

# Polyhedron について

Ryo Kawai

2022 年 11 月 1 日

## 前書き (memo)

TeX の環境をいじって色々試しているため, とても奇妙な PDF になってしまっている. 環境としては, エディタとして VScode(LaTeX Workshop, LaTeX Utilities), TeX として TeXLive2021 を使用している.

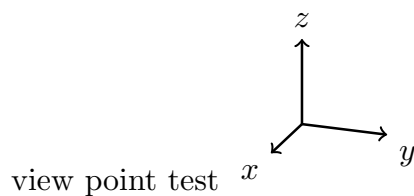
基本的に, 呼び名が複数あるものは最初に表記してある方で統一する.

.....

往々にしてルー大柴さんのようになるが許して欲しい.

abs があるか macro:-j “protect “abs

図に関しては, 現在 tikz3dtools を使おうと試みている途中であるため, もう少し後で挿入する.



## 目次

1	多面体のモチベーションと定義	4
1.1	モチベーション . . . . .	4
1.2	定義 . . . . .	4
1.3	分類 (上に統合する?) . . . . .	6
2	多面体の基本的な性質	7
2.1	Basis . . . . .	7
2.2	regular polyhedron . . . . .	7
3	多面体グラフ	8
3.1	凸多面体 . . . . .	8
3.2	regular . . . . .	9
4	多面体の面について	11
4.1	regular . . . . .	11
5	ガウス曲率が一定な多面体	12
5.1	一般のガウス曲率 . . . . .	12
5.2	多面体のガウス曲率 . . . . .	12
5.3	ガウス曲率が一定である多面体 . . . . .	13

この PDF で出てきている疑問点

1. 正六角形で構成される多面体 (穿孔多面体) は存在するのか. おそらく存在しないと考えているが, 証明はあるのか.
2.  $m$  角形が  $n$  個で構成される多面体について,  $(m, n)$  がどのような時であれば存在するのか. 凸多面体はわかっているため, 凹および穿孔多面体での存在について.
3. 全ての頂点のガウス曲率が負の一定値であるような多面体について (構成はできたが, 他にどのようなものがあるか. 現在は各点のガウス曲率が  $-\pi/6$  のものだが, これをもっと小さくできないかなど).
4. 全ての頂点のガウス曲率が 0 であるような立体の最小頂点数は, 現在知られているものは 10 頂点だが, それ以下はないのか (ない気がする).

# 1 多面体のモチベーションと定義

## 1.1 モチベーション

四角形の面が7つで構成される凸多面体は存在するのであろうか。これは私が高校生の時に疑問に思ったことである。当時自分は存在しないと予想したが、綺麗な証明は行えなかった。その後、大学でグラフ理論とその周辺を学び、Steinitz's の定理などを知り多面体グラフからのアプローチに興味を持った。この PDF では、自分が興味を持った多面体についての事実や、知られていることをまとめることとする。

## 1.2 定義

私が今回扱いたい対象である多面体について、まずは定義から確認していきたい。しかし実は多面体の定義は、まるでグラフ理論におけるグラフの定義のように、様々な分野や場面において異なる定義がされていることが多く、一般的なもの定まっていない。そこでまず、そのようなさまざまな多面体の定義について観察してみる。

例えば広辞苑を引くと、多面体については以下のように書かれている。

四つ以上の平面多角形で囲まれた立体。平面の数によって四面体・五面体などという。

しかし、これは数学的に扱うには曖昧すぎる (?)。

図形的な世界での一つの定義として「空間内で複数の多角形を辺で連結させた立体」というものがある [3]。この定義はとても直感的に分かりやすく、よく表している。この定義に基づくと、2枚だけの多角形でできていても多面体と捉えることができるため、その点が問題である。また、「立体」は3次元上での集合という意味で捉えているが、これも曖昧である。

空間を切り取るといった表現が使われているものもある。また例えば、田村トポロジーでは単体複体の実現を多面体とよんでいる。

一例として [3] の定義を見てみよう。ここでは「空間内で複数の多角形を辺で連結させた立体」を「開いた多面体」、「4枚以上の多角形が集まって空間を切り取る立体」を「閉じた多面体」と定義している。また、分類について無限面体や面 (多角形) の内部自己交差も許容している。凸多面体に限れば、広く知れ渡った定義がある。

一つ一つ例を見ていこう。(ここで詳細に定義を考える) (中略)

以上を整理すると、私が扱いたい多面体は、以下のような性質を満たしてほしいことがわかる。(他に細々としたものがあるが...)

