217-Ch5-Def-Thms

WS16 (5.1 Orthogonal projection and Orthogonal basis)

WS16. Def① (Orthogonality, length, unit vectors)

$\boxed{\text{Orthogonality}}$: 如果 $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=0$, 称 $\vec{v_1}\perp\vec{v_2}$ (perpendicular, orthogonal)
$\in V$

$\boxed{\text{Length (或称 norm, magnitude)}}$: $\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$\boxed{\text{unit vector}}$: 如果 $\|\vec{u}\|=1$, 则称它为一个 unit vector.

WS16. Def② (WS16: Def A)

$\vec{u_1},\vec{u_2},\dots,\vec{u_m}\in\mathbb{R}^n$ 为 $\boxed{\text{orthonormal}}$ vectors if ① 它们都是 unit vectors
② 且它们都 orthogonal 于 each other.

i.e. $\boxed{\vec{u_i}\cdot\vec{u_j}=\begin{cases}0, & \text{if } i\neq j\\ 1, & \text{if } i=j\end{cases}}$

WS16. Def④ orthogonal projection onto W.

(Def B) ✫

对于 $\boxed{\text{subspace}}$ $W\subseteq\mathbb{R}^n$, 取 W 的一组 $\boxed{\text{orthogonal}}$ $\boxed{\text{basis } (\vec{u_1},\dots,\vec{u_d})}$:

定义 $\boxed{\text{proj}_W:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}$ sending $\sum_{i=1}^{d}(\vec{v}\cdot\vec{u_i})\vec{u_i}$

$\vec{v}\longmapsto\boxed{(\vec{v}\cdot\vec{u_1})\vec{u_1}+\dots+(\vec{v}\cdot\vec{u_d})\vec{u_d}}$

为 the orthogonal projection onto W. 记作 $\text{proj}_W(\vec{v})$ 或 $\vec{v}^{\parallel}$

这是个 linear trans, 且不论如何选取 orthogonal basis 结果都相同. ✫✫

WS16. Fact③

如果 $\mathcal{B}=(\vec{b_1},\vec{b_2},\dots,\vec{b_n})$ 为一组 orthonormal basis of V

$\Longrightarrow \forall\vec{x}\in V,\ [\vec{x}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\vec{x}\cdot\vec{b_1}\\ \vec{x}\cdot\vec{b_2}\\ \vdots\\ \vec{x}\cdot\vec{b_n}\end{bmatrix}$ ✫

✫ 这也意味着从任何 basis A 到 orthonormal basis $\mathcal{B}$ 的 $S_{A\to\mathcal{B}}$
$=\begin{bmatrix}\vec{b_1}\cdot\vec{a_1} & \cdots & \vec{b_1}\cdot\vec{a_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \vec{b_n}\cdot\vec{a_1} & \cdots & \vec{b_n}\cdot\vec{a_n}\end{bmatrix}$

Thm 5.1.3 orthonormal vectors 的性质

WS16: 其实 orthogonal 就一定 lin ind.

① orthonormal vectors 一定 linearly independent.
② $\mathbb{R}^n$ 中的 $\boxed{n\text{个 orthonormal vectors}}$ 一定是一组 $\boxed{\text{basis}}$

Corollary on WS17: $\dim(W)=d\Rightarrow$ 任何 d 个 orthogonal vectors in W 都是一组 basis.

WS16. Def③ orthogonal complement

对于任何 set $S\subseteq\mathbb{R}^n$, the orthogonal complement $\boxed{S^{\perp}}$ of S is: $\boxed{S^{\perp}=\{\vec{w}\in\mathbb{R}^n \mid \vec{w}\cdot\vec{v}=0 \text{ for all } \vec{v}\in S\}}$

$S^{\perp}$ 就是所有和 S 中每个 vector 都垂直的 vectors 的集合.

WS16. Fact①

如果 $\{\vec{w_1},\dots,\vec{w_r}\}$ spans W,
则 $\vec{v}\in W^{\perp}$ iff $\forall\vec{w_i}\in\{\vec{w_1},\dots,\vec{w_r}\},\ \vec{v}\perp\vec{w_i}$
in $W^{\perp}$ $\Longleftrightarrow$ $\perp$ 于每个 basis vector

WS16. Fact④

✫

$\ker(\text{proj}_W)=W^{\perp},\quad \text{im}(\text{proj}_W)=W$

WS16, Thm C

✫ $\forall\boxed{\text{subspace}}\ V\subseteq\mathbb{R}^n$, $\boxed{\dim V+\dim V^{\perp}=n}$

