Def ① $\boxed{\text{ideal}}$ (理想)

不用这个定义，我们用 Thm ①来定义 ideal. 因为我们定义的 subring 而书上的 subring 不要求 ideal 大多是 subring

ring R 的一个 subring I 为一个 ideal 若：不是我们的 subring

whenever $r \in R$ 和 $a \in I$，$ra \in I$ 且 $ar \in I$.

即 R 中任何元素即便不在 I 中，一旦乘上 I 中的元素就到了 I 中 那么 I 就是一个 ideal.

注意到这个 def 对于 noncommutative ring 也要求.
而有些 noncommutative ring 有类似的 subring 但不 absorb products on the right，于是叫做 $\boxed{\text{left ideal}}$

类似有 $\boxed{\text{right ideal}}$ ex: $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ in $M_2(\mathbb{R})$

(Def

Thm ① 6.1

ring R 的一个 nonempty subset I 为 R 的一个 ideal (1. 非空子集)

iff
(1) whenever $a,b \in I$, $\Rightarrow a-b \in I$ 2. 加法对自身封闭
(2) whenever $r \in R$ and $a \in I$, $\Rightarrow ra, ar \in I$ 3. 乘法吸收 R 上元素到它身上.

Thm ② 6.2

(with identity)

令 R 为一个 commutative ring. (R 中 c 的所有 multiples)

任取 $c \in R$. $\boxed{I = \{rc \mid r \in R\}}$ 为一个 $\boxed{\text{ideal}}$.

Def ※ 由 6.2 的方式 generate 的 ideal 称为 $\boxed{\text{principal ideal generated by } c \text{ (由 } c \text{ 生成的主理想)}}$ 记作 $\boxed{(c)}$

Thm ③ 6.3

(with identity)

令 R 为一个 commutative ring.

任选 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$ ($c_1, \ldots, c_n$ 在 R 上所有 linear comb.)

$\Rightarrow I = \{r_1c_1 + r_2c_2 + \cdots + r_nc_n \mid r_1, r_2, \ldots, r_n \in R\}$

为 R 上一个 ideal

Def ※ 由 6.3 的方式 generate 的 ideal 称为 $\boxed{\text{ideal generated by } c_1, c_2, \ldots, c_n.}$ 记作 $\boxed{(c_1, c_2, \ldots, c_n)}$

由 6.2, 6.3 生成的 ideal 都称作为被 finitely generated 的

Def ② Congruence in an arbitrary ring

I 为 ring R 的一个 $\boxed{\text{ideal}}$. Let $a, b \in R$.

如果 $\boxed{a-b \in I}$, 两元差在 Ideal I 中：称它们 I 同余.

称：a is congruent to b modulo I.

记作 $\boxed{a \equiv b \mod I}$

Thm ④ 6.4 Congruence modulo ideal 是一个 well-defined 的 equivalence relation.

I 为 ring R 的一个 ideal

$\Rightarrow$
(1) reflexive: $\forall a \in R$, $a \equiv a \pmod I$
(2) symmetric: $a \equiv b \pmod I \Rightarrow b \equiv a \pmod I$
(3) transitive: $\begin{cases} a \equiv b \pmod I \\ b \equiv c \pmod I \end{cases} \Rightarrow a \equiv c \pmod I$

Thm ⑤ 6.5 对于任意 ring R 的 ideal I

如果 $a \equiv b \pmod I$
$c \equiv d \pmod I$

$\Rightarrow$ (1) $a+c \equiv b+d \pmod I$
(2) $ac \equiv bd \pmod I$

Def ③ Congruence class modulo I

(也称 coset of I in R)

对任意 $x \in R$ $\boxed{\{x + a \mid a \in I\}}$ 被称为 x 的 congruence class modulo I.

(又称 coset of I)

写作：$\boxed{x + I}$ ← 注意这是个 set 哈

Thm ⑥ 6.6

任何 $a, c \in R$.

$a \equiv c \pmod I$ iff $\underset{(\text{mod class})}{a + I} = \underset{(\text{mod class})}{c + I}$

Corollary ⑦ 6.7

I 的任意两个 coset 要么 identical 要么 disjoint

Thm ⑧ 6.8 I 为 ring R 的一个 ideal

若 $a+I=b+I$, $c+I=d+I$ $(\in R/I)$

Generalization of Thm 2.6.

$\Rightarrow$ $(a+c)+I=(b+d)+I$ $(ac)+I=(bd)+I$

Thm ⑨ 6.9 I 为 R 上的一个 ideal 则:

(1) R/I 也为一个 ring

(2) 若 R commutative, 则 R/I 也一定 commutative.

(3) R 的 identities 也对应了 R/I 的 identities. (如果有的话,因为我们定义的是么环,一般环未必有)

$(a+I)(1_R+I)=(1_R+I)(a+I)=a+I$

Thm ⑩ 6.10 $\varphi: R\to S$ 为 ring homomorphism.

$\Rightarrow$ $\ker(\varphi)$ 为 R 的一个 ideal.

Thm ⑪ 6.11 $\varphi: R\to S$ 为一个 ring homomorphism

$\ker\varphi$ 为 K

则 $\boxed{K=\{0_R\}}$ iff $\boxed{\varphi \text{ injective}}$.

Def ④ natural homomorphism

$\pi: R\to R/I$ given by

$r\mapsto r+I$

Thm ⑫ 6.12 natural homomorphism π

是 surjective 的, 且 $\ker\pi=I$.

Thm ⑬ 6.13 First isomorphism Theorem

如果 $\varphi: R\to S$ 为一个 surjective ring hom

$I=\ker\varphi$

$\Rightarrow$ $\boxed{R/I\cong S}$

对于满射 ring hom φ, source / $\ker\varphi$ 的商环和 target 同构

6.3: The structure of R/I when I is prime/maximal

Def ⑤ prime ideal

commutative ring R 上的 ideal P is prime

if $P\neq R$ 且 whenever $bc\in P$, $b\in P$ or $c\in P$.

Thm ⑭ 6.14 (我们的交换环)

在交换么环 R 上,

P is prime ideal $\boxed{\text{iff}}$ R/P is domain

Def ⑥ Maximal ideal

任何 ring 上, 一个 ideal M 称为一个 maximal ideal (不用交换)

if $M\neq R$ 且对于任何其他 ideal J,

如果 $M\subseteq J\subseteq R$ $\Rightarrow$ $M=J$ 或 $M=R$.

(意思是不存在真包含 M 却非 R 自身的 ideal)

Thm ⑮ 6.15 (我们的交换环)

在交换么环 R 上,

M 为一个 maximal ideal iff R/M 为一个 field.

Corollary ⑯ 6.16 (我们的交换环)

对于交换么环, 每个 maximal ideal 都是 prime 的

(因为 field 一定是 domain)