

个人资料



skywalkert



访问：86054次

积分：1574

等级：[BLOG > 4](#)

排名：千里之外

原创：66篇 转载：0篇

译文：0篇 评论：43条

文章搜索

友链

----神犇----

[Chffy](#)
[Clariss](#)
[CreationAugust](#)
[Cww97](#)
[Jr_mz](#)
[Hzwer](#)
[Ivttwioi](#)
[PhilipsWeng](#)
[PureFrog](#)
[Qscqesze](#)
[Quailty](#)
[Scarlet](#)
[Sd.0061](#)
[Sengxian](#)
[TA](#)
[Wangzhpp](#)

----大爷----

[施工中](#)
[蒟蒻](#)
[博主](#) (以上按字典序)
 有意向加友链的朋友请发站内信，谢谢

文章分类

[线下比赛](#) (10)

[Codeforces](#) (4)

[总结](#) (13)

[随想](#) (2)

[线上比赛](#) (9)

[BZOJ](#) (20)

[POJ](#) (1)

[51nod](#) (4)

[HDU](#) (2)

[置顶] 浅谈一类积性函数的前缀和

标签：[积性函数](#) [狄利克雷卷积](#) [前缀和](#)

2016-01-12 14:53

14391人阅读

[评论](#) (17)

[收藏](#)
[举报](#)

分类：

[总结](#) (12)

版权声明：本文为博主原创文章，未经博主允许不得转载。<http://blog.csdn.net/skywalkert>

[目录\(?\)](#)
[\[+\]](#)

写在前面

笔者在刷题过程中遇到一些求积性函数前缀和的问题，其中有一类问题需要在低于线性时间复杂度的**算法**，今天就来浅析一下这类问题的求解方法，当作以后讲课使用的讲义。若之后有了新的研究，再来继续完善这篇文章。

本文会随时更新内容，建议以链接形式转载，或者与笔者保持联系。爬虫转载不标明出处必究。

author: skywalkert

original article: <http://blog.csdn.net/skywalkert/article/details/50500009>

last update time : 2017-04-01

前置技能

积性函数的定义

- 若 $f(n)$ 的定义域为正整数域，值域为复数，即 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ，则称 $f(n)$ 为**数论函数**。
- 若 $f(n)$ 为数论函数，且 $f(1) = 1$ ，对于互质的正整数 p, q 有 $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q)$ ，则称其为**积性函数**。
- 若 $f(n)$ 为积性函数，且对于任意正整数 p, q 都有 $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q)$ ，则称其为**完全积性函数**。

积性函数的性质与例子

1. 常见的积性函数有

- 除数函数 $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ ，表示 n 的约数的 k 次幂和，注意 $\sigma_k(n)$ 与 $\sigma^k(n)$ 是不同的。
- 约数个数函数 $\tau(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1$ ，表示 n 的约数个数，一般也写为 $d(n)$ 。
- 约数和函数 $\sigma(n) = \sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$ ，表示 n 的约数之和。
- 欧拉函数 $\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [(n, i) = 1]$ ，表示不大于 n 且与 n 互质的正整数个数，另外 $\sum_{i=1}^n [(n, i) = 1] \cdot i = \frac{n \cdot \varphi(n) + [n=1]}{2}$ ，且对于正整数 $n > 2$ 来说 $\varphi(n)$ 是偶数。
- 莫比乌斯函数 $\mu(n)$ ，在狄利克雷卷积的乘法中与恒等函数互为逆元， $\mu(1) = 1$ ，对于无平方因子数 $n = \prod_{i=1}^t p_i$ 有 $\mu(n) = (-1)^t$ ，对于有平方因子数 n 有 $\mu(n) = 0$ 。
- 元函数 $e(n) = [n = 1]$ ，狄利克雷卷积的乘法单位元，完全积性。
- 恒等函数 $I(n) = 1$ ，完全积性。
- 单位函数 $id(n) = n$ ，完全积性。
- 幂函数 $id^k(n) = n^k$ ，完全积性。

2. 关于莫比乌斯函数和欧拉函数有两个经典的公式

- $[n = 1] = \sum_{d|n} \mu(d)$ ，将 $\mu(d)$ 看作是容斥的系数即可证明。

ZJOJ (1)

BUUOJ (1)

UVALive (6)

OpenJudge (1)

玲珑OJ (1)

URAL (1)

文章存档

2017年03月 (1)