WS16. Fact⑤

$\boxed{V\cap V^{\perp}=\{\vec{0}\}}$ (因为 $\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0$)

$\Downarrow$

Thm 5.1.4

对于任意 $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\boxed{\text{subspace } V}\subseteq\mathbb{R}^n$

可分解 $\vec{x}=\boxed{\vec{x}^{\parallel}}+\boxed{\vec{x}^{\perp}}$

其中 $\boxed{\vec{x}^{\perp}\in V^{\perp},\ \vec{x}^{\parallel}\in V}$ ✫
这个 factorization 是 $\boxed{\text{unique}}$ 的,

Pf: for existence: 取 $\vec{x}^{\parallel}=\text{proj}_V(\vec{x})$
for uniqueness: 因为补充结论①

$\Longrightarrow \boxed{\vec{x}^{\parallel}=\text{proj}_V(\vec{x})}$!!!

Thm 5.1.6 对于 $\mathbb{R}^n$ 的一组 orthogonal basis $(\vec{u_1},\dots,\vec{u_n})$

$\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n,\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}(x\cdot\vec{u_i})\vec{u_i}$

即 $\boxed{\vec{x}=\vec{x}^{\parallel}}$ ($V=\mathbb{R}^n$ 则 $proj_V(\vec{x})$ is $\vec{x}$ itself)

WS 16. Fact ⑥

The standard matrix of $proj_W$

对于 subspace $W\subseteq\mathbb{R}^n$，取一组 orthonormal basis $(\vec{u_1},\dots,\vec{u_d})$ 令 $A=\begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{u_1} & \cdots & \vec{u_d} \\ | & & | \end{bmatrix}$ ☆

则 the standard matrix of $proj_W$ is AA^T

note: A^T 的 i^{th} col 为 $\begin{bmatrix}\vec{e_i}\cdot\vec{u_1}\\ \vdots \\ \vec{e_i}\cdot\vec{u_d}\end{bmatrix}$

$$A^T=\begin{bmatrix}\vec{e_1}\cdot\vec{u_1} & \cdots & \vec{e_n}\cdot\vec{u_1}\\ \vdots & & \vdots\\ \vec{e_1}\cdot\vec{u_d} & \cdots & \vec{e_n}\cdot\vec{u_d}\end{bmatrix}$$

WS 16. Fact ⑦

每个 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace 都具有 orthogonal basis.

5-1, Book complement

Thm 5.1.8 orthogonal complement 的 properties

对于 subspace $\boxed{V\subseteq\mathbb{R}^n}$

$\Rightarrow$ a. $V^{\perp}$ 也为 $\mathbb{R}^n$ 的一个 subspace

b. $V\cap V^{\perp}=\{\vec{0}\}$

c. $\dim(V)+\dim(V^{\perp})=n$

d. $(V^{\perp})^{\perp}=V$.

Thm 5.1.9 Pythagorean theorem

$\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, if $\boxed{\vec{x}\perp\vec{y}}\Rightarrow$

$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2}$

$\Downarrow$

Thm 5.1.10

$\|proj_V\vec{x}\|\le\|\vec{x}\|$

(equal iff $\vec{x}\in V$)

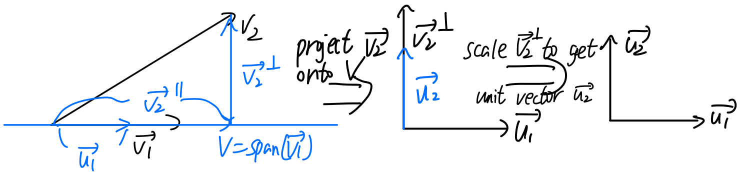
Thm 5.1.11 Cauchy-Schwarz inequality

$\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n,\ |\vec{x}\cdot\vec{y}|\le\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

(equal iff $\vec{x}\parallel\vec{y}$)

Def 5.1.12 Angle between two vectors

$$\theta=\arccos\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$$



(5.2 Gram-Schmidt Process and QR factorization.)

