WS 22

WS22. Def① eigenvector and eigenvalue

对于一个 linear trans $T: V \to V$ —定在同一个 vector space 上.
一个 eigenvector 是一个 non-zero vector v
使存在某个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $T(v) = \lambda v$
(即 T 对 v 的作用只有拉伸)
这个 λ 被称为 T 的一个 $\boxed{\text{eigenvalue}}$ (拉伸的倍数)
而 v 被称为 T 的一个 $\boxed{\lambda\text{-eigenvector}}$

note: $\vec{0}$ 不能是 eigenvector, 但 0 可以是一个 eigenvalue
显然 $\{0\text{-eigenvectors}\}$ 就是 $\ker T \setminus \{\vec{0}\}$
(因而 0 是 T 的一个 eigenvalue iff T 不 injective
$\Updownarrow$
$\ker T \neq \{\vec{0}\}$

WS22 Fact 1–3 对于 $T: V \to V$

(1) $\ker T$ 中的任意 vector 都是 T 的 eigenvector
(2) T injective iff 0 不是一个 eigenvalue of T.
因为 same dim, 所以也代表 isomorphism
因而 T bijective ($[T]$ 是 full rank) iff 0 不是 eigenvalue
(3) 如果 v 是一个 λ-eigenvector of T, 那么 $\forall k \in \mathbb{R}$, kv 也是 λ-eigenvector
(4) v 是 T 的 eigenvector $\Rightarrow$ $\boxed{v \text{ 是 } T^n}$ 的 eigenvector (整条线)

WS22. Def②

Fix 一个 $T: V \to V$ 的 eigenvalue λ
$E_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} \subseteq V$
被定义为 $\boxed{\text{the } \lambda\text{-eigenspace of } T}$

note: $E_\lambda = \{V \text{ 中所有 } \lambda\text{-eigenvectors}\} \cup \{\vec{0}\}$

WS22. Fact 4 如果 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonal transformation, 则 the only possible eigenvalues are ± 1

$$\|T(\vec{v})\| = \|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$$
$$\& \quad \|T(\vec{v})\| = \vec{v} \implies |\lambda| = 1$$
($\mathbb{R}^n$ 上立即 imply $\lambda = \pm 1$, $\mathbb{C}^n$ 上不然).

WS22. Fact 5

λ 为 T 的一个 eigenvalue $\Leftrightarrow$ λ^{-1} 为 T^{-1} 的一个 eigenvalue

WS22-Fact 6 对于 $T: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sending $A \mapsto A^T$

the only eigenvalues are
- 1, 且 $E_1 = \{\text{all symmetric matrices}\}$
- -1, 且 $E_1 = \{\text{all skew-symmetric matrices}\}$

WS 23

WS23. Def① eigenbasis

对于一个 linear transformation $T: V \to V$.
V 的一个 basis $\mathfrak{B}$ 称为 $\boxed{\text{an eigenbasis for } T}$, if
$\mathfrak{B}$ 的每个 element v_i 都是 T 的 eigenvector

WS23. Thm A 对于 finite dim vector space V 上的 linear transformation $T: V \to V$

V 的一个 basis $\mathfrak{B}$ 为一个 eigenbasis iff $[T]_\mathfrak{B}$ 为一个 diagonal matrix.
i.e. $\mathfrak{B}$-matrix 是 diagonal 的
并且在 diagonal $\mathfrak{B}$-matrix $[T]_\mathfrak{B}$ 中, diagonal 上的元素就是 T 的所有 eigenvalues.

Note. 显然, 如果 $\mathfrak{B}$ 是 eigenbasis: $T(\vec{b_i}) = \lambda_i \vec{b_i}$

$$\Rightarrow [T]_\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(\vec{b_1})]_\mathfrak{B} & \cdots & [T(\vec{b_n})]_\mathfrak{B} \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(note: T 的所有 eigenvalue 都会出现在 diagonal 上, 但是 diagonal 上的 eigenvalue 是可以重复的, 即在 T 的两个 basis vector 可以有同一个 eigenvalue).

WS23. Def② diagonalizable linear transformation

一个 linear trans $T: V \to V$ 称为 $\boxed{\text{diagonalizable}}$ 的,
if $\exists$ $\boxed{\text{eigenbasis basis of } V \text{ for } T}$
即存在某个 V 的 basis $\mathfrak{B}$ 使 $[T]_\mathfrak{B}$ 是 diagonal matrix.

