Ch3 - Def - Thms

Def ① 3.1.1 $\boxed{\text{Image of a function}}$ (像)

对于 $f: X \to Y$

$$im(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

note: $im(f) \subseteq$ target.

Def ② 3.1.2 $\boxed{\text{Span (张成)}}$

(* Def on WS 10:
称 $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_d}\}$ $\boxed{\text{spans vector space } V}$
若 $\forall \vec{v} \in V$ is a linear comb of $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_d}$.

对于 $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m} \in \mathbb{R}^n$

$$span(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}) = \{c_1\vec{v_1} + \dots + c_m\vec{v_m} \mid c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

即：$\vec{v_1}$ through $\vec{v_m}$ 所有的线性组合的集合

Thm ① 3.1.3 $\boxed{\text{Image of a linear trans}}$

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{m} \\ n & \begin{bmatrix} A\vec{e_1} & A\vec{e_2} & \cdots & A\vec{e_m} \end{bmatrix} \end{array}$$

对于 linear trans $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $(T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n)$

$$im(T) = span(A\vec{e_1}, A\vec{e_2}, \dots, A\vec{e_m})$$

也可denote为 $im(A)$ 即：T的 im 为 A的所有 col vec 的 span

Thm ② 3.1.4 $\boxed{\text{Linear trans 的 Image 的一些性质}}$

(a) $\boxed{\vec{0} \in im(T)}$

(b) $im(T)$ is $\boxed{\text{closed under } +}$:
if $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in im(T)$
$\Rightarrow \vec{v_1} + \vec{v_2} \in im(T)$

(c) $im(T)$ is $\boxed{\text{closed under scalar } \times}$:
if $\vec{v} \in im(T)$, k 是arbitrary scalar.
$\Rightarrow k\vec{v} \in im(T)$

Def ③ 3.1.5 $\boxed{\text{kernel}}$ of linear trans $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$ker(T) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid T(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

$(ker(A))$ 即：source 中所有映射到 $\vec{0}$ in target 的元素的集合

note: $ker(A) \subseteq$ source

Thm ③ 3.1.6 $\boxed{\text{Linear trans 的 kernel 的一些性质}}$

$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

(a) $\mathbb{R}^m$ 中的 $\boxed{\vec{0} \in ker(T)}$

(b) kernel is closed under $+$

(c) kernel is closed under $\boxed{\text{scalar } \times}$

Thm ④ 3.1.7 何时 $ker(A) = \vec{0}$.

(1) for square matrix A, $\boxed{ker(A) = \vec{0}}$ $\boxed{\text{iff } A \text{ invertible}}$

(2) For 任意 $n \times m$ matrix A,
若 $ker(A) = \{\vec{0}\} \Rightarrow m \leq n$
$\boxed{ker(A) = \{\vec{0}\} \text{ iff } rank(A) = m}$

那么若 $m > n$
$ker(A)$ 中一定有非0 vector.

Summary 3.1

对于一个 square matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
以下所有条都 equiv

$\boxed{A\vec{x} = \vec{b} \text{ 有unique sol}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{A \text{ invertible}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{rref(A) = I_n \text{ 即 } rank(A) = n}$

$\boxed{ker(A) = \{\vec{0}\}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{A \text{ invertible}}$

$\boxed{rref(A) = I_n \text{ 即 } rank(A) = n}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{im(A) = \mathbb{R}^n}$

$\boxed{ker(A) = \{\vec{0}\}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{im(A) = \mathbb{R}^n}$
(surjective 及 linear trans 一定 injective $\Rightarrow$ bijective)

Def ④ on ws 9 $\boxed{\text{Subspaces}}$

(对应书subspaces of $\mathbb{R}^n$)

V 是一个vector space. $W \subseteq V$

if
① $0_V \in W$
② $\forall w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$ $\boxed{\text{closed under } +}$
③ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow \lambda w \in W$ $\boxed{\text{closed under scalar } k}$