WS 17

把任意 basis of subspace $W\subseteq\mathbb{R}^n$ 转化为 orthonormal basis 的 algorithm

Thm 5.2.1 The Gram-Schmidt process

将 subspace $V\subseteq\mathbb{R}^n$ 的一组 basis $(\vec{v_1},\dots,\vec{v_m})$ 转化为一组 orthonormal basis 的方法：

对于 $j=2,\dots,m$，将 $\vec{v_j}$ 分解为相对于 $span(\vec{v_1},\dots,\vec{v_{j-1}})$ 的 $\vec{v_j}^{\parallel}$ 和 $\vec{v_j}^{\perp}$ $= proj_{V_{j-1}}(\vec{v_j})$

即 $\vec{v_j}=\vec{v_j}^{\parallel}+\vec{v_j}^{\perp}$

而后：$\vec{u_1}=\frac{1}{\|\vec{v_1}\|}\vec{v_1},\ \vec{u_2}=\frac{1}{\|\vec{v_2}^{\perp}\|}\vec{v_2}^{\perp},\dots,\vec{u_m}=\frac{1}{\|\vec{v_m}^{\perp}\|}\vec{v_m}^{\perp}$.

每步具体做法：① 求出 $\vec{v_j}^{\parallel}=proj_{V_{j-1}}(\vec{v_j})=(\vec{v_j}\cdot\vec{u_1})\vec{u_1}+\dots+(\vec{v_j}\cdot\vec{u_{j-1}})\vec{u_{j-1}}$ ☆

② $\vec{v_j}^{\perp}=\vec{v_j}-\vec{v_j}^{\parallel}$

③ scale $\vec{v_j}^{\perp}$ 为 unit vector $\vec{u_j}=\frac{\vec{v_j}^{\perp}}{\|\vec{v_j}^{\perp}\|}$

而后将 $\vec{u_j}$ 纳入 $(\vec{u_1},\vec{u_2},\dots,\vec{u_{j-1}})$ 中形成新 subspace $span(\vec{u_1},\dots,\vec{u_j})$

以求出 $\vec{u_{j+1}}$，继续求下去以至求出 $(\vec{u_1},\dots,\vec{u_d})$

WS 16. Thm ② QR Factorization Thm ☆

令 M 为 $n\times d$ 的满秩 matrix ($\boxed{rank M=d}$)

$\Rightarrow\exists$ unique way 分解 M 为 $\boxed{M=QR}$ ☆

其中 ① Q 为 $\boxed{n\times d}$ matrix，$\boxed{\text{其 cols 为 orthonormal 的}}$

② R 为 $\boxed{d\times d}$ 的 $\boxed{\text{upper triangular matrix}}$ ☆

with $\boxed{\text{positive entries on the diagonal}}$ ☆

Technique to find QR factorization:

① 将 M 的 cols 视为 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $\boxed{d\text{-dimensional}}$ 的 subspace 的 $\boxed{\text{basis } \mathcal{M}}$ ①

② 使用 Gram-Schmidt 来求出 $\mathcal{M}$ 对应的 orthonormal

② basis $\mathcal{Q}\Rightarrow\boxed{Q \text{ 为 } \mathcal{Q} \text{ 的 cols}}$

而 R 则 $=\boxed{S_{\mathcal{M}\to\mathcal{Q}}}$

By fact on WS 16, 我们知道

$$R = S_{M\to Q} = \begin{bmatrix} \vec{q_1}\cdot\vec{m_1} & \cdots & \vec{q_1}\cdot\vec{m_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{q_n}\cdot\vec{m_1} & \cdots & \vec{q_n}\cdot\vec{m_n} \end{bmatrix}$$

WS 16. Thm③ Matrix Factorization Thm

令 $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n})$, $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n})$ 为 d-dim subspace $W \subseteq \mathbb{R}^n$ 的一组 basis.

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{b_1} & \vec{b_2} & \cdots & \vec{b_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{a_1} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} S_{\mathcal{B}\to A}}$$

WS 18 (5.3 Orthogonal Transformations)

WS 18. Def① orthogonal transformations.

A linear transformation $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 被称为 orthogonal 的 if 它保留 dot products.

即 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{T(\vec{x})\cdot T(\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}}$

WS 18. Fact③

对于任意 matrix $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots & \vec{v_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \boxed{A^TA = \begin{bmatrix} \vec{v_1}\cdot\vec{v_1} & \vec{v_1}\cdot\vec{v_2} & \cdots & \vec{v_1}\cdot\vec{v_n} \\ \vec{v_2}\cdot\vec{v_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \vec{v_n}\cdot\vec{v_1} & \cdots & \cdots & \vec{v_n}\cdot\vec{v_n} \end{bmatrix}} \quad ☆$$

(Fact: $(AB)^T = B^TA^T$)

WS 18. Fact④

一个 square matrix 为 orthogonal 的 iff 它的 columns 是 orthonormal 的.

