

九州大学大学院数理学府  
修士論文

# 負の定曲率をもつ多面体について

河井 亮  
(数理学専攻)

指導教員：鍛冶 静雄 教授

提出日：2023年1月27日

## 概要

閉曲面では, ガウス曲率が正である点が存在する. しかし多面体では, ガウス曲率に対応する概念である不足角について, 全てが負であるようなものが存在する. 本稿ではさらに条件を強め, “不足角が負の一定値である多面体” について, 任意の偶数のオイラー標数で存在することを示した.

## 目次

1	はじめに	3
1.1	曲面論とは	3
1.2	多面体について	3
2	多面体の定義と性質	5
2.1	定義	5
2.2	性質	9
3	曲率が一定な多面体	12
3.1	曲面の曲率について	12
3.2	多面体の曲率について	14
3.3	曲率が一定である曲面	14
3.4	曲率が一定である多面体	16
4	今後の展望	19

## 用語集

- 実数全体の集合を  $\mathbb{R}$  と表記する.
- 写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して, 定義域  $X$  のことを  $\text{dom } f$  で表記する.
- 集合  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  の要素の数を  $|X|$  と表記する. この場合  $|X| = n$  である.
- 集合  $A, \{b\}$  に対して,  $A \cup \{b\}$  を  $A + b$  と表記する.
- 集合  $A$  とその元  $b$  に対して,  $\{a \in A \mid a \neq b\}$  を  $A - b$  と表記する.
- 集合  $A$  の部分集合で, 要素の数が  $k$  個の集合全体を  $\binom{A}{k}$  と表記する. すなわち  $\binom{A}{k} = \{X \subset A \mid |X| = k\}$  である.
- $\mathbb{R}^3$  の元  $(x, y, z)$  に対して, その長さ  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  を  $\|(x, y, z)\|$  と表記する.

# 1 はじめに

私たちは“かたち”の中で生きており、常に何かしらの“かたち”をみて触れて生活している。身近な例だと、紙や立体などが挙げられる。私たちが実際に見たり、触れたりすることができるのは物体の表面であるため、立体のかたちについて調べるときには、中身がない表面だけのものとして扱って考えるほうが都合の良いことが多い。そのような“表面”を対象として研究する数学の分野として曲面論がある。

## 1.1 曲面論とは

身の回りには曲面が溢れており、ひとくちに「曲面」と言っても様々なものがある。その中でも特になめらかな、すなわち何回でも微分可能な曲面を研究するのが曲面論である。たとえば、球面やトーラス、平面などは曲面論の研究対象になる。一方で立方体や円柱などは角ばった部分が存在し、その部分では微分ができないため、曲面論では対象として扱わない。

曲面論では、“曲”という字が表す通り、曲がっている面を主に扱う。そのため、曲面の各部分での曲がり具合、いわゆる“曲率”が重要な研究対象になる。曲面は2次元的な広がりを持つため、曲率に対して様々な定義の仕方が存在し、それぞれ異なる性質や特徴がある。特にガウス曲率については、曲面の外部の情報に依存しない量であったり(ガウス驚愕の定理)、曲面の大域的な形が同じであれば曲面全体での総和が等しかったり(ガウス・ボネの定理)と、曲面のかたちについての重要な性質が存在する。

## 1.2 多面体について

現実世界では立体の角ばった部分は曲面で近似できるため、曲面論が適用できる場面は多い。しかし、サイコロのような立方体や折り紙などでは、角(かど)であるという情報が重要な場合がある。また、コンピュータ上で曲面を描く際も、実際は離散的な平面の集まりとして近似している。このように、曲面を“平面の集まり”として考え、曲面を“離散化”したものを多面体と呼ぶ。

先ほど立体の角ばった部分を曲面で近似できると述べたが、逆に平面に囲まれているような立体は、角がうまく定義できれば多面体とみなすことができる。多面体はその面の組み合わせ的な構造などをよく表しており、建築や自然界などで多くその性質を垣間見ることができる。

多面体では対象として曲面に近いものを扱っていることから、曲面論のアナロジーが通用することが多い。たとえば、先ほど述べた「ガウス・ボネの定理」は曲面で成り立つが、多面体でも「デカルトの不足角定理」という非常に似た定理が成り立つ。

**ガウス・ボネの定理** 大域的なかたちが同じであれば、曲面の各点でのガウス曲率の総和が一致する。

**デカルトの不足角定理** 大域的なかたちが同じであれば、多面体の各頂点での不足角の総和が一致する。

しかし、稀に異なる結果が出てくることがあり、そこがとても興味深い。

本稿では, そのような異なる結果の一つである, “負の定曲率をもつ閉曲面” について述べる. § 2 では, 今回扱う「多面体」の定義を行い, 多面体での“曲率”とも言える不足角を定義する. § 3 では, 曲面についての定義を行い, 曲面と多面体の類似する点について述べる. その後曲率が一定である曲面について紹介し, 不足角が負の一定値である多面体について, 具体的な構成を与える. 最後に主結果として, 任意のオイラー標数で不足角が一定である多面体が構成可能であることを示す.

