Polyhedron について

Ryo Kawai

2022 年 10 月 28 日

前書き (memo)

TeX の環境をいじって色々試しているため, とても奇妙な PDF になってしまっている. 環境としては, エディタとして VScode(LaTeX Workshop,LaTeX Utilities), TeX として TeXLive2021 を使用している.

基本的に, 呼び名が複数あるものは最初に表記してある方で統一する.

....

往々にしてルー大柴さんのようになるが許して欲しい.

abs があるか macro:-¿“protect “abs

図に関しては, 現在 tikz3dtools を使おうと試みている途中であるため、もう少し後で挿入する.

目次

この PDF で出てきている疑問点

1. 正六角形で構成される多面体 (穿孔多面体) は存在するのか. おそらく存在しないと考えているが, 証明はあるのか.
2. m 角形が n 個で構成される多面体について, (m, n) がどのような時であれば存在するのか. 凸多面体はわかっているため, 凹および穿孔多面体での存在について.
3. 全ての頂点のガウス曲率が負の一定値であるような立体の構成 (構成はできたが, 他にどのようなものがあるか, 現在は各点のガウス曲率が $-pi/6$ のものだが, これをもっと小さくできないかなど).
4. 全ての頂点のガウス曲率が 0 であるような立体の最小頂点数について.

7/12 の内容

1. 全ての頂点のガウス曲率が 0 であるような立体の最小頂点数について.

1　多面体のモチベーションと定義

1.1　モチベーション

四角形の面が 7 つで構成される凸多面体は存在するのであろうか．これは私が高校生の時に疑問に思ったことである．当時自分は存在しないと予想したが, 綺麗な証明は行えなかった．その後, 大学でグラフ理論とその周辺を学び, Steinitz's の定理などを知り多面体グラフからのアプローチに興味を持った．この PDF では, 自分が興味を持った多面体についての事実や, 知られていることをまとめることとする．

1.2　定義

多面体の定義は, まるでグラフ理論におけるグラフの定義のように, 様々な分野や場面において異なる定義がされていることが多い．広辞苑を引くと, 多面体については以下のように書かれている．

> 四つ以上の平面多角形で囲まれた立体。平面の数によって四面体・五面体などという。

しかし, この定義は数学的に扱うには曖昧すぎる (?)．そこで, 数学的に扱いやすいように「多面体」という言葉をきちんと定義していきたいが, 単に多面体といっても実は様々な定義が存在し, 一般的なものが定まっていないのが現状である．ここではまず, そのようなさまざまな多面体の定義について観察する．

図形的な世界での一つの定義として「空間内で複数の多角形を辺で連結させた立体」というものがある [3]．この定義はとても直感的に分かりやすく, よく表している．この定義に基づくと, 2 枚だけの多角形でできていても多面体と捉えることができるため, その点のみが問題である．また, 「立体」は 3 次元上での集合という意味で捉えているが, これも曖昧である．

空間を切り取るといった表現が使われているものもある．また例えば, 田村トポロジーでは単体複体の実現を多面体とよんでいる．

一例として [3] の定義を見てみよう．ここでは「空間内で複数の多角形を辺で連結させた立体」を「開いた多面体」, 「4 枚以上の多角形が集まって空間を切り取る立体」を「閉じた多面体」と定義している．また, 分類について無限面体や面 (多角形) の内部自己交差も許容している．

一つ一つ例を見ていこう．(ここで詳細に定義を考える) (中略)

以上を整理すると, 私が扱いたい多面体は, 以下のような性質を満たしていてほしいことがわかる．(他に細々としたものがあるが...)

1. オイラーの公式 $(V + F - E = 2 * (1 - H))$ を満たす．
2. 頂点の数は有限個である．
3. 辺に接する面の数は必ず 2 つである．
4. 頂点に接する辺および面の数は 3 つ以上である．

そこで, 以上を踏まえて本文では多面体を以下のように定義する.

定義 1.2.1 | ⟨ polyhedron(多面体)⟩

P が **polyhedron(多面体)** であるとは, 多角形.

以降この PDF では 3 次元の有限な多面体のみを扱うこととする.
なお, ここで定義から外れてしまったが一般的に多面体に分類される立体 (単側多面体や無限多面体) についても, 他のセクションで扱いたい.

1.3 分類

定義 1.2.1 に該当する立体は数多く存在するが, その中でも大きく凸多面体, 凹多面体, 穿孔多面体に分類できる.

定義 1.3.1 | ⟨ convex polyhedron(凸多面体)⟩

多面体の中で, 二面角が π 未満かつ自己交差をしないものとして定義することができるらしい.

