4个 Thms

① **Thm A**，令 V 为一个 finite dim vector space，
$\mathcal{B}$ 为 V 的一个 eigenbasis for $T: V \to V$
iff $[T]_{\mathcal{B}}$ 为 diagonal 的。

易证，$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(\vec{b_1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\vec{b_n})]_{\mathcal{B}} \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda_1 \vec{b_1} & \cdots & \lambda_n \vec{b_n} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

② **Thm B**，$T: V \to V$ 为 diagonalizable
iff $\exists \mathcal{B}$，$[T]_{\mathcal{B}}$ 是 similar to some diagonal matrix D 的
也 similar to 任何 $[T]_{\mathcal{U}}$

$$D = S_{D\to\mathcal{B}}^{-1} [T]_{\mathcal{B}} S_{D\to\mathcal{B}}$$

(Def)
T diagble 即：某个 D-matrix of T 是 diagonal 的

因而易证.（所有 $[T]_{\mathcal{U}}$ 都相似于 $[T]_D$）

③ **Thm C** (follows from Thm B)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为 diagble 的 iff $A \sim D$ for some diagnol D.

④ **Thm D**：

$$E_\lambda = \ker(T - \lambda I_n)$$

$$\Rightarrow \dim(E_\lambda) = \dim(\ker(T - \lambda I_n)) = n - \text{rank}(T - \lambda I_n)$$

(显然.)

Pf. $(T - \lambda I)(v) = \vec{0} \Leftrightarrow T(\vec{v}) = \lambda I(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} \in E_\lambda$

几何意义上如此理解：
对于 $\vec{v} \in E_\lambda$，T 对于 $\vec{v}$ 的作用只有拉伸 λ 倍
因而 $T - \lambda Id$ 这个 linear trans 的作用是：T + 消去 λ 倍的拉伸
因而 $\ker(T - \lambda Id_V) = \{$在 T 下被拉伸 λ 倍的 vectors$\} = E_\lambda$

即 $\{$没有被 $T - \lambda Id_V$ 改变的 vectors$\}$
$= \{$只被 T 拉伸了 λ 倍的 vectors$\}$

* (**Thm 7.1.3**)
为什么 如果 $D = (\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$ 是个 eigenbasis of V for T

$$\Leftrightarrow [T]_D = S_{D\to\mathcal{E}}^{-1} [T]_{\mathcal{E}} S_{D\to\mathcal{E}}, \quad S_{D\to\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \end{bmatrix}$$
$$\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right)$$

Pf: note that $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ $\quad (A = [T]_{\mathcal{E}})$

$$\Rightarrow S_{D\to\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_{\mathcal{E}} S_{D\to\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T]_{\mathcal{E}} \vec{v_1} & \cdots & [T]_{\mathcal{E}} \vec{v_n} \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ A\vec{v_1} & \cdots & A\vec{v_n} \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda_1 \vec{v_1} & \cdots & \lambda_n \vec{v_n} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_{D\to\mathcal{E}}^{-1} [T]_{\mathcal{E}} S_{D\to\mathcal{E}} = S_{\mathcal{E}\to D} [T]_{\mathcal{E}} S_{D\to\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ S_{\mathcal{E}\to D}(\lambda_1 \vec{v_1}) & \cdots & S_{\mathcal{E}\to D}(\lambda_n \vec{v_n}) \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = [T]_D.$$