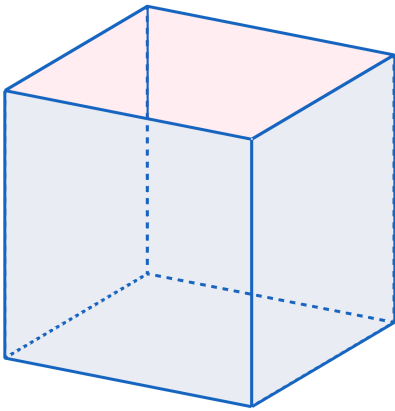
## 2 多面体の定義と性質

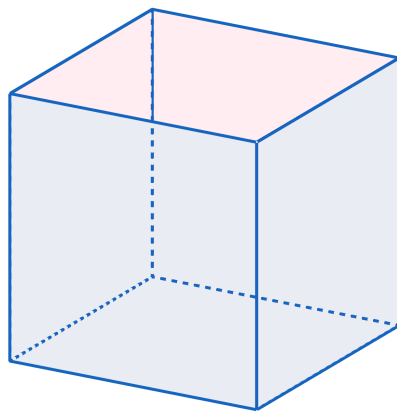
多面体には明確な定義が存在せず、時代や研究者によって異なる場合が多い。これは人によって、多面体として扱われている対象が大きく異なることが原因である。しかしそれら全ての考えられてきた対象を含むような定義をするのは不可能である。それは違った人が同じ言葉を異なる意味で使用していたり、互いに矛盾している言葉を定義していたりするからである。最も単純な場合として多面体は中身が詰まっているか、表面だけかという差が挙げられる。古代ギリシャの幾何学者では、多面体は中身が詰まっているものであったが、ここ 200 年は面であると考えの方が主流であり、本稿もそれに倣っている。

### 2.1 定義

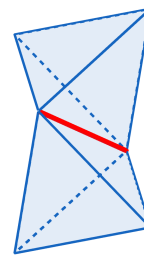
多面体の定義は、オイラーの多面体定理とその反例によって、時代とともに変化していった。歴史については [2] の 5 章に詳しく書いてあり、参考にした。本稿ではその背景も踏まえ、以下のような性質を持つものを多面体として扱う。

1. 各面は頂点と辺による多角形である。
2. 辺に接する頂点および面の数は必ず 2 つである。(閉曲面である)
3. 頂点に接する辺および面の数は 3 つ以上である。
4. 頂点に接する面が頂点を除いても連結である。
5. 頂点の数は有限個であり、連結である。

1, 2, 3, 5 は、多面体が「平面で囲まれた立体」であることを表している。特に 2 によって、 1 の左のような、口が空いているようなものを除外している。この性質は、境界がないとも言い換えることができる。また、右のような多面体を辺で接着したようなものも、この性質によって除外される。



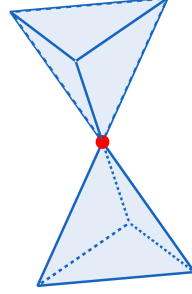
上面がない



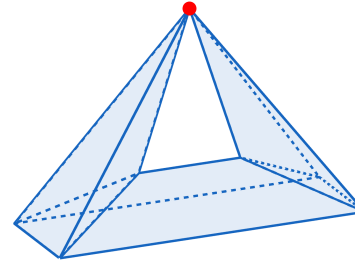
2 つの四面体が辺を共有している

図 1: 2 に反する例

4 は, 図 2 のような多面体の一部を頂点で接着したようなものを除外している. このような頂点は特異点と呼ばれ, 2 つの頂点に分けて考えることの方が多い.



2 つの四面体が頂点を共有している



特異点をもつ多面体

図 2: 4 に反する例

以上の性質を持つものとして, 次節から多面体を数学的に定義する. はじめに構造のみを抜き出した, 抽象的な多面体を考える.

#### 定義 2.1.1 | 〈 抽象多面体 〉

抽象多面体 (abstract polyhedron) とは, 頂点 (vertex) と呼ばれる object の集合  $V$  と,  $V$  の異なる 2 元からなる部分集合である辺 (edge) の集合  $E$  と,  $V$  の異なる 3 つ以上の元からなる部分集合である面 (face) の集合  $F$  の組  $P = (V, E, F)$  で, 以下を満たすものである.

1. 各面は多角形である. すなわち,

$$\forall f = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \in F, 0 \leq \forall i \neq j \leq n, \begin{cases} \{v_i, v_j\} \in E, & |i - j| = 1 \text{ or } n \\ \{v_i, v_j\} \notin E, & 2 \leq |i - j| \leq n - 1 \end{cases}$$

2. 任意の辺は必ず二つの頂点及び面に接している. すなわち,  $\forall e \in E, |\{f \in F \mid e \subset f\}| = 2$
3. 各頂点には必ず 3 つ以上の辺が隣接している. すなわち,  $\forall v \in V, |\{e \in E \mid v \in e\}| \geq 3$
4. 各頂点に接している面は, その頂点を除いても連結である. すなわち,  $\forall v \in V$  に対して, 以下のグラフが連結である.

$$(\{v' \in f \mid v \in f \in F\} - v, \{e' \subset f \mid v \in f \in F\} \cap E)$$

5. 有限であり連結である. すなわち,  $|V| < \infty, \forall v, v' \in V, \exists v - v' \text{ Path}$

すなわち,  $V, E, F : \text{set}$  は

$$E \subseteq \binom{V}{2}, F \subseteq \bigcup_{3 \leq k \leq |V|} \binom{V}{k}$$

である. 抽象多面体  $P$  の頂点, 辺, 面の集合をそれぞれ  $V(P), E(P), F(P)$  で表す.

抽象多面体では、その組み合わせ的な構造のみを表しており、具体的な“かたち”については何も与えられていない。私たちはかたちを決める際には長さ（距離）を導入することが多い。そこで、抽象多面体とその頂点同士の長さを表す関数のペアを多面体として扱う。

### 定義 2.1.2 | $\langle d_n$ 多面体 $\rangle$

抽象多面体  $P = (V, E, F)$  と、その頂点間で定義される以下の関数  $d_n$  の組  $(P, d_n)$  を  $d_n$  多面体 ( $d_n$  polyhedron) という。

$$\begin{aligned} d_{-1} &: \{(v, v) \mid v \in V\} \rightarrow \{0\} \\ d_0 &: \{(v, v') \in V \times V \mid (\{v, v'\} \in E) \vee (v = v')\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ d_1 &: \{(v, v') \in V \times V \mid \{v, v'\} \subset f \in F\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ d_2 &: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

