

# Polyhedron について

Ryo Kawai

2023 年 1 月 22 日

## 目次

1	多面体のモチベーションと定義 (序章)	3
1.1	モチベーション . . . . .	3
1.2	基本的な概念 . . . . .	3
1.3	分類 . . . . .	5
1.4	さまざまな多面体 . . . . .	5
2	多面体の基本的な性質 (準備)	6
2.1	定義 . . . . .	6
2.2	性質 . . . . .	8
3	ガウス曲率が一定な多面体 (主結果)	11
3.1	一般のガウス曲率について . . . . .	11
3.2	多面体のガウス曲率 . . . . .	13
3.3	ガウス曲率が一定である曲面・多面体 . . . . .	14
4	今後の展望	17

# 1 多面体のモチベーションと定義 (序章)

このセクションは序章として多面体の歴史や概要について説明する場所にする予定である。

## 1.1 モチベーション

四角形の面が7つで構成される凸多面体は存在するのであろうか。これは私が高校生の時に疑問に思ったことである。当時自分は存在しないと予想したが、綺麗な証明は行えなかった。その後、大学でグラフ理論とその周辺を学び、Steinitz's の定理などを知り多面体グラフからのアプローチに興味を持った。この PDF では、自分が興味を持った多面体についての事実や、知られていることをまとめることとする。

## 1.2 基本的な概念

私が今回扱いたい対象である多面体について、まずは定義から確認していきたい。しかし実は多面体の定義は、まるでグラフ理論におけるグラフの定義のように、様々な分野や場面において異なる定義がされていることが多く、一般的なものが定まっていない。そこでまず、そのようなさまざまな多面体の定義について観察してみる。

例えば広辞苑を引くと、多面体については以下のように書かれている。

四つ以上の平面多角形で囲まれた立体。平面の数によって四面体・五面体などという。

しかし、これは数学的に扱うには曖昧すぎる (?)。

図形的な世界での一つの定義として「空間内で複数の多角形を辺で連結させた立体」というものがある [2]。この定義はとても直感的に分かりやすく、よく表している。この定義に基づくと、2枚だけの多角形でできていても多面体と捉えることができるため、その点が問題である。また、「立体」は3次元上での集合という意味で捉えているが、これも曖昧である。

空間を切り取るといった表現が使われているものもある。また例えば、田村トポロジーでは単体複体の実現を多面体とよんでいる。

一例として [2] の定義を見てみよう。ここでは「空間内で複数の多角形を辺で連結させた立体」を「開いた多面体」、「4枚以上の多角形が集まって空間を切り取る立体」を「閉じた多面体」と定義している。また、分類について無限面体や面 (多角形) の内部自己交差も許容している。凸多面体に限れば、広く知れ渡った定義がある。

一つ一つ例を見ていこう。(ここで詳細に定義を考える) (中略)

以上を整理すると、私が扱いたい多面体は、以下のような性質を満たしてほしいことがわかる。(他に細々としたものがあるが...)

1. オイラーの公式 ( $V + F - E = 2 * (1 - S)$ ) を満たす。

2. (頂点の数は有限個である).
3. 辺に接する面の数は必ず 2 つである. (閉曲面である)
4. 頂点に接する辺および面の数は 3 つ以上である.
5. 自己交差をしない. (要検討)

(文章が良くないので, 校正の必要あり) なので, 多面体を以下のように定める.

#### 定義 1.2.1

**polyhedron(多面体)** とは, 立体の中で

1. 頂点の数は有限個であり, 連結である.
2. 各面が多角形 (平面) である.
3. 辺に接する面の数は必ず 2 つである. (閉曲面である)
4. 頂点に接する辺および面の数は 3 つ以上である.
5. 自己交差をしない. (要検討)

を満たすものとする.

一般に多面体には以下のような性質や特徴量が知られている.

1. オイラー標数 ( $V - E + F$ )
2. 種数 (穴の数)
3. ガウス曲率または不足角 ( $2 * \pi$ -頂点周りの角度の合計)
4. 凸性 (convex hull と一致する)
5. 二面角 (辺を共有する面同士の角度)
6. 立体角 (多面体を球で切った時の面積 (Spherical Excess))

また, これらについて以下のような性質が成り立つ.

1. オイラー標数 =  $2 - 2 * \text{種数}$
2. 全ての不足角の和 =  $2\pi * \text{オイラー標数}$
3. 全ての立体角の和 =  $2 * (\text{全ての二面角の和} + (V - E)\pi)$
4. 凸であるならば, 各点でガウス曲率は正

重要なのは, 不足角は辺を細分した場合にも影響しないということである. 立体角は辺を細分した際に影響が出てしまう. 不足角は 2 次元での多角形における「外角」を 3 次元に拡張したような概念になっている. また, 立体角と不足角は球面三角法によって関係付けることができるが, 綺麗な関係式になるのかはとても疑問である (手計算の範囲では綺麗にできなかった).

### 1.3 分類

定義 1.2.1 に該当する立体は数多く存在するが, その中でも大きく

1. 凸多面体
2. 凹多面体
3. 穿孔多面体

に分類できる.

#### 定義 1.3.1 | $\langle \text{convex polyhedron}(\text{凸多面体}) \rangle$

多面体の中で, 二面角が  $\pi$  未満かつ自己交差をしないものとして定義することができるらしい.

#### 定義 1.3.2 | $\langle \text{concave polyhedron}(\text{凹多面体}) \rangle$

種数 0 の多面体の中で凸多面体でないものを **concave polyhedron(凹多面体)** または **nonconvex polyhedron** という.

凸多面体と凹多面体をまとめて多面体ということもある. すなわち球面と同相なものを多面体ということがあるが, 本 PDF では使い分ける.