1. オイラーの公式 ( $V + F - E = 2 * (1 - S)$ ) を満たす。
2. (頂点の数は有限個である)。
3. 辺に接する面の数は必ず2つである。(閉曲面である)

4. 頂点に接する辺および面の数は3つ以上である.
5. 自己交差をしない. (要検討)

(文章が良くないので, 校正の必要あり)

今回扱いたい多面体は, 本質的には単体的複体に近いように思うため, 多面体を以下のように定義したらどうだろうか.

#### 定義 1.2.1 | $\langle n\text{-polygon}(n \text{ 角形}) \rangle$

$\mathbb{R}^3$  における  $n \geq 3$  個の点  $p_1, p_2, \dots, p_n$  がどの3点をとっても一次独立であるとき,  $P_n = \{\{p_1, p_2\}, \{p_2, p_3\}, \dots, \{p_{n-1}, p_n\}\} \cup \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  を  **$n\text{-polygon}(n \text{ 角形})$**  であるといい,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  を  $P$  の **vertex(頂点)**,  $\{\{p_1, p_2\}, \{p_2, p_3\}, \dots, \{p_{n-1}, p_n\}\}$  を **edge(辺)** という. 特に辺や頂点の数を指定しないときは **polygon(多角形)** という.

#### 定義 1.2.2 | $\langle n\text{-polyhedron}(n \text{ 面体}) \rangle$

有限個の多角形とその頂点の集まり  $\mathbb{P} = \{P_n\}$  が,

1.  $\forall P_m, P_l \in \mathbb{P} \Rightarrow P_m \cap P_l \in \mathbb{P}$
2.  $P_n \in \mathbb{P} \Rightarrow \forall p_n \in P_n, p_n \in \mathbb{P}$

を満たすとき,  $\mathbb{P}$  を **polyhedron(多面体)** であるといい, 特に多角形  $m$  個で構成されるものを  **$n\text{-polyhedron}(n \text{ 面体})$**  という. 辺や頂点は多角形のを引き継ぐ...

well-defined ではない...

以前いただいた論文にある定義をそのまま見てみよう.

#### 定義 1.2.3 | $\langle \text{abstract polyhedron} \rangle$

An abstract polyhedron is a finite graph, with a special collection of abstract polygons (also called faces) formed by its vertices and edges. The vertices, edges and polygons are required to satisfy the following conditions:

1. Every edge is incident with precisely two distinct vertices and two distinct faces.
2. If a vertex and a face are incident there are precisely two distinct edges incident with both.
3. For each face (vertex) the vertices (faces) and edges incident with it form a simple circuit of length  $\geq 3$ .
4. If two edges are incident with the same two vertices (faces), then the four faces (vertices) incident with the two edges are distinct.
5. Each pair of faces (vertices) is connected through a finite chain of incident edges and faces (vertices).

#### 定義 1.2.4 | $\langle \text{polyhedron} \rangle$

A geometric polyhedron (polyhedron for short) is the image of an abstract polyhedron under a mapping in which vertices are mapped to points in the Euclidean 3-space, edges are mapped to segments with appropriate endpoints, and faces are mapped to (geometric) polygons. The geometric polyhedron is said to be a realization of the underlying abstract polyhedron.

以降この PDF では 3 次元の有限な多面体のみを扱うこととする.

なお, ここで定義から外れてしまったが一般的に多面体に分類される立体 (単側多面体や無限多面体) についても, 他のセクションで扱いたい.

### 1.3 分類 (上に統合する?)

**定義 1.2.2** に該当する立体は数多く存在するが, その中でも大きく凸多面体, 凹多面体, 穿孔多面体に分類できる.

#### 定義 1.3.1 | $\langle$ convex polyhedron(凸多面体) $\rangle$

多面体の中で, 二面角が  $\pi$  未満かつ自己交差をしないものとして定義することができるらしい.

