A(6). cycle 的 inverse

$(a_1,a_2,\dots,a_j)$ 的 inverse 为 $(a_j,a_{j-1},\dots,a_1)$

(一眼真)

$(1,2,3,4,5)=(5,4,3,2,1)$

B(1) $|S_n|=n!$

(8,9) 一些 subgroups of S_n

eg1 $\langle(1234)\rangle=\{e,(1234),(13)(24),(1432)\}$

$\cong$ Cyclic 4 group

eg2 $\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$

$\cong$ Klein 4 group.

(10) S_4 中有 4个 $\cong$ 于 S_3 的 subgroup.

因为可 fix 1/2/3/4 中的一个，以剩下三个的 permutation 组一个 subgroup.

因而 S_n 中，$\cong$ 于 S_k 的 group 有 $\binom{n}{k}$ 个

C Even and Odd permutations

首先 Thm 7.24 是显然的.

这可以通过一个一眼真的 algorithm 来验证：

1. $\{1,2,3,\dots,n\}$ 中任选一个元素，track 它后续所有跟着 cycle 的元素
2. 把这个 cycle 中的所有元素移除，由 bijection 性可知不会影响其他元素
3. 对剩余元素重复 1,2 至没有元素剩下

其次 Thm 7.26 是 follow 7.24 的

因为 $\boxed{(a_1 a_2 \dots a_j)=(a_1a_2)(a_2a_3)\dots(a_{j-1}a_j)}$

所以任意 cycle 都是一堆 transpositions 的 composition

(4) permutation 的奇偶性唯一但分解不唯一（显然）

$(12)(345)=(12)(34)(45)$

$=(45)(12)(45)(34)(45)$

D (1) Def: S_n 中所有 even permutation 构成 subgroup A_n

$$|A_n|=\frac{n!}{2}$$

(这说明，S_n 中一定有一半为 even 的，一半为 odd 的)

(4) $\boxed{A_n \text{ 为 Abel 的 iff } n\le 3}$!!!

E (4) 显然，S_n 中一个 cycle 的 possible order 为 $1\sim n$

因而 cyclic group 的 possible order 也为 $1\sim n$

F: Thm 7.26 的一个更 formal 的 proof:

$\forall$ permutation $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\k_1&k_2&\dots&k_n\end{pmatrix}$

$\boxed{(k_n\ n)\sigma \text{ 可以 fix } n}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix} \xRightarrow{(1,5)} \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&1&5\end{pmatrix}$$
fixed

$$\xRightarrow{(1,4)} \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix} \xRightarrow{(1,3)} \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}$$
fixed　　fixed

$$\xRightarrow{(1,2)} e$$

(by induction ⇒ 可以被复原)

G permutation matrix: Proof of odd/even permutation 的 well-definedness

Def: 称一个 matrix 为一个 permutation matrix，if 每行只有一个 1，其它都是 0，每列也只有一个 1，其它都是 0.

即形如: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

它之所以称为permutation matrix是因为:

(看法: 第i列表示元素i map到哪个元素了)

$\forall \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$

都可以把第(k_i, i)个entry写作1 (或写作$\sigma(i)$)

其它设为0

表示把σ把i map到k_i

(由于bijection: $i \longleftrightarrow k_i$ 唯一, 因而每行每列只有一个1)

因而可以conclude, 任意permutation σ 都有唯一的permutation matrix

(1) $\forall \sigma$, $P_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$

显然, $P_\sigma e_i$是第i列, 对应的是$(\sigma(i), i)$为1 其余为0, 即$e_{\sigma(i)}$

(2) $\forall \sigma$和τ, $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$

$\forall e_i$, $(P_\sigma P_\tau)e_i = P_\sigma(P_\tau e_i) = P_\sigma e_{\tau(i)} = e_{\sigma\circ\tau(i)}$

因而 $P_\sigma P_\tau = \begin{bmatrix} | & & | \\ e_{\sigma\circ\tau(1)} & \cdots & e_{\sigma\circ\tau(n)} \\ | & & | \end{bmatrix}$

$= P_{\sigma\circ\tau}$

(3) 所有$n \times n$的permutation matrices 构成$GL_n(\mathbb{R})$的一个subgroup

且与S_n $\cong$ (显然, 因为一个matrix 和一个permutation一一对应)

(4) $P_{(ij)} = -1$ $\varnothing$

因为(ij)的permutation matrix有1个inversion, 其它和I_n一样

因而 $\det(P_{(ij)}) = (-1)^1 = 1$

比如 $P_{(24)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

(5) 因而我们证明了permutation奇偶性的well-definedness:

$\sigma = \underbrace{(a_1a_2)(a_3a_4)\ldots(a_ia_j)}_{\text{even个}}$

$\Leftrightarrow \det(P_\sigma) = \det(P_{(a_1a_2)}P_{(a_3a_4)}\cdots P_{(a_ia_j)})$

$= \det(P_{(a_1a_2)})\cdot\det(P_{(a_3a_4)})\cdot\ldots\cdot\det(P_{(a_ia_j)})$

$= (-1)^{even} = 1$

odd permutation: det为$(-1)^{odd} = -1$

因为permutation matrix为unique的, 所以even/odd为unique的.