ただし  $d_n$  は以下を満たす。

1.  $\forall x, y \in V, d_n(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\forall x, y \in V, (x, y) \in \text{dom } d_n \Rightarrow d_n(x, y) = d_n(y, x)$
3.  $\forall x, y, z \in V, (x, y), (y, z), (z, x) \in \text{dom } d_n \Rightarrow d_n(x, z) \leq d_n(x, y) + d_n(y, z)$

上記のように定めると、組み合わせ的な構造に長さが入り、かたちを決定づけることができる。  $d_{-1}$  多面体  $(P, d_{-1})$  はかたちに関しての制約がなく、抽象多面体  $P$  とほぼ変わらない。  $d_0$  多面体は辺の長さ、  $d_1$  多面体は面のかたち、  $d_2$  多面体は全体のかたちを定めていると意味付けることができる。また、定義域を適切に制限することで、  $i > j$  ならば  $d_i$  多面体は  $d_j$  多面体として考えることができる。

これら  $d_n$  多面体は、現実空間である 3 次元空間で実現できるものばかりとは限らない。むしろ 3 次元空間では実現できないものがほとんどである。実現できない例を挙げる前に、まず「3 次元空間で実現できる」という言葉を定義する。

### 定義 2.1.3 | $\langle$ 実現 $\rangle$

$d_n$  多面体  $(P, d_n)$  に対して、以下を満たすような 3 次元ユークリッド空間  $(\mathbb{R}^3, d)$  への写像  $\varphi : V(P) \rightarrow \mathbb{R}^3$  が存在するとき、 $\varphi$  を  $(P, d_n)$  の実現 (realization) という。

1.  $\forall (v, v') \in \text{dom } d_n, d_n(v, v') = d(\varphi(v), \varphi(v'))$
2.  $\forall f = \{v_0, v_1, \dots, v_k\} \in F(P), \text{rank} \begin{pmatrix} \varphi(v_0) & \varphi(v_1) & \cdots & \varphi(v_k) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 3$

実現は一意であるとは限らない。また、実現が存在するとも限らない。実現が存在する場合、その像  $\text{Im } \varphi$  を  $|\varphi|$  で表す。

1 は、  $d_n$  多面体の距離を実現の際に保つことを表している。2 は、各面の頂点が  $\mathbb{R}^3$  で同一平面上にあり、かつ一点や同一直線上に並ばない、すなわち各面が  $\mathbb{R}^3$  上で平面であることを表している。「実現」の定義ができたため、実現できない例を確認する。例えば有限距離空間で有名な三脚は、いずれも



ユークリッド空間に埋め込めない。

#### 例 2.1.4

$V = \{o, x, y, z\}, E = \binom{V}{2}, F = \{\{o, x, y\}, \{o, y, z\}, \{o, z, x\}, \{x, y, z\}\}, d(o, x) = d(o, y) = d(o, z) = 1, d(x, y) = d(y, z) = d(z, x) = 2$  である  $d_2$  多面体  $((V, E, F), d)$  は、実現が存在しない。

この例では面  $\{o, x, y\}$  などが実現の際に必ず一直線に潰れてしまい、**定義 2.1.3** の 2 を満たさない。このように、 $d_n$  多面体の中でも、さらに実現可能なクラスが存在する。

次に多面体について以下の同型の概念を定義する。

#### 定義 2.1.5 | 〈 多面体同型 〉

2 つの抽象多面体  $P, P'$  に対して、その間の写像  $\psi: V(P) \rightarrow V(P')$  を  $\psi: P \rightarrow P'$  と表す。2 つの抽象多面体  $P = (V, E, F), P' = (V', E', F')$  に対して、 $\psi: P \rightarrow P'$  が

$$\begin{aligned} \{x, y\} \in E &\Rightarrow \{\psi(x), \psi(y)\} \in E', \\ \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \in F &\Rightarrow \{\psi(v_0), \psi(v_1), \dots, \psi(v_n)\} \in F' \end{aligned}$$

を満たすとき、 $\psi$  を多面体準同型写像 (**polyhedron homomorphism**) であるという。  $\psi$  が全単射であり  $\psi^{-1}$  も多面体準同型写像であるとき、 $\psi$  を多面体同型写像 (**polyhedron isomorphism**) という。またこのとき、 $P$  と  $P'$  は多面体同型 (**polyhedron isomorphic**) であるといい、 $P \simeq P'$  と書き表す。

#### 定義 2.1.6 | 〈 $d_n$ 多面体同型 〉

2 つの  $d_n$  多面体  $(P, d), (P', d')$  に対して多面体準同型写像  $\psi: P \rightarrow P'$  が存在し、

$$\begin{aligned} \forall (v, v') \in \text{dom } d &\Rightarrow \\ (\psi(v), \psi(v')) \in \text{dom } d' \wedge d(v, v') &= d'(\psi(v), \psi(v')) \end{aligned}$$

を満たすとき、 $\psi$  を  $d_n$  多面体準同型写像 ( **$d_n$  polyhedron homomorphism**) であるという。  $\psi$  が全単射であり  $\psi^{-1}$  も  $d_n$  多面体準同型写像であるとき、 $\psi$  を  $d_n$  多面体同型写像 ( **$d_n$  polyhedron isomorphism**) という。またこのとき、 $P$  と  $P'$  は  $d_n$  多面体同型 ( **$d_n$  polyhedron isomorphic**) であるといい、 $P \stackrel{d_n}{\simeq} P'$  と書き表す。

$d_{-1}$  多面体同型は多面体同型と同じく、2 つの多面体の組み合わせ的構造が同じであることを表している。同じように、 $d_0$  多面体同型は辺の長さ、 $d_1$  多面体同型は面のかたち、 $d_2$  多面体同型は全体のかたちが同じであることを表している。

#### 表記 2.1.7

2 つの多面体の実現  $\varphi, \varphi'$  のそのドメイン同士が  $d_n$  多面体同型である時、単に  $\varphi$  と  $\varphi'$  が  $d_n$  多面体同型であるという。また、 $\text{dom } \varphi \simeq \text{dom } \varphi'$  などを単に  $\varphi \simeq \varphi'$  や  $|\varphi| \simeq |\varphi'|$  と書く。

### 系 2.1.8

2つの多面体の実現  $\varphi, \varphi'$  に対して,  $i \geq j$  ならば,

$$\varphi \stackrel{d_i}{\simeq} \varphi' \Rightarrow \varphi \stackrel{d_j}{\simeq} \varphi'$$

## 2.2 性質

多面体を持つ性質や値について, 前述の定義に沿って定義していこう. まずは多面体の大まかな形を表すことができるオイラー標数についてである.