#### 定義 1.3.2 | $\langle$ concave polyhedron(凹多面体) $\rangle$

種数 0 の多面体の中で凸多面体でないものを **concave polyhedron(凹多面体)** または **nonconvex polyhedron** という.

凸多面体と凹多面体をまとめて多面体ということもある. すなわち球面と同相なものを多面体ということがあるが, 本 PDF では使い分ける.

#### 定義 1.3.3 | $\langle$ toroidal polyhedron(穿孔多面体) $\rangle$

多面体の中で, 種数が 1 以上であるもの.

## 2 多面体の基本的な性質

### 2.1 Basis

多面体についての基本的な性質を紹介する．同型や同値類の説明を行う．

### 2.2 regular polyhedron

各頂点に接する面のパターン (?) が同一であり, 各面が同一の **regular polygon**(正多角形) で構成されている多面体は, 凸のものに限れば **regular polyhedron**(正多面体) と呼ばれ, 5 種類と完全に決定されている．また, 同一に限らず, 二種類以上の正多角形で構成された多面体は無限に存在し, その中でも特徴的な立体には様々な名前がついている．この辺は余裕があればこの章に追加する．

ここで素朴には, 上の正多面体の条件を緩めるとどうなるかという疑問がある．例えば, 「同一の正多角形で構成された多面体」とすると, 正三角形・正四角形・正五角形の場合は正多面体を貼り付けることでほぼ無限に作ることができる, 当然のことながら無限にある．この場合, 正六角形で構成される多面体はどうだろうか．これは非自明な気がするが, どこかに調べられていたら教えていただきたい．また, 各頂点を共有する面のパターン (ここでは面の数としよう) が一定な多面体は, 凸に限ればおそらく容易にわかる．この場合, 凸に限らなければどれぐらい知られているのだろうか．これも非自明な気がする．

### 3 多面体グラフ

これ以降はグラフに関する言葉は定義などを割愛する。全て <https://ryokawai-github.github.io/website/PDF/Graph.pdf> に書いてあるようにする。

多面体グラフとは、多面体の頂点とその辺によって表現されるグラフである。詳しい定義は以下の通りである。

#### 定義 3.0.1

多面体グラフの定義をここに書く。

#### 3.1 凸多面体

凸多面体の多面体グラフについては、以下の有名な定理がある。

##### 定理 3.1.1 | 〈Steinitz's theorem〉

凸多面体の多面体グラフは単純で平面的な 3-connected なグラフであり、またその時に限る。すなわち、

また、平面的なグラフに関しては以下の定理がある。

##### 定理 3.1.2 | 〈Kuratowski's theorem〉

グラフが平面的である必要十分条件は、部分グラフとして  $K_5, K_{3,3}$  の構造を含まないことである。

また、グラフが平面的であるかは Boyer のアルゴリズムで線形時間で判定できるようなのである [4]。

3-connected に関しては以下の定理がある。

##### 定理 3.1.3

$G$  が 3-連結グラフ (ただし  $K_3$  は除く) であるための必要十分条件は、以下を満たすようなグラフの列  $G_0, \dots, G_n$  が存在することである。

1.  $G_0 = K_4 \wedge G_n = G$ .
2.  $\forall i < n, \exists xy \in E(G_{i+1}), (d(x), d(y) \geq 3 \wedge G_i = G_{i+1}/xy)$ .

また、凸多面体の多面体グラフについてはよく調べられている。例えば [1] ではグラフの同型を除いた凸多面体の多面体グラフの個数が、頂点数 10 まで調べられている。現在はもっと調べられており、以下の表までわかっている。 <https://oeis.org/A000944> また、 <https://mathworld.wolfram.com/PolyhedralGraph.html> に 7 までのものは載っていた。



表 1 多面体グラフの個数

頂点の数	グラフの同型を除いた凸多面体の多面体グラフの個数
4	1
5	2
6	7
7	34
8	257
9	2606
10	32300
11	440564
12	6384634
13	96262938
14	1496225352
15	23833988129
16	387591510244
17	6415851530241
18	107854282197058

