

MATEMATIKA

PRIPREME ZA DRŽAVNU Maturu IZ MATEMATIKE

AUTOR

JOSIP ZEBA

ZAGREB

2022.

SADRŽAJ

Sadržaj	1
1 Realni brojevi	2
1.1 Računanje s realnim brojevima	2
1.2 Brojevni pravac i intervali	10

Poglavlje 1

REALNI BROJEVI

1.1 Računanje s realnim brojevima

Skup je bilo koja kolekcija različitih objekata u cjelini.

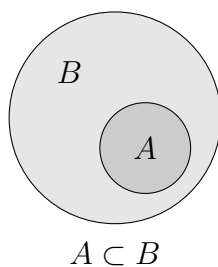
Elementi skupa mogu biti raznih vrsta: brojevi, ljudi, slova abecede, drugi skupovi itd. Skupovi se dogovorno označavaju velikim slovima A , B , C , ... te vitičastim zagradama $\{ \}$ u koje se upisuju elementi. Skupovi se mogu definirati, tj. opisati riječima ili eksplicitnim nabranjem svih elemenata između vitičastih zagrada. Skup može biti konačan, beskonačan ili prazan.

Ako je nešto element nekog pojedinačnog skupa, odnosno pripada skupu, tada koristimo oznaku \in , a u slučaju da nije element skupa odnosno ne pripada skupu oznaku \notin .

Skupove možemo uspoređivati, pa ukoliko su svi elementi skupa A i B isti, možemo reći da je skup A jednak skupu B , a tvrdnju zapisujemo $A = B$. Nisu li svi elementi skupa A i B isti možemo zaključiti da je skup A različit od skupa B , a tvrdnju zapisujemo $A \neq B$.

Ako je svaki član skupa A također član skupa B , tada se za skup A kaže da je podskup skupa B , a zapisuje se $A \subseteq B$. Može se, također, zapisati $B \supseteq A$ odnosno skup B je nadskup skupa A . Ako je skup A podskup i nije jednak skupu B , tada se za skup A kaže da je pravi podskup skupa B , a zapisuje se $A \subset B$ ili možemo reći da je skup B pravi nadskup skupa A i zapisati $B \supset A$ kako prikazuje slika 1.1.

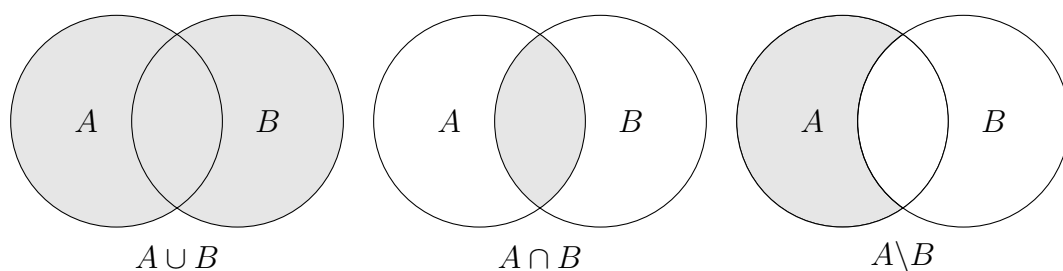
Postoji nekoliko načina za konstruiranje novih skupova od već postojećih. Dva se skupa mogu *zbrojiti* i to nazivamo unija skupova. Unija skupova A i B , označena sa $A \cup B$, je skup svih elemenata koji su članovi ili skupa A ili skupa B .



Slika 1.1: Podskup

Novi se skup također može konstruirati određivanjem *zajedničkih* elemenata obaju skupova. To nazivamo presjek skupova. Presjek skupova A i B , označen sa $A \cap B$, je skup svih elemenata koji su članovi i skupa A i skupa B .

Jedna od operacija je i razlika skupova, odnosno *oduzimanje* elemenata jednog skupa od drugoga. Razlika skupova A i B , označen sa $A \setminus B$, je skup koji čine svi članovi skupa A koji nisu i u skupu B . Slika 1.2 prikazuje uniju, presjek i razliku skupova pomoću Vennovih dijagrama.



Slika 1.2: Operacije sa skupovima

1.1.1 Skup prirodnih brojeva

Skup prirodnih brojeva označavamo s oznakom \mathbb{N} . Ovaj skup je zatvoren s obzirom na zbrajanje i množenje.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Skup se često proširuje brojem 0 te ga u tom slučaju označavamo s \mathbb{N}_0 . Kažemo da je prirodni broj n djeljiv s prirodnim brojem m ako postoji $k \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $n = k \cdot m$. Tada je n višekratnik broja m te je m djelitelj broja n ili kraće $m|n$.

