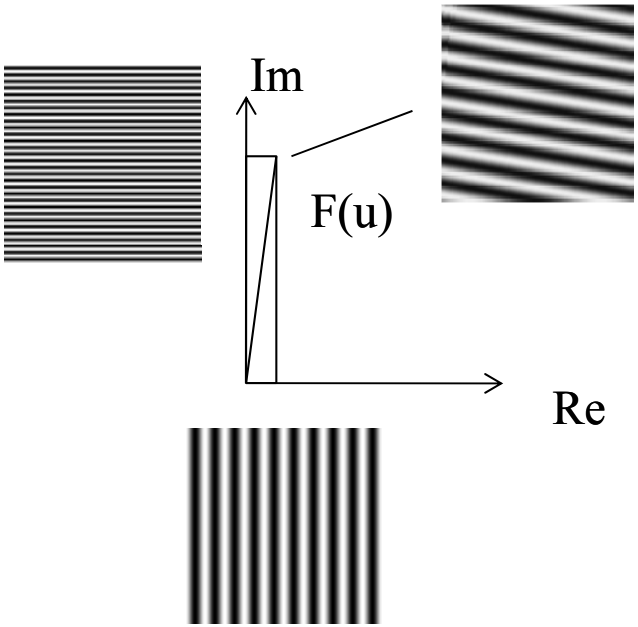
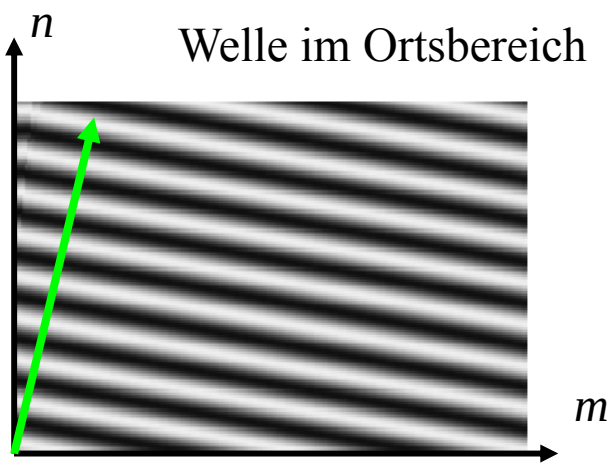
2-D Fouriertransformation

- Basisfunktionen sind Wellen mit unterschiedlicher Frequenz, *Richtung*, Amplitude und Phase
- alle 2-d Basisfunktionen können als Kombination von zwei 1-d Funktionen erzeugt werden
  - einfache Repräsentation
  - beschleunigt Berechnung
  - geht so nur mit den komplexen Basisfunktionen



2-D Fouriertransformation



Basisfunktionen sind Wellen (Frequenz, Richtung, Amplitude, Phase):

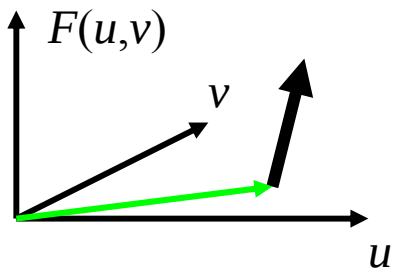
$$\exp(-i\cdot 2\pi/N\cdot(mu+nv))$$

Richtung ist durch Vektor $(u\ v)$ gegeben.

Die Basisfunktionen der 2-D Fourier-transformation sind zerlegbar:

$$\exp(-i\cdot 2\pi/N\cdot(mu+nv)) = \exp(-i\cdot 2\pi/N\cdot m\cdot u)\cdot\exp(-i\cdot 2\pi/N\cdot n\cdot v)$$

(komplexer) Funktionswert im Frequenzbereich



2-D Fouriertransformationspaar

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$$

$$f(m,n) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$$

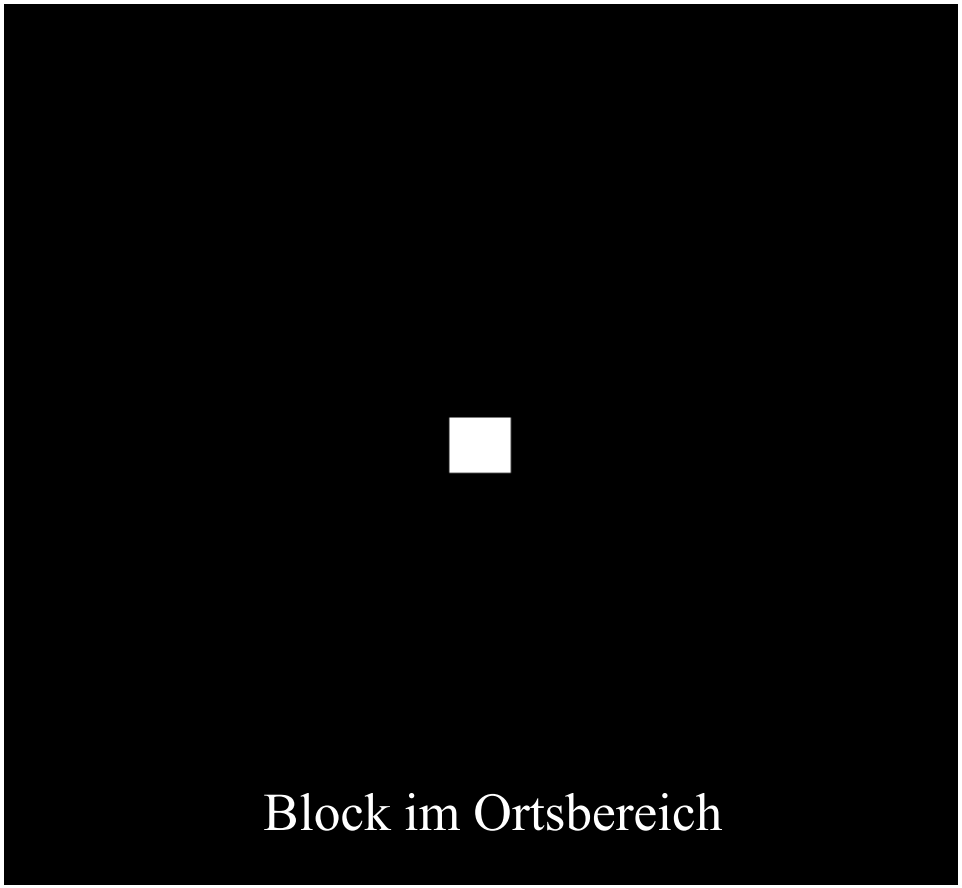
Transformationspaar für Bilder der Größe *M*x*N*

Transformationspaar für quadratische Bilder der Größe *N*x*N*

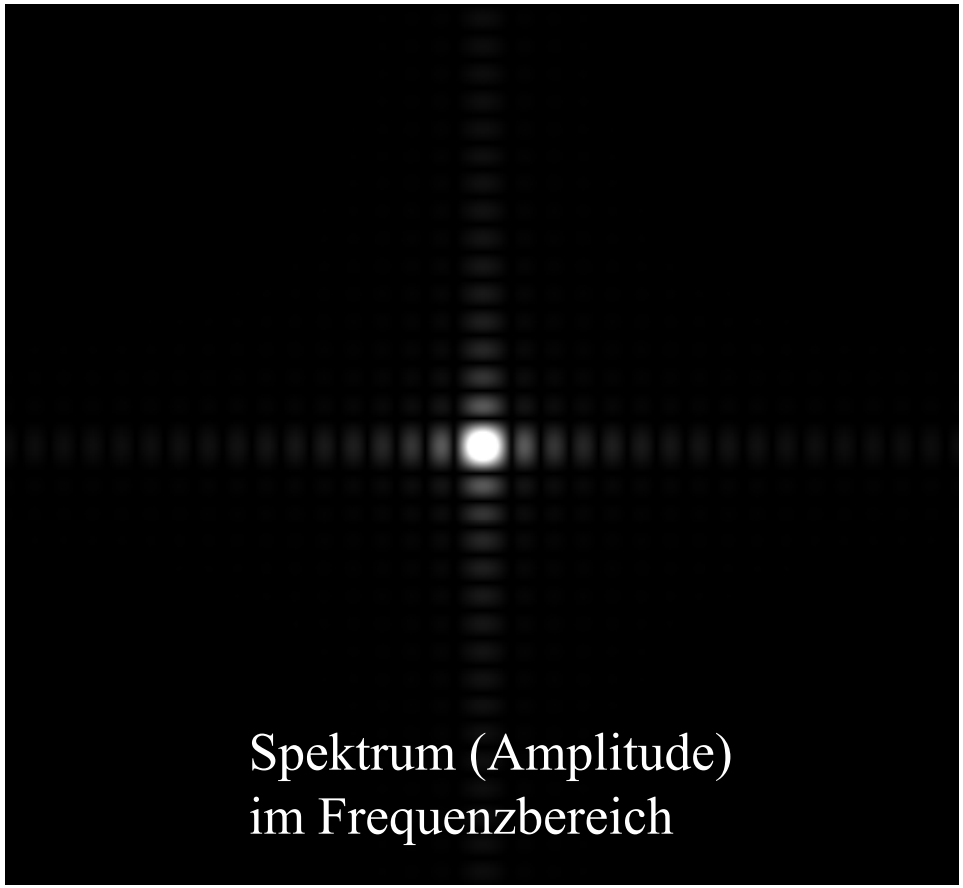
$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \cdot e^{-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot (um+vn)}$$

