只需要用 Φ 代替 αp 就行，从物理上这也是很好理解的，等压面上地势高与等位势面是气压高是等价的。

在等压系下物质导数如何变化？

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \Big|_z &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x,y,z} + u \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{y,z,t} + v \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{x,z,t} + w \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{x,y,z} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x,y,p} - \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x,y,p} \frac{\partial}{\partial z} \right) + u \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{y,p,t} - \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y,p,t} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
 &\quad + v \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_{x,p,t} - \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x,p,t} \frac{\partial}{\partial z} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{x,y,t} \\
 (\text{把含有 } \frac{\partial}{\partial z} \text{ 的分离出来}) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p + u \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + v \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right) - \left(\frac{\partial z}{\partial t} \Big|_p + u \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p + v \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_p - w \right) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{(x,y,t)} \\
 (\text{利用 } w = \frac{dz}{dt} \text{ 展开}) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p + u \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + v \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right) + \omega \frac{\partial z}{\partial p} \Big|_{(x,y,t)} \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{(x,y,t)} \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_p - \omega \frac{\partial}{\partial p}
 \end{aligned}$$

最后一步是考虑定义

$$\frac{d}{dt} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_p + u \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + v \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p + \omega \frac{\partial}{\partial p} \Big|_p$$

总之这部分推导很抽象，但是主要是得到这个结论。

连续性方程变化则更大，但是方法是一致的，使用本节开头标红的通式代换就行。（公式推导见老师 PPT，虽然并不公布；直观推导见 Holton 动力气象引论学习笔记 · 第三章：基本方程组的几个基础应用）

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

从这里则可看出等压坐标系的好处，我们压根不需要考虑密度如何变化。

对热力方程的处理也是相似的：

$$\begin{aligned} C_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} \Big|_z &= C_v \frac{dT}{dt} + \frac{dp\alpha}{dt} \Big|_z - \alpha \frac{dp}{dt} \Big|_z \\ (\text{理想气体状态方程}) &= C_v \frac{dT}{dt} + R \frac{dT}{dt} \Big|_z - \alpha \frac{dp}{dt} \Big|_z \\ (\text{根据定义合并}) &= C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \omega \end{aligned}$$

最终得到等压坐标系下的控制方程组：

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu \\ (\text{静力平衡换个形式}) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} &= -\frac{RT}{p} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0 \\ C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \omega &= \frac{dQ}{dt} \end{aligned}$$

4 Taylor-Proudman Theorem

Taylor-Proudman 定理本不在动力气象的授课范围内，但是由于流体力学并未涉及此定理，所以作为额外内容加入本课程。

这个定理说的是，对于不可压缩、Rossby 数极低的地球流体，其流动会出现准二维现象，从公式上看，在大尺度流体运动中，由于低 Rossby 数，流动会遵循地转平衡

$$2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

由于有不可压缩假设， ρ 为常数。然后对运动方程两边求一个旋度即有

$$\begin{aligned} \nabla \times (2\vec{\Omega} \times \vec{V}) &= \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p\right) \\ \nabla \times (2\vec{\Omega} \times \vec{V}) &= 0 \\ \vec{\Omega} \nabla \cdot \vec{V} - \vec{V} \nabla \cdot \vec{\Omega} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \cdot \nabla V &= 0 \\ \vec{\Omega} \cdot \nabla V &= 0 (\nabla \cdot \vec{\Omega} = \nabla \vec{\Omega} = \nabla \cdot \vec{V} = 0) \\ \Omega \frac{\partial}{\partial z} (u, v, w) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (u, v, w) &= 0 \end{aligned}$$

其中 $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ 是密度恒定情况下的连续性方程/质量守恒。（注：**经验上，多个向量之间运算，打了点“.”的先运算**）最终的结论就是，速度不会有垂直方向的差异。经典实验就是在旋转水槽中放一个圆柱，然后在其后方滴入墨水，给墨水以速度去追圆柱，则不管墨水在什么高度，都会绕着圆柱走，而不会有墨水从圆柱上方流过。

5 Circulation and Vorticity

5.1 Circulation

环流之于流体或者连续介质，相当于角动量之于刚体。环流的定义是速度场中某一闭合曲线上的线积分：

$$C = \oint \vec{V} d\vec{l}$$

一个自然的想法是分析环流如何演化，所以对时间求导

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= \oint \frac{d}{dt} \vec{V} d\vec{l} \\ \frac{dC}{dt} &= \oint -\alpha \nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{F}_r d\vec{l} \\ \frac{dC}{dt} &= \oint -\alpha \nabla p d\vec{l} - \oint 2\vec{\Omega} \times \vec{V} d\vec{l} + \oint \vec{F}_r d\vec{l}\end{aligned}$$

其中第一项，如果在环流路径上等密度线和等压线都平行，则积分一定为 0，这种情况就叫正压（读者可以自己画一个剖面验证一下）；反之如果不为 0，则称之为斜压。所以此项被称为斜压项（又称力管项，solenoidal，这是因为如果画出等密度线和等压线，如果其不平行，则会交出一个个平行四边形，延伸出去呈管状，这被称为力管）。

其中第二项可以利用公式 $(B \times C) \cdot A = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$ 化为

$$\begin{aligned}\oint 2\vec{\Omega} \times \vec{V} d\vec{l} &= 2\vec{\Omega} \oint \vec{V} \times d\vec{l} \\ &= 2\vec{\Omega} \oint \vec{n} V_r dl \\ &= 2\vec{\Omega} \oint \vec{n} V_r dt \frac{dl}{dt} \\ &= 2\vec{\Omega} \vec{n} \frac{dA}{dt}\end{aligned}$$

这里的 \vec{n} 是 $\vec{V} \times d\vec{l}$ 的方向， V_r 是 \vec{V} 在垂直于 $d\vec{l}$ 方向的投影， $\oint (V_r dt) dl$ 则可以理解为环状区域单位时间扩大的面积，所以记为 $dA(\text{Area})$ 。 $\vec{\Omega} \vec{n}$ 即为环流投影到赤道所在平面上缩小的比例。事实上，我们有定义 $C_e = 2\vec{\Omega} \vec{n} A = 2\Omega A \sin \phi$ 为地转环流 (ϕ 是环流所在纬度)，也就是环流投影到赤道所在平面上的面积大小，这是由地球自转导致的，所以科氏力项所指的就是地转环流大小的变化。

最后一项的处理比较 tricky，老师的处理是设 $\vec{F} = -k\vec{V}$ ，然后这一项就变成 $-kC$ 了。个人认为这种处理能应对的情况有限，并不是很好的处理方式（因为通常而言摩擦项至

少是个拉普拉斯)。

这时候就有读者要问了，主播主播，你重力去哪了？对此有两种解释，一种是将重力写为 $\vec{g} = -\nabla\Phi$ ，于是环状积分内有 $\nabla\Phi d\vec{l} = d\Phi$ ，保守场积一圈当然不变，所以为 0；另一种解释就是直接把 \vec{g} 写出来，然后积一圈为 0，因为重力场是保守场（从这一点上看两种解释本质是一样的，只是写起来比较方便）。反之重力就没了，也就是重力不会对环流的变化起到任何作用。

总之这几项算是解释完了，我们的结论就是，在正压、无摩擦、不考虑旋转的情况下，环流的物质导数为 0，从而环流为常数，这就是所谓的 Kelvin 环流定理。这是老师给的版本，事实上我们将地转环流从等式的右边加到左边，和环流加起来，得到了就是惯性系下看到的环流，称之为绝对环流，而原来我们所讨论的环流其实是相对环流。所以 Kelvin 环流定理还有一个版本就是在正压、无摩擦的情况下，绝对环流守恒，即 $\frac{D}{Dt}C_a = \frac{D}{Dt}(C + C_e) = 0$ 。

5.2 Vorticity

涡度，即为速度场的旋度，记为 $\omega = \nabla \times \vec{V}$ ，展开即为

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

量纲分析结果显示，涡度的两个水平分量其实比垂直分量大了不少，但是由于垂直分量指示的是水平面上的旋转，我们更为关心，所以当我们往往也将垂直涡度简称为涡度，垂直涡度也记为 ζ 。

那么为什么我们要把环流和涡度放一起呢，这是因为通过斯托克斯公式，我们可以得到

$$C = \oint \vec{V} d\vec{l} = \iint_{\sigma} (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma$$

所以取个极限就能够得到涡度 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{C}{\sigma} = (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} = \vec{\omega} \cdot \vec{n}$ 。

眼尖的读者立刻就会发现这里有个致命漏洞，涡度是向量，你这求出来的是标量这是怎么一回事？问题的关键就在 \vec{n} 。虽然速度场是固定的，但是环流所围绕成的面指向哪里并不确定，我们求极限得出的其实是涡度在环流法向上的分量大小。当环流法向本身垂直于地面的时候，我们就有 $\zeta = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{C}{\sigma}$ 。

下面考虑环流如何演化（大家已经可以察觉到动力气象的一个研究范式了，对一个新定义的量，我们通常对其求时间导数然后套已有的控制方程来了解这个量）。

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \frac{d\nabla \times \vec{V}}{dt} \\
 &= \nabla \times \frac{d\vec{V}}{dt} \\
 &= \nabla \times (\vec{g}_m - \alpha \nabla p_a + \vec{F}_a - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}) \\
 &= -(\nabla \times \alpha \nabla p) + (\nabla \times \vec{F}) - 2\nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{V}) \\
 (\text{叉乘, 神奇吧}) &= -\nabla \alpha \times \nabla p + \nabla \times \vec{F} - 2\vec{\Omega}(\nabla \cdot \vec{V}) + (2\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{V} \\
 &= \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) \\
 &= \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times \left(\nabla \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{w} \right) \\
 (\text{叉乘, 神奇吧}) &= \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{V}) - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\omega} \\
 (\text{相对涡度 } \vec{\omega} + \text{ 地转涡度 } 2\vec{\Omega} = \vec{\omega}_a) \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} &= -\nabla \alpha \times \nabla p + \nabla \times \vec{F} - \vec{\omega}_a(\nabla \cdot \vec{V}) + (\vec{\omega}_a \cdot \nabla)\vec{V} - (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\omega}
 \end{aligned}$$

最后一式右起，第一项就是斜压/力管项 $-\nabla \alpha \times \nabla p$ ，与前面的形式不同，但是其实这个表达式才是斜压作为物理量真正的表达式，斜压是通过斜压能（即由于压力和密度不匹配导致气团拥有的位能）释放来使大气获得环流或者涡度的，温带气旋是就是斜压能释放产生的涡旋，这里可以看出不同方向的斜压性会导致气团有不同方向的涡度，因此斜压其实也能诱发反气旋；

第二项是摩擦项 $\nabla \times \vec{F}$ ，这个很好理解，摩擦耗散会通过影响速度来影响涡度；

第三项是散度项 $-\vec{\omega}_a(\nabla \cdot \vec{V})$ ，散度的影响跟前面是一样的，空气向四面八方流动会稀释本地的涡度，反之则会增强，这也可以用角动量来理解，负散度就相当于将转动惯量减小（通过缩短力臂），从而加快旋转速度，即增大涡度；

第四项是所谓的扭转项 $(\vec{\omega}_a \cdot \nabla)\vec{V}$ ，风切会将某一方向的涡度转到另一方向去，具体的可以展开向量来看，这里不赘述；

最后一项是平流项 $-(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\omega}$ ，效果是通过平流将周边的涡度带到本地，可以移到式子左边构成一个物质导数。

5.3 Potential Vorticity

位涡守恒之于流体相当于角动量守恒之于刚体，并且适用范围拓展了。在动力气象中，有两种常用的位涡，分别是 Rossby 位涡（老师语，目的是与后续推出的另一个守恒量区分）/浅水位涡 (Holton 书上语) $(\zeta + f)/H$ 和 Ertel 位涡 $(\zeta + f)\alpha \frac{\partial \theta}{\partial z}$ ，二者分别是对气柱从体积视角和质量视角分析得到的守恒量。（题外话，力学本身可以成为纯粹的几何，几何是寻找不变量的，而流体力学本身也是力学的一部分，所以自然贯彻了这一思想（理论力学（变分法）研究大气运动可以参考黄思训 & 伍荣生《大气科学中的数学物理问题》），位涡就是一种非常好用的不变量——当然不变量的变化本身意味着系统状态的变化，也很值得研究。）