### 定義 2.2.1

抽象多面体  $P = (V, E, F)$  に対して,

$$\chi(P) = |V| - |E| + |F|$$

を多面体  $P$  のオイラー標数 (**Euler characteristic**) という.

このオイラー標数は, 多面体の分野ではよく行われる, 多面体の面をその対角線で分割し, 新たに多面体を作成する動作で保存されるという性質がある. この動作を細分と呼ぶ. 定義は以下の通りである.

### 定義 2.2.2

抽象多面体  $P = (V, E, F)$  において, 三角形ではない (*i.e.*  $|f| \geq 4$ ) 面  $f \in F$  が存在するとき,  $\{x, y\} \notin E \wedge \{x, z\}, \{y, z\} \in E$  であるような  $x, y, z \in f$  に対して,

$$P' = (V, E + \{x, y\}, F - f + \{x, y, z\} + (f - z))$$

を  $P$  の細分 (**subdivision**) という.  $P$  に細分を繰り返し行うことで, 全ての面を三角形にした (*i.e.*  $F \subset \binom{V}{3}$ ) 多面体を  $P$  の三角形分割 (**triangle subdivision**) という.

細分後の多面体は, 細分前の多面体に対して辺と面がそれぞれ1つずつ増えている. そのため, 細分および三角形分割ではオイラー標数は変化しない. すなわち実現が存在する多面体の場合, 面の形が大きく変化しないのであればオイラー標数は一定であり, オイラー標数は多面体の大まかな形を見分ける特徴量となっている.

最後に多面体における様々な角度について定義する. 多面体の角度にはいくつか種類があるが, ここでは頂点の尖具合 (曲がり具合) を表す量として不足角を定義する. まずは多面体の各面の角 (かど) での角度を定義する.

### 定義 2.2.3 | 〈面角〉

$d_1$  多面体  $P$  の各頂点  $v \in V(P)$  と,  $v$  を含む面  $f \in F(P)$  に対して定まる以下の値  $A(v, f)$  を  $v$  にお

ける  $f$  の面角 (face angle) という. ただし,  $x, y$  は  $x, y \in f, \{v, x\}, \{v, y\} \in E$  である頂点とする.

$$A(v, f) = \arccos \left( \frac{d(v, x)^2 + d(v, y)^2 - d(x, y)^2}{2d(v, x)d(v, y)} \right)$$

ただし実現が存在する場合は,  $\arccos$  の値は, 実際の  $\mathbb{R}^3$  での角度と同じようにとる. すなわち, 実現が凹角である面角に対しては, 面角として上記の値を  $2\pi$  から引いたものを適用することにする.

この定義によって,  $\mathbb{R}^3$  での私たちが多面体で考える各面の角度は, 面角によって表すことができる. また, 定義より明らかに次の事実が成り立つ.

#### 命題 2.2.4

実現の存在する  $d_1$  多面体  $P$  において, 三角形分割された多面体  $P'$  の各面での面角の和は  $\pi$  である. また一般に, 実現の存在する  $d_1$  多面体  $P$  において面  $f \in F(P)$  が  $|f| = n$  であるとき, 面角の和は  $(n - 2)\pi$  である. すなわち,

$$\forall f \in F(P), \sum_{v \in f} A(v, f) = (|f| - 2)\pi$$

この面角に対して, 以下の不足角を定義することができる.

#### 定義 2.2.5 | 〈 不足角 〉

$d_1$  多面体  $P$  について定まる以下の量  $G : V(P) \rightarrow \mathbb{R}$  を不足角 (angular defect) という.

$$G(v) = 2\pi - \sum_{v \in f \in F(P)} A(v, f)$$

不足角は実はオイラー標数と密接な関係がある. その関係を示すデカルトの不足角定理を紹介する.

#### 定理 2.2.6 | 〈 デカルトの不足角定理 [3] 〉

実現のある  $d_1$  多面体  $P$  の不足角の総和は  $2\pi\chi(P)$

**Proof.**  $P = (V, E, F)$  とし,  $P$  の三角形分割を  $P' = (V', E', F')$  とする.  $P'$  が  $P$  の三角形分割であることから,

$$|V| = |V'|, |F| - |E| = |F'| - |E'|, 2|E'| = 3|F'|$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
P \text{ の不足角の総和} &= \sum_{v \in V} G(v) \\
&= \sum_{v \in V} \left( 2\pi - \sum_{v \in f \in F} A(v, f) \right) \\
&= 2\pi|V| - \sum_{v \in V} \sum_{v \in f \in F} A(v, f) \\
&= 2\pi|V| - \sum_{f \in F} \sum_{v \in f} A(v, f) \\
&= 2\pi|V| - \sum_{f \in F} (|f| - 2)\pi \\
&= 2\pi|V| - \sum_{f \in F'} \pi \\
&= 2\pi|V| - \pi|F'| \\
&= 2\pi|V'| - \pi(|F'| + 2|E'| - 3|F'|) \\
&= 2\pi(|V'| - |E'| + |F'|) \\
&= 2\pi(|V| - |E| + |F|) \\
&= 2\pi\chi(P)
\end{aligned}$$