$$f(m,n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot (um+vn)}$$

Bilder im Orts- und Frequenzraum

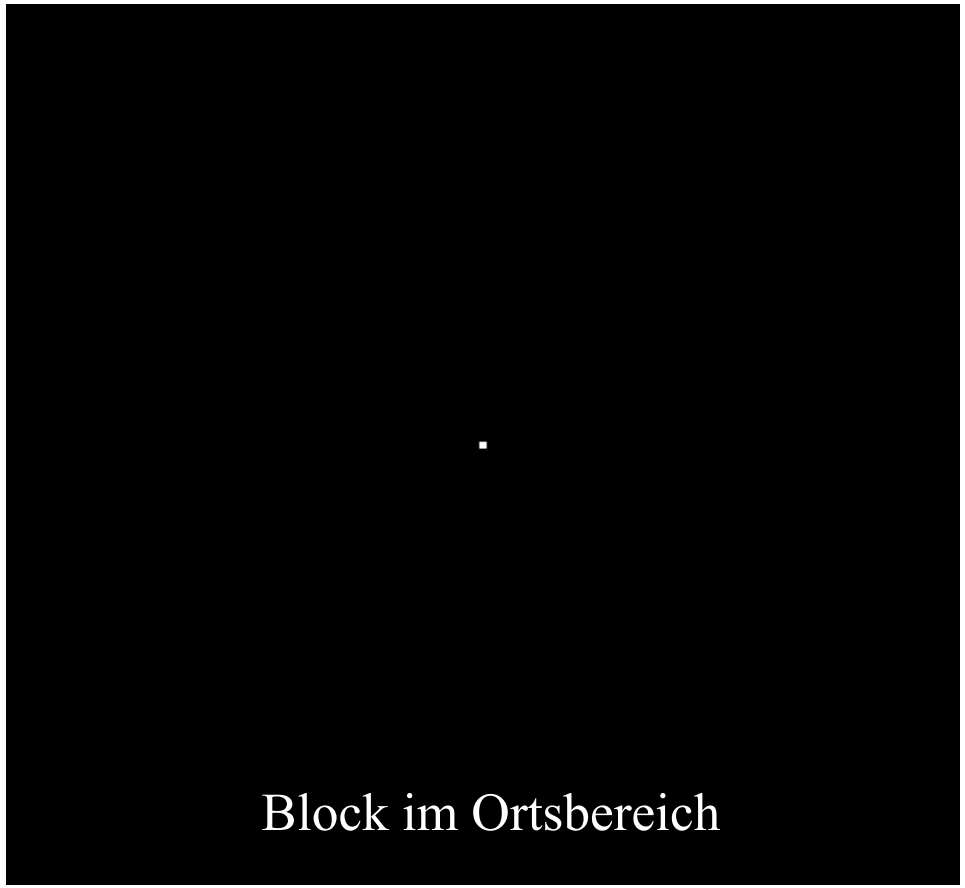


Block im Ortsbereich



Spektrum (Amplitude)
im Frequenzbereich

Bilder im Orts- und Frequenzraum

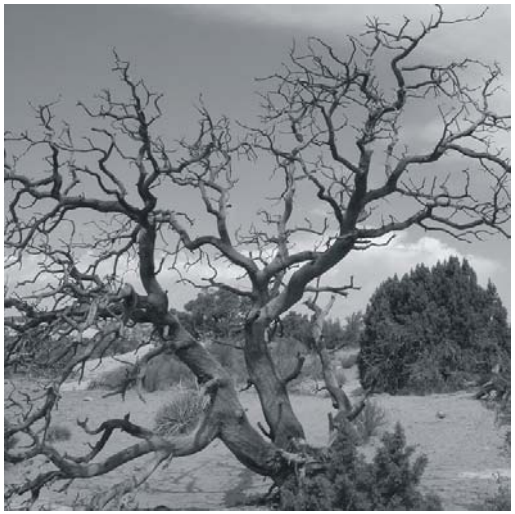


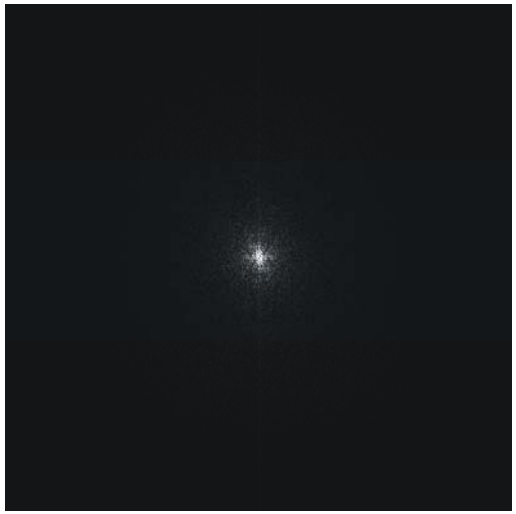
Block im Ortsbereich

Spektrum (Amplitude)
im Frequenzbereich

Darstellung der Amplitude

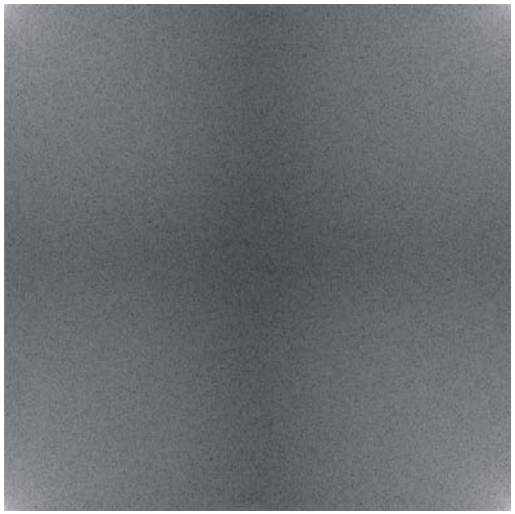
original

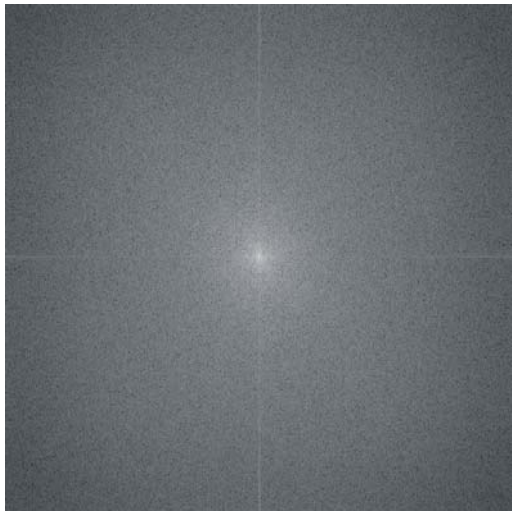




Spektrum zentriert

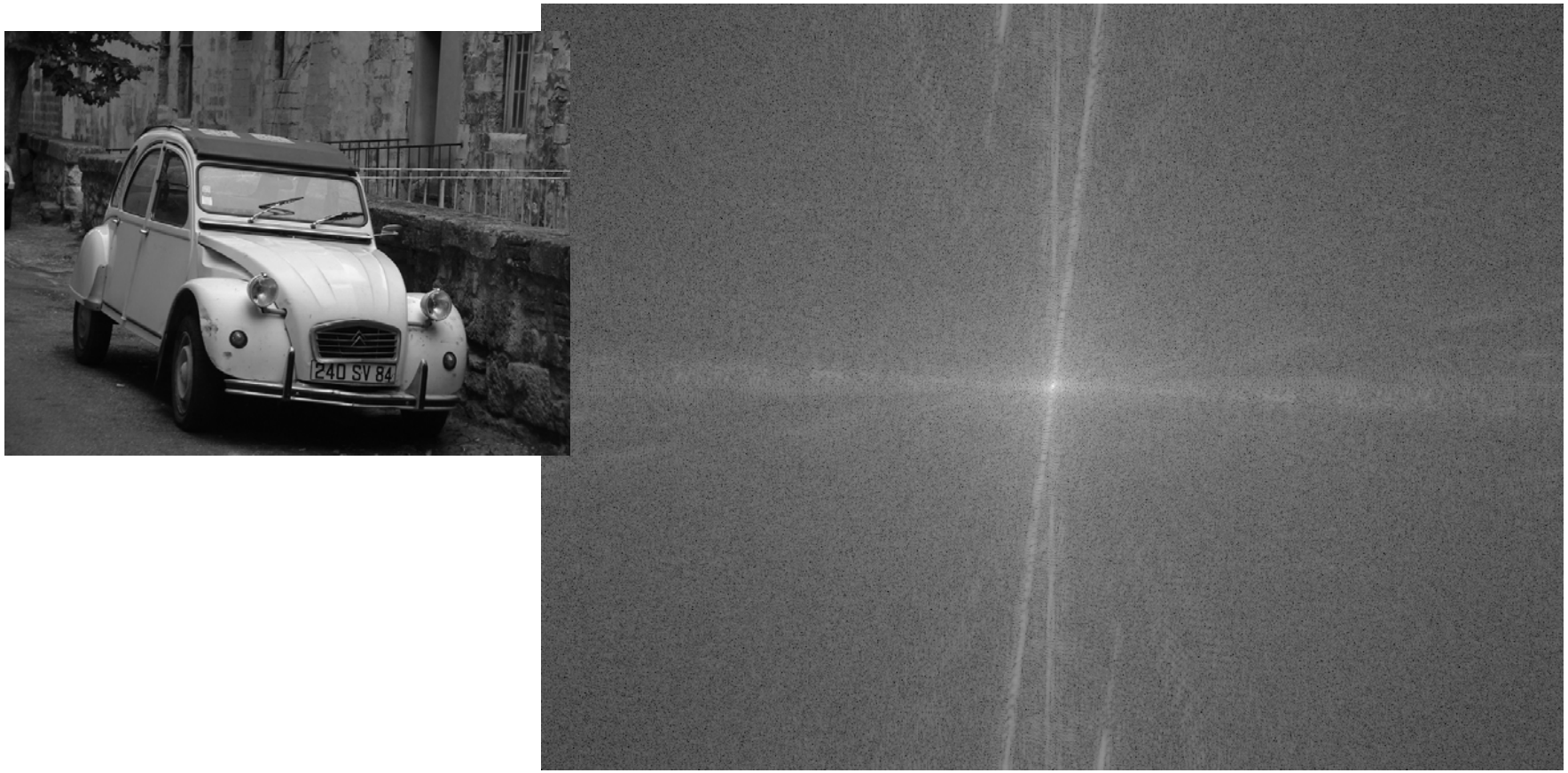
logarithmiertes Spektrum



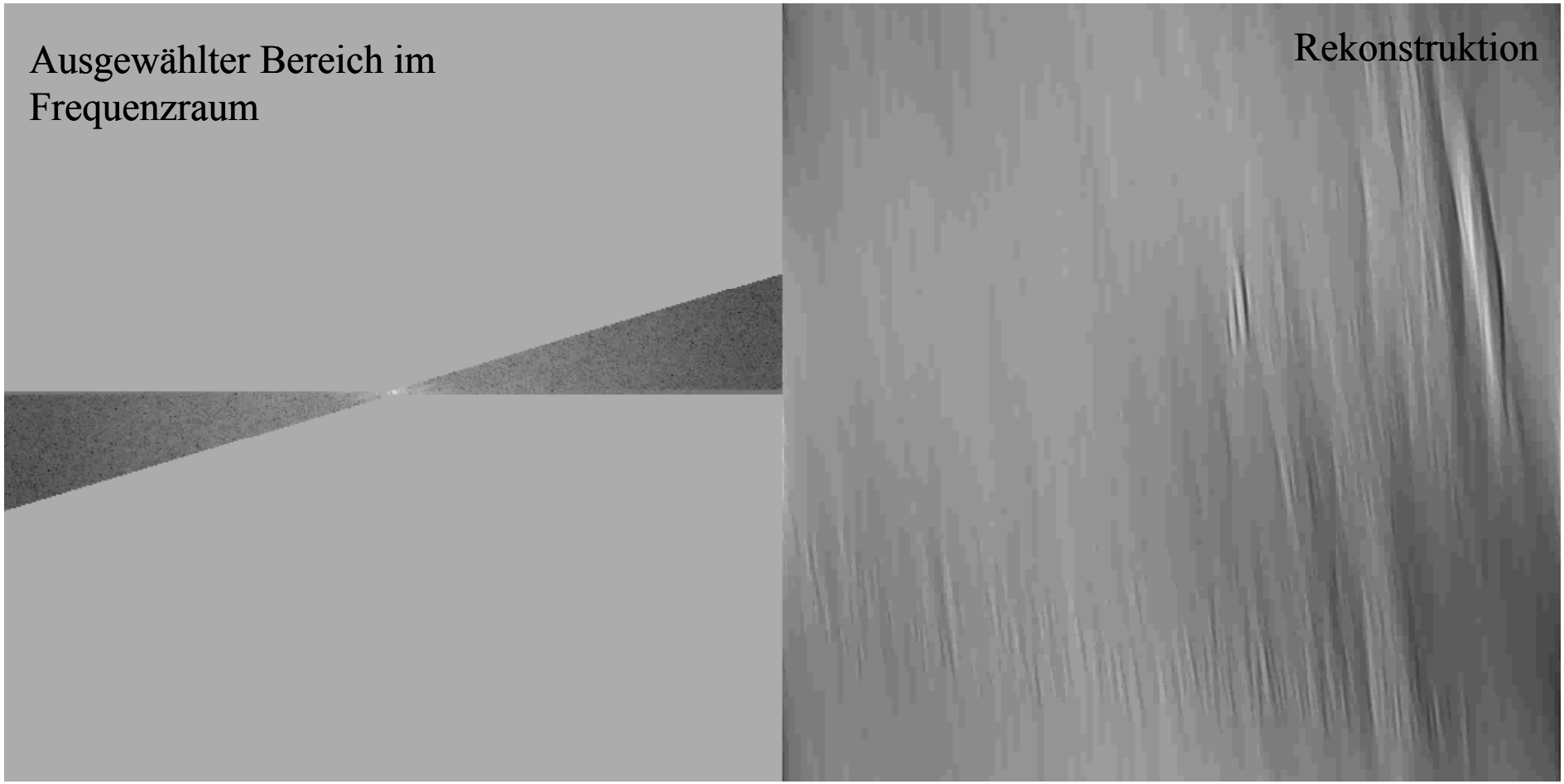


logarithmiertes Spektrum, zentriert

Bilder im Orts- und Frequenzraum

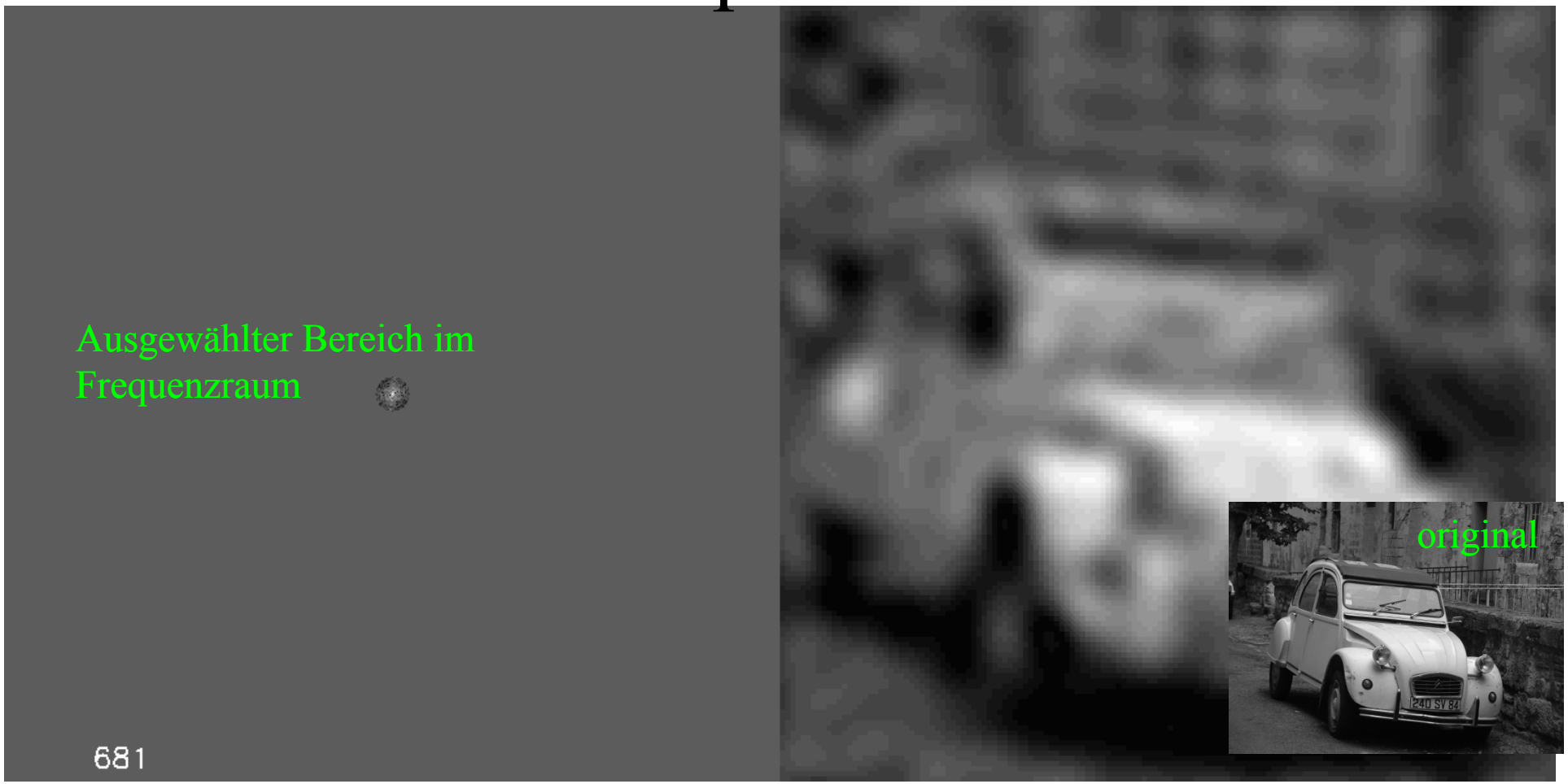


Schrittweise Summation der Komponenten

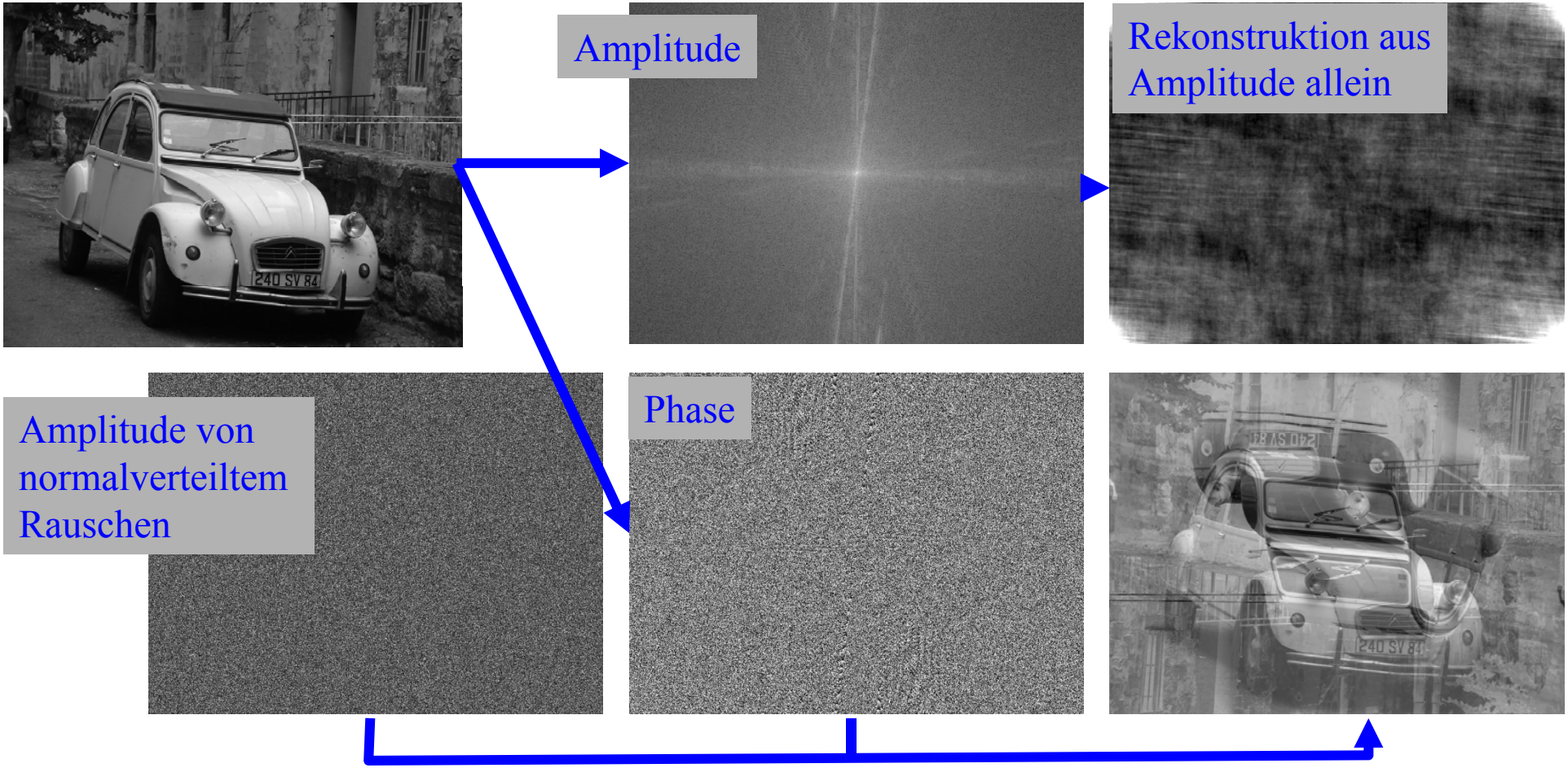


Schrittweise Summation der Komponenten

Rekonstruktion



Der Einfluss der Phaseninformation



