24 Recursion

一个 **Recursive definition 或称 Mathematical function 或称 Computer function** 指的是一个 refers to itself 的 definition.

更加 precisely 地说，recursion 是一种 repetition through self-reference.

Recursion 分为两部分：**Base case** 和 **Recursive step.** 记得在 eecs 203 上说过：**Recursion 就是 Mathematical Induction.**

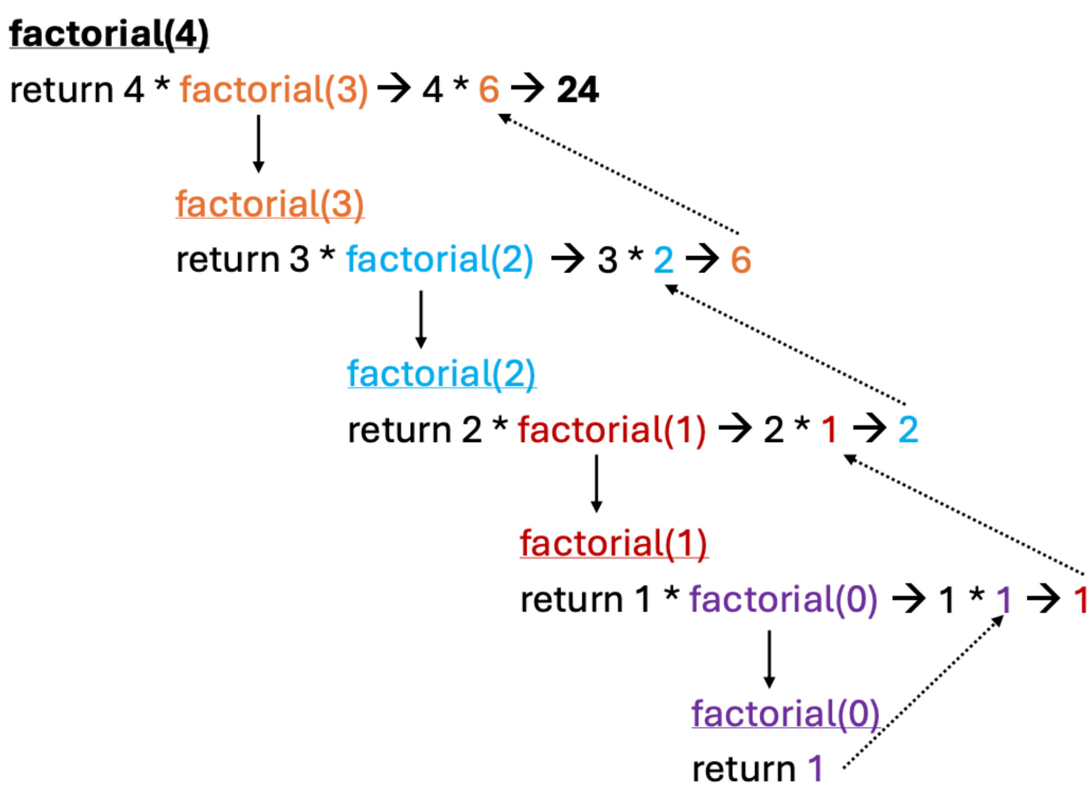
```
void annoyingSong(int numBottles) {
  if (numBottles == 0) {
    cout << "That's all folks!" << endl;
  } else {
    cout << numBottles << " bottles of beer on the wall." << endl;
  }

  annoyingSong(numBottles - 1);
  // a(n) = a(n-1)
}
```

再比如：factorial

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)! \ , \ n > 0 \\ 1 \ , \ n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

```
int factorial(int n) {
  if (n == 0) return 1;
  else return n * factorial(n-1);
}
```

因而 factorial(4) 的 function call 的流程就是如下的：



24.1 如何写 Recursion

> Step 1: 定义 Base Case

1. Base case 是情况最简单时（edge）function 的返回值
2. Base case 必须充分考虑，defined properly. 通常是 0/1 的时候。
3. 有时候我们需要 multiple base cases!!（如203学过的）

> Step 2: approch the base case

我们写的 inductive step 必须要 take us closer to the base case: 每次给出一个 step 的 answer 之后，problem size 必须减小。

> Step 3: handle the one-step-smaller answer

假设我们已经取得了一个 solution to the problem that is one step smaller，我们应当如何把它放进 recursive call 中，以最后获取 main problem 的答案？（实际上就是：假设 inductive hypothesis 成立，那么如何前往下一步）

24.1.1 Some examples

1. exponential

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a^{n-1}\ ,\ n > 0 \\ 1\ ,\ n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

```
int power(int a, int n) {
  if (n == 0)
    return 1;
  else
    return a * power(a, n-1);
}
```

2. countdown

```
void countdown(int n) {
  if (n == 0)
    cout << n << endl;
  else {
    cout << n << endl;
    countdown(n-1); // countdown from n-1 to 0
  }
}

// 第二种写法
void countdown(int n) {
  cout << n << endl;
  if (n > 0)
    coutdown(n-1);
}
```

3. sum

```
// 正确版本
int sum(int n) {
  if (n==0)
    return 0;
  else
    return n + sum(n-1);
}

// wrong 1:
int sum(int n) {
  if (n==1)   // wrong: 没有 handle n==0
    return 1;
  else
    return n + sum(n-1);
}

// wrong 2:
int sum(int n) {
  if (n==0)
    return 0;
  else
    return n + (n-1) + sum(n-2);  // 只对 even n 有效果
}

// wrong 3:
int sum(int n) {
  if (n==0)
    return 0;
  else
    return sum(n);  // 没有 approach base case
}

// wrong 4:
int sum(int n) {
  int total = 0;
  if (n==0)
    return total;
  else {
    total += n;
    sum(n-1); // 没有把 inductive hypothesis 成立的结果传到 next problem 中
    return total;
  }
}

// wrong 5:
int sum(int n) {
```

```
  if (n==0)
    return 0;
  else
    return n + sum(n--); // wrong: n--是先 evaluate再--的，会把n传进去再--(此时已经没用了)，于是死循环
}
```

