
目标定向导航中的运动规划神经回路--列群算子搜索

左俊峰^{1,(/)(3)}

zuojunfeng@pku.edu.cn

吴英年²

ywu@stat.ucla.edu

吴思¹

siwu@pku.edu.cn

张文浩^{3,4*}

wenhao.zhang@utsouthwestern.edu

¹北京大学高等交叉研究院北京-清华生命科学中心、北京大学心理与认知科学学院、

IDG/麦戈文脑研究所、北京大学定量生物学研究中心。

²统计系。³Lyda Hill 加州大学西南医学中心生物信息学系。⁴UT西南医学中心奥唐纳脑研究所。

摘要

大脑中的信息处理与具身代理形成了一个感知-行动循环，从而与世界进行互动。环路中的一个重要步骤是运动规划，它根据当前的世界状态和任务需求选择运动动作。在目标定向导航中，大脑选择并产生运动动作，使当前状态进入目标状态。目前尚不清楚运动动作选择的神经回路机制及其基础理论。本研究将运动规划表述为 Lie 组算子搜索问题，并以一维旋转组为例，深入探讨神经回路中的一般算子搜索。我们发现，利用连接相移、非线性激活函数和池化等电路模式，抽象的群算子搜索可以通过双层前馈电路来实现，这与果蝇的目标导航神经回路类似。在某些条件下，前馈电路的计算复杂度甚至低于普通信号处理算法。我们还提供了组表示空间中电路计算的几何解释。我们将前馈运动规划电路与感觉和运动电路模块进一步结合，形成一个完整的感知-动作环路，实现目标定向导航。我们的研究首次将抽象算子搜索与生物神经回路联系起来。

1 引言

大脑中的信息处理形成了一个感觉-行动环路，与外部世界相互作用（图 1A）[1-3]。感觉-动作环路由三个模块组成：感觉神经回路模块形成世界状态的神经表征，运动回路模块产生改变世界状态的运动动作，在这三个模块之间还有一个重要的感觉运动转换模块，该模块根据感觉输入和任务目标计划运动动作[4, 5]。例如，在目标定向的导航任务中，感觉运动转换模块会计划一系列运动动作，将当前的感觉状态带向目标状态。广泛的神经科学研究已经调查了

*通讯作者：

第 38 届神经信息处理系统大会（NeurIPS 2024）。

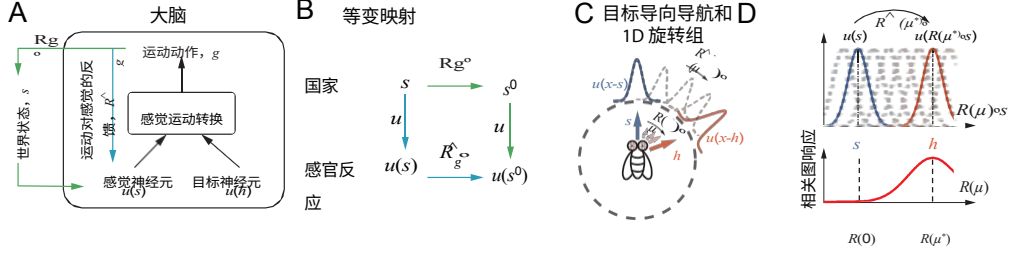


图 1: (A) 感知-动作循环。感知运动转换根据 世界状态和任务目标计划运动动作。(B) 感觉神经元响应的等变图谱。(C) 1D 旋转组作用于周期性状态 s 的具体例子, 该状态可被视为苍蝇的飞行方向。感觉神经元组成的神经元群代码 $u(x-s)$ 均匀地覆盖了 s 的空间 (公式 1)。(D) 通过群卷积可以找到所需的算子, 即在群流形上找到交叉相关函数的峰值位置。

然而, 运动规划的神经回路机制[4-9]以及其背后的计算理论还远未阐明。运动规划也是机器人控制、强化学习和机器学习等工程研究中体现代理的基本计算[10-13]。研究运动规划神经回路及其计算理论将有助于我们理解大脑, 并为具身代理提供大脑启发的回路模型。

为了给运动规划提供理论依据, 本研究利用 (李) 群理论定义了感觉-动作环路。用 s 表示连续的世界状态, $u(s)$ 表示感觉神经元群的诱发反应, x 为神经元索引。假设运动系统从一个李群 G 中产生同类动作 (如平移或旋转) 来转换世界状态 s 。运动动作 $g \in G$ 对世界状态 s 和更新的感觉表征 $u(s)$ 的影响可表示为 (图 1A; \circ 表示下图) [14]、中的群动作

$$u(s') = u(R_g \circ s) = \hat{R}_g \circ u(s), \quad g \in G. \quad (1)$$

R_g 是改变世界状态 s 的组算子 (运动动作) (图 1A, 绿色), 它对更新的感觉反应 $u(s')$ 的影响可概括为直接作用于原始反应 $u(s)$ 的神经算子 \hat{R}_g (图 1A, 蓝色), 可视为大脑中运动到感觉的神经反馈[15]。要表示所有群变换下的所有世界状态 s , $u(s)$ 必须满足公式 $\hat{R}(g)$ 。

(1) 适用于所有 $g \in G$, 称为与 G 群的等价性 (群同构) (图 1B)。在李群框架下 (式 1), 目标导航中的运动规划可表述为寻找一个算子 \hat{R}_g , 将当前状态 $u(s)$ 的感官响应带入目标状态 $u(h)$ 、

$$\text{求 } \hat{R}_g; \text{ 受 } \hat{R}_g \circ u(s) = u(h), \quad g \in G. \quad (2)$$

找到 \hat{R}_g 的直观方法是在组空间中进行穷举搜索: 对 $u(s)$ 应用每一个算子, 然后选择最接近目标响应 $u(h)$ 的一个算子 (表 S1, Supplementary Info.(SI)), 对应于在组卷积中找到峰值位置 (图 1D, 底部) [16, 17]、

$$g^* = \arg \max_g L(g); \text{ 其中 } L(g) = [u(h) * u(s)](g) = u(h), \quad \hat{R}_{(g)} \circ u(s) \quad (3)$$

则最优群算子为 \hat{R}_{g^*} 。* 表示组 g 卷积, $u(h) * u(s) = \int u(x-h)u(x-R_g s)dx$ 为内

积。特别是，当 s 是一维变量且 \hat{R}_g 是一维平移算子，群卷积 $L(g)$ (公式 3) 简化为交叉相关的函数，该函数被广泛应用于信号处理中 [18, 19]。

本研究探讨了大脑神经回路如何在目标定向导航中搜索组算子 \hat{R}_g (动作) (公式 2)。我们以一维旋转算子组为例，深入探讨一般算子搜索的神经回路机制。虽然寻找一维旋转算子在数学上很简单，而且可以通过现有的信号处理算法实现，但其神经回路实现却从未被探索过。我们从理论上推导出一种用于一维旋转算子搜索的双层非线性前馈电路，它由连接相移、非线性激活函数和池化等电路模式组成，推导出的电路与果蝇的目标定向导航神经回路相似[20-23]。我们将每个神经回路计算与

在算子搜索中的运算，并在群表示空间中提供电路计算的几何解释。此外，在某些条件下，用于算子搜索的衍生前馈电路的计算复杂度甚至低于信号处理中基于快速傅立叶变换的标准算法。我们进一步将推导出的前馈电路与感觉电路和运动电路组装在一起，形成整个感觉-动作回路的完整神经回路。

意义重大。本研究是首次将运动规划表述为群算子搜索问题的研究之一，并通过严格的数学分析推导出生物上可行的神经回路实现方法。运动规划的组算子搜索表述可为将现有运动规划算法泛化为不同变换提供规范方法。此外，就群等变机器学习而言，本研究开发的理论和感觉运动变换电路模型与现有的许多与感觉系统相对应的等变网络（如[17, 24-27]）是互补的。

2 一维旋转神经组算子搜索

我们以一维旋转群 $U(1)$ 为例，深入探讨神经回路中群算子搜索的一般原理。 $U(1)$ 流形是复平面上的一个单位圆（图 2A），可以用角度 θ （对应于一般李群中的 g ，公式 1）、来参数化

$$U(1) = \{\exp(i\theta), \theta \in [-\pi, \pi)\}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (4)$$

一个群元 $R(\theta) \in U(1)$ 通过 θ 旋转一维刺激方向 $s \in [-\pi, \pi)$ ，或其复数代表 e^{is} ，即把 s 转化为 $s + \theta \pmod{2\pi}$ ，表示为 $R(\theta)s \triangleq e^{i\theta}e^{is} = e^{i(\theta(s) + (s))}$ 。根据公式 (1)，旋转变量感觉响应 $u(s)$ 应满足（为简洁起见，省略 "mod 2π "）、

$$u[R(\theta) \circ s] = u(s + \theta) = \hat{R}(\theta) \circ u(s). \quad (5)$$

$\hat{R}(\theta)$ 是旋转感觉表征 $u(s)$ 的神经算子。由于旋转算子以加法方式改变 s ，即 $u(x \circ s) = u(x \circ s + \theta)$ ，因此可以检验等变量感觉响应是否满足 $u(x \circ s) = u(x \circ s) \circ u(s)$ [28]，其中神经元指数 x （也称为偏好方向）与 s 以加法方式相互作用，这意味着神经元响应只取决于差值 $x \circ s$ （图 1D）。旋转方差神经反应 $u(x \circ s)$ 已广泛应用于神经编码研究[29-31]，通常被称为同质神经编码。为了使我们的理论具有普遍性，我们暂且不讨论 $u(s)$ 的具体轮廓，我们将看看群结构是如何对其进行约束的。