WS23. Thm B

一个 linears trans $T: V \to V$ 为 diagonalizable 的
iff T 的某个 $\mathfrak{B}$-matrix 是 similar to 一个 diagonal matrix 的

实际上是所有

这是显而易见的.
diagonalizable 的定义是存在 diagonal $\mathfrak{B}$-matrix (存在一组 eigenbasis)
而 T 的任何 ....-matrix 都是 similar 的
因而只要找到任何一个 ....-matrix 为 diagonal 的,

WS23. Def③ diagonalizable matrix

一个 $n\times n$ matrix A 为 diagonalizable 的 matrix
if $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sending $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$
为一个 diagonalizable linear trans

WS23. Thm C

A is diagonalizable iff A similar to 某个 diagonal matrix ($A = S^{-1}DS$)

diagonal matrix 的概念是自然 follows from diagonal linear trans 的

WS23. Def④ 令 λ 为 $T: V \to V$ 的一个 eigenvalue

$\boxed{\dim(E_\lambda)}$ 称为 The geometric multiplicity of λ of T

只受到拉伸效果的子空间维数. 写作：$\mathrm{gemu}(\lambda)$

WS23. Thm D 对于 $T: V \to V$

取任意一个 eigenvalue λ of T

$\Rightarrow$ (i) $\boxed{E_\lambda = \ker(T - \lambda I_V)}$

(ii) $\mathrm{gemu}(\lambda) = \mathrm{null}(T - \lambda I_V)$

即 $\dim(E_\lambda)$ 　　即 $\dim(\ker(T - \lambda Id_V))$

Pf. $(T - \lambda I)(v) = \vec{0} \iff T(\vec{v}) = \lambda I(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff \vec{v} \in E_\lambda$

几何意义上如此理解:

对于 $\vec{v} \in E_\lambda$，T对于 $\vec{v}$ 的作用只有拉伸λ倍

因而 $T - \lambda Id_V$ 这个 linear trans 的作用是: T+消去λ倍的拉伸

因而 $\ker(T - \lambda Id_V) = \{$在T下被拉伸λ倍的vectors$\} = E_\lambda$

即 {没有被 $T - \lambda Id_V$ 改变的 vectors}

= {只被T拉伸了λ倍的 vectors}

WS24

WS24. Def① Characteristic polynomial

对于 linear trans $T: V \to V$,

$\chi_T(x) = \det(T - xI_V)$

被称为 T 的 characteristic polynomial.

WS24 Thm A

charactistic polynomial of $T: V \to V$

的 degree 为 $\dim V$

WS24 Thm B

T 的所有 eigenvalues values

就是 $\chi_T(x)$ 的所有 roots.

因为 $\boxed{\lambda\text{为T的eigenvalue}} \iff E_\lambda \neq \{\vec{0}\} \iff \ker(T - \lambda I_V) \neq \{\vec{0}\}$

$\iff \mathrm{nullity}(T - \lambda I_V) > 0 \iff \mathrm{rank}(T - \lambda I_V) < n \iff T - \lambda I_V$ 不可逆

$\iff \det(T - \lambda I_V) = 0 \iff \boxed{\lambda\text{为 }\det(T - xI_V) = 0\text{ 的 root}}$.

WS24. Corollary of Thm B

$T: V \to V$ 至多有 $\dim V$ 个 distinct eigenvalues.

WS24. Def② multiplicity of the root λ

令 $f(x)$ 为一个 polynomial. λ 为其一个 root.

则称 满足 $f(x) = (x - \lambda)^m g(x)$ for some $g(x)$

(把 $f(x)$ 分解为 $(x-\lambda)^m \cdot g(x)$)

的最大的 $m \in \mathbb{N}$ 称为 $\boxed{f(x)\text{ 的 root }\lambda\text{ 的 multiplicity}}$

WS24. Def③ $\boxed{\text{Algebraic multiplicity}}$ of eigenvalue λ of T

By Thm B, $\chi_T(x)$ 的任意 root λ 是 T 的一个 eigenvalue.

T 的 eigenvalue λ 的 algebraic multiplicity 就是

λ作为 $\chi_T(x)$ 的 root 的 multiplicity.

(即把 $\chi_T(x)$ 分解为 $(x-\lambda)^m g(x)$ for some $g(x)$ 的最大 m)

写作：$\mathrm{almu}(\lambda)$

WS24 Thm C 对于任意 $T: V \to V$，其中 V finite dim

的任意 eigenvalue λ

$\mathrm{gemu}(\lambda) \leq \mathrm{almu}(\lambda)$

$\dim(E_\lambda) = \dim(T - \lambda I_V)$ 　　$\det(T - xI_V) = (x - \lambda)^m g(x)$ 的最大 m.

WS24. Thm D

不同 eigenvalues 的 eigenvectors 是 linearly independent 的.