定義 1.3.2 | ⟨ concave polyhedron(凹多面体)⟩

種数 0 の多面体の中で凸多面体でないものを **concave polyhedron(凹多面体)** または **nonconvex polyhedron** という.

凸多面体と凹多面体をまとめて多面体ということもある. すなわち球面と同相なものを多面体ということがあるが, 本 PDF では使い分ける.

定義 1.3.3 | ⟨ toroidal polyhedron(穿孔多面体)⟩

多面体の中で, 種数が 1 以上であるもの.

2 polyhedron

2.1 Basis

多面体についての基本的な性質を紹介する．同型や同値類の説明を行う．

2.2 regular polyhedron

各頂点に接する面のパターン (?) が同一であり, 各面が同一の **regular polygon(正多角形)** で構成されている多面体は, 凸のものに限れば **regular polyhedron(正多面体)** と呼ばれ, 5 種類と完全に決定されている．また, 同一に限らず, 二種類以上の正多角形で構成された多面体は無限に存在し, その中でも特徴的な立体には様々な名前がついている．この辺は余裕があればこの章に追加する．

ここで素朴には, 上の正多面体の条件を緩めるとどうなるかという疑問がある．例えば, 「同一の正多角形で構成された多面体」とすると, 正三角形・正四角形・正五角形の場合は正多面体を貼り付けることでほぼ無限に作ることができる, 当然のことながら無限にある．この場合, 正六角形で構成される多面体はどうだろうか．これは非自明な気がするが, どこかに調べられていたら教えていただきたい．また, 各頂点を共有する面のパターン (ここでは面の数としよう) が一定な多面体は、凸に限ればおそらく容易にわかる．この場合, 凸に限らなければどれぐらい知られているのだろうか．これも非自明な気がする．

3　多面体グラフ

これ以降はグラフに関しての言葉は定義などを割愛する． 全て https://ryokawai-github.github.io/website/PDF/Graph.pdf に書いてあるようにする．

多面体グラフとは, 多面体の頂点とその辺によって表現されるグラフである．詳しい定義は以下の通りである．

定義 3.0.1

多面体グラフの定義をここに書く．

3.1　凸多面体

凸多面体の多面体グラフについては, 以下の有名な定理がある．

定理 3.1.1 | ⟨ Steinitz's theorem⟩

凸多面体の多面体グラフは単純で平面的な 3-connected なグラフであり, またその時に限る．

上の定理で完全に性質が決定できている．

平面的なグラフに関しては以下の定理がある．

定理 3.1.2 | ⟨ Kuratowski's theorem⟩

グラフが平面的である必要十分条件は, 部分グラフとして $K_5, K_{3,3}$ の構造を含まないことである．

また, グラフが平面的であるかは Boyer のアルゴリズムで線形時間で判定できるようである [4].

3-connected に関しては以下の定理がある．

定理 3.1.3

G が 3-連結グラフ (ただし K_3 は除く) であるための必要十分条件は, 以下を満たすようなグラフの列 $G_0, \cdots, G_n$ が存在することである．

1. $G_0 = K_4 \wedge G_n = G$.
2. ${}^{\forall} i < n, {}^{\exists} xy \in E(G_{i+1}), (d(x), d(y) \geq 3 \wedge G_i = G_{i+1}/xy)$.

また, 凸多面体の多面体グラフについてはよく調べられている．例えば [1] ではグラフの同型を除いた凸多面体の多面体グラフの個数が, 頂点数 10 まで調べられている．現在はもっと調べられており, 以下の表までわかっている． https://oeis.org/A000944 また, https://mathworld.wolfram.com/PolyhedralGraph.html に 7 までのものは載っていた．

表 1　多面体グラフの個数

頂点の数	グラフの同型を除いた凸多面体の多面体グラフの個数
4	1
5	2
6	7
7	34
8	257
9	2606
10	32300
11	440564
12	6384634
13	96262938
14	1496225352
15	23833988129
16	387591510244
17	6415851530241
18	107854282197058

3.2　regular

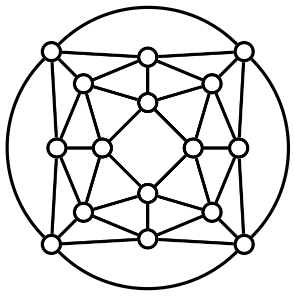
面の種類の角形数が全て等しい多面体について考えてみる．まずは凸多面体に限って考えてみる．全ての面が三角形で構成される凸多面体は, 面の数が $2n(n \geq 2)$ の時に存在することが容易にわかる．全ての面が四角形で構成される凸多面体は, 面の数が $n = 6$ or $n \geq 8$ の時に存在することがわかる．全ての面が五角形で構成される凸多面体は, 面の数が $n = 12$ or $2n(n \geq 8)$ の時に存在することがわかっている [2]．実際はもっと調べられているらしく, https://oeis.org/A308489 には [2] よりも載っている．全ての面が六角形で構成される凸多面体は存在しないことが容易にわかる．まとめると以下のようになる．

