Def① Antiderivatives

A function F 被称为 **an antiderivative of f on interval I**

if $\boxed{F'(x) = f(x) \text{ for all } x \in I}$

(隐含条件: F在I上是cts)

Note: if F is an antidrtv of f on I

$\Rightarrow$ 那么 $F(x)+C$ for any $C \in \mathbb{R}$ 都是f在I上的 antidrtv.

且f在I上的 $\boxed{\text{任何 antidrtv 都是 } F(x)+C \text{ 的形式}}$

---

ex for any $r \neq -1$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right) = x^r$

因而 $y = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ 为 $y = x^r$ 在$\mathbb{R}$上的 antiderivative

ex (1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$

$F(x) = x^3 - x^2 + 7x + C$

(2) $g(x) = \sin(2x)$

$G(x) = \frac{-\cos(2x)}{2} + C$

(3) $h(x) = \cos(x^2)$

$H(x) = ?$

$\boxed{\text{The antiderivative problem}}$ Given a ctn function f on interval I, find F s.t. $F' = f$ on I.

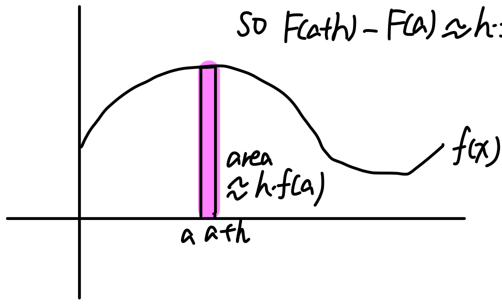
Informal 的分析:

Goal: define F s.t. $F'(a) = f(a)$ for all $a \in \mathbb{R}$

By definition, $F'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$

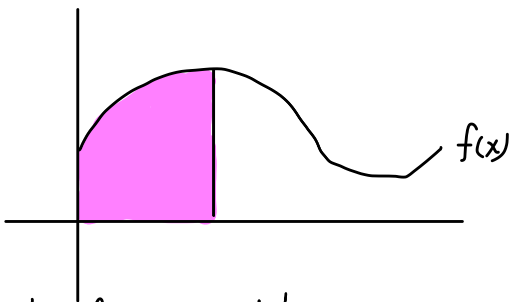
for $h \approx 0$, $\frac{F(a+h) - F(a)}{h} \approx f(a)$

So $F(a+h) - F(a) \approx h \cdot f(a)$



$\boxed{\text{Idea: "The area so far" function}}$

For $t \geq 0$, let $F(t)$ be the area of the region under the curve $y = f(x)$ between $x = 0$ and $x = t$



Then for $a > 0$ and $h \approx 0$,

$F(a+h) - F(a) \approx h \cdot f(a)$, 因而 $\frac{F(a+h) - F(a)}{h} \approx f(a)$

for all $a > 0$ when $h \approx 0$

因而这是个 reasonable guess

But what do we mean by "area"?

Strategy:

(1) 使用 area of a rectangle 为 basic notion

(2) 使用 rectangles 来 approximate complicated regions.

(3) 使 limit of such approximation define "area"

这就是最早的 Riemann Integral 的 basic idea.

Def② 基础架构: partition, subinterval, norm (mesh), tag and tagged partition

let $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 为一个 function (不需要ctn)

① 一个 $\boxed{\text{partition } \mathcal{P}}$ of $[a,b]$ 为一个 finite ordered set of points $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

where $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

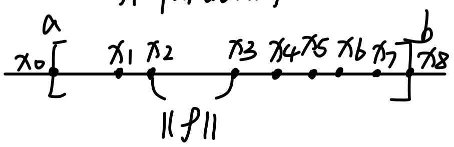
② 而后每个 Interval $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ 被称为一个 $\boxed{\text{subinterval of } [a,b]}$

③ $\|\mathcal{P}\| = \max\{\Delta x_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ where $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

mesh (最大间隔) 被称为 partition $\mathcal{P}$ 的 $\boxed{\text{norm}}$ 或 $\boxed{\text{mesh}}$

④ 一个 $\boxed{\text{tagged partition}}$ $\dot{\mathcal{P}}$ 是一个 partition $\mathcal{P} = (x_0, \ldots, x_n)$ of $[a,b]$ along with a choice of points $t_k \in I_k$ for each k. 这些 t_k 被称为 $\boxed{\text{tags.}}$