在正压无摩擦大气中，由 Kelvin 环流定理可知绝对环流守恒，所以对给定体积 V 的气柱，如果其面积为 A ，高为 H ，内部垂直涡度恒定，则有：

$$\frac{dC_a}{dt} = 0 = \frac{d \iint_A \zeta_a d\sigma}{dt} = \frac{d\zeta_a A}{dt} = \frac{d(V\zeta_a/H)}{dt} = \frac{d(\zeta_a/H)}{dt}$$

所以我们定义 $\frac{\zeta+f}{H}$ 为浅水位涡，浅水位涡在正压无摩擦大气中守恒。

浅水位涡守恒的一大应用就是解决均匀气流过山形成波动的问题，具体大家可以自己思考一下均匀水平（因而无旋）气流在经过山的时候，其气柱高度、相对涡度、行星涡度会如何变化；波动到了平地上， H 不变，情形则跟 Rossby 波很像了。

如果考虑气柱的质量不变，气柱高度用等压坐标系表示为 $-\delta p$ ，在大尺度下也可以用位温坐标系，将其高度记为 $\delta\theta$ ，总之其质量为 $M = A\delta H\rho = A\delta z\rho = A\rho \frac{\partial z}{\partial \theta} \delta\theta = -A\delta p/g = -A\frac{\partial p}{\partial \theta} \delta\theta/g$ 。接下来如法炮制：

$$\frac{dC_a}{dt} = 0 = \frac{d\zeta_a A}{dt} = \frac{d}{dt} \zeta_a \left(\frac{M}{\frac{\partial z}{\partial \theta} \rho \delta\theta} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\zeta_a}{\rho \delta\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

此时再考虑一下，如果气柱上下的等熵面（即等位温面）不动，或者说气柱本身就是被两个等熵面夹出来的，此时 $\delta\theta$ 也可以约去了，此时就能够得到守恒量

$$\frac{\zeta_a}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} = const.$$

这就是 Ertel 位涡。这时候又有读者要问了，主播主播，那你为什么还要提等压坐标系的事情？答案是 Ertel 位涡可以表示成等压坐标系的形式，并且其等压形式也很常用：

$$-g\zeta_a \frac{\partial \theta}{\partial p} = const.$$

而如果想从质量守恒开始推，则会得到另一个守恒量 $-\frac{g\zeta_a}{\delta p}$ ，有些人就会想，唉那我让 δp 恒定不就好了，然后就有绝对涡度守恒了！但是这本质上和浅水位涡没什么区别；因此必须进一步将其表示为等熵面的形式，这才是 Ertel 位涡。

所以，同样是位涡，浅水位涡守恒只要求正压无摩擦，而 Ertel 位涡还要求气压运动过程中绝热（这也是为什么我们选取等位温面）。

Ertel 位涡还能够进一步写为：

$$\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \nabla \theta$$

其守恒条件也是正压绝热无摩擦，可以通过对其求导然后套热力学方程凑出这一形式。如果去掉绝热无摩擦条件，则有

$$(Ertel 位涡公式) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \nabla \theta \right) = \alpha \nabla \times \vec{F}_r \cdot \nabla \theta + \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \nabla \frac{\theta dQ/dt}{C_p T}$$

Ertel 位涡守恒的应用则更广，这里的例子是偶极子。在对流单体中，中部受到的加热最强（下方降水吸热，上方云吸收的热辐射又没有中下部多），因此往上走，加热强度减弱，往下走，加热强度也减弱。因此在上部，加热的梯度是负的，在下部则是正的，由 Ertel 位涡公式（也就是看涡度方向和加热强度的梯度方向是否匹配，一般的对流单体都是气旋性的，所以默认绝对涡度是正的），上部位涡减小，下部位涡增大。当然这个例子中我们只需要了解这一事实就行，个人估计考试不会涉及这个。

5.4 Helicity

螺旋度我印象里不用考，所以我的介绍也简单一点。简单来说，螺旋度的定义就是涡度乘速度， $h = \vec{\omega} \cdot \vec{V}$ 。螺旋度衡量的是涡管切割和打结的程度，越高越不容易散。螺旋度通常用于小尺度运动。

定义摄动项 $\pi = p'/p_s$, $b = g\rho'/\rho_s$, 则小尺度运动下的运动方程和涡度方程为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \nabla \pi - b \vec{k} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{V} \times \vec{\omega}) - \nabla \cdot b \times \vec{k} &= 0 \end{aligned}$$

对运动方程乘涡度，对涡度方程乘速度，然后加起来凑螺旋度，就能得到螺旋度方程：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} h) + \nabla \cdot [\vec{\omega}(\pi - \frac{V^2}{2})] = \zeta b + \vec{k} \cdot (\vec{V} \times \nabla b)$$

这说明什么呢，对固定体积，如果没有入流（即没有速度穿过边界），则螺旋度仅由浮力调控。由此可以得知为什么在小尺度天气现象中，对流往往是决定性的。螺旋度的典型运用对象就是龙卷，而龙卷基本都发生在对流或强对流条件下，就可以这么解释。

6 Geostrophic Adjustment

我们已经知道，在大尺度情况下，大气通常满足准地转条件，即风场和气压场耦合，有

$$f\vec{k} \times \vec{V}_g = -\alpha \nabla p$$

满足这个式子的风叫地转风，用下标 g(geostrophic) 表示。或者写为

$$\vec{V}_g = -\frac{\alpha}{f}\vec{k} \times \nabla p$$

进一步有

$$\nabla \vec{V}_g = -\frac{\alpha}{f} \nabla \cdot (\vec{k} \times \nabla p) = -\frac{\alpha}{f} [\nabla p \cdot (\nabla \times \vec{k}) - \vec{k} \cdot (\nabla \times (\nabla p))] = 0$$

然而真实世界的风场往往会因为各种各样的扰动偏离这一地转平衡，这时候就需要考虑惯性项，也就是考虑真实风场和压力场如何通过相互调整来再次实现地转平衡。这一过程就叫地转适应。本章聚焦于地转适应。

6.1 Ageostrophic Wind in Natural Coordinate

6.1.1 Ageostrophic Wind

我们将真是风场拆分成地转的部分和非地转的部分，也就是

$$\vec{V}_h = \vec{V}_g + \vec{V}_a$$

这里下标 a 表示非地转风 (ageostrophic)，下标 h 表示水平方向 (horizontal, 不考虑垂直分量导数)。然后我们再代入运动方程，这里假设气压场本身不变，所以地转风对时间求导为 0：

$$\frac{d\vec{V}_h}{dt} = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = -f\vec{k} \times (\vec{V}_a + \vec{V}_g) - \alpha \nabla p = -f\vec{k} \times \vec{V}_a$$

也可以写为

$$\vec{V}_a = \frac{1}{f}\vec{k} \times \frac{d\vec{V}_h}{dt}$$

简单做个量纲分析可以发现非地转风的尺度大概就是 RoU ，可见确实在大尺度下 (Ro 远小于 1) 非地转风可以忽略。

然后考虑连续性方程，这里散度算符的角标 h 表示只有水平方向导数：

$$\nabla_h \cdot \vec{V}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} = \nabla_h \cdot \vec{V}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

所以地转平衡状态下是没有垂直运动的，而非地转风的符合辐散则会诱发垂直运动。

6.1.2 Natural coordinate

在拉格朗日方法下，我们研究的是运动的流体微元，此时一种很方便的坐标表示方式是把我们的视角切到微元上，以运动的前方和左手边为基向量。这时候，前方这个向量我们记为 $\vec{\tau}$ ，与流线相切，左手边这个向量我们记为 \vec{n} ，指向曲率圆心，垂直方向 \vec{k} 仍是上方。然后记流线上的距离微元为 δs 。

此时有

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{V\vec{\tau}}{dt} \\ &= \vec{\tau}\frac{dV}{dt} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt} \\ &= \vec{\tau}\frac{dV}{dt} + V\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \vec{\tau}\frac{dV}{dt} + V\frac{\vec{n}}{R}V \\ &= \vec{\tau}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} + 0 \cdot \frac{\partial V}{\partial n} + w\frac{\partial V}{\partial z}\right) + V^2 K \vec{n} \\ \vec{V}_a &= \frac{1}{f}\vec{k} \times \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V\frac{\partial \vec{V}}{\partial s}\vec{\tau} + V^2 K \vec{n} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

这里的 K 为曲率。然后我们开始分析自然坐标系下非地转风的每一项。我们先假设 \vec{V} 约为地转风，看看准地转状态下有什么过程会导致非地转风。

第一项，代入 $\vec{V}_g = -\frac{\alpha}{f}\vec{k} \times \nabla p$ ，可以计算出约为 $-\frac{\alpha}{f^2}\nabla \frac{\partial p}{\partial t}$ ，可见气压场如果随时间变化，则会产生非地转风，这一分量我们称为变压风，该项为正，说明局部气压增大，散度向外，则非地转风倾向于增强地转风以达到新的平衡，vice versa；

第二项则说明如果在气团运动路径上地转风有变化（即局部气压梯度有变化），则会产生非地转风，正方向（即地转风变大，或者水平方向上等压线变密）指向左手边，典型的例子就是急流核上的次级环流（本学期的天气学原理对其有更详细的讨论）。

第三项与曲率和速度有关，正曲率方向指向后方，即如果是气旋性环流，非地转风会减弱地转风，反之则会增强地转风。这是因为当曲率足够大的时候（也就是曲率半径比较小的时候），离心力会比较强，我们调整不了气压场，但是可以通过调整风速来调

整科氏力，所以就会出现非地转风帮助风场从地转平衡调整到新的平衡——梯度风平衡。

最后一项是垂直速度乘地转风在垂直方向的梯度（即热成风）。代入热成风平衡 $-\frac{g}{f^2 T} w \nabla T$ ，得到的结果是，这说明如果有下沉运动，则非地转风指向热成风方向，反之指向热成风反向。这是由于垂直运动把高底层不同的速度平流了过来，使得实际风变大/变小，需要产生非地转风来加速地转风使其适应新的平衡。

总之，这说明即使是最准地转的状态，只要扰动（气压变化、曲率、垂直运动等），就会产生非地转风。非地转风存在的意义就是修正这些“不正确”，来使风场适应这些扰动，以实现新的平衡。

6.2 Shallow Water Equation

为了简化分析，一种常用的简化模型是浅水模型。浅水模型就是把流体简化为一缸水，底是平的，上方是自由面，则对水平面上某一处，把静力平衡从水底 ($p = p_0$) 积分到水面 ($p = 0$)，得到 $p = \rho_0 g h$ ，就能用水面高度来表示某处的气压。由此可见，浅水模型是正压模型，流体密度恒定，并且不考虑垂直运动，或者说垂直运动完全由 h 表征，完全和压力耦合在一起。

代入运动方程，则简化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -g \frac{\partial h}{\partial y}\end{aligned}$$

然后考虑质量守恒，在一个包裹整层流体的柱体中，考虑所有流入与流出的质量，显然由于密度一定，质量的增加和减少只与自由面上的上升与下降有关；而质量变化显然是来自于侧面：

$$\begin{aligned}
 & (\text{A 为截面}) F_m = \iint_A \rho_0 \frac{\partial h}{\partial t} dA \\
 & (\text{S 为整个侧面}) F_m = - \iint_S \rho_0 \vec{V} \cdot d\vec{S} \\
 & (\text{环状区域积分乘高}) = - \oint_C \rho_0 h \vec{V} \cdot \vec{n} dl \\
 & (\text{格林公式}) = - \iint_A \nabla \cdot (\rho_0 h \vec{V}) dA \\
 & \iint_A \rho_0 \frac{\partial h}{\partial t} dA = - \iint_A \nabla \cdot (\rho_0 h \vec{V}) dA \\
 & \iint_A \rho_0 \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 h \vec{V}) dA = 0 \text{ (移项)} \\
 & \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \vec{V}) = 0 \text{ (密度恒定, 积分对任意面积成立)}
 \end{aligned}$$

现在已经有三个方程和三个未知数 (u, v, h) 了, 在不考虑热力过程 (温度) 时, 压力含在 h 里, 密度恒定, 这就是浅水方程的好处——简单, 但是包含了大部分我们所关心的东西, 什么重力外波、涡旋等等, 都能体现。

下面我们思考一下如何运用浅水模型。一个关键的简化是, 由于我们只关心 h 的变化, 并且当我们想将其应用到大气的时候 h 和 p 正相关, 而 p 的变化相对于 p 的值是很小的, 即可以假设水足够深, 记为 H , 然后设其变化为 η , 则方程可以简化为:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

