

# TP FEniCS n°1 : Inclusion de Eshelby

Martin Dolbeau, Alice Gribonval

20 octobre 2022

## 1 Présentation du problème

On considère une matrice circulaire de rayon  $R_e$  avec une inclusion en son centre, elle aussi circulaire, de rayon  $R_i$ . La matrice et l'inclusion sont constituées de matériaux linéaires élastiques et isotropes, de module d'Young  $E_m$  et  $E_i$  respectivement, et de coefficient de Poisson  $\nu_m$  et  $\nu_i$  respectivement. Le problème est illustré sur la figure 1. Dans tout ce qui suit, on suppose que  $R_e = 6,9R_i$ .

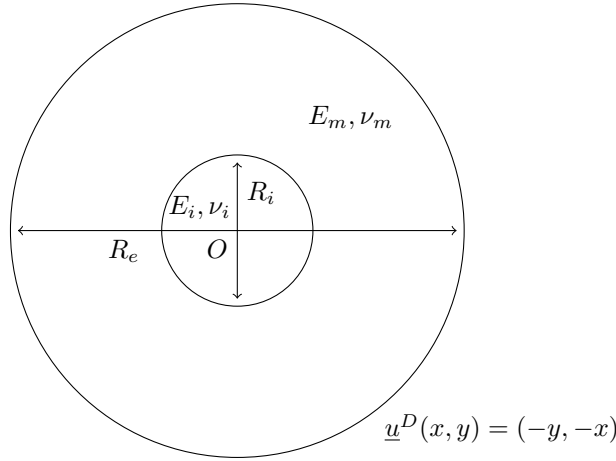


FIGURE 1 – Modélisation du problème

On suppose que les forces de volume sont nulles, et on impose un déplacement au bord de la matrice (en  $\sqrt{x^2 + y^2} = R_e$ ) tel que  $\underline{u}(x, y) = (-y, -x)$ . La formulation variationnelle du problème peut alors s'écrire sous la forme suivante :

Trouver  $\underline{u} \in \mathcal{C} \equiv \{\underline{u} : H^1(\Omega), \underline{u}(x, y)|_{x^2+y^2=R_e^2} = (-y, -x)\}$  tel que  $\forall \underline{v} \in \mathcal{C}_0$  :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) \, dx \, dy = 0$$

## 2 Solution en déplacements pour une inclusion circulaire

Le problème est d'abord résolu avec des éléments lagrangiens linéaires, et avec un maillage d'ordre 1. Le résultat obtenu par simulation est comparé avec la solution analytique dans le cas où  $E_i = 11E_m$ . Ensuite, l'influence du rapport  $E_i/E_m$  sur le champ de déplacement est illustrée.

### 2.1 Comparaison à la solution analytique

Dans le cas considéré ici d'une inclusion circulaire, la solution analytique est connue. On peut alors comparer la solution obtenue par éléments finis avec la solution analytique. On compare donc les deux solutions, dans le cas

d'une inclusion 11 fois plus rigide que la matrice. La résolution analytique du problème permet de montrer que la déformation de cisaillement  $\varepsilon_{xy}$  est constante dans l'inclusion, et vaut environ  $-0,14$  dans cette configuration.

Une fois le problème éléments finis résolu en déplacement avec des éléments lagrangiens de degré 1, on peut calculer les déformations associées, qui sont alors constantes par morceaux sur le maillage. Les déformations de cisaillement  $\varepsilon_{xy}$  de la solution analytique et de la solution obtenue par éléments finis sont représentées sur les figure 2a et figure 2b respectivement.