### 3.2 regular

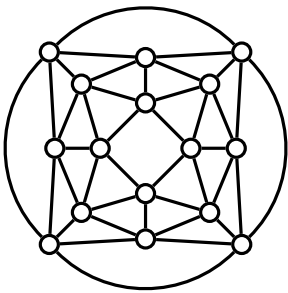
面の種類の角形数が全て等しい多面体について考えてみる．まずは凸多面体に限って考えてみる．全ての面が三角形で構成される凸多面体は, 面の数が  $2n(n \geq 2)$  の時に存在することが容易にわかる．全ての面が四角形で構成される凸多面体は, 面の数が  $n = 6$  or  $n \geq 8$  の時に存在することがわかる．全ての面が五角形で構成される凸多面体は, 面の数が  $n = 12$  or  $2n(n \geq 8)$  の時に存在することがわかっている [2]．実際はもっと調べられているらしく, <https://oeis.org/A308489> には [2] よりも載っている．全ての面が六角形で構成される凸多面体は存在しないことが容易にわかる．まとめると以下のようなになる．

表 2  $n$  角形が  $m$  個で構成される凸多面体の存在

$n \backslash m$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
3	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	...
4	×	×	○	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	...
5	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×	○	×	○	...
6	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	...

#### 例 3.2.1

5-regular planar graph with 16 vertices.



## 4 多面体の面について

頂点の数が  $f_1, f_2, \dots, f_n (i < j \Rightarrow f_i > f_j)$  である多角形で構成される多面体  $P$  を  $P = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  で表すこととする. この時,  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  がどのようなであれば存在するのかを調べたい. [https://www.southalabama.edu/mathstat/personal\\_pages/nmishra/mypapers/JCMCCpaper%20\(planargraphs\).pdf](https://www.southalabama.edu/mathstat/personal_pages/nmishra/mypapers/JCMCCpaper%20(planargraphs).pdf) に近い内容が調べられていそうだ.

### 4.1 regular

まず簡単に  $f_1 = f_2 = \dots = f_n = m$  のときを考える. § 3.2 で述べたとおり, この場合は凸多面体では存在条件が知られている. また凹多面体を含めても, 存在条件は同じになると予想している. しかし, 穿孔多面体を含めた多面体で考えると, この条件は大きく変化する.

まずは種数が 1 である場合のみを考えてみよう. 有名なもので, シラッシの多面体が六角形が 7 つで構成される. また, 六角形が  $8k (k \geq 1)$  の多面体や六角形が 9 つの多面体も構成することができる. 現在自分が把握できている範囲では以下のようになっている.

表 3  $n$  角形が  $m$  個で構成される種数 1 の穿孔多面体の存在

$n \backslash m$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
3	?	?	?	×	?	×	?	×	?	×	○	×	○	×	○	×	○	...
4	?	?	?	?	?	○	?	?	○	○	?	○	○	○	○	○	○	...
5	?	?	?	×	?	×	?	×	?	×	?	×	?	×	?	×	?	...
6	?	?	?	○	○	○	?	?	?	?	?	?	○	?	?	?	?	...
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	...

シラッシさんの論文 <https://www.math.unm.edu/~vageli/papers/FLEX/Szilassi.pdf> をみると, いろいろ載っていると思われるが, 未だ読めていない.

また, 種数が 1 以上のときに多面体の面の数が最低幾つであるかは知られているのだろうか. 頂点の数の最小数は 7 で決定したらしい. (6 以下をコンピュータで潰したらしいが, 詳しくはわからない.) なお, 頂点数 7 の種数が 1 の多面体はチャーサールの多面体 (シラッシの多面体の双対多面体) が存在する. これはトーラスに  $K_7$  を埋め込んだものと見ることができる.

