莫比乌斯反演与杜教筛

侵删
以下内容均来自TA爷课件，我只是改了几个小的地方qwq
请关闭浏览器的极速模式后阅读（极速模式显示的公式为什么辣么粗糙啊qwq）

枚举除法

1. $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$只有$O\left(\sqrt{n}\right)$种取值。
2. 对于i，$\left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor$是与$i$被$n$除并下取整取值相同的一段区间的右端点。
3. 一个很有用的性质：$\left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor}{a} \right\rfloor$
4. 上取整也有3所述的性质。

积性函数

1. $f(ab)=f(a)f(b),(a,b)=1$
2. 完全积性：不要求$(a,b)=1$
3. 考虑时一般会考虑成$f(x)=\prod_i f\left(p_i^{k_i}\right)$
4. 当f不是0的常值函数时，$f(1)=1$
5. 积性函数的狄利克雷前缀和也是积性函数。

$$s(n)=\sum_{d|n} f(d)=\prod_i \sum_{j=0}^{k_i} f\left(p_i^j\right)$$

6. 两个积性函数的狄利克雷卷积也是积性函数。

$$c(n)=\sum_{d|n} a(d)b\left(\frac{n}{d}\right)=\prod_i \sum_{j=0}^{k_i} a\left(p_i^j\right) b\left(p_i^{k_i-j}\right)$$

7. 积性函数可以线性筛出。线筛可以找到每个数x的最小质因子p_1及其次数k_1。如果我们能以较小的代价（$O(1)$）求出$f\left(p_1^{k_1}\right)$，便可以线筛了。

初等积性函数μ

1. 栗子：给定n，m，求$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[i\perp j],n,m\leqslant 10^9$，不用$\mu$怎么做？
   容斥！设dp数组$f(i,j)$为当$n=i,m=j$时的答案。

$$f(n,m)=nm \qquad \sum_{i=2}^{\min(n,m)} f\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor,\left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor\right)$$

   时间复杂度$O\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left(\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor}+\sqrt{i}\right)\right)=O\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$
   那么μ是什么？就是容斥系数！

$$\mu(1)=1,\mu(2)=-1,\mu(3)=-1,\mu(4)=0,\mu(5)=-1\dots$$

$$\mu(n)=\begin{cases} 0 & , \quad \exists x^2|n \\ (-1)^k & , \quad n=\prod_{i=1}^{k} p_i \end{cases}$$

   μ显然是一个积性函数。

公告

abclzr
"Winter has passed."

我的QQ→ QQ交谈

我的朋友
BearChild
cloverhxy
xiaoyimi
ShallWe
reflash
zyf2000
flipped
DaD3zZ
mrazer
DMoon
Menci
BeiYu
Yveh
ATP

昵称：abclzr
园龄：1年8个月
粉丝：14
关注：0
+加关注

< 2017年8月 >

日	一	二	三	四	五	六
30	31	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

搜索

找找看

随笔分类

啊给跪了的坑，%%%以后再看(4)
动态规划-单调性优化(7)
动态规划-递推/计数(20)
动态规划-轮廓线/插头DP(3)
动态规划-树形DP(12)
动态规划-数位DP(3)
动态规划-状压DP(5)

2. $$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}0 & , \quad n=1\\ 1 & , \quad n\neq 1\end{cases}$$

3. 莫比乌斯反演

$$F(n)=\sum_{d|n}f(d)$$

$$f(n)=\sum_{d|n}F(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}f(d)\sum_{g|\frac{n}{d}}\mu(g)=f(n)$$

$$F(n)=\sum_{n|d}f(d)$$

$$f(n)=\sum_{n|d}F(d)\mu\left(\frac{d}{n}\right)=\sum_{n|d}f(d)\sum_{g|\frac{d}{n}}\mu(g)=f(n)$$

4. 回到栗子：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[i\perp j]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|(i,j)}\mu(d)=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor$$