在一维旋转的情况下，目标导航任务中的运动规划是找到一个旋转算子 $\hat{R}(\theta)$ ，将感觉响应 $u(s)$ 旋转到目标方向 $u(h)$ 。由于 $U(1)$ （公式 5），的简单性所需的旋转算子为 $\hat{R}(\theta^* = h - s)$ ，即

$$\hat{R}(h - s) \circ u(x \circ s) = u[x \circ (s + h - s)] = u(x \circ h), \quad (6)$$

其参数是角差 $\theta^* = h - s$ 。虽然计算角差很简单，但在神经回路中搜索神经算子 $\hat{R}(\theta)$ 并非易事。这是因为 $\hat{R}(\theta^*)$ 是一个抽象的数学对象，而不是数值 θ^* ，即使它是由 θ^* 索引的。这种区别体现在虽然算子的参数 $\theta^* = h - s$ 是算术减法，但神经算子 $\hat{R}(\theta)$ 绝非神经反应 $u(h)$ 和 $u(s)$ 之间的算术减法。

2.1 一维神经旋转算子的结构和表示方法

搜索抽象神经 $\hat{R}(\theta)$ 首先需要神经回路来表示。直观地说，表征意味着抽象算子与数值（如神经元活动）之间的一一映射，然后搜索抽象算子可以转换为常见的数值优化，并进一步映射到神经动力学。因此，我们研究神经算子 $\hat{R}(\theta)$ 的结构，以揭示其神经表征。考虑一个无穷小的旋转 $\hat{R}(\delta\theta)$ ($\delta\theta \rightarrow 0$)，它对感觉响应 $u(x-s)$ 的影响是（使用一阶泰勒展开）

$$\hat{R}(\delta\theta) \circ u(x-s) = u(x-\delta\theta-s) \approx u(x-s) + \delta\theta(-\partial_x)u(x-s) = (1 + \delta\theta \cdot \hat{J})u(x-s). \quad (7)$$

$\hat{J} \equiv -\partial_x = \partial/\partial x$ 是表征无穷小旋转切空间的一维旋转发生器，可用作李代数的基础。通过使用无穷小旋转，可以

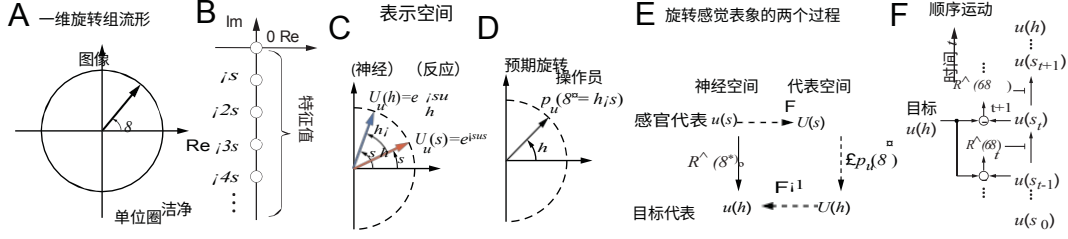


图 2：（A）一维旋转群流形。（B）一维旋转组算子的特征值谱。（C-D）神经反应（C）和所需旋转算子（D）在算子特征函数所跨的组表示空间中的表示。（E）将感觉反应旋转到目标方向的两个数学等价过程。（F）序列运动规划。

旋转算子的微分和指数形式是（见 SI. 第 1.1）、节

$$\frac{d}{d\theta} \hat{R}(\theta) = \hat{J} \Leftrightarrow \hat{R}(\theta) = \exp(\theta \hat{J}), \quad (8)$$

神经旋转算子 $\hat{R}(\theta)$ 是交换式的，这意味着两个旋转的组成是相同的，无论其顺序如何，即 $\hat{R}(\theta_1)\hat{R}(\theta_2) = \hat{R}(\theta_2)\hat{R}(\theta_1)$ 。交换群算子有一组共同的特征函数，可用来表示群。可以检验

$$\{f_\omega(x) = e^{i\omega x} / \sqrt{2\pi}, \omega \in \mathbb{Z}\} \text{ 是 } \hat{J} \text{ 的归一化特征函数集、} \quad (9)$$

$$\hat{J} \cdot f_\omega = -\partial_x e^{i\omega x} / \sqrt{2\pi} = (-i\omega) \cdot e^{i\omega x} / \sqrt{2\pi} = \rho_\omega(\hat{J}) \cdot f_\omega,$$

每个 f_ω 都有特征值 $\rho_\omega(\hat{J}) \triangleq -i\omega$ 。特征值 $\rho_\omega(\hat{J})$ 可以看作是 f_ω 的表示。此后，我们将特征函数 f_ω 所跨的空间称为表示空间。值得注意的是， f_ω 是傅里叶基，在信号处理的频率分析中被广泛用于提取各频率成分 [18, 19]。而本研究使用傅里叶基来表示发生器 \hat{J} 和算子 $\hat{R}(\theta)$ 。

由于旋转算子可以由生成器 \hat{J} 通过指数图构成（公式 8），因此基于特征函数 f_ω 的神经算子表示法可以推导出来（详见 SI. Sec. 1.2）、

$$\hat{R}(\theta) \cdot f_\omega = e^{-i\omega\theta} \cdot f_\omega \triangleq \rho_\omega(\theta) \cdot f_\omega, \quad (10)$$

其特征值 $e^{-i\omega\theta} \triangleq \rho_\omega(\theta)$ 被视为旋转算子 $\hat{R}(\theta)$ 的表示。比较公式 (9) 和 (10)，我们可以看到从发生器到的指数映射，即 $\hat{R}(\theta) = \exp(\theta \hat{J})$ 也存在于表示空间，即 $\rho_\omega(\theta) = \exp(i\omega\theta) = \exp[\theta \rho_\omega(\hat{J})]$ 。 $\rho(\theta)$ 的闭式计算公式是旋转后的特征值与原始特征值的内积。

公式 10) 的两边乘以 f^\dagger (\dagger : 共轭)，然后对 x 进行积分)、

$$\rho_\omega(\theta) = \hat{R}(\theta) \cdot f_\omega, \quad f_\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{R}(\theta) \cdot f_\omega^\dagger f^\dagger dx = e^{-i\omega\theta}. \quad (11)$$

每个算子 $\hat{R}(\theta)$ 与其表示 $\rho_\omega(\theta)$ 之间存在一一对应的映射关系。使用特征函数表示抽象算子 $\hat{R}(\theta)$ 的优势在于，搜索抽象算子（式 3）可以转化为表示空间中的常规数值优化。

2.2 表示空间中的旋转算子搜索

尽管我们已经给出了所需算子的解析式（公式 6），但我们仍然需要一种算法，根据神经元的反应明确输出算子。为了在表征空间中得出数值计算，我们使用算子的特征函数 f_ω

来分解神经反应 $u(s)$ 和 $u(h)$ 、

$$u(s) = \sum_{\omega} \langle u(s), f_{(\omega)} \rangle \cdot f_{(\omega)} = \sum_{\omega} U(\omega|s) f_{(\omega)} \triangleq F^{-1}[U(\omega|s)], \quad (12)$$

对应于反傅里叶变换。同时，通过傅里叶变换计算出 $U(\omega|s)$ $U(s)$ （除非混淆，否则 ω 将被抑制），即傅里叶系数

$$U(s) = \langle u(s), f_{(\omega)} \rangle \triangleq \int_{-\pi}^{\pi} u(s) f^* dx \triangleq F[u(s)], \quad (13)$$

表 1: 计算复杂度 N 是神经元数, 即 $u(s)$ 的维度。

组卷积 (公式 3, 表 S1)	表示空间 (通过 FFT (公式 15, 表 S2))	前馈电路 (顺序运动, 图 2F, 表 S3)
$O(N^2)$	$O(N \log N)$	$O(N \log(h-s))$

由于 $u(s) = \hat{R}(s) u(0)$, 我们有 $U(s) = \rho_\omega(s) U(0) = e^{-i\omega s} U(0)$, 其中 $U(0)$ 是 $u(s=0)$ 的表示。同样, 目标神经元响应 $u(h)$ 的表示为 $U(h) = \rho_\omega(h) U(0)$ 。用 $U(0)$ 表示 $U(s)$ 和 $U(h)$, 它们的表示分别为 $\rho_\omega(s)$ 和 $\rho_\omega(h)$, 在几何上可视化为两个单位长度的矢量, 角度分别为 s 和 h (图 2C)。