对第一个式子求 x 偏导, 对第二个式子求 y 偏导, 然后将其加起来 (利用科氏力项凑涡度), 代入连续性方程, 就能得到

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gH \nabla^2 \eta + fH\zeta = 0$$

这就是第一步化简。

如果对第一个式子求 y 偏导, 对第二个式子求 x 偏导, 然后用第二个式子减去第一个式子 (利用惯性项凑涡度), 再代入连续性方程就能得到

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{f}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{H} \right) = 0$$

这说明 $\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{H}$ 守恒, 在这里我们将其称为浅水涡度。

然后我们发现，由于浅水涡度守恒，我们可以设 $\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{H} = Q_0$ ，于是将 ζ 用 η 表示，代回上一步得到的二阶微分方程就能得到：

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gH\nabla^2\eta + f^2\eta = -f^2HQ_0$$

于是浅水模型被完全线性化了，通过设置初边值，我们就能够得到高度场的演化。

6.3 Geostrophic Adjustment Example

得到了浅水模型之后我们来看一个地转适应的例子。

初值： $u=v=0$, $\eta = -\eta_0 sgn(x)$, 无边值。也就是我们创造了一个一边高一边低的台阶形初值，代入线性化浅水模型：

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gH\nabla^2\eta + f^2\eta = -f^2\eta_0 sgn(x)$$

这是线性非齐次微分方程，解为齐次通解 η_d 加上特解 η_s ，所以我们先考虑

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gH\nabla^2\eta + f^2\eta = 0$$

这是一个波函数，求解方法有很多，比如换元法，比如分离变量法，这里不详细讨论，作为例子，我们假设直接得到了解的形式

$$\eta_d = A \exp[i(kx + ly - \omega t)]$$

代回去求解就能得到频率 $\omega = \pm \sqrt{gHk^2 + f^2}$ ，相速度 $c_p = \pm \sqrt{gH + f^2/k^2}$ 。这里我们还没复习到波的部分，但是不妨碍我们理解这个过程，大概就是，从水高突变的地方开始有惯性重力波向两边传播，传播的波速和频率可以求得。熟悉波的读者可以看出， \sqrt{gH} 就是重力波的波速，然后这里再要考虑地转效应。可以说，波动本身就是一种重要的地转适应的手段。

接下来讨论特解。我们只需要考虑某一种满足方程的情况就行，所以我们直接假设在足够长时间后，波形不随时间变化，并且由于没有 y 方向的差异，得到的就是关于 x 的常微分方程：

$$-gH \frac{\partial^2 \eta_s}{\partial x^2} + f^2\eta_s = -f^2\eta_0 sgn(x)$$

结果如下：

$$\frac{\eta_s}{\eta_0} = \begin{cases} -1 + \exp(-x/L_R), & x > 0 \\ 1 - \exp(x/L_R), & x < 0 \end{cases}$$

也就是说，由于地转效应的存在，到最后水面也无法回归平静，总会是倾斜的。这里我们就要引入 Rossby 变形半径的概念了，Rossby 变形半径 $L_R = \sqrt{gH}/f$ 是地转适应的特征尺度，当 x 远在这个尺度之外，地转适应就不明显了。

这个结果看起来很奇怪，但是如果我们把速度通过高度场求出来就好理解了。速度 u 恒为 0， $v \propto -\exp(-|x|/L_R)$ ，在 $x=0$ 处最大。也就是说，由于持续地有流动， x 方向持续地有科氏力，因而能够维持液面不塌下去或者形成无限传播的波动。

6.4 Quasi-Geostrophic Theorem

本节不考。

其实这个完美的特解终究是难以形成的，地转适应过程中的波动始终存在。从振动角度理解也是可以的，初状态不在地转平衡，于是有回复力驱动液面向地转平衡移动，而当回复到地转平衡之后，只要非地转风还在，地转平衡会再次被破坏。总之就是一个以非地转风为回复力的振子，如果有阻尼的话，可以达到近似地转平衡的过程。

事实上，这种调整是非常迅速的，如果我们考虑更大的时间空间尺度，调整过程可以忽略不计，最后达到的状态也可以认为是地转平衡。不过严谨起见，我们还是称之为准地转平衡 (Quasi-Geostrophic)。

准地转平衡终究是一种近似，老师提了一种近似的方法，就是以常用无量纲数为基础展开，由于在准地转状态下，Rossby 数小于 1，所以 Rossby 数就是很好的展开系数：

$$u' = Ro^0 u'_0 + Ro u'_1 + Ro^2 u'_2 + \dots$$

依次类推，其他项也一样。然后将其代入控制方程组，约去高阶项就能得到 QG 模型的控制方程。0 阶近似的特征是：运动方程中地转平衡，连续性方程意味着无辐散，垂直方向上满足静力平衡，也就是最完美的地转平衡；1 阶近似的特征是：水平方向加入一阶近似的物质导数，连续性方程需要考虑垂直运动，能量方程需要考虑位温的物质导数，垂直方向也不完全是静力平衡。取更高阶的近似也是可以的，只是目前而言取到这里已经是够用的 QG 近似了。

如果我们取流函数 Ψ ， $v_0 = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ， $u_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ，则可以使用运动方程凑出涡度方程，然后用连续性方程凑出散度，再利用垂直方向的运动方程消去其中的垂直速度，就能得到

一个新的守恒量——QGPV，准地转位涡：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) q &= 0 \\ q &= \nabla_h^2 \Psi + f + \frac{f_0^2}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

7 Waves

本章得有图才比较好理解，作为复习来说没有图，只是复习知识点，本章的文本是够的；但是如果读者在预习期末考试内容，强烈建议想办法借也好，Office Hour 问老师也好，一定要看完整的图和公式。另外，本章不作一一的推导，只给出关键步骤，中间具体对公式的形变大家可以自己试一下，至少本章到重力外波的部分，公式都是比较简洁的。

7.1 Basics of Waves

7.1.1 Concepts

有波动意味着有振子，需要有介质或者空间，单纯的波动不移动物质（物质保持在原位），只传播能量。波动最简单的形式是简谐振动，波动方程是这种振动所满足的方程，通常是二阶微分方程，例如 $y'' + \omega^2 y = 0$ ，求出来的结果是 $y = A \cos(\omega t - a)$ ，这里的 A 为振幅， $\theta = \omega t - a$ 记为相位（老师称之为位相）， ω 是频率，或者叫圆频率， a 为初相。相速度 $c_p = \delta x / \delta t = \omega / k$ 就是相位在空间中的传播速度。 k 是波数，也就是 $2\pi / \lambda$

考察波动方程 $y_{tt} = \frac{\omega^2}{k^2} y_{xx}$ ，其解为 $y = A \cos(kx - \omega t + a)$ ，相位不变，所以 $\theta(x, t) = \theta(x + \delta x, t + \delta t)$ ，化简得到 $k\delta x - \omega\delta t$ ，所以 $c_p = \omega / k$ 。

如果波动方程解出来不是简谐波，由傅里叶变换，可以将其化为简谐波的叠加，此时的波动可以视为多个波叠加的结果，所以最大振幅的移动速度和单个波动的相速度就不一样了，此时我们仍然想要描述这个波作为整体的运动，就要用群速度的概念。群速度 $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ ，这里频率和波数的关系不再成正比的，而是有另一个函数关系，我们叫这一关系频散关系。所谓频散，就是有不同频率的波叠加，导致其相位会“散开”，不再有统一（或者说集中）的相位。

以两列相近的波的叠加为例， $\phi(x, t) = F[\exp[i(k - \delta k)x - (\omega - \delta\omega)t] + \exp[i(k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t]] = 2F \cos(\delta k x - \delta\omega t) \exp[i(k x - \omega t)]$ ，可见波可以分解为波包和载波。波包频率较低，为 $\delta\omega / \delta k$ ，但是调控着最大振幅区的移动，所以也叫低频调幅波，而载波频率较高，构成了波的具体形状，被称为高频载波。

由于利用相速度公式可以替代掉频率，所以群速度也能表示为

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial(c_p k)}{\partial k} = c_p + k \frac{\partial c_p}{\partial k}$$

由此可见，如果频率和波数并不成正比，则相速度不为常数， $c_g \neq c_p$ ，此时我们称波为频散波。

一般来讲，获取频散关系是有固定流程的。对波函数来说，一旦我们写出来了，我们就可以假设波解的形式为

$$\psi(x, t) = A \exp[i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)]$$

代入方程，就能约去波动本身的部分，余下的部分由算子决定，空间算子（对空间坐标求导）会出现波数，时间算子（对时间坐标求导）会出现频率，因此就能得到频散关系。由频散关系，就能计算出相速度与群速度。

注意到这里我把波数表示为了矢量，这是因为如果波在不同的方向有不同的传播性质，整个波的传播方向就会发生偏转，而决定波的传播方向的就是各个方向的波数，写为矢量就能直接看出波传播的方向，比如平面简谐波的波数就是 $\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}$ 。

注意，在考虑相速度的时候必须小心！假如 \vec{k} 的传播方向不在坐标轴上，那么等相位面在波数方向上传播 Δs ，则在各个坐标轴上推进的距离并不是 Δs 乘上对应角度的 \cos 值什么的，这只是单纯将其投影到坐标轴上，而不是实际等相位面的推进距离，实际等相位面推进的距离应该是除以 \sin 值，我们记为 Δx_i ，这里可以画个平面波的图示，参阅老师的 PPT。那么我们区分这个有什么作用呢？主要是为了区分不同坐标轴上该波的相速度和相速度在不同轴上的投影。

在 Δx_i 上波的相速度应该是 $x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_i}$ ，而投影方向上则要稍微复杂一些。在平面波的传播方向上， $c_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$ ，这里的 k 为 \vec{k} 的模长。其方向与 \vec{k} 一致，所以可以表示为 $\vec{c}_p = \frac{\omega}{k} \vec{k}$ ，所以投影到各个坐标轴上就是 $c_{px_i} = \frac{\omega}{k^2} k_i$ 。显然 $c_{px_i} \leq c_{x_i}$ 。实际应用的时候我们通常认 c_{px_i} ，因为这样如果波不是平面波，也可以有效表示相速度的分量，而此时各个坐标轴上的相速度就用得比较少了。一个例子是点波源，显然在各个坐标轴上传播的波速度是一致的，但是如果我们将其中某个非坐标轴方向的波数，求坐标轴上的相速度，然后就会发现这个量基本上没什么用（

对三维波动，波长就是 $L = 2\pi/k$ ，某一方向的波长就是 $L_{x_i} = 2\pi/k_{x_i}$ 。

7.1.2 Linear Perturbation Theory and Standard Wave Solution

那么说了这么多，我们怎么从控制方程组求出波函数呢？通用的求法就是摄动法，基本思路还是将物理量分成基态和扰动，其中扰动需要比基态小得多，也就是 $u = \bar{u} + u'$, $|u'| \ll |\bar{u}|$ ，以及基态也要满足控制方程。然后代入原方程，对两个扰动项相乘，我们认为这是高阶小量，从而可以约去。这么做对线性项没有影响，对非线性项则可将其线性化。

线性化完之后，将方程组整理成单一变量的方程。对线性的方程，我们可以假设有

波解 $\psi = A \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$, 之于为什么可以这么做, 论证过程超出本课程的内容, 故略去。然后就跟前面求频散关系的做法一样, 这玩意求导, 结果就是自身前面会多一个系数 (也就是指数上对应的系数提出来), 于是微分方程就变成一般的方程了, 并且控制方程组里每一项都含有 ψ , 于是 ψ 被约去, 只剩下了频散关系。然后代回原来设的波解, 一层层往回套, 就能复原整个场的状态了。

7.2 Inertial Wave

惯性波是只考虑水平方向的运动方程并且没有平均流的情况下发生的波, 也就是说, 其控制方程是:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + fu' &= 0\end{aligned}$$

可见回复力就是科氏力。这里可以先消元再设解求频散关系, 也可以直接代, 变成线性方程组之后求解。总之, 设 $u' = U \exp[i(kx + ly - \omega t)]$, $v' = V \exp[i(kx + ly - \omega t)]$, 就能够得到:

$$\begin{aligned}i\omega U + fV &= 0 \\ -fU + i\omega V &= 0\end{aligned}$$

然后消去 U 和 V 就能得到 $\omega = \pm f$, 于是相速度 $c_p = \pm f/k$, $c_g = 0$ 。看来惯性波是频散的, 波虽然在传播, 但是能量并没有传播出去。在中纬度, 其周期约为十几个小时, 远低于天气尺度的波动; 对大尺度运动, 可以算出 $c = fL/2\pi \sim 16m/s$, 相对于天气尺度波动来说也慢得多; 对中尺度运动就更慢了, 大概只有 $2m/s$ 。

