1　未定義の用語

1.1　有向グラフ (Digraph)

定義 1.1.1 (有向グラフ (Digraph))**.** V:空でない有限な集合であり, $E \subseteq V^2 \backslash \{(x,x)|x \in V\}$ であるとき, $D = (V,E)$ を有向グラフ (Digraph) という.　また, 有向グラフ $D = (V,E)$ に対して, V を頂点集合, E を有向辺集合と呼び, 各要素を頂点 (vertices), 有向辺 (arcs,directed edges) という.

　だいたいは $E \neq \emptyset$ の場合を考える. また, 図で表す際には, $(u,v) \in E$ を u から v への矢印で表すことが多い. 定義より, 辺 (u,v) と (v,u) は区別され, これらは向きを持っていると考えることが出来る. また, (u,v) と (v,u) のように向きが逆な辺であれば、2 頂点間に辺が 2 本接続することが可能である.

定義 1.1.2 (隣接 (adjacent))**.** グラフ D の有向辺 (u,v) に対して, u は v へ隣接している (u is adjacent to v) といい, 逆に v は u から隣接している (v is adjacent from u) という.

定義 1.1.3 (近傍 (out-neighborhood,in-neighborhood))**.** グラフ D の頂点 v に対して,

$$N^+(v) = \{x \in V|(v,x) \in E\}$$

$$N^-(v) = \{x \in V|(x,v) \in E\}$$

をそれぞれグラフ D における v の外近傍 (out-neighborhood), 内近傍 (in-neighborhood) という.

定義 1.1.4 (次数 (outdegree,indegree))**.** グラフ D の頂点 v に対して,

$$od(v) = |\{(v,x) \in E|^{\exists}x \in V\}|$$

$$id(v) = |\{(x,v) \in E|^{\exists}x \in V\}|$$

をそれぞれグラフ D における v の外次数 (outdegree), 内次数 (indegree) という. また, v の次数 $d(v)$ を $d(v) = od(v) + id(v)$ と定める.

　つまり, 次数とは v に接続している辺の本数である. また, 明らかに $od(v) = |N^+|, id(v) = |N^-|$ である.

1.2　ネットワーク (Network)

定義 1.2.1 (ネットワーク (Network))**.** 有向グラフ $D = (V, E)$ が, source と sink という 2 つの異なる頂点 u, v をもち, また $c : E \to \mathbb{R}^{+}(\mathbb{R}^{+} = \{|x||x \in \mathbb{R}\})$ が存在するとき, $N = (D, v, u, c)$ をネットワーク (Network) という.

D を N の underlying digraph , c を N の容量関数 (capacity function) , $e = (x, y) \in E$ に対する $c(e) = c(x, y)$ の値を e の capacity , v, u 以外の $N(D)$ の頂点を N の intermediate vertex という.

表記 1.2.2. 有向グラフ $D, g : E(D) \to \mathbb{R}, X, Y \subset V(D)$ に対して,

$$[X, Y] = \{(x, y)|x \in X, y \in Y\}$$

$$g(X, Y) = \sum_{(x,y)\in[X,Y]} g(x, y)\ ([X, Y] = \emptyset \Rightarrow g(X, Y) = 0)$$

また, $x \in V(D)$ のとき,

$$g^{+}(x) = \sum_{y\in N^{+}(x)} g(x, y)\ ,\ g^{-}(x) = \sum_{y\in N^{-}(x)} g(y, x)$$

とし, より一般に $X \subseteq V(D)$ のとき,

$$g^{+}(X) = \sum_{x\in X} g^{+}(x)\ ,\ g^{-}(X) = \sum_{x\in X} g^{-}(x)$$

1.3　フローネットワーク (Flow Network)

定義 1.3.1 (Flow)**.** ネットワーク $N = (D, u, v, c)$ に対して, $f : E(D) \to \mathbb{R}$ が以下を満たしているとき, f は N のフロー (flow) であるという.

(i) $^{\forall}a \in E(D), 0 \leq f(a) \leq c(a)$

(ii) $\forall x \in V(D)\backslash\{u, v\}, f^{+}(x) = f^{-}(x)$

$a = (x, y) \in E(D)$ のとき, $f(a) = f(x, y)$ を a に沿ったフローという. また, (ii) をフローの保存則 (conservation equation) という.