有了感觉和目标神经元反应的表征 (公式 12), 抽象旋转算子的目标函数 $L(\theta) = \hat{R}(\theta) u(s)$, $u(h)$ (公式 3) 就简化为神经元反应和算子表征内积的数值函数 (详见 SI.Sec. 1.2)

$$L(\theta) = \sum_{\omega} \omega |s\rangle \rho_\omega(\theta) U(\omega|h) \leq \sum_{\omega} \|U(\omega|s) \rho_\omega(\theta)\| \|U(\omega|h)\|, \quad (14)$$

其中使用了 Cauchy-Schwartz 不等式, $\|a\| = \sqrt{aa^*}$ 。公式 (14) 只有在以下条件下才能达到最大值

$$U(\omega|s) \rho_\omega(\theta) = U(\omega|h), \text{ 这意味着所需的旋转算子表示为 (图 2D)、} \\ \rho_\omega(\theta^*) = U(h)/U(s) = \rho_\omega(h)/\rho_\omega(s) = e^{-i\omega(h-s)} \Leftrightarrow \theta^* = \arg \max_{\theta} L(\theta) = h-s. \quad (15)$$

在表征空间中, 神经算子是一个具有闭式解的数值比, 这就提供了一种算法来寻找算子, 而不是检查公式 (公式 6)。此外, 在表征空间中寻找算子计算复杂度远低于群卷积 (表 1; SI. 第 2): 通过表征空间的复杂度为 $(N \log N)$, N 为神经元数, 主要来自使用快速傅立叶变换 (FFT) 时的傅立叶变换式 (13) [18]。相比之下, 群卷积 (公式 6) 的复杂度为 (N^2) 。一旦求出 $\rho_\omega(\theta^*)$ (公式 15), 就可以与 $\mu(s)$ 相乘, 然后进行反傅里叶变换, 将感觉响应旋转到目标方向 $u(h)$ 即 $^{-1}[U(s) \rho_\omega(\theta^*)] = ^{-1}[U(h)] = u(h)$ (图 2E, 虚线)。然而, 这一过程 (图 2E, 虚线) 在物理上与实际的运动动作不同, 它相当于首先将 $\rho_\omega(\theta^*)$ 映射回物理算子 $\hat{R}(\theta^*)$ 并直接作用于 $u(s)$ (图 2E, 线)。因此, 我们要探讨神经回路如何找到算子 $\hat{R}(\theta^*)$ 并用它来物理旋转感觉响应 $u(s)$ (图 2, 实线)。

3 建立运动规划神经回路

3.1 顺序运动规划策略

在现实中, 运动系统 (肌肉) 受到力量的限制, 无法产生幅度过大的动作, 这意味着它不可能在无限小的时间内突然旋转刺激方向。相反, 大脑会将一个战略性的复杂运动动作分解为一连串连续的小动作 [1, 4], 形成一个时间连续的过程 (图 2F)、

$$\hat{R}(\theta^*) \circ u(s_0) = \hat{R}(\delta\theta_{t+1}) \hat{R}(\delta\theta_t) \cdots \hat{R}(\delta\theta_0) \circ u(s_{(0)}) = \hat{R}(\delta\theta_{t+1}) \circ u(s_t), \quad (16)$$

其中, $s_0 = s$ 是初始刺激方向, $s_t = s_{(0)} + \sum_{i=0}^t \delta\theta_i$ 是施加刺激后的方向。角度 $\delta\theta_0$ 至 $\delta\theta_t$ 的旋转序列。顺序运动规划形成了一个感官-动作循环: 运动系统在 t 时刻产生一个小的旋转 $\hat{R}(\delta\theta_t)$, 后, 感官响应从 $u(s_t)$ 更新为 $u(s_{(t+1)})$, 接着是另一个旋转

$R(\theta_{(t)+1})$ ，随着时间的推移不断重复，直到刺激方向 s 旋转到目标 h 。利用算子的微分形式（公式 8），则对公式（16）进行 t 微分感觉-动作回路中的感觉响应 $u(s_t)$ 的动态变化为

$$\frac{d}{dt} u(s_t) = \frac{d}{dt} R^{\wedge}(\theta_t) \circ u(s_t) = \left(\frac{dR^{\wedge}(\theta_t)}{d\theta_t} \right) \frac{d\theta_t}{dt} \circ u(s_t) = v_t J^{\wedge} R^{\wedge}(\theta_t) \circ u(s_t) = v_t J^{\wedge} \circ u(s_t), \quad (17)$$

我们可以看到，旋转动力学是由旋转速度 $v_t = d\theta_t/dt$ 决定的。生成 v_t 序列有多种策略，我们考虑的策略是沿目标函数（公式 3）进行梯度上升，即时间 t 的 v_t 与旋转角度 θ_t 的梯度成正比、

$$v_t = \lambda \frac{dL((\theta)_t)}{d\theta_t} = \lambda \frac{dR^{\wedge}(\theta_t) \circ u((s)_t) - u((h)_t)}{d\theta_t} = \lambda \sum_{\omega} \left(\omega | s_t \|^2 \omega \sin[\omega(h - s_t)] \right) \quad (18)$$

λ 决定。转速是方向差的正弦函数 $h - s_t$ ，代表旋转组参数（比较公式 18 和 15，图 3D）。

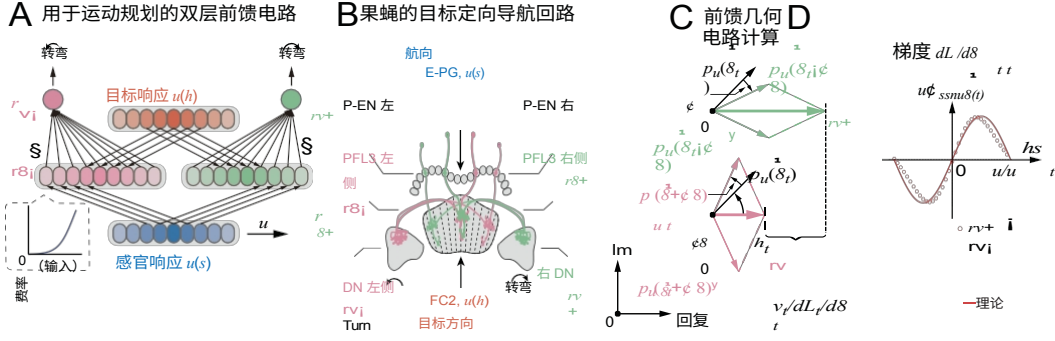


图 3: (A) 由连接相移 ($r_{\theta_{\pm}}$ 神经元接收来自 $u(s)$ 和 $u(h)$ 的不同连接相位)、非线性激活函数 (左下插图) 和池化 (Σ) 组成的前馈运动计划电路。两个输出神经元 $r_{v_{\pm}}$ 之间的差值传达了旋转速度 v_r 。(B) 果蝇的目标定向导航回路 (改编自 [21])。为便于说明, 仅显示了四个 PFL3 神经元 (A 中的 $r_{\theta_{\pm}}$ 神经元)。PFL3 右侧 (绿色) 和左侧 (红色) 神经元接收带有移相的航向输入 $u(s)$ 和目标输入 $u(h)$ 。两个 DN 神经元 (A 中的 $r_{v_{\pm}}$ 神经元) 分别汇集 PFL3 左右神经元并旋转航向。(C-D) 表征空间中前馈电路计算的几何图形。(C): 两个 $r_{\theta_{\pm}}$ 神经元群通过 $\Delta \theta$ 旋转 $p_u(\theta_{ij})$ 。两个输出神经元 $r_{v_{\pm}}$ 的发射率差被视为水平绿色箭头和粉色箭头之间的长度差, 它是一个正弦函数 $\theta_{ij} = h s_{ij}$, 即到目标方向的距离 h (D)。

3.2 用于运动规划的前馈电路

顺序运动规划中 v_r 的闭式解 (式 18) 和最优算子 (式 15) 意味着 v_r 可由前馈电路在神经输入的单次传播中计算, 这比递归电路更快、更简单。我们将探讨一般前馈电路如何通过接收感觉响应 $u(s)$ 和目标响应 $u(h)$ 计算 $v_r(t)$ (公式 18) [29]、

$$r_v(x) = F \int w_s(x, x') u(x' - s) dx' + \int w_h(x, x') u(x' - h) dx', \quad (19)$$

$w_s(x, x')$ 和 $w_h(x, x')$ 是来自感觉神经元 $u(x - s)$ 和目标神经元 $u(x - h)$ 的前馈权重。在前馈电路中计算 v_r 有两个问题需要解决。一个是作为神经输入总和的非线性函数 (公式 19) 的前馈电路如何计算作为神经输入 $u(s)$ 和 $u(h)$ 内积的 $L(\theta_i)$ (公式 18)。另一种方法是计算前馈电路中的导数 $dL/d\theta_{(i)}$ 。