24.1.2 ex2: 通过 recursion 查看 `t` 是否在 array 里

这里有很多种写法

```
// 1. yes!
bool contains(int* begin, int* end, int t) {
  if (begin == end)
    return false;
  else
    return (*begin == t) || contains(begin + 1, end, t);
}

// 2. yes!
bool contains(int* begin, int* end, int t) {
  if (begin == end)
    return false;
  else if (*begin == t)
    return true;
  else
    return contans(begin+1, end, t);
}

// 3. yes!
bool contains(int* begin, int* end, int t) {
  return (begin != end) && ((*begin == t) || contains(begin+1, end, t));
}

// 4. yes!
bool contains(int* begin, int* end, int t) {
  if (begin == end)
    return false;
  else
    return (*(end-1) == t) || contains(begin, end-1, t);
}

// 5. yes!  从两边查看
bool contains(int* begin, int* end, int t) {
  if (begin >= end)
    return false;
  else {
    return (*begin == t) || (*(end-1) == t) || contains(begin+1, end-1, t);
```

```
  }
}
```

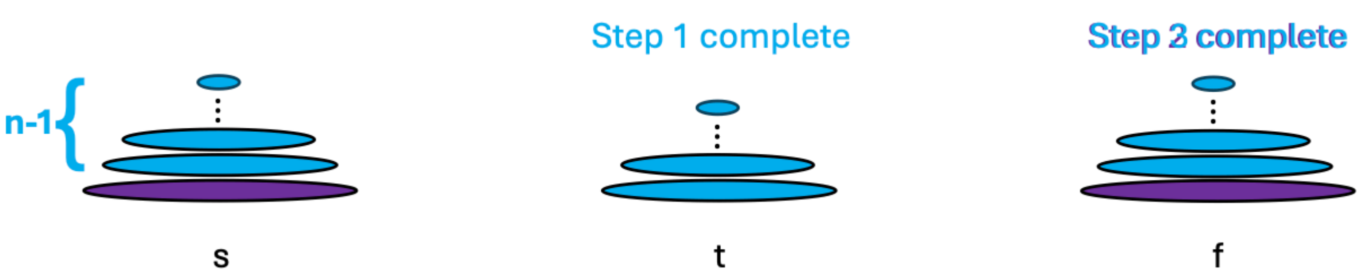
24.1.3 ex3: 判断 palindrome(回文数)

```
bool isPalindrome(string s) {
  if (s.size() < 2) // 如果recur到size==1, 说明是回文数
    return true;
  else
    return s[0]==s[s.size()-1] && isPalindrome(s.substr(1, s.size()-2));  // 去除头尾的子str
}
```

24.1.4 ex4: 倒转 array

```
void swap(int* x, int* y) {
  int temp = *x;
  *x = *y;
  *y = temp;
}

void revHelp(int* left, int* right) {
  if (left >= right)
    return;
  else {
    revHelp(left+1, right-1); // rev去除头尾的subarray
    swap(left, right);  // swap 头尾
  }
}

void reverseArray(int* a, int size) {
  revHelp(a, a+size-1)
}
```

24.1.5 Towers of Hanoi 汉诺塔



实际上：汉诺塔的整个流程可以分为这三步：

对于 n 层塔

1. 先把 n-1 个东西从 A 中移动到 B
2. 把腾出来的第 n 个东西从 A 中移动到 C
3. 把 B 里面的 n-1 个东西移动到 C

然后就结束了。

而加入这三步其中的 recursion，详细的步骤是：

1. 先把 n-1 个东西从 A 中移动到 B

    1.1 先把 n-2 个东西从 A 中移动到 C

        ...

    1.2 再把腾出来的第 n-1 个东西从 A 中移动到 B

    1.3 把 C 中的 n-2 的东西移动到 B

        ...

2. 把腾出来的第 n 个东西从 A 中移动到 C
3. 把 B 里面的 n-1 个东西移动到 C

    3.1 先把 n-2 个东西从 B 中移动到 A

        ...

    3.2 再把腾出来的第 n-1 个东西从 B 中移动到 C

    3.3 把 A 中的 n-2 个东西移动到 C

        ...

因而每次递归分为两个大移动 $T(n-1)$ 和一个小移动 $T(1)$。递推公式为 $T(n)=2T(n-1)+1$。

我们推一遍 $n=1,2,3$ 时的全过程：

最简单的是：

n=1，没有 $T(n-1)$，直接把 n 从source 移动到 dest.

然后是：

n=2，先把 1 个移动到 temp ($T(1)$)，再把下面一个移动到 dest ($T(1)$)，然后把 temp 上的移动到 dest ($T(1)$).

n=3，先把上面两个按照 n=2 的方法移动到 temp ($T(2)$)，再把下面一个移动到 dest ($T(1)$)，然后把 temp 上的移动到 dest ($T(2)$).

..