Fouriertransformation für kontinuierliche Funktionen

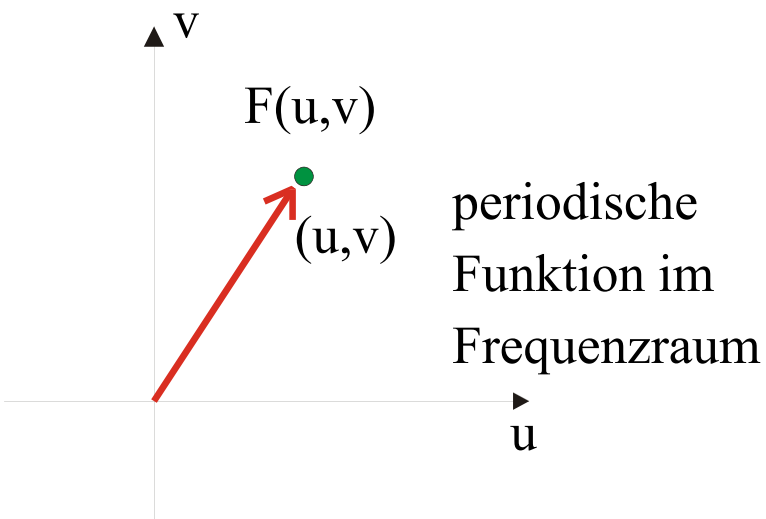
- Anzahl der Funktionswerte geht gegen unendlich.
- Skalarprodukt zwischen Funktionen *f* und *g* ist das Integral der miteinander multiplizierten Funktionen.
- Das Skalarprodukt existiert, wenn die Funktion kontinuierlich und integrierbar ist.
- Fouriertransformation existiert, falls das Skalarprodukt existiert

Transformationspaar

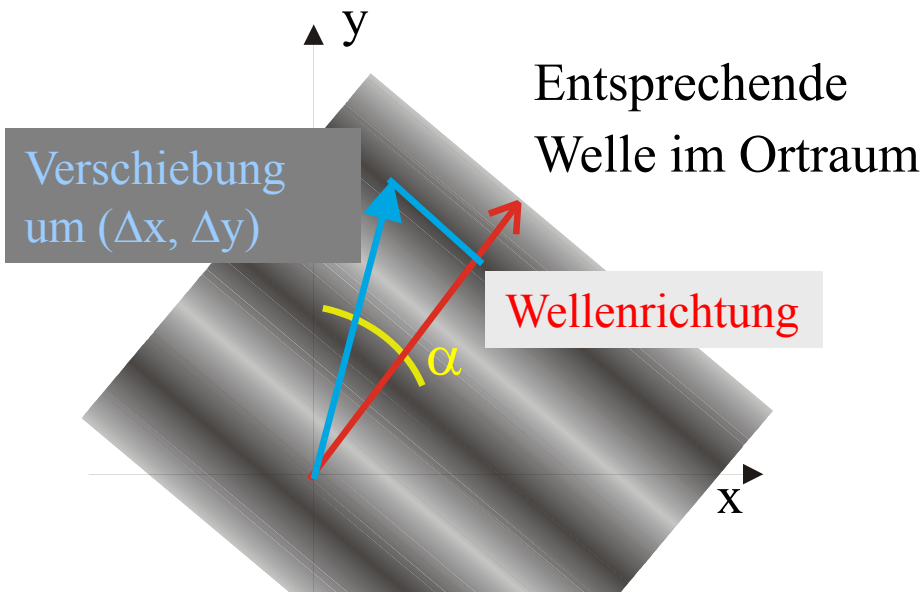
$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot(ux+vy)}dxdy$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot(ux+vy)}dudv$$

Verhalten: Translation



periodische Funktion im Frequenzraum



- Translation im Ortsbereich führt zu einer Translation der zusammensetzenden Wellen.
- Umfang der Translation hängt vom Unterschied zwischen Wellenrichtung (u v) und Translationsrichtung (Δx Δy) ab.
- Im Frequenzbereich bedeutet die Translation eine Phasenverschiebung.