我们建议前馈电路将导数 $dL(\theta_i)/d\theta_{(i)}$ 近似为差分形式、

$$v_r \approx \lambda \frac{L((\theta_{(i)} + \Delta \theta) - L((\theta_{(i)} - \Delta \theta))}{2\Delta \theta} = \frac{\lambda}{2\Delta \theta} \{u(s), u(h)\} - \{u(s), u(h)\}, \quad (20)$$

其中, $s_{\pm} = (s_0 + \theta_{\pm})$ 和 $\theta_{\pm} = s_{\pm} \pm \theta$ 。为了在前馈电路 (公式 19), 中实现内积 (公式 18) 我们将两个神经输入的内积转换为: 、

$$\{u(s_{\pm}), u(h)\} = \|u(s_{\pm}) \pm u(h)\|^2 - \|u(s_{\pm})\|^2 - \|u(h)\|^2 / 2. \quad (21)$$

其中的平方函数类似于前馈电路的非线性输出 (公式 19)。利用公式 (21), 的形式公式 (20) 中两个内积的差值为

$$\{u(s_+), u(h)\} - \{u(s_-), u(h)\} = \|u(s_+) \pm u(h)\|^2 - \|u(s_-) \pm u(h)\|^2, \quad (22)$$

其中我们使用 $\|u(s_{\pm})\|^2 = \|u(h)\|^{(2)}$ ，即神经反应的规范与所代表的方向无关。公式 (22) 表明，计算 $v_{(\nu)}$ 公式 (28) 的 $L(\theta_t + \Delta \theta) L(\theta_t \Delta \theta)$ 可以通过双层前馈电路实现，每层包含两个神经元群（图 3A）。

$$\begin{aligned} \text{第一层: } r_{\theta_{\pm}}(x) &= [u(x-s_{\pm}) + u(x-h)]^2, \\ \text{第二层: } r_{v_{\pm}} &= \int r_{\theta_{\pm}}(x) dx = \|u(s_{\pm}) + u(h)\|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

在第一层，每个神经元群 $r_{\theta_{\pm}}(x)$ 计算感觉输入和目标输入之和的平方，然后第二层的两个神经元 $r_{v_{\pm}}$ 汇集第一层的反应 $r_{(\theta)_{\pm}}(x)$ 。

接收旋转感觉输入 $u(s_{\pm})$ 的 $\pm\Delta\theta$ 可以通过前馈权重来实现，并改变连接相位（图 3A， $r_{\theta\pm}$ 接收来自 $u(s)$ 和 $u(h)$ 的不同相位的连接）、

$$w_{\theta\pm,s}(x, x') = \delta(x - x') \mp \Delta\theta, \quad (24)$$

其中， $w_{\theta\pm,s}(x, x')$ 是感觉神经元 $u(x' - s)$ 到 $r_{\theta\pm}(x)$ 的权重。最终，差值与转速 v_t 成正比（结合公式 20 和 22）

$$(r_{v+} - r_{v-}) = 2 [\langle u(s_+), u(h) \rangle - \langle u(s_-), u(h) \rangle] \propto v_{to} \quad (25)$$

然后，每个 $r_{v\pm}$ 可以驱动相应的效应器（如肌肉），产生实际的电机动作，顺时针或逆时针旋转航向。

一般非线性激活函数 第一层神经元 $r_{\theta\pm}(x)$ 的平方函数（公式 23）并不一定意味着它们的激活函数必须是平方函数，否则我们的理论和电路就会受到限制。相反，如果使用随 u 单调递增的一般非线性激活函数 $F(u)$ （公式 19），那么。衍生出的前馈电路就能很好地工作为了了解一般非线性激活函数的机制，我们将其从 0 扩展到二阶、

$$F(u) \approx F(0) + F'(0)u + F''(0)u^2/2 \triangleq F_0 + F_1 \cdot u + F_2 \cdot u^2. \quad (26)$$

那么，神经元的反应 $r_{\theta\pm}(x_v)$ 可以近似为

$$\begin{aligned} r_{\theta\pm}(x) \approx & F_0 + F_1 \cdot [u(x - s_{\pm}) + u(x - h)] + F_2 \cdot [u(x - s_{\pm})^2 + \\ & u(x - h)^2], \\ & + 2F_2 \cdot u(x - s_{\pm})u(x - h), \end{aligned} \quad (27)$$

最后，第二层神经元的差值仍与转速 v_t 成正比、

$$r_{v+} - r_{v-} = \int r_{\theta+}(x) dx - \int r_{\theta-}(x) dx = 2F_2 \cdot [\langle u(s_+), u(h) \rangle - \langle u(s_-), u(h) \rangle] \propto v_{to} \quad (28)$$

同样，我们使用 \int ，因为 \int summed neuronal activities dx 并不取决于所表示的活动方向，即 $\int u(x - s) dx = \int u(x) dx$ ，以及 $\int u(x - s)^2 dx = \int u(x)^2 dx$ 。值得注意的是，第 1 层

神经元 $r_{\theta\pm}$ 必须具有非线性激活函数才能使前馈电路输出旋转速度 v_t ，否则（公式 28.0），中设置 $F_2 = 0$ 第 2 层神经元 $r_{v\pm}$ 将完全抵消。总之，衍生前馈电路的结构利用了连接相移、非线性激活函数和神经元活动池来计算旋转速度 v_{to} 。

与果蝇电路的比较。 推导出的前馈电路类似于最近发现的果蝇目标定向导航电路（图 3A-B）-[2022]，后者也是一个接收感觉输入 $u(s)$ （E-PG 神经元）和目标输入 $u(h)$ （FC 神经元）以计算旋转速度 v_t 的两层前馈结构。在果蝇电路的第一层，PFL3 左（右）神经元群（图 3B，红（绿）神经元）分别将角度为 $\Delta\theta$ 移位感觉输入 $u(s)$ 与目标输入 $u(h)$ 相结合，并通过一个非线性激活函数输出，这与我们前馈电路中的 $r_{\theta\pm}$ 神经元类似（图 3A）。然后，第二层的 DN 左右神经元（相当于 $r_{v\pm}$ 神经元）分别汇集 PFL3 左右神经元的所有活动，它们的响应差异决定了旋转速度 v_t [20-22]。

神经回路的计算复杂度。 考虑到每个 $r_{\theta\pm}(x)$ 神经元只接受一个来自感觉神经元 $u(s)$ 的前馈连接，即 $w_{\theta\pm,s}$ 是一个三角函数（公式 24），果蝇的电路就是这种情况。然后，在连续旋转的每个时间步中，前馈电路会计算 (N) 次加法和 (N) 次乘法（假设为平方激活函数）

。在目标方向 h 固定的情况下，顺序旋转需要 $(\log h - s)$ 个时间步才能从原始方向 s 旋转到 h [19]。因此，在整个顺序旋转过程中，前馈电路的总复杂度为 $O(N \log |h - s|)$ 。当刺激方向 s 与目标方向 h 足够接近时，即 $|h - s| < N$ ，前馈电路的计算复杂度甚至低于广泛使用的快速傅立叶变换（式 13），其复杂度为 $O(N \log N)$ （表 1）。

3.3 前馈电路计算的几何原理

虽然前馈电路没有明确使用运算器的表征（公式 15，图 2E），但表征空间（公式 9）为前馈电路的计算提供了清晰的几何解释。将时间 t 的感觉响应 $u(s_{ij})$ 和目标响应 $u(h_j)$ 的表示（公式 12）代入旋转速度神经元 $r_{v_{\pm}}$ （公式 27）、

$$r_{v_{\pm}} = 2F_2 \cdot \sum_{\omega} \|U(\omega|\theta)\|^2 \rho_{\omega}(\theta^-_t \mp \Delta\theta) + \rho_{(\omega)}(\theta^-_t \mp \Delta\theta)^t + \text{const}, \quad (\theta^-_t = h - s_{(t)}), \quad (29)$$

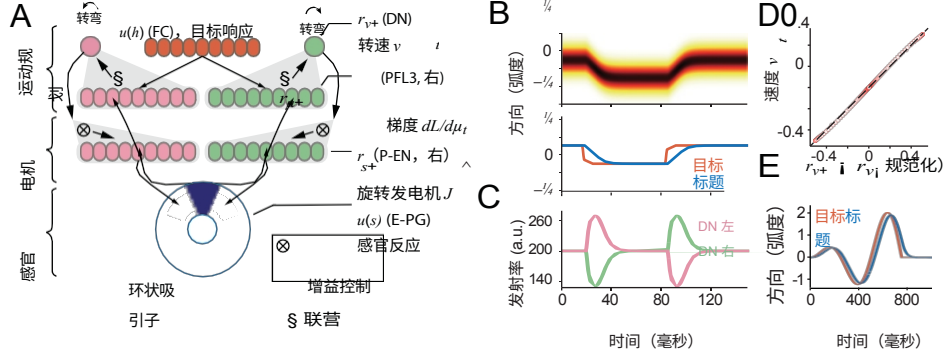


图 4: (A) 感觉-动作回路的完整电路。该图由果蝇的目标定向导航回路简化而来,以说明连接情况,但不影响回路功能。图中只标注了右侧的神经元,括号中的名称表示果蝇的神经元。(B) 上图:完整回路中感觉神经元 $u(s)$ 的群体响应。下图 $u(s)$ 的解码刺激方向朝目标移动。(C) 左右 DN 神经活动驱动 (B) 中的旋转。(D) 左右 DN 的差异与感觉表征的移动速度线性匹配。(E) 感觉反应追踪移动的目标方向。

const 是与角度无关的常数 (来自公式 (27) RHS 的前两项)。从几何学角度看, $r_{v\pm}$ 相当于通过 $\Delta \theta$ 旋转最优算子的表示 $\rho_{\omega}(\theta^-_i)$, 并将旋转后的算子与其复共轭相加 (以实数轴为镜像, 图 3B), 因此它位于实数轴上。 r_{v+} 和 r_{v-} 之间的差值 (图 3C 中粉色和绿色箭头的长度差) 是一个正弦函数, 取决于最优算子的角度 θ^-_i (图 3D)。

