

D.

(1) 即证: $0_R = 1_R$ 的环一定是个零环.
非零环的 0_R 和 1_R 一定是不同元.

$$\text{let } r \in R, \quad r = r \cdot 1_R = r \cdot 0_R = 0_R$$

$$\Rightarrow R = \{0_R\}$$

(2) Thm 3.8 任何 field 一定是 domain.

$$\text{all field} \subseteq \text{all domain}$$

Assume $a, b \in F$ 使 $ab = 0$ ($a \neq 0$)

$$\text{因为 } F \text{ 是 field} \Rightarrow \exists a^{-1}$$

$$\Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0_R \Rightarrow b = a^{-1} \cdot 0_R = 0_R$$

\Rightarrow domain

(我们直觉也知道, F 中两个非 0 元不能乘出 0.)

因为 F 上 \div 是 well-defined 的, 如果有元能无中生 0 就太乱套了.)

(3) Domain 的 subring 仍是 domain

(当然, 太显然了. 本来两个非 0 元不能乘出 0, 子集也肯定一样.)

(4) $S \subseteq R$ 为一个 subring
iff the inclusion map $\varphi: S \rightarrow R$ sending $s \mapsto s$
为一个 ring hom.

显然 ① 如果 S 为 R 的 subring

$\varphi: S \mapsto S$ - 是一个 ring hom (保留 $0, 1, +, \times$)
closed

② 如果 $\varphi: S \mapsto S$ 是一个 ring hom

\rightarrow 保留 $0, 1$; 且 $+, \times$ closed.

这件事显然在于: ring 到自己 subring 的 map 肯定是一个 hom, 因为它和 ring hom 的要求基本是一样的. 只不过 subring 是在 R 内部, 而要求相同的 $+, \times$, 更严格些. 但这个 hom map 还是个 inclusion map, 那么肯定满足.

(5) domain 里等式两边的非 0 元 (同侧乘) 可以随意消去.

$$\begin{aligned} \text{因为 } xy = xz &\Rightarrow x(y-z) = 0 \xrightarrow{\text{若 } x \neq 0} y-z = 0 \\ &\Rightarrow y = z \end{aligned}$$

Part 2

首先看看 Thm 4.3

$R[x]$ is domain iff R is domain

← 显然

因为 polynomial 相乘, 它的 degree 2 加不减, 只要系数不会无中生有, 那么整个 polynomial 也不会.

→ 包含了,

R 在 $R[x]$ 中, 所以这是一定的.

然后 Thm 4.5

$R[x]$ 中的 units 就是 R 中的 units.

只要 R 是 domain, $R[x]$ 中又有 const ($\in R$)

可以是 unit. (保留了 R 中的 units, 不生新 unit)

这看起来是 obvious 的, 因为带 x 的项不好有 x^{-1} , 不然变成 $\frac{c}{x^n} + \dots$ 了, 就不是 polynomial 了.

(那么 $F[x]$ 中的 units 就是 F 的所有元, 除去 0.)

E. (3) $\mathbb{Z}[x]$ 中的 units 只有 ± 1 (\mathbb{Z} 中的 units)

(6) 解释了为什么 Thm 4.5 只对 domain 成立

因为 $\mathbb{Z}_8[x]$ (不是 domain, $[2] \cdot [4] = [0]$)

$$(1+4x)(1-4x) = 1$$

$1+4x, 1-4x$ 是 unit.

F. Prove Thm 4.5.

比较简单. 其中引用了 Thm 4.2: 对于 domain,

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$$

Collary 4.5

(非 domain 中, $\deg(fg) \leq \deg f + \deg g$)

只对 domain 成立, 因为 domain 不会无中生有
更高降次.

这个 fg 就是多项式

$$(\dots + x^n)(\dots + x^m) = \dots + \dots + \underline{x^{m+n}}$$

在其辅助可证 Thm 4.5.

①. 显然 every unit in R is a unit in $R[x]$.

② 然后证: 如果不是 const poly 就不是 $R[x]$ 中 unit.

(\Leftarrow) 如果是 unit, 就是 const)

令 f 为 \neq unit

$$\Rightarrow fg = 1_R \text{ for some } g$$

$$\Rightarrow \deg fg = \deg 1_R = 0$$

$$\therefore \deg fg = \deg f + \deg g$$

$$\Rightarrow \deg f + \deg g = 0$$

$$\Rightarrow \deg f = \deg g = 0 \quad (\text{因为 } \deg \geq 0)$$

(5) A formula for $\mathbb{Z}_p[x]$ 中 unit 数, where p is prime.

p is prime $\Rightarrow [\mathbb{A}]_p \times \neq [1]_p$ 总是有解 (除 $[0]_p$ 为 0 时)
 \Rightarrow field \Rightarrow 一定是 domain

$\Rightarrow \mathbb{Z}_p[x]$ 的 units 就是 \mathbb{Z}_p 的 units,
by Thm 4.5

因而就是 \mathbb{Z}_p 中所有非 0 元。