1　未定義の用語

1.1　次数

定義 1.1.1 (近傍). グラフ G の頂点集合 U に対して,

$$N(U) = \{x \in V(G \backslash U) | ^{\exists} y \in U \ s.t. \ xy \in E(G)\}$$

をグラフ G における U の近傍という. 特に $U = u$ のとき, $N(u)$ は u に隣接する頂点全体である.

定義 1.1.2 (次数). グラフ G の頂点 v に対して, $d(v) = |E(v)| = |\{vx \in E(G) | ^{\exists} x \in V(G)\}|$ をグラフ G における x の次数という.

つまり, 次数とは x に接続している辺の本数である. 単純グラフの場合, 頂点 v に対して, 接続する辺の数と隣接する頂点の数は等しいため, $d(v) = |N(v)|$ が成り立つ. multi グラフでは, $d(v) \geq |N(v)|$ である.

1.2　連結度

定義 1.2.1 (連結). グラフ G が連結であるとは, G の任意の 2 頂点 x, y に対してその 2 点を結ぶ G 上の path が存在することである.　すなわち, $^{\forall} x, y \in G, ^{\exists} P \subset G$: path s.t. P = x $\cdots$ y である.

セミナーでは $^{\forall} x, y \in G, ^{\exists} P \subset G$: path s.t. x, y $\in$ P としていたが, やはり上の定義の方がよい気がしたので戻した. 同値であるため議論に支障はない.

定義 1.2.2. G をグラフとする. G の空でない極大な連結部分グラフを G の連結成分という. すなわち, 各連結成分は共通部分を持たない.

定義 1.2.3 (k-連結). $k \in \mathbb{N}, |G| > k$ で, $|X| < k$ である任意のグラフ X に対して $G - X$ が連結であるとき, グラフ G は k-連結であるという.

X は任意だが, 仮に G の部分グラフではない A を取ったとしても $|G| > k, |A| < k$ より $G \cap A \subset B \subset G, |B| < k$ となる B が取れ, $G - A \supset G - B$ である. そのため, $X \subset G$ としても問題はない.　グラフが 1-連結であることは, 定義よりグラフが連結であることである. また定義より $n, m \in \mathbb{N}, n < m$ のとき, グラフ G が m-連結ならば G は n-連結である. グラフ G が k-連結になる最大整数 k を連結度といい, $\kappa(G)$ で表す.

1.3 縮約 (Contraction)

定義 1.3.1. グラフ $G = (V, E)$ とその辺 $xy \in E$ に対して, $v_{xy} \notin V$ として

$(\{V \backslash \{x,y\} \cup \{v_{xy}\}\}, \{vw \in E | \{x,y\} \cap \{v,w\} = \emptyset\} \cup \{v_{xy}w | w \in V \backslash \{x,y\}\ s.t\ xw \in E \vee yw \in E\})$

すなわち

$$G - \{x,y\} \cup \{v_{xy}\} + \{v_{xy}w | w \in V \backslash \{x,y\}\ s.t\ xw \in E \vee yw \in E\}$$

で与えられるグラフを G/xy で表す.

ここからすぐに次のことがわかる. $N(\{x,y\}) = N(v_{xy})$ $G - \{x,y\} = G/e - v_{xy}$

2 3-連結グラフについて

2.1 準備

補題 2.1.1. G: グラフ, $e = xy \in G$,
G: 連結 $\Leftrightarrow$ G/e: 連結

Proof. G: 連結とすると, $^\forall a, b \in G, ^\exists P$:$a$ と b を結ぶ G 上の path . ここで $\{a,b\} \cap \{x,y\} = \emptyset$, $P' = G/e[P \cup \{v_{xy}\}]$ とすると,

(i) $P \cap \{x,y\} = \emptyset$ のとき, $P \subset G - \{x,y\} = G/e - v_e \subset G/e$.

(ii) $P \cap \{x,y\} = \{x\}(\text{or } \{\text{y}\})$ のとき, P: 連結と $P \ni x(\text{or y})$ より P' は連結であり, $a, b \in P' \subset G/e$.

(iii) $P \cap \{x,y\} = \{x,y\}$ のとき, P: 連結と $P \ni x, y$ より P' は連結であり, $a, b \in P' \subset G/e$.

