现在你的位置为 $5^\circ E, 42^\circ N$

用一个 vector $\begin{bmatrix} 5 \\ 42 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 来表示方位.

现在你使用一个 encode 来加密你的方位

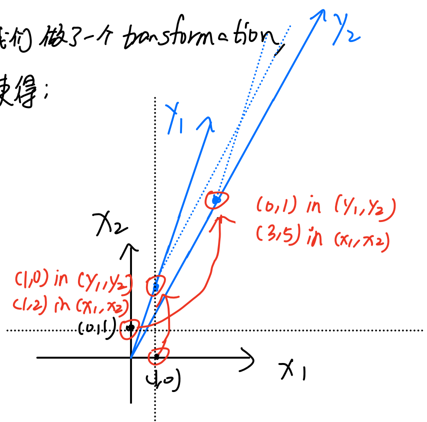
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 2x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

这个加密方位则为 $\begin{bmatrix} 131 \\ 220 \end{bmatrix}$

我们做了一个 transformation,

使得:



像换了一个坐标系 (y_1, y_2), 但坐标不换, 比如我们把 (0,1) 从 (x_1, x_2) 坐标 map 到 (y_1, y_2) 坐标. 仍是 (0,1), 但 (y_1, y_2) 下的 (0,1) 在 (x_1, x_2) 下为 (3,5). 同样, (y_1, y_2) 下 (5,42) 在 (x_1, x_2) 下为 (131, 220)

Def ① 2.1.1 Linear Transformations

A function $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ is called a linear transformation if

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\exists$ $n \times m$ matrix A s.t.

$$\boxed{T(\vec{x}) = A\vec{x}}$$

ex. $y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

input: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

output: $[y]$

A: $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$

可以发现

$\vec{y}$ 是 $\vec{x}$ 的一个 Linear transformation ($\vec{y} = A\vec{x}$)

$\Leftrightarrow$ $\vec{y}$ 是 x 的一个 linear combination ($\vec{y} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n$)

$$\left(A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \right)$$

ex $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

像这样的 matrix 叫做

Def ② identity matrix, denoted by I_n

$$\boxed{I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

ex Consider $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$

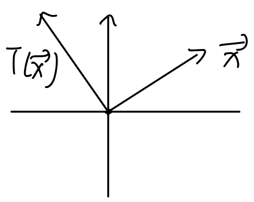
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

每个点都被 counterclockwise rotate 了 90°.

并且 $\vec{x}$ 和 $T(\vec{x})$ 长度相同

$$\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(-x_2)^2 + (x_1)^2} \right)$$



ex 随便定义一个 $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Let $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

Let $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Thm ① 2.1.2

Consider a linear trans $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Let $\vec{e_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \to i^{th}$ component.

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_m) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

易证, Write $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots & \vec{v_m} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow T(\vec{e_i}) = A\vec{e_i} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots & \vec{v_m} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{v_i}$$

by Thm 1.3.8

Def ② $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots \vec{e_m}$ 被称为 vector space $\mathbb{R}^m$ 的 standard vector.

而 $\mathbb{R}^3$ 中的 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 常用 i, j, k 来denote.

Thm ② 2.1.3

A transformation $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ is linear iff

(a) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^m$, $\boxed{T(\vec{v}+\vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})}$

(b) $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ and scalar k, $\boxed{T(k\vec{v}) = kT(\vec{v})}$

Def 2.1.4 ③ Distribution vectors and transition matrices

A vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ is said to be a distribution vector if its components

1. 和为1
2. 全都 ≥ 0

A square matrix A 为一个 transition matrix if 它的每个 col vector 都是 distribution vector.