#### 定義 1.3.3 | $\langle \text{toroidal polyhedron}(\text{穿孔多面体}) \rangle$

多面体の中で, 種数が 1 以上であるもの.

### 1.4 さまざまな多面体

さまざまな多面体について, とりあえずリスト形式でまとめておこう.

1. 凸多面体
2. 凹多面体
3. 穿孔多面体
4. poset から作られる多面体 [http://pantodon.jp/index.rb?body=polytope\\_from\\_poset](http://pantodon.jp/index.rb?body=polytope_from_poset)
5. 有限距離空間から定義される多面体 [http://pantodon.jp/index.rb?body=fundamental\\_polytope](http://pantodon.jp/index.rb?body=fundamental_polytope)
6. グラフからできる多面体 [http://pantodon.jp/index.rb?body=graph\\_polytopes](http://pantodon.jp/index.rb?body=graph_polytopes)

## 2 多面体の基本的な性質 (準備)

### 2.1 定義

多面体の定義をしよう.

まず最初に構造のみを抜き出した, 抽象的な多面体を考える.

#### 定義 2.1.1 | $\langle \text{abstract polyhedron}(\text{抽象多面体}) \rangle$

**abstract polyhedron**(抽象多面体) とは, **vertex**(頂点) と呼ばれる object の集合  $V$  と,  $V$  の異なる 2 元からなる部分集合である **edge**(辺) の集合  $E$  と,  $V$  の異なる 3 つ以上の元からなる部分集合である **face**(面) の集合  $F$  の組  $P = (V, E, F)$  で, 以下を満たすものである.

1. 各面は多角形である. すなわち,

$$\forall f = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \in F, 0 \leq \forall i \neq j \leq n, \begin{cases} \{v_i, v_j\} \in E, & |i - j| = 1 \text{ or } n \\ \{v_i, v_j\} \notin E, & 2 \leq |i - j| \leq n - 1 \end{cases}$$

2. 任意の辺は必ず二つの頂点及び面に接している. すなわち,  $\forall e \in E, |\{f \in F \mid e \subset f\}| = 2$
3. 各頂点には必ず 3 つ以上の辺が隣接している. すなわち,  $\forall v \in V, |\{e \in E \mid v \in e\}| \geq 3$
4. 各頂点の近傍は, その頂点を除いても連結である. すなわち,  $\forall v \in V, \forall x, y \in \{w \in f \mid v \in f \in F\}, \exists x - y \text{ Path without } v$
5. 有限であり連結である. すなわち,  $|V| < \infty, \forall v, v' \in V, \exists v - v' \text{ Path}$

すなわち,  $V, E, F : \text{set}$  は

$$E \subseteq \binom{V}{2}, F \subseteq \bigcup_{3 \leq k \leq |V|} \binom{V}{k}^{*1}$$

である. 抽象多面体  $P$  の頂点, 辺, 面の集合をそれぞれ  $V(P), E(P), F(P)$  で表す.

注意すべきは, この定義の多面体には各面が平面であるという情報が載っていないということである.

#### 定義 2.1.2 | $\langle d_n \text{ polyhedron} \rangle$

抽象多面体  $P = (V, E, F)$  と, その頂点間で定義される以下の関数  $d_n$  の組  $P_{d_n} = (P, d_n)$  を  **$d_n$  polyhedron**( $d_n$  多面体) という.

$$\begin{aligned} d_0 &: \{(v, v') \in V \times V \mid \{v, v'\} \in E \vee v = v'\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ d_1 &: \{(v, v') \in V \times V \mid \{v, v'\} \subset f \in F\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ d_2 &: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

---

<sup>\*1</sup>  $\binom{A}{k} = \{X \subset A \mid |X| = k\}$

ただし  $d_n$  は以下を満たす.

1.  $\forall x, y \in V, d_n(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\forall x, y \in V, d_n(x, y) = d_n(y, x)$
3.  $\forall x, y, z \in V, (x, y), (y, z), (z, x) \in \text{dom } d_n \Rightarrow d_n(x, z) \leq d_n(x, y) + d_n(y, z)$

このように定めると, 定義域を適切に制限することで,  $d_2$  多面体は  $d_1$  多面体とみることができることがわかる. しかし, これらの多面体は私が考えたい 3 次元空間で実現できるものばかりとは限らない. むしろ 3 次元空間では実現できないものがほとんどであろう. そこで, まず「3 次元空間で実現できる」という言葉をしっかりと定義したい. 具体的には距離空間の埋め込みと同じようなことをする.

### 定義 2.1.3

抽象多面体  $P = (P, \emptyset)$  または  $d_n$  多面体  $(P, d_n)$  に対して, 以下を満たすような 3 次元ユークリッド空間  $(\mathbb{R}^3, d)$  への写像  $\varphi: V(P) \rightarrow \mathbb{R}^3$  が存在するとき,  $\varphi$  を  $P$  の **realization(実現)** という.

1.  $\forall (v, v') \in \text{dom } d_n, d_n(v, v') = d(\varphi(v), \varphi(v'))$
2.  $\forall f = \{v_0, v_1, \dots, v_k\} \in F(P), \text{rank} \begin{pmatrix} \varphi(v_0) & \varphi(v_1) & \cdots & \varphi(v_k) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 3$

実現は一意であるとは限らない. また, 実現が存在するとも限らない. 実現が存在する場合, その像  $\text{Im } \varphi$  を  $|\varphi|$  で表す.

例えば有限距離空間で有名な三脚は, いずれもユークリッド空間に埋め込めないため, それを上定義の  $d_2$  多面体で構成してみよう.

