Def ① 3.4.1 Coordinates in a subspace V of $\mathbb{R}^n$

(或任何 vector space)

对于一个 basis $\mathcal{B}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m)$ of V

由 Thm 3.2.10 知 $\vec{x}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_m\vec{v}_m$

其中 $c_1,c_2,\dots,c_m$ 是 unique 的

称这组 $c_1,c_2,\dots,c_m$ 为 $\vec{x}$ 的 $\boxed{\mathcal{B}\text{- coordinates}}$

$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$ 为 $\vec{x}$ 的 $\boxed{\mathcal{B}\text{- coordinate vector}}$

将其 denote 为 $\boxed{[\vec{x}]_{\mathcal{B}}}$

注意到：$\boxed{\vec{x}=S[\vec{x}]_{\mathcal{B}}}$, where $S=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

Thm ① 3.4.2 Linearity of Coordinates

对于 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace V，任一 $\boxed{\text{basis } \mathcal{B}}$:

(或任何 VS)

$\forall \vec{x},\vec{y}\in V$ and $k\in\mathbb{R}$,

(a) $[\vec{x}+\vec{y}]_{\mathcal{B}}=[\vec{x}]_{\mathcal{B}}+[\vec{y}]_{\mathcal{B}}$

(b) $[k\vec{x}]_{\mathcal{B}}=k[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$

Thm ③ 3.4.3 $\mathcal{B}$-matrix of Linear transformation from $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.

我们平时用的 standard matrix 是每个 vector 在 standard coordinate $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ 下变换的表示.

对于 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

任取 $\mathbb{R}^n$ 的一组 basis $\mathcal{B}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$

都 $\exists$ $\boxed{\text{unique}}$ matrix $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$

使 $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\boxed{[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}}=B[\vec{x}]_{\mathcal{B}}}$

而 $\mathcal{B}$-matrix 则是每个 vector 在 $\mathcal{B}$-coordinate 下的变换的表示

称 B 为 T 的 $\boxed{\mathcal{B}\text{-matrix.}}$

$B=\begin{bmatrix} | & & | \\ [T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\vec{v}_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & & | \end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix} | & & | \\ T(\vec{e}_1) & \cdots & T(\vec{e}_n) \\ | & & | \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} | & & | \\ [T(\vec{e}_1)]_E & \cdots & [T(\vec{e}_n)]_E \\ | & & | \end{bmatrix}$

Thm ④ 3.4.4 linear trans 的 standard matrix vs. $\mathcal{B}$-matrix

condition: $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为 linear trans

$\mathcal{B}=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$ 为一组 basis.

B 为 T 的 $\mathcal{B}$-matrix, A 为 T 的 standard matrix.

$\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$

$T(\vec{x})=A\vec{x}$

$[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}}=B[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$

$\Rightarrow$ 令 $S=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$, (因为 $(v_1,\dots,v_n)$ 为 basis, S 一定 full rank)

则 $\boxed{AS=SB}$ $(\Rightarrow B=S^{-1}AS,\ A=SBS^{-1})$

Def ② 3.4.5 Similar matrices

$n\times n$ matrice A,B 为 similar 的

if $\exists$ invertible matrix S 使

$AS=SB \quad (B=S^{-1}AS)$

A,B 为 similar 的意思就是 A,B 表示的是同一个 linear trans 在不同的 basis 下的 matrix.

(所有和 A similar 的矩阵就是 A 代表的 linear trans 在不同 coordinate 下的代表矩阵)

$\Downarrow$ 因而

Thm ⑤ 3.4.6 Similarity 是一种 equivalence relation

即 (1) reflexivity $(A\sim A)$

(2) symmetry $(A\sim B\Leftrightarrow B\sim A)$

(3) transitivity $(A\sim B, B\sim C\Rightarrow A\sim C)$

Thm ⑥ 3.4.7 $\mathcal{B}$-matrix 为 $\boxed{\text{diagonal}}$ 的情况:

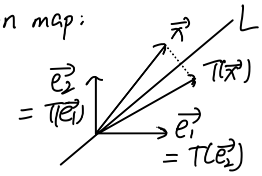
$\mathcal{B}$-matrix B 是 diagonal 的 iff 对于 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\in\mathcal{B}$,