$\Rightarrow W$ 是V的 subspace

Thm ⑤ (WS) $\boxed{\text{Images and kernel are subspaces}}$

$T: V \to W$ be linear transformation

ker (T) is a subspace of V

im (T) is a subspace of W

	Subspaces of $\mathbb{R}^2$	Subspaces of $\mathbb{R}^3$
dimension 3		$\mathbb{R}^3$(本身)
dimension 2	$\mathbb{R}^2$(本身)	plane
dimension 1	line	line
dimension 0	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$

Def ⑤ on WS9 $\boxed{\text{relation}}$ (trivial, non-trivial)

A $\boxed{\text{relation}}$ on a set of vectors $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_d}\}$

是指一个值为 $\vec{0}$ 的 linear comb

$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_d\vec{v_d} = \vec{0}$

特别地, if 所有 c_i 都为 0 $\Rightarrow$ 称这个 relation 为 $\boxed{\text{trivial}}$ 的

Def ⑥ on WS9 $\boxed{\text{Linearly independent}}$

一个 set $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_d}\}$ in Vector space V

为 linearly independent 的 if whenever

$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_d\vec{v_d} = \vec{0}$

$\Longrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_d = 0$.

即: 这个 vector set 仅存在 trivial relation

不存在其它 relation.

(linearly dependent: 指存在非 trivial 的 relation.)

iff

(Thm 3.2.7)

注意到: 如果 set 中有 $\vec{0}$, 那么一定 lin dependent.

补充 Def on book 3.2.3 (linearly independent 另一个 def)

① Redundant vector: $\boxed{\vec{v_i}}$ in $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}$ 为一个 redundant vector if 它是它之前的 vector 的 linear comb $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_{i-1}})$

② $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_d}\}$ 为 linearly ind 的, if 没有 redundant vector. (linearly dependent iff 至少有一个 redundant vector)

Def ⑦ 3.2.3 $\boxed{\text{Basis}}$

(Same as WS ⑩)

一个 vector space V.

set $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_d}\}$ 为 V 的一个 basis

if $\underbrace{\text{it spans } V}_{(1)}$ 且 $\underbrace{\text{it is linearly independent}}_{(2)}$

Def ⑧ 3.3.3 (対应) $\boxed{\text{Dimension}}$

V is a vector space.

$\boxed{\dim(V)}$ is the number of elements in a basis of V.

注: Thm 3.3.2 (原: $\mathbb{R}^n$ subspace; 扩展: 任何 VS) 的 basis 都有相同数目的 vectors

即 dim 是固定的

Thm ⑥ 3.2-4 $\boxed{\text{Basis of im}(A)}$

对于 matrix A, the basis of im(A) is all column vectors of A omitting redundant ones.

ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ basis of Im$(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.

Thm ⑦ 3.2.5

对于 $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m} \in \mathbb{R}^n$

如果 $\vec{v_i}$ 非 $\vec{0}$, 而每个 $\vec{v_i}$ 都有一个位置上的 entry 为 0 而之前 $\vec{v_1}, \dots \vec{v_{i-1}}$ 在该位置的 entries 都为 0, 则 $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}\}$ linearly independent.

Thm ⑧ 3.2.8 kernel and relations for $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$A\vec{x} = 0 \iff x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \dots + x_m\vec{v_m} = \vec{0}$

A is linearly independent iff ker $(A) = \{\vec{0}\}$

$\Updownarrow$

rank $(A) = m$

Sum 3.2.9

对于 $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}\}$, 以下 6 条 equiv

(1) linearly independent (2) 无 redundant vector

(3) 没有一个 $\vec{v_i}$ 是其他 vector 的 linear comb.

(4) 只存在 trivial relation (5) ker$\begin{bmatrix} \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_m} \end{bmatrix} = \{\vec{0}\}$

(6) rank$\left(\begin{bmatrix} \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_m} \end{bmatrix}\right) = m$

Thm ⑨ 3.2.10 $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}\} \in V \subseteq \mathbb{R}^n$

为 V 的一个 basis iff $\boxed{\text{every } \vec{v_i}}$ can be uniquely expressed as a $\boxed{\text{linear comb}}$ of other vectors.

