第一届“琪露诺杯”数学竞赛

命题人：Chiston Ryan

说明：

1、本试卷共6页，五道大题，按照难度分为Easy, Normal, Hard, Lunatic和一道附加题Extra，满分 110 分（含附加题 10 分），考试时间为 2022 年 7 月 20 日 7:00~23:00

2、本次竞赛由华南师大附中学生自发举办，不具有官方效力。本卷中提及的人物、团体等均已进入幻想。

3、考生须用黑色签字笔将答案规范地书写在空白纸张上，注明题号和姓名(非华附考生注明学校)，在 7 月 20 日 23:00 前以图片形式提交至邮箱 2938114332@qq.com.

4、考试过程中，考生可以通过任意渠道查阅与试题有关的资料，并且可以使用计算器。

5、解答应写出演算步骤、证明过程或文字说明。

Easy（25 分）【妖怪之山~Mysterious Mountain】【命题人:Chiston Ryan】

传说，在遥远的东之国有两座高山：八岳和富士山。有一天，居住在富士山的两柱女神——妹妹木花咲耶姬和姐姐石长姬，关于这两座山究竟谁高产生了争执。于是，她们在两山的最高峰之间架起了一个水管，通过水流的方向判断山峰的高度。结果，水流是向着富士山方向流动的。咲耶姬不允许有其他的山比美丽的自己所居住的富士山更高，于是，愤怒的她将八岳山的山峰削去了一块。从此，富士山就成了东之国最高的山。而石长姬也对妹妹产生不满，移居到八岳上了。

——摘编自小说《东方儚月抄》

许多年后，八岳的一部分与外界建立了结界，改称“妖怪之山”。天狗一族生活在山中，他们的一个分支——鸦天狗善于飞行，因此常负责情报收集和新闻制作。射命丸文就是一名鸦天狗少女，为了给她的《文文。新闻》寻找素材，她决定飞出结界外，到富士山采光。

现在，我们视地球为半径$R=6371km$的球体，八岳和富士山的一开始的高度分别为$4200m$和$3776m$，被削去山峰后的八岳高度为$2900m$，它们的经纬度分别为：八岳(35°58'30"N,138°21'53"E)，富士山(35°21'38"N,138°43'40”E)(经纬度数据来源:Google Earth)

射命丸文想估算一下两山间的距离，于是她去请教了幻想乡中著名的数学家：八云蓝。八云蓝给出了以下定义和定理：从四棱锥$S-ABC$的一个顶点S出发，所形成的三个平面ASB,BSC,CSA围成一个三面角. 现用α,β,γ来表示这三个角，若平面ASB与平面BSC垂直，则有$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$

问题(本题的数值结果均保留三位有效数字)：

(1)证明八云蓝给出的定理.

(2)由于八岳和富士山的距离很近(相对地球半径而言)，在计算两者距离时，可以近似地认为两者在球面上的连线是直线。试据此计算两者距离，并简要说明这一近似的合理性。

(3)现在射命丸文想找到从八岳山麓飞至富士山麓的最短路径，请求出最短的飞行距离，并给出大致的飞行路线。

(4)若 Part A 中提及的水管是不弯曲的直管，且水流不受地球自转影响，请分别判断八岳山峰被削去前后，水流是否能够从其中一座山的山峰流向另一座山的山峰。

Normal（**20 分**）【爆炸吧!红魔馆】【命题人:Chiston】

在神秘幽静的雾之湖畔坐落着一座巨大的洋馆——红魔馆,吸血鬼斯卡雷特姐妹和她们的部下在此居住。然而，命运多舛的红魔馆常常因为各种原因而爆炸。某天，一阵陨石雨穿过大气层和大结界，朝红魔馆袭来，关于这些陨石，有如下信息：

① 陨石爆炸瞬间，其中央的能量密度为P_0，冲击波强度随距离指数衰减：$P = P_0e^{-kx}$，其中x为爆炸处与测量处的距离，单位为km,对所有陨石而言，k是常量($k > 0$)

② 这些陨石中绝大部分的P_0值很小,不会损坏红魔馆。为测定其中一阵陨石的参数（认为它们的P_0相同），馆中的魔女帕秋莉·诺蕾姬布设了魔法阵，击破了一部分小陨石，测得数据如下：

组别/数据	1	2	3	4	5	6	7	8
x/km	0.56	0.77	0.90	1.22	1.30	1.46	1.71	1.84
$P/W\cdot m^{-2}$	588	568	560	539	536	523	506	497

③ 不幸地，有一块巨大的陨石正向朝着红魔馆袭来。如果它降落在红魔馆中央，将不可避免地摧毁红魔馆。幸好，帕秋莉已经估计出它的中央能量密度仅为10^6P_0.

