

例 0.0.1

\mathcal{I} を **Set** から **Set** への恒等関手とする. 集合 X に対して, $\mathcal{D}(X) := X \times X$, 集合間の写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して $\mathcal{D}(f) := f \times f$ ($(f \times f)(x, x') := (f(x), f(x'))$) とすると, \mathcal{D} は **Set** から **Set** への関手となる. すなわち,

$$\begin{array}{lll} \mathcal{D} & : & \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set} \\ \text{対象の対応} & : & X \longmapsto X \times X \\ \text{射の対応} & : & f \longmapsto f \times f \\ & & ((f \times f)(x, x') := (f(x), f(x'))) \end{array}$$

である. 各 $X \in \text{Ob}(\mathbf{Set})$ に対して **Set** の射 $\delta_X : \mathcal{I}(X) \rightarrow \mathcal{D}(X)$ を

$$\begin{array}{ccc} \delta_X : & X & \longrightarrow X \times X \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & x & \longmapsto (x, x) \end{array}$$

とさだめ, その族を $\delta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ とする. すると, **Set** の任意の射 $f : X \rightarrow Y$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) \circ \delta_X(\mathcal{I}(X)) &= \{(f(x), f(x)) : x \in \mathcal{I}(X)\} \\ &= \delta_Y \circ \mathcal{I}(f)(\mathcal{I}(X)) \end{aligned}$$

であるため, $\mathcal{D}(f) \circ \delta_X = \delta_Y \circ \mathcal{I}(f)$. よって δ は自然変換である.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}(X) & & \xrightarrow{\delta_X} & & \mathcal{D}(X) \\ \mathcal{I}(f) \downarrow & \circlearrowleft & & \downarrow \mathcal{D}(f) & \\ \mathcal{I}(Y) & & \xrightarrow[\delta_Y]{} & & \mathcal{D}(Y) \end{array}$$