2017年01月 (2)

2016年12月 (2)

2016年11月 (1)

2016年09月 (3)

展开

阅读排行

浅谈一类积性函数的前缀 (14369)

组合数求模 (3806)

算法竞赛训练中较难的部 (2306)

BZOJ 3925 [Zjoi2015]地 (2252)

Regional 2015 - Asia Ch. (2068)

Project5&6 Verilog开发流 (1857)

BZOJ 3884 上帝与集合的 (1856)

BZOJ 4017 小Q的无敌异 (1707)

BZOJ 2257 [Jsoi2009]瓶 (1571)

POJ List 与13.30%的题 (1559)

评论排行

浅谈一类积性函数的前缀 (17)

北航校赛2014 预赛 题解 (4)

正式开通~ (3)

组合数求模 (3)

北航第十二届程序设计竞 (3)

算法竞赛中可能不太会遇 (2)

Regional 2015 - Asia Ch. (2)

BZOJ 1919 [Ctsc2010]性 (2)

CodeVS 第四次月赛 题解 (2)

算法竞赛训练中较难的部 (1)

推荐文章

* CSDN日报20170725——《新的开始，从研究生到入职亚马逊》

* 深入剖析基于并发AQS的重入锁(ReentrantLock)及其Condition实现原理

* Android版本的"Wannacry"文件加密病毒样本分析(附带锁机)

* 工作与生活真的可以平衡吗？

* 《Real-Time Rendering 3rd》提炼总结——高级着色：BRDF及相关技术

* 《三体》读后思考-泰勒展开/维度打击/黑暗森林

最新评论

浅谈一类积性函数的前缀和 Joovo: %%%

组合数求模

o $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, 将 $\frac{i}{n} (1 \leq i \leq n)$ 化为最简分数统计个数即可证明。

3. 若 $f(n)$ 为积性函数, 则对于正整数 $n = \prod_{i=1}^t p_i^{k_i}$ 有 $f(n) = \prod_{i=1}^t f(p_i^{k_i})$; 若 $f(n)$ 为完全积性函数, 则对于正整数 $n = \prod_{i=1}^t p_i^{k_i}$ 有 $f(n) = \prod_{i=1}^t f(p_i)^{k_i}$ 。

狄利克雷卷积与莫比乌斯反演

1. 数论函数 f 和 g 狄利克雷卷积定义为 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g(\frac{n}{d})$, 狄利克雷卷积满足交换律、结合律, 对加法满足分配律, 存在单位元函数 $e(n) = [n = 1]$ 使得 $f * e = f = e * f$, 若 f 和 g 为积性函数则 $f * g$ 也为积性函数。

2. 狄利克雷卷积的一个常用技巧是对于积性函数 f 与恒等函数 I 的卷积的处理, 例如 $n = \prod_{i=1}^t p_i^{k_i}, g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, 则有 $g(n) = \prod_{i=1}^t \sum_{j=0}^{k_i} f(p_i^j)$ 。

3. 莫比乌斯反演也是对于 $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ 的讨论, 但是不要求 f 是积性函数, 适用求 $f(n)$ 的情况, 由于 $I * \mu = e$, 则 $g * \mu = f * I * \mu = f * e = f$, 即 $f(n) = \sum_{d|n} g(d) \cdot \mu(\frac{n}{d})$, 类似地有 $g(n) = \sum_{n|d} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{n|d} g(d) \cdot \mu(\frac{d}{n})$, 二项式反演也是类似的技巧。有一个例子可以看出欧拉函数和莫比乌斯函数之间的关系, $\sum_{d|n} \varphi(d) = id(n)$, 所以 $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d}$, 也即 $\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$ 。

正文：黑科技

这种黑科技大概起源于 Project Euler 这个网站, 由 xudyh 引入中国的OI、ACM界, 目前出现了一些OI模拟题、OJ月赛题、ACM赛题是需要这种技巧在低于线性时间的复杂度下解决一类积性函数的前缀和问题。

首先看一个简单的例子, 求前 n 个正整数的约数之和, 即 $\sum_{i=1}^n \sigma(i)$, 其中 $n \leq 10^{12}$ 。显然不能直接做了, 但是我们可以推导一番:

$$\sum_{i=1}^n \sigma(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [j|i] \cdot j = \sum_{i=1}^n i \cdot \sum_{j=1}^n [i|j] = \sum_{i=1}^n i \cdot \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$$