问题(除特别说明和提示外，本题的数值结果均保留三位有效数字)：

(1)请你利用线性回归的知识，帮助帕秋莉计算出P_0和k的值(其中k保留两位有效数字即可)

(2)为了拯救红魔馆，吸血鬼之妹——芙兰朵露·斯卡雷特决定利用她“破坏事物的能力”拯救红魔馆。她找到这块大陨石的“目”并将其分裂成$n(n \geq 2)$枚碎片，每一枚碎片具有大陨石能量的$n^{-\frac{1}{2}}$ 。结合物理知识，帕秋莉求出碎片落地时与红魔馆的距离恰为$n\ km$。请计算最坏情况下红魔馆受到的冲击波强度与此时的n值.

(3)馆主蕾米莉亚·斯卡雷特想出了另外一个解决方案——利用她“改变命运的能力”，可以让大陨石在落地前爆炸。若爆炸高度$h = 0.8km$,炸点位于红魔馆正上方，红魔馆是半径$r = 0.6km$的圆。试计算红魔馆受到的平均冲击波强度。

Hard（**25 分**）【为什么扔掉我的书！】【命题人:Chiston】

宇佐见堇子是东深见高中的一名*JK*，平日里爱好阅读和神秘学。她在教室外的储物柜中放有一叠共n本书。某天，因为一些未知的原因，同学们的书从柜中被取出，并被随意地扔到了教学楼一楼的大厅，这其中也包含了堇子的那一叠书。愤怒又无奈的堇子只能想办法找齐整理被扔掉的书籍。不妨假设聪明的她和你都已经对图论的知识有一定了解……呃……可能这个假设太大胆了一些。不过不要紧，堇子会向你简单介绍一下图论的，让我们开始吧！

Part A(14 分)

首先下一些基本的定义：一个图G是由两个互不相交的子集：点集E和边集V并成的集合。其中，边集V是二维点集E^2的一个子集(此处我们不考虑点的先后顺序，即边是无方向性的；且两点之间至多有一条边相连)。通俗地讲，一个图就是一大堆点和连接这些点的一部分边。

我们将与节点v_i相连的边的条数称为v_i的度，记为d_{v_i}。若d_{v_i}为奇数，则称v_i为奇点，否则称为偶点。若$d_{v_i} = 1$，则称点v_i是一个悬挂点，与它相连的边为悬挂边。由两两相连的点以及与它们关联的边构成的点-边序列称为链(或路),每一条链的两个端点称为起点和终点。若某一条链的起点与终点相同，那我们称之为闭链(或回路)，反之称为开链

然后我们介绍一些特殊的图：类似于子集和母集的关系，我们可以定义出子图。一个含

有n个点，且各点两两之间都有边相连，那我们称之为 n 阶完全图。如果对于图中任意两点，均至少存在一条链，那这个图就是一个连通图。若一条闭链，除起点和终点外各点均不相同，那我们称这条闭链为一个圈。不含圈的连通图被称为树。

介绍到这里，董子决定对你的学习成果进行检验，请先回答下面几个基础的问题吧！

问题：

(1)证明：任意图中奇点的个数必为偶数.

(2 求树中点数与边数的关系，并证明当树G的点数大于 1 时，G中至少有两个悬挂点

(3)求 5 阶完全图的子图中树的棵数.

Part B(11 分)

相信你对图论的知识已经有了基本的了解了，接下来就开始帮助董子解决找书的问题吧。现在一楼大厅的情况是这样的：地面上的书堆积成山，几乎无法落脚；董子的书分散在书山中的n个书堆里，每个书堆中有且仅有董子的一本书。幸好，在书山之间有$n-1$ 条通道将这n个书堆连接了起来，通道的长度是正整数，每条通道仅连接两个书堆，每两个书堆之间都可以通过若干条通道相互到达。容易知道n个书堆之间共有$\frac{n(n-1)}{2}$个“书堆对”. 现在，董子发现每两个书堆之间的最短距离恰为 $1,2,\ldots,\frac{n(n-1)}{2}$.

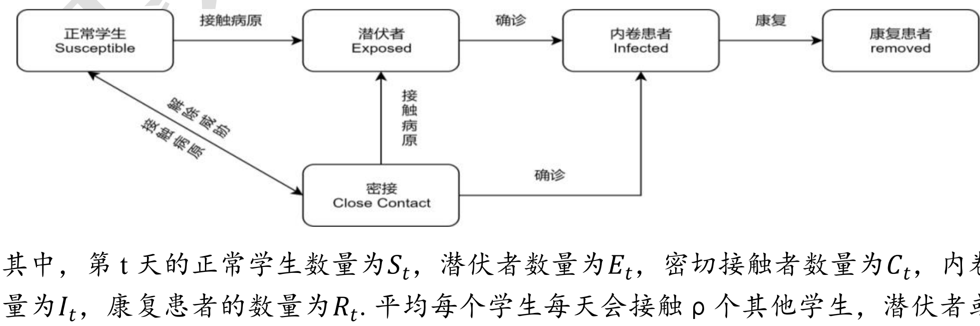
问题：分别讨论在$n=6$ 和$n=2022$ 两种情况下，董子的发现是否有成立的可能。