Thm ⑩ on WS10 $T_A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear trans. $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

(1) A 中对应 rref(A) 的 pivot columns 的 columns 是 $im(T_A)$ 的一个 basis

(2) $\dim(im(T_A)) = rank(A)$

(3) $\underbrace{\dim(source(T_A))}_{即 m} = \boxed{\dim(\ker(T_A))} + \dim(im(T_A))$

def nullity of A

3.3

如果一组 vector 能 span V，那么数目一定 ≥ V 中任何 lin indep 的一组 vector

Thm ⑪ 3.3.1 对于 $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$ 和 $\vec{w_1}, \dots, \vec{w_q} \in V$，(where V 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个 subspace) 其实对任何 VS 都成立

如果 $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$ lin indep，且 $\vec{w_1}, \dots, \vec{w_q}$ spans V

$\Longrightarrow \boxed{q \geq p}$

Thm ⑫ 3.3.4 对于 VS: V，设 $\dim(V) = m$

(1) $\boxed{最多}$只能找到$\boxed{m个}$vectors作为~~一组是~~$\boxed{\text{lin indep}}$的.

(2) $\boxed{最少}$需要$\boxed{m个}$vectors才能$\boxed{\text{span V}}$

(1)+(2) ⇒ (3) 如果m个 vectors 是lin indep 的，则一定是一个basis
如果m个 vectors 能 span V，则也一定是一个 basis.

Thm ⑬ 3.3.5 快速找到 matrix A 所代表的linear trans 的$\boxed{\text{image 的一组 basis}}$.

method (thm)：求$\boxed{\text{rref}(A)}$. rref(A) 中有$\boxed{\text{pivot}}$的$\boxed{\text{cols}}$对应的 A 中$\boxed{\text{原 cols}}$就是一组basis.

⇓

Thm ⑭ 3.3.6 $\boxed{\dim(im A) = rank A}$

Thm ⑮ 3.3.7 $\boxed{\text{Rank-nullity theorem}}$

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\underbrace{\dim(\ker A)}_{称为 nullity} + \underbrace{\dim(im A)}_{=rank} = m$

Rank-nullity thm 简明表达：rank + nullity = dim(source)

thinking: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. $T_A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
source 的 dim 为 m.

$\dim(im A) = rank A$ (A处理好的维数) (num of leading variables)

$\dim(\ker A)$ 即 nullity A：所有映到 $\vec{0}$ 上的 vectors 构成的 subspace (A会弃掉的维数) (num of free variables)

⟹ 加起来 = 喂给A的总维数 (num of all variables)

Thm ⑯ 3.3.8 如何找到 kenel 和 image 的 basis.

image 的 basis：即 non-redundant vectors.

kernel 的 basis：sol system 或看到出所有 redundant vectors. 将 redundant vector $\vec{v_i}$ 写作 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_{i-1}}$ 的 linear comb

$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_{i-1}\vec{v_{i-1}} = \vec{v}$

而后移动所有到右侧

$\vec{0} = -c_1\vec{v_1} - c_2\vec{v_2} - \dots - c_{i-1}\vec{v_{i-1}} + 1\vec{v}$

这样 coefficient vector $[-c_1, -c_2 \dots -c_{i-1} \ 1 \ 0 \dots 0] \in \mathbb{R}^n$ 就是一个 vector in basis of kernel

所有 redundant vector 的这个 coefficient vector 构成了 kernel 的 basis.

Thm ⑰ 3.3.9 Basis of $\mathbb{R}^n$

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ form 一个 basis of $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{iff}}$ $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots & \vec{v_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ is $\boxed{\text{invertible.}}$

Summary 3.3.10 对于方阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，以下 equiv.

① A 可逆 ② $\forall \vec{b}$, $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解. ③ $rref(A) = I_n$ ⇕ $rank A = n$.

≡ (by rank-nullity)

④ $im(A) = \mathbb{R}^n$ ⑤ $\ker(A) = \vec{0}$ ⑥ A 的 cols 为 $\mathbb{R}^n$ 的 basis.

⑦ A 的 cols span $\mathbb{R}^n$ ⑧ A 的 cols lin indep.