であるから, a と b を結ぶ G/e 上の path が存在することがわかる. また, $\{a,b\} \cap \{x,y\} = \{x(\text{or y})\}$ の場合は (ii) の最後を $v_{xy}, b(\mathrm{or\ a, v_{xy}}) \in \mathrm{P' \subset G/e}$ とすればよい. $\{a,b\} \cap \{x,y\} = \{x,y\}$ の場合は a, b は G/e 上で一点 $v_{x,y}$ になる. よって G/e: 連結である. 逆も同様に示せる. □

補題 2.1.2. G: グラフ, $e = xy \in G$, $x, y, v_{xy} \notin S$:vertices set,
$(G - S)/e = G/e - S$

Proof.

$$\begin{aligned}
V((G-S)/e) &= (V(G)\backslash S)\backslash\{x,y\}\cup\{v_{xy}\}\\
&= (V(G)\backslash\{x,y\}\cup\{v_{xy}\})\backslash S(x,y,v_{xy}\notin S\text{ より})\\
&= V(G/e-S)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E((G-S)/e) = &\{vw\in E(G-S)|\{x,y\}\cap\{v,w\}=\emptyset\}\cup\\
&\{v_{xy}w|w\in V(G-S)\backslash\{x,y\}\ s.t\ xw\in E(G-S)\vee yw\in E(G-S)\}\\
=&\{vw\in E(G-S)|\{x,y\}\cap\{v,w\}=\emptyset\}\cup\\
&\{v_{xy}w|w\in V(G-S)\backslash\{x,y\}\ s.t\ xw\in E(G-S)\vee yw\in E(G-S)\}\\
=&\{vw\in E|(\{x,y\}\cup S)\cap\{v,w\}=\emptyset\}\cup\\
&\{v_{xy}w|w\in V(G-S)\backslash\{x,y\}\ s.t\ xw\in E\vee yw\in E\}\\
&\because V(G-S)=V-S,\\
&\quad w\in V(G-S)\wedge x,y\notin S\Rightarrow(xw(yw)\in E\Leftrightarrow xw(yw)\in E(G-S))\\
=&\{vw\in E|(\{x,y\}\cup S)\cap\{v,w\}=\emptyset\}\cup\\
&\{v_{xy}w|w\in V\backslash\{x,y\}\ s.t\ (xw\in E\vee yw\in E)\wedge w\notin S\}\\
=&\{vw\in E(G/e)|\{v,w\}\cap S=\emptyset\}\\
=&E(G/e-S)
\end{aligned}$$

□

補題 2.1.3. G: グラフ, $e=xy\in G$, $x,y,v_{xy}\notin S$:vertices set,
$(G-S)$: 連結 $\Leftrightarrow$ $G/e-S$: 連結

Proof. 補題 2.1.1, 補題 2.1.2 よりわかる. □

定理 2.1.4. G:3-連結グラフ,
$|G|>4\Rightarrow^{\exists}e\in E(G)\ s.t.\ G/e:3-$連結

Proof. そのような辺が存在しない, つまり $^{\forall}e=xy\in G\ s.t.\ \kappa(G/e)\leq 2$ とする. すなわち $^{\exists}S\subset G/e$: vertices set s.t. |S| $\leq 2\wedge$ G/e − S: 非連結. また, $e=xy$ によって G を縮約した際に得られる頂点を v_{xy} と書き表すこととする. 今, $v_{xy}\notin S$ とすると, $S\subset G/e-v_{xy}=G-\{x,y\}$ より $x,y\notin S$ である. よって補題 2.1.3 より $G-S$: 非連結となり, $\kappa(G)\leq 2$ となり G:3-連結グラフに矛盾する. よって $v_{xy}\in S$ である. また $|S|=1$ すなわち $S=\{v_{xy}\}$ とすると, これも $G/e-S=G-\{x,y\}$ より $\kappa(G)\leq 2$ となり矛盾する. したがって $|S|=2\wedge v_{xy}\in S$ がわかる. S の元で v_{xy} ではないほう

の頂点を z とすると, $z \notin \{x,y\}$ より $G/e - S = G/e - \{v_{xy}\} - \{z\} = G - \{x,y,z\}$ である.