其实这里方程本身就是线性的, 不用摄动法, 直接求解也行 (毕竟是非常简单的单变量二阶常微分方程), 解的样子就是

$$\begin{aligned}u &= c_1 \cos(ft + c_2) \\ v &= -c_1 \sin(ft + c_2)\end{aligned}$$

从中我们再求一次导然后组合一下就能够得到 (假设气团初始位置为 $x = x_0, y = y_0$, 初始速度为 $u = 0, v = v_0$)

$$(x - x_0 - \frac{v_0}{f}t)^2 + (y - y_0)^2 = (\frac{v_0}{f})^2$$

这显然是个圆——所以惯性波的轨迹是圆, 我们称之为惯性圆。只要我们在旋转平台 (比如转盘、地球) 上有一个初始速度, 并且不考虑摩擦, 那么我们一定会画出一个圆。这也解释了为什么群速为 0——能量从来就没有往外传。

7.3 Sound Wave

对声波，为了简化讨论，我们考虑一维情况，然后由于声波尺度比较小所以可以忽略地转效应，起主导作用的是压力梯度力，因此我们还要带上质量守恒方程和热力学方程（当然这里需要加绝热条件）。所以控制方程组是：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d \ln \theta}{dt} &= 0\end{aligned}$$

对 u, p, ρ 作分解，而位温本身可以用压力和密度表示。我们首先将质量守恒和绝热情形下的热力学第一定律组合起来

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\ln \theta}{dt} \\ (\text{利用位温定义以及 } \gamma = c_p/c_v) &= \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dt} - \frac{d \ln \rho}{dt} \\ (\text{代入质量守恒}) &= \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}$$

这个式子和运动方程组合起来就行，代入摄动分解：

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) p' + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

组合起来得到波动方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p' - \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0$$

然后设波解 $p' = A \exp[ik(x - ct)]$ ，这里直接把 ω 展开了， c 默认为 c_p 。接下来可以求出 $c = c_g = \bar{u} \pm (\gamma \bar{p}/\bar{\rho})^{1/2}$ ，这里的 $(\gamma \bar{p}/\bar{\rho})^{1/2} = (\gamma R \bar{T})^{1/2} := c_s$ 为绝热声速。由此可见，声波在传播过程中，一边传一边带着能量走，传播速度与温度相关。

7.4 Gravity Wave

重力波根据发生在流体的自由面还是稳定层结内部可以分为外波和内波，全称为重力内/外波，或者内/外重力波。简单来说就是在流体外部的就是外波，内部的就是内波。然后如果还考虑地转效应则为惯性重力波。这些波都是动力作用的，所以不需要热力学相关的方程。

7.4.1 External Gravity Wave

重力外波的回复力是重力和压力梯度力。由于不需要考虑惯性效应，这里我们只需要考虑水平 x 轴和垂直方向的运动就行，控制方程化简为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ (\text{静力平衡}) \quad 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

首先用静力平衡积分，将 p 转化为水面高度 h，然后对连续性方程积分，将 w 化为 $h \frac{\partial u}{\partial x}$ ，同时如果我们考虑顶层 ($z=h$)，w 本身也可以表示为 $dz/dt = dh/dt$ ，也就是说这里再次够建了一个方程 $\frac{dh}{dt} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 。将 u 的梯度、w、压强的表达式都代入运动方程，然后作摄动线性化（考虑初速度都为 0，这样就能把平流项都干掉），可以化简得到

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$$

这里记 $c_0 = \sqrt{gH}$ 为重力波波速，就能得到 $\omega = \pm c_0 k$, $c_p = c_g = \pm c_0$ ，可见重力外波跟声波一样，是非频散的，能量跟着相位不断传播出去。

题外话，这样的初始条件会导致初始波动向正负两个方向传播，而通过合理设置初始速度，可以只保留左行波或右行波，感兴趣的读者可以尝试带着 \bar{u} 计算一下。

7.4.2 Inertia-External Gravity Wave

考虑科氏力的情况下，有类似的操作。此时重力外波不能够再是一维的了，需要加入 y 方向的运动方程，不过处理方式还是相似的，这里我就略去推导过程，直接展示结果了：

$$\begin{aligned}\omega &= \pm \sqrt{c_0^2 K^2 + f^2} \\ \vec{c}_p &= \frac{\omega}{K^2} \vec{K} \\ \vec{c}_g &= \frac{c_0^2}{\omega} \vec{K}\end{aligned}$$

可以看到，加入频散的惯性作用之后，重力外波也变得频散了。如果我们希望得到非频散的惯性重力波，则取 $c_p = c_g$ ，于是我们发现这等价于 $f=0$ ，也就是退化到重力外波了。

7.4.3 Internal Gravity Wave

重力内波出现在层结流体内部界面，回复力除了压力梯度、重力，还需要考虑浮力（由流体界面上下密度等统计量性质差异导致），因此密度非常数，静力平衡关系不满足，

取 $f=0$ 来避免考虑惯性效应。控制方程组：

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \nabla \cdot \vec{V} \\ \frac{d\theta}{dt} &= 0\end{aligned}$$

摄动分解设置：

$$\begin{aligned}u &= \bar{u} + u' \\ w &= w' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \\ p &= \bar{p}(z) + p' \\ \theta &= \bar{\theta}(z) + \theta'\end{aligned}$$

这里我将忽略具体的代入化简过程，Hint：这里的推导需要使用位温的定义、分式和对数函数一阶近似、基态满足的静力平衡；得到的结果如下：

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x})w' &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \\ (\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x})u' &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \\ (\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x})\theta' &= -w' \frac{d\bar{\theta}}{dz}\end{aligned}$$

合并化简为波动方程有：

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x})^2 (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})w' + N^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w' = 0$$

这里 $N^2 = \frac{g d\bar{\theta}}{\bar{\theta} dz}$ 。假设波解、代入化简，得到的频散关系：

$$\omega = \bar{u}k \pm \frac{Nk_x}{K}$$

这里我们将平均流的部分减去，余下的部分称为固有频率，即 $\tilde{\omega} = \pm Nk_x/K$ 。
相速度：

$$\vec{c}_p = \frac{\tilde{\omega}}{K^2} \vec{K} = \pm \frac{Nk_x}{K^3} (k_x \vec{i} + k_z \vec{k})$$

群速度：

$$\vec{c}_g = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial k_x} \vec{i} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial k_z} \vec{k} = \pm \frac{Nk_z}{K^3} (k_z \vec{i} - k_x \vec{k})$$

只需要把固有频率和波数的表达式 $K^2 = k_x^2 + k_z^2$ 代入就行。总之，结果显示，相速度和群速度并不相等，并且二者的方向是垂直的，所以重力内波是频散波，等相位线会不断平移。直观地看重力内波，在垂直方向是，重力内波就是浮力振荡，频率为 Brunt-Vaisala 频率 N ，在水平方向的震动是由辐合辐散导致的，比如某处的流体界面上抬了，那么上方会辐散，下方会辐合，于是形成了水平方向的振动，最终综合起来的振动等相线是倾斜的，然后传播方向是垂直于等相位线的。从实验可以看出，在层结流体中进行扰动，确实会产生不同密度的线状区域（等相面），它们一经产生就会平移传开。同时，从正负号也能看出，存在两个方向的重力内波，在实验上看就是 X 形的等相面。

7.4.4 Inertia-Internal Gravity Wave

同样地，当考虑惯性效应的时候，水平方向就必须考虑两个维度了，所以惯性重力内波就必须是三维的。由于式子比较多我们就直接展示线性化后的结果了，实际操作跟前面的一样：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + fu' &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + w' \frac{d\bar{\theta}}{dz} &= 0\end{aligned}$$

然后消元、代入波解得到频散关系：

$$\omega = \pm \sqrt{f^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_z^2} N^2}$$

相速度：

$$\vec{c}_p = \frac{\omega}{K^2} \vec{K} = \pm \frac{\sqrt{f^2 k_z^2 + (k_x^2 + k_y^2) N^2}}{k_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)} (k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k})$$

群速度：

$$\vec{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \vec{i} + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \vec{j} + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \vec{k} = \pm \frac{N^2}{k_z^2 \sqrt{k_z^2 f^2 + (k_x^2 + k_y^2) N^2}} (k_x k_z \vec{i} + k_y k_z \vec{j} - (k_x^2 + k_y^2) \vec{k})$$

相速度和群速度相乘，我们又能发现二者垂直，不过相比于重力内波，虽然惯性重力内波的等相面同样是平行传播，但是这回振子是三维振荡的，在运动过程中会受到科氏力作用而产生偏转。此时其振荡的轨迹不是简单的垂直方向 +x 方向组合形成的斜线，而是三维的椭圆。总之这块比较抽象，建议看看图，或者做一下数值模拟。

7.5 Rossby Waves

Rossby 波非常重要，可以说考试必考的程度，并且也没有惯性重力内波那么复杂的公式，公式推导简洁美观，所以更适合考试了。Rossby 波的设置是密度恒定（从而没有内波和声波）、无符合辐散（所以没有外波），因此可以不考虑垂直运动，流动退化为二维运动。但是保留惯性效应，并且 f 不再是常数，而是考虑 β 效应，即 $f = f_0 + \beta y$ ，这种近似在 y 方向运动尺度不是很大的时候适用，在中纬度尤其适用。

控制方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} - (f_0 + \beta y)v' &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + (f_0 + \beta y)u' &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

对第一项求 y 偏导，对第二项求 x 偏导，然后第二项减去第一项，应用无辐散条件（连续性方程），就能够得到涡度方程：

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \beta v' = 0$$

然后由于有连续性方程，我们可以设流函数 ψ ， $u' = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ， $v' = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ， $\zeta' = \nabla^2 \psi$ ，于是涡度方程变为

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

设波解 $\psi = A \exp[i(kx + ly - \omega t)]$ ，代入得到

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}$$

相速度

$$\vec{c}_p = \frac{\omega}{K^2} \vec{K} = -\frac{\beta k}{(k^2 + l^2)^2} (k \vec{i} + l \vec{j})$$

群速度

$$\vec{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \vec{i} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \vec{j} = \frac{\beta}{(k^2 + l^2)^2} [(k^2 - l^2) \vec{i} + 2kl \vec{j}]$$

由此可见，Rossby 波是频散的。当 $l=0$ 的时候（这被称为一维 Rossby 波），相速度和群速度是相反的，即 $c_p = -c_g = -\frac{\beta}{k^2}$ ，相速度为负，向西，群速度为正，向东，所以 Rossby 波本身向西传播，但是却在向东传播。这能够用绝对涡度守恒理解，初始有个从南向北的扰动（所以气团 f 变大），由于绝对涡度守恒，激发出负涡度，负涡度

导致西边有个从南向北的扰动，东边有个从北到南扰动，依此类推，从南向北的扰动一直在西边被激发，所以相位一直往西移动；东边那个从北往南的扰动将会带来正涡度，削弱初始扰动，并且在东边也激发出新的从南向北的扰动，于是这列波虽然本身在向西移动，但是激发出的新波动却在东边。这就是 Rossby 波的传播特征。(最好找个图示)

然后我们再考虑有平均流的情况，结果是

$$\omega = \bar{u}k - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}$$

整个代入相速度和群速度公式也可以，不过比较复杂，所以这里只考虑一维 Rossby 波的情况：

相速度：

$$c_p = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2}$$

当波长 $L = L_s = 2\pi\sqrt{\bar{u}/\beta}$ 时，相速度为 0，Rossby 波的相位不动而能量会传出去。如果波长小于 L_s ，则相速度大于 0，Rossby 波会向东传播，反之向西传播，可以记为 $c_p = \beta(L_s^2 - L^2)/4\pi^2$ 。

而群速度为

$$c_g = \bar{u} + \frac{\beta}{k^2}$$

所以群速度永远向东而且比相速度快。

Rossby 波这块请务必掌握！

8 Dynamic Linear Instability

8.1 Instability

稳定性就是，系统偏离平衡状态后能够回来，或者跑不远，而不稳定就是系统一旦偏离平衡状态，扰动就会一直增长，回不到原来的平衡态了。当然，我们这里讨论的不稳定通常是会达到新的平衡态的，也就是扰动不会无限增长下去的，但是这并不是关键问题。

