Ch4 Limit of functions

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

We want to define sth like "$\lim_{x \to c} f(x) = l$"

Note

1. The def can be made equivalently in any of these three ways:
   (1) ε / δ - style
   (2) by seq.s
   (3) using open sets.
2. The main case is where $c, l \in \mathbb{R}$ (but we can also make the def when $c, l = \pm\infty$)
3. The def is analogous to "$\lim_{n \to \infty} s_n = l$"
   实际上我们知道 seq 也是 function
   因而我们之前使用的 $\lim_{n \to \infty} s_n = l$
   是 $A = \mathbb{N}$, $c = \infty$ 时的特殊情况
4. 我们将先把 "subsequential limit" 推广至 general case.

1. limit point

Def Limit point　　在 topology 中已 define 过了，但是没有解释意义

let $A \subseteq \mathbb{R}$ and $c \in \mathbb{R}$.

c is a limit pt. of A if

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ s.t. $0 < |x - c| < \varepsilon$

即: if $\forall$ open nbh $V_\varepsilon(c)$, $V_\varepsilon(c) \cap A \setminus \{c\} \neq \emptyset$

(topologically)

不论多小的 open nbh about c，都含有 A 中除自身以外的点。
(且已证明: 一定有 infly many 个点.)

我们可以发现，limit point 的概念实际可以类比 subseq. lim

如果 A 是一个 seq 中所有点的集合，那么 A 的一个 lim.pt. c 就是这个 seq. 的一个 subseq. limit:

不论 ε 有多小，总有 infly many 个 $x \in A$ 和 c 距离小于 ε

即无限接近 c，即有个 subseq 的 lim 为 c. 因而:

Fact 1 令 (a_n) 为一个 $\mathbb{R}$ 中的 seq.，令 $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

则每个 lim. pt. of A 都是 (a_n) 的一个 subseq. lim.

即 $A' \subseteq S$ (note: 反之未必成立! $A' \neq S$)

但我们可以发现:

Fact 2 $c \in \mathbb{R}$ 为 $A \subseteq \mathbb{R}$ 的一个 lim. pt.
iff $\exists$ a seq. in $A \setminus \{c\}$ s.t. $\lim a_n = c$

lim. pt. 的意义是: 这是一个和周围之间没有"洞"的点. 它可以不在 A 中但是和 A 中其他点没有间隙

即一定有 infly many 个 A 中点无限接近它.

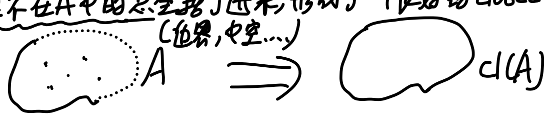
Notation A': all limit pts of A

Def closure

$cl(A)$ (或 $\bar{A}$) $= A \cup A'$，即 A 和其所有 lim.pt. 的总集，称为 A 的 closure

Fact $cl(A)$ 是 closed 的　　显然
且是 the smallest closed set in $\mathbb{R}$ containing A
(pf: hw)

Closure 的意义是把 A 的所有和其紧密连在一起但不在 A 中的点全括了进来，形成了一个良好的 closed set.
(边界，中空…)



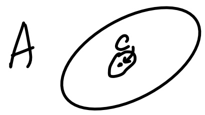
ex (1) $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 中没有 limit pt.
(2) 任意 real num 都是 $\mathbb{Q}$ 的 limit pt.
(3) $(\{0\} \cup (1,2) \cup (2,3))' = [1,3]$

Def isolated point 孤立点　　在 A 中但却不是 lim.pt. 的点

$\forall a \in A \setminus A'$ 被称为 A 的 isolated pts.

c 不是 lim. pt. 的意义是: 不存在一个 $A \setminus \{c\}$ 中的 seq. 以它为 lim

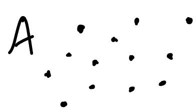
即 c 和它周围的点不是连续的，是离散的，有一段距离



Def Discrete set 离散集

if $A = A \setminus A'$ (即 $A' = \emptyset$) 则 A 为一个 discrete set

一个 discrete set 是一个没有 lim pt. 的点: 只有 isolated pt.
所有点都不连续

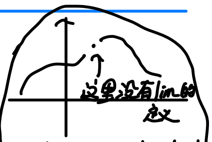


2. 定义 function 的 limit

Def Let $A \subseteq \mathbb{R}$

Let $f: A \to \mathbb{R}$ be a function.

Let c be a limit pt. of A ☆



只有 limit point 上才定义了 lim (显然)

定义 $L \in \mathbb{R}$ 为 the limit of f as x approaches c

if $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|f(x) - L| < \varepsilon$ whenever $0 < |x - c| < \delta$

(写作 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ or $f(x) \to L$ as $x \to c$)

回顾: seq. 的 lim 如何定义?

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使 $|\overset{f(n)}{S_n} - L| < \varepsilon$ whenever $n \geq N$ 即: $n \to \infty$

由于 seq. 的 lim 是 $x \to \infty$ 时的,

因而是 "whenever $\underset{(x)}{n} \geq N$", $\underset{(x)}{n}$ 没有限制

而在广义的 function lim 定义中我们则需要限制 c,

因为 $x \to c$, c 不一定为 $+\infty$. 如何表示 $x \to c$? 我们用另一个

类似于 ε 的方法: 我们用一个 $\delta > 0$ 来 bound x 和 c 的 dist,

$\delta \to 0$ 时即 $x \to c$ 时, 此时 $f(x) \to L$ 即 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

if $\nexists L$ s.t. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, 则称 f diverges as $x \to c$

