D.

(1) 即证：$0_R = 1_R$ 的环一定是个零环.
非零环的 0_R 和 1_R 一定是不同元.

Let $r \in R$, $r = r 1_R = r 0_R = 0_R$

$\Rightarrow R = \{0_R\}$

(2) Thm 3.8. 任何 field 一定是 domain.

all field $\subseteq$ all domain

Assume $a, b \in F$ 使 $ab = 0$ $(a \neq 0)$

因为是 field $\Rightarrow \exists a^{-1}$

$\Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0_R \Rightarrow b = a^{-1} \cdot 0_R = 0_R$

$\Rightarrow$ domain

(我们直觉也知道，F中两个非0元不能乘出0。
因为 F上 ÷ 是 well-defined 的，如果有元能无中生0就太乱套了).

(3) Domain 的 subring 仍是 domain

(当然，太显然了. 本来两个非0元不能乘出0，
子集也肯定一样.)

(4) $S \subseteq R$ 为一个 subring iff the inclusion map $\varphi: S \to R$ sending $s \mapsto s$ 为个 ring hom.

显然 ① 如果 S 为 R 的 subring

$\varphi: s \mapsto s$ 一定是个 ring hom (0, 1, +, × 保留 closed)

② 如果 $\varphi: s \mapsto s$ 是个 ring hom

⟶ 保留 0, 1; 且 +, × closed.

这件事显然在于：ring 到自己 subring 的 map 肯定是个 hom，因为它和 ring hom 的要求基本是一样的。只不过 subring 是在 R 内部，而要求相同的 +, ×，更严格些。但这个 hom map 还是个 inclusion map，那么肯定满足。

(5) domain 里等式两边的非 0 元 (同侧乘) 可以随意消去。

因为 $xy = xz \Rightarrow x(y-z) = 0 \Rightarrow y - z = 0$ (若 $x \neq 0$)

$\Rightarrow y = z$

Part2

首先看看 Thm 4.3

$R[x]$ 为 domain iff R is domain

$\leftarrow$ 显然

因为 polynomial 相乘，x 的 degree 只加不减，R 要系数不会无中生 0，那么整个 polynomial 也不会。

$\rightarrow$ 包含了，

R 在 $R[x]$ 中，所以这是一定的。

然后 Thm 4.5

$R[x]$ 中的 units 就是 R 中的 units。

只要 R 是 domain，$R[x]$ 中只有 const $(\in R)$ 可以是 unit。（保留了 R 中的 units，不生新 unit）

这看起来是 obvious 的，因为带 x 的项不好有 x^{-1}，不然变成 $\frac{c}{x^n}+\ldots$ 了，就不是 polynomial 了。

(那么 $F[x]$ 中的 units 就是 F 的所有元，除去 0.)

E. (5) $\mathbb{Z}[x]$ 中的 units 只有 ± 1 ($\mathbb{Z}$ 中的 units)

(6) 解释了为什么 Thm 4.5 只对 domain 成立

因为 $\mathbb{Z}_8[x]$ (不是 domain, $[2]\cdot[4]=[0]$)

$(1+4x)(1-4x)=1$

$1+4x$, $1-4x$ 是 unit.

F. Prove Thm 4.5.

比较简单. 其中引用了 Thm 4.2: 对于 domain,

$\deg(fg)=\deg(f)+\deg(g)$

Collary 4.5

(非 domain 中, $\deg(fg)\le \deg f+\deg g$.)

只对 domain 成立, 因为 domain 不会无中生 0 莫名除没.

这个时候就是理应式子

$(\dots+\_x^n)(\dots+\_x^m)=\dots+\dots x^{m+n}$

在其辅助可证 Thm 4.5.

① 显然 every unit in R is a unit in $R[x]$.

② 然后证：如果不是 const poly 就不是 $R[x]$ 中 unit.

($\Leftarrow$) 如果是 unit，就是 const)

令 f 为 unit

$\Rightarrow fg = 1_R$ for some g

$\Rightarrow \deg fg = \deg 1_R = 0$

$\because \deg fg = \deg f + \deg g$

$\Rightarrow \deg f + \deg g = 0$

$\Rightarrow \deg f = \deg g = 0$ (因为 $\deg \geq 0$)

(5) A formula for $\mathbb{Z}_p[x]$ 中 unit 数, where p is prime.

p is prime $\Rightarrow [a]_p X = [1]_p$ 总是有解(除了$[a]_p$ 为 0 时)

$\Rightarrow$ field $\Rightarrow$ 一定是 domain

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_p[x]$ 的 units 就是 $\mathbb{Z}_p$ 的 units,

by Thm 4.5

因而就是 $\mathbb{Z}_p$ 中所有非 0 元.