4 感觉-动作回路的全电路模型

我们进一步将推导出的前馈运动规划电路 (图 3A) 与具体的感觉和运动电路模块组装在一起, 构建了一个实现连续旋转的感觉-动作回路的完整电路图 4A) (公式 17)。为简单起见, 全电路模型只包括内部运动到感觉的神经反馈 (图 1A, 蓝线), 而不包括外部回路 (图 1A, 绿线), 并轻微隐含了一个假设, 即来自物理世界的实际感觉反馈与内部运动到感觉的反馈相同。为了切合实际, 即使我们的理论推导考虑的是无记忆神经元 (公式 19), 整个回路中的所有神经元都具有时间动态。所有连接权重在神经元空间 x 上都有高斯曲线 (SI.公式 S12), 峰值权重、连接宽度和相位各不相同。由于篇幅所限, 我们在此简要介绍完整电路的关键特征, 其详细的动力学信息可参见 SI.Sec.3。

感觉和运动电路模块。 感觉和运动电路模块是基于最近的一项理论研究, 该研究通过分析将果蝇内部罗盘电路中的感觉和运动电路模型与一维平移/旋转组联系起来[28]。感觉电路模块 $u(s)$ 是由一个环形吸引子网络建模的, 该网络已在果蝇大脑中得到实验验证 (图 4A, 蓝色环) [32-34]。环状吸引子网络利用其旋转不变的递归连接来生成旋转不变的感觉表征 $u(s)$ [28]。运动电路模块有两个神经元群 $r_{s\pm}(x)$ (图 4A, P-EN), 它们与感觉神经元 $u(s)$ 的反馈连接被 Δx 向相反方向移动 (比较红色和绿色 PB 神经元与环形吸引子的连接, 图 4A)。研究发现, 这些移动的连接产生了和发射率差 $\Sigma [r_s(x) - r(s)(x)]$ 决定了旋转发生器 $x_+ - x_-$ 速度 v_i 的感觉表征 $u(s)$ 。因此我们称 $r_{s\pm}$ 为旋转发生器神经元。

组装完整的感觉-动作电路。 感觉和运动电路的旋转组解释[28]为连接三个电路模块提供

了一个清晰的接口。在功能上，我们使用前馈电路输出神经元 $r_{v\pm}$ 来调节旋转发生器神经元 $r_{s\pm}$ 增益，即每个发生器神经元 $r_{s+}(x)$ 或 $r_{s-}(x)$ 分别乘以前馈电路输出神经元响应（标量） r_{v+} 或 r_{v-} 。实验中确实观察到旋转发生器神经元 $r_{s\pm}$ 的增益受旋转速度 v_t 的调制 [35]。此外，前馈电路还接收环形吸引子网络产生的瞬时感觉反应 $u(x-s)$ (公式 19)（公式 19）。

完整电路的理论分析。我们对整个电路动态进行理论分析，以验证它是否实现了朝目标方向的连续旋转（公式 17）。我们执行

通过对吸引子状态周围的整个电路动力学进行扰动分析，分析得出神经动力学中与刺激方向 s 相对应的特征向量，并发现 s 的特征向量具有最大的特征值，表明电路动力学由沿刺激方向的运动所主导。然后抛开沿与 s 的特征向量垂直的子空间的电路动力学，我们会发现嵌入完整电路的环形吸引子中的感觉反应近似简化为类似于顺序旋转动力学的形式（公式 17）、

$$\frac{d}{dt} u(x - s_t) \propto w_{s,\pm} (r_{v+} - r_{v-}) - (w_{s,\pm} \Delta x) J^\circ \cdot u(x - s_t), \quad (30)$$

其中，运动规划电路输出神经元 $r_{v+} - r_{v-}$ 的差值决定了旋转速度 v_t （与公式 17）。相比在公式（30）中， $w_{s,\pm}$ 和 Δx 分别表示旋转发生器神经元 $r_{(s)\pm}$ 与环形吸引子中感觉神经元 $u(s)$ 连接的峰值权重和权重偏移绝对值（图 4A），类似地， $w_{s\pm(s)}$ 也是如此。进一步的分析表明

$$(r_{v+} - r_{v-}) \propto w_{v,\theta} w_{\theta,s} \frac{\theta}{2} - \sum_{\alpha} \frac{R(\omega | \theta)}{\|\theta\|^2} \sin(\omega \Delta \theta) \sin[(\omega(h - s))], \quad (31)$$

其中， $w_{\theta,s}$ 和 $w_{v,\theta}$ 分别为从感觉神经元 $u(s)$ 到神经元 $r_{(\theta)\pm}$ 的权重峰值，以及从 $r_{\theta\pm}$ 到输出神经元 $r_{v\pm}$ 的权重峰值。 $\Delta \theta$ 为从 $u(s)$ 到 $r_{(\theta)\pm}$ 权重相移（公式 24）。 $R(\omega | 0)$ 是 $r(x)$ 在 $s = 0$ 处的傅立叶变换。4.3。节

我们对完整的感觉-动作进行了数值模拟。我们固定了所有回路参数，只改变了决定目标神经元反应 $u(h)$ 的目标方向 h 。图 4B 显示，环吸引子群体反应 $u(s)$ 中代表的刺激方向 s 确实朝着目标方向 h 移动，而目标方向 h 是由 $r_{v\pm}$ 神经元之间的活动差异驱动的（图 4C）。尽管由于神经元的时间动态（见讨论）而 4D）。存在一些延迟，但全电路模型也能跟踪移动方向（图 数值模拟也证实了感觉反应的旋转速度与 $r_{v\pm}$ （DN 神经元）之间的反应差异成正比。

5 结论与讨论

运动规划在大脑和具身代理的感觉运动转换中非常重要。本研究将运动规划表述为一个组算子搜索问题，并研究了算子搜索目标导向导航的神经回路机制。以一维旋转算子组为例，我们分析推导出了一维旋转算子的搜索可以通过一个具有连接相移、非线性激活函数和池化三种电路模式的双层前馈电路来实现，这与最近在果蝇大脑中发现的目标导向导航电路相似[20-22]。我们进一步将前馈感觉运动转换电路与感觉和运动电路模块组装成一个完整的感知-动作环路，成功地产生了跟踪目标方向的顺序旋转动力学（图 4）。我们的研究提供了列组运算器搜索与果蝇神经模型之间的总体联系。它结构化计算的角度加深了我们对神经回路计算的理解，同时也为人工智能研究提供了一种生物学上可信的神经网络解决方案。

5.1 与其他作品的比较

虽然推导出的前馈电路与最近果蝇神经科学研究中的电路模型相似[20-22]，但有几个明显的

不同之处。首先，最近的电路模型要求神经反应 $u(s)$ 和 $u(h)$ 都具有余弦曲线 ($\omega=1$ 处的纯频率成分，公式 13) [20, 21]。虽然余弦轮廓得到了实验支持，但我们的理论并不要求神经响应轮廓，例如，我们的感觉-动作电路具有高斯轮廓神经响应（图 4A）。这种泛化可以减少神经回路模型在实际应用中的局限性。其次，果蝇研究中的目标定向导航回路模型 [20-22] 并没有像本研究一样组成一个完整的感觉-动作回路。此外，从群等变机器学习的角度来看，本研究中的群算子搜索理论和运动规划前馈电路对应于感觉运动转换阶段，这与许多对应于感觉系统的等变神经网络（如 [17, 24-27]）在构建具身代理时是互补的。

5.2 模型的扩展和局限性

扩展到复杂情况。为了简明扼要和生物稳固性，我们在正文中只演示了一维旋转情况但我们的建模框架有可能扩展到更复杂的情况。二维平移组就是一个足以说明其通用性的例子。运动规划神经回路的一个重要步骤是通过神经回路中的空间差（公式 20）来近似目标函数对变换量的导数（公式 18），即感觉表征向正负方向旋转（公式 20）。中的 $\theta_i + \Delta \theta$ 和 $\theta_{(i)} \Delta \theta$ 这种空间差分策略也可用于二维情况，有两种等效电路解决方案。一种是考虑 x-y 坐标的分配中心表征，其中感觉表征将沿 x 和 y 方向移动，形成 4 个神经元群，类似于我们模型中的 PFL3 左右神经元，这也是空间表征电路中考虑的方法[36]。另一种策略是在以极坐标为中心的表征中运行，感觉表征将沿顺时针和逆时针方向移动，需要 2 个神经元群。模拟结果见图 S1。