## 5 ガウス曲率が一定な多面体

### 5.1 一般のガウス曲率

一般にガウス曲率とは、なめらかな曲面について定義されるものである。曲面の各点に対して、その点での法線ベクトルを含む平面と曲面の共通部分が成す曲線の曲率の最大値と最小値を掛け合わせたものをガウス曲率と定義する。この定義については、ガウスの驚愕定理やガウス・ボネの定理などの重要な性質が知られている [ここをもっと詳しく]。さらに、ブラウワーの不動点定理を使うと「任意の点でガウス曲率が負であるような閉曲面」が存在しないことが言えたような気がする (おそらく 1 年前に鍛冶先生の講義でやった) のだが、すっかり忘れてしまって証明が思い出せない。

### 5.2 多面体のガウス曲率

一般のガウス曲率は曲率で定義されていたが、多面体の場合は辺や頂点でガウス曲率を定義することが出来ない。そこで、多面体のガウス曲率を以下のように定める。

#### 定義 5.2.1 | 〈 ガウス曲率, 不足角 〉

各頂点において、 $2\pi$  から接している面のその頂点での角度の和を引いた角度を **Gaussian curvature**(ガウス曲率) または **Angular defect**(不足角) という。すなわち、頂点  $x$  でのガウス曲率は、

$$2\pi - \sum_{F \in \{x \text{ に接する面} \}} \{F \text{ の } x \text{ での角度} \}$$

で与える。

このガウス曲率に対して、以下の定理がなりたつ。

#### 定理 5.2.2 | 〈 Descartes' theorem on total angular defect 〉

球面と位相同型 (穴の空いていない) 多面体において、ガウス曲率の総和は  $4\pi$  である。

より一般に上記の定理を拡張して、一般のガウス曲率についてのガウス・ボネの定理のような定理が成り立つ。

#### 定理 5.2.3

種数  $n$  の多面体のガウス曲率の総和は  $2\pi * 2(1 - n)$

よって、種数 0 の立体ではガウス曲率の総和は  $4\pi$ 、種数 1 の立体ではガウス曲率の総和は 0、種数 2 の立体ではガウス曲率の総和は  $-4\pi$  である。

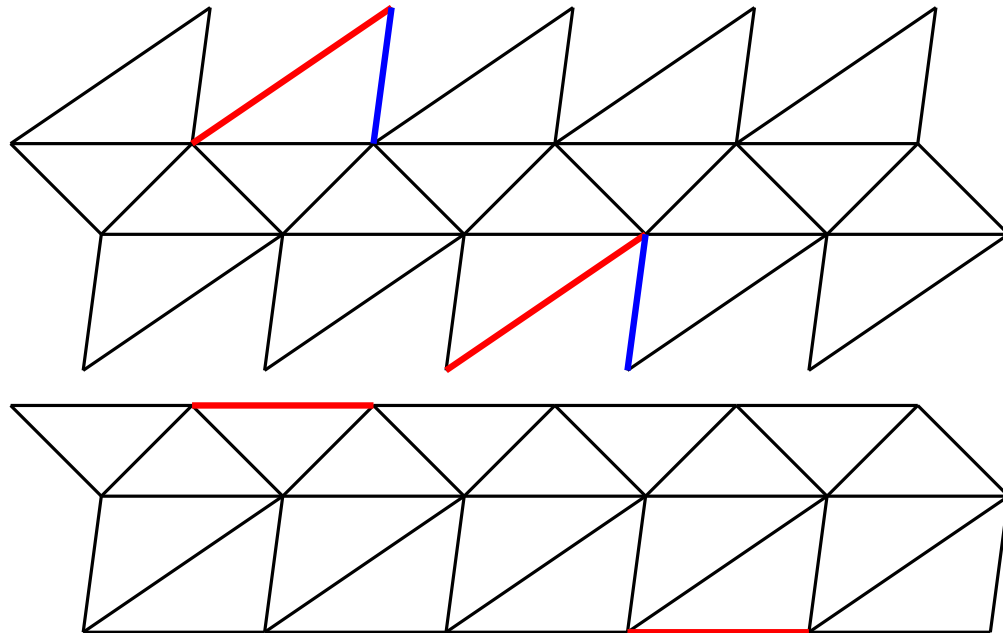
### 5.3 ガウス曲率が一定である多面体

ガウス曲率が一定である多面体について考えていこう。

まず穴が空いていない多面体について考えると、**定理 5.2.3** より全体のガウス曲率の和は  $4\pi$  になり、各頂点でのガウス曲率は正である。このような多面体は、正多面体などを代表に半正多面体など対称性の高い様々な多面体を挙げることができる。

