# Polyhedron について

Ryo Kawai

2023 年 1 月 17 日

## 前書き (memo)

TeX の環境をいじって色々試しているため, とても奇妙な PDF になってしまっている. 環境としては, エディタとして VScode(LaTeX Workshop,LaTeX Utilities), TeX として TeXLive2021 を使用している.

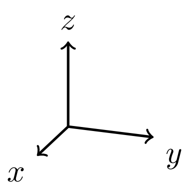
基本的に, 呼び名が複数あるものは最初に表記してある方で統一する.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

往々にしてルー大柴さんのようになるが許して欲しい.

abs があるか macro:-¿“protect “abs

図に関しては, 現在 tikz3dtools を使おうと試みている途中であるため、もう少し後で挿入する.

view point test 

# 目次

この PDF で出てきている疑問点や TODO など

1. 定義周り
   1.1. $(P, d_n)$ に限定するのではなく, $(P, \phi), \phi : P to \mathbb{R}$ とした方がいいか.
   1.2. § 2.1 の抽象多面体は F として辺の集合として扱った方が良いのではないか.
   1.3. § 2.3 に書いてあること.
2. $K_5$ を骨格に持つ多面体は自己交差を除くと存在しないのか (凸だと存在しないことが言えている).
3. 正六角形で構成される多面体 (穿孔多面体) は存在するのか. おそらく存在しないと考えているが, 証明はあるのか.
4. $m$ 角形が $n$ 個で構成される多面体について, $(m, n)$ がどのような時であれば存在するのか. 凸多面体はわかっているため, 凹および穿孔多面体での存在について.
5. 全ての頂点のガウス曲率が負の一定値であるような多面体について (構成はできたが, 他にどのようなものがあるか. 現在は各点のガウス曲率が $-pi/6$ のものだが, これをもっと小さくできないかなど).
6. 全ての頂点のガウス曲率が 0 であるような立体の最小頂点数は, 現在知られているものは 10 頂点だが, それ以下はないのか (ない気がする).

# 1　多面体のモチベーションと定義

## 1.1　モチベーション

四角形の面が 7 つで構成される凸多面体は存在するのであろうか. これは私が高校生の時に疑問に思ったことである. 当時自分は存在しないと予想したが, 綺麗な証明は行えなかった. その後, 大学でグラフ理論とその周辺を学び, Steinitz's の定理などを知り多面体グラフからのアプローチに興味を持った. この PDF では, 自分が興味を持った多面体についての事実や, 知られていることをまとめることとする.

## 1.2　定義について

私が今回扱いたい対象である多面体について, まずは定義から確認していきたい. しかし実は多面体の定義は, まるでグラフ理論におけるグラフの定義のように, 様々な分野や場面において異なる定義がされていることが多く, 一般的なものが定まっていない. そこでまず, そのようなさまざまな多面体の定義について観察してみる.

例えば広辞苑を引くと, 多面体については以下のように書かれている.

> 四つ以上の平面多角形で囲まれた立体。平面の数によって四面体・五面体などという。

しかし, これは数学的に扱うには曖昧すぎる (?).

図形的な世界での一つの定義として「空間内で複数の多角形を辺で連結させた立体」というものがある [1]. この定義はとても直感的に分かりやすく, よく表している. この定義に基づくと, 2 枚だけの多角形でできていても多面体と捉えることができるため, その点が問題である. また, 「立体」は 3 次元上での集合という意味で捉えているが, これも曖昧である.

空間を切り取るといった表現が使われているものもある. また例えば, 田村トポロジーでは単体複体の実現を多面体とよんでいる.

一例として [1] の定義を見てみよう. ここでは「空間内で複数の多角形を辺で連結させた立体」を「開いた多面体」, 「4 枚以上の多角形が集まって空間を切り取る立体」を「閉じた多面体」と定義している. また, 分類について無限面体や面 (多角形) の内部自己交差も許容している. 凸多面体に限れば, 広く知れ渡った定義がある.

一つ一つ例を見ていこう. (ここで詳細に定義を考える) (中略)

以上を整理すると, 私が扱いたい多面体は, 以下のような性質を満たしていてほしいことがわかる. (他に細々としたものがあるが...)

1. オイラーの公式 ($V + F - E = 2 * (1 - S)$) を満たす.
2. (頂点の数は有限個である).
3. 辺に接する面の数は必ず 2 つである. (閉曲面である)

4. 頂点に接する辺および面の数は 3 つ以上である.
5. 自己交差をしない. (要検討)

(文章が良くないので, 校正の必要あり) なので, 多面体を以下のように定める.

**定義 1.2.1**

**polyhedron(多面体)** とは, 立体の中で

1. 頂点の数は有限個であり, 連結である.
2. 各面が多角形 (平面) である.
3. 辺に接する面の数は必ず 2 つである. (閉曲面である)
4. 頂点に接する辺および面の数は 3 つ以上である.
5. 自己交差をしない. (要検討)

を満たすものとする.

## 1.3 分類

定義 1.2.1 に該当する立体は数多く存在するが, その中でも大きく

1. 凸多面体
2. 凹多面体
3. 穿孔多面体

に分類できる.

**定義 1.3.1 | ⟨ convex polyhedron(凸多面体)⟩**

多面体の中で, 二面角が $\pi$ 未満かつ自己交差をしないものとして定義することができるらしい.

**定義 1.3.2 | ⟨ concave polyhedron(凹多面体)⟩**

種数 0 の多面体の中で凸多面体でないものを **concave polyhedron(凹多面体)** または **nonconvex polyhedron** という.