当然这样还是做不了。。。
所以我们需要杜教筛！（后面再说吧。。）
不过大多数μ的题（第一步）这么化，所以这个式子还是比较重要的。

初等积性函数φ

1. $\varphi(n)=1\sim n$与n互质的数的个数
   所以由定义便可直接写出：

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\prod_{i}\sum_{j=0}^{k_i}\mu\left(p_i^j\right)p^{k_i-j}=\prod_i p_i^{k_i-1}(p_i \quad 1)$$

   这样就可以线筛出来了，而且可以看出φ是一个积性函数。
2. 从刚才的式子可以看出，φ完全可以用μ代替，那么我们为什么需要φ呢？
   很大一部分原因是它定义比较直观，比较容易想到。
3. φ的性质：

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=\sum_{d|n}d\sum_{g|\frac{n}{d}}\mu(g)=n$$

4. 栗子：求$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i,j)$，多组数据，$t,n,m\leqslant 10^5$。

$$ans=\sum_{i=1}^{\min(n,m)}\varphi(i)\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{i}\right\rfloor$$

杜教筛

1. 求$\sum_{i=1}^{n}\mu(i),n\leqslant 10^{11}$
   直接求不好求，但是我们有$\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}\mu(d)=1$
   化一下蛤：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\mu(j)=1$，$\sum_{i=1}^{n}\mu(i)=1 \quad \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\mu(j)$
   核心思想是枚举约数，这样就可以递推/递归求解了。
   时间复杂度$O\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$。
   但是注意到当n比较小的时候其实我们可以$O(n)$线筛出来。

计算几何-半平面交(2)
计算几何-初步(18)
计算几何-旋转卡壳(2)
其他-bitset(1)
其他-Kruskal(10)
其他-倍增(8)
其他-分块(10)
其他-分治(9)
其他-高精度(2)
其他-构造(1)
其他-哈希(10)
其他-莫队(4)
其他-三分(1)
其他-贪心(6)
其他-游记(4)
其他-整体二分(2)
数据结构-KDTree(2)
数据结构-Splay(12)
数据结构-点分治(8)
数据结构-动态树(9)
数据结构-块状链表(2)
数据结构-树链剖分(5)
数据结构-线段树(25)
数据结构-主席树(11)
数据结构-左偏树(2)
数学-BSGS(2)
数学-FFT/NTT(7)
数学-博弈论(7)
数学-杜教筛/洲哥筛(5)
数学-概率与期望(4)
数学-高斯消元(7)
数学-矩阵乘法(3)
数学-莫比乌斯反演(15)
数学-欧拉筛(22)
数学-群论(5)
数学-容斥原理(4)
数学-数论(29)
数学-线性规划(1)
数学-组合数学(7)
搜索-A*/IDA*(5)
搜索-剪枝优化(8)
图论-2-SAT(2)
图论-tarjan(6)
图论-带花树(2)
图论-拓扑排序(1)
图论-网络流(12)
图论-仙人掌(1)
图论-最短路(9)
字符串-AC自动机(10)
字符串-KMP(3)
字符串-manacher(2)
字符串-后缀数组(16)
字符串-后缀自动机(11)

最新评论

1. Re:OI回忆录
Orzabclzr
--BearChild
2. Re:【博客相关】
“盗”学长一波图的飘过
--Nietzeche
3. Re:SDOI 2017 Round2 退役了
qaq高考进THU啊！
--BearChild
4. Re:【UOJ #201】【CTSC

所以我们考虑分类讨论，线筛出≤B的，>B的递推。

时间复杂度$O\left(B+\sum_{i=1}^{\frac{n}{B}}\sqrt{\frac{n}{i}}\right)=O\left(B+\frac{n}{\sqrt{B}}\right)$

求导一下可知在$B=n^{\frac{2}{3}}$时取得最小值$O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$。

2. 回到栗子：这样的话最初的栗子就会做了吧~

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[i\perp j]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|(i,j)}\mu(d)=\sum_{d=1}^{min(n,m)}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor$$

注意到杜教筛的时候不仅是求出了$\sum_{j=1}^{n}\mu(j)$，还顺便求出了所有的$\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\mu(j)$，所以可以和普通的枚举除法完美契合。

3. 那么怎么求$\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$？

$$\frac{n(n+1)}{2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}\varphi(d)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\varphi(j)$$