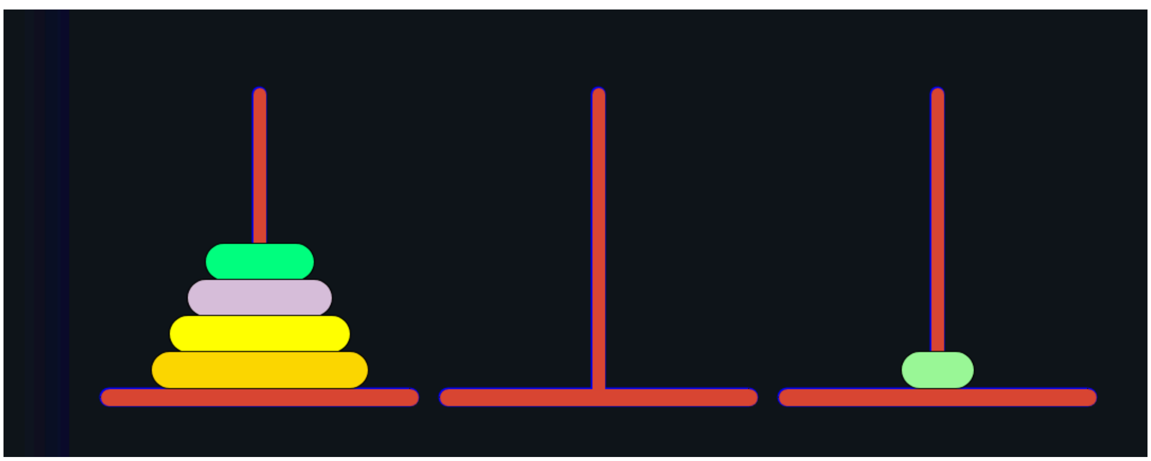
n=k，先把上面两个按照 n=2 的方法移动到 temp ($T(k-1)$)，再把下面一个移动到 dest ($T(1)$)，然后把 temp 上的移动到 dest ($T(k-1)$).

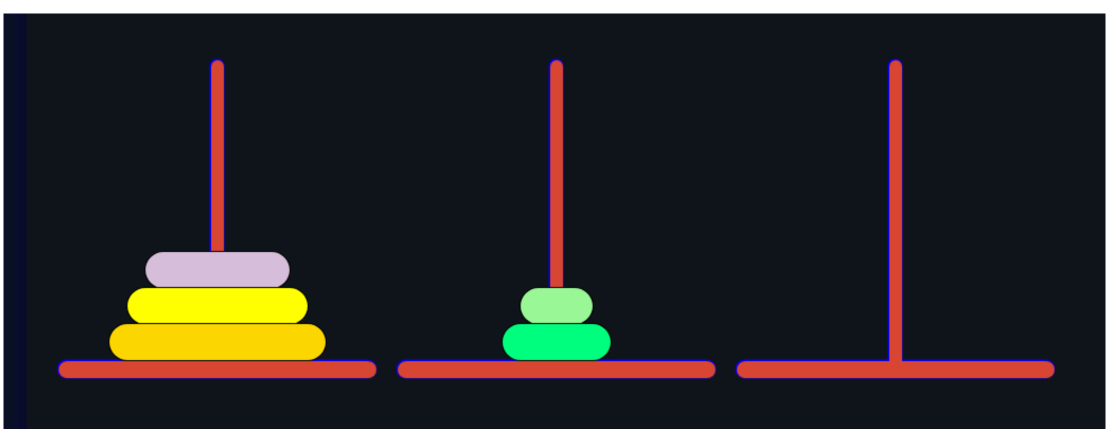
（我们可以发现一点：在 $n-1$ 到 $n-2$ 的 recursion 过程中：如果我们要把 $[n-1]$ 片 从 **source 移动到 temp** 上时，我们就要先把 $[n-2]$ 片 从 **source 移动到 dest**，然后把第 $n-1$ 片从 **source 移动到 temp** 上，然后再把 $[n-2]$ 片从 **dest** 移动到 **temp** 上。这说明：我们从上一层递归到下一层递归时，**我们的三个 subquestion 中的三个柱子是要换位置的。** 但是这个问题我们并不关心，因为 recursion 的结构已经自动包含了换位的行为了。）