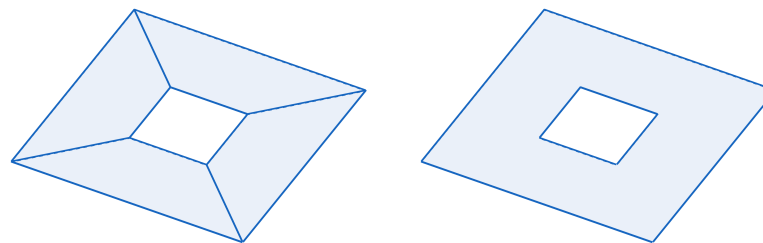
□

### 3 曲率が一定な多面体

閉曲面では、必ずガウス曲率が正である点が存在する。しかし多面体では、ガウス曲率に対応する概念である不足角について、全てが負であるようなものが存在する。本稿ではそのような不足角が一定であるような多面体について、具体的な構成を与えた。

#### 注意 3.0.1

このセクションでは“多面体”といった場合には、 $d_1$  多面体とその実現のこととする。また図が煩雑になるのを防ぐために、以下のように実現した際に同一平面上にある面に関しては、その間の辺を省略している。



正しい表記

省略表記

#### 3.1 曲面の曲率について

一般の曲面論での曲率を定義する。なお、このセクションは [5] に従う。まずは対象となる曲面について定義する。

##### 定義 3.1.1

$\mathbb{R}^3$  の部分集合  $S$  が**曲面 (surface)** であるとは、 $\mathbb{R}^2$  のある領域  $D$  の任意の要素  $(u, v)$  に対して  $\mathbb{R}^3$  の点  $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  が定まるものであり、 $S(u, v)$  が  $u, v$  の 2 変数の関数としていくらかでも偏微分可能であるときをいう。このとき、 $u, v$  を曲面  $S$  の**パラメータ (parameter)** といい。

曲面  $S$  が正則性の仮定、すなわち

$$\text{任意の } (u, v) \in D \text{ に対してベクトル } \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \text{ と } \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \text{ が線型独立である}$$

を満たすとき、 $S$  は**正則曲面 (regular surface)** であるという。以降では曲面という場合には正則曲面のことを指す。

曲面は書いて字の如く曲がっている面を表したものである。したがってその曲がり具合である曲率

を考えたい。しかし曲線などとは異なり、曲面は 2 次元的な広がりをもつため、1 つの量では表せない。それらの多くの曲がり具合の情報の中から部分的な情報を量として抽出する方法もいくつか考えられ、曲率の概念も複数存在する。曲線の曲率はすでに知っての通り曲率半径の逆数で与えられているから、曲面の曲率を定義する一つの方法は、曲面上の曲線を選び出すことである。これを曲面に垂直な平面との切り口によって実現したものが次の法曲率である。

### 定義 3.1.2

曲面  $S$  上の点  $p_0$  と、点  $p_0$  におけるこの曲面の法ベクトル  $n$  があるとする。点  $p_0$  における曲面  $S$  の任意の接ベクトル  $X$  に対して、 $X$  と  $n$  で定まる平面 (法平面 (normal plane)) と、曲面  $S$  の交わりとしてできる平面曲線  $C$  の、点  $p_0$  における平面曲線としての曲率のことを、 $p_0$  における  $X$  方向の  $S$  の法曲率 (normal curvature) という。

法曲率といっても、方向  $X$  を決めるごとに決まるので、量というより“方向”の関数である。そこでここから情報を取捨選択して何か量を取り出したい。自然に思いつくのは (関数の) 最大値と最小値である。

### 定義 3.1.3

曲面  $S$  上の点  $p_0$  に対して、方向  $X$  を動かした時の  $p_0$  における  $S$  の法曲率の最大値と最小値を  $p_0$  における  $S$  の主曲率 (principal curvature) という。

主曲率は最大値と最小値の 2 つの量からなる。この 2 つの量の“平均量”として得られたものが、次にあげる曲率の定義であり、曲面論に置いて重要な役割を果たす。

### 定義 3.1.4

曲面  $S$  上の点  $p_0$  に対して、 $\kappa_1, \kappa_2$  を  $p_0$  における  $S$  の主曲率とする。このとき、 $K = \kappa_1 \kappa_2$  を  $p_0$  における  $S$  のガウス曲率 (Gaussian curvature) と呼ぶ。

ガウス曲率は、曲面の 1 階微分のみから得られる内在的量である第 1 基本量と、曲面の 2 階微分と法ベクトルから得られる外在的量である第 2 基本量を用いて表現することができ、さらに実は第 1 基本量のみで表すことができることが知られている (ガウス驚愕の定理)。すなわち、ガウス曲率は曲面の外部の情報によらない内在的量である。最後に、閉曲面 (コンパクトで境界のない曲面) におけるガウス・ボネの定理を紹介する。

### 定理 3.1.5 | 〈ガウス・ボネの定理 [4]〉

(向きづけ可能な) 閉曲面  $S$  の上で、

$$\iint_S K d\mu = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ。ただし,

$$\begin{aligned} K &: \text{曲面 } S \text{ のガウス曲率} \\ d\mu &: \text{曲面 } S \text{ の面積要素} \\ \chi(S) &: \text{曲面 } S \text{ のオイラー標数} \end{aligned}$$

この定理により, 閉曲面の各点におけるガウス曲率の和は, 閉曲面のオイラー標数と深く結びつきがあることがわかる。

### 3.2 多面体の曲率について

一般の曲面において曲率, 特にガウス曲率は主曲率で定義されていた。しかし, 曲面を離散化したものである多面体の場合は辺や頂点で微分を行うことができず, 曲面と同様には曲率を定義することが出来ない。一方, 多面体では各頂点に対して不足角という量が定義することができた。この量が曲面でのガウス曲率に非常に似通った性質をもつことを紹介する。