### 例 2.1.4

$V = \{o, x, y, z\}, E = \binom{V}{2}, F = \{\{o, x, y\}, \{o, y, z\}, \{o, z, x\}, \{x, y, z\}\}, d(o, x) = d(o, y) = d(o, z) = 1, d(x, y) = d(y, z) = d(z, x) = 2$  である  $d_2$  多面体  $((V, E, F), d)$  は, 実現が存在しない.

よって, 上記の多面体の中でも, さらに実現可能なクラスに対しての議論をしたりすることになる. 次に多面体について以下の同型の概念を定義する.

### 定義 2.1.5 | $\langle \text{polyhedron isomorphism} \rangle$

2 つの抽象多面体  $P, P'$  に対して, その間の写像  $\varphi: V(P) \rightarrow V(P')$  を  $\varphi: P \rightarrow P'$  と表す. 2 つの抽象多面体  $P = (V, E, F), P' = (V', E', F')$  に対して,  $\varphi: P \rightarrow P'$  が

$$\{x, y\} \in E \Rightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E', \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \in F \Rightarrow \{\varphi(v_0), \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)\} \in F'$$

を満たすとき,  $\varphi$  を **polyhedron homomorphism(多面体準同型写像)** であるという.  $\varphi$  が全単射であり  $\varphi^{-1}$  も多面体準同型写像であるとき,  $\varphi$  を **polyhedron isomorphism(多面体同型写像)** という. またこのとき,  $P$  と  $P'$  は **polyhedron isomorphic(多面体同型)** であるといい,  $P \simeq P'$  と書き表す.

### 定義 2.1.6 | $\langle d_n \text{ polyhedron isomorphism} \rangle$

ドメインの包含を加える. 2つの  $d_n$  多面体  $(P, d), (P', d')$  に対して多面体準同型写像  $\varphi : P \rightarrow P'$  が存在し,

$$\forall (v, v') \in \text{dom } d, d(v, v') = d'(\varphi(v), \varphi(v'))$$

を満たすとき,  $\varphi$  をそれぞれ  **$d_n$  polyhedron homomorphism**( $d_n$  多面体準同型写像) であるという.  $\varphi$  が全単射であり  $\varphi^{-1}$  も  $d_n$  多面体準同型写像であるとき,  $\varphi$  を  **$d_n$  polyhedron isomorphism**( $d_n$  多面体同型写像) という. またこのとき,  $P$  と  $P'$  は  **$d_n$  polyhedron isomorphic**( $d_n$  多面体同型) であるといい,  $P \stackrel{d_n}{\simeq} P'$ <sup>\*2</sup>と書き表す.

また, 形式的に多面体同型を  $d_{-1}$  多面体同型として扱うこともある.

### 表記 2.1.7

2つの多面体の実現  $\varphi, \varphi'$  のそのドメイン同士が  $d_n$  多面体同型である時, 単に  $\varphi$  と  $\varphi'$  が  $d_n$  多面体同型であるという. また,  $\text{dom } \varphi \simeq \text{dom } \varphi'$  などを単に  $\varphi \simeq \varphi'$  や  $|\varphi| \simeq |\varphi'|$  と書いたりする.

### 系 2.1.8

2つの多面体の実現  $\varphi, \varphi'$  に対して,  $i \geq j$  ならば,

$$\varphi \stackrel{d_i}{\simeq} \varphi' \Rightarrow \varphi \stackrel{d_j}{\simeq} \varphi'$$

## 2.2 性質

多面体を持つ性質や値について, 前述の定義に沿って定義していこう. まずは多面体の大まかな形を表すことができるオイラー標数についてである.

### 定義 2.2.1

抽象多面体  $P = (V, E, F)$  に対して,

$$\chi(P) = |V| - |E| + |F|$$

を多面体  $P$  の **Euler characteristic**(オイラー標数) という.

このオイラー標数は, 多面体の分野ではよく行われる, 多面体の面をその対角線で分割し, 新たに多面体を作成する動作で保存されるという性質がある. この動作を細分と呼ぶ. 定義は以下の通りである.

### 定義 2.2.2

抽象多面体  $P = (V, E, F)$  において, 三角形ではない (*i.e.*  $|f| \geq 4$ ) 面  $f \in F$  が存在するとき,

---

<sup>\*2</sup> 索引なし



$\{x, y\} \notin E \wedge \{x, z\}, \{y, z\} \in E$  であるような  $x, y, z \in f$  に対して,

$$P' = (V, E + \{x, y\}, F - f + \{x, y, z\} + (f - z))$$

を  $P$  の **subdivision**(細分) という.  $P$  に細分を繰り返し行うことで, 全ての面を三角形にした (*i.e.*  $F \subset \binom{V}{3}$ ) 多面体を  $P$  の **triangle subdivision**(三角形分割) という.

細分後の多面体は, 細分前の多面体に対して辺が 1 本増え, 面が 1 つ減り 2 つ増えている. そのため, 細分ではオイラー標数は変化せず, 多面体を三角形分割してもオイラー標数は変化しないことがわかる. すなわち, 面の形をあまり変えないのであればオイラー標数は変化せず, オイラー標数は多面体の大まかな形を見分ける特徴量となることが示唆される. さらにオイラー標数について, 以下の重要な事実が知られている [3].

### 定理 2.2.3

多面体に空いている穴 (要定義) の数を **genus**(種数) という. 穴が  $g$  個空いている多面体  $P$  について,

$$\chi(P) = 2(1 - g)$$

上記の定理により, オイラー標数は多面体のおおまかな形を完全に説明していることがわかる.

最後に多面体における様々な角度について触れたい. 角度を定義するためには実現の存在が不可欠であるため, 以降では多面体と言えは実現が存在するものとして考える. 多面体の角度にはいくつか種類があるが, ここでは頂点の尖具合を表す量として不足角を定義したい. まずは多面体の各面の角 (かど) での角度を定義する.