凸多面体と凹多面体をまとめて多面体ということもある. すなわち球面と同相なものを多面体ということがあるが, 本 PDF では使い分ける.

**定義 1.3.3 | ⟨ toroidal polyhedron(穿孔多面体)⟩**

多面体の中で, 種数が 1 以上であるもの.

## 1.4　さまざまな多面体

さまざまな多面体について, とりあえずリスト形式でまとめておこう.

1. 凸多面体
2. 凹多面体
3. 穿孔多面体
4. poset から作られる多面体 http://pantodon.jp/index.rb?body=polytope_from_poset
5. 有限距離空間から定義される多面体 http://pantodon.jp/index.rb?body=fundamental_polytope
6. グラフからできる多面体 http://pantodon.jp/index.rb?body=graph_polytopes

# 2 多面体の基本的な性質

## 2.1 定義

多面体の定義をしよう

まず最初に構造のみを抜き出した, 抽象的な多面体を考える.

**定義 2.1.1 | ⟨ abstract polyhedron(抽象多面体)⟩**

**abstract polyhedron(抽象多面体)** とは, **vertex(頂点)** と呼ばれる object の集合 $V$ と, $V$ の異なる 2 元からなる部分集合である **edge(辺)** の集合 $E$ と, $V$ の異なる 3 つ以上の元からなる部分集合である **face(面)** の集合 $F$ の組 $P=(V,E,F)$ で, 以下を満たすものである.

1. 各面は多角形である. すなわち,

$$\forall f=\{v_0,v_1,\ldots,v_n\}\in F, 0\leq \forall i\neq j\leq n, \begin{cases}\{v_i,v_j\}\in E, & |i-j|=1\ or\ n\\ \{v_i,v_j\}\notin E, & 2\leq |i-j|\leq n-1\end{cases}$$

2. 任意の辺は必ず二つの頂点及び面に接している. すなわち, $\forall e\in E, |\{f\in F \mid e\subset f\}|=2$
3. 各頂点には必ず 3 つ以上の辺が隣接している. すなわち, $\forall v\in V, |\{e\in E \mid v\in e\}|\geq 3$
4. 各頂点の近傍は連結である. すなわち,

$$\forall v\in V, \{v_0,v_1,\ldots,v_n\}=\{v'\in V \mid \{v,v'\}\in E\}, 0\leq \forall i\neq j\leq n, \begin{cases}\{v_i,v_j\}\subset F, & |i-j|=1\ or\ n\\ \{v_i,v_j\}\not\subset F, & 2\leq |i-j|\leq n-1\end{cases}$$

5. 有限であり連結である. すなわち, $|V|<\infty, \forall v,v'\in V, \exists v-v' Path$

すなわち, $V,E,F : set$ は

$$E\subseteq \binom{V}{2}, F\subseteq \bigcup_{3\leq k\leq |V|}\binom{V}{k}$$ [*1]

である. また, 表記上の曖昧さを回避するために $V\cap E=V\cap F=E\cap F=\emptyset$ とする[*2].

注意するべきは, この定義の多面体には各面が平面であるという情報が載っていないということである. もしかしたら 1 の条件は $\forall f=\{v_0,v_1,\ldots,v_n\}\in F, |\{e\in E \mid e\subset f\}|=n+1$ とかでいいかもしれない.

**表記 2.1.2**

$E\ni e\subset f\in F$ であるとき, $e\prec f$ と書く.

多面体 $P$ の頂点, 辺, 面の集合をそれぞれ $V(P), E(P), F(P)$ で表したりもする.

---

[*1] $\binom{A}{k}=\{X\subset A \mid |X|=k\}$

[*2] 感覚的には頂点の集合と辺の集合は共通部分を持たないで欲しいので, 明記しておく. 例えば公理的集合論では $2=\{0,1\}$ であるから $V=\{0,1,2\}, E=\{\{0,1\}\}$ とすると $V\cap E\neq\emptyset$ となってしまうような事態が発生する.

**定義 2.1.3 | ⟨ $\boldsymbol{d_n}$ polyhedron⟩**

抽象多面体 $P = (V, E, F)$ と, その頂点間で定義される以下の関数 $d_n$ の組 $P_{d_n} = (P, d_n)$ を $\boldsymbol{d_n}$ **polyhedron($\boldsymbol{d_n}$ 多面体)** という.

$$d_0 : \{(v, v') \in V \times V \mid \{v, v'\} \in E \vee v = v'\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$d_1 : \{(v, v') \in V \times V \mid \{v, v'\} \subset f \in F\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$d_2 : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ただし $d_n$ は以下を満たす.

1. $\forall x, y \in V, d_n(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in V, d_n(x, y) = d_n(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in V, (x, y), (y, z), (z, x) \in \operatorname{dom} d_n \ \Rightarrow \ d_n(x, z) \leq d_n(x, y) + d_n(y, z)$

このように定めると, 定義域を適切に制限することで, $d_2$ 多面体は $d_1$ 多面体とみることができることがわかる. しかし, これらの多面体は私が考えたい 3 次元空間で実現できるものばかりとは限らない. むしろ 3 次元空間では実現できないものがほとんどであろう. そこで, まず「3 次元空間で実現できる」という言葉をしっかりと定義したい. 具体的には距離空間の埋め込みと同じようなことをする.

**定義 2.1.4**

抽象多面体 $P = (P, \emptyset)$ または $d_n$ 多面体 $(P, d_n)$ に対して, 以下を満たすような 3 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^3, d)$ への写像 $\varphi : V(P) \to \mathbb{R}^3$ が存在するとき, $\varphi$ を $P$ の **realization(実現)** という.