他にも, $f : E(D) \to 0$ の場合, f はフローになる. これをゼロフローという. $X \subset V(D)$ に対して, $f^{+}(X) - f^{-}(X)$ を X から出ていくネットフロー, $f^{-}(X) - f^{+}(X)$ を X に入っていくネットフローという. とくに $x \in V(D)$ に対して, $f^{+}(x) - f^{-}(x)$

を x から出ていくネットフロー, $f^-(x) - f^+(x)$ を x に入っていくネットフローという. x が intermediate vertex であるとき, これらは (ii) より 0 となる.

$a \in E(D)$ に対して $f(a) = c(a)$ であるとき, a は f について飽和している (saturated) といい, そうでないときには不飽和 (unsaturated) であるという.

定理 1.3.2. グラフ $N = (D, u, v, c)$, f を N 上のフローとするとき,

$$f^+(u) - f^-(u) = f^-(v) - f^+(v)$$

が成り立つ.

Proof.

$$\sum_{x \in V(D)} f^+(x) = \sum_{x \in V(D)} f^-(x) \ i.e.\ f^+(V(D)) = f^-(V(D))$$

であるから, 定義 1.3.1 の (ii) より

$$f^+(u) - f^-(u) = f^-(v) - f^+(v)$$

が導ける. □

1.4 最大フロー (Maximum Flow)

定義 1.4.1 (value)**.** $N = (D, u, v, c)$ において, source u から出ていくネットフローをフロー f の value といい, $\mathrm{val}(f)$ で表す. すなわち $\mathrm{val}(f) = f^+(u) - f^-(u)$ である.

定義 1.4.2 (最大フロー (Maximum Flow))**.** $N = (D, u, v, c)$ に対して, value が最大となるフロー f のことを N の最大フロー (Maximum flow) という. すなわち $^\forall f'$:N 上のフロー, $\mathrm{val}(f) \geq \mathrm{val}(f')$ である.

一意には定まらないが存在する. これは定義 1.3.1 の (i) より従う.

定義 1.4.3 (カット (Cut))**.** $N = (D, u, v, c)$. $X \subset V(D)$ に対して $\bar{X} = V(D) - X$ と定める. $u \in X \wedge v \in \bar{X}$ であるとき, $A = [X, \bar{X}] \subset E(D)$ を N のカット (cut) という.

u から v への path は必ず K を通らなければならない,

補題 1.4.4. $N = (D, u, v, c)$: ネットワーク, f: フロー, $X \subset V(D)$,

$$f^+(X) - f^-(X) = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X)$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
f^+(X) - f^-(X) &= \sum_{x\in X} f^+(x) - \sum_{x\in X} f^-(x) \\
&= \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^+(x)} f(x,y)\right) - \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^-(x)} f(y,x)\right) \\
&= \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^+(x)\cap X} f(x,y)\right) + \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^+(x)\cap \bar{X}} f(x,y)\right) \\
&\quad - \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^-(x)\cap X} f(y,x)\right) + \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^-(x)\cap \bar{X}} f(y,x)\right) \\
&= \sum_{a\in[X,X]} f(a) + \sum_{a\in[X,\bar{X}]} f(a) - \sum_{a\in[X,X]} f(a) - \sum_{a\in[\bar{X},X]} f(a) \\
&\quad \big((\because)[A,B] = \{(x,y)\in E(D) | x\in A, y\in B\} \\
&\qquad = \{(x,y) | x\in A, y\in B\cap N^+(x)\}(\{(x,y) | x\in A\cap N^-(x), y\in B\})\big) \\
&= \sum_{a\in[X,\bar{X}]} f(a) - \sum_{a\in[\bar{X},X]} f(a) \\
&= f(X,\bar{X}) - f(\bar{X},X)
\end{aligned}
$$

□

定義 1.4.5 (容量 (Capacity))**.** $N = (D,u,v,c)$. $K = [X,\bar{X}]$ を N のカットとする. このとき, カットに含まれる arc の容量の合計値をカット K の容量 (capacity) といい,$\mathrm{cap}(K)$ と表す. すなわち

$$
\mathrm{cap}(K) = c(X,\bar{X}) = \sum_{(x,y)\in[X,\bar{X}]} c(x,y)
$$

である.

