1　未定義の用語

1.1　有向グラフ (Digraph)

定義 1.1.1 (有向グラフ (Digraph))**.** V:空でない有限な集合であり, $E \subseteq V^2 \backslash \{(x,x)|x \in V\}$ であるとき, $D = (V,E)$ を有向グラフ (Digraph) という．　また, 有向グラフ $D = (V,E)$ に対して, V を頂点集合, E を有向辺集合と呼び, 各要素を頂点 (vertices), 有向辺 (arcs,directed edges) という.

　だいたいは $E \neq \emptyset$ の場合を考える. また, 図で表す際には, $(u,v) \in E$ を u から v への矢印で表すことが多い. 定義より, 辺 (u,v) と (v,u) は区別され, これらは向きを持っていると考えることが出来る. また, (u,v) と (v,u) のように向きが逆な辺であれば、2 頂点間に辺が 2 本接続することが可能である.

定義 1.1.2 (隣接 (adjacent))**.** グラフ D の有向辺 (u,v) に対して, u は v へ隣接している (u is adjacent to v) といい, 逆に v は u から隣接している (v is adjacent from u) という.

定義 1.1.3 (近傍 (out-neighborhood,in-neighborhood))**.** グラフ D の頂点 v に対して,

$$N^+(v) = \{x \in V|(v,x) \in E\}$$

$$N^-(v) = \{x \in V|(x,v) \in E\}$$

をそれぞれグラフ D における v の外近傍 (out-neighborhood), 内近傍 (in-neighborhood) という.

定義 1.1.4 (次数 (outdegree,indegree))**.** グラフ D の頂点 v に対して,

$$od(v) = |\{(v,x) \in E|^\exists x \in V\}|$$

$$id(v) = |\{(x,v) \in E|^\exists x \in V\}|$$

をそれぞれグラフ D における v の外次数 (outdegree), 内次数 (indegree) という. また, v の次数 $d(v)$ を $d(v) = od(v) + id(v)$ と定める.

　つまり, 次数とは v に接続している辺の本数である. また, 明らかに $od(v) = |N^+|, id(v) = |N^-|$ である.

1.2 ネットワーク (Network)

定義 1.2.1 (ネットワーク (Network))**.** 有向グラフ $D=(V,E)$ が, source と sink という 2 つの異なる頂点 u,v をもち, また $c:E\to\mathbb{R}^+(\mathbb{R}^+=\{|x||x\in\mathbb{R}\})$ が存在するとき, $N=(D,v,u,c)$ をネットワーク (Network) という.

D を N の underlying digraph , c を N の容量関数 (capacity function) , $e=(x,y)\in E$ に対する $c(e)=c(x,y)$ の値を e の capacity , v,u 以外の $N(D)$ の頂点を N の intermediate vertex という.

表記 1.2.2. 有向グラフ D, $g:E(D)\to\mathbb{R}$, $X,Y\subset V(D)$ に対して,

$$[X,Y]=\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$$

$$g(X,Y)=\sum_{(x,y)\in[X,Y]}g(x,y)\ ([X,Y]=\emptyset\Rightarrow g(X,Y)=0)$$

また, $x\in V(D)$ のとき,

$$g^+(x)=\sum_{y\in N^+(x)}g(x,y)\ ,\ g^-(x)=\sum_{y\in N^-(x)}g(y,x)$$

とし, より一般に $X\subseteq V(D)$ のとき,

$$g^+(X)=\sum_{x\in X}g^+(x)\ ,\ g^-(X)=\sum_{x\in X}g^-(x)$$

1.3 フローネットワーク (Flow Network)

定義 1.3.1 (Flow)**.** ネットワーク $N=(D,u,v,c)$ に対して, $f:E(D)\to\mathbb{R}$ が以下を満たしているとき, f は N のフロー (flow) であるという.

