Def Uniform continuous 一致连续

Let $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

称 f is $\boxed{\text{uniformly continuous on } B}$ if:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t.

$(\forall x, y \in B,$ if $d(x,y) < \delta$ then $d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$

如果 f is uniformly ctn on dom(f), 则称 f uniformly ctn.

回顾: ctn 的定义

$\boxed{\text{ctn on } A}$:

$(\forall a \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ s.t. $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$

$(d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$

而 $\boxed{\text{uniformly ctn on } A}$:

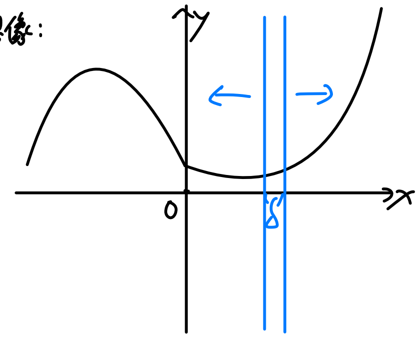
$(\forall a \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ s.t. $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$

$(d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$

ctn.:
对任意一点 a, 不论取多小的 ε, a 周围总存在某个 nbh 和 a 是 ε-close 的.

uni. ctn.:
对任意 ε, 总有一段距离 δ, 使得在 B 上滑动这段距离, 其得到的值都是 ε-close 的.

我们可以想像:



uni. ctn. 就是任意一个 ε 都对应了一个 >0 的 δ 作为阈值, 使得"δ条"在整个集合上滑动时其对应的值的变化范围都限制在 ε 内.

即: δ 的选择只需要和 ε 有关而和 x 的位置无关

可以发现 uniformly ctn 的要求比 ctn 更严格

Fact① if f is uniformly ctn on B, then f is ctn on B

即: ctn on A 是 uniformly ctn on A 的必要非充分条件.

这是显然的. 从定义来看 uni. ctn. 是比 ctn 更强的条件, 它具体陈述的事情是: f 在 B 上每一点的 continuity 的 δ-ε 不取决定

Fact② if f 在 A 上 uni. ctn. 而 $B \subseteq A$

$\Rightarrow$ f 在 B 上也 uni. ctn. ($f \upharpoonright B$ 是 uni. ctn. 的函数)

任何 subset 都保留 uni. ctn (显然)

ex

(1) $y = cx$ $(c \in \mathbb{R})$ 是 uni. ctn. 的

Pf $\forall \varepsilon > 0$, choose $\delta = \frac{\varepsilon}{|c|}$.

(2) $y = x^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 不是 uni. ctn. 的

Pf Let $\varepsilon = 1$. Take arbitrary $\delta > 0$
(or any)

Let $a = \frac{1}{\delta} \Rightarrow f'(a) = 2a = \frac{2}{\delta} > 0$

且 $f(a) > 0$, 因而

$|f(a + \frac{\delta}{2}) - f(a)| \geq f'(a) \cdot \frac{\delta}{2} = 1 = \varepsilon$

这个例子告诉我们: 变化率会变到 $\pm\infty$ 的 f 是不 uni. ctn. 的

(3) $\forall c > 0$, $y = x^2$ is uniformly ctn. on $[-c, c]$

这里变化率是 bounded 的. $(\leq 2c)$

Pf take $\delta = \frac{\varepsilon}{2c} \Rightarrow \forall x, y \in [-c, c]$:

$|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| = |x+y||x-y| < 2c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon$

(4) By (2)(3) it follows that:

$y = x^2$ 在任意 bounded interval 上是 uni. ctn. 的

但在整个 $\mathbb{R}$ 上不 uni. ctn.

(5) The function $y = \frac{1}{x}$ is uniformly continuous on $[1, \infty)$ but not on $(0, 1]$

or any $[a, \infty)$, $a > 0$

Thm If $A \subseteq \mathbb{R}$ is closed and bounded (compact) and $f: A \to \mathbb{R}$ is ctn.

$\Rightarrow$ f is uni. ctn. on A

即: $\boxed{\text{compact } A + \text{ctn } f \Rightarrow \text{uni. ctn. } f \upharpoonright A}$

* How we use compactness?

$\Rightarrow$ closed: every conv. seq. has limit in A

bounded: every seq. has a conv. subseq

Pf Let A be closed + bounded, $f: A \to \mathbb{R}$ ctn.

Suppose for contradiction: f is not uni. ctn.

So fix $\varepsilon > 0$ s.t. $\forall \delta > 0$, $\exists x, y \in A$ s.t.