1. $\forall (v, v') \in \operatorname{dom} d_n, d_n(v, v') = d(\varphi(v), \varphi(v'))$
2. $\forall f = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\} \in F(P), rank \begin{pmatrix} \varphi(v_0) & \varphi(v_1) & \cdots & \varphi(v_k) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 3$

実現は一意であるとは限らない. また, 実現が存在するとも限らない. 実現が存在する場合, その像 $\operatorname{Im}\varphi$ を $|\boldsymbol{\varphi}|$ で表す.

例えば有限距離空間で有名な三脚は, いずれもユークリッド空間に埋め込めないため, それを上の定義の $d_2$ 多面体で構成してみよう.

**例 2.1.5**

$V = \{o, x, y, z\}, E = \binom{V}{2}, F = \{\{o, x, y\}, \{o, y, z\}, \{o, z, x\}, \{x, y, z\}\}, d(o, x) = d(o, y) = d(o, z) = 1, d(x, y) = d(y, z) = d(z, x) = 2$ である $d_2$ 多面体 $((V, E, F), d)$ は, 実現が存在しない.

よって, 上記の多面体の中でも, さらに実現可能なクラスに対しての議論をしたりすることになる.
次に多面体について以下の同型の概念を定義する.

**定義 2.1.6 | ⟨ polyhedron isomorphism⟩**

2 つの抽象多面体 $P, P'$ に対して, その間の写像 $\varphi : V(P) \to V(P')$ を $\boldsymbol{\varphi : P \to P'}$ と表す. 2 つの抽象多面体 $P = (V, E, F), P' = (V', E', F')$ に対して, $\varphi : P \to P'$ が

$$\{x, y\} \in E \ \Rightarrow \ \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E', \{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \in F \ \Rightarrow \ \{\varphi(v_0), \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\} \in F'$$

を満たすとき, $\varphi$ を **polyhedron homomorphism(多面体準同型写像)** であるという. $\varphi$ が全単射であり $\varphi^{-1}$ も多面体準同型写像であるとき, $\varphi$ を **polyhedron isomorphism(多面体同型写像)** という. またこのとき, $P$ と $P'$ は **polyhedron isomorphic(多面体同型)** であるといい, $\boldsymbol{P \simeq P'}$ と書き表す.

**定義 2.1.7 | ⟨ $\boldsymbol{d_n}$ polyhedron isomorphism⟩**

ドメインの包含を加える. 2 つの $d_n$ 多面体 $(P, d), (P', d')$ に対して多面体準同型写像 $\varphi : P \to P'$ が存在し,

$$\forall (v, v') \in \operatorname{dom} d, d(v, v') = d'(\varphi(v), \varphi(v'))$$

を満たすとき, $\varphi$ をそれぞれ $\boldsymbol{d_n}$ **polyhedron homomorphism($\boldsymbol{d_n}$ 多面体準同型写像)** であるという. $\varphi$ が全単射であり $\varphi^{-1}$ も $d_n$ 多面体準同型写像であるとき, $\varphi$ を $\boldsymbol{d_n}$ **polyhedron isomorphism($\boldsymbol{d_n}$ 多面体同型写像)** という. またこのとき, $P$ と $P'$ は $\boldsymbol{d_n}$ **polyhedron isomorphic($\boldsymbol{d_n}$ 多面体同型)** であるといい, $\boldsymbol{P \overset{d_n}{\simeq} P'}$[*3]と書き表す.

**表記 2.1.8**

2 つの多面体の実現 $P, P'$ のそのドメイン同士がほにゃらら同型である時, 単に $P$ と $P'$ がほにゃらら同型であるという. また, $\operatorname{dom} P \simeq \operatorname{dom} P'$ などを単に $P \simeq P'$ や $|P| \simeq |P'|$ と書いたりする.

**系 2.1.9**

2 つの多面体の実現 $P, P'$ に対して,

$$P \overset{d_2}{\simeq} P' \ \Rightarrow \ P \overset{d_1}{\simeq} P'$$
$$P \overset{d_2}{\simeq} P' \ \Rightarrow \ P \overset{d_0}{\simeq} P'$$
$$P \overset{d_1}{\simeq} P' \ \Rightarrow \ P \overset{d_0}{\simeq} P'$$
$$P \overset{d_n}{\simeq} P' \ \Rightarrow \ P \simeq P'$$

## 2.2 性質

多面体が持つ性質や値について考えてみよう. 一般に多面体には以下のような性質や特徴量がある.

1. オイラー標数 $(V - E + F)$
2. 種数 (穴の数)

*3 索引なし

3. ガウス曲率または不足角 ($2 * \pi$-頂点周りの角度の合計)
4. 凸性 (convex hull と一致する)
5. 二面角 (辺を共有する面同士の角度)
6. 立体角 (多面体を球で切った時の面積 (Spherical Excess))

また, これらについて以下のような性質が成り立つ.

1. オイラー標数=2-2*種数
2. 全ての不足角の和=$2\pi$*オイラー標数
3. 全ての立体角の和=2*(全ての二面角の和 $+(V-E)\pi$)
4. 凸であるならば, 各点でガウス曲率は正

重要なのは, 不足角は辺を細分した場合にも影響しないということである. 立体角は辺を細分した際に影響が出てしまう. 不足角は 2 次元での多角形における「外角」を 3 次元に拡張したような概念になっている. また, 立体角と不足角は球面三角法によって関係付けることができるが, 綺麗な関係式になるのかはとても疑問である (手計算の範囲では綺麗にできなかった).