神经元的非均匀分布。我们的模型考虑了神经元在吸引子流形中的均匀分布，这是连续吸引子网络中广泛使用的一种简化方法[38-41]。虽然这一假设在果蝇大脑中成立，但在其他情况下，神经元的分布通常是不均匀的。对于当前电路模型中神经元的非均匀分布（公式 S12 中的 x 是不规则的），相同的神经回路动力学（SI 中的公式 S13-S15）仍然可以近似地促进运动规划和旋转航向表征。为了在非均匀情况下实现精确计算，需要使用类似于[42]的技术对递归权重（SI 公式 S12 中以下）进行数值微调。总的来说，我们认为非均匀分布并不会对神经回路的实现实质性的改变，而需要新的理论见解来理解为什么系统仍然能有效地运行。此外，神经元的均匀分布只是平移对称性要求[28]，而在其他群结构中可以是非均匀/不完美的，例如，缩放群需要对数编码[43]。

错误归零问题。我们的前馈运动规划电路会在航向和目标方向反方向对齐时输出零速度，这一点在实验中还存在争议（例如，[20] 观察到反方向对齐时速度最大，而[44] 则观察到相反的情况）。一个合理的模型不应该存在“错误归零”的问题（在相反的方向上稳定下来[20]），一个潜在的电路解决方案是引入果蝇中观察到的 PFL2 神经元，这种神经元会在反对齐方向上主动发射。也就是说，PFL2 神经元将加快反方向附近的转弯速度，并为 P-EN 至 E-PG 反馈提供增益调制。此外，包含 PFL2 只会改变我们理论上定义的目标函数（公式 18）。中的 λ

未来工作。从神经生物学的角度来看，全电路模型中从 $r_{v\pm}$ (DN) 到 $r_{s\pm}$ (P-EN 神经元) 的直接增益调制（图 4A，公式 S14）需要通过未来的实验来验证。果蝇大脑中的情况很可能是这样，因为 $r_{s\pm}$ 神经元受旋转速度的增益调节[32-34]。从机器学习的角度来看，作为概念验证，我们只研究一维旋转算子搜索的理论和相应的电路模型，其中的群表示理论（第 2.1 - 2.2）节似乎没有必要，因为可以直观地获得最佳算子的解析（公式 6）。然而，对于搜索复杂的群算子，尤其是非交换群，如 $SO(3)$ 和 $SE(2)$ ，群表示理论和本研究中的研究方案是必要的，因为在这些群中，获得所需的算子解并非易事，也不再直观（例如，[13]）。群表示理论是一种规范方法，能保证找到这样的算子并推导出相应的电路模型。扩展运动规划电路以搜索更复杂的组算子是我们未来的研究方向。

致谢

W.H.Z. 由UT Southwestern捐赠学者项目资助。Y.N.W. 国家自然科学基金 DMS-2015577 和国家自然科学基金 DMS-2415226 支持。S.W. 受国家自然科学基金项目（编号：T2421004）、科技创新2030-脑科学与脑启发智能项目（编号：2021ZD0200204）资助。作者感谢刘悦和田根硕对本稿初稿的反馈意见。

参考资料

- [1] Eric R Kandel、James H Schwartz、Thomas M Jessell、Steven Siegelbaum、A James Hudspeth、Sarah Mack 等，《*神经科学原理*》，第 4 卷。麦格劳-希尔纽约公司，2000 年。
- [2] Marc O Ernst 和 Heinrich H Bülthoff.将感官融合为强大的知觉》，《*认知科学趋势*》，8(4):162-169, 2004. *认知科学趋势*》，8（4）：162-169，2004 年。
- [3] Konrad P Körding 和 Daniel M Wolpert.传感器运动控制中的贝叶斯决策理论。*认知科学趋势*》，10（7）：319-326，2006 年。
- [4] 理查德-A-安德森（Richard A Andersen）和何翠（He Cui）。顶叶-额叶回路中的意向、行动规划和决策。*神经元*》，63（5）：568-583，2009年。
- [5] Krishna V Shenoy, Maneesh Sahani, and Mark M Churchland.大脑皮层对手臂运动的控制：动态系统视角。*神经科学年评*》，36:337-359，2013年。
- [6] Benjamin Gorko、Igor Siwanowicz、Kari Close、Christina Christoforou、Karen L Hibbard、Mayank Kabra、Allen Lee、Jin-Yong Park、Si Ying Li、Alex B Chen 等运动神经元通过本体感觉雕刻产生姿势目标运动。*自然*》，628（8008）：596-603，2024 年。
- [7] Alexandre Pouget 和 Lawrence H Snyder.传感器运动转换的计算方法。*自然神经科学*》，3（11）：1192-1198，2000 年。
- [8] 理查德-A-安德森（Richard A Andersen）和克里斯托弗-A-布内奥（Christopher A Buneo）。后顶叶皮层的意向图。*神经科学年度评论*》，25（1）：189-220，2002 年。
- [9] Daniel M Wolpert、Jörn Diedrichsen 和 J Randall Flanagan。感觉运动学习原理》。*自然神经科学评论*》，12（12）：739-751，2011 年。
- [10] Caelan Reed Garrett、Rohan Chitnis、Rachel Holladay、Beomjoon Kim、Tom Silver、Leslie Pack Kaelbling 和 Tomás Lozano-Pérez。综合任务和运动规划。*控制、机器人和自主系统年度综述*》，4:265-293，2021 年。
- [11] Mohamed Elbanhawi 和 Milan Simic.基于采样的机器人运动规划：综述。*Ieee access*，2：56-77，2014.
- [12] Szilárd Aradi.用于自动驾驶车辆运动规划的深度强化学习调查。*IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*，23（2）：740-759，2020.
- [13] Sangli Teng, Ashkan Jasour, Ram Vasudevan, and Maani Ghaffari.通过矩松弛在谎言群上进行凸几何运动规划。*arXiv 预印本 arXiv:2305.13565*, 2023.

- [14] 左俊峰、刘晓、吴英年、吴思、张文豪。时标等变表示的递归神经回路机制。《*神经信息处理系统进展*》，36，2023。
- [15] M Jeannerod 和 Michael Arbib.动作监测与动作前向控制》，《*大脑理论与神经网络手册*》，第 83-85 页，2003 年。《*大脑理论与神经网络手册*》，第 83-85 页，2003 年。
- [16] Gregory S Chirikjian.《*随机模型、信息论和李群，第 2 卷：分析方法和现代应用*》，第 2 卷。Springer Science & Business Media, 2011.
- [17] 塔科-科恩和马克斯-威灵组等变卷积网络。《*国际机器学习会议*》，第 2990-2999 页。PMLR, 2016。
- [18] John G Proakis.《*数字信号处理：原理、算法和应用*》，4/E.Pearson Education India, 2007.
- [19] Richard C Dorf Robert H Bishop.《*现代控制系统*》。2011.
- [20] 埃琳娜-A-韦斯特恩德、艾米丽-凯洛格、保罗-M-道森、珍妮-卢、莉迪亚-汉堡、本杰明-米德勒、绍尔-德鲁克曼和瑞秋-I-威尔逊。将头部方向信号转化为目标导向的转向指令。《*自然*》，第 1-8 页，2024 年。

- [21] Peter Mussells Pires、Lingwei Zhang、Victoria Parache、LF Abbott 和 Gaby Maimon。将分配中心目标转化为自我中心转向信号》(Con-verting an allocentric goal into an egocentric steering signal. *自然*》，第 1-11 页，2024 年。
- [22] 雷切尔-I-威尔逊导航神经网络：从连接到计算。 *神经科学年度评论*》，46:403-423，2023 年。
- [23] Andrew MM Matheson、Aaron J Lanz、Ashley M Medina、Al M Licata、Timothy A Currier、Mubarak H Syed 和 Katherine I Nagel。风引导嗅觉导航的神经回路。 *自然通讯*》，13 (1)：4613，2022。
- [24] 塔科-科恩和马克斯-威灵学习交换谎言群的不可还原表示。 *国际机器学习大会*》，第 1755-1763 页。PMLR，2014。
- [25] Taco S Cohen, Mario Geiger, Jonas Köhler, and Max Welling. 球面 cnns. *arXiv preprint arXiv:1801.10130*, 2018.
- [26] Risi Kondor 和 Shubhendu Trivedi. 论神经网络中的等差数列和卷积对紧凑群作用的泛化。 *国际机器学习会议*，第 2747-2755 页。PMLR，2018。
- [27] Risi Kondor、Zhen Lin 和 Shubhendu Trivedi. Clebsch-gordan 网络：全傅立叶空间球形卷积神经网络。 *神经信息处理系统进展*》，2018年第31期。
- [28] 张文浩、吴英年、吴思。具有连续流形吸引子的递归网络中的翻译变量表示。 *神经信息处理系统进展*》，35:15770-15783，2022。
- [29] Peter Dayan 和 Laurence F Abbott。 *理论神经科学*》第 806 卷。马萨诸塞州剑桥市：麻省理工学院出版社，2001 年。
- [30] Alexandre Pouget、Peter Dayan 和 Richard S Zemel. 群体代码的推理与计算。 *神经科学年度评论*》，26 (1)：381-410，2003。
- [31] Alexandre Pouget, Jeffrey M Beck, Wei Ji Ma, and Peter E Latham. 概率大脑：已知与未知。 *自然神经科学*》，16 (9)：1170，2013。
- [32] Sung Soo Kim、Hervé Rouault、Shaul Druckmann 和 Vivek Jayaraman。果蝇中枢大脑的环形吸引子动力学。 *科学*》，356 (6340)：849-853，2017。
- [33] 乔纳森-格林、足立敦子、库纳尔-K-沙、乔纳森-D-广川、巴勃罗-S-马加尼、盖比-梅蒙。果蝇角整合的神经回路架构。 *自然*》，546 (7656)：101-106，2017。
- [34] Anna Kutschireiter, Melanie A Basnak, Rachel I Wilson, and Jan Drugowitsch. 从贝叶斯视角看果蝇中枢复合体方向跟踪的环形吸引子》， *bioRxiv*，2021 年。