当 $i \leq \sqrt{n}$ 时, $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ 显然只有 $O(\sqrt{n})$ 个取值; 当 $i > \sqrt{n}$ 时, $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor < \sqrt{n}$ 显然也只有 $O(\sqrt{n})$ 个取值; 对于固定的 $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$, i 的取值是一段连续的区间, 这段区间是 $[\frac{n}{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor + 1}, \frac{n}{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor}]$, 因此可以 $O(\sqrt{n})$ 计算所求。

同样地, 求前 n 个正整数的约数个数之和也可以这样计算, 留给读者练习。

另外需要说明的是, $\sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \cdot i = \sum_{i=1}^n \frac{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor \cdot (\lfloor \frac{n}{i} \rfloor + 1)}{2}$, 这也是一种常见的表示形式。

现在我们来加大一点难度, 求前 n 个正整数的欧拉函数之和, 即 $\sum_{i=1}^n \varphi(i)$, 其中 $n \leq 10^{11}$ 。目前本文提到的有关欧拉函数的公式只有几个, 是否能用它们来帮助化简呢? 答案是肯定的, 接下来我们就利用 $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ 来化简这个式子。

这个公式也可以看成是 $\varphi(n) = n - \sum_{d|n, d < n} \varphi(d)$, 设 $\phi(n) = \sum_{i=1}^n \varphi(i)$, 则有

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \sum_{i=1}^n \varphi(i) = \sum_{i=1}^n i - \sum_{d|i, d < i} \varphi(d) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - \sum_{i=2}^n \sum_{d|i, d < i} \varphi(d) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - \sum_{\frac{i}{d}=2}^n \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} - \sum_{i=2}^n \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \varphi(d) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - \sum_{i=2}^n \phi(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor) \end{aligned}$$

那么只要计算出 $O(\sqrt{n})$ 个 $\phi(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$ 的值, 就可以计算出 $\phi(n)$, 这样的复杂度又如何呢? 假设计算出 $\phi(n)$ 的复杂度为 $T(n)$, 则有 $T(n) = O(\sqrt{n}) + \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} T(i) + T(\frac{n}{i})$, 这里只展开一层

whzzt: @skywalkert: 酱啊 谢谢tls

组合数求模

skywalkert: @whzzt: 只是复杂度上的一个小trick, $\log_2(p) \cdot \log_p(n) = \log_2(n)$

浅谈一类积性函数的前缀和

Greninja_Wu: 好文必须赞

浅谈一类积性函数的前缀和

zhangche0526: 好文必须赞

浅谈一类积性函数的前缀和

KsCla: 好文必须赞

浅谈一类积性函数的前缀和

fzw_wabjtm: 好文必须赞

BZOJ 1919 [Ctsc2010]性能优化

skywalkert: @visit_world: 毕竟FFT的精度一直是受到吐槽的内容嘛=_=

BZOJ 1919 [Ctsc2010]性能优化

visit_world: 2010 年就有人拿这么黑的多项式科技出题了。。。?

浅谈一类积性函数的前缀和

BAJim_H: 跟风膜一波糖老师好文顶起

就可以了, 更深层的复杂度是高阶小量, 所以有 $T(n) = \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} O(\sqrt{i}) + O(\sqrt{\frac{n}{i}}) = O(n^{\frac{3}{4}})$ 。

由于 $\phi(n)$ 是一个积性函数的前缀和, 所以筛法也可以预处理一部分, 假设预处理了前 k 个正整数的

$\phi(n)$, 且 $k \geq \sqrt{n}$, 则复杂度变为 $T(n) = \sum_{i=1}^k \sqrt{\frac{n}{i}} = O(\frac{n}{\sqrt{k}})$, 当 $k = O(n^{\frac{2}{3}})$ 时可以取到较好

的复杂度 $T(n) = O(n^{\frac{2}{3}})$ 。

之前利用 $\varphi(n) = n - \sum_{d|n, d < n} \varphi(d)$ 的地方是怎么想到的呢? 不妨来看一下这个

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} [d|i] \cdot \varphi(d) = \sum_{\frac{i}{d}=1}^n \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \varphi(d) = \sum_{i=1}^n \phi(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