对气团来说，最简单的判断方式就是先假设气团性质与同高度环境大气相同，然后将其提高一定高度，判断一下其受力，是会下降还是上升，如果会下降就说明其有回复力，是稳定的，能够回到原位，反之则会一直上升，是为不稳定。

对波动而言，我们知道波动方程有波解 $\psi = \phi \exp[i(kx - \omega t)]$ ，在 k 和 ω 都是实数的时候，自然结果只有简谐振动，系统是稳定的波动；然而，如果波数或者频率是复数，则有可能导致振幅的指数增长，此时称之为不稳定。

所以，在这里我们的不稳定性有两种，一种是无回复力导致的不稳定，分为惯性不稳定和对称不稳定；一种是波动振幅增长的不稳定性，如 Rossby 波的正压不稳定和斜压不稳定，以及重力内波的 Kelvin-Helmholtz 不稳定（KH 不稳定）。

不稳定的判别方法是简单的，只要简谐运动的回复力被抵消以至于初始微扰可以持续放大就行，所以推导基本上还是波动方程那套，只不过这里我们关心的不是频散关系之类的，而是要给出振子在某个方向上具体的振动方程，然后判断什么时候波解有指数增长的实部。

8.2 Inertial Instability

惯性不稳定的控制方程是在惯性波的基础上，考虑基本纬向气流的存在与经向梯度力，即

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu \\ \bar{v} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

使用地转风替代梯度力，然后就有

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= fv = f \frac{dy}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= f(u_g - u)\end{aligned}$$

所以我们有

$$\begin{aligned}u(y_0 + \delta y) &= u(y_0) + \frac{\delta u}{\delta y} \delta y = u(y_0) + f \delta y \\ u_g(y_0 + \delta y) &= u_g(y_0) + \frac{\delta u_g}{\delta y} \delta y = u_g(y_0) + \frac{\partial u_g}{\partial y} \delta y\end{aligned}$$

代入 y 方向的运动方程变成

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -f(f - \frac{\partial u_g}{\partial y})\delta y$$

所以，如果 $f < \frac{\partial u_g}{\partial y}$ ，则振子会沿着 δy 的方向一直运动下去。这就是惯性不稳定，当压力梯度作用大于惯性效应的时候，回复力被抵消了，振子就无法作出惯性圆。

8.3 Symmetric Instability

对称不稳定的含义是，在垂直方向上是浮力振子，在水平方向有惯性效应，因此无法发展为不稳定。但是在特定的方向上却有可能形成不稳定条件。

比如我们先看惯性不稳定的条件：

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -f(f - \frac{\partial u_g}{\partial y})\delta y > 0$$

也就是 $f - \frac{\partial u_g}{\partial y} < 0$ ，这里我们定义 $M = fy - u_g$ ，所以惯性不稳定的条件是 $\frac{\partial M}{\partial y} < 0$ 。

浮力震荡的不稳定条件为（这里的大于 0 是因为移项之后代入通解会出现指数上有实数）：

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{d^2}{dt^2}(\delta z) \\ &= -g - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \\ &= g \left(\frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho} \right) \\ &= g \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \\ &= -\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \delta z > 0\end{aligned}$$

可见不稳定条件就是 $\frac{d\bar{\theta}}{dz} < 0$ 。

对于倾斜的等 M 线和等 $\bar{\theta}$ 线，但看垂直方向和水平方向可能满足两种稳定条件，但是在某些角度的运动，可能恰好能够满足浮力不稳定和惯性不稳定，因此能够发展出不稳定（建议找示意图看一下）。这种不稳定意味着环境是斜压的，所以也叫对称斜压不稳定。

8.4 Barotropic Instability

正压不稳定的基本设置是正压，密度只关于压强，所以可以有绝对涡度守恒和连续性方程，然后再加一个经向平均流。考虑分解 $u = \bar{u}(y) + u'$ $v = v'$ ，所以涡度可以表示为

$$\zeta = \bar{\zeta} + \zeta' = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}$$

于是绝对涡度守恒和连续性方程就变为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + v' \left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

然后使用流函数表示摄动速度得到：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi + \left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

这被称为 Rayleigh-Kuo 方程，这里的 Kuo 是郭晓岚，华人理论大气动力学大师。

设有波解 $\psi = \phi(y) \exp[ik(x - ct)] = 0$ ，并设置初始条件，流体被限制在 $[y_2, y_1]$ 之间，且在边界上速度摄动为 0。这里的振幅与 y 有关，因为有 y 方向的平均流，这是可能打破波解得到增长振幅的方向，而 x 方向则只有波动。从初始条件也可以看出 x 方向应该是高度周期性的。总之将条件代入 Rayleigh-Kuo 方程，得到

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} - [k^2 - \frac{\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}{\bar{u} - c}] \phi = 0$$

用波解的共轭乘这个式子，就能够得到：

$$\frac{d}{dy} \left(\phi^* \frac{d\phi}{dy} \right) - \left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 - k^2 |\phi|^2 + \frac{\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}{\bar{u} - c} |\phi|^2 = 0$$

利用边界条件，我们将其从 y_1 积分到 y_2 ，再利用边界上 $\phi = 0$ ，就能够得到：

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + k^2 |\phi|^2 \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}{\bar{u} - c} |\phi|^2 dy$$

注意这里的波速 c 可能有实部和虚部的，所以我们将整个方程据此分成实部和虚部。这个方程的实部满足：

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + k^2 |\phi|^2 \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{(\bar{u} - c_r)(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2})}{|\bar{u} - c_r|^2} dy$$

虚部满足：

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2})}{|\bar{u} - c_r|^2} |\phi|^2 dy = 0$$

下面我们讨论在什么情形下正压不稳定会发生。显然如果波速 c 是纯实数，那么波解的振幅就是恒定的，所以我们需要 c_i 不为 0，而同时虚部方程又要满足，结果即是

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2})}{|\bar{u} - c_r|^2} |\phi|^2 dy = 0$$

又由于分母和波解的模长一定是正数，那么积分想要为 0 就必须要分子有正有负，那么只要我们假设这个式子是连续的，就必然有某处

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right|_{y \in (y_1, y_2)} = \beta$$

这就是正压不稳定第一必要条件，也叫 Rayleigh's inflection-point criterion。

处理完虚部，我们来考虑实部满足的方程。注意到左边恒大于 0，则右边也有恒大于零。而右边被积函数的分母也恒大于 0（并且是常数，所以我们可以要求分子的积分大于 0），即

$$\int_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c_r)(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}) dy > 0$$

这里的 c_r 可以是任何数，当 $c_r = 0$ 时我们称积分值大于 0 的条件为正压不稳定第二必要条件，也叫 Fyortoft's Criterion。

第一和第二必要条件是独立的，所以只有二者同时满足，才有可能有正压不稳定。

这些条件并不是那么好定性判断，比如 $u = 1 - y^2$ 和 $u = e^{-y^2}$ 两种波形在 $[-1, 1]$ 中长得像，但是如果设置 $\beta = 0$ ，我们可以看出前者不满足正压不稳定第二条件，而后者皆满足，这说明光看波形形态是比较不出来的，必须定量分析其二阶导数。

这里的推导是不会考，但是给公式要会用。斜压不稳定同。

8.5 Baroclinic Instability

斜压不稳定的基本设置当然是斜压的，即等密度线和等压线并不平行，或者说存在温度/位温差异。基本的推导逻辑和正压不稳定一致。正压不稳定考虑的是绝对涡度守恒，而斜压条件下绝对涡度不再守恒，但是准地转理论下的 QGPV 守恒却对斜压条件满足，所以我们只考虑 QG 理论下的地转位涡守恒（这也意味着我们分析的斜压不稳定是大尺度的）。斜压不稳定的推导比较复杂（这主要来源于 QGPV 复杂的表达式），所以我想推导的细节应当不会成为考察的细节。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) q = 0$$

这里的 q 即为 QGPV（见第六章最后讲的地转适应），稍有不同的是我们对 f 使用 *beta* 效应近似（所以我们分析的斜压不稳定适用于中纬度）：

$$q = f_0 + \beta y + \nabla^2 \psi + \frac{f_0^2}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho_s}{N^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right]$$

这里的摄动设置为没有经向平均流，纬向平均流在不同纬度和高度不同，但是在同一纬度是保持一致且不变的：

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(y, z) + u'(x, y, z, t) = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \\ v &= v'(x, y, z, t) = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \\ \psi(x, y, z, t) &= \bar{\psi}(y, z) + \psi'(x, y, z, t) \end{aligned}$$

边界值设置同正压不稳定一致，即流动限制在 $[y_1, y_2]$ 之间，边界上没有流动，然后再考虑地面上没有垂直运动、没有非绝热过程，最后还考虑质量不会从上方逃逸，即在无穷高处， $\int_{y_1}^{y_2} \rho_s \bar{w} \psi dy = 0$ 。

将摄动代入 q 和守恒方程可得：

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \\ \bar{q} &= f_0 + \beta y + \nabla^2 \bar{\psi} + \frac{f_0^2}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{N^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) \\ q' &= \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{f_0^2}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{N^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

所以设有波解 $\psi = \phi(y, z) \exp[ik(x - ct)]$ ，代入可得

$$(\bar{u} - c)[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - k^2 \phi + \frac{f_0^2}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{N^2} \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right) + [\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f_0^2}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{N^2} \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right]]\phi = 0$$

将其乘个 ϕ^* 后从 y_1 积分到 y_2 , 从 $z = 0$ 积分到 $z = \infty$ 。注意由边界条件我们有 $y_1 = y_2 = 0$ 时 $\phi = \phi^* = 0$, $z = 0$ 时 $(\bar{u} - c)\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\phi = 0$, $z = \infty$ 时有 $\int_{y_1}^{y_2} |\phi|^2 dy = 0$ 。

结果是对实部我们有方程

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{y_1}^{y_2} \left(\rho_s \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\phi|^2 + \frac{f_0^2}{N^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|^2 \right) dy dz \\ &= \\ & \int_0^\infty \int_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c_r) \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dy dz - \int_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c_r) \rho_s \frac{f_0^2}{N^2} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|_{z=0} dy \end{aligned}$$

对虚部我们有方程:

$$c_i \left[\int_0^\infty \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dy dz - \int_{y_1}^{y_2} \rho_s \frac{f_0^2}{N^2} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|_{z=0} dy \right] = 0$$

在上面两个方程中所谓的平均位涡导数即是:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f_0^2}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{N^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) \right]$$

接下来的分析方法也是一致的, 虚部即第一必要条件, 实部即第二必要条件。

由 $c_i \neq 0$, 我们有

$$\int_0^\infty \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dy dz = \int_{y_1}^{y_2} \rho_s \frac{f_0^2}{N^2} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|_{z=0} dy$$

我们主要观察 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|_{z=0}$ 的情况。如果 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|_{z=0} = 0$, 则虚部方程右边为 0, 看左边。左边中的密度、模长全都是正数, 所以一定有某处 $\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0$, 这意味着某处

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f_0^2}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{N^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) \right] = 0$$

这是斜压不稳定第一必要条件情形 1。如果我们假设 $\phi = \phi(y)$, 也就是不考虑热成风, 从而是正压情形, 则右边一大块东西就都是 0 了, 剩下的 $\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0$ 就是正压不稳定第一必要条件。所以正压不稳定第一必要条件是斜压不稳定第一必要条件的一种特殊情形。

第二种情形, 如果 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|_{z=0} > 0$, 则虚部方程右边恒正, 所以左边也恒正。为了方便判断, 满足第一必要条件的判据可以取 $\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} > 0$ 。其物理含义是如果在近地面西风随高度

增加（或者东风减弱）（即南暖北冷），则斜压不稳定要 QGPV 随纬度增加。

第三种情形，反之亦反，如果 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|_{z=0} < 0$ ，则 $\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} < 0$ 。其物理含义是如果在近地面西风随高度减弱（或者东风增强）（即南冷北暖），则斜压不稳定要 QGPV 随纬度减小。