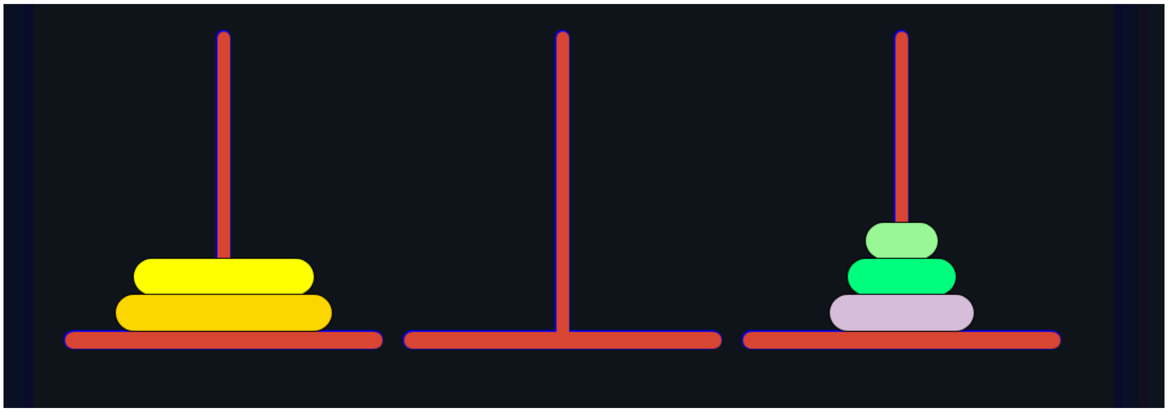
因而我们的代码结构是：

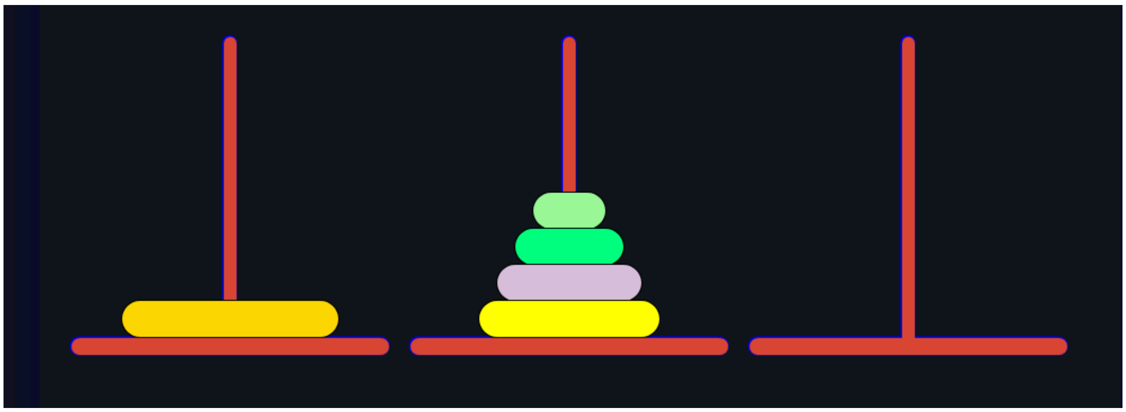
```
void move(int n, string source, string dest, string temp) {
  if(n==1)
    cout << "Move from " << source << " to " << dest << endl; // n==1 说明已经结束了
  else {
    move(n-1, source, temp, dest);
    move(1, source, dest, temp);
    move(n-1, temp, dest, source);
  }
}

void printHanoi(int n) {
  move(n, "A", "C", "B");
}
```

以下为笔者搬汉诺塔截的关键步骤（显示了换位）









24.2 Tail Recursion: 获得 Constant Space Cost

24.2.1 Space Cost of Iteration && Recursion

我们看一个既可以用 iteration 又可以用 recursion 写的函数:

```
void revHelp(int *left, int *right) {
  while (left < right) {
    swap(left, right);
    ++left;
    --right;
  }
}
```

这个函数的 time complexity 是 $n \in O(n)$ 而 space cost 是 $1 \in O(1)$

这个函数的 time complexity 是 $\frac{n}{2} \in O(n)$, 而 space cost 是 $1 \in O(1)$.

而我们用刚才的 recursion 来写的话：

```
void revHelp(int* left, int* right) {
  if (left >= right)
    return;
  else {
    revHelp(left+1, right-1); // rev去除头尾的subarray
    swap(left, right);  // swap 头尾
  }
}
```

这个函数的 time complexity 也是 $\frac{n}{2} \in O(n)$, 但是 space cost 也是 $\frac{n}{2} \in O(n)$.

因为我们会 recursively build $\frac{n}{2}$ 个 stack frame，并从后至前进行 swap，swap 完一个之后就消除一个 stack frame，最后消除完最开始建立起的第一个 stack frame 结束 function call.

但是如果我们这样写：

```
void revHelp(int* left, int* right) {
  if (left >= right)
    return;
  else {
    swap(left, right);
    revHelp(left+1, right-1);
  }
}
```

只是把后面两行换掉，我们就得到了 $1 \in O(1)$ 的 constant 的 space cost. 因为当我们把 recursive call 放在整个函数的最后一步来 return 时，我们就在 recursive call 之后把原本的 stack frame 消除了，并立刻在原位置建立起了新的 stack frame。因而，整个 function call 的过程中我们一直保持只使用一个 stack frame 的 memory，极大地减小了 space cost.

这种 Recursion 就叫做 **Tail Recursion**: 在函数的最后一步进行 Recursive Call，从而从始至终只使用一个 stack frame.

24.2.2 Accumulator-Passing Style: 重写 Factorial 为 Tail Recursion

我们看到原本写的 Factorial 函数：

```
int factorial (int n) {
  if (n==0)
    return 1;
  else
    return n * factorial(n-1);
}
```

这看起来是一个 Tail Recursion

这看起来是一个 Tail Recursion

但是不是!

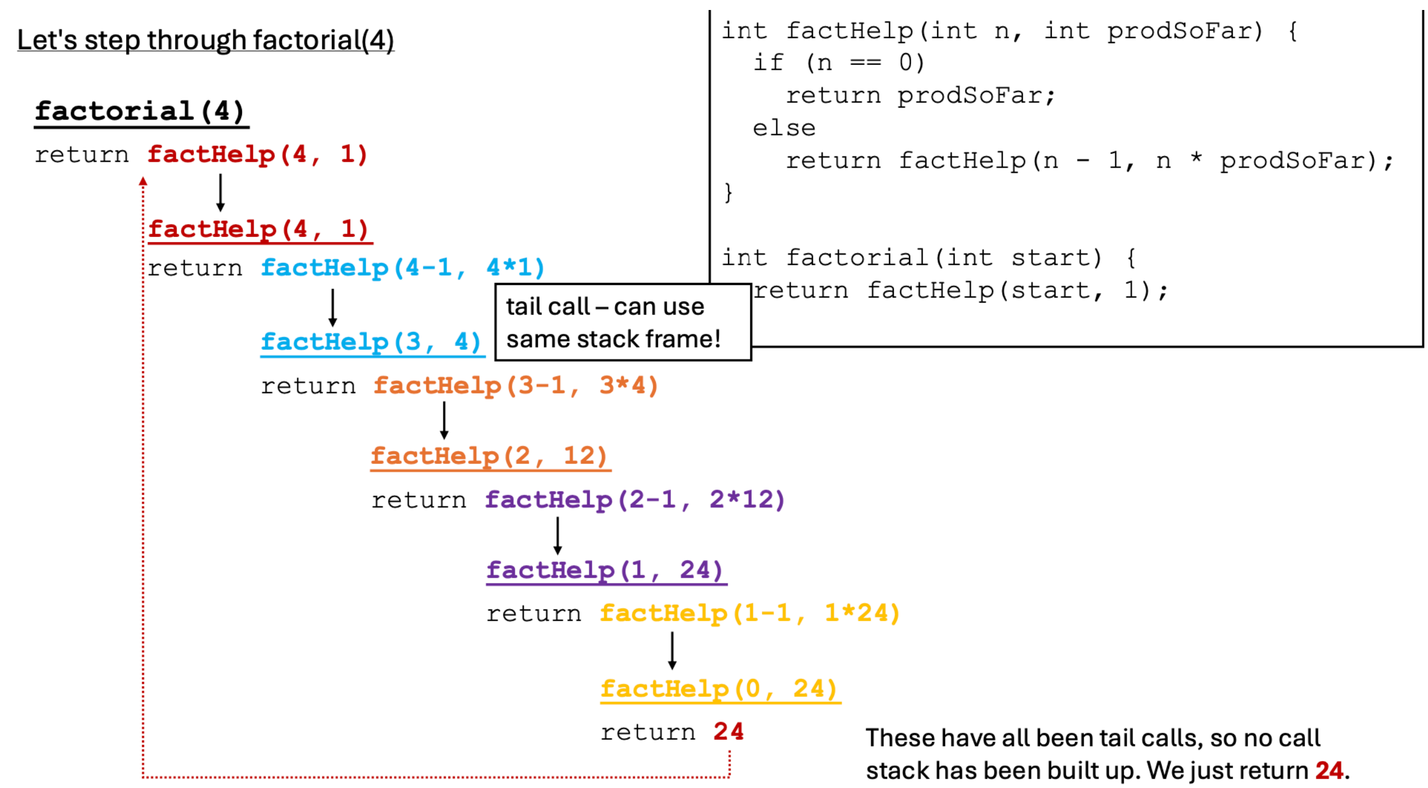
因为我们 recursively call `factorial(n-1)` 的时候，我们外面还有一个 `n *`，这就导致前一个 stack frame 还没有结束，我们就先引入了后一个 stack frame.