§ 2.2 でも述べたとおり, 不足角は  $2\pi$  から頂点に接している面角の和を引いた値で定義される。この値は実現において, 平面上では 0 になり, 接している面がテトラパック (三角錐) のように尖っている頂点では正の値になり, 接している面が鞍型になっている頂点では負の値になる。すなわちこの不足角は, 曲面でのガウス曲率のように, 各頂点での周りの接している面の曲がり具合を表していると捉えることができる。さらに不足角は頂点に接する面での面角の和に依存する値であるため, ガウス曲率と同じく内在的量である。また, 閉じている対象上での総和が  $2\pi\chi$  となるという, 和に関する性質まで対応している。最後に, 離散化という視点で曲面と多面体を見比べると, 以下のような対応がある。

$$\begin{aligned} \text{なめらか} &\quad \text{離散} \\ \text{閉曲面} &\Leftrightarrow \text{多面体} \\ \text{ガウス曲率} &\Leftrightarrow \text{不足角} \\ \text{ガウス・ボネの定理} &\Leftrightarrow \text{デカルトの不足角定理} \end{aligned}$$

このように, 多面体の不足角は, 閉曲面のガウス曲率と非常に似通った性質を持つため, “多面体でのガウス曲率” と考えることができる。

### 3.3 曲率が一定である曲面

ガウス曲率が一定である曲面について考える。容易にわかるように,  $\mathbb{R}^3$  内の単位球面のガウス曲率は  $K = 1$  であり, 正の一定値である。また, 平面のガウス曲率は  $K = 0$  であり, これも一定である。ではガウス曲率が負の一定値をとるような曲面は存在するだろうか。最も早くから知られていたものとして, E. Beltrami によって非ユークリッド幾何学のモデルとして考案された擬球 (pseudosphere) がある。擬球はトラクトリクス (tractrix) と呼ばれる以下のようにパラメータ表示される曲線を  $x$

軸回転させて現れる曲面である.

$$x = t - \tanh t, y = \frac{1}{\cosh t}, t \geq 0$$

この曲面のガウス曲率は  $K = -1$  であり, 負の一定値である. 上の例以外にも, 微分方程式を解くこ

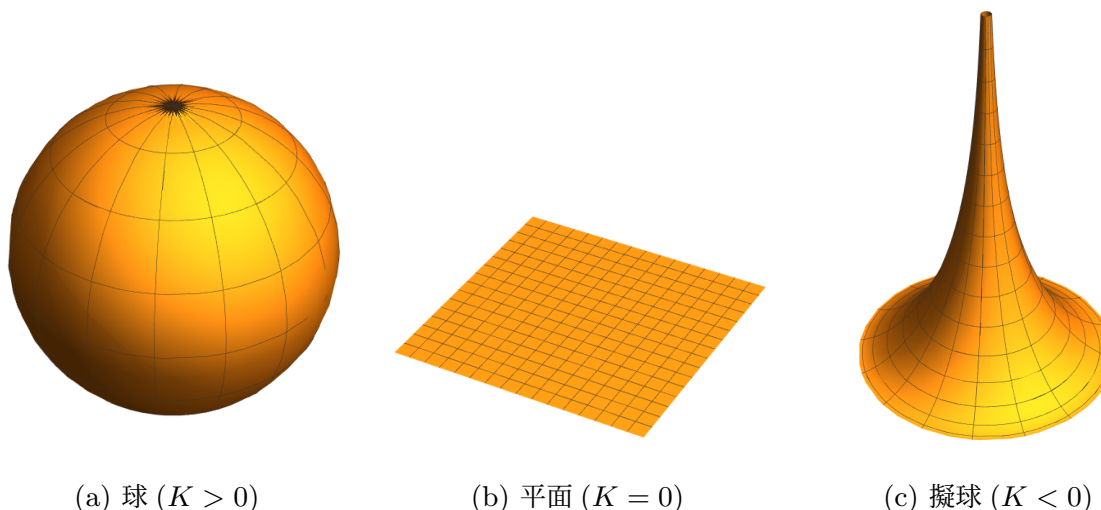


図 4: ガウス曲率が一定である曲面

とでガウス曲率が一定値であるような曲面を作ることができる. しかしながら, これらのほとんどは閉じていない. 実は以下のことが知られている.

### 命題 3.3.1

閉じた曲面には必ずガウス曲率が正である点が存在する.

**Proof.** 閉曲面を  $S$  として,  $\mathbb{R}^3$  の中の一点  $O$  を固定する.  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) = \|x - O\|$  と定めると,  $f$  はコンパクトな集合上での連続関数なので最大値を持つ,  $f$  が最大値をとる点を  $x_0$  とする. また,  $n = \frac{x_0 - O}{\|x_0 - O\|}$  とすると,  $n$  は  $S$  の  $x_0$  での法ベクトルとなる.  $O$  を中心として半径が  $\|x_0 - O\|$  である球面  $U$  を考えると,  $S$  は  $U$  に  $x_0$  で内接する. そのため  $S$  の  $x_0$  における主曲率は,  $U$  の  $x_0$  における主曲率  $\frac{1}{\|x_0 - O\|}$  よりもどちらも小さく,  $S$  の  $x_0$  におけるガウス曲率は  $U$  の  $x_0$  におけるガウス曲率  $1/\|x_0 - O\|^2 > 0$  よりも大きくなる.  $\square$

上記により, ガウス曲率が一定値である閉曲面は, 必ずガウス曲率が正であることがわかる. 翻って言えば, ガウス曲率が負の一定値である閉曲面は存在しない.



### 3.4 曲率が一定である多面体

曲率が一定である多面体を考える. § 3.2 で触れた通り, 多面体でのガウス曲率とも言えるものに不足角がある. そのため, 以下では不足角が一定である多面体を考える.