(i) $^\forall a\in E(D), 0\leq f(a)\leq c(a)$

(ii) $\forall x\in V(D)\backslash\{u,v\}, f^+(x)=f^-(x)$

$a=(x,y)\in E(D)$ のとき, $f(a)=f(x,y)$ を a に沿ったフローという. また, (2) をフローの保存則 (conservation equation) という.

他にも, $f:E(D)\to 0$ の場合, f はフローになる. これをゼロフローという. $X\subset V(D)$ に対して, $f^+(X)-f^-(X)$ を X から出ていくネットフロー, $f^-(X)-f^+(X)$ を X に入っていくネットフローという. とくに $x\in V(D)$ に対して, $f^+(x)-f^-(x)$

を x から出ていくネットフロー, $f^-(x) - f^+(x)$ を x に入っていくネットフローという. x が intermediate vertex であるとき, これらは (2) より 0 となる.

$a \in E(D)$ に対して $f(a) = c(a)$ であるとき, a は f について飽和している (saturated) といい, そうでないときには不飽和 (unsaturated) であるという.

定理 1.3.2. グラフ $N = (D, u, v, c)$, f を N 上のフローとするとき,

$$f^+(u) - f^-(u) = f^-(v) - f^+(v)$$

が成り立つ.

Proof.

$$\sum_{x \in V(D)} f^+(x) = \sum_{x \in V(D)} f^-(x) \ i.e.\ f^+(V(D)) = f^-(V(D))$$

であるから, 定義 1.3.1 の (2) より

$$f^+(u) - f^-(u) = f^-(v) - f^+(v)$$

が導ける. □

1.4 最大フロー (Maximum Flow)

定義 1.4.1 (value)**.** $N = (D, u, v, c)$ において, source u から出ていくネットフローをフロー f の value といい, $\mathrm{val}(f)$ で表す. すなわち $\mathrm{val}(f) = f^+(u) - f^-(u)$ である.

定義 1.4.2 (最大フロー (Maximum Flow))**.** $N = (D, u, v, c)$ に対して, value が最大となるフロー f のことを N の最大フロー (Maximum flow) という. すなわち $^\forall f'$:N 上のフロー, $\mathrm{val}(f) \geq \mathrm{val}(f')$ である.

一意には定まらないが存在する. これは定義 1.3.1 の (1) より従う.

定義 1.4.3 (カット (Cut))**.** $N = (D, u, v, c)$. $X \subset V(D)$ に対して $\overline{X} = V(D) - X$ と定める. $u \in X \wedge v \in \overline{X}$ であるとき, $A = [X, \overline{X}] \subset E(D)$ を N のカット (cut) という.

u から v への path は必ず K を通らなければならない,

補題 1.4.4. $N = (D, u, v, c)$: ネットワーク, f: フロー, $X \subset V(D)$,

$$f^+(X) - f^-(X) = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X)$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
f^+(X) - f^-(X) &= \sum_{x\in X} f^+(x) - \sum_{x\in X} f^-(x) \\
&= \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^+(x)} f(x,y)\right) - \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^-(x)} f(y,x)\right) \\
&= \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^+(x)\cap X} f(x,y)\right) + \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^+(x)\cap \overline{X}} f(x,y)\right) \\
&\quad - \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^-(x)\cap X} f(y,x)\right) + \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in N^-(x)\cap \overline{X}} f(y,x)\right) \\
&= \sum_{a\in[X,X]} f(a) + \sum_{a\in[X,\overline{X}]} f(a) - \sum_{a\in[X,X]} f(a) - \sum_{a\in[\overline{X},X]} f(a) \\
&\quad \Big((\because)[A,B] = \{(x,y)\in E(D) | x\in A, y\in B\} \\
&\qquad = \{(x,y)|x\in A, y\in B\cap N^+(x)\}(\{(x,y)|x\in A\cap N^-(x), y\in B\})\Big) \\
&= \sum_{a\in[X,\overline{X}]} f(a) - \sum_{a\in[\overline{X},X]} f(a) \\
&= f(X,\overline{X}) - f(\overline{X},X)
\end{aligned}
$$

□

定義 1.4.5 (容量 (Capacity))**.** $N = (D,u,v,c)$. $K = [X,\overline{X}]$ を N のカットとする. このとき, カットに含まれる arc の容量の合計値をカット K の容量 (capacity) といい,cap(K) と表す. すなわち

$$
\mathrm{cap}(K) = c(X,\overline{X}) = \sum_{(x,y)\in[X,\overline{X}]} c(x,y)
$$

である.