WS 18. Thm B

一个 linear transformation T 为 orthogonal 的 iff $[T]_{\mathcal{E}}$ 是 orthogonal 的

WS 18. Fact⓪

Orthogonal transformations 是 isomorphism.

WS 18. Fact①

任何 orthogonal transformation T 的 $[T]_{\mathcal{E}}$ 的 columns 都是 orthonormal 的.

WS 18. Fact②

orthogonal transformations 的 composition 也一定 orthogonal.

WS 18. Def② Orthogonal matrix.

一个 square matrix A 为 orthogonal 的 if $A^TA = I_n$, 即 $\boxed{A^T = A^{-1}}$

$\Leftrightarrow AA^T = I_n$, 虽然平时 $A^TA \neq AA^T$.

WS 18. Generalized Thm B

对于任意 orthonormal basis $\mathcal{B}$ 一个 linear transformation T 为 orthogonal 的 iff $[T]_{\mathcal{B}}$ 是 orthogonal 的.

WS 18 (5.3) 总结:

T is orthogonal (保留 dot product)

$\Longleftrightarrow$ T 保留 length $\Longleftrightarrow$ T 保留 distance

$\Longleftrightarrow$ T 把 $\mathbb{R}^n$ 的某个 orthonormal basis map 到另一个 orthonormal basis

$\Longleftrightarrow$ $[T]_{\mathcal{B}}$ 为 orthogonal 的, $\mathcal{B}$ 为任意 orthonormal basis ($[T]_{\mathcal{B}}^T = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$)

$\Longleftrightarrow$ $[T]_{\mathcal{B}}$ 的 rows 为一个 orthogonal basis of $\mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow$ $[T]_{\mathcal{B}}$ 的 cols 为一个 orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$

5-3, textbook complement.

Thm 5-3-6 $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{v}^T\vec{w}$$

点积 转化 矩阵积

Thm 5.3.9 transpose 的性质

a. $(A+B)^T = A^T + B^T$

b. $(kA)^T = kA^T$

c. $(AB)^T = B^T A^T$

d. $\boxed{\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A)}$ ☆

$\boxed{e.\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}$ ☆

WS19 (5-4 Least squares)

WS 19. Thm ①

对于任意 subspace $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 即垂直距离

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{\operatorname{proj}_V(\vec{x})\text{ 是 } V \text{ 中离 } \vec{x} \text{ 最近的 vector}}$

即: $\forall \vec{v} \in V$, $\|\vec{x} - \operatorname{proj}_V(\vec{x})\| \le \|\vec{x} - \vec{v}\|$

WS 19. Fact ① $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$A\vec{x} = \vec{b}$ 有解 iff $\boxed{\vec{b} \in \operatorname{im} A}$ span(cols of A)

WS 19. Fact ② $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{A\vec{x} = \operatorname{Proj}_{\operatorname{im}A}\vec{b}}$ 总是有解

这些解称为 $\boxed{\text{least square solutions}}$ to the system

Least Square sols 是真正的 sols iff $b \in \operatorname{im} A$

WS 19. Lemma $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $(n[\ ^m\ ])$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{(A\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (A^T\vec{y})}$

WS 19. Thm ② $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$\boxed{\ker(A^T) = (\operatorname{im} A)^\perp}$ ☆☆

$\Rightarrow (\ker A^T)^\perp = \operatorname{im} A$, $(\ker A)^\perp = \operatorname{im}(A^T)$

WS 19. Fact ③ $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$

WS 19. Thm③ (The normal Equation)

$\boxed{A\vec{x} = \operatorname{Proj}_{\operatorname{im}A}(\vec{b})}$ 的 solutions (least square solutions)

就是 $\boxed{A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}}$ 的 solutions.

称为 the normal equation of $A\vec{x} = \vec{b}$

5-4. textbook complements

Thm 5.4.2 $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

(a) $\ker(A) = \ker(A^T A)$

(b) $\ker A = \{\vec{0}\} \Rightarrow A^T A$ is invertible.

