支配树 与 tarjan算法

标签： 算法 支配树

2015-11-19 15:21 2478人阅读 评

分类： 算法（4）

目录(?) [+]

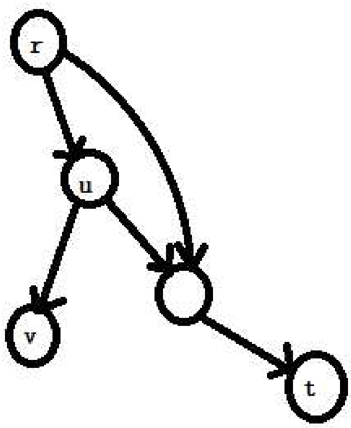
简介

什么是支配树？支配树是什么？XD
对于一张有向图（可以有环）我们规定一个起点r（为什么是r呢？因为网上都是这么规定的），从r点到图上另一个点w可能存在很多条路径（下面将r到w简写为r->w）。
如果对于r->w的任意一条路径中都存在一个点p，那么我们称点p为w的支配点（当然这也是r->w的必经点），注意r点不讨论支配点。下面用idom[u]表示离点u最近的支配点。
对于原图上除r外每一个点u，从idom[u]向u建一条边，最后我们可以得到一个以r为根的树。这个树我们就叫它“支配树”。

相似

这个东西看上去有点眼熟？
支配点和割点（删掉后图联通块数增加）有什么区别？
我们考虑问题给定一个起点r和一个终点t，询问删掉哪个点能够使r无法到达t。
很显然，我们删掉任意一个r->t的必经点就能使r无法到达t，删掉任意一个非必经点，r仍可到达t。
从支配树的角度来说，我们只需删掉支配树上r到t路径上的任意一点即可
从割点的角度来说，我们是不是只需要考虑所有割点，判断哪些割点在r->t的路径上即可？是否将某个割点删掉即可让r无法到达t？
这当然是不正确的，我们可以从两个方面来说明它的错误：

1. 删掉割点不一定使r无法到达t



评论排行

支配树 与 tarjan算法 (1)
费用流做二分图最大权匹 (1)
【经典】进化树问题 (1)
【清单】边角知识清单 (0)
解方程（有点精度问题） (0)
网络流 -- 流量平衡？ (0)
多次背包 O(NV) (0)
Javascript 解数独 (0)
终于把 VIJOS 源代码调i (0)
一个低调的博客建立了。 (0)

推荐文章

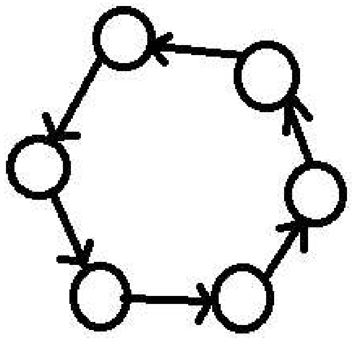
* CSDN日报20170725——《新的开始，从研究生到入职亚马逊》
* 深入剖析基于并发AQS的重入锁(ReetrantLock)及其Condition实现原理
* Android版本的"Wannacry"文件加密病毒样本分析(附带锁机)
* 工作与生活真的可以平衡吗？
* 《Real-Time Rendering 3rd》提炼总结——高级着色：BRDF及相关技术
* 《三体》读后思考-泰勒展开/维度打击/黑暗森林

最新评论

支配树 与 tarjan算法
YouSiki: 并非所有半必经点都一定是X的搜索树祖先，只有最终的那个DFS序最小的半必经点一定是其搜索树祖先。
费用流做二分图最大权匹配
a710128: 好像图片里把符号打反了
【经典】进化树问题
u010274222: 然而RQNoj上，直接把1~2，2~3.....N-1~N，N~1的和加起来除以2就能过...