如果 $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ where $\vec{v}_i \in E_{\lambda_i}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$

(Note: 如 λ_1, λ_2, $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ 为一个 linearly independent subset of V

$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$) 　(if $\dim V = n$, 那么 $\mathcal{B}$ 为一个 eigenbasis.)

Note：但是 converse 不是对的. linearly independent 的

eigenvectors 可以有同一个 eigenvalue. 因为

$\dim(E_\lambda)$ 可以 > 1.

尤其考虑 $T(\vec{v}) = \vec{v}$: $V = E_1$ 所有 $\vec{v} \in V$ 都是 1-eigenvector.

WS 25

WS25. Thm

T is diagonalizable iff $\boxed{\sum_i E_{\lambda_i} = \dim V}$

(i.e. V 有一个 eigenbasis for T)

WS 25. Corollary

T is diagble iff $\forall$ eigenvalue λ_i, $\mathrm{almu}(\lambda_i) = \mathrm{gemu}(\lambda_i)$

(仅针对于 real diagble)

7.1-7.3 Book complement

Summary 7.1.5 对 $n\times n$ matrix A, 以下 equivalent.

① A invertible

② $\forall \vec{b}\in\mathbb{R}^n$, $A\vec{x}=\vec{b}$ 有 unique sol.

③ $\mathrm{rref}(A)=I_n$

④ $\mathrm{rank}(A)=n$

⑤ $\mathrm{im}(A)=\mathbb{R}^n$ (T surjective)

$\Updownarrow$ same dim

⑥ $\ker(A)=\{\vec{0}\}$ (T injective)

⑦ A 的 cols form a basis of $\mathbb{R}^n$ (i.e. spans $\mathbb{R}^n$)

⑧ A 的 cols linearly ind.

⑨ 0 不是 A 的 eigenvalue

note: 任何 eigenvector of A 要么 $\in\ker(A)$ 要么 $\in\mathrm{im}(A)$

note: 因而如果 0 为 A 的 eigenvalue, 那么 A 一定不可逆.

Thm 7.2.2 (if diagble) triangular matrix 的 eigenvalues 是其 diagonal entries.

补充: 如果 triangular matrix 的 diag 上元素各不相同, 则一定 diagble.

Thm 7.2.4 2×2 matrix 的 characteristic polynomial

$$\lambda^2-(\mathrm{tr}A)\lambda+\det A$$

Thm 7.2.5 $n\times n$ matrix 的 characteristic polynomial

$$(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(\mathrm{tr}A)\lambda^{n-1}+\underbrace{\cdots}_{\text{没有 expression, } \deg\le n-2}+\det A$$

Thm 7.2.7 如果 n 为 odd 的, 那么 $n\times n$ matrix A 至少有一个 real eigenvalue

Thm 7.2.8 如果 $n\times n$ matrix A 有 n 个 eigenvalue:

则 $\boxed{\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}$

且 $\boxed{\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$

Thm 7.3.5 Similar matrices 的性质

如果 $A\sim B\Rightarrow$ 则它们有相同的

(a) eigenvalues (但它们的 eigenvectors 可以不同)

(b) characteristic polynomial

(c) determinant

(d) trace

(e) rank & nullity (但是它们的 rref 可以不同)

WS 25. Fact in P8

如果两个 $n\times n$ matrix diagble, 且有相同的 characteristic polynomials, 则它们 similar.

$\Downarrow$ eigenvalues 相同.

WS 25. Fact in P9

① diagblity 与 invertibility ② 无关.

(可以 ①$\wedge\neg$②, $\neg$①$\wedge$②, ①$\wedge$②, $\neg$①$\wedge\neg$②)

Thm 7.3.7 Diagnolization 的 strategy.

Step ①. $f_A(x)=\det(A-xI_n)=0$

求 roots $\Rightarrow\lambda_1,\dots,\lambda_k$

(注: 此时我们也知道了 $\mathrm{almu}(\lambda_i)$)

Step ② 对每个 λ_i, 求 E_{λ_i} 的一个 basis.

注意: $E_{\lambda_i}=\ker(A-\lambda_i I_n)$

因而我们直接求 $\mathrm{rref}(A-\lambda_i I_n)\Rightarrow\boxed{n-\text{其rank}}$ 为 $\dim(E_{\lambda_i})$ ($\mathrm{gemu}(\lambda_i)$)

然后对比 $\mathrm{almu}(\lambda_i)$ 和 $\mathrm{gemu}(\lambda_i)$

得到是否 diagble.

Step ③ 对所有 E_{λ_i}, 求出一个 basis.

※ 快速方法: 对每个自由元 x_i, 将其设为1, 其他自由元设为0, 解出来的 vector 就是一个 basis vector.

所有自由元用这种方法解出来的 vectors 就是一个 basis.

例:
$$\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&4&5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\rightarrow x_3, x_4$ 为 free variables.