Berechnung der Phasenverschiebung

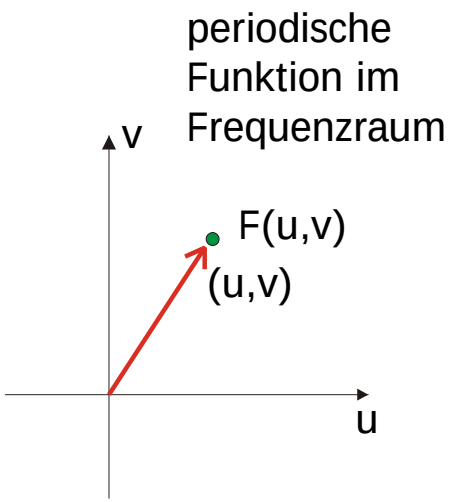
$p_{u,v} = |(\Delta x, \Delta y)| \cdot \cos(\alpha) \,/\, T_{u,v}$ mit $\cos(\alpha)$ - Winkel zwischen Wellenrichtung und Richtung von $(\Delta x, \Delta y)$

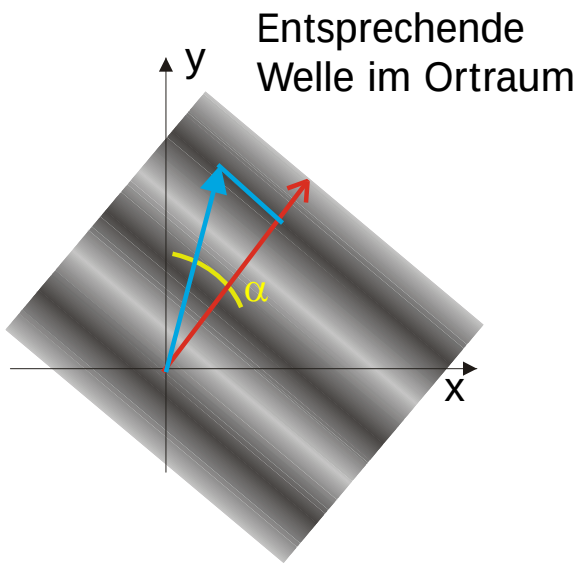
$T_{u,v}$ - Wellelänge = 1/Frequenz

$$\cos(\alpha) = \frac{(\Delta x \quad \Delta y) \bullet (u \quad v)}{|(\Delta x \quad \Delta y)| \cdot |(u \quad v)|}$$

$$T_{u,v} = \frac{N}{2\pi} \cdot \frac{1}{|(u \quad v)|}$$

$$\Rightarrow p_{u,v} = \exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{N} (u\Delta x + v\Delta y) \right)$$

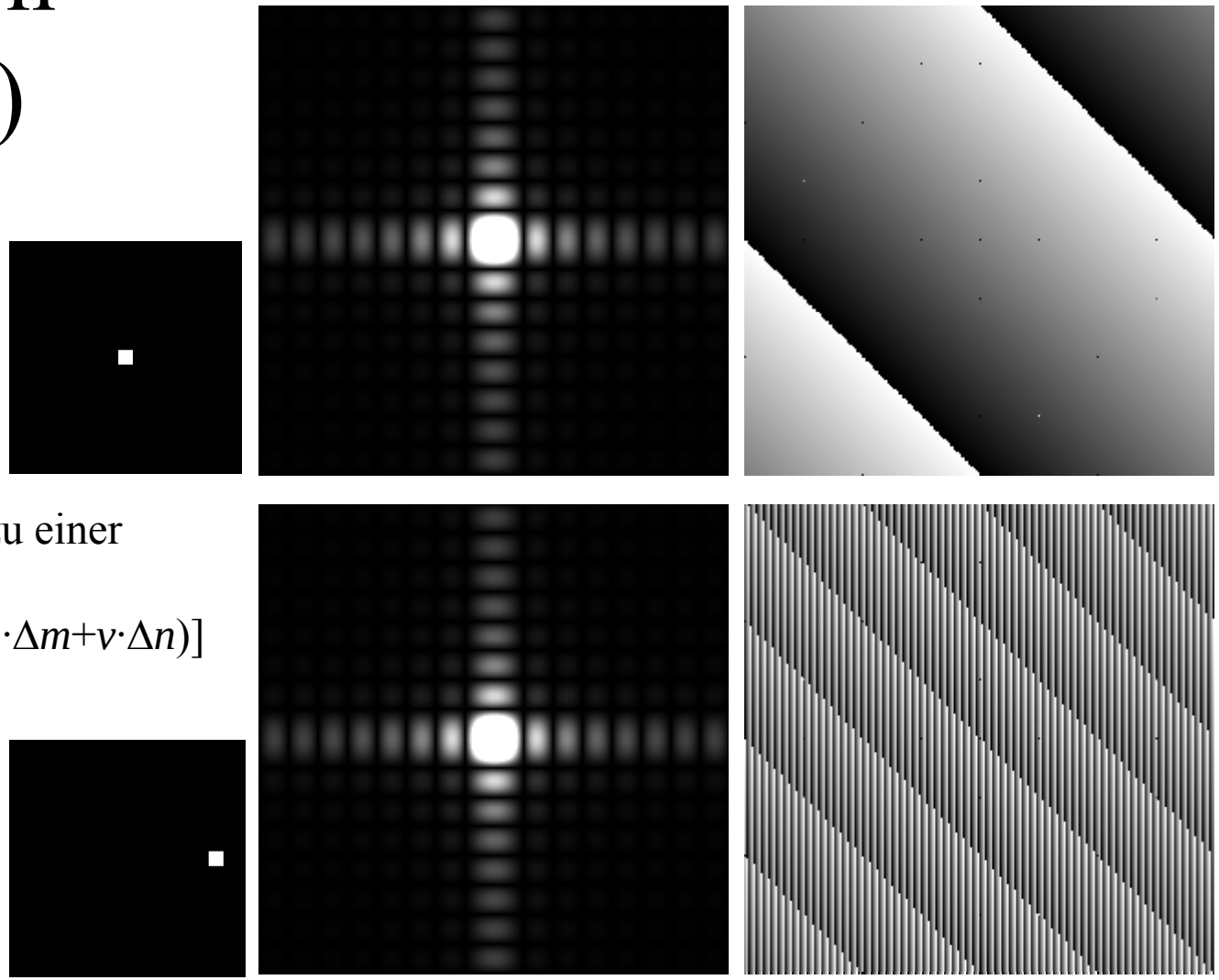




Translation (Beispiel)

Amplitude

Phase



Translation um (Δm, Δn) führt zu einer Phasenverschiebung

$F'(u,v) = F(u,v) \cdot \exp[-i \cdot 2\pi/N \cdot (u \cdot \Delta m + v \cdot \Delta n)]$

Translation um $M/2$

- Für eine diskrete Fouriertransformation auf einer Funktion mit M Werten gilt

$$F\left(u-\frac{N}{2}\right) \Leftrightarrow f(m)\exp\left(i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}m\right) = f(m)\exp(i\pi m) = f(m)(-1)^m$$

- Für die 2-D Variante gilt entsprechend

$$F\left(u-\frac{N}{2}, v-\frac{N}{2}\right) \Leftrightarrow f(m,n)\exp\left(i\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}m+\frac{N}{2}n\right)\right)$$

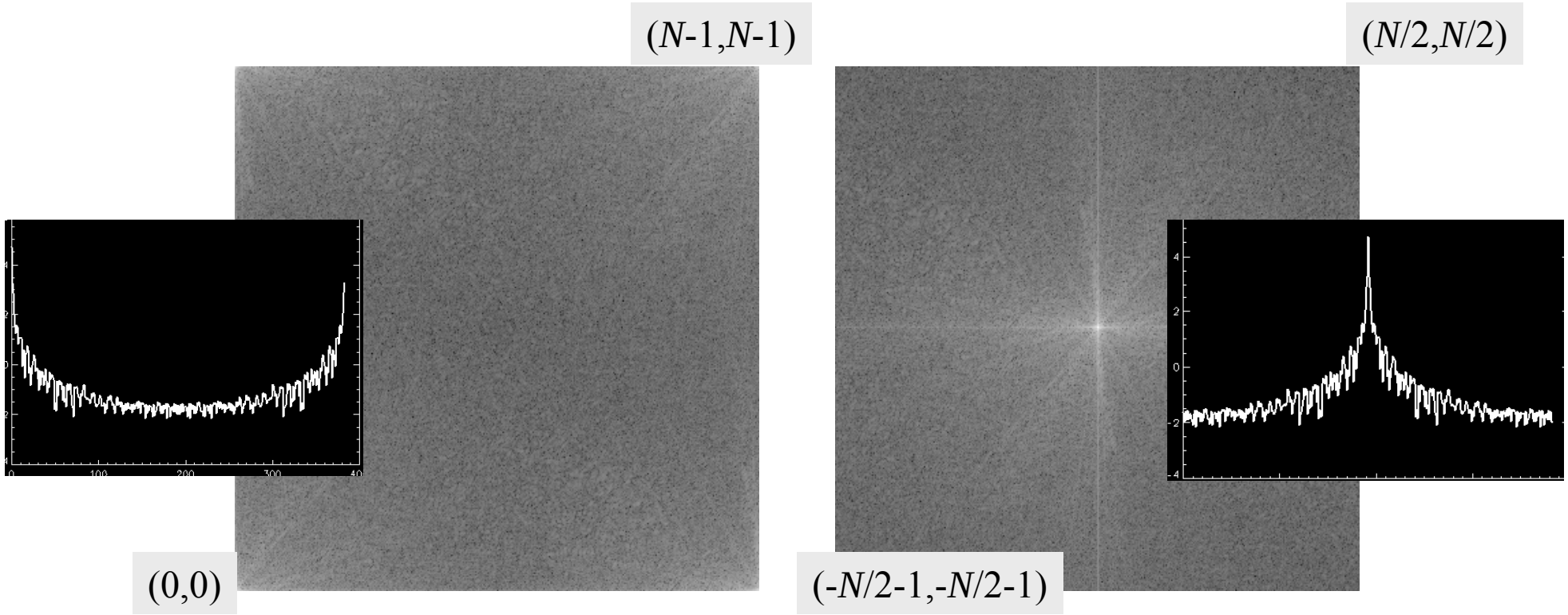
$$= f(m,n)\exp(i\pi(m+n)) = f(m,n)(-1)^{m+n}$$

Verschiebung von (0..N-1,0..N-1) nach (-N/2..N/2-1,-N/2..N/2-1) ändert nur das Vorzeichen der Phase!