これらを前述の定義に沿って書き換えてみる.

**定義 2.2.1**

抽象多面体 $P=(V,E,F)$ に対して, $\chi(P)=|V|-|E|+|F|$ を多面体 $P$ の **Euler characteristic(オイラー標数)** という. 一般に使用されるオイラー標数と何ら変わらない.

**命題 2.2.2**

オイラー標数は偶数となる.

この主張はおそらく正しい (が, 定義のみで導出できるかが謎). 証明ができるか微妙ではあるが, おそらく Lhuilier の行なった証明方法に近いもので証明が可能であると考えている. 方針としては

1. 三角形分割をしてもオイラー標数が変わらないとこを示す.
2. 穴を塞いでも偶数個しか変わらないことを示す.
3. 頂点を減らし, 正四面体まで持っていく.

が良い気がするが, 問題は 2 の場合である. ここを正確に書くことは難しそう. 上記主張が正しい場合, **genus(種数)** を $1-\chi(P)/2$ で定めたい.

次にガウス曲率 (不足角) を定義していきたい. 実現における不足角を定義するにはまず各面での角度を求めなければならない. 角度は $d_0$ では定まらないため, $d_1$ ぐらいが欲しい.

**定義 2.2.3 | 〈 face angle〉**

$d_1$ 多面体 $P$ の各頂点 $v \in V(P)$ と, $v$ を含む面 $f \in F(P)$ に対して定まる以下の量 $a$ を **face**

**angle(面角)** という.

$$a(v,f) = \arccos\left(\frac{d(v,x)^2 + d(v,y)^2 - d(x,y)^2}{2 * d(v,x) * d(v,y)}) \ (\{v,x\},\{v,y\} \prec f\right)$$

ただし, arccos は値が一意に定まりはしない. ここで私たちは凸性を考えていないため, arccos の値域を制限することができない. もちろん, $d_1$ ほどの情報があれば定めることができるはずではあるが, $f$ 全体を見ないと決定できないのが難点である. そこで, 逆にガウス曲率を与える方が良いのではと考えた.

**定義 2.2.4 | ⟨ face angle⟩**

抽象多面体 $P$ の各頂点 $v \in V(P)$ と, $v$ を含む面 $f \in F(P)$ に対して定まる以下の量 $a$ を **face angle(面角)** という.

$$a : \{(v,f) \in V \times F \mid v \in f\} \to (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$$

ただし $a$ は以下を満たす.

$$\forall f \in F(P), \sum_{v \in f} a(v,f) = \pi * (|f| - 2)$$

$d_0$ 多面体に $a$ の情報を付与したものは, 一般に $d_1$ にはならない気がするが, 実現がある場合は定数倍を除いて一致しそうである ($a$ の情報の実現をどう対応させるかによりそうだが). 上記のように多面体に面角の情報が加わると, 不足角が定義することができる.

**定義 2.2.5 | ⟨ Gaussian curvature⟩**

面角が定まっている多面体 (i.e.$a$ が存在する多面体)$P$ から定まる以下の量 $G : V(P) \to \mathbb{R}$ を **Gaussian curvature(ガウス曲率)** または **angular defect(不足角)** という.

$$G(v) = \sum_{\{f \in F(P) \mid v \in f\}} a(v,f)$$

凸性は $d_2$ ぐらいが必要であると考えている. 凸の定義をしたい.

**定義 2.2.6**

実現が存在する $d_2$ 多面体の実現が凸であるとき, $d_2$ 多面体は凸であるという.

何にもいい定義が思いつかない.

同じく二面角も $d_2$ ぐらいがあれば定まると思う.

**定義 2.2.7 | ⟨ dihedral angle⟩**

$d_2$ 多面体 $P$ の各辺 $e \in E(P)$ に対して定まる以下の量 $b$ を **dihedral angle(二面角)** という.

$$b(v,f) = \arccos$$

ただし, arccos は値が一意に定まりはしない. ここで私たちは凸性を考えていないため, arccos の値域を制限することができない. もちろん, $d_2$ ほどの情報があれば定めることができるはずではあるが, $P$ 全体を見ないと決定できないのが難点である. そこで, 逆にガウス曲率を与える方が良いのではと考えた.

**定義 2.2.8 | ⟨ dihedral angle⟩**

抽象多面体 $P$ の各辺 $e \in E(P)$ に対して定まる以下の量 $b$ を **dihedral angle(二面角)** という.

$$b : E(P) \to (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$$

$d_1$ 多面体に $b$ の情報を付与したものは, 一般に $d_2$ にはならない気がするが, 実現がある場合は定数倍を除いて一致しそうである ($b$ の情報の実現をどう対応させるかによりそうだが).

## 2.3 いろいろ

抽象多面体については, ほとんど最小の条件のみを入れてあるため, 普段私たちが扱っている多面体は全て抽象多面体であると言えると思う. しかし, 逆に抽象多面体であれば必ず実現が存在するかはわからない. おそらく必ず存在するのではないかと考えている. また, face angle や dihedral angle については, 実現の方から持ってきた概念であるため導出ができるはずだが, 付け加えて比較するのも良いのではないかと考えている. 角度という概念を入れて考えると, 今までの先人がなぜ convex に限って議論していたかがとてもよくわかる. どれほどまでに convex という条件は角度に対して強力である.

以下, おそらくこうであるという予想

**予想 2.3.1**

2 つの多面体の実現 $P, P'$ に対して,

1. $P : 凸, P \overset{d_2}{\simeq} P' \;\Rightarrow\; P' : 凸$
2. $P \overset{d_1}{\simeq} P' \;\Rightarrow\; \exists \varphi : d_1 多面体同型写像, \forall v \in V, \kappa(v) = \kappa(\varphi(v))$

また, **??**は以下のように言い換えることができる.