如果能通过狄利克雷卷积构造一个更好计算前缀和的函数, 且用于卷积的另一个函数也易

简化计算过程。例如上题就是利用了 $\varphi * I = id$ 的性质, 但一定注意, 不是所有的这一类

恒等函数 I 就可以轻松完事的, 有时需要更细致的观察。

定义梅滕斯函数 $M(n) = \sum_{i=1}^n \mu(i)$, 给定正整数 n , 计算 $M(n)$, 其中 $n \leq 10^{11}$ 。

有了欧拉函数的经验, 这次似乎就轻车熟路了吧, 使用 $[n=1] = \sum_{d|n} \mu(d)$ 来试试?

$$1 = \sum_{i=1}^n [i=1] = \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} \mu(d) = \sum_{i=1}^n \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \mu(d) = \sum_{i=1}^n M(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

因此 $M(n) = 1 - \sum_{i=2}^n M(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$, 问题可在 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 时间复杂度下解决。

看了上面的例子, 是不是认为这种做法很 naive, 很好学啊, 再来看一个题吧!

令 $A(n) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(n,i)}$, $F(n) = \sum_{i=1}^n A(i)$, 求 $F(n)$ 模 $(10^9 + 7)$ 的值, 其中 $n \leq 10^9$ 。

先做一番化简, 变成积性函数前缀和的样子:

$$A(n) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(n,i)} = \sum_{i=1}^n \sum_{d|(n,i)} [(n,i)=d] \cdot \frac{i}{d} = \sum_{d|n} \sum_{\frac{i}{d}=1}^{\frac{n}{d}} [(\frac{n}{d}, \frac{i}{d})=1] \cdot \frac{i}{d} = \frac{1}{2} (1 + \sum_{d|n} d \cdot \varphi(d))$$

设 $G(n) = 2 \cdot F(n) - n$, 则

$$G(n) = 2 \cdot F(n) - n = \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} d \cdot \varphi(d) = \sum_{i=1}^n \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} d \cdot \varphi(d)$$

因此要求的是 $\phi'(n) = \sum_{i=1}^n i \cdot \varphi(i)$ 。

而对于 $n = \prod_{i=1}^t p_i^{k_i}$, 有

$$\sum_{d|n} d \cdot \varphi(d) = \prod_{i=1}^t \sum_{j=0}^{k_i} p_i^j \cdot \varphi(p_i^j) = \prod_{i=1}^t \frac{p_i^{2k_i+1} + 1}{p_i + 1}$$

这并不是什么好算前缀和的函数。

但是不难发现 $(id \cdot \varphi) * id = id^2$, 即

$$\sum_{d|n} d \cdot \varphi(d) \cdot \frac{n}{d} = n \cdot \sum_{d|n} \varphi(d) = n^2$$

, 这是一个很好计算前缀和的函数, 于是有

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} d \cdot \varphi(d) \cdot \frac{i}{d} = \sum_{d=1}^n \frac{i}{d} \cdot \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} d \cdot \varphi(d) = \sum_{i=1}^n i \cdot \phi'(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

因此 $\phi'(n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - \sum_{i=2}^n i \cdot \phi'(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$ ，原问题可在预处理前 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 个值的基础上，在 $O(n^{\frac{2}{3}} \log n)$ 的时间复杂度下解决。

但是注意到这种方法的常数与复杂度都可能较高，有时候可能再进行一些推导可以得到一个不使用正文方法的做法，例如[ZOJ 3881 - From the ABC conjecture](#)，本文的方法与网上一个解法类求解此题，但是可以[这样推导之后](#)得到更简单的一个做法。

需要使用此种方法的题目一般数据规模较大，例如 $n \leq 10^9, n \leq 10^{11}, n \leq 10^{12}$ ，但是用此类方法，有时候可能存在其他 $O(\sqrt{n}), O(n^{\frac{2}{3}})$ 的做法，例如[51Nod 1222 - 最小公倍数之和](#)利用正文复杂度分析的方法即可，再例如[ZOJ 5340 - The Sum of Unitary Totient](#)，笔者不记得是否还有其他做法能过，例如 $O(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n})$ 的[积性函数求和方法（会在不久后更新）](#)，可能会因为数据组数太多而超时，网上的一个解法是分段压缩打表，具体问题需要具体分析。