U skupu prirodnih brojeva svaki broj ima svog neposrednog sljedbenika ($n + 1$), a samim time, osim broja 1, i svog neposrednog prethodnika ($n - 1$).

Najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva a , b i c je najveći broj koji dijeli sve te

brojeve i označavamo ga $\text{nzd}(a, b, c)$, a najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva a , b i c je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svakim od tih brojeva i označavamo ga $\text{nzv}(a, b \text{ i } c)$.

Prirodan broj veći od 1 je prost broj ako je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. Broj je složen ako nije prost, s iznimkom broja 1 koji ne držimo ni prostim ni složenim. Svaki se prirodan broj može napisati u obliku umnoška prostih brojeva.

Kriteriji djeljivosti prirodnih brojeva s brojevima od 0 do 10 su:

- broj je djeljiv s 2 ako mu je zadnja znamenka 0, 2, 4, 6, 8, odnosno paran broj,
- broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3,
- broj je djeljiv sa 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4,
- broj je djeljiv s 5 ako mu je zadnja znamenka 0 ili 5,
- broj je djeljiv sa 6 ako je djeljiv i s 2 i s 3,
- broj je djeljiv sa 7 ako je razlika između broja koji se dobije micanjem broja jedinice i dvostruke znamenke jedinica toga broja djeljiva sa 7,
- broj je djeljiv s 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8,
- broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9,
- broj je djeljiv s 10 ako mu je zadnja znamenka 0.

1.1.2 Skup cijelih brojeva

Skup cijelih brojeva označavamo s oznakom \mathbb{Z} . Potreba za ovim skupom dolazi iz razloga kako rezultat oduzimanja prirodnih brojeva nije uvijek prirodan broj, stoga se skup prirodnih brojeva proširuje s 0 i negativnim cijelim brojevima. Skup je zatvoren s obzirom na zbrajanje, oduzimanje i množenje.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Za svaki cijeli broj $a \neq 0$ postoji cijeli broj $-a$ tako da vrijedi da je njihov zbroj jednak 0. Broj $-a$ je suprotni broj broja a .

Dijeljenje s nulom nije definirano.

1.1.3 Skup racionalnih brojeva

Skup racionalnih brojeva označavamo s oznakom \mathbb{Q} . Činjenica da količnik dvaju cijelih brojeva općenito nije cijeli broj nameće potrebu za proširenjem skupa cijelih brojeva. Skup racionalnih brojeva zatvoren je s obzirom na zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Svaki je racionalni broj je moguće zapisati u obliku razlomka, gdje je broj a brojnik, a broj b nazivnik razlomka. Svaki racionalan broj ima konačan ili beskonačan periodičan decimalni prikaz. Provedemo li razlomkom zadano dijeljenje cijelih brojeva, dobit ćemo racionalan broj zapisan u decimalnom obliku.

Za svaki racionalni broj $\frac{a}{b}$ i svaki broj m različiti od nule vrijedi

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m},$$

pri čemu, ako jednakost čitamo s lijeva na desno, govorimo o proširivanju razlomka, a u suprotnom smjeru, govorimo o skraćivanju razlomka.

Pravi razlomak je razlomak kojem je brojnik manji od nazivnika. Kada govorimo o zbroju prirodnog broja n i razlomka, govorimo o mješovitom broju

$$n + \frac{a}{b} = n\frac{a}{b} = \frac{n \cdot b + a}{b}.$$

Zbrajanje i oduzimanje razlomaka provodi se na način da se razlomci svedu, odnosno prošire na zajednički nazivnik te se njihovi brojnici zbroje, odnosno oduzmu.

Množenje dvaju razlomaka provodi se na način da se pomnože brojnik s brojnikom i nazivnik s nazivnikom te se dijeljenje razlomaka zamjenjuje s množenjem na način da djelitelja zapišemo u recipročnom obliku, odnosno zamijenimo mjesta brojniku i nazivniku te nakon toga provedemo množenje dvaju razlomaka.

1.1.4 Skup iracionalnih brojeva

Postoje brojevi koji nisu racionalni, koje nije moguće predložiti kao količnik dvaju cijelih brojeva, odnosno zapisati u obliku razlomka. Takvi se brojevi zovu iracionalni brojevi. Skup iracionalnih brojeva označavamo s oznakom \mathbb{I} . Brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π i e primjeri su nekih iracionalnih brojeva.

