21-Ch6-Def-Thms

Def/Thm determinant

determinant 仅被定义在 square matrix上

且是 recursively defined 的:

$\forall$ $n\times n$ matrix A, 并$\forall A$的一行 i

Def(1)

$$\det A = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} (\det A_{ij}), & n \neq 1 \\ a_{11}, & n = 1 \end{cases}$$

称为: Laplace expansion along row i

其中 A_{ij} 表示 matrix A在去除第i行和第j列之后得到的 submatrix 子阵.

Def(2) The Laplace extension along a column

我们也可以沿任意一列 j 进行展开来获得 det.

$$\det A = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} (\det A_{ij}) \\ a_{11}, & n = 1 \end{cases}$$

→ 称为: Laplace expansion along column j

Def/Thm (3)

对于任意 square matrix A 沿任意 row 或 col 进行的 Laplace expansion 的结果都相同, 称为 square matrix A 的 determinant.

WS 21A. Fact ① (P3)

upper triangular / lower triangular matrix 的 det 等于 $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ → 所有 diagonal elements 的 product

WS 21A. Thm 1

$\forall$ $n\times n$ matrix A与B,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Pf: 使用 Thm 4 和 Fact-P7

WS 21A. Corollary 1a

A invertible $\Rightarrow \det A \neq 0$

且 $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$ ☆

WS 21A. Corollary 1b

Similar matrices 的 det 相同

$$\det(A) = \det(S^{-1})\det(B)\det(S)$$

抵消

Def ② of WS21A

Determinant of linear transformation $T: V \to V$. (finite dim)

任选 V 的一组 basis $\mathcal{B}$, (与选择无关, 因为 by Coro 1b, $\det[T]_{\mathcal{A}} = \det S_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}} \det[T]_{\mathcal{B}} \det S_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \det[T]_{\mathcal{B}}$)

$\det([T]_{\mathcal{B}})$ 就是 determinant of T.

WS 21A. Thm 2

$\forall A$, $\det A = \det A^T$

$\Downarrow$

WS 21A. Corollary of Thm 2

$\forall$ orthogonal matrix A, $\det A = \pm 1$

(也代表: orthogonal transformation 的 det 为 ± 1)

WS 21A. Thm 3

$$A \text{ invertible} \overset{\text{iff}}{\iff} \det(A) \neq 0$$

WS 21A Fact on P7 ①

推论: $\det(cA) = c^n \det(A)$

$\Uparrow$

$$\det\begin{bmatrix} | & | & & | \\ c\vec{a_1} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} = c\det\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{a_1} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

列同理:

$$\det\begin{bmatrix} - & c\vec{a_1} & - \\ - & \vec{a_2} & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a_n} & - \end{bmatrix} = c\det\begin{bmatrix} - & \vec{a_1} & - \\ - & \vec{a_2} & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a_n} & - \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}+\vec{b} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{a} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{b} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

列同理:

$$\det\begin{bmatrix} - & \vec{a}+\vec{b} & - \\ - & \vec{a_2} & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a_n} & - \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} - & \vec{a} & - \\ - & \vec{a_2} & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a_n} & - \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} - & \vec{b} & - \\ - & \vec{a_2} & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a_n} & - \end{bmatrix}$$

WS21A. Thm 4 Alternating Properties of det

交换 square A 的任意两 row 或任意两 col ②

$\Longrightarrow \det A' = -\det A$ $E_{i\leftrightarrow j}$

WS21A. Corollary of Thm 4 ③

如果 A 中有两行/两列是倍数关系（即 linearly dependent），

那么 $\det A = 0$

Def. Elementary matrix

一个 square matrix 被称为 elementary matrix，

if 它是由 I_n 进行一次 single elementary row operation 得到的，即：代表一次初等变换

分为3种：① $E_{i\leftrightarrow j}$ 表示交换 i, j 行

② $E_{ij(a)}$ 表示把 i 行的 a 倍加到 j 行

③ $E_{i(a)}$ 表示把 i 行自乘 a 倍.

WS21B. Thm 1 $\forall$ elementary matrix $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times d}$

EA 得到的结果是对 A 进行 E 代表的 elementary operation.

（显然）

---

elementary transformation 如何改变 determinant： ④

① $E_{i\leftrightarrow j}$：$\det A' = -\det A$ （by ②）

② $E_{ii(a)}$：$\det A' = a\det A$ （by ①）

③ $E_{ij(a)}$：$\det A' = \det A$ （by ③）

$$\underbrace{\det\begin{bmatrix} a_1 + ka_i & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{bmatrix}}_{\det A'} = \det\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \underbrace{\det\begin{bmatrix} ka_i & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{bmatrix}}_{=0}$$

$\det A' = \det A$

WS21B. Fact in P3

(1) 任何 elementary matrix 都 invertible.