在中纬度，显然是南暖北冷，西风随高度增强，并且水平纬向方向上的 QGPV 总是随纬度增加而增加，满足第二种情形，所以中纬度很容易触发斜压不稳定。

接下来看实部方程以得到斜压不稳定第二必要条件，由于对任何 c_r 都应当满足方程，取 $c_r = 0$ ，等式右边第二项约为 0，左边恒大于 0，则右边第一项应该大于 0，即有

$$\int_0^\infty \int_{y_1}^{y_2} \bar{u} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dy dz > 0$$

进一步可以将第二必要条件判据简化为

$$\int_0^\infty \int_{y_1}^{y_2} \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dy dz > 0$$

8.6 Kelvin-Helmholtz Instability

KH 不稳定是在流体的不连续界面（密度和速度）上产生的增长的不稳定，所以我们通常只取一个垂直截面（X-Z 平面）来分析。在运动的早期（或者说我们设置的初始扰动中），背景流中是没有涡的，所以我们设流动是梯度场（ ϕ 为势函数）：

$$\vec{V} = -\nabla \phi$$

则界面上下流体所具有的速度分别为：

$$U_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x}$$

$$U_2 = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

对其积分得到势函数：

$$\phi_1 = -U_1 x + \phi'_1$$

$$\phi_2 = -U_2 x + \phi'_2$$

然后再取垂直导数得到垂直速度：

$$w_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = -\frac{\partial \phi'_1}{\partial z} = \frac{dh}{dt} \approx \frac{\partial h}{\partial t} + U_1 \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$w_2 = -\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = -\frac{\partial \phi'_2}{\partial z} = \frac{dh}{dt} \approx \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

这里的 h 指的是流体界面高度相对于我们选取的 $z = 0$ 处的高度，当然 $z = 0$ 这一高度面不是乱取的，我们要求 $h \ll 1$ 。另外，由于垂直于界面的速度相同，其水平速度却不同，所以 $w_1 \neq w_2$ 。

由伯努利方程（假设是无粘定常流），我们可以得到：

$$\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = Const$$

我们假设初始状态（这里不是运动早期，而是扰动发生前的状态）下界面是直线 $z=0$ ，也就是

$$\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p}{\rho} = Const$$

由于此直线是边界，所以对上下液体都满足，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\nabla\phi_1|^2 + \frac{\bar{p}_1}{\rho_1} &= Const \\ \frac{1}{2}|\nabla\phi_2|^2 + \frac{\bar{p}_2}{\rho_2} &= Const\end{aligned}$$

然后再考虑初始状态下势函数与 z 无关（即没有垂直速度），压力可以作分解 $p = \bar{p} + p'$ ，对初始状态 $p' = 0$ ，所以有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}U_1^2 + \frac{\bar{p}_1}{\rho_1} &= Const \\ \frac{1}{2}U_2^2 + \frac{\bar{p}_2}{\rho_2} &= Const\end{aligned}$$

然后考虑上述流线 ϕ 是扰动得到的界面而不是定常流动（因此才能够发展出不稳定），并且界面上是 $z = h(x, t)$ ，所以伯努利方程不再满足了，我们可以加入非时间定常的演化项来表示：

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gh = Const$$

即对上下液体在界面处分别有：

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_1|^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + gh &= Const \\ -\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_2|^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + gh &= Const\end{aligned}$$

我们将各项表达式（含摄动）代入得到：

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\phi'_1}{\partial t} + \frac{1}{2}|U_1 + \frac{\partial\phi'_1}{\partial z}|^2 + \frac{\bar{p}_1 + p'_1}{\rho_1} + gh &= Const \\ -\frac{\partial\phi'_2}{\partial t} + \frac{1}{2}|U_2 + \frac{\partial\phi'_2}{\partial z}|^2 + \frac{\bar{p}_2 + p'_2}{\rho_2} + gh &= Const\end{aligned}$$

利用 $z = 0$ 的定常状态消去部分项，并且将摄动项的平方 $(\frac{\partial \phi'}{\partial z})^2$ 略去即

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \phi'_1}{\partial t} - U_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial z} + \frac{p'_1}{\rho_1} + gh &= 0 \\ -\frac{\partial \phi'_2}{\partial t} - U_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial z} + \frac{p'_2}{\rho_2} + gh &= 0\end{aligned}$$

再设此处液体的压力扰动是相同的，即 $p'_1 = p'_2$ ，就能够得到

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial x} - gh \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi'_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial x} - gh \right)$$

由于流体不可压缩，所以有

$$\nabla \cdot \vec{V} = -\nabla^2 \phi = 0$$

再由无穷远处边界条件（此边界条件是为了保障系统没有无中生动能，即无穷远处没有垂直运动）

$$\phi' = 0, z \rightarrow \infty / -\infty$$

在上方是 ϕ'_1 ，在下方是 ϕ'_2 ，于是我们设有波解

$$\begin{aligned}\phi'_1 &= C_1 \exp[ik(x - ct) - kz] \\ \phi'_2 &= C_2 \exp[ik(x - ct) + kz]\end{aligned}$$

由我们前面得到的垂直速度的表达式

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \phi'_1}{\partial z} &= k\phi'_1 = \frac{\partial h}{\partial t} + U_1 \frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi'_2}{\partial z} &= -k\phi'_2 = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x}\end{aligned}$$

将其视为 h 关于 t 和 x 的方程，于是便可以得到两个 ODE，求解得到

$$h = a \exp[ik(x - ct)]$$

这里 $C_1 = ia(U_a - c)$, $C_2 = -ia(U_a - c)$, 将其代入伯努利方程，并取 $z=0$ ，得到的是

$$\rho_1 k(U_1 - c)^2 + \rho_2 k(U_2 - c)^2 = g(\rho_2 - \rho_1)$$

这是关于 c 的二次方程，求解得到

$$c = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{g}{k} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right) - \rho_1 \rho_2 \left(\frac{U_1 - U_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2}$$

不稳定的解需要有虚部，所以根号下的部分应小于 0

$$\frac{g}{k} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right) \leq \rho_1 \rho_2 \left(\frac{U_1 - U_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2$$

化简得到

$$g(\rho_2^2 - \rho_1^2) < k \rho_1 \rho_2 (U_2 - U_1)^2$$

这个不稳定判据子告诉我们：如果上下层速度一致，则层结（下方比上方重，即 $\rho_2 > \rho_1$ ）流体永远稳定；如果上下层速度不一样，则总能找到某个足够大波数下会产生不稳定，同时也说明过小的 k （即较长的波长）不会产生 KH 不稳定，这也是为什么 KH 不稳定的尺度往往很小；如果上下层密度相等，则永远会有 KH 不稳定，这也是湍流几乎无处不在的原因。

9 Energy

本章很多推导并不严格，因此不必太纠结推导。

9.1 Concepts

地球大气的能量最主要的来源是太阳辐射，除此之外地球内部的能量也会传输到大气中，但是比例很小，可以忽略不计。

大气中的能量主要有四种形式，重力势能、内能、动能和潜热（注意势能和位能是对同一种类型能量的两种称呼，不需要区分），即

$$P = \rho g z$$

$$I = c_v T$$

$$K = \frac{1}{2} V^2$$

$$H = Lq$$

对单位面积气柱内（单层体积 dz ）的重力势能我们有：

$$\begin{aligned} P &= \int_0^h \rho g z dz \\ &= \int_{p_h}^{p_0} z dp \\ &= \int p_h^{p_0} d(pz) - \int_h^0 pdz \\ &= (pz)_{ground} - (pz)_h - \int_h^0 pdz \\ &= (pz)_{ground} - (pz)_h + \int_{p_h}^{p_0} \frac{RT}{g} dp \end{aligned}$$

这时候设地面为 $z = 0$ 处，然后取 h 取大气上界，足够大但是是有限值，而 p 趋于 0，所以此处以上 $pz=0$ ，所以重力势能就只剩下

$$P = \int_{p_h}^{p_0} \frac{RT}{g} dp$$

这时候我们注意到，如果对内能如法炮制，则有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^h C_v T \rho dz \\ &= \frac{1}{g} \int_{p_h}^{p_0} C_v T dp \end{aligned}$$

将其与重力势能加起来得到所谓的全位能

$$P^* = \frac{1}{g} \int_{p_h}^{p_0} (C_v + R) T dp = \frac{1}{g} \int_0^{p_0} C_p T dp$$

对潜热我们也可以积分：

$$H = \int_{p_h}^{p_0} \rho L q_v dz = \frac{1}{g} \int_{p_h}^{p_0} L q_v dp$$

然后我们通过作比能过估计出能量的相对大小，例如使用地球上的常用参数我们可以计算得到 $P/P^* = R/C_p = 0.3$, $H/P^* = L\bar{q}/(C_p\bar{T}) = 0.2$, $I/P^* = C_v/C_p = 0.7$ $K/P^* = \bar{V}^2/(2C_pT) = 1/2000$, 可见地球上大部分的能量体现为内能，其次为位能和潜热，最后一小部分才构成了地球上各种大气运动的动能。

位能内部还有一个有效位能 (APE)，其含义是大气全位能与其在绝热调整达到稳态后的位能（最小可能位能）之差，也就是能够转化为动能的部分。

举个例子，假如初始态是上轻下重的两种液体，界面倾斜（因此倾向于回到稳态——界面水平），倾斜角度 θ ，并记 $\gamma = 1/\cos\theta$ 。则其有效位能为：

$$APE = P - P_{min} = g \frac{\Delta\rho}{3} \gamma^2 L^3$$

直观上看就是倾斜区域的内能由密度差异和倾斜角度决定，角度越大 APE 越大（具体体现为偏离平衡状态的程度，或者说偏离初始平面液体的体积），密度差异越大 APE 越大。

地球大气是层结流体，其基态就是完全水平的等密度线，但是由于各种各样的原因这种平衡一定会被打破，这里我们衡量有效位能靠的就是浮力。浮力做功：

$$A = \int_0^z -B \delta z = \int_0^z N^2 z \delta z = \frac{N^2}{2} z^2$$

这里的 N 是我们非常熟悉的 Brunt-Vaisala 频率。如果我们记 $\theta' = -\frac{d\bar{\theta}}{dz} \delta z$ ，则有

$$A = \frac{g^2}{2N^2} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right)^2$$

对其在整个气柱上积分：

$$A = \int_0^\infty \rho \frac{g^2}{2N^2} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right)^2 dz = \int_0^{p_0} \frac{g}{2N^2} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right)^2 dp$$

进一步地，如果使用环境递减率表示 N ，则有

$$A = \int_0^{p_0} \frac{\bar{T}}{2(\Gamma_d - \Gamma)} \left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2 dp$$

可以进一步估计其在地球上的比例： $A/P^* \approx 1/200$ ，可见地球上的可用位能本身就很少，而实际转化为动能的部分，按照前面的估计，也只有十分之一左右。

9.2 Total Mechanical Energy Equation

9.2.1 Total Kinetic Energy Equation

下面我们考虑动能的变化由什么因素考虑。定义：

$$K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \approx \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

垂直运动因为尺度远小于水平运动，我们忽略。然后从水平方向的运动方程（考虑科氏力、梯度力和摩擦耗散，对 X 方向乘 u ，对 Y 方向乘 v ）可以推出

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial y} + \omega \frac{\partial K}{\partial p} = -(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + (u F_x + v F_y)$$

考虑左边加上连续性方程 $K(\nabla \cdot \vec{V}) = 0$ 则可以合并为

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla_p \cdot (K \vec{V}) = -(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + (u F_x + v F_y)$$

然后将其作质量积分，显然在地球大气上，上表面和下表面没有流入和流出的动量，因此内部散度的积分应当为 0（由高斯定理），然后定义耗散 $D = - \int \vec{F} \cdot \vec{V}_h dM$ ，则有动能方程

$$\int \frac{\partial K}{\partial t} dM = - \int (\vec{V}_h \nabla_h \Phi) dM + D$$

左边就是总动能的变化，右边就是梯度力加速和耗散。但是梯度力的形式仍然不方便我们作整体的估计，所以我们需要进一步处理。在运动方程右边再加上连续性方程 $\Phi(\nabla \cdot \vec{V}) = 0$ ，则水平项合并为 $-\nabla_p \cdot (\Phi \vec{V})$ ，垂直项单独考虑 $\omega \frac{\partial \Phi}{\partial p}$ 。同样，地球大气的上下表面没有垂直运动，由高斯定理，水平梯度的散度项也没了，所以只剩下垂直分量：

$$\int \frac{\partial K}{\partial t} dM = \int \omega \frac{\partial \Phi}{\partial p} dM + D = \int \omega \alpha dM + D = \int \frac{R}{p} \omega T dM + D$$