### 定義 2.2.4 | $\langle \text{face angle} \rangle$

$d_1$  多面体  $P$  の三角形分割を  $P'$  とする.  $P'$  の各頂点  $x \in V(P')$  と,  $v$  を含む面  $f' = \{x, y, z\} \in F(P')$  に対して定まる関数  $a$  を以下のように定める.

$$a(x, f') = \arccos \left( \frac{d(x, y)^2 + d(x, z)^2 - d(y, z)^2}{2 * d(x, y) * d(x, z)} \right)$$

そして,  $P$  の各頂点  $v \in V(P)$  と,  $v$  を含む面  $f \in F(P)$  に対して定まる以下の量  $A$  を  $f$  における  $v$  の **face angle**(面角) という.

$$A(v, f) = \sum_{f' \in F(P') \wedge f' \in f} a(v, f')$$

この定義によって,  $\mathbb{R}^3$  での私たちが多面体で考える各面の角度は, 面角によって表すことができる. また, 定義より明らかに次の事実が成り立つ.

### 命題 2.2.5

実現の存在する三角形分割された多面体の各面での面角の和は  $\pi$  である. またより一般に, 実現の存在する多面体の面  $f$  が  $|f| = n$  であるとき,  $f$  における面角の和は  $(n - 2)\pi$  である.

さて, 私たちはこれから多面体の各頂点がどれくらい曲がっているか (尖っているか) を議論したい. そのため各頂点においてどのくらい尖っているかを表す量が欲しい. たとえば平面上では曲がり具合は 0 になって欲しいし, テトラパック (三角錐) の各頂点では曲がり具合が正の値になって欲しい. 自然に頂点周りの面角の和で定義することが考えられる.

#### 定義 2.2.6 | $\langle \text{angular defect} \rangle$

$d_1$  多面体  $P$  について定まる以下の量  $G: V(P) \rightarrow \mathbb{R}$  を **angular defect**(不足角) という.

$$G(v) = 2\pi - \sum_{f \in F(P) \wedge v \in f} A(v, f)$$

上の量は, 多面体の各頂点でどのくらい尖っているかがざっくりと表現されている. さて, 不足角は実はオイラー標数と密接な関係がある. 重要なデカルトの不足角定理を紹介しよう.

#### 定理 2.2.7

$d_1$  多面体  $P$  の不足角の総和は  $2\pi\chi(P)$

**Proof.**  $P = (V, E, F)$  とし,  $P$  の三角形分割を  $P' = (V', E', F')$  とする.  $P'$  が  $P$  の三角形分割であることから,

$$|V| = |V'|, |F| - |E| = |F'| - |E'|, 2|E'| = 3|F'|$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
P \text{ の不足角の総和} &= \sum_{v \in V} G(v) \\
&= \sum_{v \in V'} G(v) \\
&= \sum_{v \in V'} \left( 2\pi - \sum_{f \in F \wedge v \in f} A(v, f) \right) \\
&= 2\pi * |V| - \sum_{v \in V'} \sum_{f \in F \wedge v \in f} \sum_{f' \in F' \wedge f' \in f} A(v, f') \\
&= 2\pi * |V'| - \sum_{v \in V'} \sum_{f' \in F' \wedge v \in f'} A(v, f') \\
&= 2\pi * |V'| - \sum_{f' \in F'} \sum_{v \in f'} A(v, f') \\
&= 2\pi * |V'| - \sum_{f' \in F'} \pi \\
&= 2\pi * |V'| - \pi * |F'| \\
&= 2\pi * |V'| - \pi * (|F'| + 2|E'| - 3|F'|) \\
&= 2\pi * (|V'| - |E'| + |F'|) \\
&= 2\pi * (|V| - |E| + |F|) \\
&= 2\pi \chi(P)
\end{aligned}$$

□

これはとても重要な定理で，一般の曲面論のガウス・ボネの定理と似通った性質が出てきている．また，多面体は閉曲面を離散化したものと考えれば，不足角は曲面論におけるガウス曲率と対応した概念であると考えられることができる．

### 3 ガウス曲率が一定な多面体 (主結果)

一般の閉曲面では，必ずガウス曲率が正である点が存在する．しかし多面体では，ガウス曲率に対応する概念である不足角について，全てが負であるようなものが存在する．今回はそのような不足角が一定であるような多面体の具体的な構成を与えた．

#### 3.1 一般のガウス曲率について

本題に入る前に，一般の曲面論について述べておきたい．なお，このセクションは [4] に従う．まずは対象となる曲面について定義しよう．

### 定義 3.1.1

$\mathbb{R}^3$  の部分集合  $S$  が **surface(曲面)** であるとは,  $\mathbb{R}^2$  のある領域  $D$  の任意の要素  $(u, v)$  に対して  $\mathbb{R}^3$  の点  $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  が定まるものであり,  $S(u, v)$  が  $u, v$  の 2 変数の関数としていくらかでも偏微分可能であるときをいう<sup>\*3</sup>. このとき,  $u, v$  を曲面  $S$  の **parameter(パラメータ)** という.

曲面  $S$  が正則性の仮定, すなわち

$$\text{任意の } (u, v) \in D \text{ に対してベクトル } \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \text{ と } \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \text{ が線型独立である}$$

を満たすとき,  $S$  は **regular surface(正則曲面)** であるという. 以降では曲面という場合には正則曲面のことを指す.