定理 1.4.6. $N = (D,u,v,c)$: ネットワーク, f:N のフロー, $K = [X,\overline{X}]$:N のカット, $\mathrm{val}(f) = f^+(X) - f^-(X) \le \mathrm{cap}(K)$

Proof. 仮定より $v \notin X$ であり, 定義1.3.1 の (2) より, $^\forall x\in X-\{u\}, f^+(x)-f^-(x) =$

0 である. よって

$$\begin{aligned}
f^+(X) - f^-(X) &= \sum_{x \in X} f^+(X) - \sum_{x \in X} f^-(X) \\
&= \sum_{x \in X} (f^+(x) - f^-(x)) \\
&= (f^+(u) - f^-(u)) \\
&= \mathrm{val}(f)
\end{aligned}$$

が成り立つ. また, $^\forall a \in E(D), 0 \leq f(a) \leq c(a)$ であるから, 補題 1.4.4 より,

$$\begin{aligned}
f^+(X) - f^-(X) &= f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \\
&\leq f(X, \overline{X}) \\
&\leq c(X, \overline{X}) \\
&= \mathrm{cap}(K)
\end{aligned}$$

となり, 示せた. □

1.5 最小カット (Minimum Cut)

定義 1.5.1 (最小カット (Minimum Cut))**.** $N = (D, u, v, c)$ に対して, capacity が最小となるカット K のことを N の最小カット (Minimum cut) という. すなわち $^\forall K'$:N 上のカット, $\mathrm{cap}(K) \geq \mathrm{cap}(K')$ である.

一意には定まらないが, 存在する. これはネットワークの定義より従う.

系 1.5.2. $N = (D, u, v, c)$: ネットワーク, f:N のフロー, K:N のカット. このとき, $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K)$ ならば, f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである.

Proof. $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K)$ とすると, 任意の N のフロー f', 任意の N のカット K' に対して, 定理 1.4.6 より, $\mathrm{val}(f') \leq \mathrm{cap}(K) = \mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(K')$ である. よって, f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである. □

系 1.5.3. $N = (D, u, v, c)$: ネットワーク, f:N のフロー, $K = [X, \overline{X}]$:N のカット. このとき,

$$(^\forall a \in [X, \overline{X}], f(a) = c(a)) \wedge (^\forall a \in [\overline{X}, X], f(a) = 0)$$

ならば, f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである.

Proof. 定理 1.4.6 より,

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(f) &= f^+(X) - f^-(X)\\ &= f(X,\overline{X}) - f(\overline{X},X)\\ &= c(X,\overline{X}) - 0\\ &= \mathrm{cap}(K)\end{aligned}$$

よって系 1.5.2 より f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである. □

最大フローと最小カットであるための条件を与えている. 特に系 1.5.2 は定理 2.1.1 の十分条件を与えている. 必要条件を与えるために, ここで一つ便利な概念を導入する.

定義 1.5.4 (semipath)**.** 有向グラフ D に対して semipath とは, 以下を満たすような空でない有向グラフ $P = (V, E)$ のことである.

$V = \{\omega_i | i = 0, \cdots, k\}, E = \{a_i \in E(D) | a_i = (\omega_{i-1}, \omega_i) \vee a_i = (\omega_i, \omega_{i_1}), i = 1, \cdots k\}$(各$\omega_i$は異なる)

またこのとき, P を ω_0 から ω_k への semipath (ω_0-ω_k semipath) という. またこのとき E の元について, $a_i = (\omega_{i-1}, \omega_i)$ を forward arc , $a_i = (\omega_i, \omega_{i_1})$ を backward arc という.