Lunatic(30 分)【内卷病毒？】【命题人:Ryan】

近日，一种诡异的内卷病毒悄然潜入广州校园. 这种病毒靠感染者所散发的独特气场传播，在气场内都有概率被传染. 得了这种病后，感染者将会不顾一切地内卷，拒绝一切形式的娱乐、活动和课外学习，虽然病不至死，但对同学们的伤害极大. 不过好在这种病可以自愈，并且康复后就有百分百免感染抗体，不过康复后会留下显著的标志. 现在，你作为反卷大队的参谋长，将承担起组织同学们抗击内卷病毒的重任. 在抗击之前，你已经有了一些相关经验，并在参谋部作战会议上进行了介绍：

Part A(20 分)

已知所有同学中有五种类型的同学：



其中，第 t 天的正常学生数量为S_t，潜伏者数量为E_t，密切接触者数量为C_t，内卷患者的数量为I_t，康复患者的数量为R_t. 平均每个学生每天会接触 ρ 个其他学生，潜伏者或者内卷患者与其他学生接触时有 β 的概率被感染. 密切接触者每天有 δ 的概率转化为潜伏者患者，密切接触者每天有 σ_C的概率确诊，潜伏者每天有 σ_E的概率发病并确诊. 确诊的同学每天有γ_I的概率康复，密接同学有γ_C的概率解除威胁. 学生总数为 N，保持不变.

那么，我们可以得到下面的方程组：

$$
\begin{cases}
S_{t+1} = S_t - \rho \dfrac{I_t + E_t}{N} + \gamma_C C_t \\
E_{t+1} = E_t + \rho\beta \dfrac{I_t + E_t}{N} - \sigma_E E_t + \delta C_t \\
I_{t+1} = I_t + \sigma_E E_t + \sigma_C C_t - \gamma_I I_t \\
R_{t+1} = R_t + \gamma_I I_t \\
C_{t+1} = C_t + \rho(1-\beta) \dfrac{I_t + E_t}{N} - \gamma_C C_t - \sigma_C C_t - \delta C_t
\end{cases}
$$

该模型被称为 SEIRC 模型.

在采取一定的隔离措施后，又经过数日的前期观察，你收集到如下数据：

S_0	E_0	C_0	I_0	R_0	ρ
1000	50	100	20	3	75
β	σ_C	σ_E	γ_I	γ_C	δ
0.2	0.1	0.5	0.2	0.2	0.8

问题(除特别说明和提示外，本题的数值结果均保留三位有效数字)：

(1)第几天内卷病确诊患者数量最多？此时有多少内卷病确诊患者？（若结果为小数，则向下取整）

(2)本轮疫情有没有可能超过 50%的同学被感染过？若有，请求出首次超过 50%的同学被感染的天数，若无，则求出最多有多少同学被感染过.

(3)直接写出I_t的通项公式.

(4)若第 3、4 天学校举行了运动会导致每位同学日均接触其他同学数目达到 200，此后开始严格管理. 严格管理时反卷小组会通过一些措♁施来提高影响确诊同学的康复概率. 同时，由于严格管理，部分同学的抵抗情绪会加强内卷病毒的传染性，并存在以下关系：

$$\beta = \ln\left(5\gamma_I\left(\gamma_I - \frac{1}{e}\right)\left(\gamma_I - \frac{1}{3}\right) + e - 1.43\right)$$

$$\sigma_c = 1 - \beta$$

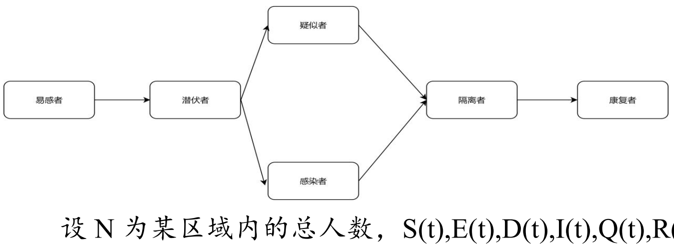
若其他条件不变，康复概率不超过 0.7，该如何控制康复概率使得受到荼毒的同学最少？

Part B(10 分)

经过调查，原来是接到学校的委托，平时待在黑暗风穴内的黑谷山女前来帮助学校加快翻新德政楼外墙的进度，结果把疾病带来了学校. 校方表示，临走前，黑谷山女曾提到“看来又是新的症状呢，那就命名为华附 B 型病吧(笑)”等等，既然有 B 型，那说明……