$|x - y| < \delta$ but $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

(固定一个ε，对于任意一个 arbitrarily small 的距离δ，总存在两个δ-close 的点，其函数值不ε-close)

因而我们可以 construct 两个 seq $(x_n),(y_n)$ 使得每个 x_k, y_k 都 $\frac{1}{k}$-close，但 $f(x_k), f(y_k)$ 则不 ε-close

即: For each $n\in\mathbb{N}$, choose $x_n, y_n\in A$ s.t. $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ but $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$

(bounded 的用处:) Since A is bounded, by BW Thm, (x_n) has a conv. subseq, say $\boxed{(x_{n_k})\to l_1}$

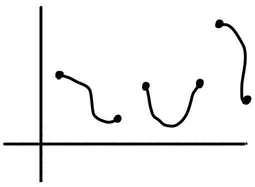
So is (y_n) $\Rightarrow$ has a conv. subseq $\boxed{(y_{n_k})\to l_2}$

And since $\forall n$ $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\boxed{l_1=l_2}$

(closedness 的用处) Since A is closed, $\boxed{\lim f(x_{n_k})\in A}$, 即 $\exists f(l_1)$

(ctn 的用处) By the continuity of f: $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})=f(l_1)$

But $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon\Rightarrow$ contradicts



□

我们可以发现 closed + bounded 是一个很强的条件

1. closed 保证了函数在某一点上不会有极端的表现
2. bounded 保证了函数值不会走向无穷

(其实我们知道在 closed interval 上的函数是一定 bounded 的 by Weierstrass boundedness Thm，但 closed set 不一定是 closed interval 比如 $\mathbb{R}$ 自身是个 closed set，但不是 closed interval，因而 bounded 这个条件是有必要的.) 虽然它的信息很少

反面ex

(1) $y=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上 ctn. $\mathbb{R}$ closed 但不bounded. 它不是 uni. ctn 的

(2) $y=\sin(\frac{1}{x})$ 在 $[-5,0)\cup(0,4]$ 上 ctn. 它不是uni. ctn. 的 $[-5,0)\cup(0,4]$ bounded 但不closed.

正面ex

(1) $y=\sqrt{x}$ is uni. ctn. on $[0,1]$

(2) $\forall 0<a<b$, $y=\sin\frac{1}{x}$ is uni. ctn. on $[a,b]$

(3) $y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{if } x\neq 0\\ 0, & \text{if } x=0\end{cases}$ is uni. ctn. on $[0,1]$

Thm 2 $\boxed{\text{Uni. ctn. preserves Cauchy seq.}}$

If $f: A\to\mathbb{R}$ is uni. ctn. and (a_n) is a Cauchy seq. in A

$\Rightarrow$ $\boxed{(f(a_n)) \text{ is Cauchy}}$

Remember: 在$\mathbb{R}$中, Cauchy seq $\Leftrightarrow$ conv. seq.

Pf Let $\varepsilon>0$

By uni. ctn., we can fix $\delta>0$ s.t. $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ whenever $|x-y|<\delta$

Since (a_n) is Cauchy, fix $N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n\geq N$, $|a_m-a_n|<\delta$

Then for all $m,n\geq N$, $|f(a_m)-f(a_n)|<\varepsilon$

So $(f(a_n))$ is Cauchy.

Note: 我们知道，对于任意一个 ctn function f

if (a_n) is in dom(f) and $(a_n)\to a$

那么 $(f(a_n))\to f(a)$ (p.t. a为dom(f)的 isolated point 或 $a\in$ dom(f)，且 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在)

而如果 f 是 $\boxed{\text{uni conv}}$ 的，则 $\boxed{\forall a\in \text{cl}(\text{dom} f)}$，$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) \text{ 一定存在}}$

因而不需要任何其他条件，$\boxed{\text{一定有 } (f(a_n))\to f(a)}$

example Let $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x>0$

The seq. $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ is Cauchy

But $(f(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}=(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ is not Cauchy

So f is not uni. ctn. on any set containing $\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$

(contrapositive)

Thm3 Let $A\subseteq\mathbb{R}$ be bounded, $f: A\to\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f is uni. ctn.

iff $\exists$ ctn. $g: \boxed{\text{cl}(A)\to\mathbb{R}}$ s.t. $f=g|A$

先前我们已证: closed bounded A + ctn f $\Rightarrow$ $f|A$ 一定 uni. ctn.

但是这并不是 iff. 非closed A也可以是 uni. ctn. 的

这里给出了一个判断方法，而且是一个 iff 的判断方法：

Given: A是 bounded的，那么 $f: A\to\mathbb{R}$ 是 uni. ctn 的 iff: 存在一个把f延伸至 cl(A) 上的连续函数

Pf For ($\Leftarrow$): easy.(显然)

因为 A bounded $\Longrightarrow$ cl(A) bounded
and cl(A) is closed, g ctn. $\Rightarrow$ g uni. ctn. by thm 1

So $f = g\restriction A$ is uni. ctn.

For ($\longrightarrow$): Suppose $f: A \to \mathbb{R}$ is uni. ctn.

Let $a \in cl(A) \setminus A$

Let (a_n) be any seq. in A conv. to a

So (a_n) is Cauchy.

Since f is uni. ctn., $(f(a_n))$ is Cauchy

因而 $(f(a_n))$ conv.

Define $g(a) = \lim f(a_n)$

下面的证明见hw: the def of g(a) makes sense 且 $g: cl(A) \to \mathbb{R}$ 是ctn的.