表記 1.5.5. 上の semipath を $P = (\omega_0, a_1, \omega_1, \cdots, \omega_{k-1}, a_k, \omega_k)$ と書き表す.

1.6 f-Augmenting Semipaths

定義 1.6.1. $N = (D, u, v, c)$:ネットワーク, f:N のフロー, $P = (\omega_0, a_1, \omega_1, \cdots, \omega_{k-1}, a_k, \omega_k)$:$D$ の semipath とする. P が以下の条件を満たしているとき, P は f-unsaturated な semipath であるという.

(i) $f(a_i) < c(a_i)$ (a_i:forward arc)

(ii) $f(a_i) > 0$ (a_i:backward arc)

自明な semipath ($P = (\omega_0)$) は f-unsaturated とする. P が f-unsaturated な u-v semipath であるとき, f-augmenting な semipath であるという.

定理 1.6.2. $N = (D, u, v, c)$: ネットワークとする. このとき, f が最大フローであることと D 上に f-augmenting な semipath が存在しないことは同値である.

Proof. $\Rightarrow$)f を最大フローとし, D 上に f-augmenting な semipath P が存在するとする． $P=(\omega_0,a_1,\omega_1,\cdots,\omega_{k-1},a_k,\omega_k)$ とすると, $\omega_0=u,\omega_k=v$ である. P の forward arc a_{i_n} について, $c(a_{i_n})-f(a_{i_n})>0$ であり $n\le k<\infty$ であるため, $p_1=\min\{c(a_{i_n})-f(a_{i_n})|a_{i_n}\text{:forward arc}\}>0$ が存在する. 同様に P の backward arc a_{i_m} についても, $f(a_{i_n})>0$ であるため $p_2=\min\{f(a_{i_m})|a_{i_n}\text{:backward arc}\}>0$ が存在する. $p=\min\{p_1,p_2\}$ とすれば,

$$f'(a)=\begin{cases} f(a)+p & \text{if } a \text{ is a forward arc on } P\\ f(a)-p & \text{if } a \text{ is a backward arc on } P\\ f(a) & \text{if } a\notin E(P)\end{cases}$$

は N のフローとなり[1],

(i) $f^+(u)+p=f'^+(u)$ (a_1:forward arc)

(ii) $f^-(u)-p=f'^-(u)$ (a_1:backward arc)

より $f^+(u)-f^-(u)<f'^+(u)-f'^-(u)$ *i.e.* $\mathrm{val}(f)<\mathrm{val}(f')$ であるから f が最大フローであることに矛盾する. よって f-augmenting な semipath P は存在しないことがわかる.

$\Leftarrow$)f が D 上 f-augmenting な semipath が存在しないような flow とする. このとき f が最大フローであることを示す. 今 $X=\{x\in V(D)|{}^\exists P\text{:}f\text{-unsaturated } u\text{-}x \text{ semipath}\}$ とすると, $u\in X, v\notin X$ であるため, $K=[X,\overline{X}]$ は cut となる. ${}^\forall a\in[X,\overline{X}],{}^\forall b\in[\overline{X},X]$, $f(a)=c(a), f(b)=0$ であるから[2], 系 1.5.3 より f は最大フローである. また, K は最小カットとなっている. □

---

[1] ω_i $(0<i<k)$ に対して

(i) $f^+(\omega_i)+p=f'^+(\omega_i), f^-(\omega_i)+p=f'^-(\omega_i)$ (a_i,a_{i+1}:forward arc)

(ii) $f^-(\omega_i)+p-p=f'^-(\omega_i)$ (a_i:forward arc, a_{i+1}:backward arc)

(iii) $f^+(\omega_i)-p+p=f'^+(\omega_i)$ (a_i:backward arc, a_{i+1}:forward arc)