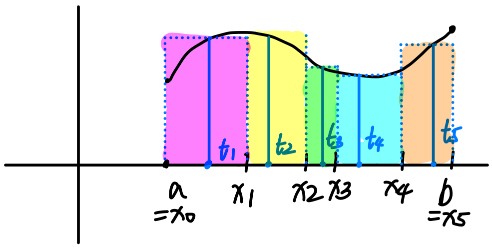
A partition $\mathcal{P}$:



Def③ Riemann sum

The Riemann sum of f on $[a,b]$ relative to tagged partition $\dot{\mathcal{P}}$ is

$$S(f,\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$ ☆



tagged partition 就是把 [a, b] 变成切分成 n 个 subinterval, 在每个 subinterval 上都取一点作为tag; $\to t_n$
而 Riemann Sum 就是对每个 subinterval Δx_n, 都用t_n $*\Delta x_n$作为来近似这一 subinterval 上的面积

Def④ Riemann Integrable

称 f 为 Riemann integrable on $[a,b]$ 的, if:

$\exists L \in \mathbb{R}$ s.t.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|S(f,\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon$
for any tagged partition $\dot{\mathcal{P}}$ of $[a,b]$ with $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$

如果 f is Riemann intble on $[a,b]$, 即 such L 存在

则 we write $L = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$ 并称它为 the Riemann integral of f on $[a,b]$ ☆

Riemann Integrable: 对于任意小的 ε , 都存在 δ 使得对于任意 mesh 小于 δ 的 partition, 都有其 Riemann Sum 和 L 的距离小于 ε.
我们发现这是一个 Cauchy 式的 Definition, 我们直觉上会觉得(稍后将证明) mesh ||P|| 越小, 即 partition 越精细, Riemann Sum 就会越接近 area so far. 因而这个定义是很符合直觉的.

(informal) Rm intble 可以理解为: $\boxed{\lim_{\|\dot{\mathcal{P}}\|\to 0} S(f,\dot{\mathcal{P}}) = L}$

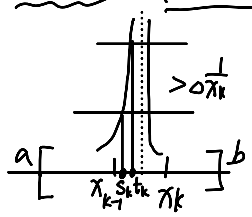
我们发现: 如果 f 在 $[a,b]$ 上是 Rm intble 的, 那么它首先必须 bounded: 否则 f 在某个地方 $\to \infty$, 无论 Δx_k 多小, 总可以令 $(\Delta x_k) t_k$ 也 unbounded, 那么这个 "limit" 就不存在了.

Thm① bounded 是 Rm intble 的必要条件. ☆

If f is Rm intble on $[a,b] \implies f$ is bounded on $[a,b]$

Pf We prove the contrapositive: 如果 f 在 $[a,b]$ 上不 bounded 则一定不 Rm intble.

Suppose f is unbounded on $[a,b]$
取 $\varepsilon = 1$. Let $\delta > 0$ be arbitrary.
Let $\dot{\mathcal{P}} = \{(x_0,\dots,x_n),(t_1,\dots,t_n)\}$ be arbitrary tagged partition of $[a,b]$ with $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$.
Fix k s.t. f is unbounded on $I_k = [x_{k-1}, x_k]$
and fix $s_k \in I_k$ s.t. $|f(s_k) - f(t_k)| > \frac{1}{\Delta x_k}$



现在令 $\dot{\mathcal{P}}' = \{(x_0,\dots,x_n),(t_1,\dots,s_k,\dots,t_n)\}$, 即把 $\dot{\mathcal{P}}$ 中的 tag t_k 换为 s_k, 其他不变

则 $|S(f,\dot{\mathcal{P}}) - S(f,\dot{\mathcal{P}}')| > \Delta x_k \cdot |t_k - s_k| = 1$
因而 f 在 $[a,b]$ 上并不 Rm intble. □

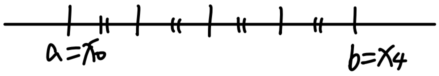
note: ① 在 First year Calculus 中, 我们学到了像 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 这种函数也是可积的
但我们发现 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,1]$ 上并不是 Riemann intble 的, 因为它 unbounded.
这样的积分叫做 improper integral
是通过 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 的方式求的.

② 存在很多 bounded 但并不 Riemann intble 的函数
比如 Dirichlet's function $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$
在 $[0,1]$ 上 bounded 但并不 Rm intble
但它是 Lebesgue intble 的 ($\int_0^1 D(x)\,dx = 0$, 因为 $\mathbb{Q}$ 在 $[0,1]$ 上的测度为0, 而 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 在 $[0,1]$ 上测度为1.
但我们之后再学 Lebesgue measure 和 Lebesgue integral.

