① Thm B. T的 eigenvalues 就是其 characteristic polynomial. 的 roots.

简明 proof:

因为 $\boxed{\lambda\text{为}T\text{的 eigenvalue}} \iff E_\lambda \neq \{\vec{0}\} \iff \ker(T-\lambda I_V) \neq \{\vec{0}\}$

$\iff \text{nullity}(T-\lambda I_V) > 0 \iff \text{rank}(T-\lambda I_V) < n \iff T-\lambda I_V$ 不可逆

$\iff \det(T-\lambda I_V) = 0 \iff \boxed{\lambda\text{为} \det(T-\lambda I_V)=0 \text{ 的 root}}$.

② Thm D $\forall \vec{x} \in E_{\lambda_i} \setminus \{\vec{0}\}$ 及 $\vec{y} \in E_{\lambda_j} \setminus \{\vec{0}\}$, (i.e. $\vec{x}, \vec{y}$ 为两个不同 eigenvalue 的 eigenvectors)

$\Rightarrow \vec{x}, \vec{y}$ linearly ind.

$\Rightarrow$ 所有 E_{λ_i} 的 basis 的 union $\mathcal{B}$ 构成一个 lin ind. set

$\Rightarrow$ if $\sum_i \text{almu}(\lambda_i) = \dim V \Rightarrow$ 则 $\mathcal{B}$ 为一个 eigenbasis of V for T

易证.

(有限维下)

③ Thm C $\forall$ eigenvalue λ, $\text{gemu}(\lambda) \leq \text{almu}(\lambda)$.

Pf. 令 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ 为 A 的一个 eigenvalue, $\text{gemu}(\lambda) = m$

令 $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ 为 E_λ 的一个 basis

令 $S = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_m \end{bmatrix} \Rightarrow S\vec{e}_i = \vec{v}_i$

$\Rightarrow \vec{e}_i = S^{-1}\vec{v}_i$

Consider $B = S^{-1}AS$

$\Rightarrow 1 \leq i \leq m$ 时, $B\vec{e}_i = B(S^{-1}\vec{v}_i)$

$= S^{-1}ASS^{-1}\vec{v}_i$

$= S^{-1}(A\vec{v}_i) = S^{-1}\lambda\vec{v}_i$

$= \lambda(S^{-1}\vec{v}_i) = \lambda\vec{e}_i$.

$$\Rightarrow B = \begin{array}{c} \\ m \\ \\ n-m \end{array} \overset{\quad\;\; |\leftarrow m \rightarrow|\leftarrow n-m \rightarrow|}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right]} = \begin{bmatrix} \lambda I_n & P \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

$\because B \sim A$

$\Rightarrow f_A(x) = f_B(x) = \det(B - xI_n) = (\lambda - x)^n f_Q(x)$

$\Rightarrow \text{almu}(\lambda) \geq m$.

④ Thm A: $\forall T: V \to V$, $\chi_T(x)$ 的 degree 为 $\dim V$.

$\Rightarrow$ corollary of Thm A, B: T 最多有 n 个不同 eigenvalues.

且 $\sum_i \text{almu}(\lambda_i) \leq \dim V$.

Pf: 见 P9.