9.2.2 Total Potential Energy Equation

我们记 $E = C_p T$ 为焓，则 $P^* = \frac{1}{g} \int_{p_h}^{p_0} E dp$ 。然后考虑 P 坐标系下的内能方程和连续性方程：

$$\begin{aligned} C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \nabla_h T \right) + C_p \omega \frac{\partial T}{\partial p} - \alpha \omega &= Q \\ \nabla_h \cdot \vec{V}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0 \end{aligned}$$

对连续性方程的应用同前，我们就能得到

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_h \cdot (E\vec{V}_h) + \frac{\partial(E\omega)}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_h \cdot (E\vec{V}_h) = \alpha\omega + Q$$

其中第一个等号是因为焓的垂直通量随高度的变化率可以忽略不计。

于是我们就有全位能方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int EdM = \int \frac{R}{p}\omega T dM + \int Q dM$$

9.2.3 Total Mechanical Energy Equation

全动能方程与全势能方程的第一项符号相反，说明这一项是二者相互转化的过程。举个例子，如果是热处上升，冷处下降，速率一致，则质量积分下来这一项是正的，也就是说这一运动过程正在将全位能转化为全动能，反之则是全动能做功转化为全位能。

二者加起来互相转化的项就没了，所以有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (E + K) dM = D + \int Q dM$$

这被称为总机械能，可见在封闭系统中总机械能只会被外部能量输入和耗散改变。

地球上的能量循环就是：外部热量输入 $Q \Rightarrow$ 位能 $P(A) \Rightarrow \int \frac{R}{p}\omega T dM \Rightarrow$ 动能 $K \Rightarrow$ 耗散 D 。

9.3 Energy of Zonal-Mean Flow and Eddies

9.3.1 Concepts

地球上存在西风带这一事实让人们想到将纬向平均流与西风带中的涡分开，而表示一个物理量纬向平均的方式自然就是将其在纬向 (X 方向) 积分掉然后除掉积分路径，即

$$\bar{X}(y, p, t) = \frac{1}{L} \int_0^L X(x, y, p, t) dx$$

然后我们定义

$$X'(x, y, p, t) = X(x, y, p, t) - \bar{X}(y, p, t)$$

作为与平均流所区别的涡旋所带有的这一物理量。然后对涡旋再作纬向平均就能得到

$$\bar{X}' = \bar{X} - \bar{\bar{X}}$$

显然 \bar{X} 已经与 x 无关了，再怎么平均也不会发生改变，所以 $\bar{X}' = 0$ 。这一事实是显然的。

同样显然的还有如下事实

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{X}}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{X}}{\partial y}\end{aligned}$$

这里的 X 换成任意其他量都是可以的比如对连续性方程取纬向平均，我们可以将其化为

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} = 0$$

中纬度的大气运动就是基本环流（纬向平均流）和天气系统（涡旋）组成。下面我们将讨论如此分割之后的能量分布。

9.3.2 Zonal-Mean Kinetic Energy

我们知道，动能 $K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ ，我们将其分为纬向平均态和基态得到

$$K = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 2\bar{u}u' + 2\bar{v}v' + u'^2 + v'^2)$$

对其取纬向平均得到

$$\bar{K} = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) + \frac{1}{2}\overline{u'^2 + v'^2}$$

我们将这个式子分为两部分，一部分是平均流所具有的动能 $[K] = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)$ ，另一部分是涡旋所具有的动能 $K' = \frac{1}{2}\overline{u'^2 + v'^2}$ 。

接下来的操作和我们推导全动能方程的方式一致，从运动方程出发：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \omega\frac{\partial u}{\partial p} - fv &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \omega\frac{\partial v}{\partial p} + fu &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y\end{aligned}$$

加上连续性方程可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial u\omega}{\partial p} - fv &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v\omega}{\partial p} + fu &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y\end{aligned}$$

取纬向平均

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{\omega}}{\partial p} + \frac{\partial \bar{u}'\bar{\omega}'}{\partial p} - f\bar{v} &= \bar{F}_x \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\bar{\omega}}{\partial p} + \frac{\partial \bar{v}'\bar{\omega}'}{\partial p} + f\bar{u} &= -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + \bar{F}_y\end{aligned}$$

然后一式乘 \bar{u} , 二式乘 \bar{v} , 然后两式相加得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial [K]}{\partial t} + \frac{\partial [K]\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial [K]\bar{\omega}}{\partial p} + \bar{u}\left(\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'\bar{\omega}'}{\partial p}\right) + \bar{v}\left(\frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'\bar{\omega}'}{\partial p}\right) &= -\bar{v}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + (\bar{u}\bar{F}_x + \bar{v}\bar{F}_y) \\ \frac{\partial [K]}{\partial t} + \frac{\partial [K]\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial [K]\bar{\omega}}{\partial p} + \bar{u}\nabla \cdot (\overline{u'V'}) + \bar{v}\nabla \cdot (\overline{v'V'}) &= -\bar{v}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + (\bar{u}\bar{F}_x + \bar{v}\bar{F}_y) \\ \frac{\partial [K]}{\partial t} + \nabla \cdot ([K]\bar{V}) + \bar{u}\nabla \cdot (\overline{u'V'}) + \bar{v}\nabla \cdot (\overline{v'V'}) &= -\bar{v}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + (\bar{u}\bar{F}_x + \bar{v}\bar{F}_y)\end{aligned}$$

带颜色的部分所作的操作仅是将分量写为了向量。接下来考虑式子右端的梯度项：

$$\begin{aligned}&\text{(微分展开)} \quad -\bar{v}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = -\left(\frac{\bar{v}\bar{\Phi}}{\partial y} - \bar{\Phi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) \\ &\text{(连续性方程 } \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} = 0\text{)} \quad = -\left(\frac{\bar{v}\bar{\Phi}}{\partial y} + \bar{\Phi}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p}\right) \\ &\text{(微分展开)} \quad = -\left(\frac{\bar{v}\bar{\Phi}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\omega}\bar{\Phi}}{\partial p} - \bar{\omega}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p}\right) \\ &\text{(理想气体方程 + 静力平衡)} \quad = -\left(\frac{\bar{v}\bar{\Phi}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\omega}\bar{\Phi}}{\partial p} + \frac{R\bar{T}\bar{\omega}}{p}\right) \\ &\text{(合并为向量)} \quad = -\nabla \cdot (\bar{\Phi}\bar{V}) - \frac{R\bar{T}\bar{\omega}}{p}\end{aligned}$$

然后代入方程右端

$$\frac{\partial [K]}{\partial t} + \nabla \cdot ([K]\bar{V}) + \bar{u}\nabla \cdot (\overline{u'V'}) + \bar{v}\nabla \cdot (\overline{v'V'}) = -\nabla \cdot (\bar{\Phi}\bar{V}) - \frac{R\bar{T}\bar{\omega}}{p} + (\bar{u}\bar{F}_x + \bar{v}\bar{F}_y)$$

然后对其作质量积分，散度项由高斯定理消去，耗散项合并，得到：

$$\int \frac{\partial [K]}{\partial t} dM = - \int (\bar{u}\nabla \cdot (\overline{u'V'}) + \bar{v}\nabla \cdot (\overline{v'V'})) dM - \int \frac{R\bar{T}\bar{\omega}}{p} dM + \bar{D}$$

这是平均流的能量方程，接下来我们从全动能方程出发推出涡旋的能量方程：

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial K}{\partial t} dM &= - \int \frac{R}{p} \omega T dM + D \\ \int \frac{\partial \bar{K}}{\partial t} dM &= - \int \frac{R}{p} (\bar{\omega}\bar{T} + \omega'\bar{T}') dM + \bar{D} + \int (\overline{u'F'_x} + \overline{v'F'_y}) dM \\ &= \int \frac{\partial [K]}{\partial t} dM + \int \frac{\partial K}{\partial t} dM\end{aligned}$$

从而涡旋能量方程为

$$\int \frac{\partial K'}{\partial t} dM = - \int \frac{R}{p} (\omega' T') dM + \int (\bar{u} \nabla \cdot \overline{(u' \vec{V}')}) + \bar{v} \nabla \cdot \overline{(v' \vec{V}')} dM + \bar{D} + \int (\overline{u' F'_x} + \overline{v' F'_y}) dM$$

9.3.3 Zonal-Mean Available Potential Energy

下面我们考虑有效位能，这里使用的是热力方程。从等压坐标系下的热力能量方程（见第三章最后一部分）出发（这里 \hat{T} 为平均温度）：

$$\begin{aligned} C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \omega &= Q \\ \text{(展开物质导数然后两边除以 } T) \quad \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \nabla_p T \right) - \frac{R \omega}{p} &= \frac{Q}{T} \\ \text{(加上连续性方程)} \quad \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla_p \cdot (T \vec{V}) \right) - \frac{R \omega}{p} &= \frac{Q}{T} \\ \text{(两边乘 } T^2 / \hat{T}) \quad \frac{C_p}{\hat{T}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T^2}{2} \right) + \nabla_p \cdot \left(\frac{T^2}{2} \vec{V} \right) \right) - \frac{R \omega}{p} \frac{T^2}{\hat{T}} &= \frac{TQ}{\hat{T}} \end{aligned}$$

我们或许还记得有效位能的表达：

$$A = \frac{g^2}{2N^2} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right)^2$$

[数据削除][数据削除][数据削除][数据削除][数据削除][数据削除][数据削除]

[数据削除][数据削除][数据削除][数据削除][数据削除][数据削除][数据削除]

[数据削除][数据削除][数据削除][数据削除][数据削除][数据削除][数据削除]

总之我们得到了位能方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int A dM = \int \frac{TQ}{\hat{T}} dM + \int \frac{R\omega T}{p} dM$$

平均流位能方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int [A] dM = \int \frac{\bar{T} \bar{Q}}{\hat{T}} dM + \int \frac{R \bar{\omega} \bar{T}}{p} dM - \int \frac{C_p}{\hat{T}} \bar{T} \nabla \cdot \overline{T' \vec{V}'} dM$$

涡旋位能方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int A' dM = \int \frac{\overline{T' Q'}}{\hat{T}} dM + \int \frac{R \overline{\omega' T'}}{p} dM + \int \frac{C_p}{\hat{T}} \bar{T} \nabla \cdot \overline{T' \vec{V}'} dM$$

这里的推导不太严谨所以大家不用太抠这些结论怎么来的，只要知道物理意义就行。物理意义就是绝热运动、热源会导致位能增减，而平均流位能和涡旋位能之间能够相互转化。

9.4 Energy Conversion

我们使用尖括号 $\langle M, N \rangle$ 表示 MN 之间的能量转换, $\langle M, N \rangle$ 大于 0 表示从 M 转化到 N。所以前面所说的动能方程和位能方程可以表示为 (这里 G 表示能量产生项)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int [K] dM &= \langle [A], [K] \rangle + \langle K', [K] \rangle - \langle [K], [D] \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \int K' dM &= \langle A', K' \rangle - \langle K', [K] \rangle - \langle K', D' \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \int [A] dM &= -\langle [A], [K] \rangle - \langle [A], A' \rangle + \langle [G], [A] \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \int A' dM &= -\langle A', K' \rangle + \langle [A], A' \rangle + \langle G', [A] \rangle\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}\langle [A], [K] \rangle &= - \int \frac{R\bar{T}\bar{\omega}}{p} dM \\ \langle K', [K] \rangle &= - \int (\bar{u}\nabla \cdot \overline{(u'\vec{V}')} + \bar{v}\nabla \cdot \overline{(v'\vec{V}')}) dM \\ \langle A', K' \rangle &= - \int \frac{R\bar{T}'\bar{\omega}'}{p} dM \text{ (天气系统中的暖上升冷下沉)} \\ \langle [A], A' \rangle &= \int \frac{C_p}{\hat{T}} \bar{T} \nabla \cdot \overline{T' \vec{V}'} dM\end{aligned}$$

其中, $\langle K', [K] \rangle$ 表示涡和平均流的动能转化, 在西风带中心区域, 槽线西凸的情况会导致能量从平均流转化为涡旋能量, 因此扰动会扩大, 反之则被抑制。这一点也可以从上一章的正压不稳定判据中得到证实。 $\langle [A], A' \rangle$ 表示涡和平均流的位能转化, 从中可以喊出, 如果温度槽落后于地势槽, 则平均流能量会转化为涡旋能量, 反之亦反。