最后一个 function 会先 call 出所有的 n 个 recursive stack frame 再一个一个运行并从后往前退出，因而 time complexity = $n \in O(n)$.

但是这个问题很好解决

我们通过把前一个 n 的值放进 parameters 里来把它改成 tail recursion：

```
int factHelp(Int n, int prodSoFar) {
  if (n == 0)
    return prodSoFar;
  else
    return factHelp(n - 1, n * prodSoFar)
}

int factorial(int start) {
  return factHelp(start, 1);
}
```



这个 `factorial` 函数的 space cost 为 $1 \in O(1)$.

它对应的 iterative solution 为：

```
int factIter(int start) {
  int n = start;
  int prodSoFar = 1;

  while(true) {
    if (n==0)
      return prodSoFar;
    prodSoFar = n * prodSoFar;
    n = n-1;
  }
}
```

这种 revise 一个 non-tail recursion 为一个 tail recursion 的方式叫做 **Accumulator-passing style(APS).**

24.3 Structural Recursion

24.3.1 Recursion in Linked List

24.3.1.1 recursively 理解 linked list 的结构

我们可以认为一个 list 是 either:

1. empty

or

2. 一个 datum 和一个 sublist

24.3.1.2 recursively processing a linked list

计算所有元素的 sum:

```
int sum(Node* n) {
  if (n == nullptr)
    return 0;
  else
    return n->datum + sum(n->next);
}
```

返回最后一个元素：

```
int lasr(Node *n) {
  if (n->next == nullptr)
    return n->datum;
  else
    return last(n->next);
}
```

获取值为 val 的元素个数：

```
int count(Node* n, int val) {
  if (n == nullptr)
    return 0;
  else {
    int countInRest = count(n->next, val);
    if (n->datum == val)
      return 1+countInRest;
    else
      return countInRest;
  }
}

另一种写法：
int count(Node* n, int val) {
  return (n->datum==val) + count(n->next, val);
}
```

获取最大值

```
int max(Node* n) {
  if (n->next == nullptr)
    return n->datum;
  else {
    int maxInRest = max(n->next);
    // 用i和[1,i-1]中的max相比，得到[1,i]中的max
    if (n->datum > maxInRest)
      return n->datum;
    else
      return maxInRest;
  }
}
```

24.3.2 另一种 ADT: tree

24.3.2 另一种 ADT: tree

我们这里讲的 tree 局限于 binary tree.

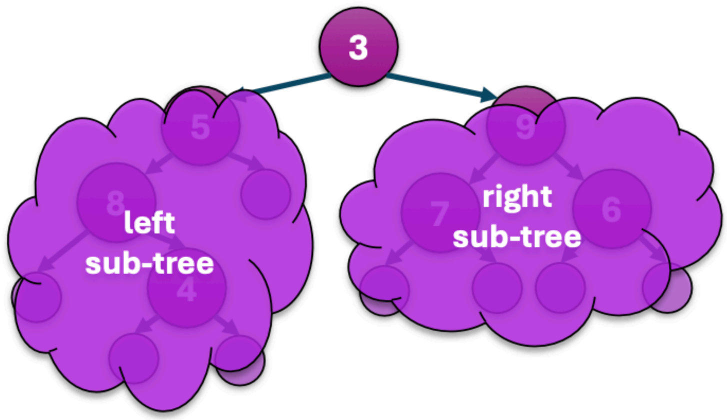
类似于对 Linked list 的 Recursive definition，我们这样 define binay tree:

一个 binary tree 为 either:

1. empty

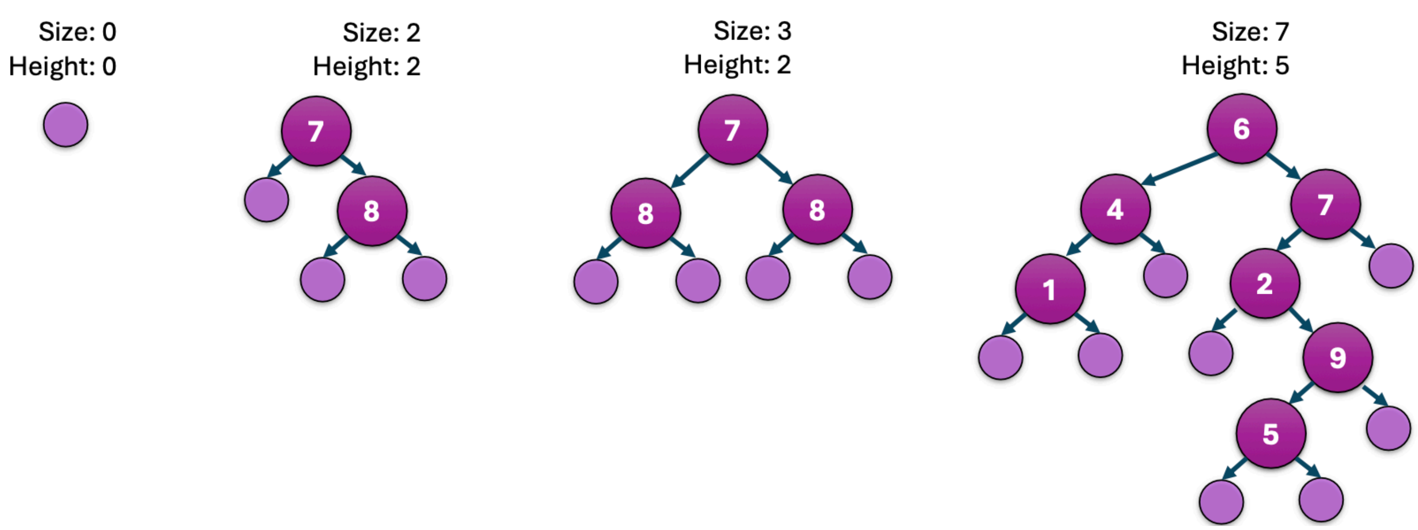
or:

2. 一个 datum with left and right sub-trees.



一个 tree 有两种 measure 方式：

1. by **size**：tree 中 elements 的个数
2. by **height**: 即 **maximum depth**，the longest chain of nodes from root to leaf.

