Def ① Operation

A operation on a set S is a function
$\ast : S \times S \to S$

Def ② Asso, Comm, identity, inverse

(1) associative: An operation (on S) is asso
if $\forall x,y,z \in S$, $(x+y)+z = x+(y+z)$
(on S)

(2) commutative: An operation $\ast$ is comm if
$\forall x,y \in S$, $x \ast y = y \ast x$.

(3) identity of an operation $\ast$:
$e \in S$ s.t. $\forall x \in S$, $e \ast x = x \ast e = x$

(4) Inverse of $e \in S$ under $\ast$:
若 $\ast$ 有 identity, 则 $x \in S$ 的 inverse under $\ast$
是 $y \in S$, 使 $x \ast y = y \ast x = e$
(不一定存在)

Def ② Ring (我们定义的 ring 是 ring with identity)

A set R with two operations "+", "×", 使

A (⑤):
closure
asso
comm
0_R
$\forall x \exists +^{-1}$

M (⑤-②=③):
closure
asso
1_R

(无 comm
无 $\forall x \exists x^{-1}$)

D:
$a(b+c) = ab+ac$
$(a+b)c = ac+bc$ (both sides)

Def ③ Commutative ring (交换环)

A ring with M. comm ($a \cdot b = b \cdot a$ $\forall a,b \in R$)
(即: field 除去 x^{-1})

Def ④ Integral domain (整环)

满足: 1. comm ring, 且 $1_R \neq 0_R$ (以排除 zero ring $\{0_R\}$)

2. whenever $a,b \in R$ 且 $ab = 0_R$,
$a = 0_R$ or $b = 0_R$

(即若 $ab = 0_R$, 则 a, b 至少有一个是 0_R)

(Contrapositive: $a \neq 0, b \neq 0$
$\Rightarrow ab \neq 0$.)

Def ⑤ Field (域)

A comm ring (且 $1_R \neq 0_R$) with x^{-1} (以排除 zero ring $\{0_R\}$)
(即: $\forall a \neq 0_R \in R$, $ax = 1_R$ 在 R 上有 sol)

Thm ① Any operation 至多有一个 identity

Thm ② 3.1 (Product Ring)

若 R, S 为 ring
$\Longrightarrow R \times S$ (Cartesian product) 也为 ring

(def 其 +: $(r,s)+(r',s') = (r+r', s+s')$
def 其 ×: $(r,s) \times (r',s') = (rr', ss')$)

Def ⑥ Subring (子环)

$S \subseteq R$ 为 ring R 的一个 subring, if
(1) S is nonempty
(2) S 的 +, × 和 R 定义相同
(3) S 有 R 相同的 0, 1.

Thm ③ 3.2 $\boxed{\text{Subring 判定}}$

若 R is a ring, $S\subseteq R$ non empty.

如果
(1) $0_R, 1_R \in S$
(2) S is closed under $+_R$: $a,b\in S \Rightarrow a+b\in S$
(3) S is closed under $+_R^{-1}$: $a\in S \Rightarrow -a\in S$
(4) S is closed under $\times_R$: $a,b\in S \Rightarrow a\times b\in S$

则 $\Longrightarrow$ S is a subring of R

(2)(3) 可合并为 closed under substraction.
($\boxed{\text{Thm 3.6}}$)

Thm ④ 3.3 ring 中, $+^{-1}$ unique.

(即 $\forall x\in R, \exists! y\in R$ 使 $x+y=0_R$)

(also, x^{-1} if exists, is unique.
只要 operation 是 asso 的, 任意元素的 inverse 一定 unique)

Thm ⑤ 3.4, 3.5 ring 中任意 elem a,b 的运算法则:

(1) $a\cdot 0_R = 0_R a = 0_R$
(2) 若 $a+b=a+c$ $(c\in R) \Rightarrow b=c$
(3) $-(-a)=a$
(4) $-(a+b)=-a-b$
(5) $-(a-b)=-a+b$
(6) $(-a)(-b)=ab$
(7) $(-1_R)\cdot a=-a$.

Def ⑦ $\boxed{\text{Unit}}$

元素 $a\in$ ring R 为一个 unit
if a 在 R 中有 x^{-1}.
(即 $\exists\, u\in R$ 使 $ux=xu=1_R$)

unit a 的 x^{-1} 可 denote by : a^{-1}.

(自然得出 Thm : 一个 field 中任意 非 0 元素 都为 unit)

Def ⑧ $\boxed{\text{Zero divisor}}$ 零因子

非0元素 $a\in$ ring R 为一个 zero divisor
if $\exists$ 非0元素 $c\in R$ 使 $ac=0$ 或 $ca=0$
($ac=0$ ⇒ a 为左0因子, c 为右0因子; $ca=0$ ⇒ a 为右0因子, c 为左0因子)

eg : $M_2(\mathbb{R})$ 中,
任意不可逆 matrix 都为左右0因子.

Thm ⑥ 3.7 在 integral domain 中,
if $ab=ac$ 且 $a\neq 0_R \Rightarrow b=c$

Thm ⑦ 3.8, 3.9 任意 field 为 integral domain
任意 $\boxed{\text{finite}}$ integral domain 为 field.

Def ⑨ $\boxed{\text{Homomorphism}}$ 环同态.

Let R, S be rings.
$f: R\to S$ 为一个 homomorphism if

$$\forall a,b\in R \quad \begin{cases} f(a+b)=f(a)+f(b) \\ f(ab)=f(a)f(b) \end{cases}$$

eg: zero map $z: R\to S$ given by $z(r)=0_S$.

Def ⑩ $\boxed{\text{Isomorphism}}$ 同构

即双射 homomorphism
($\varphi: R\to S$ 为 homomorphism 且 φ bijective)

就像同一个环取不同名字. isomorphic 环一定存在 isomorphism.

Def ⑪ kernel

A $\boxed{\text{kernel}}$ of a ring homomorphism $R \xrightarrow{\varphi} S$

是 $\boxed{\text{source 的一个子集}}$, maps to 0_S.

即 $\ker\varphi = \{r \in R \mid \varphi(r) = 0_S\}$

Thm ⑧ 一个 ring hom $\varphi: R \to S$ 为 injective iff

$\ker\varphi = \{0_R\}$

Thm ⑨ 3.10(1)

任意 hom $\varphi: R \to S$

(1) $f(0_R) = 0_S$

(2) $\forall a \in R$, $f(-a) = -f(a)$

(3) $f(a-b) = f(a) - f(b)$

Thm ⑩ 3.10(2) 如果 ring hom $\varphi: R \to S$ 为 surjective

(R为我们定义的ring 即幺环)

$\Longrightarrow$ Whenever $u \in R$ 为一个 unit in R,

$f(u) \in S$ 为一个 unit in S.

且 $f(u^{-1}) = (f(u))^{-1}$

(preserve x^{-1})

Corollary ⑪ 3.11

若 $\varphi: R \to S$ 为一个 ring hom

$\Longrightarrow$ $\mathrm{im}(\varphi)$ 是 S 的一个 subring