你即刻前往调查过去华附曾出现过的传染病，果然，档案室里发现了前辈留下的传染病研究记录. 你摘录了其中一段：

“本轮不知名传染病来势汹汹，许多同学高烧回家休息，有些同学也出现了精神萎靡、食欲不佳的症状. 我们亟须一个模型来辅助研究疫情的发展趋势。



设 N 为某区域内的总人数，S(t),E(t),D(t),I(t),Q(t),R(t)分别为 t 时刻（天）的易感者、潜

伏者、疑似者、感染者、隔离者和康复者人数，β(t)表示随时间变化的疫情有效 接触率，它是关于时 t 的分段函数，α为疑似者中未确诊感染者所占的比例，g 为潜伏者转为疑似者的比例，σ为潜伏者转为感染者的比例，θ表示疑似者转为隔离者的转移率，η表示感染者转为隔离者的转移率，γ表示隔离者的退出率，δ表示疫情的平均死亡率.不考虑出生率、死亡率和人口迁移对疫情传播的影响.那么人群管制下传染病传播动力学模型：

$$\frac{dS(t)}{dt}=-\frac{\beta(t)S(t)I(t)}{N-Q(t)}-\frac{\beta(t)S(t)\alpha D(t)}{N-Q(t)}-\frac{\beta(t)S(t)E(t)}{N-Q(t)} \tag{1}$$

$$\frac{dE(t)}{dt}=\frac{\beta(t)S(t)I(t)}{N-Q(t)}+\frac{\beta(t)S(t)\alpha D(t)}{N-Q(t)}+\frac{\beta(t)S(t)E(t)}{N-Q(t)}-\sigma E(t) \tag{2}$$

$$\frac{dD(t)}{dt}=\vartheta\sigma E(t)-\theta D(t) \tag{3}$$

$$\frac{dI(t)}{dt}=(1-\vartheta)\sigma E(t)-\eta I(t) \tag{4}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt}=\theta D(t)+\eta I(t)-\gamma Q(t) \tag{5}$$

$$\frac{dR(t)}{dt}=(1-\delta)\gamma Q(t) \tag{6}$$

有效再生数表示某一时刻 t 确诊的某一位感染者,在其感染期内平均会传染多少二代确诊病例. 若有效再生数等于 1，则该点为无病平衡点，设为 $x=(x_1,x_2,...,x_n)^t$ 每个人群类别在 t 时刻的个体数量，且有 $x_i\geqslant 0,i=1,2,...,n$，$X_s=\{x\geqslant 0\,|\,x_i=0,i=1,2,...,m\}$ 为无病平衡点,m 表示有感染个体的人群类别数量. $F_i(x)$为人群类别 i 中新感染个体的比率，$V_i^+(x)$表示以各种方式转换到人群类别 i 的转换率，$V_i^-(x)$表示从人群类别 i 转移到其他类别的转换率，$V_i(x)=V_i^-(x)-V_i^+(x)$为转移比率. 那么传染病传播动力学模型可以表示为

$$\dot{x}=f_i(x)=F_i(x)-V_i(x),i=1,2,...,n$$

如果X_0为模型式（7）的无病平衡解，那么对于导数 $dF(X_0)$和 $dV(X_0)$，有

$$dF(X_0)=\begin{pmatrix}F&0\\0&0\end{pmatrix},dV(X_0)=\begin{pmatrix}V&0\\J_3&J_4\end{pmatrix} \tag{7}$$

其中，$F=\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X_0)\right],V=\left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(X_0)\right],1\leqslant i,j\leqslant m$

F 为非负矩阵，V 为非奇异矩阵，V 的逆矩阵$\mathbf{V^{-1}}$为非负矩阵，$\mathbf{FV^{-1}}$ 为模型的下一代矩阵，也称为再生矩阵.

有效再生数可以通过传染病的无病平衡点推导得出,即通过求解下一代矩阵的最大特征值就可以得到有效再生数的表达式： $R(t)=\rho(FV^{-1})$ （8）

设人群管制下疫情的无病平衡点为x_0……”

由于年久失修，后面的档案破损比较严重，以至于无法判断学长(姐)究竟写了什么.

问题：

求疫情有效再生数的表达式.

Extra（10 分）【『纯粹的数学地狱』】【命题人:Chiston】

你只需要在下面三个问题中选择一个进行作答。如果乐意的话，也可以多做几道，说不定会给多一点分呢 *XD*.

问题：

(1)求一簇直线$l:(x-1)\cos\theta+y\sin\theta=1,\theta\in[0,2\pi)$截椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 所得弦长的最大值.

(2)计算：$\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}\ (n\in Z$且$n\geq 2)$

(3)已知$f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$满足当 $x\in[0,2],|f(x)|\leq 1,$求abc的值.