曲面は書いて字の如く曲がっている面を表したものである. したがってその曲がり具合である曲率を考えたい. しかし曲線などとは異なり, 曲面は 2 次元的な広がりをもつため, 1 つの量では表せない. それらの多くの曲がり具合の情報の中から部分的な情報を量として抽出する方法もいくつか考えられ, 曲率の概念も複数存在する. 曲線の曲率はすでに知っての通り曲率半径の逆数で与えられているから, 曲面の曲率を定義する一つの方法は, 曲面上の曲線を選び出すことである. これを曲面に垂直な平面との切り口によって実現したものが次の法曲率である.

### 定義 3.1.2

曲面  $S$  上の点  $p_0$  と, 点  $p_0$  におけるこの曲面の方ベクトル  $n$  があるとする. 点  $p_0$  における曲面  $S$  の任意の接ベクトル  $X$  に対して,  $X$  と  $n$  で定まる平面 (**normal plane(法平面)**) と, 曲面  $S$  の交わりとしてできる平面曲線  $C$  の, 点  $p_0$  における平面曲線としての曲率のことを,  $p_0$  における  $X$  方向の  $S$  の **normal curvature(法曲率)** という.

法曲率といっても, 方向  $X$  を決めるごとに決まるので, 量というより “方向” の関数である. そこでここから情報を取捨選択して何か量を取り出したい. 自然に思いつくのは (関数) の最大値と最小値である.

### 定義 3.1.3

曲面  $S$  上の点  $p_0$  に対して, 方向  $X$  を動かした時の  $p_0$  における  $S$  の法曲率の最大値と最小値を  $p_0$  における  $S$  の **principal curvature(主曲率)** という.

主曲率は最大値と最小値の 2 つの量からなる. この 2 つの量の “平均量” として得られたものが, 次にあげる曲率の定義であり, 曲面論に置いて重要な役割を果たす.

---

<sup>\*3</sup> 上の定義では “ $S(u, v)$  が  $u, v$  の 2 変数の関数としていくらかでも偏微分可能である” としているが, “ $S(u, v)$  が  $u, v$  の 2 変数の関数として 2 階微分可能である” というところで十分であるが, “ $S(u, v)$  が  $u, v$  の 2 変数の関数としていくらかでも偏微分可能である” とすることが多い.

#### 定義 3.1.4

曲面  $S$  上の点  $p_0$  に対して,  $\kappa_1, \kappa_2$  を  $p_0$  における  $S$  の主曲率とする. このとき,  $K = \kappa_1 \kappa_2$  を  $p_0$  における  $S$  の **Gaussian curvature**(ガウス曲率) と呼ぶ.

ガウス曲率は, 曲面の 1 階微分のみから得られる内在的量である第 1 基本量と, 曲面の 2 階微分と法ベクトルから得られる外在的量である第 2 基本量を用いて表現することができ, さらに実は第 1 基本量のみで表すことができることが知られている (ガウス驚愕の定理). 最後に, 曲面論の最も偉大な定理とも言えるガウス-ボネの定理を紹介しておこう.

#### 定理 3.1.5 | 〈 Gauss-Bonnet Theorem 〉

向きづけ可能な閉曲面  $S$  の上で,

$$\iint_S K d\mu = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ. ただし,

$K$  : 曲面  $S$  のガウス曲率

$d\mu$  : 曲面  $S$  の面積要素

$\chi(S)$  : 曲面  $S$  のオイラー標数

### 3.2 多面体のガウス曲率

一般の曲面において, ガウス曲率は曲率で定義されていたが, 多面体の場合は辺や頂点で微分を行うことができず, そのためガウス曲率を定義することが出来ない. そこで, 多面体でのガウス曲率に対応する概念として, 不足角を以下のように定める.

#### 定義 3.2.1 | 〈 ガウス曲率, 不足角 〉

多面体  $P$  の各頂点において,  $2\pi$  から接している面のその頂点での角度の和を引いた角度を **Angular defect**(不足角) という. すなわち, 頂点  $x$  でのガウス曲率は,

$$2\pi - \sum_{F \in \{x \text{ に接する面}\}} \{F \text{ の } x \text{ での角度}\}$$

で与えられる.

この不足角に対しては, デカルトの不足角定理と言われる重要な定理が知られている.

#### 定理 3.2.2 | 〈 Descartes' theorem on total angular defect 〉

球面と位相同型 (穴の空いていない) 多面体において, ガウス曲率の総和は  $4\pi$  である.

より一般に上記の定理を拡張して, 一般のガウス曲率についてのガウス・ボネの定理のような定理が成り立つ.

### 定理 3.2.3

向きづけ可能な多面体  $P$  の不足角の総和は  $2\pi * \chi(P)$

よって、種数 0 の立体ではガウス曲率の総和は  $4\pi$ 、種数 1 の立体ではガウス曲率の総和は 0、種数 2 の立体ではガウス曲率の総和は  $-4\pi$  である。

## 3.3 ガウス曲率が一定である曲面・多面体

ガウス曲率が一定である曲面・多面体について考えてみよう。容易にわかるように、 $\mathbb{R}^3$  内の単位球面のガウス曲率は  $K = 1$  であり、正の一定値である。また、平面のガウス曲率は  $K = 0$  であり、これも一定である。ではガウス曲率が負の一定値をとるような曲面は存在するだろうか。最も早くから知られていたものとして、E. Beltrami によって非ユークリッド幾何学のモデルとして考案された **pseudosphere(擬球)** がある。擬球は **tractrix(トラクトリクス)** と呼ばれる以下のようにパラメータ表示される曲線を  $x$  軸回転させて現れる曲面である。

$$x = t - \tanh t, y = \frac{1}{\cosh t}, t \geq 0$$

この曲面のガウス曲率は  $K = -1$  であり、負の一定値である。

上の例以外にも、微分方程式を解くことでガウス曲率が一定値であるような曲面を作ることができる。しかしながら、これらのほとんどは閉じていない。実は以下のことが知られている。