Translation um $M/2$ (Beispiel)

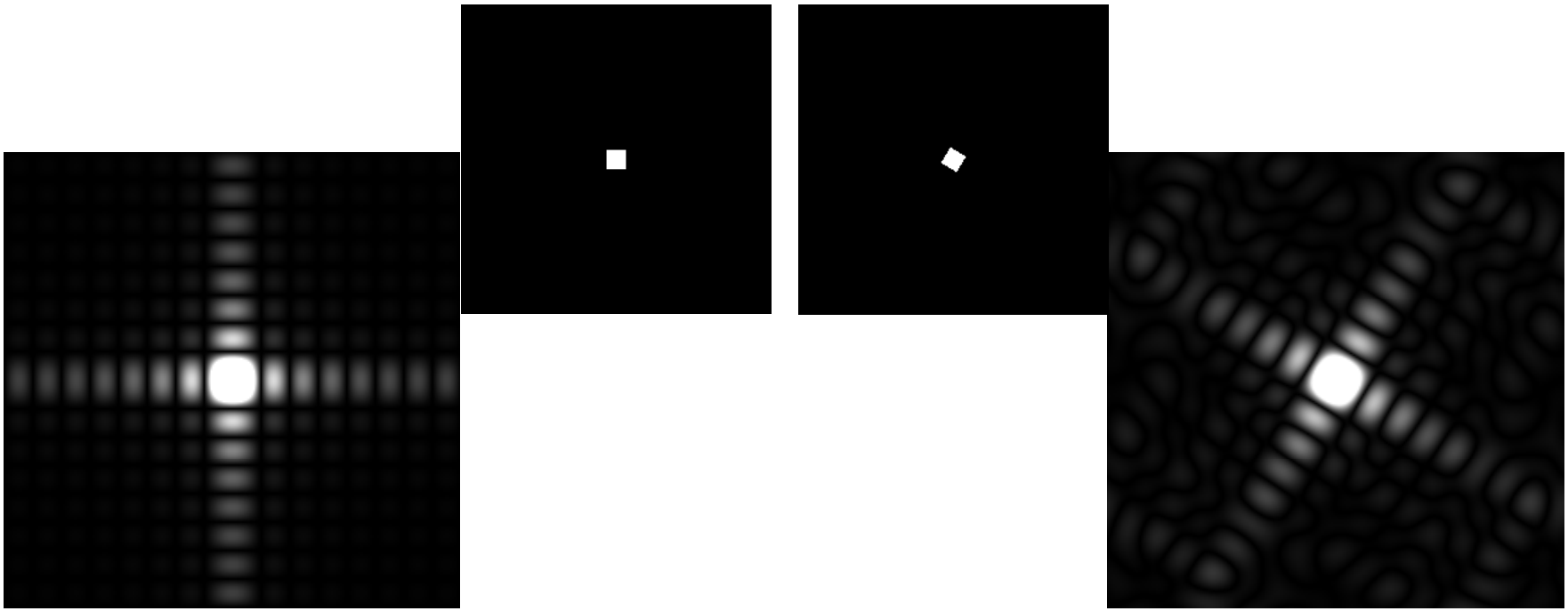
$|F(u,v)|$, $u=-N/2...+N/2-1$, $v=-N/2...+N/2-1$

ist gleichwertig zu $|F(u,v)|$, $u=0,...,N-1$, $v=0,...,N-1$.



Rotation

Rotation: $F(u,v)$ wird in gleicher Weise rotiert wie $f(m,n)$.



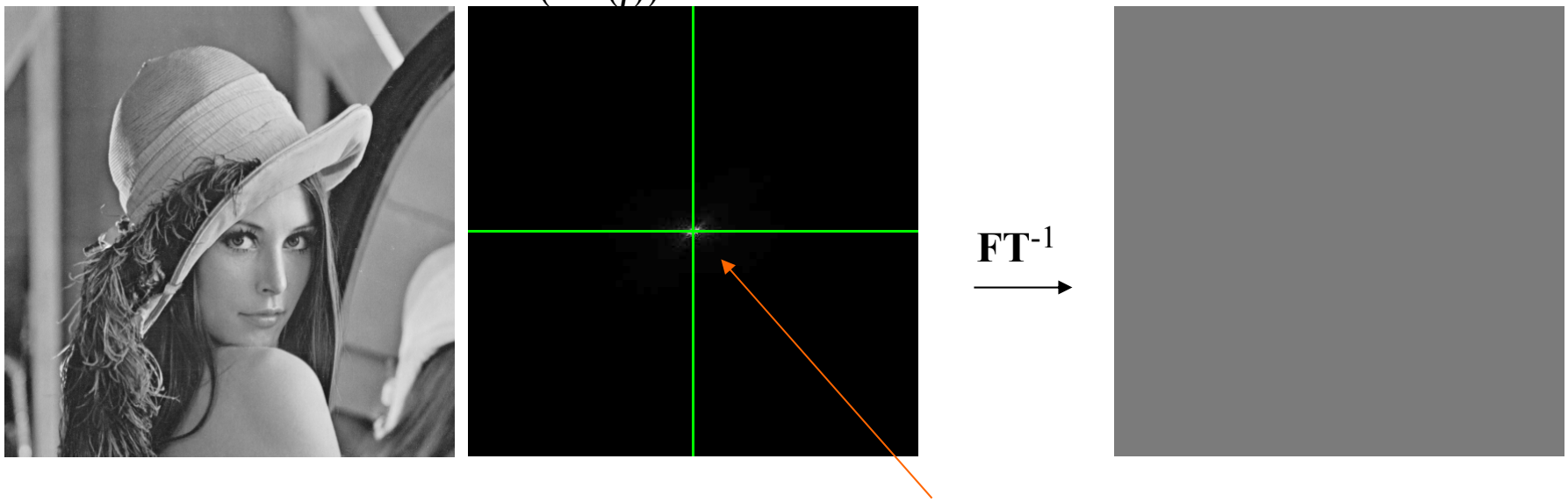
Mittelwert der Funktion

$$F(0,0) = 1/N^2 \cdot \Sigma\,\Sigma\, f(m,n) \cdot \exp(-\, i \cdot 2\pi \cdot (0m+0n)/N)$$

$$= 1/N^2 \cdot \Sigma\,\Sigma\, f(m,n) \cdot \exp(0)$$

$$= f_{avg}$$

abs(**FT**(f))



$F(0,0) = (123.5\ ,\ 0.0)$

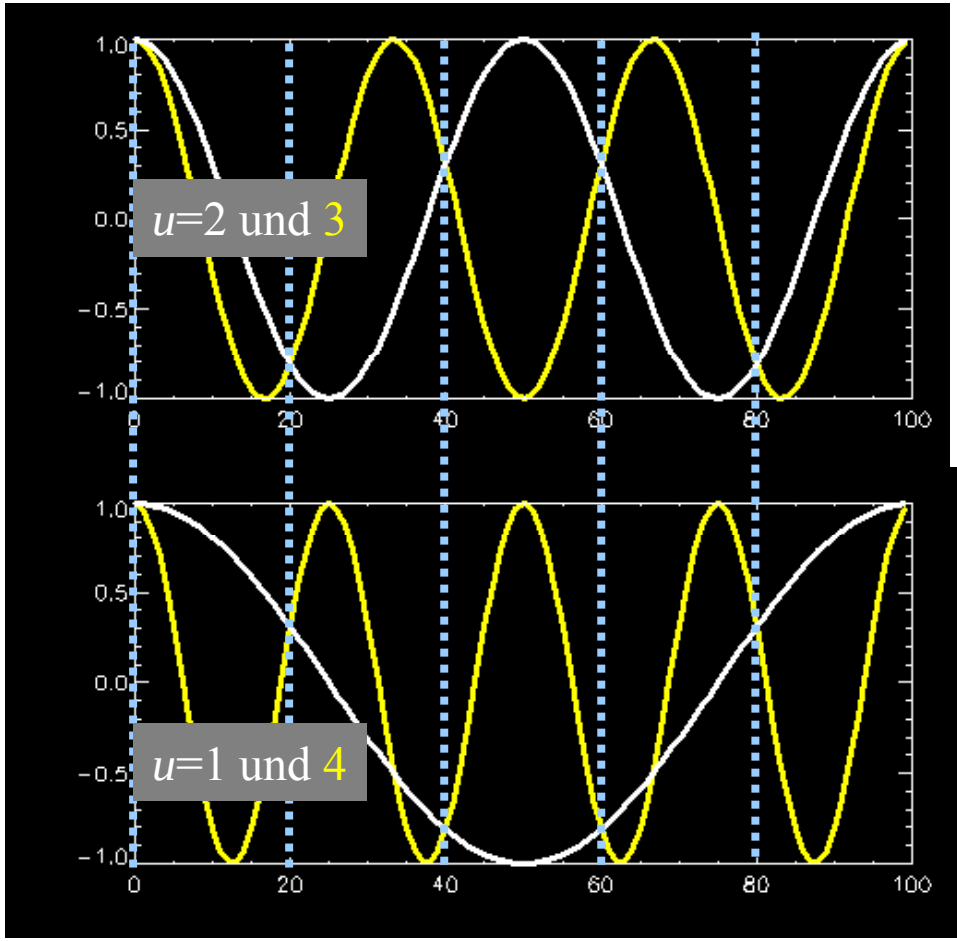
Periodizität und Symmetrie

- Für ein- und zweidimensionale Funktionen mit M bzw. M und N Werten gilt:
  - $F(u) = F(u+M)$, $f(m)=f(m+M)$
  - $F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N)$
  - $f(m,n) = f(m+M,n) = f(m,n+N) = f(m+M,n+N)$
- Für reellwertige Funktionen f gilt für die Fouriertransformierte:
  - $F(u) = {}^*F(-u)$
  - $F(u,v) = {}^*F(-u,-v)$

  (reduziert die zu berechnenden Werte um die Hälfte)

  *x=a-ib ist die komplex-konjugierte der komplexen Zahl a=a+ib.

Symmetrie der abgetasteten Kosinusfunktion

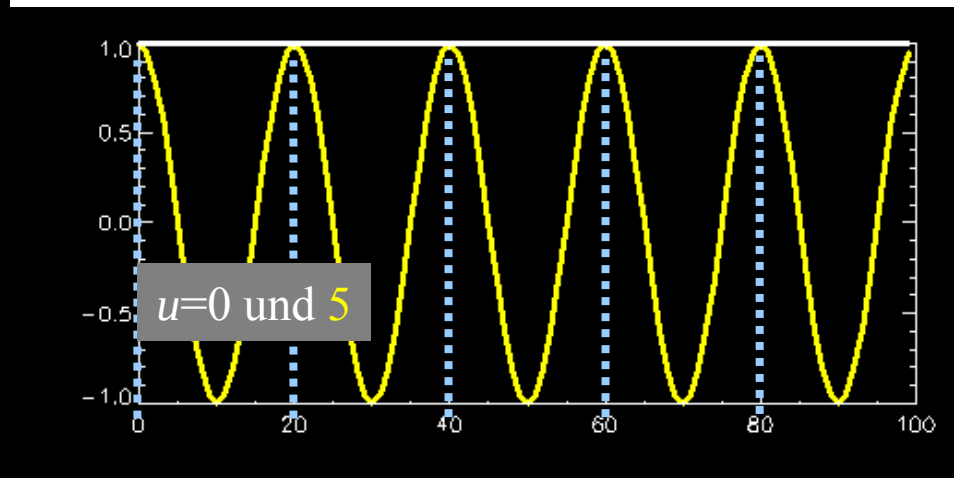


Beispiel für M=5:

$$\left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}2m\right)\right| = \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}(-2)m\right)\right| = \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}3m\right)\right|$$

$$\left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}1m\right)\right| = \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}(-1)m\right)\right| = \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}4m\right)\right|$$

$$\left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}0m\right)\right| = \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}5m\right)\right|$$



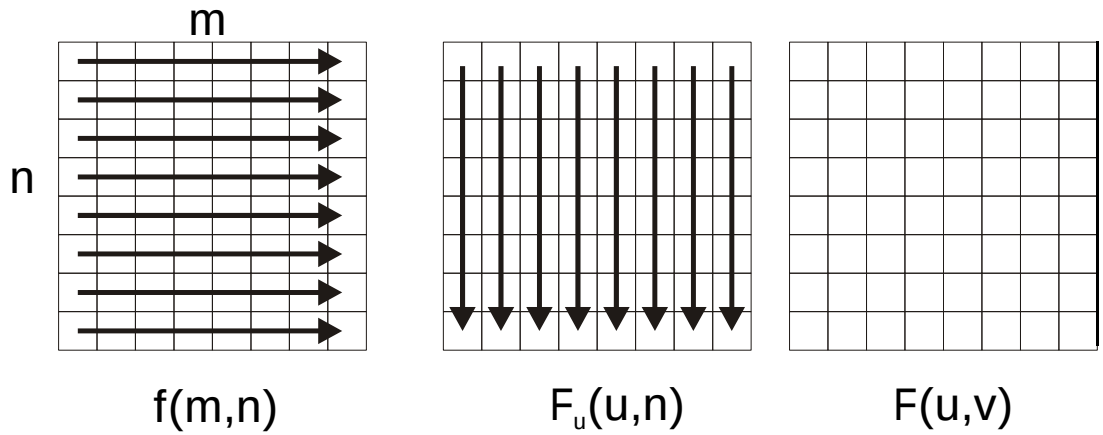
Separabilität

Die Fouriertransformation ist separabel, d.h., sie kann zunächst in M-Richtung und anschließend auf diesen Zwischenergebnissen in N-Richtung ausgeführt werden.

