Polyhedron について

Ryo Kawai

2022 年 5 月 2 日

前書き (memo)

TeX の環境をいじって色々試しているため, とても奇妙な PDF になってしまっている. 環境としては, エディタとして VScode(LaTeX Workshop,LaTeX Utilities), TeX として TeXLive2021 を使用している.

基本的に, 呼び名が複数あるものは最初に表記してある方で統一する. いつか別称を整理したい.

. . . .

往々にしてルー大柴さんのようになるが許して欲しい.

macro:-¿“protect “abs

目次

1　多面体のモチベーションと定義

1.1　モチベーション

四角形の面が 7 つで構成される凸多面体は存在するのであろうか．これは自分が高校生の時に疑問に思ったことである．当時自分は存在しないと予想したが, 綺麗な証明は行えなかった．その後, 大学でグラフ理論とその周辺を学び, Steinitz's の定理などを知り多面体グラフからのアプローチに興味を持った．この PDF では, 自分が興味を持った多面体についての事実や, 知られていることをまとめることとする．

1.2　定義

数学的に扱いやすいように, 多面体という言葉をきちんと定義していきたい．しかし単に多面体といっても実は様々な区別ができ, それに応じて多くの定義がある．ここではまず, そのようなさまざまな多面体の定義をしておく．

まず初めに, 一番広い定義である多面体について定義する．しかし, 多面体の定義に関しては, 一般的なものが定まっていないのが現状である．ここでは以下のように定義する．

定義 1.2.1 | ⟨ polyhedron(多面体)⟩

polyhedron(多面体) とは, 3 次元内の面で囲われた領域のことである．

上記の多面体の定義に該当する立体は数多く存在するが, その中でも大きく凸多面体, 凹多面体, 穿孔多面体に分類できる．

定義 1.2.2 | ⟨ convex polyhedron(凸多面体)⟩

多面体の中で, 二面角が π 未満かつ自己交差をしないものとして定義することができるらしい．

定義 1.2.3 | ⟨ concave polyhedron(凹多面体)⟩

種数 0 の多面体の中で凸多面体でないもの．

凸多面体と凹多面体をまとめて多面体ということもある．すなわち球面と同相なものを多面体ということがあるが, 本 PDF では使い分ける．

定義 1.2.4 | ⟨ toroidal polyhedron(穿孔多面体)⟩

多面体の中で, 種数が 1 以上であるもの．

2 polyhedron

2.1 Basis

多面体についての基本的な性質を紹介する．同型や同値類の説明を行う．

3 多面体グラフ

これ以降はグラフに関しての言葉は定義などを割愛する． 全て https://ryokawai-github.github.io/website/PDF/Graph.pdf に書いてある．

多面体グラフとは, 多面体の頂点とその辺によって表現されるグラフである．詳しい定義は以下の通りである．

3.1 凸多面体

凸多面体の多面体グラフについては, 以下の有名な定理がある．

定理 3.1.1 | ⟨ Steinitz's theorem⟩

凸多面体の多面体グラフは単純で平面的な 3-connected なグラフであり, またその時に限る．

上の定理で完全に性質が決定できている．また, 平面的なグラフに関しては以下の定理がある．

定理 3.1.2 | ⟨ Kuratowski's theorem⟩

グラフが平面的である必要十分条件は, 部分グラフとして $K_5, K_{3,3}$ の構造を含まないことである．

また, グラフが平面的であるかは Boyer のアルゴリズムで線形時間で判定できるようである [3].
また, 3-connected に関しては以下の定理がある．

定理 3.1.3

G が 3-連結グラフ (ただし K_3 は除く) であるための必要十分条件は, 以下を満たすようなグラフの列 $G_0, \cdots, G_n$ が存在することである．

1. $G_0 = K_4 \land G_n = G$.
2. ${}^{\forall} i < n, {}^{\exists} xy \in E(G_{i+1}), (d(x), d(y) \geq 3 \land G_i = G_{i+1}/xy)$.

また, 凸多面体の多面体グラフについてはよく調べられている．例えば [1] ではグラフの同型を除いた凸多面体の多面体グラフの個数が, 頂点数 10 まで調べられている．現在はもっと調べられており, 以下の表までわかっている．https://oeis.org/A000944

表 1　多面体グラフの個数

頂点の数	グラフの同型を除いた凸多面体の多面体グラフの個数
4	1
5	2
6	7
7	34
8	257
9	2606
10	32300
11	440564
12	6384634
13	96262938
14	1496225352
15	23833988129
16	387591510244
17	6415851530241
18	107854282197058

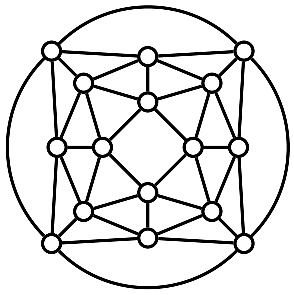
3.2　regular

面の種類の角形数が全て等しい多面体について考えてみる．まずは凸多面体に限って考えてみる．全ての面が三角形で構成される凸多面体は, 面の数が $2n(n \geq 2)$ の時に存在することが容易にわかる．全ての面が四角形で構成される凸多面体は, 面の数が $n = 6$ or $n \geq 8$ の時に存在することがわかる．全ての面が五角形で構成される凸多面体は, 面の数が $n = 12$ or $2n(n \geq 8)$ の時に存在することがわかっている [2]．実際はもっと調べられているらしく, https://oeis.org/A308489 には [2] よりも載っている．全ての面が六角形で構成される凸多面体は存在しないことが容易にわかる．まとめると以下のようになる．

表 2　n 角形が m 個で構成される凸多面体の存在

$n\backslash m$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
3	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	$\cdots$
4	×	×	○	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	$\cdots$
5	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×	○	×	○	$\cdots$
6	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	$\cdots$

例 3.2.1



5-regular planar graph with 16 vertices.

4　多面体の面について

頂点の数が $f_1, f_2, \ldots, f_n (i < j \Rightarrow f_i > f_j)$ である多角形で構成される多面体 P を $P = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ で表すこととする．この時, $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ がどのようであれば存在するのかを調べたい.

まず簡単に $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = m$ のときを考える．§ 3.2 で述べたとおり, この場合は凸多面体では存在条件が知られている．また凹多面体を含めても, 存在条件は同じになると予想している．しかし, 穿孔多面体を含めた多面体で考えると, この条件は大きく変化する．まずはシラッシの多面体が六角形 7 つで構成される．また, おそらく六角形が $8n (n \geq 1)$ の立体も構成することができる.

索引

参考文献

[1] A. J. W. Duijvestijn and P. J. Federico. The number of polyhedral (3-connected planar) graphs. *Mathematics of Computation*, Vol. 37, No. 156, pp. 523–532, 1981.

[2] Mahdieh Hasheminezhad, Brendan D. McKay, and Tristan Reeves. Recursive generation of 5-regular planar graphs. In Sandip Das and Ryuhei Uehara, editors, *WALCOM: Algorithms and Computation*, pp. 129–140, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg.

[3] John M. Boyer AND Wendy J. Myrvold. On the Cutting Edge: Simplified $O(n)$ Planarity by Edge Addition. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, Vol. 8, No. 3, pp. 241–273, 2004.