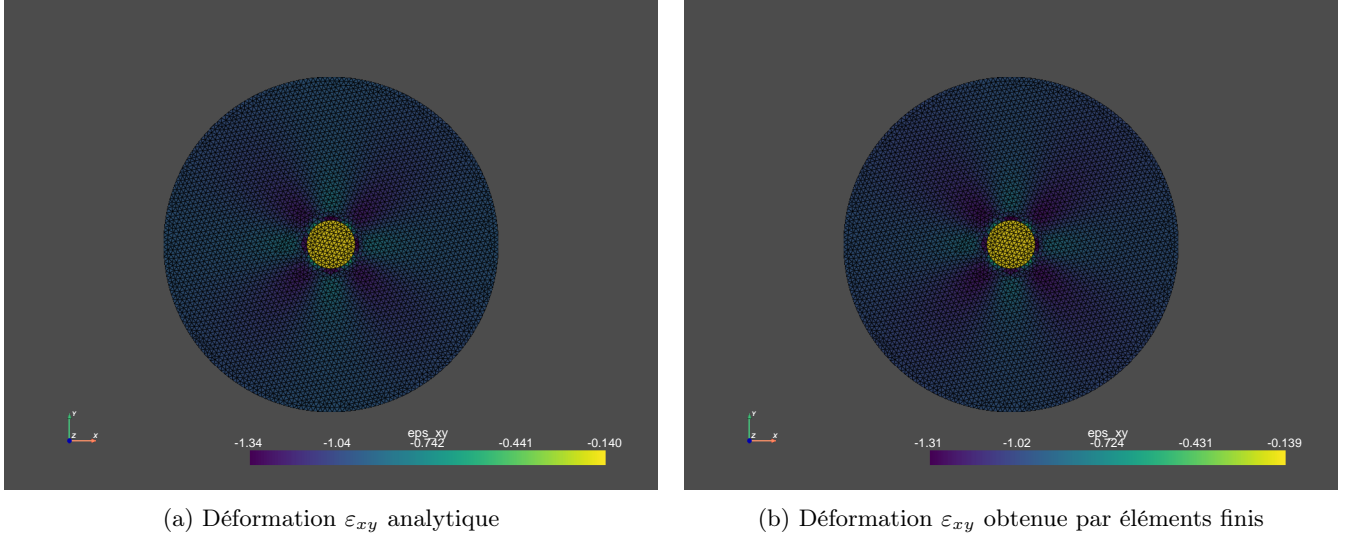


FIGURE 2 – Comparaison de la déformation de cisaillement obtenue par éléments finis avec la solution analytique

La résolution par éléments finis permet d'obtenir une déformation de cisaillement moyenne sur l'inclusion égale à la valeur analytique à  $10^{-2}$  près, avec une déviation de l'ordre de 4%.

## 2.2 Déplacement sur un diamètre

En considérant le cas où  $E_i = 11E_m$  (inclusion rigide), avec  $\nu_m = 0,35$  et  $\nu_i = 0,3$ , on obtient une déformée représentée sur la figure 3a. En particulier, le déplacement le long du diamètre  $y = 0$  est représenté sur la figure 3b.

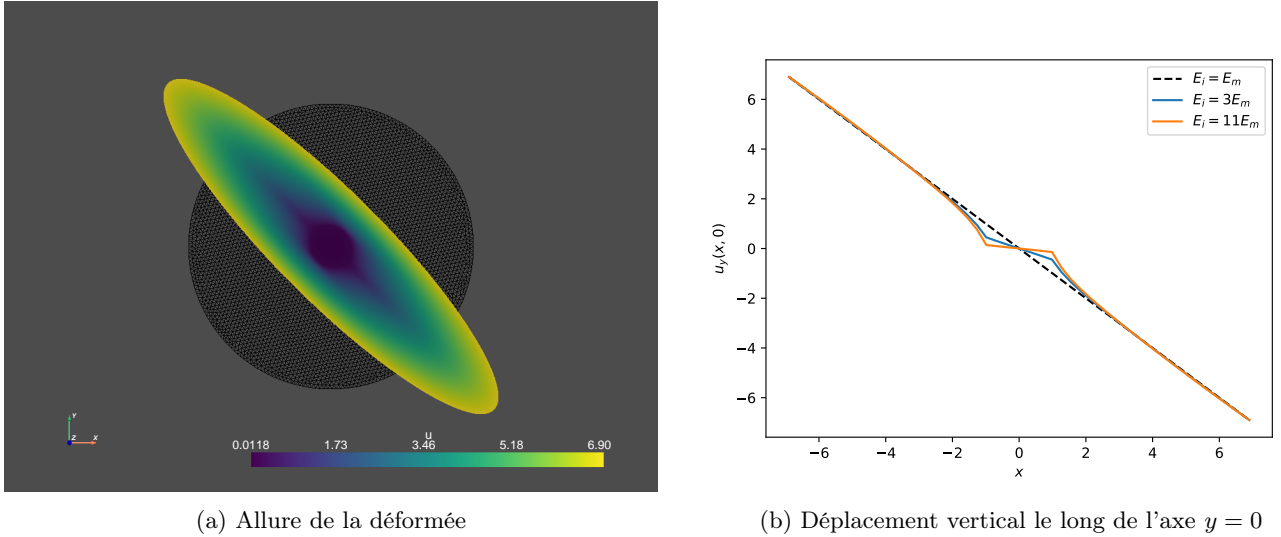


FIGURE 3 – Champ de déplacement calculé, et déplacement le long d'un diamètre

On remarque bien que la déformation de cisaillement est plus faible dans l'inclusion que dans la matrice, ce qui

est cohérent avec le rapport des modules d'Young. De plus, l'influence de l'inclusion sur le champ de déplacement est limitée à un voisinage de l'inclusion.