一些特殊的 Riemann sum 形式

1. Special Partition:

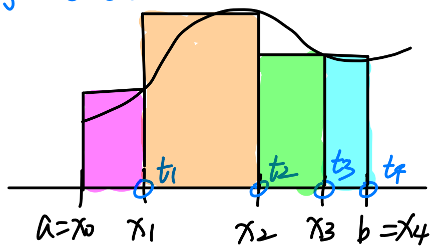
我们称一个 partition 为一个 $\boxed{\text{regular partition}}$ if Δx_k 为 constant（即 $\Delta x_k = \|\mathcal{P}\| = \frac{b-a}{n}$，间隔相同）



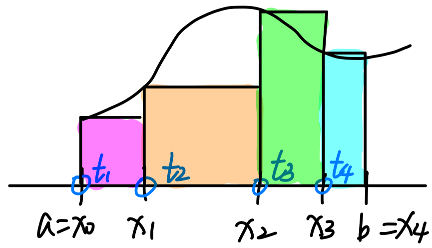
2. Special Tag Points: right/left/midpoint Riemann Sum:

(1) right Riemann Sum

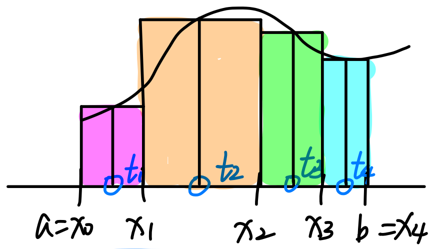
对于一个 partition $\mathcal{P}$，如果我们取所有的 $t_k = x_k$ as its tags 来获得 $\dot{\mathcal{P}}$:



则称这个 $S(f,\dot{\mathcal{P}})$ 为一个 $\boxed{\text{right Riemann Sum}}$ (of f on $[a,b]$ relative to $\dot{\mathcal{P}}$)



Similarly we have $\boxed{\text{Left Riemann Sum}}$: $t_k = x_{k-1}$



$\boxed{\text{Left Riemann Sum:}}$ $t_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$

ex Combining regular partition with special Riemann Sum

the right Riemann sum of f on $[a,b]$ using a regular partition $\mathcal{P}$ with n subintervals:

$$\boxed{S(f,\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)}$$

因为 $\forall k$, $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, $t_k = a + \left(\frac{b-a}{n}\right)k$

ex 计算 the right Riemann Sum of $f(x)=x^2$ on $[0,1]$, using a regular partition $\dot{\mathcal{P}}_n$ with n subintervals.

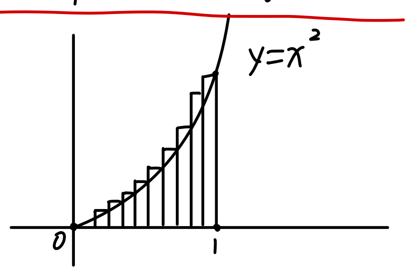
Sol $x_k = \frac{k}{n}$, $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ for $0 \le k \le n$

$t_k = \frac{k}{n}$ for $1 \le k \le n$

So $S(f,\dot{\mathcal{P}}_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S(f,\dot{\mathcal{P}}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{1}{3}$

But does it prove that $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$?



没有. 因为这只是一种 partition 上的一种 tags

而 Riemann intble 的考虑要包含 all tagged partition.

(包括 any partition 和它 tags 的 any 分布)

我们发现: Riemann intble 的条件是很难证明的.

"$\lim_{\|\dot{\mathcal{P}}\|\to 0} S(f,\dot{\mathcal{P}}) = L$"

我们可以回忆一下之间学习的 sequence 的 limit:

$\lim(a_n) = L$ iff

$\limsup(a_n) = \liminf(a_n) = L$

我们会感觉到 Riemann Sum 这个概念作用到 Riemann Integrable 的时候, tag 这个东西是一个很鸡肋的概念. 因为本质上, 对于一个固定的 partition, 我们只关心它的 Riemann Sum 的上下限而不关心对于每一种 tag 分法的 Riemann Sum. 如果它的上下限和 L 的差距在 ε 之内, 那么无论怎么分布 tags, 它和 L 的差距都在 ε 之内.