**定理 2.3.2**

多面体の実現全体 $\mathbb{P}$ を多面体同型 $\simeq$ で分類した $\mathbb{P}/\simeq$ に対して,

$$\exists p : 凸 \in P \in \mathbb{P}/\simeq \;\Leftrightarrow\; P \text{ の骨格} : \text{3-連結単純平面グラフ}$$

## 2.4 分類

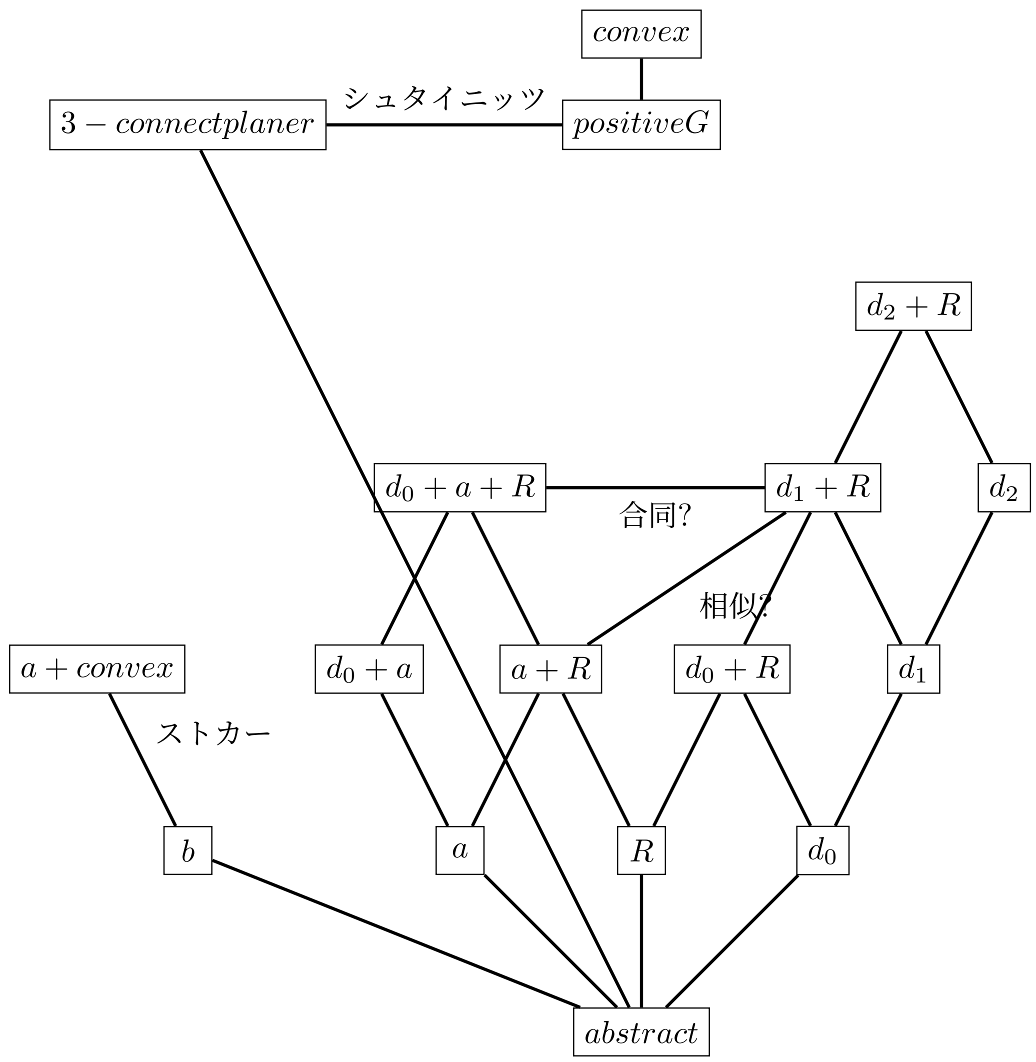
多面体間に同型という概念を導入したが, 他の概念でも分類することができる. よく知られているのは以下の通り

1. 組み合わせ同型 ($=\simeq$)
2. アフィン同型
3. 等角
4. 相似
5. 合同 ($=\overset{d_2}{\simeq}$?)

もしや実現が存在する $d_n$ 多面体同型で定数倍の拡大と縮小を許してやると, アフィン同型あたりが $d_0$ ぐらいにならないかなと考えたりしている. 上の概念についても整理して分類に使うと良いかもしれない.

実現は, 凸に限れば素晴らしい結果はたくさんある. 例えばストカーは $convex + a \Rightarrow b$ を示した. また, カーチャーは $convex + a +$ 外接球 $\Rightarrow R$ を示した. また, ミンコフスキーは「面積 + 面の法線」から一意な多面体を生成できることを示した.

仮説段階であるものも含めた, 今の全体マップである. 下の方には落として考えることができるという意味である. すなわち下にある方が広い概念になっている. $+R$ は実現がある, $+a$ は面角の情報を入れる, $+b$ は二面角の情報を入れる,



## 2.5 regular polyhedron

各頂点に接する面のパターン (?) が同一であり, 各面が同一の **regular polygon(正多角形)** で構成されている多面体は, 凸のものに限れば **regular polyhedron(正多面体)** と呼ばれ, 5 種類と完全に決定されている. また, 同一に限らず, 二種類以上の正多角形で構成された多面体は無限に存在し, その中でも特徴的な立体には様々な名前がついている. この辺は余裕があればこの章に追加する.