表 2　n 角形が m 個で構成される凸多面体の存在

$n \backslash m$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
3	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	$\cdots$
4	×	×	○	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	$\cdots$
5	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×	○	×	○	$\cdots$
6	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	$\cdots$

例 **3.2.1**

5-regular planar graph with 16 vertices.



4　多面体の面について

頂点の数が $f_1, f_2, \ldots, f_n (i < j \Rightarrow f_i > f_j)$ である多角形で構成される多面体 P を $P = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ で表すこととする．この時，$(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ がどのようであれば存在するのかを調べたい．https://www.southalabama.edu/mathstat/personal_pages/nmishra/mypapers/JCMCCpaper%20(planargraphs).pdf に近しい内容が調べられていそうだ.

4.1　regular

まず簡単に $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = m$ のときを考える．§ 3.2 で述べたとおり，この場合は凸多面体では存在条件が知られている．また凹多面体を含めても，存在条件は同じになると予想している．しかし，穿孔多面体を含めた多面体で考えると，この条件は大きく変化する．

まずは種数が 1 である場合のみを考えてみよう．有名なもので，シラッシの多面体が六角形が 7 つで構成される．また，六角形が $8k(k \geq 1)$ の多面体や六角形が 9 つの多面体も構成することができる．現在自分が把握できている範囲では以下のようになっている．

表 3　n 角形が m 個で構成される種数 1 の穿孔多面体の存在

$n \backslash m$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
3	?	?	?	×	?	×	?	×	?	×	○	×	○	×	○	×	○	$\cdots$
4	?	?	?	?	?	○	?	?	○	○	?	○	○	○	○	○	○	$\cdots$
5	?	?	?	×	?	×	?	×	?	×	?	×	?	×	?	×	?	$\cdots$
6	?	?	?	○	○	○	?	?	?	?	?	?	○	?	?	?	?	$\cdots$
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	$\cdots$

シラッシさんの論文 https://www.math.unm.edu/~vageli/papers/FLEX/Szilassi.pdf をみると，いろいろ載っていると思われるが，未だ読めていない．

また，種数が 1 以上のときに多面体の面の数が最低幾つであるかは知られているのだろうか．頂点の数の最小数は 7 で決定したらしい．(6 以下をコンピュータで潰したらしいが，詳しくはわからない.) なお，頂点数 7 の種数が 1 の多面体はチャーサールの多面体 (シラッシの多面体の双対多面体) が存在する．これはトーラスに K_7 を埋め込んだものと見ることができる．

5 ガウス曲率が一定な立体

[一般のガウス曲率の説明] 多面体のガウス曲率を以下で定める.

定義 5.0.1

各頂点において, 2π から接している面のその頂点での角度の和を引いた角度を **Gaussian curvature(ガウス曲率)** という. すなわち, 頂点 x でのガウス曲率は,

$$2\pi - \sum_{F \in \{x\text{ に接する面 }\}} \{F\text{ の }x\text{ での角度 }\}$$

で与えることができる.

このガウス曲率に対して, 以下のような重要な定理がなりたつ.

定理 5.0.2 | ⟨ Gauss-Bonnet theorem⟩

種数 n の多面体のガウス曲率の総和は $2\pi * 2(1-n)$

よって, 種数 0 の立体ではガウス曲率の総和は 4π, 種数 1 の立体ではガウス曲率の総和は 0, 種数 2 の立体ではガウス曲率の総和は -4π である.