这个图中点u是关键点（删掉后图联通块个数增加）
并且u在r->t的路径上，然而删掉点u后r仍然可以到达t

2. 图中不一定存在割点



在这个图中不存在任何割点

所以我们没有办法使用割点来解决这个问题。

简化问题

- 树

  对于一棵树，我们用r表示根节点，u表示树上的某个非根节点。很容易发现从r->u路径上的所有点都是支配点，而idom[u]就是u的父节点。
  这个可以在$O(n)$的时间内实现。

- DAG（有向无环图）

  因为是有向无环图，所以我们可以按照拓扑序构建支配树。
  假设当前我们构造到拓扑序中第x个节点编号为u，那么拓扑序中第1 ~ X-1个节点已经处理好了，考虑所有能够直接到达点u的节点，对于这些节点我们求出它们在支配树上的最近公共祖先v，这个点v就是点u在支配树上的父亲。
  如果使用倍增求LCA，这个问题可以在$O((n+m)log_2n)$的时间内实现。

对于这两个问题我们能够很简便的求出支配树。

有向图

对于一个有向图，我们应该怎么办呢？

简单方法

我们可以考虑每次删掉一个点，判断哪些点无法从r到达。
假设删掉点u后点v无法到达，那么点u就是r->v的必经点（点u就是v的支配点）。
这个方法我们可以非常简单的在$O(nm)$的时间内实现。
其中n是点数，m是点数。

更快的方法

这里，我将介绍Lengauer-Tarjan**算法**。
这个算法能在很快的时间内求出支配树。
要介绍这个算法我们还需引入两个定理和一些概念

大概步骤

关闭

首先来介绍一些这个算法的大概步骤

1. 对图进行DFS（深度优先遍历）并求出搜索树和DFS序。这里我们用$dfn[x]$表示点x在dfs序中的位置。
2. 根据半必经点定理计算出所有的半必经点作为计算必经点的根据
3. 根据必经点定理修正我们的半必经点，求出支配点

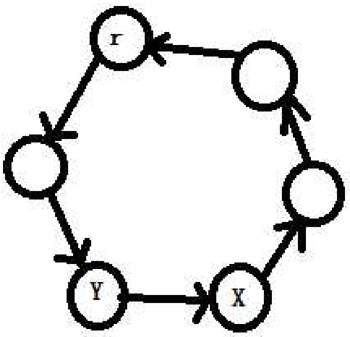
半必经点

我们用idom[x]表示点x的最近支配点，用semi[x]表示点x的半必经点。
那什么是半必经点呢？

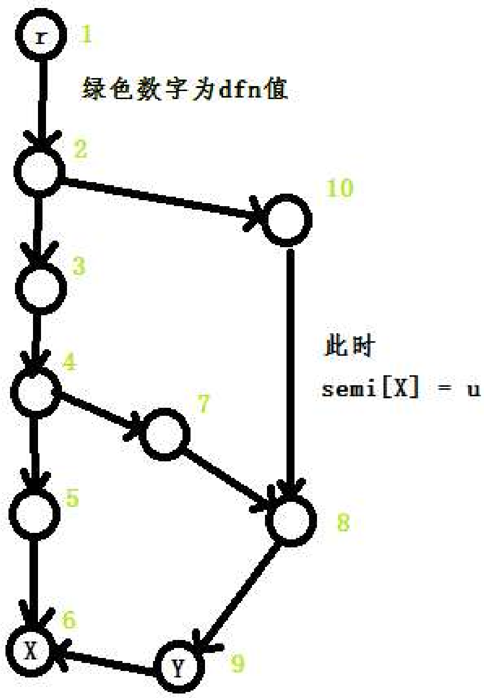
> 对于一个节点Y，存在某个点X能够通过一系列点p_i（不包含X和Y）到达点Y且$\forall i$ $dfn[i] > dfn[Y]$，我们就称X是Y的半必经点，记做$semi[Y] = X$

当然一个点X的"半必经点"会有多个，而且这些半必经点一定是搜索树中点X的祖先（具
详细解释，请自行思考）。
对于每个点，我们只需要保存其半必经点中dfn最小的一个，下文中用$semi[x]$表示点x的半必经点中dfn值最小的点的编号。
我们可以更书面一点的描述这个定理：