Thm 5.4.6 if $\ker A = \{\vec{0}\}$

then $A\vec{x} = \vec{b}$ has unique least square solution $\boxed{\vec{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}}$ ☆

Thm 5.4.7 The matrix of an orthogonal projection

令 $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ 为 subspace $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 的一组 basis,

$$\text{令 } \boxed{A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}$$

则 the standard matrix of proj_V 为

$\boxed{A(A^T A)^{-1} A^T}$

WS 20 (5-5 Inner Product Spaces)

WS 20. Def ① Inner product

vector space V 上的一个 inner product 为一个 function 其 assign a real number $\langle v,w\rangle \in \mathbb{R}$ to 每个 pair of vectors $v,w\in V$

$$V\times V \xrightarrow{\text{inner product}} \mathbb{R}$$
$$(u,w) \longmapsto \langle u,w\rangle$$

其需要满足以下性质：

① symmetric: $\forall u,w\in V$: $\langle u,w\rangle=\langle w,u\rangle$

② linear in the first argument: $\forall a,b\in\mathbb{R}$ 及 $u,v,w\in V$
$\langle au+bv,w\rangle = a\langle u,w\rangle+b\langle v,w\rangle$

③ linear in the second argument: $\forall a,b\in\mathbb{R}$ 及 $u,v,w\in V$
$\langle u, av+bw\rangle = a\langle u,v\rangle + b\langle u,w\rangle$

④ positive define: $\forall v\in V$, $\langle v,v\rangle>0$

WS 20. Def ② inner product space

一个 inner product space 就是一个 vector space V together with 一个 choice of inner product function defined on V

WS 20. Fact ①

Let $(V,\langle -,-\rangle)$ be an inner product space, then $\forall v_1,v_2,w_1,w_2\in V$,
$$\langle v_1+w_1, v_2+w_2\rangle = \langle v_1,v_2\rangle+\langle v_1,w_2\rangle+\langle w_1,w_2\rangle+\langle w_1,v_2\rangle$$

WS 20. Def ③

对于一个 inner product space V,
$f\in V$ 的 norm (magnitude) 为 $\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$
$f,g\in V$ are orthogonal if $\langle f,g\rangle=0$

WS 20. Def ④

inner product space $(V,\langle-,-\rangle)$ 上的一组 vectors $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subseteq V$ 是 orthonormal 的
if $\langle v_i,v_j\rangle = \begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$

WS 20. Fact ②

对于 inner product space V,
取任意 orthonormal basis $U=(u_1,u_2,\dots,u_n)$
$\forall x,y\in V$, $\langle x,y\rangle=[x]_U\cdot[y]_U$ 无关 U 和 $\langle -,-\rangle$ 的选取!!

WS 20. Def ⑤ Orthogonal projection

令 $W\subseteq V$ 为一个 subspace. 令 $(g_1,\dots,g_m)$ 为 W 的一组 orthonormal basis.
$\mathrm{proj}_W: V\longrightarrow V$ defined by sending
$$f\longmapsto \langle f,g_1\rangle g_1+\langle f,g_2\rangle g_2+\dots+\langle f,g_m\rangle g_m$$

WS 20. Fact ③

任意 finite dimensional inner product space 都有 orthonormal basis.

✿ 因为 Gram-Schmidt 在任意 inner product space 上成立: $\forall i=1,\dots,m$ $\langle f-\mathrm{proj}_W f, g_i\rangle=0$

WS 20. Fact ④

令 $\langle -,-\rangle$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的任意 inner product.
则 $\exists$ $n\times n$ matrix A 使 $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$
$\langle x,y\rangle = x^TAy$
且 A 为 symmetric 的.

5-5. textbook complement:

Thm 5.5.4

令 T_n 为由 all trigonometric polynomials of order $\le n$.
定义 $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$
则 $\frac{1}{\sqrt2}$, $\sin(t)$, $\cos(t)$, $\sin(2t)$, $\cos(2t)$, $\dots$, $\sin(nt)$, $\cos(nt)$ 为 T_n 的一组 orthonormal basis.

Thm 5.5.5 Fourier coefficients

令 $f(t)$ 为一个在 $[-\pi,\pi]$ 上的 piecewise continuous function.

则 $f(t)$ 的 best approximation in T_n is

$$f_n(t)=\mathrm{proj}_{T_n} f(t)$$
$$=\langle f(t),\tfrac{1}{\sqrt2}\rangle\tfrac{1}{\sqrt2}+\langle f(t),\sin t\rangle\sin t+\langle f(t),\cos t\rangle\cos t+\dots+\langle f(t),\sin(nt)\rangle\sin(nt)+\langle f(t),\cos(nt)\rangle\cos(nt)$$

这些 coeffs 被称为 f 的 Fourier coefficients.
$f_n(t)$ 被称为 f 的 n^{th}-order Fourier approximation.

Thm 5.5.6

The infinite series (sum) of the squares of the Fourier coefficients of a piecewise continuous function f converges to $\|f\|^2$.

$$\left(a_0^2 + b_1^2 + c_1^2 + b_2^2 + c_2^2 + \cdots \to \|f\|^2 \right)$$