$\boxed{\text{每个 } T(\vec{v}_i)=c_i\vec{v}_i}$ for some constant c_i

(即每个 basis vector $\vec{v}_i$ 都和 $T(\vec{v}_i)$ parrellel)

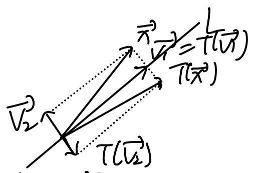
并且 then $B=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T(\vec{v}_1) & T(\vec{v}_2) & \cdots\ T(\vec{v}_n) \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & c_2 & \\ & & \ddots \\ & & & c_n \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{array}$

比如 reflection map:



在 $\mathcal{B}_1=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ 下并不 diagonal $\left(B_1=\begin{bmatrix} 2u_1^2-1 & 2u_1u_2 \\ 2u_1u_2 & 2u_2^2-1 \end{bmatrix}\right)$

因为 $T(\vec{e}_1)\nparallel\vec{e}_1$, $T(\vec{e}_2)\nparallel\vec{e}_2$



但是在 $\mathcal{B}_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ $(v_1\parallel L, v_2\perp L)$ 下 diagnol $\left(B_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$

因为 $T(\vec{v}_1)\parallel\vec{v}_1$, $T(\vec{v}_2)\parallel\vec{v}_2$

回顾 $\boxed{\text{Vector space}}$ 的 def.

一个 set V with one closed operations $(+)$
(and with scalar multiplication closed)

5 (A) x5, 5 scalar (M), 2 scalar (D).

$\boxed{\text{Subspace}}$ 的 def:

$W \subseteq V$ 并且 $\begin{cases} 1_V \in W \\ \text{closed under } +_V \\ \text{closed under scalar multip.} \end{cases}$

span: 如果 $\forall v \in V$ 都是 $f_1, f_2, \dots, f_n \in V$ 的 linear comb (未必unique) 则称 $f_1, f_2, \dots, f_n$ $\boxed{\text{spans}}$ V.

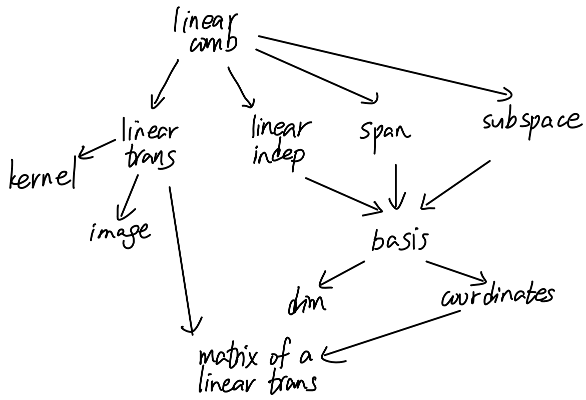
linear independence: 如果 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 间只有 trivial relation (全0) 那么它们 $\boxed{\text{linearly independent}}$.

basis: $\{f_1, \dots, f_n\}$ spans V 且 linearly independent 则为 V 的一个 $\boxed{\text{basis}}$. 此时 $\forall v \in V$ 都是 $f_1, f_2, \dots, f_n \in V$ 的 unique linear comb.

$\boxed{\text{dim}}$: V 的任意 basis 中 vectors 的数量. (一定是固定相同的)

$\boxed{\mathcal{B}\text{-coordinate}}$: $v \in V$ 在 basis $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ 下的坐标 $c_1, c_2, \dots, c_n$ (唯一的 linear comb coeff)

$\boxed{\mathcal{B}\text{-coordinate vector}}$: $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$



Def ③ 4.1.3 $\boxed{\mathcal{B}\text{-coordinate transformation}}$

对于 vector space V 的一个 basis $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

我们知道 $\forall f \in V$, $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_3 f_n$

定义 $\boxed{L_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow \mathbb{R}^n}$ defined by $\boxed{f \longmapsto \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}$ 为 $\mathcal{B}$-coordinate transformation.

可记作 $L(f) = \boxed{[f]_{\mathcal{B}}} = [c_1\ c_2 \cdots c_n]^T$, 写作 $\boxed{L_{\mathcal{B}}}$

这是一个 generalization, 对于一个广义 vector space V, 通过一个 linear trans 将其映射到 $\mathbb{R}^n$ 上, 以赋予其 $\mathbb{R}^n$ 的 coordinate 值, 表示它在每个 basis 分量上是多少倍.

