我们先证一些定理:

Thm 8.16

$f: G \to H$ 为 group hom 则 $\ker f \trianglelefteq G$

Pf. ① 首先, group hom 的 $\ker f$ 一定是 subgroup of G

因为 $\forall a, b \in \ker f$, $f(a) = e_H$, $f(b) = e_H$

$f(a) \cdot f(b) = e_H \Rightarrow f(ab) = e_H$

$\Rightarrow ab \in \ker f$

② 然后我们证明 $\ker f \trianglelefteq G$

要证 $\ker f \trianglelefteq G$, 即证 $\forall g \in G$, $g^{-1}Kg \subseteq K$

即 $\forall g \in G$, $g^{-1}kg \in K$

$$f(g^{-1}kg) = \underset{\in K}{f(g^{-1})} \underbrace{f(k)}_{e_H} f(g) = f(g^{-1}g) = f(e_G) = e_H$$

$\Rightarrow$ □

Thm 8.17

$K = \{e_G\}$ iff f is injective

(已证过一千遍)

Thm 8.18

if $\boxed{N \trianglelefteq G}$

then $\pi: G \to G/N$ 是一个 surj group hom

且 $\ker \pi = N$

① $\pi: G \to G/N$ 是 group hom

Pf. 取 $g_1, g_2 \in G$

$$\pi(g_1 g_2) = g_1 g_2 N = (g_1 N) * (g_2 N)$$

by def

② π is surj

Pf. $\forall t \in G/N$, $t = Na$ for some $a \in G$,

so consider $a \overset{\pi}{\longmapsto} Na$

③ if $\pi(a) = Ne = N$

$\Rightarrow a \in N \Rightarrow \ker \pi = N$

Lemma 8.19

if $f: G \to H$ 为一个 group hom, $\ker f = K$

则 $f(a) = f(b)$ iff $\boxed{Ka = Kb}$ 即: $a \equiv b \bmod K$.

① if $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow f(ab^{-1}) = e_H$

$\Rightarrow ab^{-1} \in K$

$\boxed{a \equiv b \bmod K}$

$\Rightarrow Ka = Kb$

note: $ab^{-1} \in K$

$\Leftrightarrow a \equiv b \bmod K$

$\Leftrightarrow$ a, b 在同一个 right K-coset 中

② if $Ka = Kb$

$\Rightarrow a \equiv b \bmod K$

$\Rightarrow ab^{-1} \in K$

$f(ab^{-1}) = e_H$

$f(a) f(b^{-1}) = e_H$

$f(a) = f(b^{-1})^{-1} = f(b)$

Thm 8.20 First Isomorphism Thm

如果 $f: G \to H$ 为一个 surj group hom

则 $G/\ker f \cong H$

(实际上是特殊情况. 如果 f 不 surj, 则 $\boxed{G/\ker f \cong \operatorname{im} f}$)

Pf. Consider the map $\varphi: G/\ker f \to H$

sending $Ka \mapsto f(a)$

① it is well defined since

if $Ka = Kb \Rightarrow ab^{-1} \in K \Rightarrow f(a) = f(b)$

② it is inj since if $f(a) = f(b)$

then $f(ab^{-1}) = e_H \Rightarrow a \equiv b \pmod K$

$\Rightarrow Ka = Kb$.

(其实不必证, by Lemma 8.19 得 ①②.)

③ it is surj since $\forall x \in H$, $x = f(g)$ for some $g \in G$ (因为 f surj)

因而 $\varphi(Kg) = x$.

Thm 8.21

*note: 现在开始我们将用"<"表示 subgroup 的关系, 注意 group 本身也是自己的 subgroup, 因而 $G < G$. 但如果特别表示不包含 G 本身, 那就写 "$\lneq$"

如果 $N \trianglelefteq G$; $K < G$; 且 $N \subseteq K$

则 $K/N < G/N$

Pf. 首先 K/N 一定存在 (一定有 $N \trianglelefteq K$), 因为 $\forall g \in G$,

$g^{-1}ng \in N$ (那么 $\forall k \in K$, $k^{-1}nk \in N$)

并且 $K/N = \{Nk \mid k \in K\}$

显然, K/N 是 G/N 的 subgroup.

而如果 $K \trianglelefteq G$, 则结论更强:

Thm 8.22 [Third Isomorphism Thm]

如果 $N \lhd G$; $K \lhd G$; 且 $N \subseteq K$

则 $K/N \lhd G/N$ 且 $\dfrac{G/N}{K/N} \cong G/K$.

Pf ① $\forall\ Nk \in K/N$ 及 $Ng \in G/N$

$(Ng)^{-1} Nk (Ng)$

$= Ng^{-1}kg)$

因为 $K \lhd G \Rightarrow g^{-1}kg \in K$

$\Rightarrow Ng^{-1}kg \in K/N$

因而 $\forall\ Ng \in G/N$, $(Ng)^{-1} K/N (Ng) \subseteq K/N$

$\Rightarrow K/N \lhd G/N$

② 要证明: $\dfrac{G/N}{K/N} \cong G/K$

basic idea 是构造一个 $\pi: G/N \to G/K$ with $\ker \pi = K/N$. 即所有含K中元素的N-cosets

Consider $\pi: Na \mapsto Ka$, 易得其为 group hom 且 surj, 且 $\ker\pi = K/N$.