下面讲些题吧~（不一定都是反演哦）

1. 求$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}lcm(i,j)$，$n,m\le 10^{11}$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}lcm(i,j)\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{ij}{(i,j)}\\=&\sum_{i=1}^{\min(n,m)}i\sum_{j=1}^{\min\left(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor,\lfloor\frac{m}{i}\rfloor\right)}\mu(j)j^2\frac{\lfloor\frac{n}{ij}\rfloor\left(\lfloor\frac{n}{ij}\rfloor+1\right)}{2}\frac{\lfloor\frac{m}{ij}\rfloor\left(\lfloor\frac{m}{ij}\rfloor+1\right)}{2}\end{aligned}$$

如果我们可以杜教筛出$\sum_{i=1}^{n}\mu(i)i^2$，就可以做到$O\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$。

这是可以的

$$1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}\mu(d)d^2\left(\frac{i}{d}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}i^2\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\mu(j)j^2$$

但是我们当然不必这么做。

可以直接令$f(n,m)$表示`(1~n,1~m)`中所有互质数对乘积和。

那么$f(n,m)=\frac{n(n+1)m(m+1)}{4}-\sum_{i=2}^{\min(n,m)}i^2f\left(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor,\lfloor\frac{m}{i}\rfloor\right)$，直接dp就好了。

但是我们需要$O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$

$$\sum_{i=1}^{\min(n,m)}\frac{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor\left(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor+1\right)\lfloor\frac{m}{i}\rfloor\left(\lfloor\frac{m}{i}\rfloor+1\right)}{4}i\sum_{d|i}\mu(d)d$$

枚举除法，我们便只需求$\sum_{i=1}^{n}i\sum_{d|i}\mu(d)d$

它等于$\sum_{i=1}^{n}i\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\mu(j)j^2$

我们先求出$\sum_{i=1}^{n}\mu(i)i^2$

这个刚才已经讲过了。

然后前者便可以预处理+直接求。

预处理的时候需要线性筛

$$\sum_{d|n}\mu(d)d=\prod_{i}(1-p_i)$$

2016】单调上升路径

%%%

--outer_form

5. Re:莫比乌斯反演与杜教筛

@Bleacher是的，谢谢，已改正~...

--abclzr

这题中涉及一种很重要的杜教筛的思路。

就是对于不能直接杜教筛的式子，可以将其与另一个前缀和易求的积性函数狄利克雷卷积，使得卷积后的函数前缀和也易求。

比如这道题就是与$f(x)=x^2$卷积。

这道题也涉及到一些常见的化式子的方法。

$\gcd \to \mu$，$\mu \to \varphi$

对于`i,j,ij`三项贡献的这种，可以枚举`ij`将其化为狄利克雷卷积，也可以枚举`i`和`j`化成带下取整的式子；一般来讲前者往往易于预处理，可以应付多组询问，后者则在单次询问中有优秀表现。

2. SDOI2015 约数个数和

   求$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d(i,j)$，多组数据，$T,n,m\le 10^5$，$d(i,j)=\sum_{x|i}\sum_{y|j}[x\perp y]$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{x|i}\sum_{y|j}[x\perp y]\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{j}\right\rfloor\sum_{d}\mu(d)[d|i][d|j]\\=&\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor}\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor}{i}\right\rfloor\right)\left(\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor}\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor}{j}\right\rfloor\right)\end{aligned}$$

   预处理$O\left(n\log n\right)/O\left(n\sqrt{n}\right)$，查询$O\left(T\sqrt{n}\right)$

3. BZOJ2820 YY的gcd

   求$(x,y)=$ 质数，$x\in[1,n]$，$y\in[1,m]$的数对个数。多组数据，$n,m\le 10^7$，$T\le 10^4$

$$\begin{aligned}&\sum_{p\le\min(n,m)}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{p}\right\rfloor}[i\perp j]\\=&\sum_{p\le\min(n,m)}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{p}\right\rfloor}\sum_{d}\mu(d)[d\perp i][d\perp j]\\=&\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{i}\right\rfloor\sum_{p|i}\mu\left(\frac{i}{p}\right)\end{aligned}$$