- 对于一个节点Y考虑所有能够到达它的节点，设其中一个为X
- 若$dfn[X] < dfn[Y]$，则X是Y的一个半必经点



- 若$dfn[X] > dfn[Y]$，那么对于X在搜索树中的祖先Z(包括X)，如果满足$dfn[Z] > dfn[Y]$那么$semi[Z]$也是Y的半必经点



在这些必经点中，我们仅需要dfn值最小的
这个半必经点有什么意义呢？

> 我们求出深搜树后，考虑原图中所有非树边（即不在树上的边），我们将这些边删掉，加入一些新的边 $\{(semi[w], w) | w \in V \ and \ w \neq r\}$，我们会发现构建出的新图中每一个点的支配点是不变的，通过这样的改造我们使得原图变成了DAG

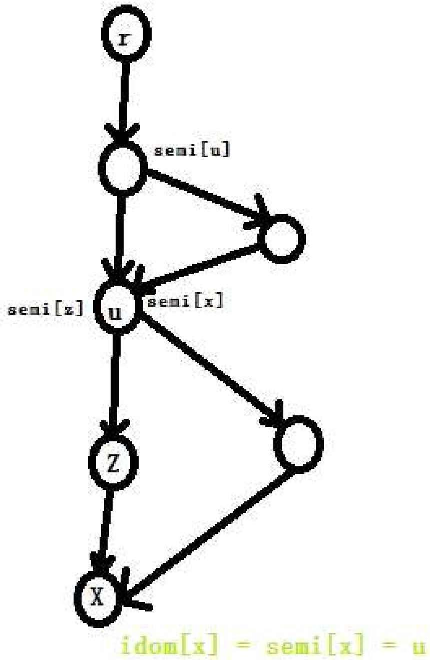
是否接下来使用DAG的做法来处理就可以做到$nlog_2n$呢？我没试过，不过我有更好的方法。

必经点

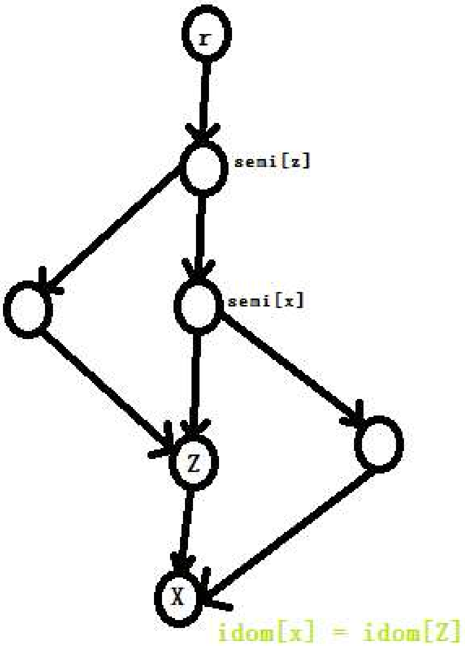
一个点的半必经点有可能是一个点的支配点，也有可能不是。我们需要使用必经点定理对这个半必经点进行修正，最后得到必经点

> 对于一个点X，我们考虑搜索树上$semi[X]$到X路径上的所有点p_0，p_1，p_2，$p_3 \ldots$
> 有$p_i (1 \leq i < k)$，我们找出$dfn[semi[p_i]]$最小的一个p_i记为Z

- 考虑搜索树上X与$semi[X]$之间的其他节点（即不包含X和$semi[X]$），其中半必纟
  的记为Z
- 如果$semi[Z] = semi[X]$，则$idom[X] = semi[X]$



- 如果$semi[Z] \neq semi[X]$，则$idom[X] = idom[Z]$



具体实现

关闭

对于求半必经点与必经点我们都需要处理一个问题，就是对于一个节点X的前驱Y，我们需要计算Y在搜索树上所有dfn值大于$dfn[X]$的祖先中$semi$值最小的一个，我们可以按dfn从大到小的顺序处理，使用并查集维护，这样处理到节点X值时所有dfn值比X大的点都被维护起来了。
对于Y的所有满足条件的祖先，就是在并查集中Y的祖先，可以通过带权并查集的方法，维护祖先中的最小值，并记下$semi$最小的具体是哪个节点。
这样我们就能够在$O((n+m)\times\alpha(n))$时间内解决这个问题。