最终我们能够看出, 地球大气的能量会在平均流与涡旋的位能和动能之间流动。在北半球 (Oort & Peixoto 1974) 中, 能量产生项 (即太阳辐射) 会先将能量提供给位能, 然后总体来看平均流的位能会转化为涡旋位能, 然后转化为涡旋动能, 接着转化为平均流动能。平均流动能又会转化为平均流位能。其中, 动能都会通过耗散被消耗。

10 Boundary Layer Dynamics

10.1 Concepts

大气边界层指的是大气低层中受到地面直接作用的区域，并且边界层过程时间尺度在一小时及以内。边界层之上称为自由大气。通常云底高度 (LCL) 可以近似为边界层顶。

边界层在一日之内会有日变化，自日出开始，从近地面开始会发展出一层稳定层 (SBL)，稳定层之上是剩余层 (RL)，RL 上方会有一层覆盖逆温，逆温之下统称为边界层。当太阳落山之后，自近地面开始会生成一层夹带层（由辐射降温驱动），夹带层下是混合层。

边界层的重要性不言而喻，人类住在边界层，43% 的太阳辐射被边界层吸收，所有的水汽都从边界层进入大气，超过半数的动能在边界层中耗散，对大气能量交换有关键作用……（见大气科学概论）

10.2 Equations for the Boundary Layer

对边界层气象的研究基本就是对湍流的研究，所以所谓的边界层方程就是将控制方程用湍流的方式进行形变，实际应用的时候需要结合边界层的特征尺度。

研究湍流的基本方法和摄动法比较像，将所有的变量分解为平均态和湍流项。平均态在湍流研究过程中通常是作半小时到一小时的平滑得到的时间序列（之于平滑窗口为什么小于一小时，这是因为我们相信单个湍流的生命史尺度小于 1 小时），这样我们观测的尺度小于一小时的时候平均值就近似于恒定值了。湍流项就可以通过实际值减去平均值得到。

湍流传输各种量是通过所谓的涡通量实现的。以位温为例，湍流关注的是通量项 $w'\theta'$ ，如果通量项小于 0，则能量向下传输，即负能量通量，反之向上传输。

将湍流分解应用于 Boussinesq 近似的动量方程（含重力、科氏力、梯度力、分子粘性力和湍流粘性力¹），则有²：

¹湍流粘性力指的是由于湍流作用使得流体总体呈现出的粘性效果。

²这里使用 Einstein 求和，同一下标意味着对其求和，不同下标意味着向量，多个不同下标意味着矩阵甚至更高维的张量。 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，ij 相等的时候为 1，不等时为 0； $\varepsilon_{m n q}$ 是 Levi-Civita 符号，如果 mnq 是偶排列则为 1，反之为 -1，有重复下标时为 0。偶排列意味着，通过偶数次交换两个量能够得到 123，反之为奇数次。在流体问题中通常下标 1 为 x 方向，2 为 y 方向，3 为 z 方向。

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\delta_{i3}g + f_e \varepsilon_{ij3} \bar{U}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}$$

10.3 Log-law in the surface layer

边界层分为 Interfacial layer (0-10cm), Surface layer (10cm-100m) 和 Ekman layer (100m-1km)。表面层的风速非常低, 但是风切很强(因为界面上风速几乎为 0, 而 Ekman 层的风速逐渐接近自由大气了), 这意味着我们会有很强的湍流作用, 湍流主导了整层的动力学。这些湍流涡旋传输的动量和热量在垂直方向上没有显著变化, 因此这层也被称为 constant flux layer。

在表面层, 平均风速满足对数关系, 即

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}$$

这里的 $(u^*)^2$ 被定义为 $|\overline{u'w'}_s + \overline{v'w'}_s|$, 下标 s 表示接近表面处。 $\kappa = 0.41$ 为冯卡门常数, $z_0(m)$ 为动力粗糙度, 由表面性质决定。

下面简单推导一下对数法则。如果我们假设流动的方向为 x 方向 (由于我们考虑的尺度很小, 纬度差异不需要考虑, 这种坐标选择不会影响什么), 则可以进一步将 $(u^*)^2$ 简化为 $|\overline{u'w'}_s|$ 。

由于表面层为 constant flux layer, 因此不论 z 为多少, $\overline{u'w'}(z) = \overline{u'w'}_s = -(u^*)^2$, 这里的负号是因为上层风速比下层大, 所以 $\overline{u'w'}(z) < 0$, 而平方恒正, 所以取绝对值就是加个负号。然后再假设湍流涡旋顺梯度混合³, 也就是说

$$\overline{u'w'}(z) = -K(z) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$K > 0$ 是湍流混合效率, 其大小表示了湍流涡旋的强度。一种估计是 $K(z) = l_c u_c = \kappa z u^*$, 这里 $l_c = \kappa z$ 被称为混合长度, 指的是湍涡的的长度尺度⁴。所以我们有

³这个式子是说, 如果湍流强度不变, 风切越强, 风切转化为湍流涡旋的效率越强; 如果风切一定, 湍流混合效率越高 (比如湍涡越大) 则转化效率越高。这是一种对湍流能正向级串的参数化, 适用于大多数情况, 但是约 20% 的情况并不满足。

⁴这里的 l_c 表示的长度尺度一般指的是最大的湍涡的尺度, 实际上湍涡的大小分布是不清楚的, 什么样的都有。此处的估计和前面那个公式都是所谓的 K 理论的一部分, 本院的同学应当在空气污染气象学接触过。这都是半经验的方法。

$$\begin{aligned} u^* &= \kappa z u^* \frac{\bar{u}}{\partial z} \\ d\bar{u} &= \frac{1}{\kappa} u^* \frac{dz}{z} = \frac{1}{\kappa} u^* d(\ln z) \\ (\text{假设 } z = z_0 \text{ 时, } \bar{u} = 0) \quad \bar{u} &= \frac{u^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \end{aligned}$$

这里对 l_c 的估计, 对中性大气是没问题的, 然而如果有层结, 不管稳不稳定, 都会影响湍流发展。所以我们有一个无量纲数来衡量层结与风切的相对大小, 从而来衡量湍流的大小 (稳定层结抑制湍流)。这就是 (gradient) Richardson 数:

$$R_i = \frac{\frac{g \frac{\partial \theta}{\partial z}}{\theta \frac{\partial z}{\partial z}}}{\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}\right)^2} = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}\right)^2}$$

可见如果 $Ri < 0$, 这意味着对流不稳定, 讨论湍流没什么意义; 如果介于 0 和 0.25, 这说明稳定层流将会发展出很强的湍流; 如果介于 0.25 和 1, 则有弱湍流; 如果大于 1, 则基本上是层流。

基于 Richardson 数, 我们有一种对 l_c 的估计修正:

$$l_c = \kappa z_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^\beta$$

这里的 β 是 Richardson 数的函数, 具体是什么, 取决于我们如何利用观测数据拟合。如果 $\beta > 1$, 我们认为湍流强 (不稳定), 反之弱 (稳定), 如果等于 1 则是中性的状态 (也就是对数法则的估计)。将这种修正代入 K, 最终得到的就不是对数法则, 而是

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa(1-\beta)} \left(\left(\frac{z}{z_0}\right)^{1-\beta} - 1\right)$$

如果我们取高度的对数作为纵轴, 风速为横轴, 则所谓的中性状态为直线, 稳定的曲线应当是凹函数, 反之不稳定意味着凸函数。(考试不会涉及这个)

最简单的对数情况会考推导。

10.4 Ekman Spirals

在 Ekman 层, 在水平方向上, 湍流粘性、压力梯度力和科氏力三力平衡, 造就了风速随高度的变化, 不同高度的风矢量叠加起来就是所谓的 Ekman 螺线。最初这玩意是在海里发现的, 后来在大气边界层也观察到类似的现象。

Ekman 螺线的基本假设是: 1. 中性大气, 没有加热或冷却; 2. 气块没有加速度, 也就是稳定流; 3. 密度恒定; 4. 压力梯度力随高度不变; 5. 水平混合比垂直混合小得多;

6.K 恒定。这些假设在边界层以及小尺度下是自然的。

接下来我们看控制方程：

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\delta_{i3}g + f_e \varepsilon_{ij3} \bar{U}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \bar{u}'_i u'_j}{\partial x_j}$$

(在 Ekman 层分子粘性可以忽略) $\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\delta_{i3}g + f_e \varepsilon_{ij3} \bar{U}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{u}'_i u'_j}{\partial x_j}$

(风速不变) $0 = -\delta_{i3}g + f_e \varepsilon_{ij3} \bar{U}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{u}'_i u'_j}{\partial x_j}$

(只考虑水平风) $0 = f_e \varepsilon_{ij3} \bar{U}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{u}'_i u'_j}{\partial x_j}$

(考虑水平混合比垂直混合小得多) $0 = f_e \varepsilon_{ij3} \bar{U}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{u}'_i w}{\partial x_j}$

(考虑顺梯度传输与恒定的 K) $0 = f_e \varepsilon_{ij3} \bar{U}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + K \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial z^2}$

(代入地转风) $0 = f_e \varepsilon_{ij3} \bar{U}_j - f_e \varepsilon_{ij3} \bar{U}_{gj} + K \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial z^2}$

我们展开为方程组：

$$f\bar{v} - f\bar{v}_g + K \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0$$

$$-f\bar{u} + f\bar{u}_g + K \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} = 0$$

假设有流函数 $\phi = \bar{u} + i\bar{v}$, 并设 $D = (\bar{u} - \bar{u}_g) + i(\bar{v} - \bar{v}_g)$, 于是方程可以整理为：

$$K \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} - i f D = 0$$

这是线性齐次方程，分离变量求解得到：

$$D = c_1 \exp\left(\frac{1+i}{h_E} z\right) + c_2 \exp\left(-\frac{1+i}{h_E} z\right)$$

这里 $h_E = \sqrt{2K/f}$ 。

作假设，无穷高处 $D=0$, $z=0$ 处 $D = -\bar{u}_g$, 分别得到 $c_1 = 0, c_2 = -\bar{u}_g$, 于是

$$D = -\bar{u}_g \exp\left(-\frac{1+i}{h_E} z\right)$$

分离实部和虚部得到

$$\bar{u} = \bar{u}_g \left(1 - e^{-\frac{z}{h_E}} \cos \frac{z}{h_E} \right)$$

$$\bar{v} = \bar{u}_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sin \frac{z}{h_E}$$

将其画在 $\bar{u} - \bar{v}$ 图像上，得到的就是 Ekman 螺线。其角度为

$$\theta = \arctan \frac{v}{u} = \arctan \frac{e^{-\frac{z}{h_E}} \sin \frac{z}{h_E}}{1 - e^{-\frac{z}{h_E}} \cos \frac{z}{h_E}}$$

(此处建议看图) 所以 z 趋于 0 时，风向为 45 度，随着高度增加，风矢量无限接近于 \bar{u}_g 。其最大值大约在夹角超过 $\pi/2$ 这会儿出现，这一高度记为 h_m 。 $z = 1.46h_E$ 时，首次有 $V = \bar{u}_g$ ，但是此时仍未到达最大值，此高度记为 h_v ；在 $z = \pi h_E$ 时， $V = 1.04\bar{u}_g$ ，风速比地转风要大，即有超地转风；当首次有 $v_g = 0$ 时，即 $\theta = \pi$ 时，高度记为 h_θ 。

如果我们把风代回原来的湍流粘性力项（也就是风对 z 求两次偏导），得到 \vec{F} ，然后再求非地转风 \vec{A} ，我们会发现 $\vec{F} \cdot \vec{A} = 0$ ，也就是说，在三力平衡下，摩擦力与非地转风垂直。

总之，虽然 Ekman 螺线的推导结果很精彩，但是非常有局限性：

首先，对中性大气假设，只有在重阴天，或者取边界层日平均，才能得到，对一般的特定时刻，风矢并不按照 Ekman 螺线分布；其次，在高层，湍流混合会变弱， K 不恒定；最后，近地面为地转风假设也不是很合理。总之，问题不少，Holton 上对此有更详细的论述，见[Holton 动力气象引论学习笔记 · 第八章：行星边界层](#)。

11 For Final Exam

老师说，期末考试的内容只会考复习课上 PPT 和作业涉及的，并且 PPT 会提供，所以这部分我不打算详细讲，如果大家遇到问题，可以利用本文本的目录跳转到相应部分。