(iv) $f^+(\omega_i)-p=f'^+(\omega_i), f^-(\omega_i)-p=f'^-(\omega_i)$ (a_i,a_{i+1}:backward arc)

であるため $f^+(\omega_i)-f^-(\omega_i)=f'^+(\omega_i)-f'^-(\omega_i)$ であり, $x\in V(D)\backslash V(P)$ については明らかに $f^+(x)-f^-(x)=f'^+(x)-f'^-(x)$ である. また, f' は p のとり方から各 arc の容量を超えない. ゆえに f' は flow である.

[2] 任意の $(y,z)\in[X,\overline{X}]$ について, $y\in X$ より f-unsaturated u-y semipath が存在し, $z\in\overline{X}$ より f-unsaturated u-z semipath が存在しない. $f(y,z)<c(y,z)$ とすると, f-unsaturated u-y semipath に $f(y,z),z$ を加えたものは f-unsaturated u-z semipath になり矛盾する. よって $f(y,z)=c(y,z)$ である. 同様に, 任意の $(w,x)\in[\overline{X},X]$ についても $f(w,x)=0$ が言える.

2　最大フロー最小カット定理

2.1　maximum flow minimum cut theorem

定理 2.1.1 (maximum flow minimum cut theorem)**.** ネットワーク $N = (D, u, v, c)$ に対して, 最大フローと最小カットの値は一致する. すなわち, f:N のフロー, K:N のカットに対して,

$$f\text{: 最大フロー} \wedge K\text{: 最小カット} \Leftrightarrow \mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K)$$

Proof. $\Leftarrow$) 系 1.5.2 より従う.

$\Rightarrow$)f: 最大フロー, K: 最小カットとする. 定理 1.6.2 より, D 上に f-augmenting な semipath は存在せず, $X = \{x \in V(D) | {}^{\exists}P{:}f\text{-unsaturated } u\text{-}x \text{ semipath}\}$ とすると $K' = [X, \overline{X}]$ は最小カットとなり,

$$f(a) = \begin{cases} c(a) & \text{if } a \in K' \\ 0 & \text{if } a \in [\overline{X}, X] \end{cases}$$

である. よって系 1.5.3 より $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K') = \mathrm{cap}(K)$ となり示せた. □

2.2　The Ford-Fulkerson Algorithm

$N = (D, u, v, c)$: ネットワークとする.

1. flow f を一つとる.
2. f-augmenting な semipath を見つける. 見つけれなかった場合は終了する.
3. 定理 1.6.2 の $\Rightarrow$ で作ったように f' を構成する.
4. $f = f'$ として Step 2 に戻る.

2.3　The Edmonds-Karp Algorithm

$N = (D, u, v, c)$: ネットワークとする. 各点にラベルを付け, ラベル付けされているがスキャンされていない頂点のリスト L を用意する. ラベルは 2 つの値のペアである.

1. flow f を一つとる. N の intermediate vertex w において f-unsaturated な u-w semipath P が存在するときに, P の直前の頂点 x について $(x, w) \in E(P)$ であればラベルは $(x+, \epsilon(w))$, $(w, x) \in E(P)$ であればラベルは $(x-, \epsilon(w))$ とする.

2. u のラベルは $(-, \infty)$ とし, u をリスト L に加える.

3. $L = \emptyset$ ならばとめ. そうでなければ L の最初の元 x(ラベル $(z+, \epsilon(x))$ or $(z+, \epsilon(x))$ を持つ) について,

    3.1. flow f を一つとる.

    3.2. ラベルを付ける. u は $(-, \infty)$ とし, リスト L に加える.

4. v がラベルを持っている場合, Step 5 へ, そうでなければ 3 へ行く.

5. v がラベルを持っている場合, Step 5 へ, そうでなければ 3 へ行く.

6. ラベルを削除し, L から頂点を全て削除し, Step 2 に戻る.