例 0.0.1

$\mathcal{I}$ を $\mathbf{Set}$ から $\mathbf{Set}$ への恒等関手とする. 集合 X に対して, $\mathcal{D}(X) := X \times X$, 集合間の写像 $f : X \to Y$ に対して $\mathcal{D}(f) := f \times f$ $((f \times f)(x, x') := (f(x), f(x')))$ とすると, $\mathcal{D}$ は $\mathbf{Set}$ から $\mathbf{Set}$ への関手となる. すなわち,

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}\colon & \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \text{対象の対応:} & X & \longmapsto & X \times X \\ \text{射の対応:} & f & \longmapsto & f \times f \end{array}$$

$$((f \times f)(x, x') := (f(x), f(x')))$$

である. 各 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ に対して $\mathbf{Set}$ の射 $\delta_X : \mathcal{I}(X) \to \mathcal{D}(X)$ を

$$\begin{array}{rccc} \delta_X\colon & X & \longrightarrow & X \times X \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & (x, x) \end{array}$$

とさだめ, その族を $\delta : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ とする. すると, $\mathbf{Set}$ の任意の射 $f : X \to Y$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) \circ \delta_X(\mathcal{I}(X)) &= \{(f(x), f(x)) : x \in \mathcal{I}(X)\} \\ &= \delta_Y \circ \mathcal{I}(f)(\mathcal{I}(X)) \end{aligned}$$

であるため, $\mathcal{D}(f) \circ \delta_X = \delta_Y \circ \mathcal{I}(f)$. よって δ は自然変換である.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}(X) \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "\mathcal{I}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{D}(X) \arrow[d, "\mathcal{D}(f)"] \\ \mathcal{I}(Y) \arrow[r, "\delta_Y"'] & \mathcal{D}(Y) \end{tikzcd}$$