并且我们发现这件事应当是可行的. 这等价于对于一个 partition, 取每个 subinterval 上的 sup(f(x)) 和 inf(f(x)) 作为 tag, 求出这样的 tagged partitions 的 Riemann Sum. 当然, 我们知道, 符合定义的应当是 max(f(x)) 和 min(f(x)), 但这两个东西不一定能取到, 因为 f 在 [a,b] 上不一定连续, 不一定有 extreme.

但是这个理念是一个很好的想法，把 tagged partition 这个概念简化掉.

这就是 Darboux Sum 和 Darboux Integral 的基本理念. 我们接下来将引入另一种 Integral: Darboux Integral, 并证明它和 Riemann Integral 是等价的: 一个函数 Riemann 在 [a,b] 上 Riemann Integrable iff Darboux Integrable.

Def Darboux Integral

Suppose $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为 bounded 的

Let $P=(x_0,\dots,x_n)$ 为 a partition of $[a,b]$

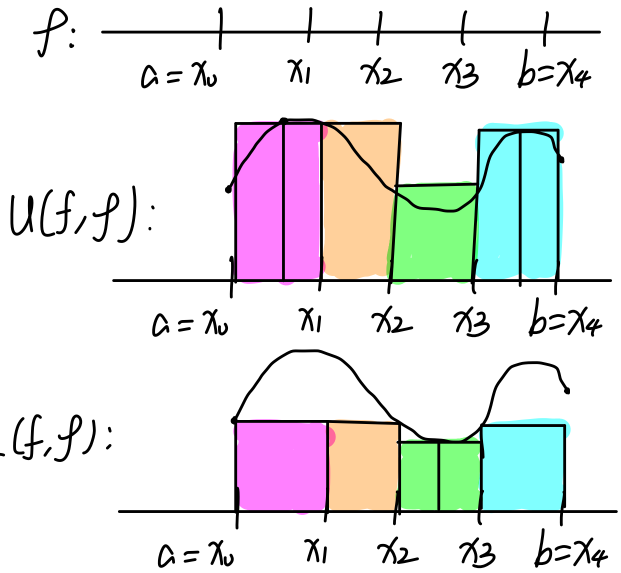
The upper and lower sum of f on $[a,b]$ 为

$$\boxed{U(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\sup f[I_k]\Delta x_k}$$

$$\boxed{L(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\inf f[I_k]\Delta x_k}$$

$(f[I_k]=\{f(x)\mid x_{k-1}\le x\le x_k\})$

ex f:



Remarks

① Darboux sum 未必是 Riemann sum. 但 it is when f is continuous (刚才把讨论)

② $\forall\, S(f,\dot{P})$, 都有 $L(f,P)\le S(f,\dot{P})\le U(f,P)$ (刚才把讨论显然)

③ 对于任何一个 partition P of $[a,b]$,

如果 Q refines P, 即 $Q\supseteq P$ (精细化)

则有 $L(f,P)\le L(f,Q)\le U(f,Q)\le U(f,P)$ $\quad$ (Q $=P\cup Q$)

对于 Darboux sum, 一定有: partition 越 refined, 则 bound 得越紧

Def The upper and lower Darboux Integral.

The upper Darboux integral of f on $[a,b]$ is:

$U(f)=U_{[a,b]}(f)=\inf\{U(f,P): P \text{ partitions } [a,b]\}$

The lower ~ :

$L(f)=L_{[a,b]}(f)=\sup\{L(f,P): P \text{ partitions } [a,b]\}$

显然: $L(f)\le U(f)$

称: f is Darboux integrable on $[a,b]$ if $U(f)=L(f)$

upper Darboux integral: 所有 partitions 的 upper sum 的下确界

lower Darboux integral: 所有 partitions 的 lower sum 的上确界.

Technical Lemma

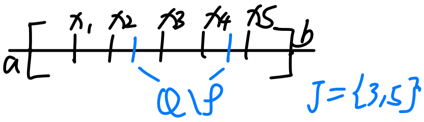
Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be bounded with $|f(x)|\le B$ for all $x\in[a,b]$

Let $Q\supseteq P=(x_k)_{k=0}^{n}$ be partitions of $[0,1]$

Let $J=\{k: Q\cap(x_{k-1},x_k)\neq\emptyset\}$

all the indexes s.t. Q has some new points in that interval than P.

ex



$\Longrightarrow L(f,P)\le L(f,Q)$ 且

$|L(f,P)-L(f,Q)|<2\cdot|J|\cdot B\cdot\|P\|$

dually, $U(f,Q)\le U(f,P)$ 且

$|U(f,Q)-U(f,P)|<2\cdot|J|\cdot B\cdot\|P\|$