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \, \Sigma_\mu \, f(m,n) \cdot \exp(-\, i \cdot 2\pi \cdot (um+vn)/\mathrm{N}) \\
&= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \, \Sigma_\mu \, f(m,n) \cdot \exp(-\, i \cdot 2\pi \cdot um/N) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N) \\
&= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \, \left[\Sigma_\mu \, f(m,n) \cdot \exp(-\, i \cdot 2\pi \cdot um/N)\right] \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N) \\
&= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \, F_u(m,n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N)
\end{aligned}
$$

kann aus der inneren Summe ausgeklammert werden.

Reduziert den Berechnungs-aufwand von $O(N^4)$ auf $O(N^3)$.

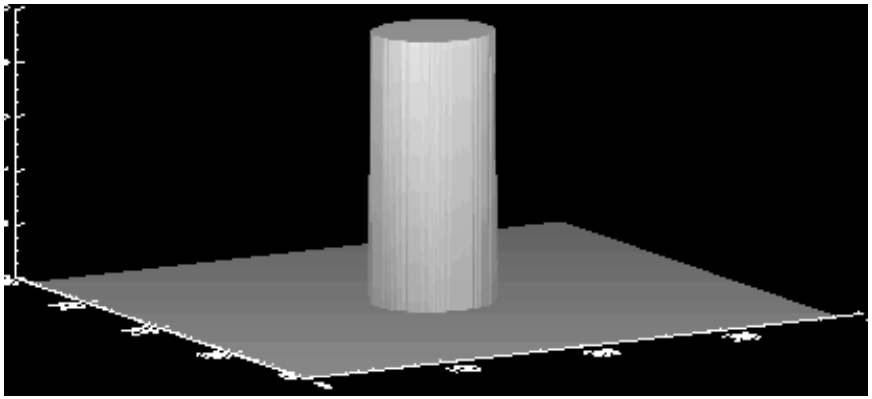


Filterung

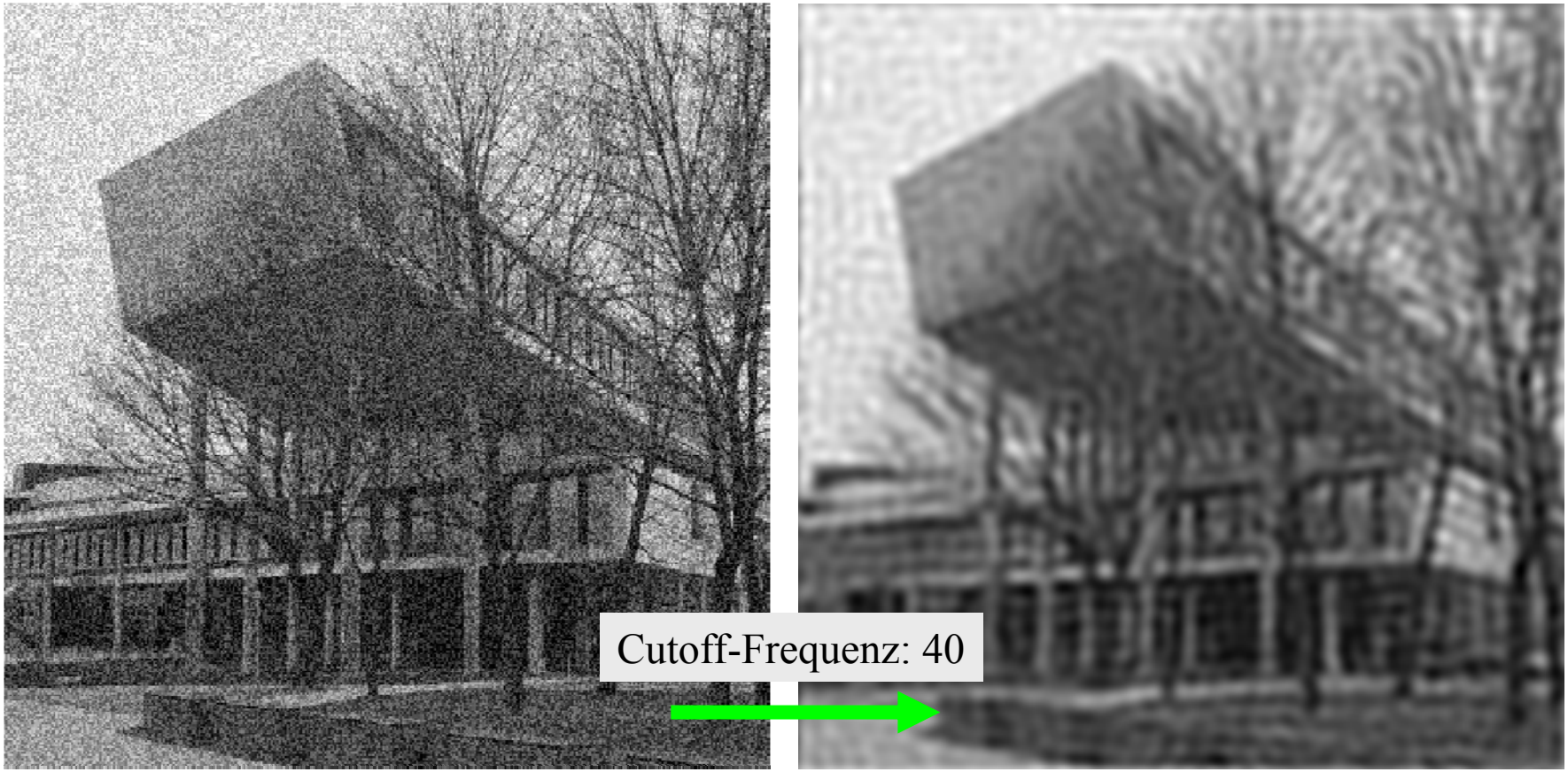
- Filterung im Frequenzraum: Veränderung der Funktionswerte vor der Rücktransformation.
- Motivation: Semantische Trennung von Bildern im Frequenzraum, z.B., niedrige Frequenzen zeigen Intensitäten, hohe zeigen Kanten
- Ideales Tiefpassfilter

$$H_{F_{\max}}(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } u^2 + v^2 \leq F_{\max}^2 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