推荐题目

这里给出一些练手的题目供大家理解上述方法，这类题还是较少的，如有其他题的题源欢迎分享。

- [51Nod 1244 - 莫比乌斯函数之和](#)
- [51Nod 1239 - 欧拉函数之和](#)
- [BZOJ 3944 - Sum](#)
- [HDU 5608 - function](#)
- [51Nod 1238 - 最小公倍数之和 V3](#)
- [51Nod 1237 - 最大公约数之和 V3](#)
- [51Nod 1227 - 平均最小公倍数](#)
- [Tsinsen A1231 - Crash的数字表格](#)
- [SPOJ DIVCNT2 - Counting Divisors \(square\)](#)
- [51Nod 1222 - 最小公倍数计数（复杂度分析）](#)
- [BZOJ 4176 - Lucas的数论](#)
- [51Nod 1220 - 约数之和](#)
- [51Nod 1584 - 加权约数和](#)
- [ZOJ 3881 - From the ABC conjecture（不需要使用正文方法）](#)
- [BZOJ 3512 - DZY Loves Math IV](#)
- [ZOJ 5340 - The Sum of Unitary Totient（常规积性函数求和，数据组数较多，只可分段打表）](#)
- [SPOJ DIVCNT3 - Counting Divisors \(cube\)（常规积性函数求和，注意代码长度限制，不可打表）](#)
- [51Nod 1575 - Gcd and Lcm（常规积性函数求和，可分段打表）](#)
- [51Nod 1847 - 奇怪的数学题（非常规积性函数求和，**综合题**，可分段打表）](#)

Tips: 加粗内容为待更新内容。

相关文章推荐

- 正式开通~
 - [51nod1239]欧拉函数之和
 - [51NOD1239]欧拉函数之和
 - HDU1565：方格取数(1) (状态压缩DP)
 - 关于C++各类排序算法与std::sort性能的比较
- bzoj 2464 BFS【水】
 - BZOJ2140: 稳定婚姻
 - 2016百度之星资格赛
 - bzoj 2730 点连通求割点
 - 挖个坑的图论题

猜你在找

- 【直播】机器学习&数据挖掘7周实训--韦玮
 - 【直播】3小时掌握Docker最佳实战--徐西宁
 - 【直播】计算机视觉原理及实战--屈教授
 - 【直播】机器学习之矩阵--黄博士
 - 【直播】机器学习之凸优化--马博士
- 【套餐】系统集成项目管理工程师顺利通关--徐朋
 - 【套餐】机器学习系列套餐（算法+实战）--唐宇
 - 【套餐】微信订阅号+服务号Java版 v2.0--翟东平
 - 【套餐】微信订阅号+服务号Java版 v2.0--翟东平
 - 【套餐】Javascript 设计模式实战--曾亮

查看评论

17楼 [Joovo](#) 2017-08-03 16:22发表



%%%

16楼 [Greninja_Wu](#) 2017-07-28 11:09发表



好文必须赞

15楼 [zhangche0526](#) 2017-07-26 21:05发表



好文必须赞

14楼 [KsCla](#) 2017-04-28 07:37发表



好文必须赞

13楼 [fzw_wabjtam](#) 2017-04-18 07:40发表



好文必须赞

12楼 [BAJim_H](#) 2017-03-17 19:24发表



跟风膜一波糖老师
好文顶起

11楼 [HOWARLI](#) 2017-03-10 20:40发表



好文必须赞*2
希望唐老师尽快更新"O(n34logn)的积性函数求和方法"（挖坟逃）

10楼 [qzh_1430586275](#) 2016-12-10 11:59发表



太棒啦

9楼 [la1la1la_](#) 2016-11-11 21:32发表



赞！等着看唐老师的州阁筛

8楼 [HOWARLI](#) 2016-07-17 07:50发表



好文必须赞

7楼 [Facico](#) 2016-07-14 14:54发表



好文必须赞

6楼 [a63534597](#) 2016-07-12 15:35发表



前置技能就看得目瞪口呆
娴熟的糖老师

5楼 [a_crazy_czy](#) 2016-07-06 08:09发表



好文必须赞

4楼 [alan_cty](#) 2016-07-06 08:09发表



好文必须赞

3楼 [imcaffrey](#) 2016-01-17 10:12发表



业界良心糖老师！

2楼 [阿蒋](#) 2016-01-12 18:49发表



好文必须赞

1楼 [quality](#) 2016-01-12 15:02发表



好文必须赞

您还没有登录,请[\[登录\]](#)或[\[注册\]](#)

* 以上用户言论只代表其个人观点，不代表CSDN网站的观点或立场