目 次

1 The Basics

$\binom{A}{k} = \{X \subset A | \#X = k\}$ とする.

1.1 Graph

グラフ (graph) とは, $E \subseteq \binom{V}{2}$ を満たす集合の組 $G = (V, E)$ のことである. つまり E の要素は V の 2 つの要素を持つ部分集合である. 表記上の曖昧さを回避するために $V \cap E = \emptyset$ とする. V の要素をグラフ G の頂点 (vertices), E の要素をグラフ E の辺 (edge) と呼ぶ. 通常は, グラフを絵で表すときには頂点を点で, 辺を頂点同士を結ぶ線で表す. この時に辺の形や点の位置は重要ではなく, どの頂点が結ばれているかが重要である.

例

頂点集合 V を持つグラフを, V 上のグラフという. グラフ G の頂点の集合を $V(G)$, 辺の集合を $E(G)$ で表す. (厳密に区別せず, $v \in V(G)$ を $v \in G$ と書いたり, $e \in E(G)$ を $e \in G$ と書いたりもする.)

グラフ G の頂点の数 (頂点集合の濃度) を位数 (order) といい, $|G|$ で表す. 辺の数は $||G||$ で表す. 位数が有限なグラフを有限グラフ, 無限なグラフを無限グラフとよぶ. 今後は基本的に有限グラフを扱う. (8 章で無限グラフについて扱う.)

空グラフ $(\emptyset, \emptyset)$ を単に $\emptyset$ で表す. また, 位数が 0 または 1 であるグラフを自明なグラフ (trivial) という. (自明なグラフといったときには, 空グラフを無視することがある.)

頂点 v が辺 e に接続する (incident) とは, $v \in e$ であることを指す. また, e を v の (接続) 辺という. 一つの辺に接続する 2 つの頂点を (その辺の) 端点 (end) とよび, 辺はその端点を結ぶ (joins) という. 辺 $\{x, y\}$ をよく $xy (= yx)$ と表す. $x \in X \wedge y \in Y (X, Y \subseteq V)$ であるとき, 辺 xy を $X - Y$ 辺と呼ぶ. E に属する $X - Y$ 辺全体の集合を $E(X, Y)$ と表し, $E(\{x\}, Y)$ や $E(X, \{y\})$ のことを単に $E(x, Y)$ や $E(X, y)$ と表す. また, $v \in V$ の E 上の接続辺全体を $E(v)$ と表す. すなわち $E(v) = E(V, v)$ である.

2 つの頂点 x, y が隣接している (adjacent) とは, $\{x, y\} \in G$ であることを指し, 互いに他の隣接点 (neighbour) という. また, 2 つの辺 $e \neq f$ が隣接しているとは, 2 つの辺が 1 つの端点を共有していることを指す. すなわち $^{\exists} v \in G s.t. v \in e \wedge v \in f$. 全ての頂点が隣接しているグラフを完全グラフ (complete graph) とよび, $|G| = n$ のものを K^n で表す. K^3 は三角形 (triangle) と呼ばれる.

グラフ G の頂点で, 他のどの頂点とも隣接していない頂点を独立した (independent) 頂点という. 同じように, グラフ G の辺で, 他のどの辺とも隣接していない辺を独立した辺という. より一般に, $X \subseteq V(G) or E(G)$ が独立しているとは, X のすべての要素が独立していることを指す. ($V(G)$ が独立しているとき, 安定集合 (stable set) と呼んだりもする.)

2 つのグラフ $G = (V, E), G' = (V', E')$ に対して, $\varphi : G \to G'$ がグラフ準同型写像 (graph homomorphism) であるとは, $\varphi : V \to V'$ が $\{x, y\} \in E \Rightarrow \{\varphi(x), \varphi(y) \in E'\}$ であることを指す. 特にこのとき, $x' \in E'$ の φ による逆像 $\varphi^{-1}(x')$ は独立している. φ が全単射であり φ^{-1} もグラフ準同型写像であるとき, φ をグラフ同型写像 (graph isomorphism) とよぶ. またこのとき G と G' はグラフ同型 (graph isomorphic) であるといい, $G \simeq G'$ と書き表す. G から G へのグラフ同型写像を自己同型写像 (automorphism) と呼ぶ.

同型なグラフは区別せず, $G \simeq G'$ のことを, $G = G'$ と書くことが多い.

同型写像の下で保存されるような性質をグラフの性質 (graph property) といい, その中で引数を持つものをグラフ不変量 (graph invariant) という. グラフの頂点の数や辺の数などもグラフ不変量である.

2　connectivity

2.1　2-Connected graphs and subgraphs

最も単純な 2-連結グラフは cycle である. 他のすべての 2-連結グラフも, cycle に path を加えることで作ることが出来る.

Proposition 3.1.1. グラフが 2-連結であるための必要十分条件は, 閉路から始めて, すでに構築したグラフ H に $H-path$ を加えて構築できることである.

ploof. 上のような構築を (*) とする. 十分性:

必要性:2-連結グラフを G とすると, G は cycle を含む. したがって, (*) のように構築される極大部分グラフ H を含む. だから