1.1.5 Skup realnih brojeva

Skup realnih brojeva označavamo s oznakom \mathbb{R} i sastoji se od skupa racionalnih i iracionalnih brojeva. Skup realnih brojeva zatvoren je s obzirom na zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Svaki realni broj a možemo prikazati u konačnom ili beskonačnom decimalnom zapisu. Također možemo reći da vrijedi da je svaki prirodan broj ujedno i cijeli broj, a svaki cijeli ujedno i racionalni te svaki racionalni ujedno i realni broj pa vrijedi da je

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Aksiomi polja skupa realnih brojeva su:

- komutativnost: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$,
- asocijativnost: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- distributivnost: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
- neutralni elementi, 0 za zbrajanje i 1 za množenje: $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$,
- suprotni i inverzni broj: $a + (-a) = 0$, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ $a \neq 0$.

ZADACI

Zadatak 1. Kolika je vrijednost broja $17 + \frac{\sin(53^\circ)}{\log_5 10}$ zaokružena na četiri decimale?

- A. 17.5582 B. 17.5583 C. 17.2767 D. 17.2768

Zadatak 2. Kolika je vrijednost broja $\frac{\sqrt[4]{380}}{5 - \sqrt{4}}$ zaokružena na tri decimale?

- A. -1.116 B. -1.117 C. 1.471 D. 1.472

Zadatak 3. Koji od brojeva pripada skupu iracionalnih brojeva?

- A. 1.55 B. $-\sqrt{36}$ C. $-\frac{2}{5}$ D. $-\sqrt{7}$

Zadatak 4. Koji od brojeva pripada skupu racionalnih brojeva?

- A. $3 - \pi$ B. $\sqrt{0.81}$ C. 4.112123... D. $(\sqrt{2} - 4)^2$

Zadatak 5. Koja je od navedenih tvrdnji istinita?

- A. $2.4 \in \mathbb{N}$ B. $\sqrt{8} \in \mathbb{Q}$ C. $-\frac{7}{4} \in \mathbb{R}$ D. $\pi \in \mathbb{Z}$

Zadatak 6. Koja je od navedenih tvrdnji istinita?

- A. $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$ B. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$ C. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ D. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$

Zadatak 7. Zbroj dvaju brojeva različitih od nule jednak je 0. Ti brojevi su

- A. prosti B. suprotni C. jednaki D. recipročni

Zadatak 8. Umnožak dvaju brojeva različitih od nule jednak je 1. Ti brojevi su

- A. prosti B. suprotni C. jednaki D. recipročni

Zadatak 9. Za svaki cijeli broj z broj $4z - 4$ je

- A. pozitivan B. negativan C. paran D. neparan

Zadatak 10. Podijelimo li broj n sa 7 te pritom dobijemo ostatak 4, tada n možemo prikazati u obliku

- A. $n = 7k$ B. $n = 7k + 4$ C. $n = 4k + 7$ D. $n = \frac{4}{7}k$

Zadatak 11. Koliko ima prirodnih brojeva n za koje je razlomak $\frac{3n - 6}{3n}$ prirodan broj?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Zadatak 12. Koliko ima cijelih brojeva z za koje je razlomak $\frac{4}{3z-2}$ cijeli broj?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Zadatak 13. Koliko ima cijelih brojeva z za koje je razlomak $\frac{3z^2+2}{z^2-2}$ cijeli broj?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Zadatak 14. Računska operacija između dva cijela broja definirana je izrazom $a \otimes b = \frac{2a-b}{a-2b}$. Koliko je $5 \otimes 2 + 3 \otimes 1$?

- A. 10 B. 13 C. 16 D. 19

Zadatak 15. Odredite broj između 7950 i 8150 koji podijeljen sa 174 ima količnik jednak ostatku.

Zadatak 16. Napišite neki prirodni broj koji je veći od 3183 i koji pri dijeljenju sa 7 daje ostatak 4.

Zadatak 17. Koliko ima prirodnih brojeva n takvih da je $2 \leq \sqrt{n} < 3$?

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Zadatak 18. Koliko ima cijelih brojeva z takvih da je $z^2 < 10$?

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Zadatak 19. Nazivnik razlomka je broj 7. Koji prirodan broj n je brojnik razlomka, ako je razlomak veći od $\frac{1}{4}$ i manji od $\frac{1}{3}$?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Zadatak 20. Odredite najmanji prirodan broj n koji je djeljiv sa 72 i sa 189.

Zadatak 21. Pretvorite 4 dana 11 sati 7 minuta i 24 sekunde u minute.

Zadatak 22. Koliko je vremena prošlo od 21. srpnja 2022. godine u 12 sati i 35 minuta do 23. srpnja 2022. godine u 10 sati i 20 minuta?

- A. 45 h i 15 min B. 45 h i 45 min C. 46 h i 15 min D. 46 h i 45 min

Zadatak 23. Mjera jednog kuta u trokutu iznosi $\frac{5\pi}{9}$ radijana. Kolika iznosi ta mjera izražena u stupnjevima?