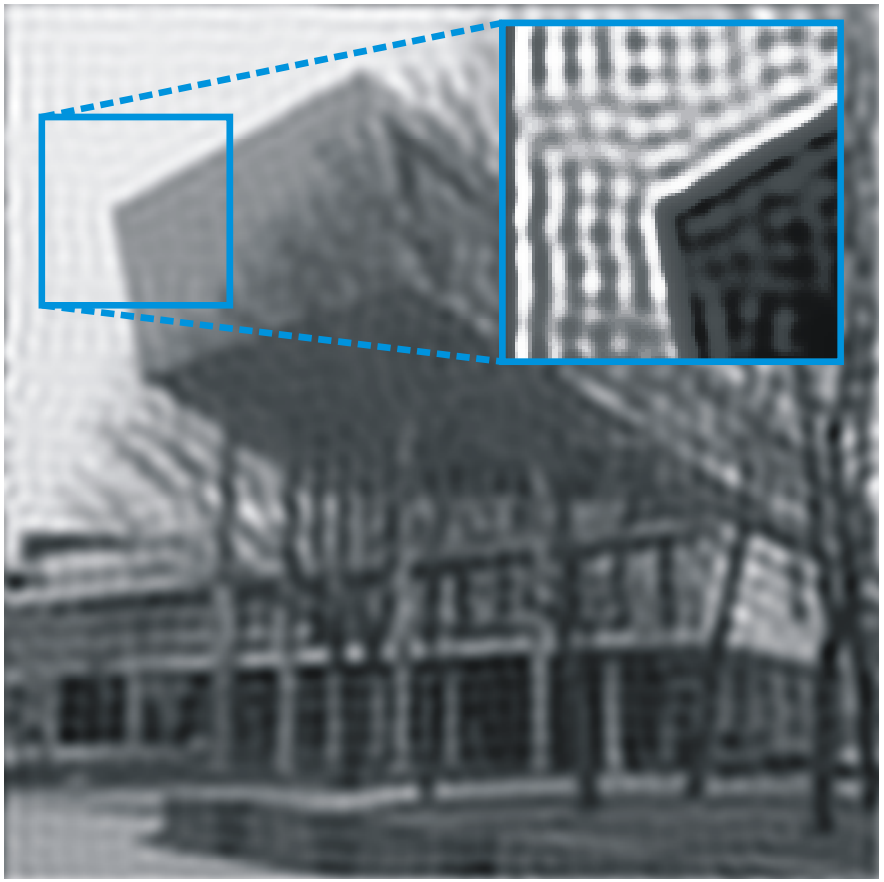
F_{max} – Cut-Off-Frequenz

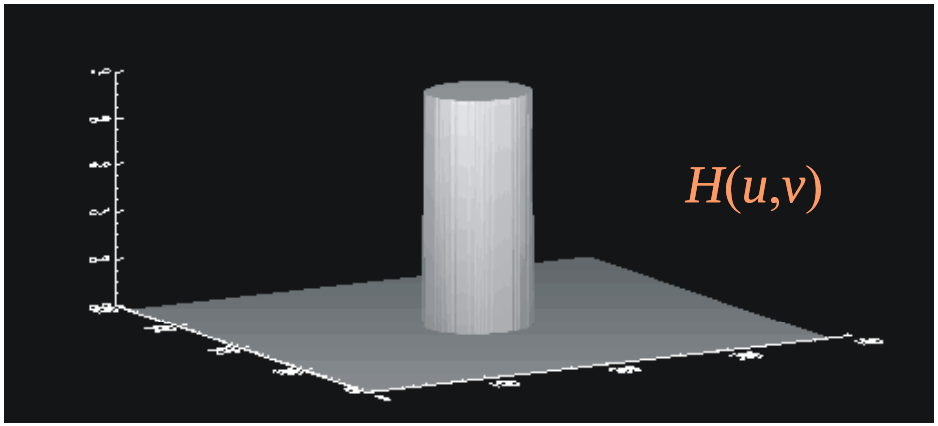


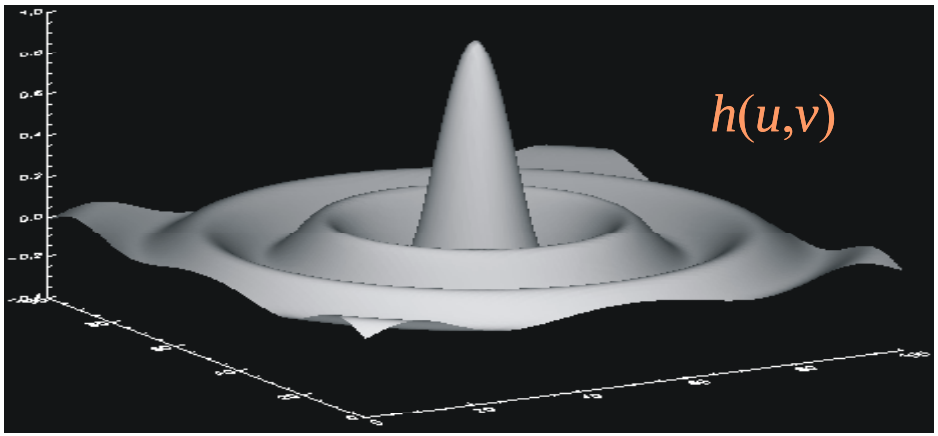
Beispiel Tiefpassfilter



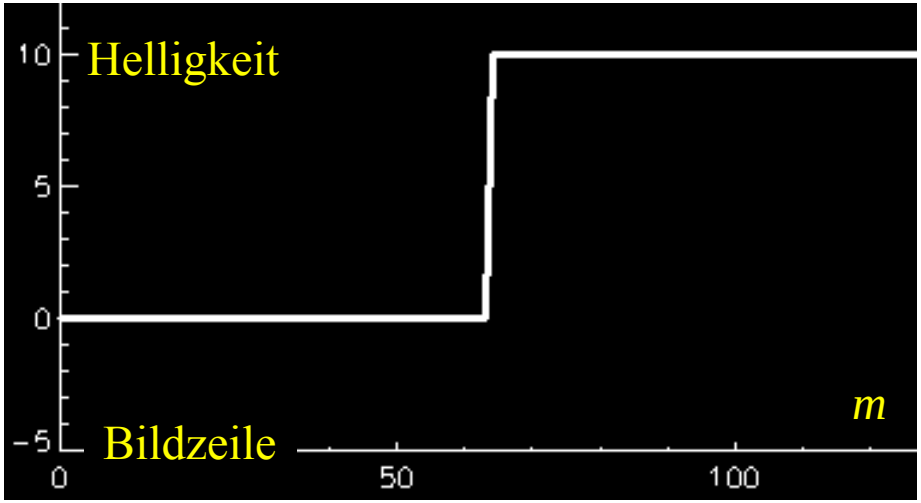
Ringing-Artefakt

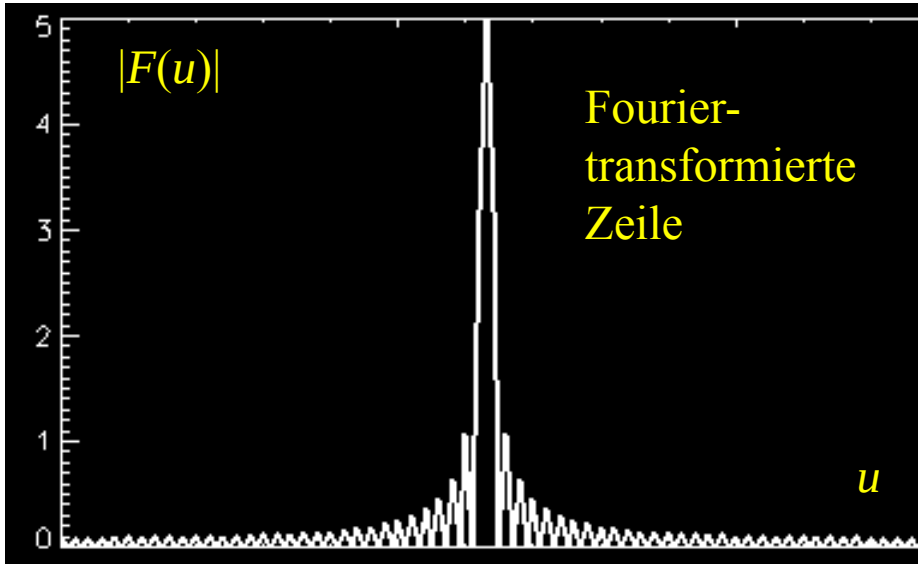






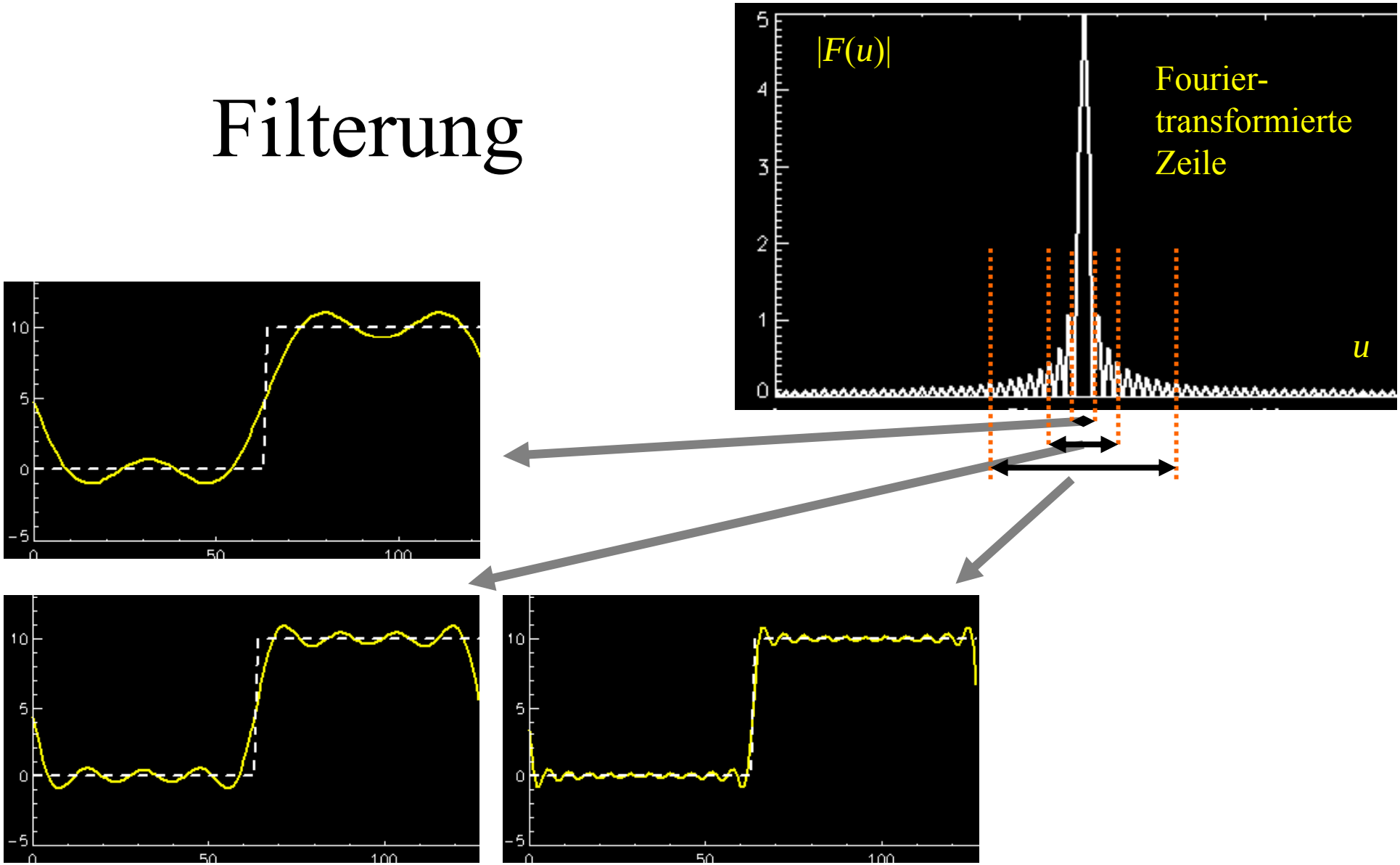
Das Ringing-Artefakt verstehen





Das Ringing-Artefakt entsteht, weil scharfe Kanten durch Wellen **aller** Frequenzen beschrieben werden.

Filterung



Butterworth-Filter

Frequenzen werden nicht gelöscht, sondern nur abgeschwächt.

Tiefpass-Filter:

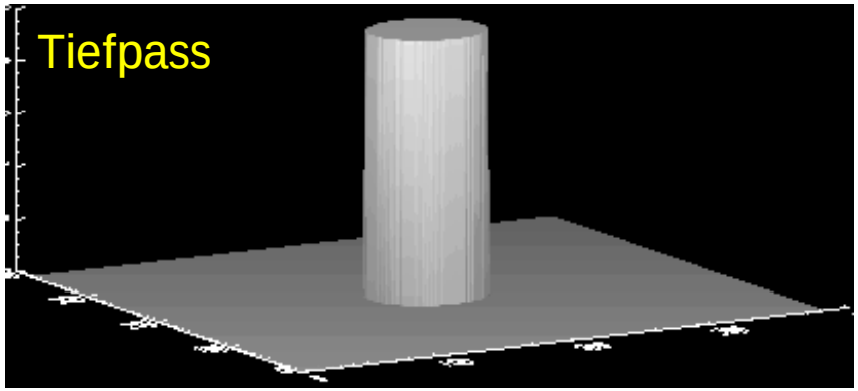
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left(D(u,v)/D_0\right)^{2n}}$$

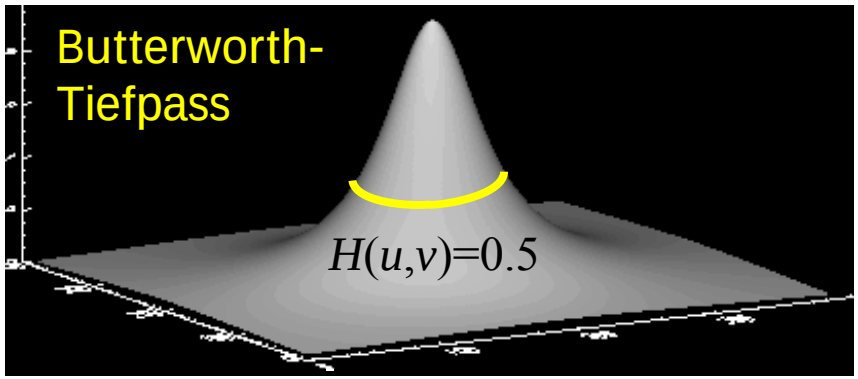
Hochpass-Filter:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left(D_0 / D(u,v)\right)^{2n}}$$