代码

这里提供 Codechef May15 中 GRAPHCNT 题目的代码

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
using namespace std;
typedef long long lld;
const int MaxN = 100000 + 10, MaxE = (5 * 100000) * 2 + MaxN;
int head[MaxN], pre[MaxN], dom[MaxN], to[MaxE], nxt[MaxE], top;
void addedge(int *h,int fr,int tt)
{
    top ++;
    nxt[top] = h[fr];
    to[top] = tt;
    h[fr] = top;
}
int n, m;
void init()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    int a, b;
    for(int i = 1; i <= m; ++i)
    {
        scanf("%d%d", &a, &b);
        addedge(head, a, b);
        addedge(pre, b, a);
    }
}
int bcj[MaxN], semi[MaxN], idom[MaxN], best[MaxN], dfn[MaxN], id[MaxN], fa[MaxN], dfs_clock;
int push(int v)
{
    if(v == bcj[v]) return v;
    int y = push(bcj[v]);
    if(dfn[semi[best[bcj[v]]]] < dfn[semi[best[v]]]) best[v] = best[bcj[v]];
    return bcj[v] = y;
}//带权并查集路径压缩
void dfs(int rt)
{
    dfn[rt] = ++dfs_clock;
    id[dfs_clock] = rt;
    for(int i = head[rt]; i; i = nxt[i])
        if(!dfn[to[i]])
        {
            dfs(to[i]);
            fa[to[i]] = rt;
        }

}//求出dfs序
void tarjan()
{
    for(int i = dfs_clock, u; i >= 2; --i)
    {//按dfs序从大到小计算
        u = id[i];
        for(int j = pre[u]; j; j = nxt[j])//semi
        {
            if(!dfn[to[j]]) continue;
```

```
            push(to[j]);
            if(dfn[semi[best[to[j]]]] < dfn[semi[u]]) semi[u] = semi[best[to[j]]];
        }
        addedge(dom, semi[u], u);
        bcj[u] = fa[u];u = id[i - 1];
        for(int j = dom[u]; j; j = nxt[j])//idom
        {
            push(to[j]);
            if(semi[best[to[j]]] == u) idom[to[j]] = u;
            else idom[to[j]] = best[to[j]];
        }
    }
    for(int i = 2, u; i <= dfs_clock; ++i)
    {
        u = id[i];
        if(idom[u] != semi[u]) idom[u] = idom[idom[u]];
    }
}
int sons[MaxN];
lld ans;
void calc_son()
{
    for(int i = dfs_clock, u; i >= 2; --i)
    {
        u = id[i];
        ++ sons[u];
        if(idom[u] != 1) sons[idom[u]] += sons[u];
        else ans -= ((lld)sons[u] * (lld)(sons[u] - 1)) / 2ll;
    }
}
void solve()
{
    for(int i = 1; i <= n; ++i) bcj[i] = semi[i] = best[i] = i;
    dfs_clock = 0;
    dfs(1);
    tarjan();
    ans = ((lld)dfs_clock * (lld)(dfs_clock - 1)) / 2ll;
    calc_son();
    cout << ans << endl;
}
int main()
{
    init();
    solve();
    return 0;
}
```

顶 1　　踩 0

上一篇　费用流做二分图最大权匹配

- Codechef GRAPHCNT 支配树学习及tarjan算法求解
- Tarjan算法求强连通分量

猜你在找

查看评论

1楼 YouSiki 2017-03-06 10:21发表

并非所有半必经点都一定是X的搜索树祖先，只有最终的那个DFS序最小的半必经点一定是其搜索树祖先。

您还没有登录,请[登录]或[注册]

* 以上用户言论只代表其个人观点，不代表CSDN网站的观点或立场