Ch5. Continuity

Continuity can be defined using

- limits
- ε / δ
- seq.
- open nbh.

note: 不用是 lim. pt.
但必须在 $\mathrm{dom}(f)$ 中

Def f在某点 continous

Let $A \subseteq \mathbb{R}$; $f: A \to \mathbb{R}$; $\boxed{a \in A}$

称 $\boxed{f \text{ is continuous at } a}$ if

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ note: 不用 $x \neq a$

whenever $x \in \mathrm{dom}(f)$ and $\boxed{|x-a| < \delta}$

continuity 的意义: 不论 ε 取多小, 总有某个 δ 使得 任何与 a 距离 $< \delta$ 的 (dom内) 的点 的 image 和 $f(a)$ 的距离 $< \varepsilon$

More general def of continuity in metric space (even topological space)

topological spaces

$f: X \to Y$ is ctn if

$f^{-1}[V]$ is open in X for every open set $V \subseteq Y$

因为: 如果 $V \cap \mathrm{im}(f) = \emptyset$, 则 $f^{-1}[V] = \emptyset$, $\emptyset$ is open

如果 $\exists \varepsilon$ 使得不存在 a 的 nbh 的 im 在 $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ 内, 则

$f^{-1}[(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)] = \{a\}$ 为 closed.

---

limit 和 continuity 判定的定义区别:

lim at c:

$c \in (\mathrm{dom}(f))'$, 但不需要 $c \in \mathrm{dom}(f)$, 且 δ 逼近时不包括 a 自身

continuity at a:

$a \in \mathrm{dom}(f)$, 但不需要 $a \in (\mathrm{dom}(f))'$, 且 δ 逼近时包括 a 自身

Def f在某个集合上 continuous

if f is continuous on $\forall b \in B (\subseteq \mathrm{dom}(f))$

则称 f is continuous on B.

if f is continuous on 整个 $\mathrm{dom}(f)$

则称 f is continuous (连续函数)

回忆: 我们学习 calculus I 时定义的 ctn:

ctn at c: 指 $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

这一个定义是几乎正确的. 因为如果 $c \in (\mathrm{dom}(f))'$,

那么 f 在 c处 ctn 的定义就等价于:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

但是 $\mathrm{dom}(f)$ 中, 并不是每个点都是 lim. pt.

而我们现在的 rigorous def 实则是

把所有 isolated point 都视作在该点 ctn 的.

---

review: metric space X 中, $A \subseteq X$

那么 $X \setminus A'$ 为 A 的所有 isolated pt. 的集合.

($\forall x \in X$, x 要么是 lim. pt of A, 要么是 isolated pt. of A)

因而 $\forall c \in \mathrm{dom}(f)$:

$$\begin{cases} \text{if } c \notin (\mathrm{dom}(f))' \Rightarrow f \text{ 在 } c \text{ 处 ctn.} \\ \text{else: } f \text{ 在 } c \text{ 处 ctn if } \lim_{x \to c} f(x) = f(c) \end{cases}$$

Thm 以下4条 are equiv.

(i) f 在 a 处 ctn.

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ or a is an isolated pt. of $\mathrm{dom}(f)$

(iii) $\forall$ seq. (a_n) in $\mathrm{dom}(f)$ s.t. $(a_n) \to a$, 都有 $\lim f(a_n) = f(a)$

(iv) $\forall$ open nbh $V_\varepsilon(f(a))$, $\exists$ open nbd $U_\delta(a)$ s.t. $f[A \cap U] \subseteq V$

(实际就是 def 的复述, 使用 open set)

Pf 显然

第三条略有趣: ① 如果 $a \in (\mathrm{dom}(f))'$, 那么 directly follow from

($\lim f(a_n) = l$ iff $\forall (a_n) \to c$, $f(a_n) \to l$)

② 如果 $a \notin (\mathrm{dom}(f))'$, 即: a 为 $\mathrm{dom}(f)$ 的一个 isolated pt.

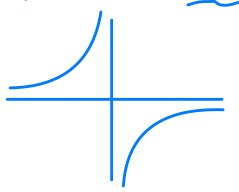
那么 $\mathrm{dom}(f)$ 中任何 conv. to a 的 seq 一定是 eventually const. (a) 的 (hw3)

---

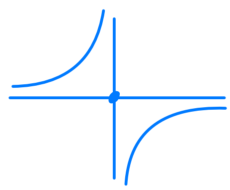
ex The following functions are continuous:

(2) rational functions (specially: polynomials)

note: continuous 只定义在 domain 内, 不在 domain 上的点无关



$f(x) = \frac{1}{x}$
(rational, ctn)



$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$
(not rational, not cts at $x = 0$!)

(3) power functions: $y = x^p$, $p \in \mathbb{R}$, $x > 0$

(4) exponential function: $y = a^x$, $a > 0$

(5) logarithmic function

(6) trig / inverse trig functions

(7) $y = |x|$

Def f is discontinuous at $a \in dom(f)$ if f is not ctn at a.

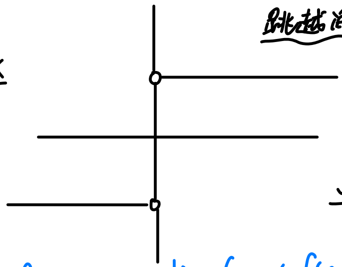
Def 三种 discontinuity

① 如果 $\lim_{x\to a^-} f(a)$ 和 $\lim_{x\to a^+} f(a)$ 都存在且 $\lim_{x\to a^-} f(a) \neq \lim_{x\to a^+} f(a)$

则称 f has a $\boxed{\text{jump discontinuity}}$ at a

跳越间断点

ex



$y = \frac{|x|}{x}$

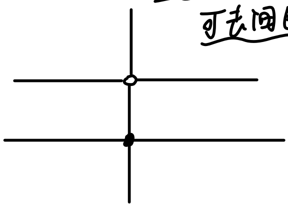
jump disctnity

② 如果 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在但 $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

则称 f has a $\boxed{\text{removable discontinuity}}$ at a

可去间断点

ex



$y = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

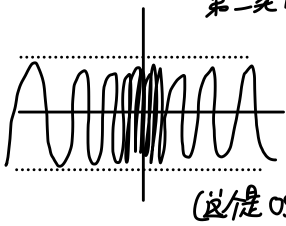
removable disctnity

③ 如果 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ DNE 或 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ DNE (oscilating 或 $\pm\infty$)

则称 f has an $\boxed{\text{essential discontinuity}}$ at a

第二类间断点

ex



$y = \sin\frac{1}{x}$

essential disctnity

(这是 oscillating discontinuity)

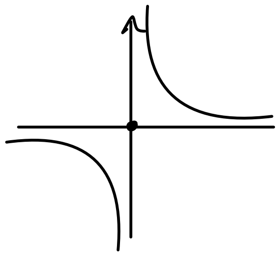
④: (③ essential distinuity 的特殊情况)

如果 $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ or $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

则称 f has an $\boxed{\text{infinite discontinuity}}$ at a

无穷间断点

ex



$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

infinite disctnity