Def ① Operation

An operation on a set S is a function
$f: S\times S \to S$

Def ② Ring

A set R with 2 operations "+", "×"
且 $\forall a,b,c\in R$:

(A)
- ① closure: $a,b\in R \to a+b\in R$
- ② asso: $(a+b)+c = a+(b+c)$
- ③ comm: $a+b=b+a$
- (同field (A)) ④ 0_R: $\exists 0_R\in R$, $\forall a\in R$ $a+0_R=a$
- ⑤ $+^{-1}$: $\forall a\in R$, $\exists b\in R$ st $b+a=0_R$

(M)
- ⑥ closure: $a\in R, b\in R \to ab\in R$
- ⑦ asso: $(ab)c=a(bc)$
- (无comm, x^{-1}) ⑧ 1_R: $\exists 1_R$ 使 $\forall x\in R$, $1_R x = x\cdot 1_R = x$

(同field) (D)
- ⑨ $a(b+c)=ab+ac$
- ⑩ $(a+b)c=ac+bc$

(本课定义的环即幺环) ring with an identity

WS

B

(2) Pf of Thm ④ 3.3: ring 中任何 operation 下每个 elem 至多仅有一个 inverse.
(实际上, 在任意集合上 只要 operation □ 为 asso 的, 每个元素就至多有一个 inverse)

Pf. Suppose x, y are both □-inverse of r.
既然有 □-inverse, 那么 □ 这个 operation 一定有 identity. Denote it: e.

一个operation □ 的 identity e 就是: 任何元素 □ e, e □ 任何元素 都是它自身.

$\Rightarrow x\,\square\, r = e$,
$\Rightarrow (x\,\square\, r)\,\square\, y = e\,\square\, y = y$ (by def of e)
$\Rightarrow$ By asso, $x\,\square\,\underbrace{(r\,\square\, y)}_{=e} = y$
$\Rightarrow x\,\square\, e = y$
$x=y$

(3) Pf of Thm ⑤ 3.5: ring 中 $\forall x$ $0\cdot x = 0$

Pf. $0\cdot x = (0+0)\cdot x = 0\cdot x + 0\cdot x$
let $y = 0\cdot x$ 的 $+^{-1}$
两边 $+y$ $\Rightarrow (y+0\cdot x) = (y+0\cdot x)+0\cdot x$
$0 = 0\cdot x$

D. (1) Claim: (Thm ③ 3.2):
要证环 R 的非空子集 S 为子环,
只需证:
1. $0_R, 1_R\in S$
2. S 对于 $+,\times$ closed
3. S 对于 $+^{-1}$ closed ($a\in S \Rightarrow -a\in S$)

显见: ∵ $+,\times$ asso, $+$ comm, $+\times$ distributive on R
$\Rightarrow$ 在 S 中同样的 $+,\times$ def 也一样.
再加上知 $1_R, 0_R$ 是 $\times, +$ 的 identity.
所以只需证 $1_R, 0_R\in S$ 且 3个 closure 即可.

(2). Fun[$\mathbb{R},\mathbb{R}$]: the set of all functions from $\mathbb{R}$ to itself.
with property. $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ ①
$(fg)(x) = f(x)g(x)$ ②

这是一个 ring.

$R=\{\varphi(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall \varphi_1(x), \varphi_2(x)\in R, ①②\}$

它的一个 subring 是 $\mathbb{R}[x]$. (因为 $\mathbb{R}[x]$ 满足 ①,② 且是一个相同 $+,\times, 1, 0$ 的 ring)

(3) 任意环都有至少两个 subring:
① 它自己
② 一个 smallest subring: 至少 include $1_R, 0_R$.
因而 all elements of S: $n\cdot 1_R = \underbrace{1_R+\cdots+1_R}_{n\text{ times}}$, $-n\cdot 1_R = \underbrace{-1_R-\cdots-1_R}_{n\text{ times}}$
即 $\{n\cdot 1_R : n\in\mathbb{Z}\}$ (1_R 的所有整数倍) 一定是一个 subring, 且是最小的 subring

E. (4) 显然, 在 set of all rings 上, isomorphism 是一种 equivalence relation.