- [35] Daniel Turner-Evans、Stephanie Wegener、Herve Rouault、Romain Franconville、Tanya Wolff、Johannes D Seelig、Shaul Druckmann 和 Vivek Jayaraman。飞行航向电路中的角速度积分。 *Elife*, 6:e23496, 2017.
- [36] Yoram Burak 和 Ila R Fiete. 网格细胞连续吸引子网络模型中的精确路径整合。 *PLoS 计算生物学* , 5 (2) : e1000291, 2009 年。
- [37] Abraham Z. Vollan, Richard J. Gardner, May-Britt Moser, and Edvard I. Moser. 内侧-海马空间图中的左右交替扫描 , *bioRxiv*, 2024 年。
- [38] R Ben-Yishai、R Lev Bar-Or 和 H Sompolinsky。视觉皮层的方向调谐理论。 *美国国家科学院院刊* , 92 (9) : 3844-3848, 1995 年。
- [39] Si Wu, Kosuke Hamaguchi, and Shun-ichi Amari. 连续吸引子的动力学与计算。 *神经计算* , 20 (4) : 994-1025, 2008.

- [40] 张文浩、陈爱华、Malte J Rasch 和 Si Wu。神经网络中的去中心化多感官信息整合。《*神经科学杂志*》，36 (2) : 532-547, 2016.
- [41] Mikail Khona 和 Ila R. Fiete. 大脑中的吸引器和整合器网络。《*自然评论神经科学*》，23 (12) : 744-766, 2022 年 12 月。
- [42] Marcella Noorman, Brad K Hulse, Vivek Jayaraman, Sandro Romani, and Ann M Hermundstad. 只需少量神经元就能实现精确的角度积分。 *bioRxiv*, 2022。
- [43] Carlos Esteves, Christine Allen-Blanchette, Xiaowei Zhou, and Kostas Daniilidis. 极性变压器网络》, *arXiv preprint arXiv:1709.01889*, 2017.
- [44] 乔纳森-格林、维克拉姆-维贾扬、彼得-穆塞尔-皮雷斯、足立敦子和盖比-迈蒙将神经航向估计与内部目标进行比较以指导定向导航。《*自然神经科学*》，22 (9) : 1460-1468, 2019。

NeurIPS 论文核对表

1. 索赔

问题摘要和引言中提出的主要主张是否准确反映了论文的贡献和范围？

请回答：是

理由：我们在摘要和引言中明确总结了我们的主张和贡献，并在讨论中论述了当前工作的局限性和扩展性。

指导原则：

- 答案 NA 表示摘要和引言不包括论文中提出的主张。
- 摘要和/或引言应清楚地说明提出的主张，包括论文的贡献以及重要的假设和限制。如果对该问题的回答是 "否 "或 "不知道"，审稿人将无法接受。
- 提出的主张应与理论和实验结果相匹配，并反映出这些结果在多大程度上可望推广到其他环境中。
- 只要明确这些目标不是本文所要达到的，那么将理想目标作为动力也是可以的。

2. 局限性

问题论文是否讨论了作者工作的局限性？答：[是是]

理由：见讨论部分。指导原则：

- 答案 "NA "表示论文没有局限性，答案 No "表示论文有局限性，但论文中没有讨论。
- 我们鼓励作者在论文中单独设立一个 "限制 "部分。
- 论文应指出任何强有力的假设，以及结果对违反这些假设的稳健性（如独立性假设、无噪声设置、模型规范、渐近近似仅在局部成立）。作者应思考在实践中如何违反这些假设及其影响。
- 作者应反思所提出主张的范围，例如，是否仅在少数数据集或少数运行中测试了该方法。一般来说，实证结果往往取决于隐含的假设，这些假设应予以阐明。
- 作者应思考影响方法性能的因素。例如，当图像分辨率较低或在光线不足的情况下拍摄图像时，面部识别算法的性能可能会很差。或者，语音到文本系统可能无法可靠地用于为在线讲座提供封闭式字幕，因为它无法处理专业术语。
- 作者应讨论所提算法的计算效率，以及这些算法如何随数据集大小而扩展。
- 如果适用，作者应讨论其解决隐私和公平问题的方法可能存在的局限性。
- 作者可能会担心审稿人会以对限制完全诚实为由拒绝论文，但更糟糕的结果可能是审稿人发现了论文中没有承认的限制。作者应运用自己的最佳判断力，并

认识到个人支持透明度的行为在制定维护社区完整性的规范方面发挥着重要作用。审稿人将受到特别指示，不得对有关限制的诚实行为进行惩罚。

3. 理论假设与证明

问题对于每个理论结果，论文是否提供了全套假设和完整（正确）的证明？

请回答：是

理由我们清楚地说明了推导电路模型时的假设（正文第 3-4 节）

指导原则：

- 答案 NA 表示论文不包含理论结果。
- 论文中的所有定理、公式和证明都应编号并交叉引用。
- 所有假设都应在定理陈述中明确说明或引用。
- 证明既可以出现在正文中，也可以出现在补充材料中，但如果出现在补充材料中，我们鼓励作者提供简短的证明草图，以提供直观性。
- 反之，论文核心部分提供的任何非正式证明都应由附录或补充材料中提供的正式证明加以补充。
- 证明所依据的定理和推理应当适当注明出处。

4. 实验结果的再现性

问题论文是否充分披露了重现论文主要实验结果所需的所有信息，以至于影响到论文的主要主张和/或结论（无论是否提供代码和数据）？

请回答：是

理由：SI.5 节中有足够的网络模拟细节。指导原则：

- 答案 NA 表示论文不包括实验。
- 如果论文中包含实验，对这个问题的否定回答将不会被评审人看好：无论是否提供代码和数据，使论文具有可重复性都很重要。
- 如果提供的是数据集和/或模型，作者应说明为使其结果可重复或可验证而采取的步骤。
- 根据贡献的不同，可复制性可以通过不同的方式实现。例如，如果贡献是一个新颖的架构，全面描述该架构可能就足够了；如果贡献是一个特定的模型和经验评估，则可能需要让其他人可以用相同的数据集复制该模型，或者提供对该模型的访问权限。一般来说，发布代码和数据通常是实现这一目标的好方法，但也可以通过详细说明如何复制结果、访问托管模型（如大型语言模型）、发布模型检查点或其他适合所开展研究的方法来提供可重复性。
- 虽然 NeurIPS 并不要求发布代码，但会议确实要求所有提交的提供一些合理的路径，这可能取决于论文的性质。例如
 - (a) 如果贡献主要是一种新算法，论文应明确说明如何复制该算法。
 - (b) 如果贡献主要是一个新的模型架构，论文应清楚、全面地描述该架构。
 - (c) 如果贡献的是一个新模型（如大型语言模型），则应提供获取该模型以重现结果的方法或重现该模型的方法（如使用开源数据集或如何构建数据集的说明）。
 - (d) 我们认识到，在某些情况下，可重复性可能很棘手，在这种情况下，欢迎

作者描述他们提供可重复性的特殊方式。对于封闭源模型，可能会以某种方式限制对模型的访问（例如，仅限于注册用户），但其他研究人员应该有可能通过某种途径复制或验证结果。