Thm ⑦ 4.1.4 coordinate transformation $L_{\mathcal{B}}$ 的 linearity.

Thm ⓓ 3.4.2 的 generalization

对于任意 V 的任意 basis $\mathcal{B}$, $\forall f, g \in V$ and $k \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow [f+g]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}} + [g]_{\mathcal{B}}$$
$$[kf]_{\mathcal{B}} = k[f]_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "T"] \arrow[d, "L_{\mathcal{B}}"'] & T(f) \arrow[d, "L_{\mathcal{B}}"] \\
{[f]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "B"] & {[T(f)]_{\mathcal{B}}}
\end{tikzcd}$$

(Thm 4.1.5: dim V 即 basis vectors 数量是固定的)

Thm ⑧ 4.1.7 Linear differential equations

n^{th}-order linear differential equation with const coeffs

$\boxed{f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0}$ 的 solution set form 一个 $\boxed{n\text{-dimensional subspace of } C^\infty}$

Def ④ 4.1.8 Finite dimensional vector spaces

如果 $\dim V = n < \infty$ 则 V 是一个 finite dimensional vector space, 否则是一个 infinite dimensional vector space.

Thm ⑨ $\boxed{\text{Generalized rank nullity}}$

rank-nullity Thm holds for general vector space V, W and linear map T.

即 $T: V \to W$

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(V)$$

其中 $\ker(T) = \{f \in V \mid T(f) = 0_W\}$

$\operatorname{im}(T) = \{g \in W \mid T(f) = g \text{ for some } f \in V\}$

$\dim(\ker T)$ 称为 nullity T, $\dim(\operatorname{im} T)$ 称为 rank T

Thm ⑩ (thm A on WS 12)

如果 $V \subseteq W$ 为 linear subspace

则 $\boxed{\dim V \le \dim W}$

Def ⑥ 4.2.2 $\boxed{\text{Isomorphic spaces}}$

linear map: bijective $\Longleftrightarrow$ invertible $\Longleftrightarrow$ isomorphic

如果 $\exists$ isomorphic linear map $T: V \to W$

则称 $\boxed{V \cong W}$ (isomorphic vector spaces)

Thm ⑪ 4.2.3

对于任意 finite dimensional vector space,
(Def ⑨ 4.1.3 中的) coordinate transformation $\boxed{L_{\mathcal{B}}: V \to \mathbb{R}^n}$
一定是一个 isomorphism.

即 finite dimensional vector space 一定 isomorphic 于 $\mathbb{R}^n$.

Thm ⑫ 4.2.4

(a) lin trans $T: V \to W$ is isomorphism
$\iff$ $\ker(T) = \vec{0}$ and $\operatorname{im}(T) = W$.

(b)(c) condition: finite dimensional vector space

$\Downarrow$ (b) vector space $\boxed{V \cong W \text{ iff } \dim(V) = \dim(W)}$
(因为都 $\cong \mathbb{R}^n$)

(c) 如果 $\dim(V) = \dim(W)$, 则对于任意 $T: V \to W$

$$\boxed{\begin{array}{c} T \text{ is injective} \iff T \text{ is surjective} \\ \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \\ T \text{ is isomorphism} \end{array}}$$

(因为: $L_2^{-1} \circ L_1$
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L_1"] \arrow[d] & \mathbb{R}^n \\ W \arrow[ur, "L_2"'] & \end{tikzcd}$$
)

Def ⑦ 4.3.1 $\mathcal{B}$-matrix of a linear trans from V to itself

Generalization of Thm ③ 3.4.3

$T: V \to V$

$\mathcal{B}$ 为 V 的一个 basis.