且 inverse 也是 elementary matrix.（代表反过来 operate）

(2) 任何 invertible matrix 都是 product of elementary matrices.

（意思也代表：任何可逆的 linear transformation 都是对坐标进行一系列的 elementary operations）

Pf：$\forall$ invertible matrix A，A 是一堆 elemetary matrix $E_1, \ldots, E_k$ 的 product.

（因为 $\mathrm{ref}A = I_n \Rightarrow \exists E_1, \ldots, E_k$ s.t. $E_k \ldots E_1 A = I_n$

$\Longrightarrow A = E_1^{-1} \ldots E_k^{-1} I_n$ ）

现在：Pf of WS21A. Thm 1

$\det(BA) = \det(E_k \ldots E_1 A)$

Claim：$\boxed{\det(E_i A) = \det(E_i)\cdot\det(A)}$ by WS21B, Thm 1

（无论 E 是 $E_{i\leftrightarrow j}$，$E_{ij(a)}$ 还是 $E_{i(a)}$，都易验证）

于是 $\det(BA) = \det(E_k)\cdot\det(E_{k-1}\ldots E_1 A)$

$= \cdots$

$= \det(E_k)\cdot\det(E_{k-1})\cdot\ldots\cdot\det(E_1)\cdot\det(A)$

$= \left(\det(E_k)\cdot\det(E_{k-1})\cdot\ldots\cdot\det(E_1)\right)\cdot\det(A)$

$= \left(\det(E_k)\cdot\det(E_{k-1})\cdot\ldots\cdot\left(\det(E_2 E_1)\right)\right)\det(A)$

$= \cdots$

$= \det(E_k\cdot E_{k-1}\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1)\cdot\det A$

$= \det B\cdot\det A$

WS21A. Thm 5

$(\forall \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n)$ （$n-1$ 个随机 vector）

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

sending $\vec{x} \longmapsto \det\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{v}_{n-1} \end{bmatrix}$

是一个 linear transformation

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

sending $\vec{x} \longmapsto \det\begin{bmatrix} - \vec{v}_1 - \\ - \vec{x} - \\ \vdots \\ - \vec{v}_{n-1} - \end{bmatrix}$

也是一个 linear transformation

Pf：用 Laplace expansion 即得证

WS21B. Fact in P5

对 $A \in \mathbb{R}^{n\times n} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ 进行 QR factorization.

得到 $Q = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{bmatrix}$，$R = \begin{bmatrix} \vec{u}_1\cdot\vec{v}_1 & \cdots & \vec{u}_1\cdot\vec{v}_n \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots\ 0 & \vec{u}_n\cdot\vec{v}_n \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow |\det A| = \underbrace{(\vec{u}_1\cdot\vec{v}_1)}_{\to \|\vec{v}_1\|}\underbrace{(\vec{u}_2\cdot\vec{v}_2)}_{\to \|\vec{v}_2^{\perp}\|}\ldots\underbrace{(\vec{u}_n\cdot\vec{v}_n)}_{\to \|\vec{v}_n\|}$.

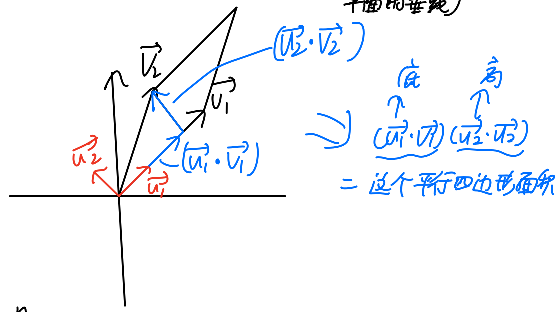
Pf. $\det A = \det Q \det R$.

其中：$\det Q = \pm 1$ 因为 Q orthogonal

$\det R = (\vec{u}_1\cdot\vec{v}_1)\cdots(\vec{u}_n\cdot\vec{v}_n)$ 因为它 diagonal.