### 命題 3.3.1

閉じた曲面には必ずガウス曲率が正である点が存在する。

**Proof.** 閉曲面を  $S$  として、 $\mathbb{R}^3$  の中の一点  $O$  を固定する。 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) = \|x - O\|$  と定めると、 $f$  はコンパクトな集合上での連続関数なので最大値を持ち、その点を  $x_0$  とする。 $O$  を中心として半径が  $\|x_0 - O\|$  である球面  $U$  を考えると、 $S$  は  $U$  に  $x_0$  で内接する。そのため  $S$  の  $x_0$  における主曲率は  $U$  の  $x_0$  における主曲率よりもどちらか大きいまたはどちらか小さく、 $S$  の  $x_0$  におけるガウス曲率は  $U$  の  $x_0$  におけるガウス曲率  $1/\|x_0 - O\|^2 > 0$  よりも大きくなる。□

上記により、ガウス曲率が一定値である閉曲面は、必ずガウス曲率が正であることがわかる。翻って言えば、ガウス曲率が負の一定値である閉曲面は存在しない。

では、閉曲面の離散化したものともとれる多面体ではどうであろう。??で触れた通り、多面体でのガウス曲率とも言えるものに不足角がある。そのため、以下では不足角が一定である多面体を考える。ここで重要になってくるのが**定理 3.2.3**である。これと??により、以下の事実を得る。

### 命題 3.3.2

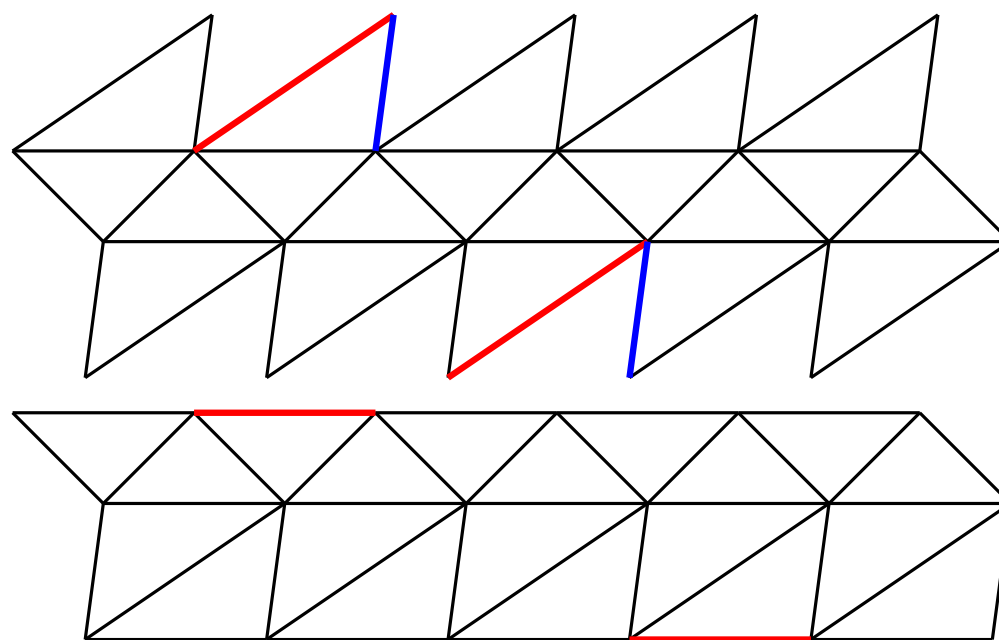
種数が  $n$  の多面体の不足角の総和は  $4\pi(1 - n)$

すなわち、穴が空いていない多面体では不足角の総和は正に、穴が 1 つの多面体では不足角の総和が

0 に、穴が 2 つ以上空いている多面体では不足角の総和が負になることがわかる。まず各頂点での不足角が正の一定値である多面体には、正多面体などを代表に半正多面体など対称性の高い様々な多面体を挙げることができる。

次に各頂点の不足角が 0 であるような多面体について考えてみよう。命題 3.3.2 よりそのような多面体は穴が 1 つ空いていることがわかる。具体的な例として、<https://im.icerm.brown.edu/portfolio/paper-flat-tori/> には 12 頂点のものが書かれている。この立体は各頂点周りの形 (集まっている面の形) が同じであり、対称性により全ての頂点での不足角が等しく、総和が 0 であるため、各頂点の不足角が 0 であるとわかる。このような立体に関して、頂点数が 10 のものが坪井先生によって作成されており、知られている。展開図は以下の形をしている

### 例 3.3.3



ここで注目したいのは、各頂点のガウス曲率が 0 であるということは、展開した際に平坦にすることが可能であるということである。例えば、折り紙を折って面の重複がないように閉曲面を構成した場合、その多面体は必ず各頂点のガウス曲率が 0 になる。逆に言えば、ガウス曲率が各頂点で 0 である多面体は、折り紙で作成できることや平面充填可能であることが示唆される。このような多面体を実現する最小の頂点数はどのぐらいなのかについてはまだわかっていない。また各頂点周りの形が等しいと仮定すると、おそらく平面敷き詰めおよび実現の存在についての問題に持ち込めると考えている。[https://colab.research.google.com/drive/1DCwIJ4lUge\\_jUUiaW\\_B2r8df20HHYwv9?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1DCwIJ4lUge_jUUiaW_B2r8df20HHYwv9?usp=sharing) に実験したデータをまとめているため、参考にされたい。

最後に各頂点の不足角が負であるような多面体について考えてみよう。命題 3.3.2 よりそのような多面体は穴が 2 つ以上空いていることがわかる。ガウス曲率が負の一定値である閉曲面は存在しなかったが、離散的な多面体では、不足角が負の一定値である多面体が存在することが [1] に書かれてい

る. しかしながら, この論文ではその存在性についてのみ言及しており, 具体的には数値計算による近似解しか与えていない. 私はそれらについて, 実際に具体的な構成を与えることに成功した. 実際の立体を作成するコードおよび立体のデータは以下の場所に置いてある (まだ置いていない)<https://github.com/RyoKawai-github/Polyhedron-with-Strictly-Negative-Curvature>. 具体的な形は以下の通りである.

