1　未定義の用語

1.1　path and cycle

定義 1.1.1 (path)**.** path とは, 以下を満たすような空でないグラフ $P=(V,E)$ のことである.

$V=\{x_0,x_1,\cdots,x_k\}, E=\{x_0x_1,x_1x_2,\cdots,x_{k-1}x_k\}(x_0,x_1,\cdots,x_k$はすべて異なる$)$

x_0 と x_k は P で結ばれている (link) といい, x_0 と x_k を P の端点 (end) という. また $x_1,\cdots,x_{k-1}$ を P の内点という. 複数の path が互いの内点を含まないとき, それらを独立な path といい, それぞれの path が独立しているという.

表記 1.1.2. 上のような path P を簡単に $P=x_0x_1\cdots x_k$ と書いて, x_0 から $_k$ までの path と呼んだりする. また、$0\leq i\leq j\leq k$ に対して,

$$\begin{aligned} Px_i &:= x_0\cdots x_i \\ x_iP &:= x_i\cdots x_k \\ x_iPx_j &:= x_i\cdots x_j \end{aligned}$$

のように書き表す. 他にも, 直観的にわかりやすいため, 例えば path $P(\ni x),Q(\ni x,y),R(\ni y)$ に対して $Px\cup xQy\cup yR$ を $PxQyR$ と書き表す.

定義 1.1.3 (A-B path)**.** 与えられた頂点集合 A,B に対して, path $P=x_0x_1\cdots x_k$ が

$$V(P)\cap A=\{x_0\}\wedge V(P)\cap B=\{x_k\}$$

であるとき, P を A-B path という.

表記 1.1.4. 上の $A=\{a\}$ のときは, $\{a\}$-B path の意味で単に a-B path と書く. また, A,B は頂点集合としているがグラフであっても問題はないので, A,B がグラフであるときは. $V(A)$-$V(B)$ path の意味で単に A-B path と書く.

定義 1.1.5 (H-path)**.** 与えられたグラフ H に対して, その端点のみで H と接している自明でない (頂点の数が 1 以下でない) path のことを H-path という. すなわち, path $P=x_0x_1\cdots x_k$ がグラフ H の H-path であるとは,

$$P\cap H=(\{x_0,x_k\},\emptyset)\wedge|P|>1$$

であることをいう.

定義より, 長さが 1 の H-path x_0x_1 の辺は H の辺にはならない.

定義 1.1.6 (cycle)**.** path $P = x_0x_1 \cdots x_{k-1} (k \geq 3)$ のとき $C := P + x_0x_{k-1}$ を cycle (閉路) という．すなわち, cycle $C = (V, E)$ は以下を満たすようなグラフである.

$V = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}\}, E = \{x_0x_1, x_1x_2, \cdots x_{k-2}x_{k-1}, x_{k-1}x_0\} (x_0, x_1, \cdots, x_k$ はすべて異なる$, k \geq 3)$

1.2 連結度

定義 1.2.1 (連結)**.** グラフ G が連結であるとは, G の任意の 2 頂点 x, y に対してその 2 点を結ぶ G 上の path が存在することである．すなわち, ${}^{\forall}x, y \in G, {}^{\exists}P \subset G$: path s.t. P = x $\cdots$ y ときである.

セミナーでは ${}^{\forall}x, y \in G, {}^{\exists}P \subset G$: path s.t. x, y $\in$ P としていたが, やはり上の定義の方がよい気がしたので戻した. 同値であるため議論に支障はない.

定義 1.2.2 (k-連結)**.** $k \in \mathbb{N}, |G| > k$ で, $|X| < k$ である任意のグラフ X に対して $G - X$ が連結であるとき, グラフ G は k-連結であるという.

X は任意だが, 仮に G の部分グラフではない A を取ったとしても $|G| > k, |A| < k$ より $G \cap A \subset B \subset G, |B| < k$ となる B が取れ, $G - A \supset G - B$ である. そのため, $X \subset G$ としても問題はない．グラフが 1-連結であることは, 定義よりグラフが連結であることである. また定義より $n, m \in \mathbb{N}, n < m$ のとき, グラフ G が m-連結ならば G は n-連結である. グラフ G が k-連結になる最大整数 k を連結度といい, $\kappa(G)$ で表す.

2 2-連結グラフについて

最も単純な 2-連結グラフは cycle である. 他のすべての 2-連結グラフも, cycle に path を加えることで作ることが出来る.

定理 2.0.1. cycle に対して, 次のことが言える.