ここで素朴には, 上の正多面体の条件を緩めるとどうなるかという疑問がある. 例えば, 「同一の正多角形で構成された多面体」とすると, 正三角形・正四角形・正五角形の場合は正多面体を貼り付けることでほぼ無限に作ることができる, 当然のことながら無限にある. この場合, 正六角形で構成される多面体はどうだろうか. これは非自明な気がするが, どこかに調べられていたら教えていただきたい. また, 各頂点を共有する面のパターン (ここでは面の数としよう) が一定な多面体は、凸に限ればおそらく容易にわかる. この場合, 凸に限らなければどれぐらい知られているのだろうか. これも非自明な気がする.

# 3　ガウス曲率が一定な多面体

一般の閉曲面では, 必ずガウス曲率が正である点が存在する．しかし多面体では, ガウス曲率に対応する概念である不足角について, 全てが負であるようなものが存在する．今回はそのような不足角が一定であるような多面体の具体的な構成を与えた.

## 3.1　一般のガウス曲率について

本題に入る前に, 一般の曲面論について述べておきたい．なお, このセクションは [2] のに従う．ここでは

1. 曲面の定義
2. 曲面上の量とガウス曲率
3. ガウス・ボネの定理

についてを記入する．　閉曲面では各点でガウス曲率が負の一定値になるような立体を構成することはできない (https://math.stackexchange.com/questions/1337246/a-closed-surface-in-mathbb-r3-has-an-elliptic-point) ことを示す.

## 3.2　多面体のガウス曲率

一般のガウス曲率は曲率で定義されていたが, 多面体の場合は辺や頂点で微分を行うことができず, そのためガウス曲率を定義することが出来ない．そこで, 多面体でのガウス曲率に対応する概念として, 不足角を以下のように定める.

**定義 3.2.1 | ⟨ ガウス曲率, 不足角 ⟩**

各頂点において, $2\pi$ から接している面のその頂点での角度の和を引いた角度を **Gaussian curvature(ガウス曲率)** または **Angular defect(不足角)** という．すなわち, 頂点 $x$ でのガウス曲率は,

$$2\pi - \sum_{F \in \{x\ \text{に接する面}\}} \{F\ \text{の}\ x\ \text{での角度}\}$$

で与える.

この不足角に対しては, デカルトの不足角定理と言われる重要な定理が知られている.

**定理 3.2.2 | ⟨ Descartes' theorem on total angular defect⟩**

球面と位相同型 (穴の空いていない) 多面体において, ガウス曲率の総和は $4\pi$ である.

より一般に上記の定理を拡張して, 一般のガウス曲率についてのガウス・ボネの定理のような定理

が成り立つ.

**定理 3.2.3**

種数 $n$ の多面体の不足角の総和は $2\pi * 2(1-n)$

よって, 種数 0 の立体ではガウス曲率の総和は $4\pi$, 種数 1 の立体ではガウス曲率の総和は 0, 種数 2 の立体ではガウス曲率の総和は $-4\pi$ である.

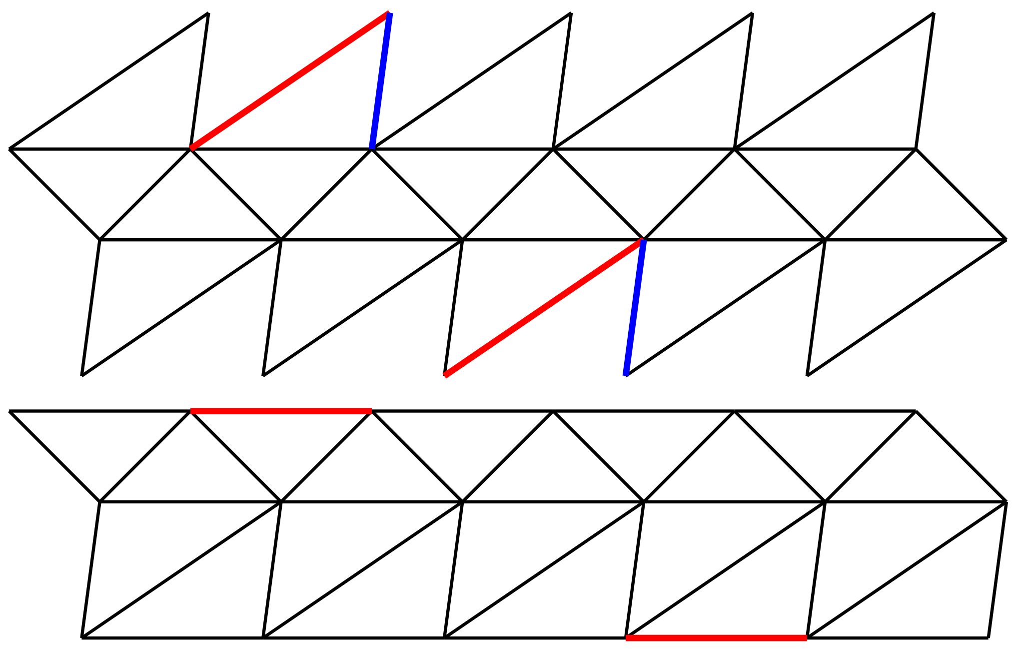
## 3.3 ガウス曲率が一定である多面体

ガウス曲率が一定である多面体について考えていこう.