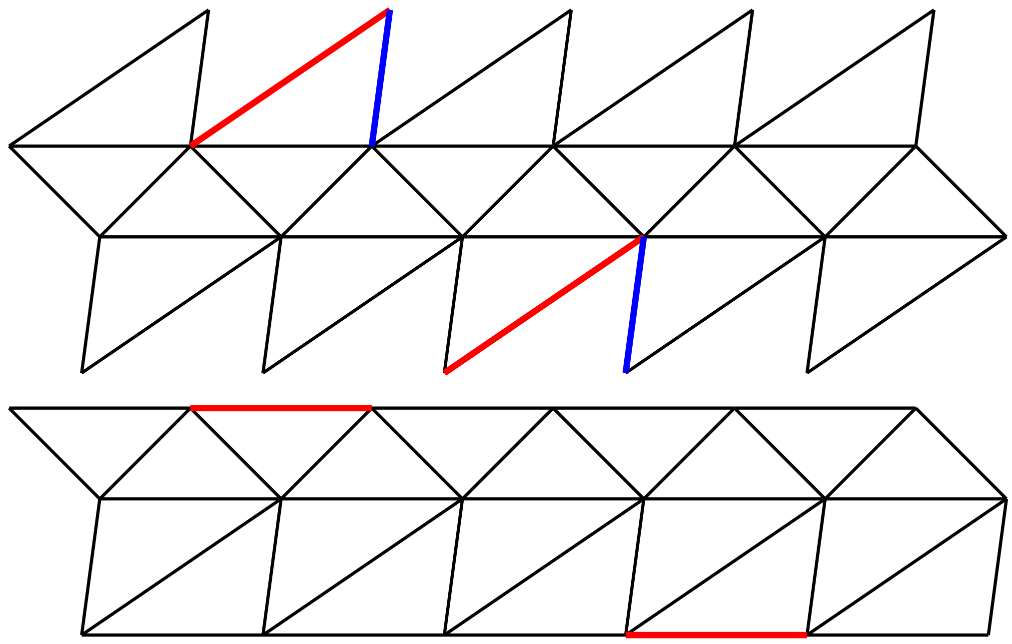
多面体の場合であれば, 全ての頂点でガウス曲率が 0 であったり負である立体が作成できる. さらに, このガウス曲率を調整して一定な値にすることもできる. 一般のガウス曲率 (?) では各点でガウス曲率が負の一定値になるような立体を作ることはできないため, このような多面体特有の性質が見られるのは非常に面白い. 全ての頂点のガウス曲率が, 負の一定値であるような立体については, https://www.researchgate.net/publication/266885256_Two_Counterexamples_of_Global_Differential_Geometry_for_Polyhedra(Title:Two Counterexamples of Global Differential Geometry for Polyhedra) に存在性が書かれている. 今回はそれらについて, 実際に具体的な構成を与えた.

(図)

これらは全て各頂点でのガウス曲率が $-\pi/6$ となっている. 頑張れば $-\pi/5$ や $-\pi/4$ にもできそうである. 実際もっと綺麗な形があると思われるので, 考えてみたい. また, 対称性が高い (要定義) 多面体でガウス曲率が一定である立体についての性質について調べてみるのも面白いかもしれない.

一方, 全ての頂点のガウス曲率が 0 である立体については, 折り紙でトーラスを作成し適切に折り目をつけてやれば, 紙の各部分でのガウス曲率は 0 であるため作成できる. https://im.icerm.brown.edu/portfolio/paper-flat-tori/ には 12 頂点のものが書かれている. このような立体に関して, 頂点数が 10 のものが坪井先生によって作成されており, 知られている. 展開図は以下の形をしている

例 5.0.3

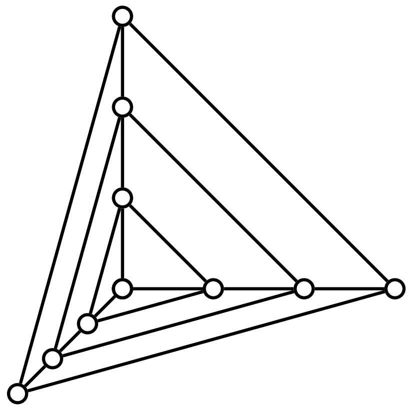


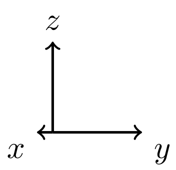
このような立体の最小の頂点数はどのぐらいなのか．(対称性が高いならば吉村パターンのようなものが出そう)．仮に各頂点周りの形が等しいと仮定すると，おそらく平面敷き詰めおよび実現の存在についての問題になると考える．https://colab.research.google.com/drive/1DCwIJ4lUge_jUUiaW_B2r8df20HHYWv9?usp=sharing に実験したデータをまとめている．また，google colab 上で立体の可視化および stl での保存が簡単にできることがわかったため，今後は mathematica に加えてこちらも活用していきたい．