以上をまとめると $^\forall x,y \in G\ s.t.\ xy \in E(G),\ ^\exists z,\ G - \{x,y,z\}$: 非連結 が導ける. ここで, $G - \{x,y,z\}$ は非連結より 2 つ以上の連結成分を持ち, G が 3-連結であることから x,y,z はすべての連結成分と隣接していることに注意する. ここで $G - \{x,y,z\}$ の中で一番位数が小さい連結成分を C とし, $|C|$ が最小になるように x,y を取り直す. $v \in V(C)\ s.t.\ vz \in E(G)$ とすると v の存在性は明らか. また, 仮定より G/vz は 3-連結ではないため, $^\exists w \in G\ s.t.\ G - \{z,v,w\}$: 非連結. x と y が隣接していることから, $G - \{z,v,w\}$ は $D \cap \{x,y\} = \emptyset$ となる連結成分 D をもつ. $u \in V(D)\ s.t.\ vu \in E(G)$ とすると u の存在性は明らかであり, $v \in V(C)$ より $u \in V(C)\ i.e.\ C \cap D \neq \emptyset$ がわかる. $x,y,z \notin D$ より D は $G - \{x,y,z\}$ の連結成分の部分グラフであるため, $D \subseteq C$. また $v \notin D,\ v \in C$ であるため $D \subsetneq C$ である. ゆえに C の最小性に反する. □

定理 2.1.5. G が 3-連結グラフ (ただし K^3 は除く) であるための必要十分条件は, 以下を満たすようなグラフの列 $G_0, \cdots, G_n$ が存在することである.

(i) $G_0 = K^4 \wedge G_n = G$.

(ii) $^\forall i < n, ^\exists xy \in E(G_{i+1}), (d(x), d(y) \geq 3 \wedge G_i = G_{i+1}/xy)$.

Proof. 必要性 ($\Rightarrow$):G:3-連結 $\Rightarrow$ グラフの列 $G_0, \cdots, G_n$ が存在.

位数が 4 である 3-連結なグラフは K^4 のみであるから, 定理 2.1.4 より, 各 G_i:3-連結となるようなグラフの列 $G = G_n, \cdots, G_0 = K^4 (^\exists xy \in E(G_{i+1}), G_i = G_{i+1}/xy)$ が構成することができる, また, 任意のグラフ H に対し, $\kappa(H) \leq \lambda(H) \leq \delta(H) = \min\{d(x) | x \in H\}$ であるから, この列は (ii) を満たす.

十分性 ($\Leftarrow$):G:3-連結 $\Leftarrow$ グラフの列 $G_0, \cdots, G_n$ が存在.

(ii) のときに, G_i:3-連結 $\Rightarrow G_{i+1}$:3-連結を示す. これが示せると K^4 は 3-連結であることとグラフの列が有限であることから帰納的に $G_n = G$:3-連結が導ける.

G_i:3-連結であり G_{i+1} が 3-連結でない, つまり $\kappa(G_{i+1}) \leq 2$ とする. すなわち $^\exists S \subset G_{i+1}$: vertices set s.t. $\mathrm{|S| \leq 2 \wedge G_{i+1} - S}$: 非連結. また, xy によって G_{i+1} を縮約した際に得られる頂点を v_{xy} と書き表すこととする. 今, $x,y \notin S$ とすると, $S \subset G - \{x,y\} = G/xy - v_{xy}$ より $v_{xy} \notin S$ である. よって補題 2.1.3 より $G_{i+1}/xy - S$: 非連結となり, $\kappa(G_i) \leq 2$ となり G_i:3-連結グラフに矛盾する. よって $\{x,y\} \cap S \neq \emptyset$ である. また $S \subseteq \{x,y\}$ とすると, これも $G_{i+1}/xy - \{v_{xy}\} = G_{i+1} - \{x,y\} \subset G_{i+1} - S$ より $\kappa(G_i) \leq 2$ となり矛盾する. したがって $|S| = 2 \wedge x$ (resp y, 以降はxの場合で証明する) $\in S$ がわかる. S の元で x ではないほうの頂点を z とすると, $z \notin \{x,y\}$ より $G_{i+1} - S = G_{i+1} - \{x,z\}$ である.

ここで, $G_{i+1}-\{x,z\}$ は非連結より, 各連結成分 $C_k(k\in\mathbb{N})$ に分離することが出来, 特に $y\in C_1$ とすることが出来る. このとき, C_1 に y 以外の元 v が存在するとすると, $G_i-\{v_{xy},z\}=G_{i+1}-\{x,y,z\}$ であり G_i:3-連結であるため, $G_{i+1}-\{x,y,z\}$: 連結である. よって C_2-v path P が存在し, $P\subset G_{i+1}-\{x,y,z\}\subset G_{i+1}-\{x,z\}$ であるが, これは $v\in C_1$ であるため C_1 が連結成分であることに矛盾する. よって $C_1=y$ である. y は $G_{i+1}-S$ における連結成分であるから, $N(y)\subset S\cup V(C_1\backslash y)=S$ より $d(y)=|N(y)|\leq 2$ であるため, 仮定に反する.

$\square$