   预处理$O(n)/O(n\lg\lg n)$，查询$O(T\sqrt{n})$

4. FZU2016 how many tuples

   有m个数，第i个数的取值范围是$[1,a_i]$，求这m个数gcd为1的方案数。多组数据，10s时限，$t\le 10^3$，$m\le 20$，$ai\le 10^8$

$$\sum_{i=1}^{\min(a_i)(1\le i\le m)}\mu(i)\prod_{j=1}^{m}\left\lfloor\frac{a_j}{i}\right\rfloor$$

   直接杜教筛就可以了，杜教筛的时候预处理10^7。

   枚举除法的时候需要用堆。时间复杂度$O\left(Tm\sqrt{A}\log m\right)$

5. CQOI2015 选数

   求从$[L,R]$中选N个数，其gcd等于K的方案数。$N,K,L,R\le 10^9$，$R\quad L\le 10^5$

   如果N个数互不相同，那么gcd至多是R-L，所以我们分情况讨论。

   所以设$f(i)$表示gcd是K*i的方案数，要求$\left\lfloor\frac{R}{iK}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{L\ \ 1}{iK}\right\rfloor>1$

$$f(i)=\left(\left\lfloor\frac{R}{iK}\right\rfloor\quad\left\lfloor\frac{L-1}{iK}\right\rfloor\right)^N\quad\sum_{j=2}^{\left\lfloor\frac{R}{K}\right\rfloor-1}f(ij)$$

   最后再加上$[L\le K\le R]$

   时间复杂度$O\left((R-L)\log K\right)$

分类：数学-莫比乌斯反演,数学-数论,数学-杜教筛/洲哥筛

« 上一篇：【BZOJ 3993】【SDOI 2015】星际战争
» 下一篇：【51Nod 1244】莫比乌斯函数之和

评论列表

#1楼 2017-04-15 12:13 Candy?

为什么我感觉题目1的第一个做法做不到$O(n^{3/4})$，因为后面带着$\frac{n}{ij}$的形式怎么处理啊 我太弱了 求教

支持(0) 反对(0)

#2楼[楼主] 2017-04-15 14:25 abclzr

@ Candy?
对于前面每个固定的$\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$，$\lfloor\frac{m}{i}\rfloor$，后面的$\left\lfloor\frac{n}{ij}\right\rfloor$，$\left\lfloor\frac{m}{ij}\right\rfloor$只有$O(\sqrt{n})$种取值。前面分段求和套后面分段求和，积分分析复杂度不是$O\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$的吗？

支持(0) 反对(0)

#3楼 2017-04-15 15:30 Candy?

@ abclzr
就是说对于一个数n的所有不同$\frac{n}{i}$的取值，他们的$\frac{1}{2}$方后求和的结果为$n^{\frac{3}{4}}$吗！

支持(0) 反对(0)

#4楼[楼主] 2017-04-15 15:40 abclzr

@ Candy?
没错！$f(x)=\frac{n}{x}$，$\int_0^{\sqrt{n}} f(x)\,dx=n^{\frac{3}{4}}$，只考虑$\frac{n}{x}>\sqrt{n}$的，小于$\sqrt{n}$的积分后一定比大于$\sqrt{n}$的要小。

支持(1) 反对(0)

#5楼 2017-04-15 16:02 Candy?

和杜教筛的复杂度分析好像啊 谢谢啦！

支持(0) 反对(0)

#6楼 2017-04-30 22:02 Bleacher

楼主,那个积性函数的第5,6条的j是不是该从0开始枚举呢...

支持(0) 反对(1)

#7楼[楼主] 2017-05-01 11:16 abclzr

@ Bleacher
是的，谢谢，已改正~

支持(0) 反对(0)

注册用户登录后才能发表评论，请 登录 或 注册，访问网站首页。

历史上的今天:

2016-01-02 vijos p1523 贪吃的九头龙 思考思考再思考，就荒废了4小时

2016-01-02 Vijos p1518 河流 转二叉树左儿子又兄弟