次に穴が一つある穿孔多面体について考えてみよう。**定理 5.2.3** より全体のガウス曲率の和は 0 になり、各頂点でのガウス曲率は 0 である。<https://im.icerm.brown.edu/portfolio/paper-flat-tori/> には 12 頂点のものが書かれている。このような立体に関して、頂点数が 10 のものが坪井先生によって作成されており、知られている。展開図は以下の形をしている

#### 例 5.3.1



ここで注目したいのは、各頂点のガウス曲率が 0 であるということは、展開した際に平坦にすることが可能であるということである。例えば、折り紙を折って面の重複がないように閉曲面を構成した場合、その多面体は必ず各頂点のガウス曲率が 0 になる。逆に言えば、ガウス曲率が各頂点で 0 である多面体は、折り紙で作成できることや平面充填可能であることが示唆される。このような多面体を実現する最小の頂点数はどのぐらいなのかについてはまだわかっていないが、自分の中ではあっても 9 頂点であると考えている。また各頂点周りの形が等しいと仮定すると、おそらく平面敷き詰めおよび実現の存在についての問題に持ち込めるのではと考えている。[https://colab.research.google.com/drive/1DCwIJ4lUge\\_jUUiaW\\_B2r8df20HHYWv9?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1DCwIJ4lUge_jUUiaW_B2r8df20HHYWv9?usp=sharing) に実験したデータをまとめているため、参考にされたい。また、google colab 上で立体の可視化および stl での保存が簡単にできることがわかったため、今後は mathematica に加えてこちらも活用していきたい。

最後に穴が二つ以上ある穿孔多面体について考えてみよう. 定理 5.2.3 より全体のガウス曲率の和は  $-4\pi * (\text{穴の数} - 1)$  になり, 各頂点でのガウス曲率は負である. 一般のガウス曲率 (?) では各点でガウス曲率が負の一定値になるような立体を構成することはできないのに対し, 対象を離散的な多面体にすると全ての頂点でガウス曲率が負であるものを構成することができる. [https://www.researchgate.net/publication/266885256\\_Two\\_Counterexamples\\_of\\_Global\\_Differential\\_Geometry\\_for\\_Polyhedra](https://www.researchgate.net/publication/266885256_Two_Counterexamples_of_Global_Differential_Geometry_for_Polyhedra) (Title: Two Counterexamples of Global Differential Geometry for Polyhedra) に書かれているが, ここではその存在性についてのみ言及しており, 具体的には数値計算による近似解しか与えていない. 私はそれらについて, 実際に具体的な構成を与えた. これらは全て各頂点でのガウス曲率が  $-\pi/6$  となっている. この立体の優れているところ