① 令 $x_3=1, x_4=0\Rightarrow\vec{v_1}=\begin{bmatrix}-2\\-4\\1\\0\end{bmatrix}$

② 令 $x_3=0, x_4=1\Rightarrow\vec{v_2}=\begin{bmatrix}-3\\-5\\0\\1\end{bmatrix}$

$(\vec{v_1},\vec{v_2})$ 为 $\ker A$ 的一个 basis.

Step 4. $\mathfrak{B}=\sqcup\,\mathfrak{B}_{E_i}$ 为一个 eigenbasis of A.

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}v_1&&\\&\ddots&\\&&v_n\end{bmatrix}$$

$$D=S^{-1}AS$$

WS 26, Book 7.5

Quick look at properties of complex numbers.

① $\forall z \in \mathbb{C}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ for some $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

② $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$

③ De Moivre's Formula.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

WS26. informal def①

一个 complex vector space V 是一个 closed under addition and complex scalar multiplication 的 set.

(即：和普通的 vector space 唯一的区别是 scalar 的取值从 $\mathbb{R}$ 扩展到 $\mathbb{C}$.)

注：$\mathbb{C}^n$ 的 standard basis 仍为 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$，与 $\mathbb{R}^n$ 相同 (因为 scalar 可以取自 $\mathbb{C}$).

WS26. Def②

$T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ 为一个 complex linear transformation

if (i) $\forall z, w \in \mathbb{C}^n$, $T(z+w) = T(z) + T(w)$

(ii) $\forall z \in \mathbb{C}^n$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$, $T(\lambda \vec{z}) = \lambda T(\vec{z})$

(推广)

WS26. Fact①.

if $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ 为一个 complex linear trans.

$\Rightarrow \exists!\, A \in \mathbb{C}^{p \times n}$ s.t. $\forall z \in \mathbb{C}^n$, $T(\vec{z}) = A\vec{z}$

(推广).

WS26. Def③

note: $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$ ☆

一个 complex eigenvector of $\boxed{T_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n}$ is a non-zero $z \in \mathbb{C}^n$ s.t. $A\vec{z} = \lambda\vec{z}$ for some $\lambda \in \mathbb{C}$

那么 λ 则是 T_A 的一个 $\boxed{\text{complex eigenvalue}}$.

(note: 因为 λ 如果为 $f(\lambda)$ 的 root, $\bar{\lambda}$ 也一定为 root)

WS26. Thm

$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow$ (1) 如果 λ 为 A 的一个 complex eigenvalue 则 $\bar{\lambda}$ 也为 A 的 complex eigenvalue

(2) ~~且~~如果 $\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ 为 A 的一个 eigenvector

则 $\bar{\vec{z}} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ 也为 A 的一个 eigenvector

WS 26. Fact on complex number.

(1) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(2) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

(3) $\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n$ and $c \in \mathbb{C}$, $\overline{c\vec{z}} = \bar{c}\,\bar{\vec{z}}$

(4) $\forall c \in \mathbb{C}$ and $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A}$

(5) $\bar{\vec{z}} = \vec{z}$ iff $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $A = \bar{A}$ iff $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Thm 7.5.2 Fundamental Thm of Algebra

if $p(\lambda) \in \mathbb{C}[x]$ (note: $\mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$)

则 $p(\lambda) = k(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$

for some $k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (可重复)

complex polynomial 一定有复根.

note that: characteristic polynomial 以其 thms 是可推广至 complex vector space 的.

因而任何 complex linear transformation 至少有一个 complex eigenvalue. ☆

Thm 7.5.5

if $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 且 A 有 n 个 complex eigenvalues.

$\Rightarrow \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

WS 27.

WS27. Def

(此处仅针对 over $\mathbb{R}$ 而不涉及 $\mathbb{C}$)

square matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 被称为 orthogononally diagonalizable if $\exists$ $\boxed{\text{orthonormal eigenbasis}}$ $\mathcal{B}$ of $\mathbb{R}^n$ for T_A.

i.e. $\exists$ orthogonal matrix S s.t. $S^{-1}AS$ is diagonal

$(S^{-1} = S^T)$ $S^T A S$

WS 27. Spectral Thm

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 orthogonally diagble (over $\mathbb{R}^n$) 的 iff A is symmetric (i.e. $A^T = A$)

Spectral Thm 告诉我们: ① Symmetric $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\boxed{\text{只有 real eigenvalues}}$

② 且 $\forall E_{\lambda_i}, E_{\lambda_j}$, $\boxed{E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}}$

③ 一定 similar to 一个 diagonal matrix.

(note: $\forall Q$, QQ^T 和 Q^TQ 一定 symmetric)