まず穴が空いていない多面体について考えると, 定理 3.2.3 より全体のガウス曲率の和は $4\pi$ になり, 各頂点でのガウス曲率は正である. このような多面体は, 正多面体などを代表に半正多面体など対称性の高い様々な多面体を挙げることができる.

次に穴が一つある穿孔多面体について考えてみよう. 定理 3.2.3 より全体のガウス曲率の和は 0 になり, 各頂点でのガウス曲率は 0 である. https://im.icerm.brown.edu/portfolio/paper-flat-tori/ には 12 頂点のものが書かれている. このような立体に関して, 頂点数が 10 のものが坪井先生によって作成されており, 知られている. 展開図は以下の形をしている

**例 3.3.1**



ここで注目したいのは, 各頂点のガウス曲率が 0 であるということは, 展開した際に平坦にすることが可能であるということである. 例えば, 折り紙を折って面の重複がないように閉曲面を構成した場合, その多面体は必ず各頂点のガウス曲率が 0 になる. 逆に言えば, ガウス曲率が各頂点で 0 である多面体は, 折り紙で作成できることや平面充填可能であることが示唆される. このような多面体を実現す

る最小の頂点数はどのぐらいなのかについてはまだわかっていないが, 自分の中ではあっても 9 頂点であると考えている. また各頂点周りの形が等しいと仮定すると, おそらく平面敷き詰めおよび実現の存在についての問題に持ち込めるのではと考えている. https://colab.research.google.com/drive/1DCwIJ4lUge_jUUiaW_B2r8df20HHYWv9?usp=sharing に実験したデータをまとめているため, 参考にされたい. また, google colab 上で立体の可視化および stl での保存が簡単にできることがわかったため, 今後は mathematica に加えてこちらも活用していきたい.

最後に穴が二つ以上ある穿孔多面体について考えてみよう. 定理 3.2.3 より全体のガウス曲率の和は $-4\pi *$ (穴の数 $-$ 1) になり, 各頂点でのガウス曲率は負である. 対象を離散的な多面体にすると全ての頂点でガウス曲率が負であるものを構成することが, https://www.researchgate.net/publication/266885256_Two_Counterexamples_of_Global_Differential_Geometry_for_Polyhedra(Title:Two Counterexamples of Global Differential Geometry for Polyhedra) に書かれているが, ここではその存在性についてのみ言及しており, 具体的には数値計算による近似解しか与えていない. 私はそれらについて, 実際に具体的な構成を与えた. 実際の立体を作成するコードおよび立体のデータは以下の場所に置いてある (まだ置いていない)https://github.com/RyoKawai-github/Polyhedron-with-Strictly-Negative-Curvature.
これらは全て各頂点でのガウス曲率が $-\pi/6$ となっている. この立体の優れているところは, 各点の座標が求まり, かつ各面における頂点の角度の $cos, sin$ の値が二次方程式の解の形でかくことができる点である. すなわち, 各面の全ての頂点角において, その $\cos, \sin$ の値が 1/2 乗の形で書くことができるのである. 故に複数枚による折り紙でこの立体を作成することができるはずなので, 思いついたら作ってみたいと思う.

また, このような全ての頂点のガウス曲率が一定値である立体について, 実現可能な最小頂点数を調べることにはとても興味がある. 手始めにチャーサールの多面体を模した, 各頂点でのガウス曲率が $-\pi/3$ となる立体 (12 頂点) の構成を試みたが, 失敗した. 現在は $-\pi/4$(16 頂点) の構成を試みている. また, 対称性が高い (要定義) 多面体でガウス曲率が一定である立体についての性質について調べてみるのはとても興味深いと感じている.