定理 1.4.6. $N = (D,u,v,c)$: ネットワーク, f:N のフロー, $K = [X,\bar{X}]$:N のカット, $\mathrm{val}(f) = f^+(X) - f^-(X) \le \mathrm{cap}(K)$

Proof. 仮定より $v \notin X$ であり, 定義1.3.1の (ii) より, ${}^\forall x \in X - \{u\}, f^+(x) - f^-(x) =$

0 である. よって

$$\begin{aligned} f^+(X) - f^-(X) &= \sum_{x \in X} f^+(X) - \sum_{x \in X} f^-(X) \\ &= \sum_{x \in X} (f^+(x) - f^-(x)) \\ &= (f^+(u) - f^-(u)) \\ &= \mathrm{val}(f) \end{aligned}$$

が成り立つ. また, $^\forall a \in E(D), 0 \leq f(a) \leq c(a)$ であるから, 補題 1.4.4 より,

$$\begin{aligned} f^+(X) - f^-(X) &= f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \\ &\leq f(X, \bar{X}) \\ &\leq c(X, \bar{X}) \\ &= \mathrm{cap}(K) \end{aligned}$$

となり, 示せた. □

1.5 最小カット (Minimum Cut)

定義 1.5.1 (最小カット (Minimum Cut))**.** $N = (D, u, v, c)$ に対して, capacity が最小となるカット K のことを N の最小カット (Minimum cut) という. すなわち $^\forall K'$:N 上のカット, $\mathrm{cap}(K) \geq \mathrm{cap}(K')$ である.

一意には定まらないが, 存在する. これはネットワークの定義より従う.

系 1.5.2. *$N = (D, u, v, c)$: ネットワーク, f:N のフロー, K:N のカット. このとき, $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K)$ ならば, f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである.*

Proof. $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K)$ とすると, 任意の N のフロー f', 任意の N のカット K' に対して, 定理 1.4.6 より, $\mathrm{val}(f') \leq \mathrm{cap}(K) = \mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(K')$ である. よって, f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである. □

系 1.5.3. *$N = (D, u, v, c)$: ネットワーク, f:N のフロー, $K = [X, \bar{X}]$:N のカット. このとき,*

$$(^\forall a \in [X, \bar{X}], f(a) = c(a)) \wedge (^\forall a \in [\bar{X}, X], f(a) = 0)$$

ならば, f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである.

Proof. 定理 1.4.6 より,

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(f) &= f^+(X) - f^-(X)\\ &= f(X,\bar{X}) - f(\bar{X},X)\\ &= c(X,\bar{X}) - 0\\ &= \mathrm{cap}(K)\end{aligned}$$

よって系 1.5.2 より f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである. □

最大フローと最小カットであるための条件を与えている. 特に系 1.5.2 は定理 2.0.1 の十分条件を与えている. 必要条件を与えるために, ここで一つ便利な概念を導入する.

定義 1.5.4 (semipath)**.** 有向グラフ D に対して semipath とは, 以下を満たすような空でない有向グラフ $P=(V,E)$ のことである.

$V=\{\omega_i | i=0,\cdots,k\}, E=\{a_i\in E(D) | a_i=(\omega_{i-1},\omega_i)\vee a_i=(\omega_i,\omega_{i_1}), i=1,\cdots k\}$(各$\omega_i$は異なる)

またこのとき, P を ω_0 から ω_k への semipath (ω_0-ω_k semipath) という. またこのとき E の元について, $a_i=(\omega_{i-1},\omega_i)$ を forward arc , $a_i=(\omega_i,\omega_{i_1})$ を backward arc という.

表記 1.5.5. 上の semipath を $P=(\omega_0,a_1,\omega_1,\cdots,\omega_{k-1},a_k,\omega_k)$ と書き表す.

1.6 f-Augmenting Semipaths

定義 1.6.1. $N=(D,u,v,c)$:ネットワーク, f:N のフロー, $P=(\omega_0,a_1,\omega_1,\cdots,\omega_{k-1},a_k,\omega_k)$:$D$ の semipath とする. P が以下の条件を満たしているとき, P は f-unsaturated な semipath であるという.

(i) $f(a_i)<c(a_i)$ (a_i:forward arc)

(ii) $f(a_i)>0$ (a_i:backward arc)

自明な semipath ($P=(\omega_0)$) は f-unsaturated とする. P が f-unsaturated な u-v semipath であるとき, f-augmenting semipath であるという.

定理 1.6.2. $N=(D,u,v,c)$: ネットワークとする. このとき, f が最大フローであることと D 上に f-augmenting な semipath が存在しないことは同値である.