称 $\boxed{L_{\mathcal{B}} \circ T \circ L_{\mathcal{B}}^{-1}}$ 的 standard matrix B
为 T 的 $\mathcal{B}$-matrix　　即 $B\vec{x} = L_{\mathcal{B}}(T(L_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{x})))$.

we find that:

$\forall f \in V$, $\boxed{[T(f)]_{\mathcal{B}} = B[f]_{\mathcal{B}}}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "L_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "L_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "L_{\mathcal{B}} \circ T \circ L_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto, "T"] \arrow[d, mapsto, "L_{\mathcal{B}}"'] & T(f) \arrow[d, mapsto, "L_{\mathcal{B}}"] \\ {[f]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, mapsto, "B"'] & {[T(f)]_{\mathcal{B}}} \end{tikzcd}$$

$(\in T_{\mathcal{B}})$

Thm ⑬ 4.3.2

$T: V \to V$　$\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 为 V 的一个 basis.

$$\Longrightarrow B = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(f_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(f_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Def ⑧ 4.3.3 $\boxed{\text{Change of basis matrix}}$

Consider n-dim vector space V 的两个 basis $\boxed{\mathfrak{U}}$ 和 $\boxed{\mathcal{B}}$.

记 $\boxed{L_{\mathfrak{U}} \circ L_{\mathcal{B}}}$ 的 standard matrix 为 $\boxed{S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}}}$

即 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}} \vec{x} = L_{\mathfrak{U}}(L_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{x}))}$

我们发现 $\forall f \in V$, $\boxed{[f]_{\mathfrak{U}} = S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}} [f]_{\mathcal{B}}}$ ☆

$(f = L_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{x}),\ \vec{x} = [f]_{\mathcal{B}})$

若记 $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 则

$[b_i]_{\mathfrak{U}} = S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}} [b_i]_{\mathcal{B}} = S\vec{e_i}$　(S的 i^{th} col)

因而 $$\boxed{S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [b_1]_{\mathfrak{U}} & \cdots & [b_n]_{\mathfrak{U}} \\ | & & | \end{bmatrix}}$$

(注意到 $S_{\mathfrak{U} \to \mathcal{B}} = (S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}})^{-1}$)

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n \\ V \arrow[ur, "L_{\mathfrak{U}}"] \arrow[dr, "L_{\mathcal{B}}"'] & \\ & \mathbb{R}^n \arrow[uu, "L_S = L_{\mathfrak{U}} \circ L_{\mathcal{B}}^{-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & {[f]_{\mathfrak{U}}} \\ f \arrow[ur, "L_{\mathfrak{U}}"] \arrow[dr, "L_{\mathcal{B}}"'] & \\ & {[f]_{\mathcal{B}}} \arrow[uu, "L_S"'] \end{tikzcd}$$

Thm ⑭ 4.3.4 Change of basis in a subspace of $\mathbb{R}^n$.

Consider $\mathbb{R}^n$ 的 subspace V
的两个 basis $\mathfrak{U} = (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_m})$
和 $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_m})$

$$\text{则} \begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{b_1} & \cdots & \vec{b_m} \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{a_1} & \cdots & \vec{a_m} \\ | & & | \end{bmatrix} S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}}$$

$$\begin{tikzcd} {[\vec{x}]_{\mathfrak{U}}} \arrow[dr, "{[\vec{a_1} \cdots \vec{a_m}]}"] & \\ & \vec{x} \\ {[\vec{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[uu, "S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}}"] \arrow[ur, "{[\vec{b_1} \cdots \vec{b_m}]}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {[f]_{\mathfrak{U}}} \arrow[rrr, "A"] & & & {[T(f)]_{\mathfrak{U}}} \\ & f \arrow[ul, "L_{\mathfrak{U}}"'] \arrow[dl, "L_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "T"] & T(f) \arrow[ur, "L_{\mathfrak{U}}"] \arrow[dr, "L_{\mathcal{B}}"'] & \\ {[f]_{\mathcal{B}}} \arrow[uu, "S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}}"] \arrow[rrr, "B"'] & & & {[T(f)]_{\mathcal{B}}} \arrow[uu, "S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}}"'] \end{tikzcd}$$

Thm ⑮ 4.3.5

对于 $T: V \to V$
记 T 的 $\mathfrak{U}$-matrix 为 A, T 的 $\mathcal{B}$-matrix 为 B

则 $AS_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}} = S_{\mathcal{B} \to \mathfrak{U}} B$　$(\Longrightarrow A = SBS^{-1},\ B = S^{-1}AS)$
因为 S 一定 invertible

(并且说明: T 的任何 matrix of linear trans 都是 similar 的.)