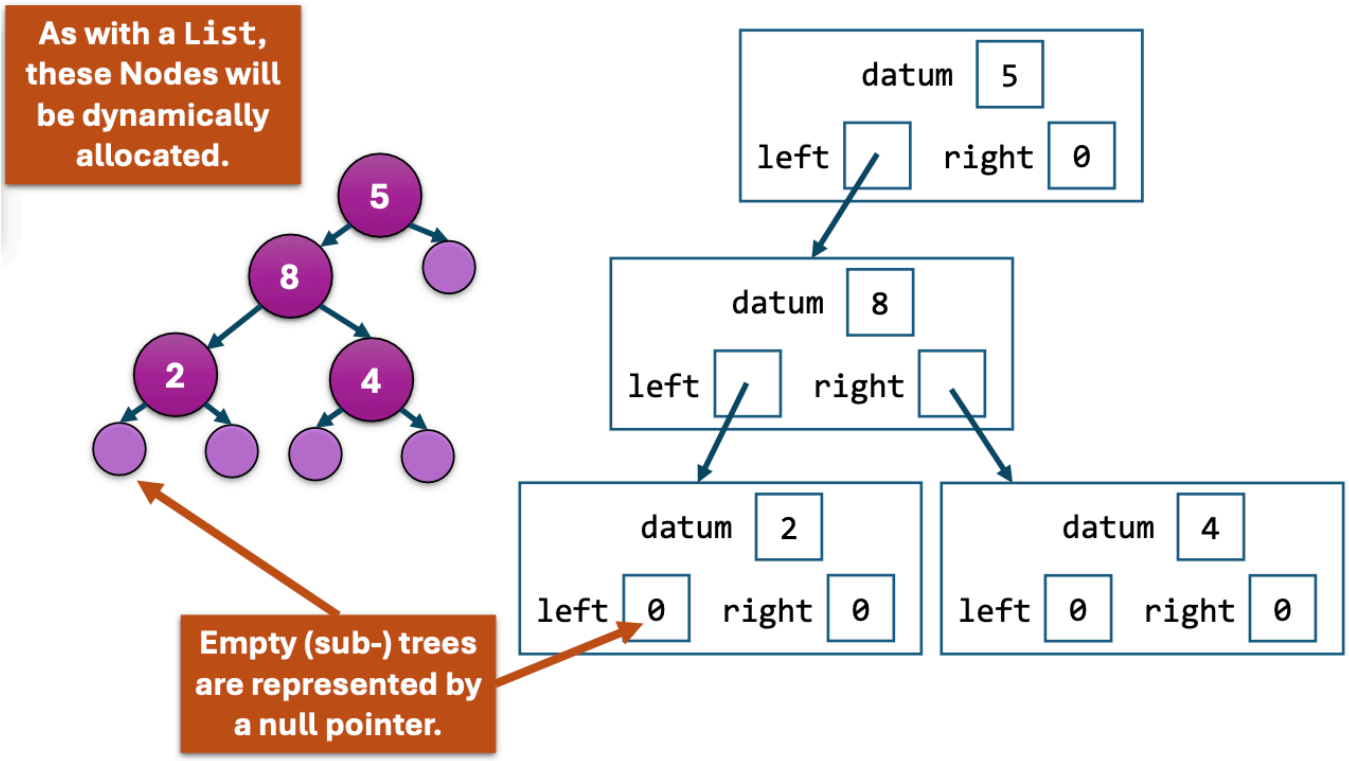


24.3.2.1 Tree 的 Data Representation

24.3.2.1 Tree 的 Data Representation

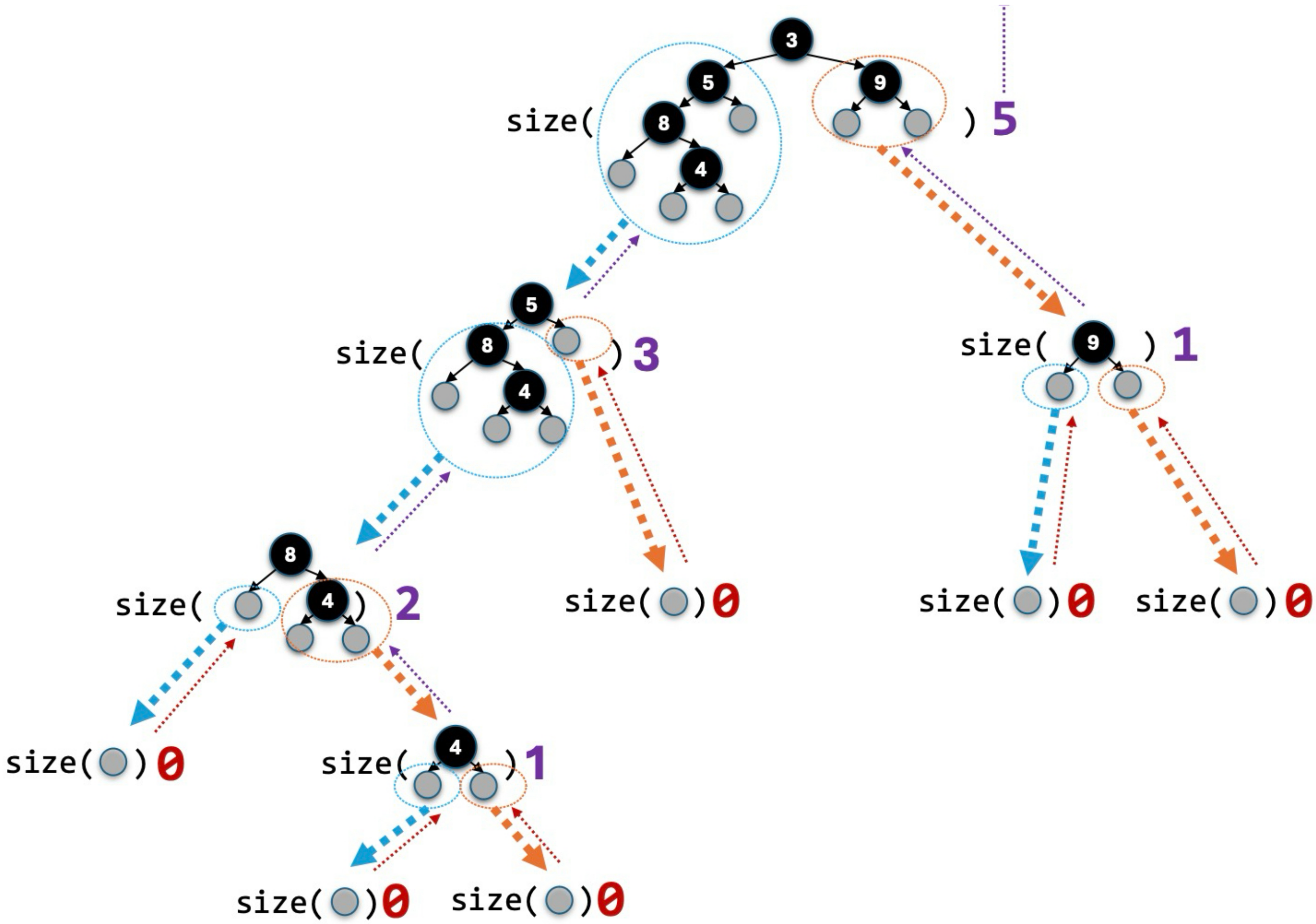
一个 tree 的基本单位是 Node:

```
struct Node {
  int datum;
  Node *left;
  Node *right;
}
```



24.3.2.2 计算 Tree 的 `size`

```
int size(Node *node) {
  if (node == nullptr)
    return 0;
  else
    return 1 + size(node->left) + size(node->right);
}
```



24.3.2.3 计算 Tree 的 `height`

```
int height(Node *r) {
  if (r == nullptr)
    return 0;
  else
    return 1 + max(height(r->left), height(r->right))
}
```

24.3.2.4 计算 Tree 的所有元素和

```
int sum(Node* r) {
  if (r==nullptr)
    return 0;
  else
    return r->datum + sum(r->left) + sum(r->right)
    // 本datum和左右subtree的sum的和
}
```

24.3.2.5 计算 Leaves 的数量

24.3.2.5 计算 Leaves 的数量

```
int numLeaves(Node* r) {
  if (r == nullptr)
    // 说明这个 Node 是空的, 不是 leaf
    return 0;
  else if ((r->left == nullptr) && (r->right = nullptr))
    // 说明这个 Node 没有 subtree 了, 因而自身是单个 leaf
    return 1;
  else
    // 说明这个 Node 还有 subtree, 因而是左右 subtree 中的 leaves 总数
    return numLeaveds(r->left) + numLeaves(r->right);
}
```

24.3.2.6 查看 tree 中是否有值为 val 的元素

```
bool contains(Node *r, int val) {
  if (r == nullptr)
    // 搜索到底了还没有, 返回 false
    return false;
  else
    return (r->datum == val) || contains(r->left, val) || contains(r->right, val);
    // 自己是 or 左右subtree里有
}
```