因而 $(G/N)/(K/N) \cong G/K$.

另外两个 group isomorphism Thm:

* [Second Isomorphism Thm (Group)] (Diamond Thm)

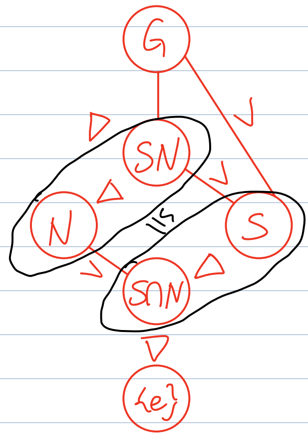
G 为 group, S 为 G 的一个 subgroup, $N \lhd G$

$\Rightarrow$ ① $SN < G$

② $N \lhd SN$

③ $S \cap N \lhd S$

④ $(SN)/N \cong S/(S\cap N)$



Pf. $\varphi: S \to \dfrac{SN}{N}$

sending $s \mapsto sN$

$\ker\varphi = \{a \in S \text{ and } a \in N\}$

$= S \cap N$

FIT $\Rightarrow \dfrac{S}{S\cap N} \cong \dfrac{SN}{N}$

* [Fourth Isomorphism Thm (Group)] (Lattice Thm)

if $N \lhd G$, 则

定义: $\mathcal{G} = \{A < G \mid A \supseteq N\}$

所有含N的subgroups.

$\mathcal{N} = \{S < G/N\}$

所有G/N的subgroups

则 $\boxed{\mathcal{G} \cong \mathcal{N}}$ ☆

($\varphi: \mathcal{G} \to \mathcal{N}$ sending $A \mapsto A/N$ 为一个isomorphism)

类似地, ring 也有四个 isomorphic thms.

[First Iso Thm (ring)]

如果 $\varphi: R \to S$ 为一个 ring hom 则

1. $\ker\varphi$ 一定是 R 的一个 subring 以及 ideal.
2. $\operatorname{im}\varphi$ 一定是 S 的一个 subring
3. $\boxed{\operatorname{im}\varphi \cong R/\ker\varphi}$ ☆ (特别地, 如果 φ surj, 那么 $R/\ker\varphi \cong S$.)

[Second Iso Thm (ring)]

令 R 为一个 ring, S 为 R 的一个 subring

I 为 R 的一个 ideal.

则 ① $S+I = \{s+i \mid s\in S, i \in I\}$ 为 R 的一个 subring

② $S \cap I$ 为 R 的一个 ideal

③ $(S+I)/I \cong S/(S\cap I)$.

Third Iso Thm (ring)

令 R 为一个 ring, I 为一个 ideal of R

则 ① 如果 A 为一个含 I 的 subring, 则 A/I 为 R/I 的 subring.

② 每个 R/I 的 subring 都是 $\boxed{A/I}$ for some subring A of R.

③ 如果 J 是 R 的一个含 I 的 ideal,
则 J/I 是 R/I 的一个 ideal.

④ 每个 R/I 的 ideal 都是 $\boxed{J/I}$ for some ideal J of R.

⑤ 如果 J 是 R 的一个含 I 的 ideal,
则 $\boxed{\dfrac{R/I}{J/I} \cong R/J}$ ☆

Fourth Iso Thm (ring)

取任意 ideal I of ring R.

则定义: $\mathcal{G} = \{$所有含 I 的 subrings of $R\}$

$\mathcal{N} = \{$所有 R/I 的 subrings$\}$

则 $\boxed{\mathcal{G} \cong \mathcal{N}}$ ☆

($\varphi: \mathcal{G} \to \mathcal{N}$ sending $A \mapsto A/N$ 为一个 isomorphism)

Corollary 8.23

Let $N \trianglelefteq G$, $K < G$ 且 $K \supseteq N$

则 $K \trianglelefteq G$ iff $K/N \trianglelefteq G/N$

Pf. ① if $K \trianglelefteq G$,
by Third Iso Thm,
$K/N \trianglelefteq G/N$

② if $K/N \trianglelefteq G/N$
$\forall g \in G, k \in K$
$(Ng)^{-1}(Nk)(Ng) \in K/N$
$\Rightarrow N(g^{-1}kg) = Nt$ for some $t \in K$
$\Rightarrow g^{-1}kg = nt$ for some $n \in N$ ($\Leftarrow nt \in N$)
Since $N \subseteq K$, $g^{-1}kg \in K$
$\Rightarrow K \trianglelefteq G$

Thm 8.24

(当然, $N \subseteq H$)

任意 G/N 的 subgroup $T = \boxed{H/N}$ for some $\boxed{H < G}$

对于 $T < G/N$, 考虑 $H = \{a \in G \mid Na \in T\}$
易证 $H < G$, 且 $H/N = T$.

Def. Simple group

A group G is $\boxed{\text{simple}}$ if: 它有且仅有 $\{e_G\}$ 和 G 自身这两个 normal subgroups.

Thm 8.25 ☆

G 为 simple abelian group iff $\boxed{G \cong \mathbb{Z}_p}$ for some prime p.

* Fundamental Structure Thm for finite Abelian groups.

任意 finite abelian group G 都 $\cong$ 于
$\boxed{\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{a_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n^{a_n}}}$

其中 $p_1, \dots, p_n$ 为 prime numbers (可以重复)

且这个 isomorphism 是 unique (by reordering) 的.