- A. 40° B. 60° C. 80° D. 100°

Zadatak 24. Koliko je 4.15 dm^2 izraženo u mm^2 ?

- A. 41.5 mm^2 B. 415 mm^2 C. 4150 mm^2 D. 41500 mm^2

Zadatak 25. Gustoća bakra iznosi $8.96 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Koliko iznosi gustoća izražena u $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

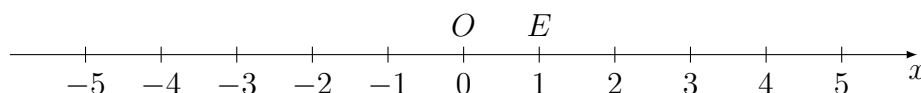
- A. $0.896 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ B. $89.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ C. $8960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ D. $896000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Zadatak 26. U jednoj šumi hrast pokriva površinu od 18 hektara, a bukva površinu od 7350 četvornih hvati. Kolika je ukupna površina te šume izražena u metrima kvadratnim? Napomena: $1 \text{ hektar} = 2780 \text{ četvornih hvati} = 10000 \text{ m}^2$.

Zadatak 27. Spremnik za vodu se sastoji od dva dijela. U prvi dio stane 7 imperijalnih galona, a u drugi 35 litara vode. Kolika je ukupna zapremina spremnika izražena u metrima kubnim? Napomena: $1 \text{ imperijalni galon} = 4.54609 \text{ litara}$, a $1 \text{ litra} = 1 \text{ dm}^3$.

1.2 Brojevni pravac i intervali

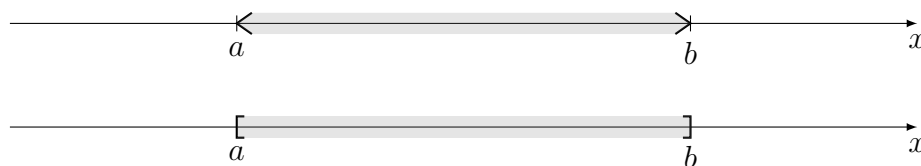
Brojevni pravac je pravac na kojem je svakom realnom broju pridružena jedna jedina točka. Brojevni pravac služi za predočavanje brojeva i grafičko računanje njima. Slika 1.3 prikazuje brojevni pravac.



Slika 1.3: Brojevni pravac

Na pravcu se najprije odabere točka O odnosno ishodište, koja predstavlja 0, a zatim jedinična točka 1 s oznakom E . Dužina \overline{OE} predstavlja jediničnu duljinu. Točkama na desnoj strani od O odgovaraju pozitivni realni brojevi, odnosno veći brojevi, a na lijevoj strani negativni, odnosno manji brojevi od promatranoga. Bilo kojem realnom broju a odgovara točka A , tako da je dužina \overline{OA} (mjerena jediničnom duljinom) jednaka a jediničnih duljina. Između bilo koja dva realna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih i iracionalnih brojeva.

Skup svih realnih brojeva x za koje vrijedi $a < x < b$ gdje su a i b također realni brojevi, zovemo intervalom i zapisujemo $\langle a, b \rangle$. Intervali mogu biti poluzatvoreni $[a, b)$, ako je $a \leq x < b$, poluotvoreni $\langle a, b]$, ako je $a < x \leq b$ ili zatvoreni $[a, b]$, ako je $a \leq x \leq b$, kako je prikazano na slici 1.4



Slika 1.4: Otvoreni i zatvoreni interval

Navedeno je također moguće zapisati u obliku skupa brojeva

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

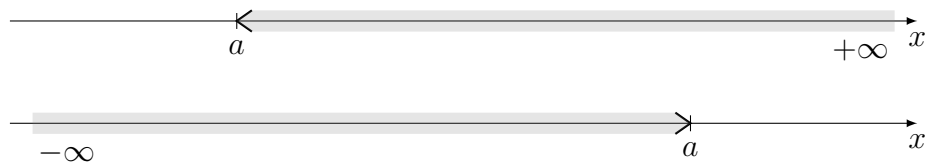
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

$$\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Neke granice intervala mogu biti i beskonačne pa tako skup svih realnih brojeva za

koje vrijedi $x > a$ možemo zapisati u obliku intervala $\langle a, +\infty \rangle$, a skup svih realnih brojeva za koje vrijedi $x < a$ možemo zapisati u obliku intervala $\langle -\infty, a \rangle$, kako je prikazano na slici 1.5.



Slika 1.5: Beskonačni intervali

Beskonačni intervali zapisani u obliku skupa brojeva jednaki su

$$\langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$

$$\langle -\infty, a \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$