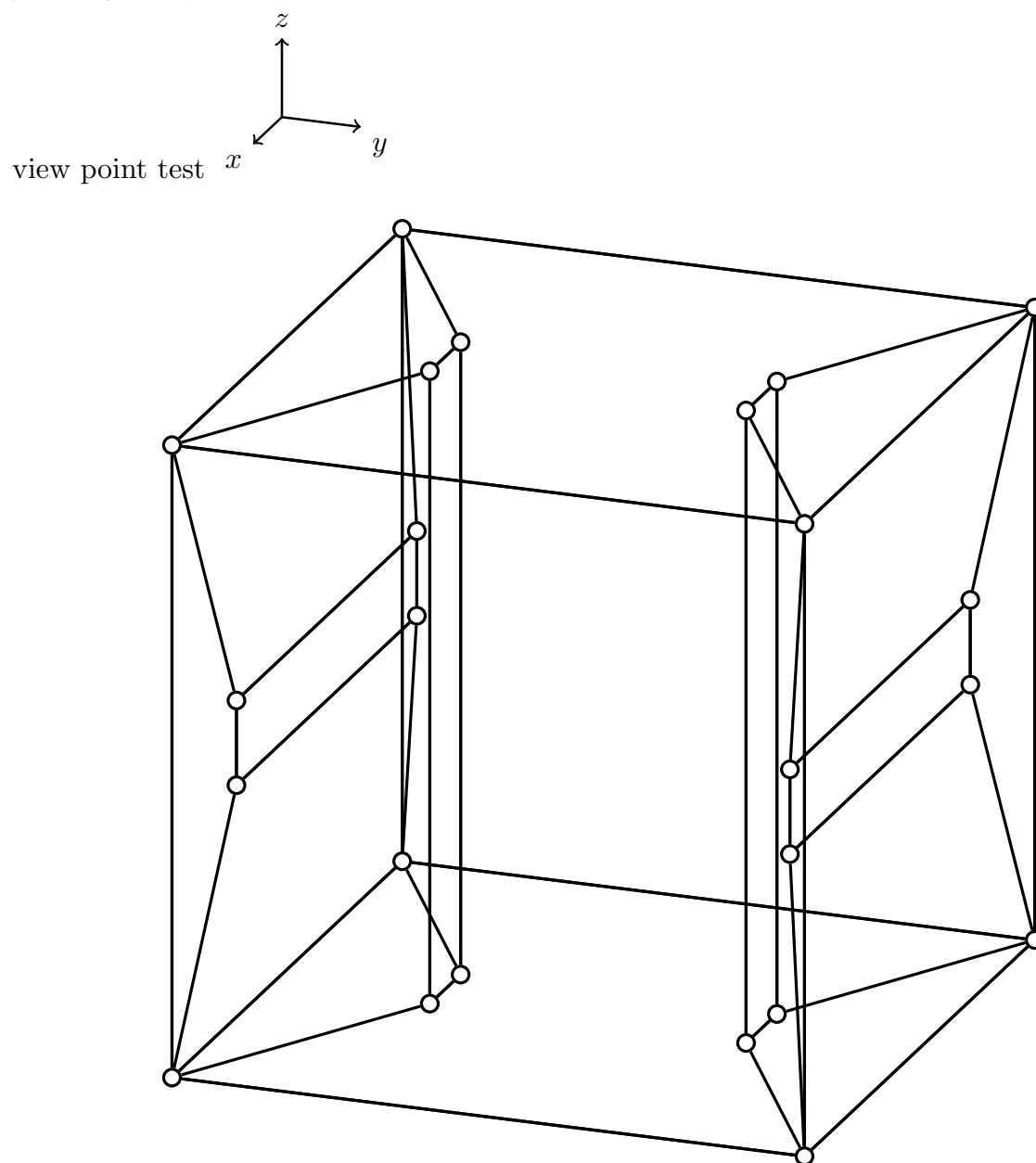


図1 穴が二つ空いている, 各頂点のガウス曲率が一定である穿孔多面体

これらは全て各頂点でのガウス曲率が  $-\pi/6$  となっている. この立体の優れているところは, 各点の座標が求まり, かつ各面における頂点の角度の  $\cos, \sin$  の値が二次方程式の解の形でかくことができる点である. すなわち, 各面の全ての頂点角において, その  $\cos, \sin$  の値が  $1/2$  乗の形で書くことができるのである. 故に複数枚による折り紙でこの立体を作成することができるはずであるが, 現時点では作成できていない. また, このような全ての頂点のガウス曲率が一定値である立体について, 実現