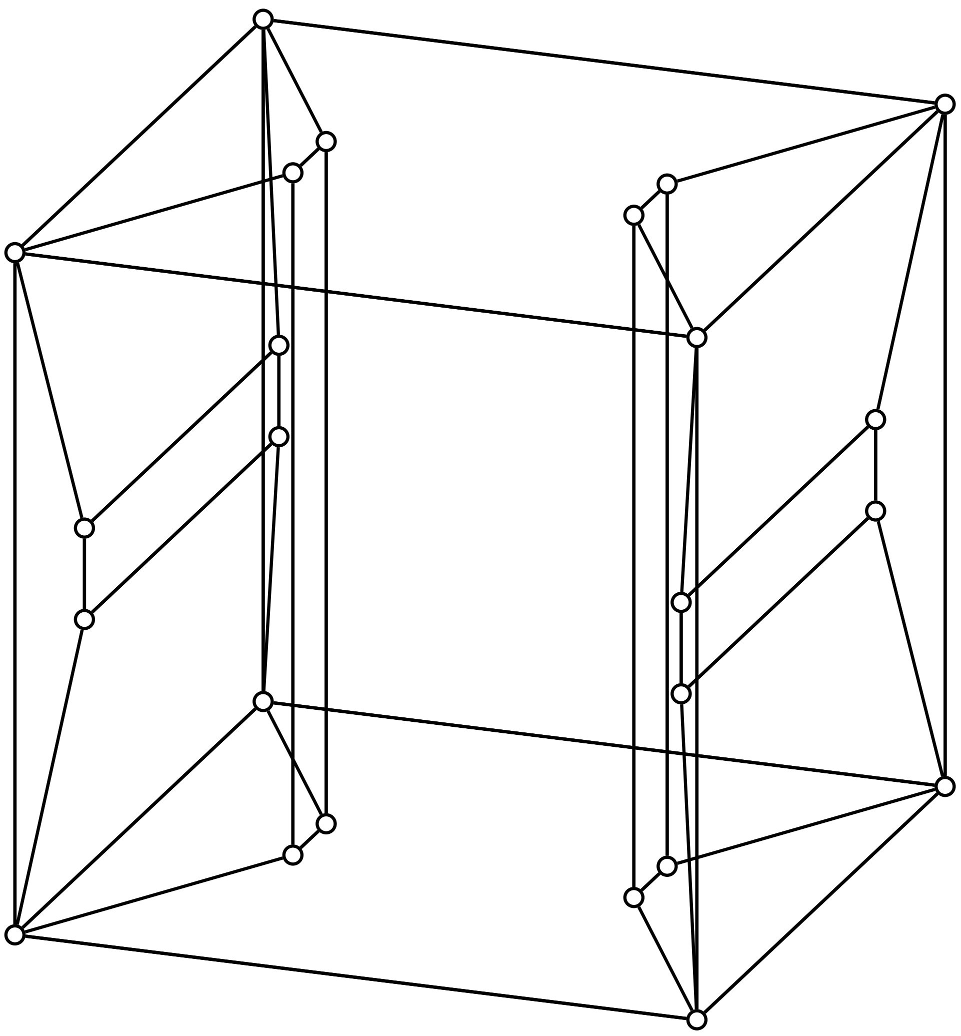


図 1　穴が二つ空いている, 各頂点のガウス曲率が一定である穿孔多面体

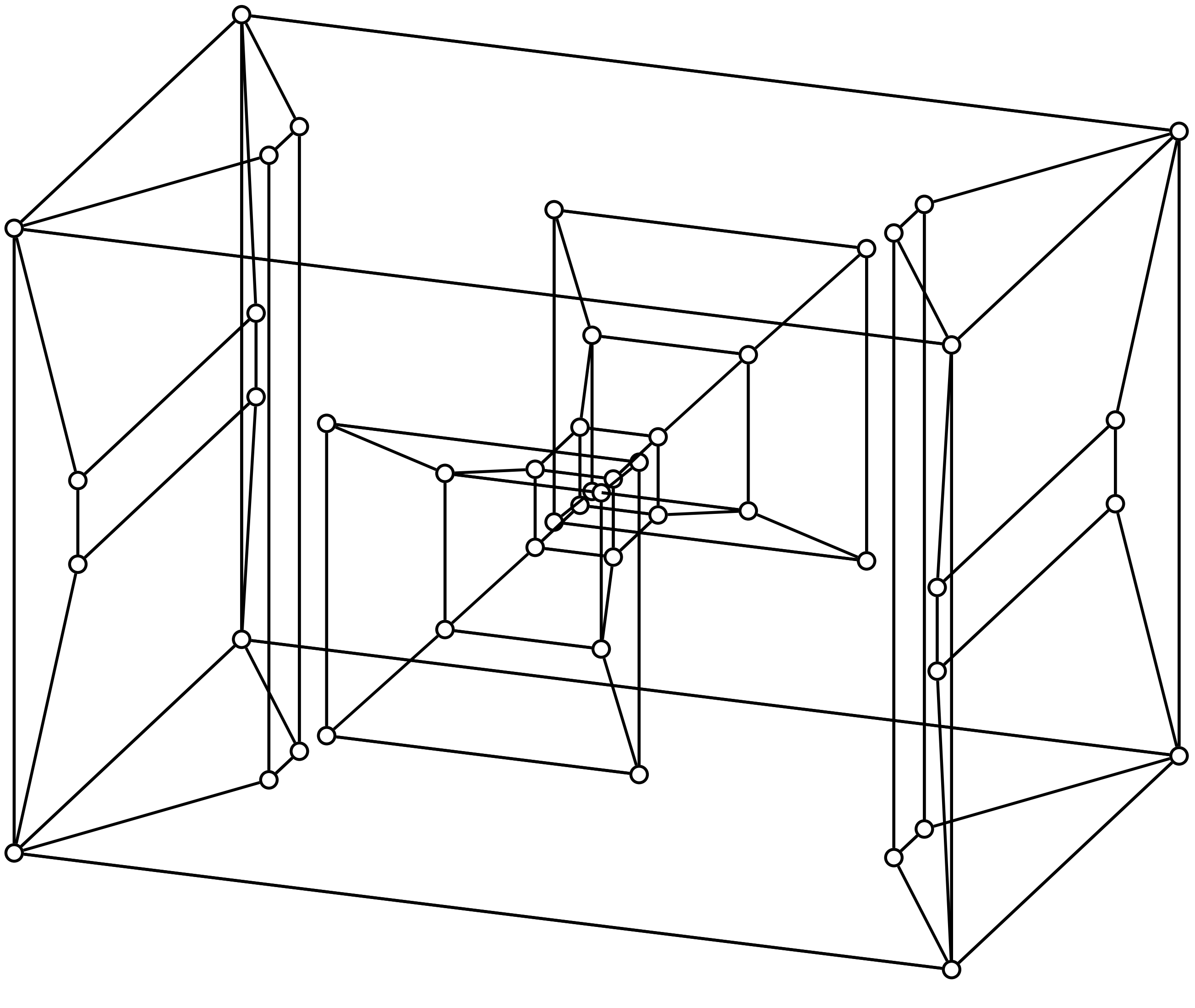


図 2　穴が三つ空いている, 各頂点のガウス曲率が一定である穿孔多面体

# 索引

# 参考文献

[1] 宮崎興二. 『多面体百科』. 丸善出版, 2016 年 10 月 31 日.

[2] 中内伸光. じっくりと学ぶ曲線と曲面ー微分幾何学初歩ー. 共立出版, 2010 年 05 月 01 日.