Übung 3

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Rybien Sinjari
Dominic Gibietz
Christopher Diekkamp

Übung 4
Aufgabe 1:
Periodische Funktionen

Eine periodische Funktion, erfüllt die Dirichlet-Bedingung, wenn folgendes zutrifft:

1. Die Anzahl der Unstetigkeiten in einer Periode sind endlich
2. Die Anzahl der Min- und Maxima innerhalb einer Periode sind endlich
3. Die Funktion ist in jeder Periode integrierbar

Übung 4
Aufgabe 1:
Periodische Funktionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Eine periodische Funktion f(x), die die Dirichlet-Bedingung erfüllt, lässt sich als Summe von Sinus und Kosinus Koeffizienten darstellen.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

Übung 4
Aufgabe 2: Abtasttheorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Pro Wellenlänge λ werden mindestens 2λ Abtastpunkte benötigt um die Funktion wiederherzustellen.

Eine zu geringe Abtastrate führt zu einer

- falsch wiederhergestellten
- unvollständig wiederhergestellten
- nicht wiederherstellbaren

Funktion.

Übung 4
Aufgabe 3: Sampling

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ein Aliasing-Effekt tritt auf, wenn

- Abtastfrequenz < 2x Nyquistfrequenz
- das Abtastsignal ein Störsignal (Rauschen) enthält

Das Ursprungssignal ist dann nicht mehr fehlerfrei rekonstruierbar und es kann zu periodischen Fehlern kommen.

Bei Bildern führt das zum Beispiel häufig zu Mustern im rekonstruierten Bild, welche nicht im Original enthalten waren.

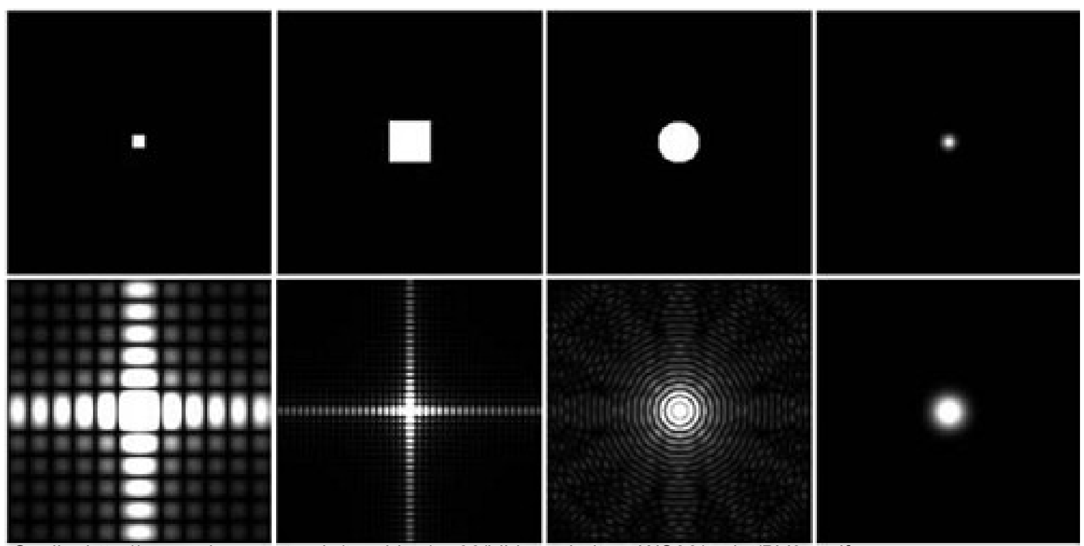
Übung 4
Aufgabe 4:
Faltung und Filterung

Der Ortsraum eines Bildes ist dessen Darstellung als Angabe von Position und Wert. Also z.B. der xy-Kooridinate eines Pixels und dessen Farbwert.

Der Frequenzraum hingegen ist die Darstellung der Frequenz zerlegt in ihr Spektrum mit Amplitude und Phase.

Ortsraum

Frequenzsraum



Quelle: http://cvpr.uni-muenster.de/teaching/ws06/bildverarbeitungWS06/script/BV05.pdf

Übung 4
Aufgabe 5:
Fourierreihe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} 0\ dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\ dx\right) = \frac{1}{2\pi}(0+\pi+0) = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} 0\ dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\ dx\right) = \frac{1}{n\pi}(0+2+0) = \frac{2}{n\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} 0\ dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\ dx\right) = \frac{1}{n\pi}(0+0+0) = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\cos(nx)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{wenn } -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{wenn } \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$