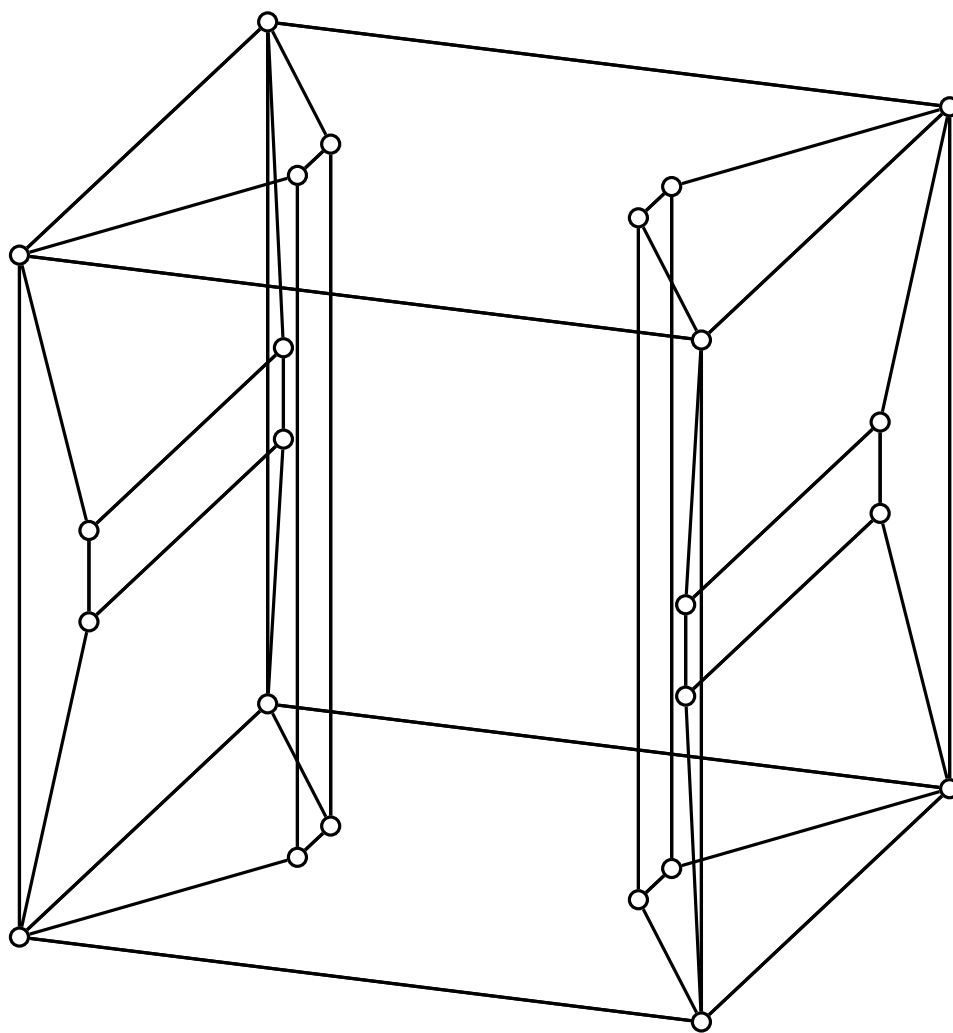


図1 穴が二つ空いている, 各頂点のガウス曲率が一定である穿孔多面体

ろは, 各点の座標が求まり, かつ二次方程式の解の形でかけること (?) である. すなわち, 各面の全ての頂点角において, その  $\cos, \sin$  の値が  $1/2$  乗の形で書くことができるのである. 故に複数枚による折り紙でこの立体を作成することができるはずなので, 思いついたら作ってみたいと思う.

また, このような全ての頂点のガウス曲率が一定値である立体について, 実現可能な最小頂点数を調べることはとても興味がある. 手始めにチャースールの多面体を模した, 各頂点でのガウス曲率が