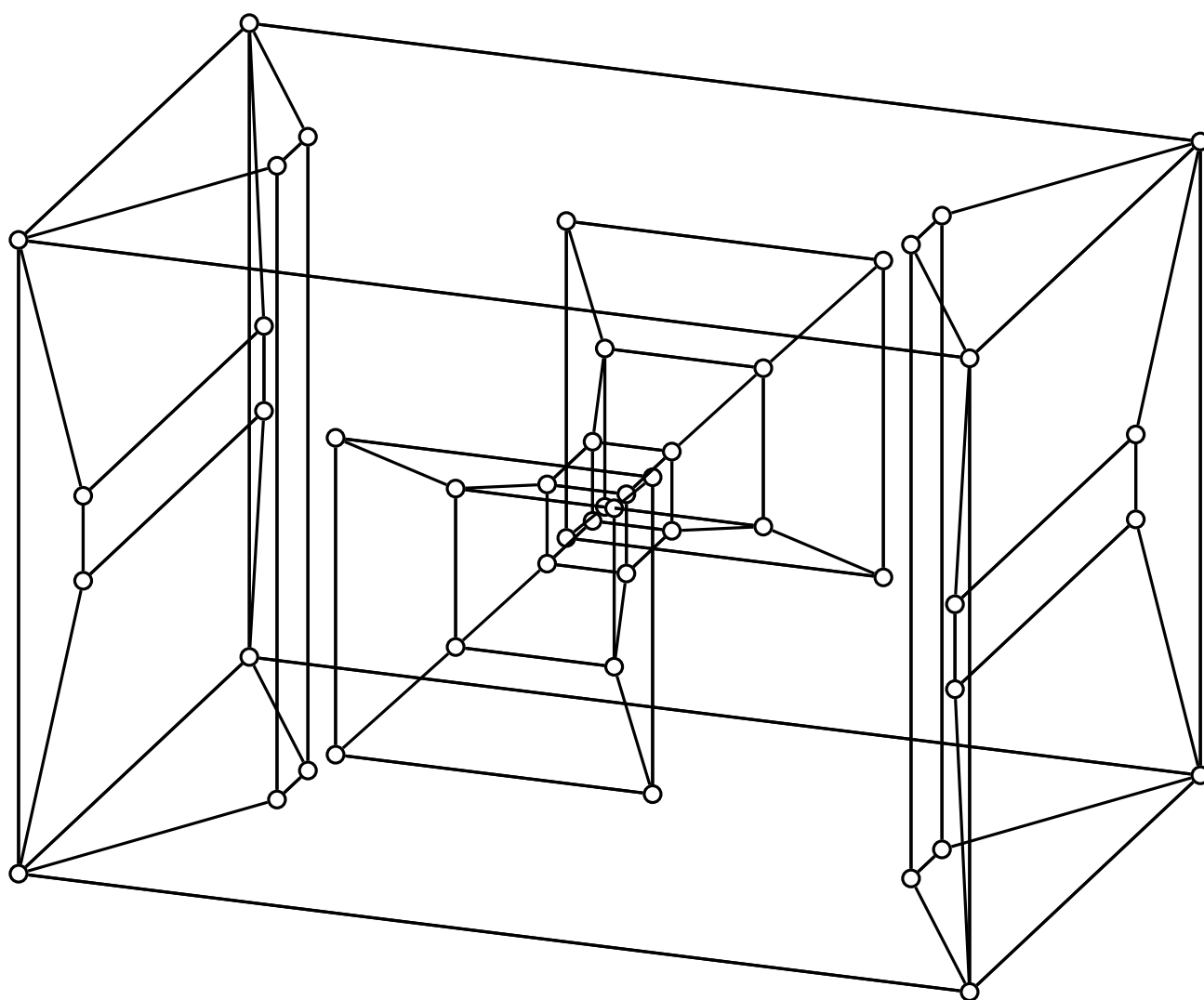


図2 穴が三つ空いている, 各頂点のガウス曲率が一定である穿孔多面体

可能な最小頂点数を調べることはとても興味深い.

## 4 今後の展望

今回は多面体の中でも不足角が負の一定値であるようなものに対して, 具体的な構成を与えることができた. 今回構成した多面体には前述のとおり優れている性質が存在し, 折り紙での実現の可能性など応用が考えられる. これらを

## 索引

$d_n$  polyhedron( $d_n$  多面体), 6  
 $d_n$  polyhedron homomorphism( $d_n$  多面体準同型写像), 8  
 $d_n$  polyhedron isomorphic( $d_n$  多面体同型), 8  
 $d_n$  polyhedron isomorphism( $d_n$  多面体同型写像), 8  
abstract polyhedron(抽象多面体), 6  
Angular defect(不足角), 13  
angular defect(不足角), 10  
concave polyhedron(凹多面体), 5  
edge(辺), 6  
Euler characteristic(オイラー標数), 8  
face(面), 6  
face angle(面角), 9  
Gaussian curvature(ガウス曲率), 13  
genus(種数), 9  
nonconvex polyhedron, 5  
normal curvature(法曲率), 12  
normal plane(法平面), 12  
parameter(パラメータ), 12  
polyhedron(多面体), 4  
polyhedron homomorphism(多面体準同型写像), 7  
polyhedron isomorphic(多面体同型), 7  
polyhedron isomorphism(多面体同型写像), 7  
principal curvature(主曲率), 12  
pseudosphere(擬球), 14  
realization(実現), 7  
regular surface(正則曲面), 12  
subdivision(細分), 9  
surface(曲面), 12  
tractrix(トラクトリクス), 14  
triangle subdivision(三角形分割), 9  
vertex(頂点), 6  
  
 $P \simeq P'$ , 7  
 $|\varphi|$ , 7  
 $\varphi : P \rightarrow P'$ , 7

## 参考文献

- [1] Abdênago Barros, Esdras Medeiros, and Romildo Silva. Two counterexamples of global differential geometry for polyhedra. *JP Journal of Geometry and Topology*, Vol. 11, , 03 2011.
- [2] 宮崎興二. 『多面体百科』. 丸善出版, 2016 年 10 月 31 日.
- [3] Lhuilier and Gergonne. Géométrie. Mémoire sur la polyédrométrie; contenant une démonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Vol. 3, pp. 169–189, 1812-1813.
- [4] 中内伸光. じっくりと学ぶ曲線と曲面ー微分幾何学初歩ー. 共立出版, 2010 年 05 月 01 日.