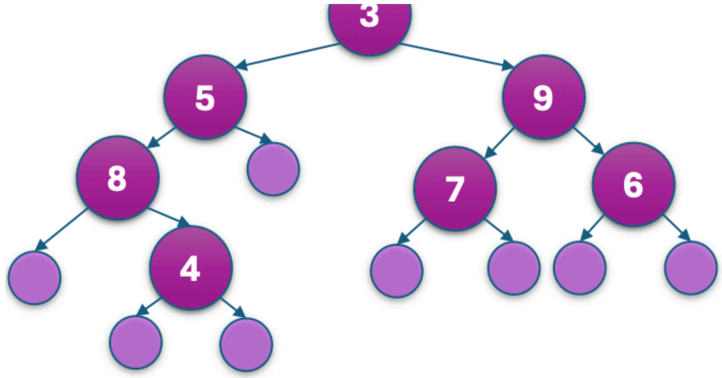
24.3.2.7 Traverse 一个 tree

有三种 common tree traversals:

1. Pre-order(前序遍历): 先 visit curent node 再 visit 其 children
2. in-order(中序遍历): visit current node between visit 其 children
3. Post-order(后序遍历): 先 visit 其 children 再 visit current node

24.3.2.7.1 pre-order traversal

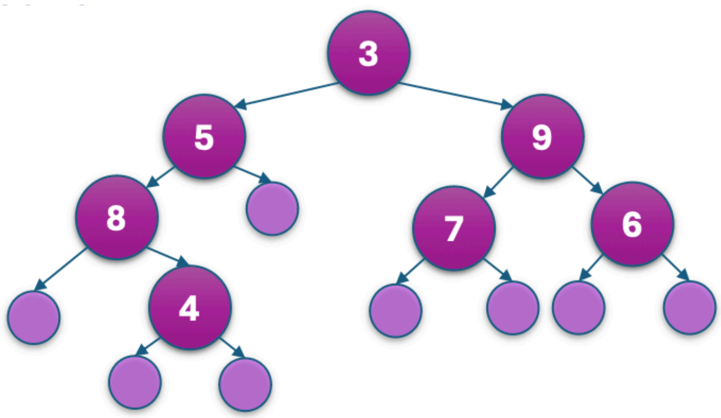
```
void preOrder(Node* root) {
  if (root != nullptr) {
    // here: process root
    preOrder(root->left);
    preOrder(root->right);
  }
}
```



pre-order result: 3, 5, 8, 4, 9, 7, 6

24.3.2.7.2 In-order traversal

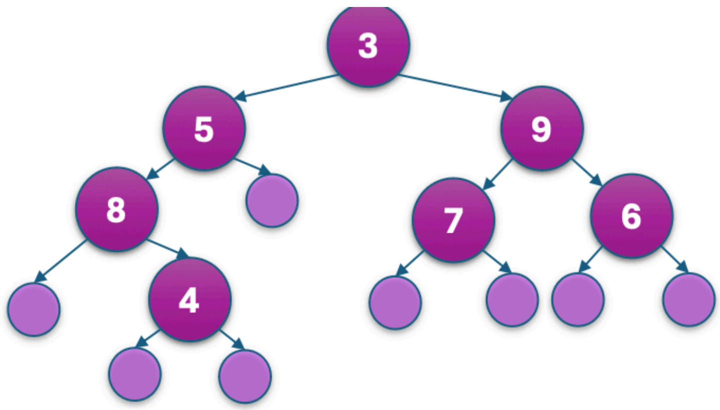
```
void inOrder(Node* root) {
  if (root != nullptr) {
    inOrder(root->left);
    // here: process root
    inOrder(root->right);
  }
}
```



in-order result: 8, 4, 5, 3, 7, 9, 6

24.3.2.7.3 Post-order traversal

```
void postOrder(Node* root) {
  if (root != nullptr) {
    postOrder(root->left);
    postOrder(root->right);
    // here: process root
  }
}
```



post-order result: 4, 8, 5, 7, 6, 9, 3

24.3.2.8 Recursion 的类型

一个 recursive function 是

1. **linear recursive** 的：if it 每次至多 makes one recursive call

   例子: factorial, list max

2. **tail recursive** 的： if 它是 linear recursive 的，并且它的 recursion call 是 tail recursion.
3. **tree recursive** 的：if 它可能会 make more than 1 recursive call.

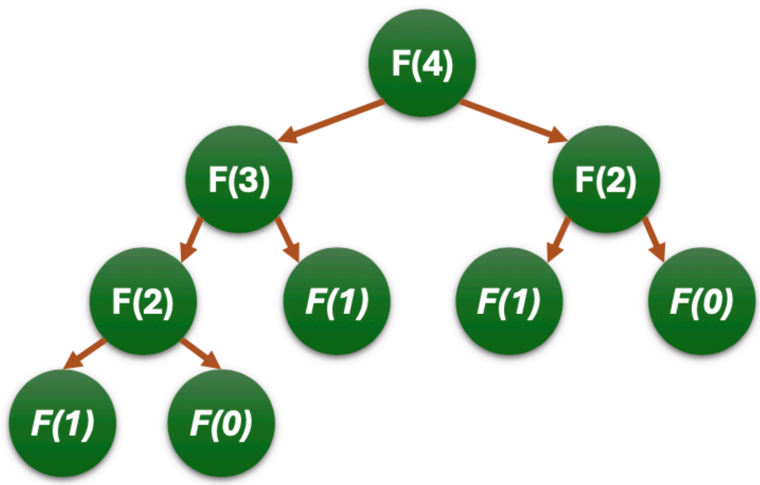
   例子: tree size, height

下面是一个典型的 tree recursive 的 function：Fibonacci Sequence.

```
int fib(int n) {
```

```
int fib(int n) {
  if (n <= 1)
    return n;
  else
    return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

$$F(n)=\begin{cases}0\ ,\ n=0\\1\ ,\ n=1\\F(n-1)+F(n-2)\ ,\ n>1\end{cases} \tag{3}$$



tree recursive 的就是过程图是 tree 的 recursion；linear recursive 的就是过程图是一根线的 recursion.