まず各頂点での不足角が正の一定値である多面体には, 正多面体などを代表に半正多面体など対称性の高い様々な多面体を挙げることができる. 例えば, 立方体は各頂点で不足角が  $\pi/2$  であり, その総和は  $4\pi$  である. また, 定理 2.2.6 よりオイラー標数は 2 である.

次に各頂点の不足角が 0 であるような多面体について考えてみる. たとえば, [7] では対称性が高い 16 頂点のものが構成されている. この立体は各頂点周りの形 (集まっている面の形) が同じであり, 対称性により全ての頂点での不足角が等しく, 総和が 0 であるため, 各頂点の不足角が 0 であるといわれる. このような立体に関して, 頂点数が 10 のものが坪井によって作成されている (図 5). また, 定理 2.2.6 よりオイラー標数は 0 である. 各頂点のガウス曲率が 0 であるということは, 展開した際に

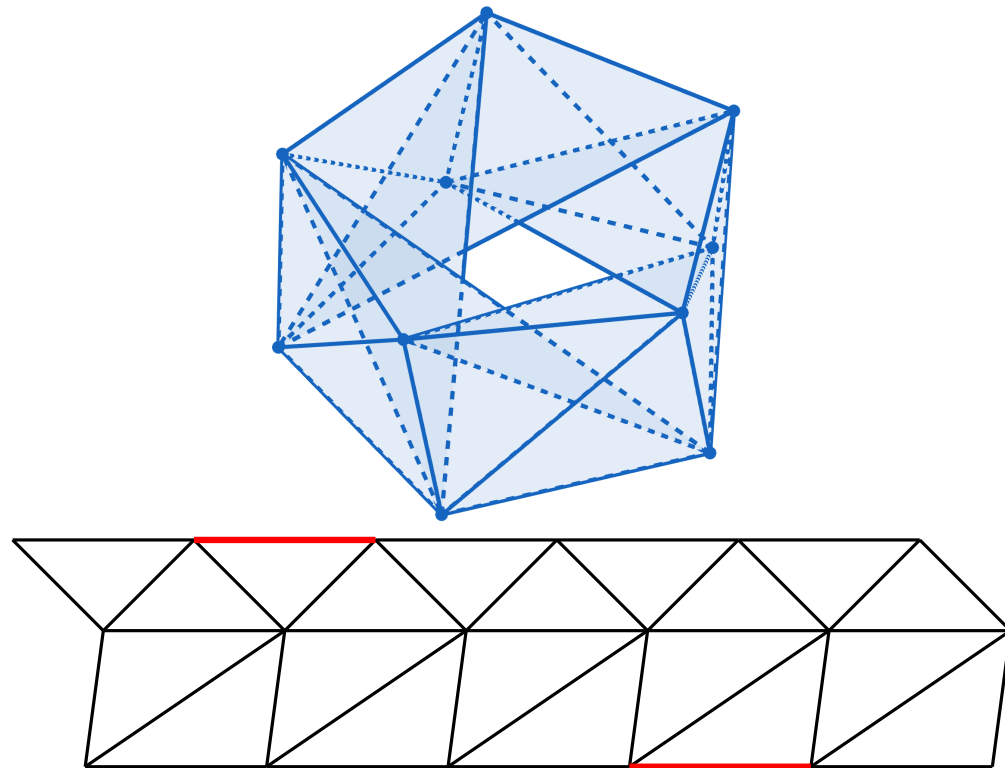


図 5: 不足角が各頂点で 0 であるような多面体 ( $|V| = 10$ ) とその展開図

平坦にすることが可能であるということである. 例えば, 折り紙を折って面の重複がないように閉曲面を構成した場合, その多面体は必ず各頂点のガウス曲率が 0 になる. 逆に言えば, ガウス曲率が各頂点で 0 である多面体は, 折り紙で作成できたり, 平面充填ができたりする可能性がある. また, このような多面体を実現する最小の頂点数はどのぐらいなのかについてはわかっていない.

最後に各頂点の不足角が負の一定値であるような多面体について考えてみる. 命題 3.3.1 で触れた通り, 閉曲面ではガウス曲率が全ての点で負であるようなものは存在しない. しかしながら, その離散

版である多面体においては, ガウス曲率に対応する不足角について, 全て負の値であるものの存在が知られている [1]. 著者は, 今まで存在が知られていた “不足角が全て負である多面体” についてさらに条件を強め, “不足角が負の一定値である多面体” について, 図 6 のように具体的な構成を与えることで存在を示すことに成功した.