### 2.3 Adimensionnement

Pour résoudre les équations de l'élasticité linéaire, nous avons au préalable adimensionné le problème pour éviter des variations d'ordre de grandeur trop importantes entre les différents termes, ce qui est source d'erreurs numériques. Il s'agit maintenant de retrouver les résultats avec dimension du problème réel.

Le paramètre  $R_e$  a été pris égal à 6,9 en unité  $R_i$  pour les simulations, donc si dans le monde réel  $R_i = 200 \mu\text{m}$ , alors  $R_e = 6,9R_i = 1,38 \text{ mm}$ . De même,  $E_i$  a été pris égal à 11 en unité  $E_m$ , donc si dans le monde réel  $E_m = 1.2 \text{ GPa}$ , alors  $E_i = 11E_m = 13.2 \text{ GPa}$ .

## 3 Etudes de convergence

### 3.1 Influence du maillage et des éléments finis sur la convergence

L'étude de convergence en maillage a été menée pour plusieurs ordres de maillage et degrés d'éléments de Lagrange, de manière isoparamétrique. A cause du nombre important de degrés de liberté et la mémoire limitée de nos ordinateurs, nous n'avons pas pu descendre à des tailles de maille trop petites. Sur la figure 4, nous avons ajusté une droite affine (en pointillés) sur les courbes obtenues avec FEniCSx (en traits pleins) pour en déterminer le coefficient directeur en échelle log-log. Ces coefficients directeurs indiquent que l'erreur relative en norme  $L2$  converge en  $h^{k+1}$  pour un maillage d'ordre  $k$  et des éléments de Lagrange de degré  $k$ , conformément à la théorie.

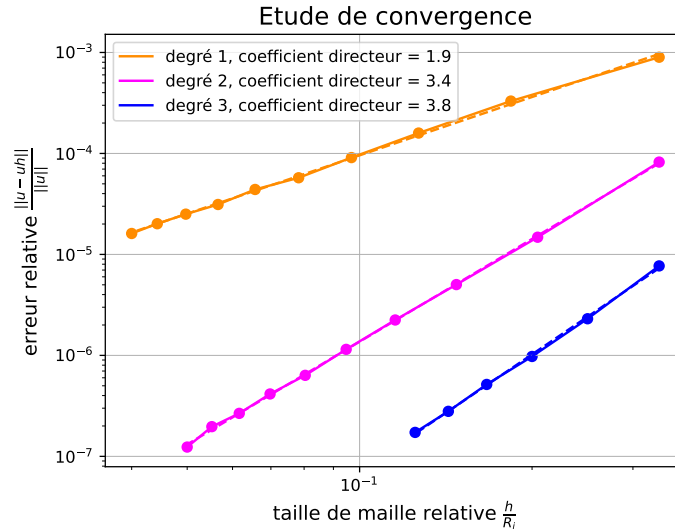


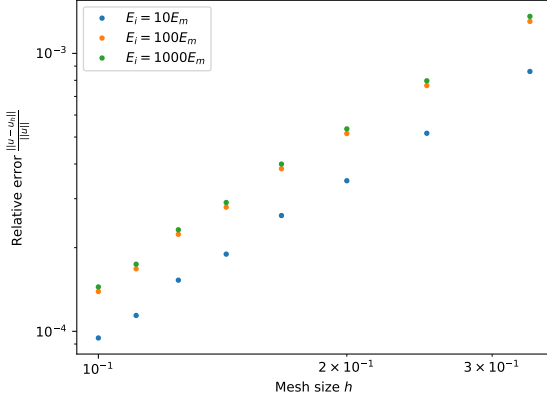
FIGURE 4 – Convergence de l'erreur relative en norme  $L2$ , pour plusieurs ordres de maillage et degré des éléments de Lagrange (isoparamétrique). Les courbes en traits pleins correspondent aux données obtenues avec FEniCSx, pour lesquelles on a déterminé le coefficient directeur en échelle log-log. Dans l'erreur relative,  $u$  désigne le déplacement analytique et  $u_h$  son approximation obtenue par éléments finis.

### 3.2 Influence du rapport des modules d'Young sur la convergence

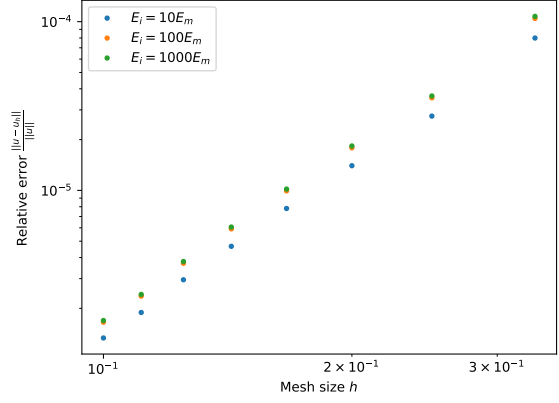
L'étude de convergence en maillage précédente est répétée pour un rapport des modules d'Young  $\frac{E_i}{E_m}$  variant de 10 à 1000, c'est-à-dire en considérant une inclusion de plus en plus rigide.