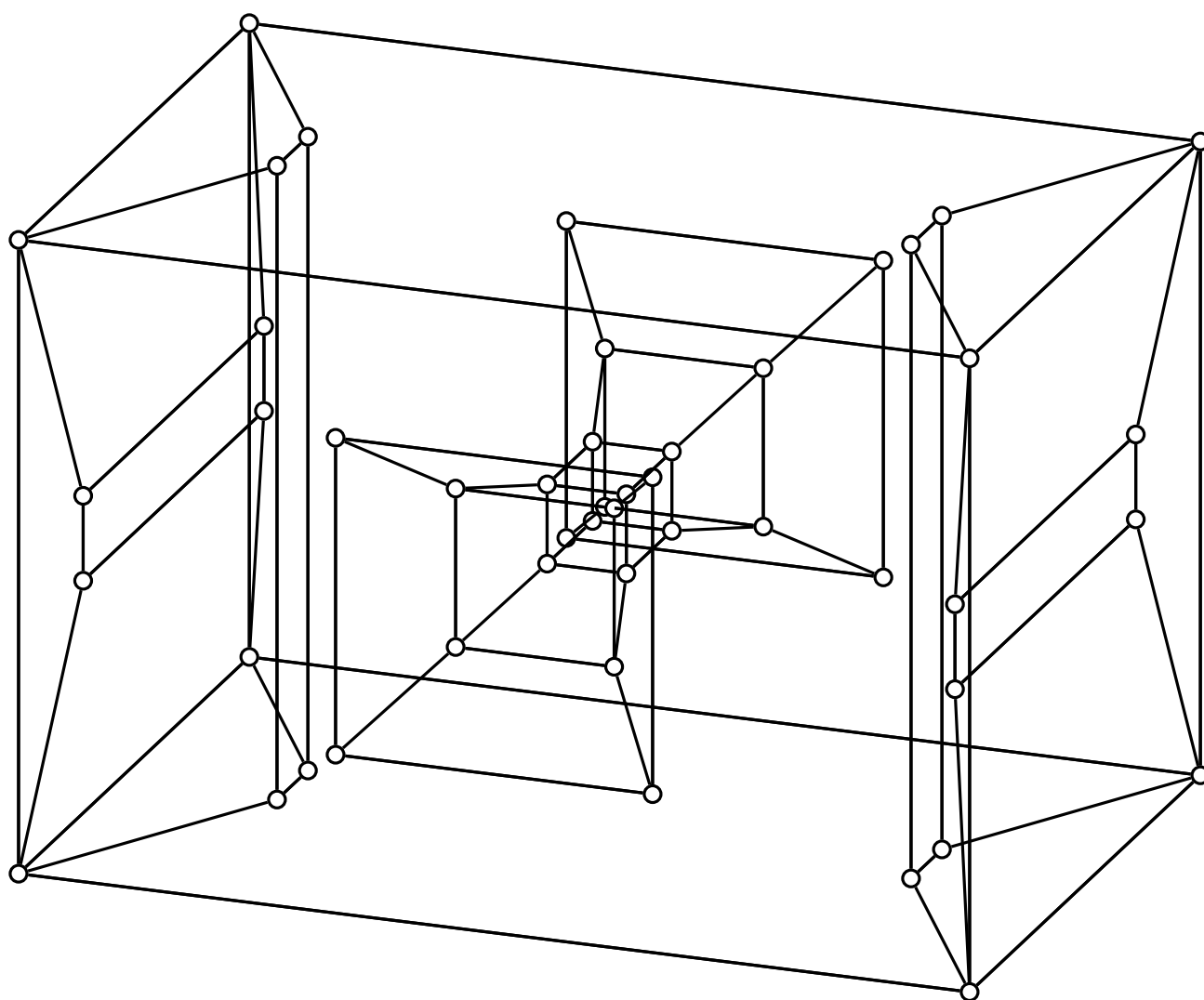


図2 穴が三つ空いている, 各頂点のガウス曲率が一定である穿孔多面体

$-\pi/3$  となる立体 (12 頂点) の構成を試みたが, 失敗した. 現在は  $-\pi/4$  (16 頂点) の構成を試みている. また, 対称性が高い (要定義) 多面体でガウス曲率が一定である立体についての性質について調べてみるのはとても興味深いと感じている.

## 索引

$n$ -polygon( $n$  角形), 5  
 $n$ -polyhedron( $n$  面体), 5  
Angular defect(不足角), 12  
concave polyhedron(凹多面体), 6  
edge(辺), 5  
Gaussian curvature(ガウス曲率), 12  
nonconvex polyhedron, 6  
polygon(多角形), 5  
polyhedron(多面体), 5  
regular polygon(正多角形), 7  
regular polyhedron(正多面体), 7  
vertex(頂点), 5



## 参考文献

- [1] A. J. W. Duijvestijn and P. J. Federico. The number of polyhedral (3-connected planar) graphs. *Mathematics of Computation*, Vol. 37, No. 156, pp. 523–532, 1981.
- [2] Mahdieh Hasheminezhad, Brendan D. McKay, and Tristan Reeves. Recursive generation of 5-regular planar graphs. In Sandip Das and Ryuhei Uehara, editors, *WALCOM: Algorithms and Computation*, pp. 129–140, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg.
- [3] 宮崎興二. 『多面体百科』. 丸善出版, 2016 年 10 月 31 日.
- [4] John M. Boyer and Wendy J. Myrvold. On the Cutting Edge: Simplified  $O(n)$  Planarity by Edge Addition. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, Vol. 8, No. 3, pp. 241–273, 2004.