5. **开放数据和代码访问**

问题论文是否公开了数据和代码，并提供了足够的说明，以忠实再现补充材料中描述的主要实验结果？

请回答：是

理由：代码已列入补充材料。指导原则：

- 答案 NA 表示试卷不包括需要代码的实验。
- 详情请参见 NeurIPS 代码和数据提交指南 (<https://nips.cc/public/guides/CodeSubmissionPolicy>)。
- 我们鼓励发布代码和数据，但也理解这可能无法实现，因此 "否" 是可以接受的答案。论文不能仅仅因为没有包含代码而被拒绝，除非这是论文的核心内容（例如，新的开源基准）。
- 说明应包含重现结果所需的准确命令和运行环境。请参阅 NeurIPS 代码和数据提交指南 (<https://nips.cc/public/guides/CodeSubmissionPolicy>) 获取更多详情。
- 作者应提供数据获取和准备说明，包括如何获取原始数据、预处理数据、中间数据和生成数据等。
- 作者应提供脚本，以重现新方法和基线的所有实验结果。如果只有一部分实验结果可以重现，作者应说明脚本中省略了哪些实验结果以及省略的原因。
- 在投稿时，为保持匿名性，作者应发布匿名版本（如适用）。
- 建议在补充材料（附在论文之后）中提供尽可能多的信息，但允许提供数据和代码的 URL。

6. 实验设置/细节

问题论文是否说明了解释结果所需的所有训练和测试细节（如数据分割、超参数、如何选择、优化器类型等）？

请回答：是

理由：这不是一项关于学习的研究，而模型模拟的细节将作为 SI 来介绍。第 5 节。

指导原则：

- 答案 NA 表示论文不包括实验。
- 在论文的核心部分，应详细介绍实验环境，以便理解实验结果并使其有意义。
- 完整的详细信息可以随代码、附录或作为补充材料提供。

7. 实验 统计意义

问题论文是否适当、正确地定义了误差条，或报告了有关实验统计意义的其他适当信息？

请回答：[否]

理由：这是一门关于李群理论和动力系统理论的理论研究，不涉及统计学。

指导原则：

- 答案 NA 表示论文不包括实验。

- 如果结果附有误差带、可信区间或统计显著性检验，作者应回答 "是"，至少对于支持论文主要主张的实验是这样。
- 应明确说明误差条所反映的变异因素（例如，训练/测试分割、初始化、某些参数的随机绘制或在给定实验条件下的整体运行）。
- 应解释误差条的计算方法（封闭式公式、调用库函数、自引导等）。
- 应给出所做的假设（例如，正态分布误差）。

- 应明确误差条是标准差还是平均值的标准误差。
- 报告 1σ 误差条是可以的，但应该说明。如果误差的正态性假设没有得到验证，作者最好报告 2σ 误差条，而不是说明他们有 96% 的 CI。
- 对于非对称分布，作者应注意不要在表格或数字中显示对称误差条，以免得出超出范围的结果（如负误差率）。
- 如果表格或绘图中报告了误差条，作者应在文中解释误差条的计算方法，并在文中引用相应的图或表。

8. 实验计算资源

问题对于每个实验，论文是否提供了重现实验所需的计算机资源（计算工作者类型、内存、执行时间）的足够信息？

请回答：是

理由：请参见 SI.第 5。节指导原则

:

- 答案 NA 表示论文不包括实验。
- 论文应说明计算工作者 CPU 或 GPU、内部集群或云提供商的类型，包括相关内存和存储。
- 论文应提供每个实验运行所需的计算量，并估算总计算量。
- 论文应披露整个研究项目是否需要比论文中报告的实验更多的计算量（例如，未写入论文的初步实验或失败实验）。

9. 道德准则

问题论文中进行的研究是否在各个方面都符合《NeurIPS 职业道德准则》

<https://neurips.cc/public/EthicsGuidelines?>

请回答：是

理由我们确认我们的研究符合《伦理守则》。指导原则：

- 答案 NA 表示作者未查看《NeurIPS 职业道德规范》。
- 如果作者回答 "否"，则应说明偏离《职业道德准则》的特殊情况。
- 作者应确保匿名（例如，如果由于其管辖范围内的法律或法规而有特殊考虑）。

10. 更广泛的影响

问题论文是否讨论了工作可能产生的积极社会影响和消极社会影响？

请回答：[不知道]

理由：这是一项基础科学研究的理论研究，不会产生直接的社会影响。

指导原则：

- 答案 NA 表示所从事的工作没有社会影响。
- 如果作者回答 "NA "或 "No"，则应解释其工作没有社会影响的原因或论文没有论及社会影响的原因。
- 负面社会影响的例子包括潜在的恶意或意外用途（如造谣、生成虚假档案、监视）、公平性考虑（如部署的技术可能做出对特定群体产生不公平影响的决策）、隐私考虑和安全考虑。

- 会议希望许多论文都是基础性研究，与特定应用无关，更不用说部署了。但是，如果有直接通向任何负面应用的途径，作者就应该指出。例如，指出生成模型质量的提高可被用于生成虚假信息的深度伪造是合理的。，无需优化神经网络的通用算法可以让人们更快地训练生成 Deepfakes 的模型。
- 作者应考虑当技术按预期使用并正常运行时可能产生的危害，当技术按预期使用但产生错误结果时可能产生的危害，以及（有意或无意）滥用技术造成的危害。
- 如果存在负面社会影响，作者还可以讨论可能的缓解策略（例如，有限制地发布模型、提供攻击以外的防御措施、监测滥用的机制、监测系统如何从反馈中不断学习的机制、提高 ML 的效率和可访问性）。

11. 保障措施

问题文件是否描述了为负责任地发布具有高滥用风险的数据或模型（如预训练语言模型、图像生成器或废数据集）而采取的保障措施？

请回答：[不知道]

理由：这是一项基础科学研究的理论研究，不会产生任何风险。

指导原则：

- 答案 NA 表示该论文不存在此类风险。
- 对于滥用或双重用途风险较高的已发布模型，在发布时应采取必要的保障措施，以便对模型的使用进行控制，例如，要求用户遵守使用指南或访问模型的限制，或实施安全过滤。
- 从互联网上抓取的数据集可能会带来安全风险。作者应说明他们是如何避免发布不安全图像的。
- 我们认识到，提供有效的保障措施具有挑战性，许多论文并不要求这样做，但我们鼓励作者考虑到这一点并尽最大努力。

12. 现有资产的许可证

问题论文中使用的资产（如代码、数据、模型）的创建者或原始所有者是否已适当注明，使用许可和条款是否已明确提及并得到适当尊重？

请回答：是

说明理由：我们改编了最近一篇实验论文中的一张图（图 3B），并说明了该图的出处。

指导原则：

- 答案 NA 表示论文不使用现有资产。

- 作者应引用产生代码包或数据集的原始论文。
- 作者应说明所使用的资产版本，如有可能，还应提供 URL。
- 每项资产都应包含许可名称（如 CC-BY 4.0）。
- 对于从特定来源（如网站）搜刮的数据，应提供该来源的版权和服务条款。
- 如果资产已发布，则应提供软件包中的许可证、版权信息和使用条款。对于流行的数据集，paperswithcode.com/datasets已为一些数据集策划了许可证。其许可指南可帮助确定数据集的许可。

- 对于重新打包的现有数据集，应提供原始许可证和衍生资产的许可证（如果已发生变化）。
- 如果网上没有这些信息，我们鼓励作者联系资产的创建者。

13. 新资产

问题文件中引入的新资产是否有完备的文件记录，文件是否与资产一起提供？

请回答：是

理由：本文的主要成果是理论推导。并上传了模拟模型的代码。

指导原则：

- 答案 NA 表示该文件不释放新资产。
- 研究人员应通过结构化模板交流数据集/代码/模型的详细信息，作为提交材料的一部分。这包括培训、许可、限制等详细信息。
- 论文应讨论是否以及如何征得资产被使用人的同意。
- 提交时，请记住对资产进行匿名处理（如适用）。您可以创建匿名 URL 或包含匿名压缩文件。

14. 众包和以人为对象的研究

问题：对于以人为对象的众包实验和研究，论文是否包括给参与者的说明全文和截图（如适用），以及有关补偿的详细信息（如有）？

答案：

[NA[NA] 理

由：

指导原则：

- 答案 NA 表示论文不涉及众包，也不涉及以人为对象的研究。
- 在补充材料中包含这些信息是可以的，但如果论文的主要内容涉及人类受试者，则应在主要论文中包含尽可能多的细节。
- 根据《NeurIPS 职业道德准则》，从事数据收集、整理或其他工作的人员的工资至少应达到数据收集者所在国家的最低工资标准。

15. 机构审查委员会（IRB）对人体研究的批准或同等批准

问题论文是否描述了研究参与者可能面临的风险，是否向受试者披露了这些风险，以及是否获得了机构审查委员会（IRB）的批准（或根据贵国或机构要求的同等批准/审查）？

答案：

[NA[NA] 理

由：

指导原则：

- 答案 NA 表示论文不涉及众包，也不涉及以人为对象的研究。
- 根据研究所在国家的不同，任何以人为对象的研究都可能需要获得 IRB 批准（或同等批准）。如果已获得 IRB 批准，则应在论文中明确说明。
- 我们认识到，不同机构和地点的程序可能会有很大不同，我们希望作者遵守《NeurIPS 职业道德准则》和所在机构的指导方针。
- 对于初次提交的材料，请勿包含任何会破坏匿名性的信息（如适用），如进行评审的机构。