(i) cycle は 2-連結.

(ii) cycle 上の任意の 2 点 x, y に対して, x と y を結ぶ C 上の path が 2 本存在し, それらは独立である.

Proof. cycle を $C = P + x_0x_{k-1}, P = x_0x_1\cdots x_{k-1}$: path(k ≥ 3) とする. $V(C) = \{x_0, \cdots x_{k-1}\}$ であるから, C 上の点は $x_i(0 \leq i \leq k-1)$ の形で書ける. 今, C 上の任意の点 x_i に対して $C - x_i = x_{i+1}\cdots x_{k-1}x_0\cdots x_{i-1}$ は path となるため, C は 2-連結である. また, C 上の任意の 2 点 x_i, x_j に対して $x_ix_{i+1}\cdots x_{j-1}x_j$ と $x_jx_{j+1}\cdots x_{k-1}x_0\cdots x_{i-1}x_i$ は x と y を結ぶ C 上の独立な path となる. □

定理 2.0.2. (有限) グラフ G に対して, 以下は同値である.

(i) G は 2-連結.

(ii) G は閉路から始めて, すでに構築したグラフ H に H-path を加えることで構築できる.

(iii) G は連結で, G の任意の 2 点に対してそれを含む G 上の cycle が存在する.

Proof. (iii)⇒(i):G が 2-連結でないとすると, 仮定より 1-連結であるため, $z \in G$ *s.t.* $G-z$: 非連結 が存在する. $G - z$ が非連結より, $G - z$ 上で結ばれていないような 2 点 x, y が存在する. すなわち $^{\exists}x, y$ *s.t.* $^{\forall}P : x - y$path, P $\notin$ G. 今, $x, y \in G - z \subset G$ と仮定より, x, y を含むような G 上の cycle C が存在する. $z \notin C$ とすると, $C \subset G-z$ より x, y を結ぶ $G - z$ 上の path が存在し, 矛盾する. $z \in C$ とすると, cycle は 2-連結より $C - z$ は連結で $x, y \neq z$ であるため, x, y を結ぶ $G - z$ 上の path が存在し, 矛盾する. したがって G は 2-連結であり, (iii)⇒(i) が示せた.

(i)⇒(ii):G を 2-連結グラフとすると, G は cycle を含む[1]. したがって, (ii) のように構築される極大な部分グラフ H を含む. 仮に $xy \in E(G)\backslash E(H),\ x, y \in H$ が存在するとすると xy は H-path となり, H の極大性に反する. そのため $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$ であるから H は G の誘導部分グラフである. 今 $G \neq H$ とすると, H が G の誘導部分グラフであることから $|G| > |H|$ がわかる. よって $G - H \neq \emptyset$ であり, G の連結性より vw *s.t.* $v \in G - H \wedge w \in H$ が存在する. また G は 2-連結であるため, v-H path $P \subset G - w$ が存在する. このとき, wvP は H-path であり, G に含まれている. したがって $H \cup wvP$ は H より大きい (H を含む)(ii) のように構築されるグラフであり, これは H の極大性に反する. したがって $G = H$ であり, (i)⇒(ii) が示せた.

(ii)⇒(iii):G を cycle とすると, 明らかに (iii) を満たす. 今, H を (iii) を満たすグラフ, $P = x\cdots y$ を H-path , すなわち $H \cap P = (\{x, y\}, \emptyset)$ とする. H が (iii) を満たすことから, $^{\forall}z \in H$ に対して x と y を結ぶ path $Q = x\cdots z\cdots y$ *s.t.* $Q \subset H$ が存在する[2]. よって $P \cap Q = (\{x, y\}, \emptyset)$ より $P \cup Q$ は cycle となり[3]. この cycle は P

[1] (iii)⇒(i) より

[2] $x, z \in H$ より, x, z を含むような cycle C_1 が存在し, ゆえに x と z を結ぶような path P_1 が存在する

[3] $Q = x\cdots z\cdots y'y$ として, $yPxQy' + y'y$ は cycle であり, $yPxQy' + y'y = P \cup Q$ である.

上の任意の点と H 上の任意の点を含む cycle となる. また, この cycle は P 上の任意の 2 点を含む cycle にもなっている. したがって, $H \cup P$ は (iii) を満たすため, (ii) で構築されるグラフは (iii) を満たすことがわかり, (ii)⇒(iii) が示せた.

(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i) より, (i),(ii),(iii) は同値である. $\square$