Proof. $\Rightarrow$)f を最大フローとし, D 上に f-augmenting な semipath P が存在するとする. $P = (\omega_0, a_1, \omega_1, \cdots, \omega_{k-1}, a_k, \omega_k)$ とすると, $\omega_0 = u, \omega_k = v$ である. P の forward arc a_{i_n} について, $c(a_{i_n}) - f(a_{i_n}) > 0$ であり $n \le k < \infty$ であるため, $p_1 = \min\{c(a_{i_n}) - f(a_{i_n}) | a_{i_n}\text{:forward arc}\} > 0$ が存在する. 同様に P の backward arc a_{i_m} についても, $f(a_{i_n}) > 0$ であるため $p_2 = \min\{f(a_{i_m}) | a_{i_n}\text{:backward arc}\} > 0$ が存在する. $p = \min\{p_1, p_2\}$ とすれば,

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + p & \text{if } a \text{ is a forward arc on } P \\ f(a) - p & \text{if } a \text{ is a backward arc on } P \\ f(a) & \text{if } a \notin E(P) \end{cases}$$

は N のフローとなり[1],

(i) $f^+(u) + p = f'^+(u)$ (a_1:forward arc)

(ii) $f^-(u) - p = f'^-(u)$ (a_1:backward arc)

より $f^+(u) - f^-(u) < f'^+(u) - f'^-(u)$ *i.e.* $\mathrm{val}(f) < \mathrm{val}(f')$ であるから f が最大フローであることに矛盾する. よって f-augmenting な semipath P は存在しないことがわかる.

$\Leftarrow$)f が D 上 f-augmenting な semipath が存在しないような flow とする. このとき f が最大フローであることを示す. 今 $X = \{x \in V(D) | {}^{\exists}P\text{:}f\text{-unsaturated } u\text{-}x \text{ semipath}\}$ とすると, $u \in X, v \notin X$ であるため, $K = [X, \bar{X}]$ は cut となる. ${}^{\forall}a \in [X, \bar{X}], {}^{\forall}b \in [\bar{X}, X], f(a) = c(a), f(b) = 0$ であるから[2], 系 1.5.3 より f は最大フローである. また, K は最小カットとなっている. □

[1] ω_i $(0 < i < k)$ に対して

(i) $f^+(\omega_i) + p = f'^+(\omega_i), f^-(\omega_i) + p = f'^-(\omega_i)$ (a_i, a_{i+1}:forward arc)

(ii) $f^-(\omega_i) + p - p = f'^-(\omega_i)$ (a_i:forward arc, a_{i+1}:backward arc)

(iii) $f^+(\omega_i) - p + p = f'^+(\omega_i)$ (a_i:backward arc, a_{i+1}:forward arc)

(iv) $f^+(\omega_i) - p = f'^+(\omega_i), f^-(\omega_i) - p = f'^-(\omega_i)$ (a_i, a_{i+1}:backward arc)

であるため $f^+(\omega_i) - f^-(\omega_i) = f'^+(\omega_i) - f'^-(\omega_i)$ であり, $x \in V(D) \backslash V(P)$ については明らかに $f^+(x) - f^-(x) = f'^+(x) - f'^-(x)$ である. また, f' は p のとり方から各 arc の容量を超えない. ゆえに f' は flow である.

[2] 任意の $(y, z) \in [X, \bar{X}]$ について, $y \in X$ より f-unsaturated u-y semipath が存在し, $z \in \bar{X}$ より f-unsaturated u-z semipath が存在しない. $f(y, z) < c(y, z)$ とすると, f-unsaturated u-y semipath に $f(y, z), z$ を加えたものは f-unsaturated u-z semipath になり矛盾する. よって $f(y, z) = c(y, z)$ である. 同様に, 任意の $(w, x) \in [\bar{X}, X]$ についても $f(w, x) = 0$ が言える.

2　最大フロー最小カット定理

定理 2.0.1. ネットワーク $N = (D, u, v, c)$ に対して, 最大フローと最小カットの値は一致する．すなわち, f:N のフロー, K:N のカットに対して,

$$f\text{: 最大フロー} \wedge K\text{: 最小カット} \Leftrightarrow \mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K)$$

Proof. $\Leftarrow$) 系 1.5.2 より従う.

$\Rightarrow$) f: 最大フロー, K: 最小カットとする. 定理 1.6.2 より, D 上に f-augmenting な semipath は存在せず, $X = \{x \in V(D) | {}^{\exists}P\text{:}f\text{-unsaturated } u\text{-}x \text{ semipath}\}$ とすると $K' = [X, \bar{X}]$ は最小カットとなり,

$$f(a) = \begin{cases} c(a) & \text{if } a \in K' \\ 0 & \text{if } a \in [\bar{X}, X] \end{cases}$$

である. よって系 1.5.3 より $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K') = \mathrm{cap}(K)$ となり示せた. □