而 $|\det A| = \prod_{i=1}^{n} (\vec{u_i}\cdot\vec{v_i})$ 的更直观的理解是：

$\vec{u_i}\cdot\vec{v_i}$ 代表 $\|\vec{v_i}^{\perp}\|$ (与之前 span$(\vec{v_1},\ldots,\vec{v_{i-1}})$ 平面的垂线)



因而 $\prod_{i=1}^{n}(\vec{u_i}\cdot\vec{v_i})$ 就是 $\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}$ 围成的

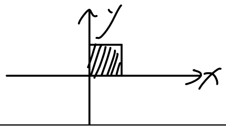
(平行体) parallelepiped 的 volumn，

我们由此可定义并得出：

WS21C. Def ① standard unit n-cube 即 $\mathbb{R}^n$ 中的单位立方体

表示 $\{t_1\vec{e_1}+\ldots+t_n\vec{e_n} \mid 0\le t_i\le 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$

比如：$\mathbb{R}^2$ 下的 standard unit 2-cube 就是



而我们可以理解：

WS21C. Thm 2

一个 linear transformation $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的

$|\det T|$ = the volume of the standard unit n-cube 在 T 下的 image 组成的 parallelepiped

简写：Q_n

简写：$|\det T| = |T[Q_n]|$

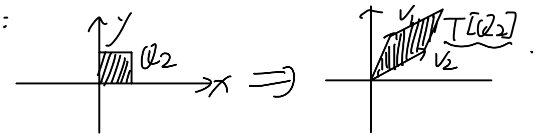
我们知道 $im(T) = span(\vec{v_1},\ldots,\vec{v_n})$

且 $\vec{v_1} = T(\vec{e_1}), \ldots \vec{v_n} = T(\vec{e_n})$

因而 $im(T) = span(T(\vec{e_1}),\ldots,T(\vec{e_n}))$

$\Rightarrow T[Q_n] = \{a_1T(\vec{e_1})+\ldots+a_nT(\vec{e_n}) \mid 0\le a_i\le 1\}$

即：



由于 $|T[Q_n]| = \prod_{i=1}^{n}(\vec{v_i}\cdot\vec{u_i}) \Rightarrow |\det T| = \prod_{i=1}^{n}(\vec{v_i}\cdot\vec{u_i})$

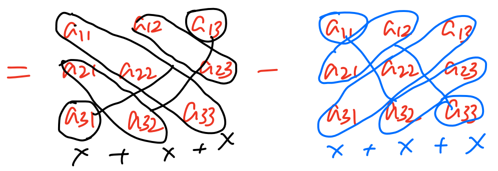
Book complements.

6.1

Thm 6.1.2 Sarrus's Rule

典中典之：计算 det(A)，A 为 3×3 matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



Def A_{ij} 被称为一个 minor，也叫一个 submatrix of A

即：去除 i 行与 j 列后的 A.

Thm 6.1.5 Block matrices 的 determinant

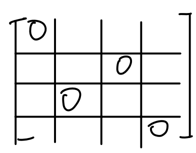
$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D) - \det(B)-\det(C)$$

(更高阶也一样，和普通 matrix det 同样 rule)

另一种计算 determinant 的方式：

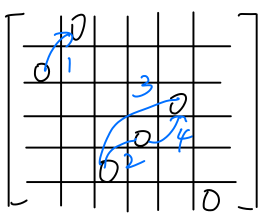
① 一个 pattern 是在 square matrix 中每行选一个 entry 并使得每列只选一个 entry 的方案

比如：



② 一个 inversion 指一个 pattern 中一个在右侧的元素处于一个在左侧的元素的上侧的情况

比如：P =



中一共有 4 个 inversion.

(数 inversion 的方式：从左至右对每个元素数，然后相加)

③ 定义：$\operatorname{sgn} P = (-1)^{\text{number of inversions in } P}$

$\operatorname{prod} P = \prod_{i=1}^{n} a_i$ (P 中 n 个 chosen entries 的积)

则 $\det A = \sum (\operatorname{sgn} P)(\operatorname{prod} P)$ (A 的所有 patterns 的 (sgn P)(prod P) 的和)

Thm 6.3.6 Generalization of $T[P]$

考虑 $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m} \in \mathbb{R}^n$

则 the m-volume of the m-parallelepiped

为 $|T[\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}]| = \sqrt{\det(A^T A)}$

(particularly, 当 $m = n$ 时, $T[\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}] = |\det A|$

~~伴随矩阵~~

Thm 6.3.9 Classical adjoint of invertible square matrix and its relation with inverse.

对于 $n \times n$ 的 invertible matrix A,

the classical adjoint $\mathrm{adj}(A)$ 是 $n \times n$ matrix,

其 ij^{th} entry 是 $(-1)^{i+j} \det(A_{ji})$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{adj}(A)$$