L'influence de la rigidité de l'inclusion sur la convergence est illustrée sur les figure 5a et figure 5b pour des maillages d'ordre 1 et 2 respectivement, toujours avec des éléments lagrangiens iso-paramétriques.

On observe que la rigidité de l'inclusion n'a pas d'influence sur la vitesse de convergence du maillage. Cependant, pour une taille de maillage donnée, plus l'inclusion est rigide, et plus l'erreur relative est élevée.



(a) Maillage et éléments d'ordre 1

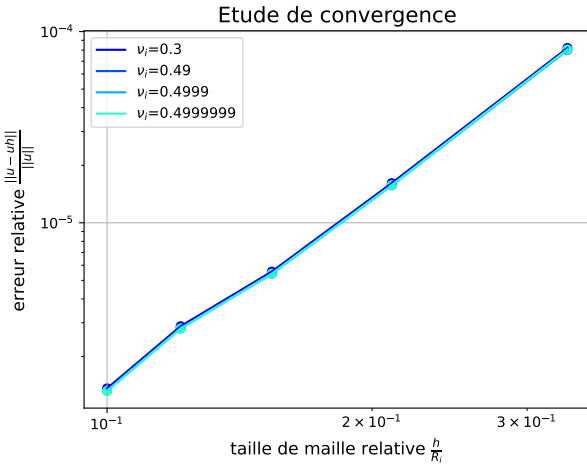


(b) Maillage et éléments d'ordre 2

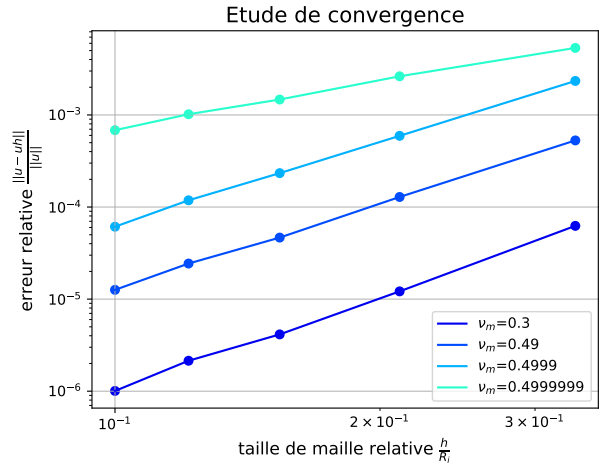
FIGURE 5 – Influence du rapport des modules d'Young  $\frac{E_i}{E_m}$  sur la convergence en maillage pour des éléments lagrangiens

### 3.3 Influence du coefficient de Poisson sur la convergence

Pour cette étude, nous avons utilisé des maillages d'ordre 2 avec des éléments de Lagrange de degré 2, pour plus de précision. Nous avons fait varier les coefficients de Poisson des deux constituants, sur une plage de valeurs comprise entre 0,3 et 0,4999999 (soit un matériau quasi-incompressible). La figure 6 montre comment cela affecte la convergence de la solution numérique vers la solution réelle.



(a) Influence de  $\nu_i$ .



(b) Influence de  $\nu_m$ .

FIGURE 6 – Influence du coefficient de Poisson sur la convergence en maillage pour des éléments lagrangiens.

La figure 6a montre que le coefficient de Poisson de l'inclusion n'impacte pas la convergence vers la solution analytique. Pour ne pas alourdir la figure 6b, les coefficients directeurs des régressions linéaires n'ont pas été ajoutés dans la légende. Ils sont environ égaux à 3 pour les trois premières valeurs de  $\nu_m$ , mais il vaut seulement 1.7 pour  $\nu_m = 0.4999999$ . On constate donc d'une part que pour un maillage donné, l'erreur augmente fortement lorsque  $\nu_m$  augmente, et d'autre part que la vitesse de convergence avec la taille de maille est plus faible lorsque  $\nu_m$  se rapproche de 0,5. Cette difficulté à converger nous paraît cohérente, puisqu'on impose ici une déformation au bord de la matrice qui fait passer son volume à 0, et qu'on étudie des valeurs de  $\nu_m$  telles que la matrice devient pratiquement incompressible ( $\nu_m \simeq 0,5$ ).