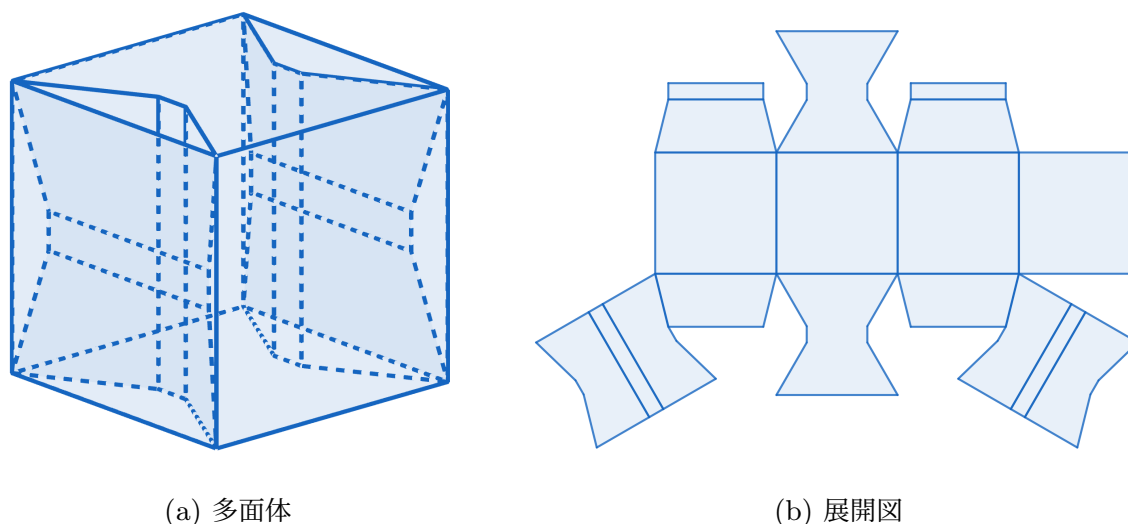


図 6: 各頂点の不足角が負の一定値である多面体

図 6 の多面体は, 以下の 3 点

$$\begin{aligned}
 A &: (n_1, n_1, n_1) \\
 B &: (n_1 - \sqrt{3}n_2, n_1 - n_2, n) \\
 C &: (n_1 - \sqrt{3}n_3, n_1 - n_3, n_1 - 4\sqrt{3}n_3)
 \end{aligned}$$

の各座標をそれぞれ 1 または  $-1$  倍して得られる頂点で構成されている. この多面体は, 各頂点での不足角が  $-\pi/6$  となっており, オイラー標数は  $-2$  である.

#### 補題 3.4.1

不足角が各頂点で  $-\pi/6$  で, オイラー標数が  $-2$  である多面体が存在する.

また, 図 7 のように, 並行な面が存在する多面体には, 全ての頂点で不足角が  $-\pi/6$  である “穴” を開けることが可能である. この穴をあける操作によって, 不足角の総和は  $4\pi$  ずつ減っていく.

#### 補題 3.4.2

並行な面が存在する多面体  $P$  に対して, 不足角が  $-\pi/6$  であるような頂点を 24 個加えた多面体  $P'$  を作成することができる. また,  $\chi(P') = \chi(P) - 2$  である.

今回作成した図 6 に補題 3.4.2 を適用することで, オイラー数が  $-2n(n \geq 1)$  であるような多面体

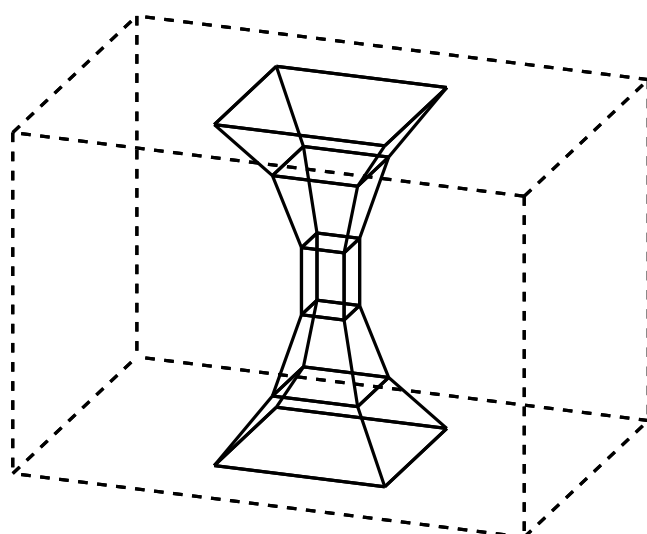


図 7: 各頂点の不足角が  $-\pi/6$  である穴

を作成することができる。また前述のとおり、不足角が一定である多面体には、オイラー標数が  $2, 0$  のものが存在する。よって以下の主結果を得る。

### 定理 3.4.3

任意のオイラー標数  $2 - 2n (n \geq 0)$  に対して、不足角 (曲率) が一定値である多面体が存在する。

不足角が負の一定値である多面体の各ユニットについて、作成するコードおよび立体のデータは [GitHub](#) に置いてある [6]。

## 4 今後の展望

本稿では多面体の中でも不足角が負の一定値であるようなものに対して, 具体的な構成を与えることができた. 今回構成した多面体には各点の座標が求まり, かつ各面における頂点の角度の  $\cos, \sin$  の値が整数係数の二次方程式の解の形で表すことができる. そのため, 折り紙を複数枚用いて今回の“不足角が負の一定値である多面体”を作成することが理論的には可能である. また, [6] ではより高度なユニットとしての多面体を作成してある.

今回は存在性を示したが, このような全ての頂点の不足角が一定値である多面体について, 実現可能な最小頂点数はわかっていないため, 興味深い.

## 謝辞

本論文の作成にあたり, 終始適切な助言を賜り, また丁寧に指導して下さいた鍛冶静雄教授に深謝いたします. また, 同セミナーで共に学んだ佐々木裕貴氏と久川創人氏をはじめ, 大学生活で知り合った諸氏には常に刺激的な議論を頂き, 精神的にも支えられました. ここに感謝申し上げます.

## 参考文献

- [1] Abdênago Barros, Esdras Medeiros, and Romildo Silva. Two counterexamples of global differential geometry for polyhedra. *JP Journal of Geometry and Topology*, Vol. 11, , 03 2011.
- [2] Peter R. Cromwell. *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [3] R. Descartes. *De solidorum elementis: écrit posthume de Descartes ; Texte latin (original et revu)*. (unpublished), 1630.
- [4] C.F. Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiones, 1828.
- [5] 中内伸光. じっくりと学ぶ曲線と曲面—微分幾何学初歩—. 共立出版, 2010 年 05 月 01 日.
- [6] 河井 亮. Polyhedron with Constant Negative Curvature. <https://github.com/RyoKawai-github/Polyhedron-with-Constant-Negative-Curvature>.
- [7] 坪井俊. 平坦トーラスの折り紙埋め込み. 武蔵野大学数理工学センター紀要, No. 5, pp. 44–57, mar 2020.