D_0: Cutoff-Frequenz,

$D(u,v)$: Frequenz, d.h. Abstand vom Ursprung





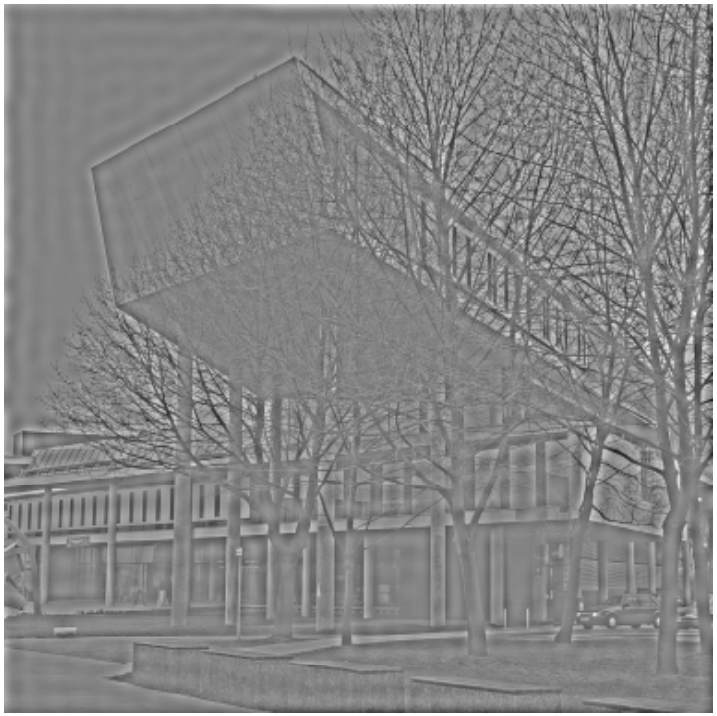
Butterworth vs. Einfacher Tiefpass

Kantenhervorhebung durch Frequenzraumfilterung

- Kanten weisen mehr hochfrequente Anteile auf wie homogene Gebiete

► Hochpassfilterung

$$H_{F_{\max}}(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } u^2 + v^2 \geq F_{\max}^2 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$



Butterworth-Hochpassfilter

$$H_{F_{\max}}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(F_{\max}^2 \big/ \left(u^2+v^2\right)\right)^k} & u \neq 0 \vee v \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Filtern im Ortsraum

- Wenn die Fouriertransformation invertierbar ist, dann sollte die Filterung auch im Ortsraum durchführbar sein.
- Wie sieht $\mathbf{FT}^{-1}(F \cdot H)$ aus?

$$\mathbf{FT}^{-1}(F(u)\cdot H(u)) = \mathbf{FT}^{-1}\left[\Sigma_k f(k)\cdot\exp(-i2\pi uk/N)\cdot\Sigma_m h(m)\cdot\exp(-i2\pi um/N)\right]$$

$$= \mathbf{FT}^{-1}\left[\Sigma_m\Sigma_k\left[f(k)\cdot\exp(-i2\pi uk/N)\cdot h(m)\cdot\exp(-i2\pi um/N)\right]\right]$$

$$= \mathbf{FT}^{-1}\left[\Sigma_m\Sigma_k\left[f(k)\cdot h(m)\cdot\exp(-i2\pi uk/N)\cdot\exp(-i2\pi um/N)\right]\right]$$

(Verschiebeeigenschaft $h(m)\cdot\exp(-i2\pi uk/N) = h(m-k)$)

$$= \mathbf{FT}^{-1}\left[\Sigma_m\Sigma_k f(k)\cdot h(m-k)\cdot\exp(-i2\pi um/N)\right]$$

$$= \mathbf{FT}^{-1}\left[\Sigma_m\left[\Sigma_k f(k)\cdot h(m-k)\right]\cdot\exp(-i2\pi um/N)\right]$$

$$= \mathbf{FT}^{-1}\left[\mathbf{FT}\left[\Sigma_k f(k)\cdot h(m-k)\right]\right] = \Sigma_k f(k)\cdot h(m-k)$$

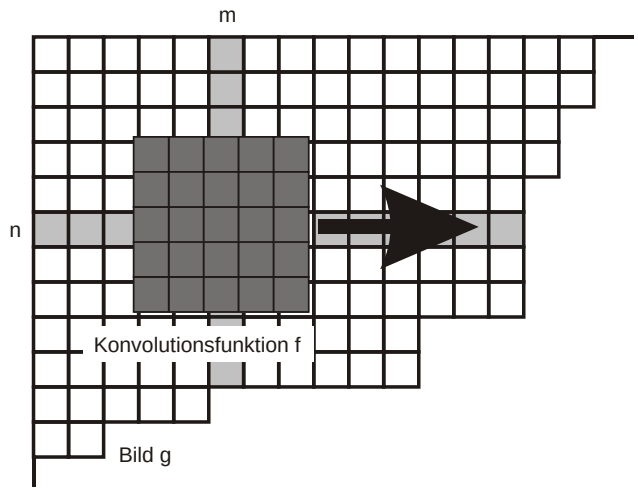
Konvolution (Faltung)

Konvolution (auch: **Faltung**) erzeugt ein neues Bild *h* durch eine gewichtete Summe von Bildelementen in *g*:

$$h(m,n) = (g * f)(m,n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(i,j) \cdot f(m-i, n-j)$$

Die Gewichtungsfunktion *f* heißt **Konvolutionsfunktion** (oder **Faltungsfunktion**)

Die Konvolution entspricht der Filterung durch Multiplikation im Frequenzraum



Eigenschaften der Konvolution

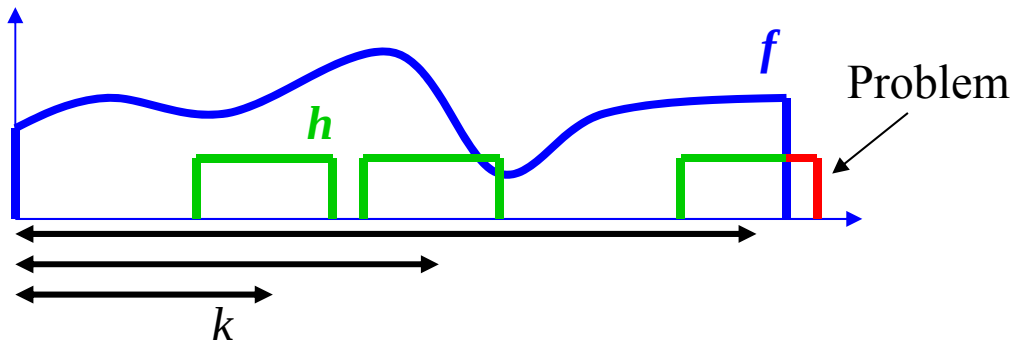
- Operatorzeichen: „*“ (bedeutet nicht Multiplikation!)
- Linear
- Verschiebungsinvariant
- Kommutativ: $[g_1 * g_2](m,n) = [g_2 * g_1](m,n)$.
- Assoziativ: $g_1 * ([g_2 * g_3](m,n)) = [g_1 * g_2](m,n) * g_3(m,n)$

Vorteil der Assoziativität

Mehrere Operatoren können zusammengefasst werden.

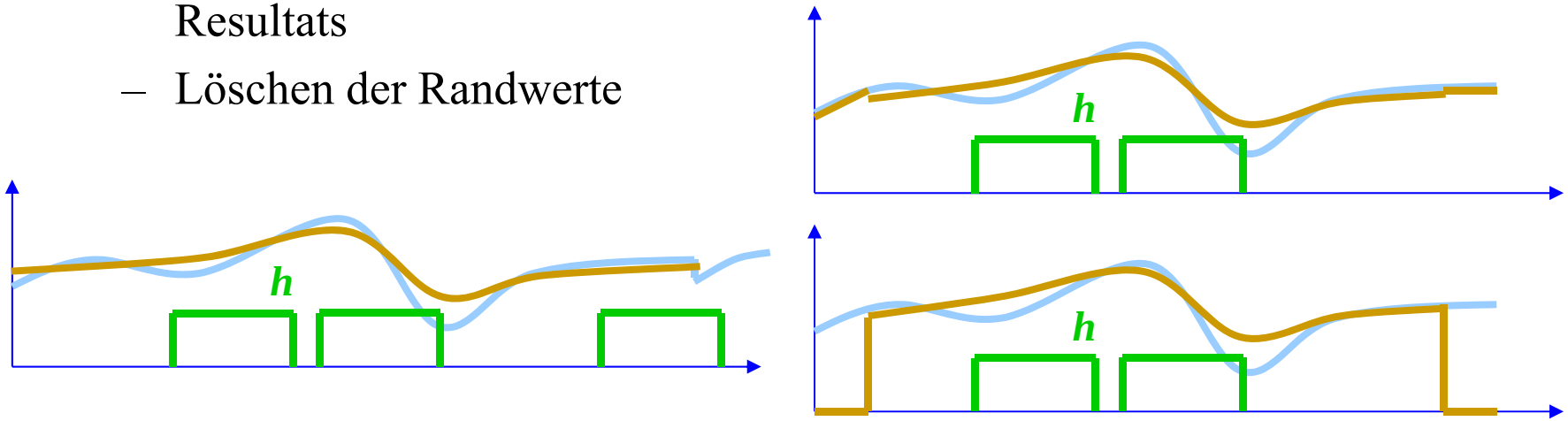
Konvolutionskern (Faltungskern)

- Konvolution (1D): $[\boldsymbol{f}*\boldsymbol{h}](\boldsymbol{m})=\Sigma_{\mathbf{k=-\infty,\infty}}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{k})$
- Die meisten Konvolutionsfunktionen *h* sind nur in einem kleinen Intervall von Null verschieden (Konvolutionskern).
- Mit $h(n)\neq 0$ für $-K\leq n\leq K$ ist: $[\boldsymbol{f}*\boldsymbol{h}](\boldsymbol{m})=\Sigma_{\mathbf{k=-K,K}}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{k})$.
- Problem: **Rand** von *f*.



Konvolution am Bildrand

- Lösung 1: periodische Fortsetzung des Bildes
  (diese Lösung wird automatisch gewählt, wenn im Frequenzraum multipliziert wird)
- Lösung 2: Rand ist undefiniert
  - Beibehaltung des ursprünglichen Resultats
  - Löschen der Randwerte



*

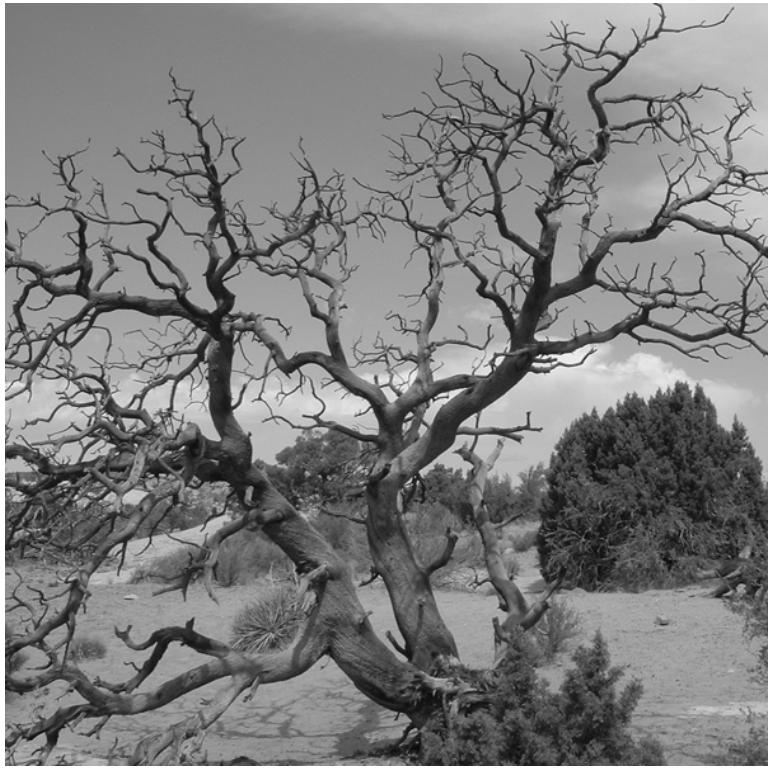
Konvolution am Bildrand

Was sollten Sie heute gelernt haben?

- 2D-Fouriertransformation
- Bedeutung von Frequenz, Amplitude, Phase und Wellenrichtung
- Darstellung der Fouriertransformierten
- Eigenschaften der Fouriertransformierten
- Filterung und Konvolution

Famous Last Question

Was geschieht, wenn man die Frequenzraum-repräsentation vor der Rücktransformation komplex-konjugiert?



Warum?