6　Tikz のテスト

例 6.0.1

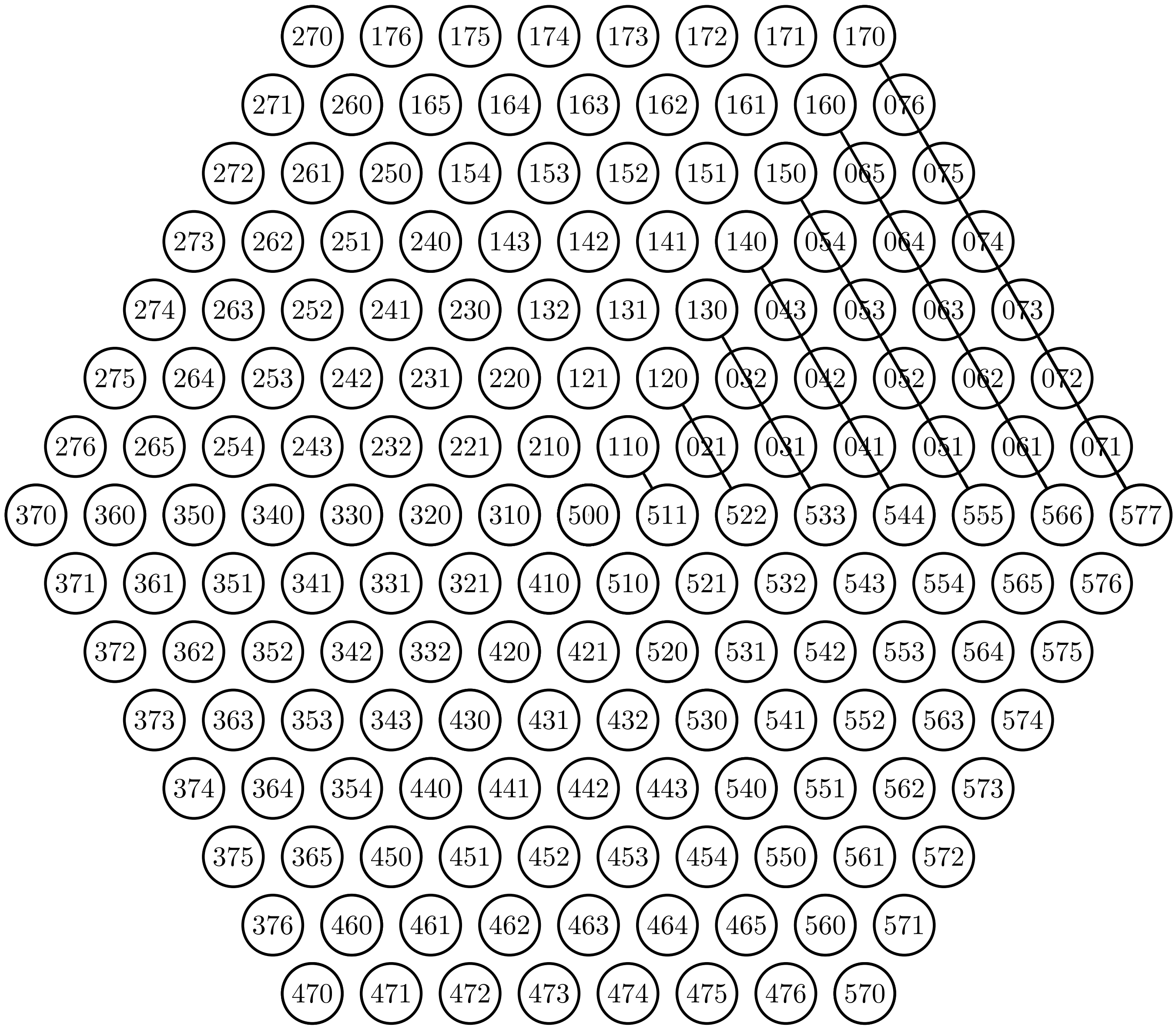
3D test



view point test 

例 6.0.2

Hexagon



索引

参考文献

[1] A. J. W. Duijvestijn and P. J. Federico. The number of polyhedral (3-connected planar) graphs. *Mathematics of Computation*, Vol. 37, No. 156, pp. 523–532, 1981.

[2] Mahdieh Hasheminezhad, Brendan D. McKay, and Tristan Reeves. Recursive generation of 5-regular planar graphs. In Sandip Das and Ryuhei Uehara, editors, *WALCOM: Algorithms and Computation*, pp. 129–140, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg.

[3] 宮崎興二. 『多面体百科』. 丸善出版, 2016 年 10 月 31 日.

[4] John M. Boyer and Wendy J. Myrvold. On the Cutting Edge: Simplified $O(n)$ Planarity by Edge Addition. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, Vol. 8, No. 3, pp. 241–273, 2004.