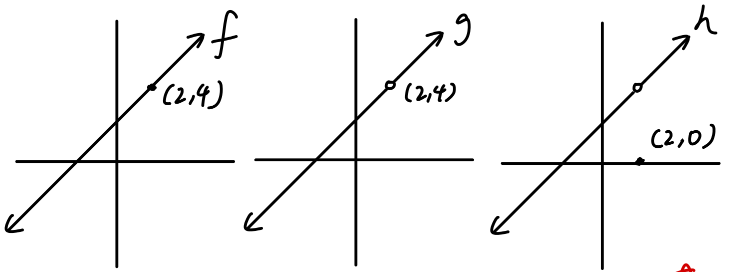
Comment (i) limits are unique

(即 if $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = M \Rightarrow L = M$)

(ii) 谨记: $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ is only defined when c is a lim. pt. of dom(f) ☆

(iii) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ 并不依赖于 $f(c)$ 的值和存在性

ex $f(x) = x + 2$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $h(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{if } x \neq 2 \\ 0, & \text{if } x = 2 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = 4$ ☆

这就引出了另一个问题: lim 并不能区分这些间断点

于是我们应严谨地定义 "continuous function" 的概念

Def continuous function

f is continuous at $x = c$ if

$\Big(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\big(\forall x \in \text{dom}(f)$, if $|x - c| < \delta$ then $|f(x) - f(c)| < \varepsilon\big)\Big)$

$\Downarrow$

即: $\forall x \in \text{dom}(f)$, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

这一概念先搁置, 下一章 (ch5) 续上.

Thm Let $A \subseteq \mathbb{R}$. $f: A \to \mathbb{R}$. 令 c 为 A 的一个 limit pt.

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ iff

☆ $\forall$ $A \setminus \{c\}$ 中 converge to c 的 seq. (a_n), $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = L$

as $\begin{pmatrix} n \to \infty \\ a_n \to c \end{pmatrix}$

Pf Suppose $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

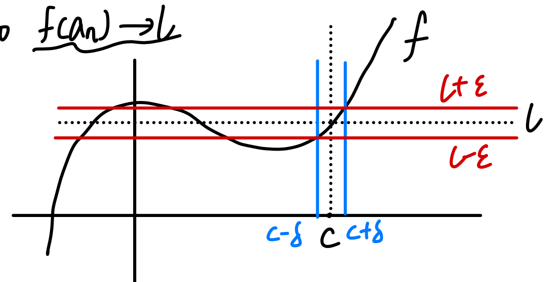
($\xrightarrow{\text{for}}$) 任取 $A \setminus \{c\}$ 中 conv. to c 的 seq. (a_n)

Let $\varepsilon > 0$. fix $\delta > 0$ s.t. $|f(x) - L| < \varepsilon$ whenever $0 < |x - c| < \delta$

Fix $N \in \mathbb{N}$ s.t. $|a_n - c| \leq \delta$ whenever $n \geq N$.

$\Rightarrow \forall n > N$, $0 < |a_n - c| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - L| < \varepsilon$

So $f(a_n) \to L$



($\xleftarrow{\text{back}}$) By contrapositive:

Suppose $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq L$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$, we can find $a_n \in A$ s.t. $|a_n - c| < \frac{1}{n}$ 但是 $|f(a_n) - L| < \varepsilon$

Such seq. (a_n) conv. to c even though $f(a_n) \not\to L$ $\square$

Corollary

(1) limits of functions 是 unique 的 (因为 ∀ conv. seq. 收敛于唯一一点)

(2) $\forall\, c, L \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lim_{x\to c} L = L}$

(3) $\forall\, c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to c} x = c$

(4) (lim. laws for functions)

Let f, g be real-valued functions

且 suppose $\exists \lim_{x\to c} f(x), \lim_{x\to c} g(x)$

$\Longrightarrow$ (i) $\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$ for all $k \in \mathbb{R}$

(ii) $\lim_{x\to c} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$

(iv) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, (provided $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$)

Corollary ⊗

$⊗ = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q 为 polynomials

$\forall$ rational function ⊗ (in particular, polynomials)

⊗ (须在 dom 内)

$r(x)$, $(\forall\, c \in dom(r))$ 都有 $\boxed{\lim_{x\to c} r(x) = r(c)}$

即: rational functions 在 dom 内一定连续

(ex: $f(x) = \frac{x^2-2}{x-2}$, dom 为 $x \neq 2$)

Corollary

if $\lim_{x\to c} f(x)$ 和 $\lim_{x\to c} g(x)$ 都存在 且

$\exists\, \delta > 0$ s.t. (whenever $0 < |x-c| < \delta$, $f(x) \le g(x)$)

$\Longrightarrow \lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$

在 δ 的 dist bound 内, $f(x)$ 都 $\le g(x)$

$\Downarrow$

Squeeze Thm for functions

if $\exists\, \delta > 0$ s.t

(whenever $0 < |x-c| < \delta$, $f(x) \le g(x) \le h(x)$)

且 $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to c} g(x) = L$

---

ex take some small δ near 0, $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$

$\Longrightarrow$ by squeeze thm, $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

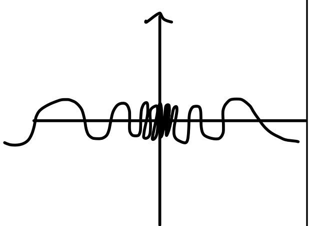
ex2 Since $-|x| \le x \underbrace{\sin\tfrac{1}{x}}_{\ge -1, \le 1} \le |x|$ for all x,

$\boxed{\lim_{x\to 0} x \sin\tfrac{1}{x} = 0}$

ex3 $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ DNE

note: $a_n = \frac{2}{n\pi} \to 0$

while $\sin\left(\frac{1}{a_n}\right)$ diverges.



后续: continuity,
uniform continuity,
derivatives,
integrals,
series,
seq. & series of functions.