

1 未定義の用語

1.1 連結度

定義 1.1.1 (連結). グラフ G が連結であるとは, G の任意の 2 頂点 x, y に対してその 2 点を結ぶ G 上の path が存在することである. すなわち, $\forall x, y \in G, \exists P \subset G : \text{paths.t. } P = x \cdots y$ ときである.

セミナーでは $\forall x, y \in G, \exists P \subset G : \text{path s.t. } x, y \in P$ としていたが, やはり上の定義の方がよい気がしたので戻した. 同値であるため議論に支障はない.

定義 1.1.2. G をグラフとする. G の空でない極大な連結部分グラフを G の連結成分という. すなわち, 各連結成分は共通部分を持たない.

定義 1.1.3 (k -連結). $k \in \mathbb{N}, |G| > k$ で, $|X| < k$ である任意のグラフ X に対して $G - X$ が連結であるとき, グラフ G は k -連結であるという.

X は任意だが, 仮に G の部分グラフではない A を取ったとしても $|G| > k, |A| < k$ より $G \cap A \subset B \subset G, |B| < k$ となる B が取れ, $G - A \supset G - B$ である. そのため, $X \subset G$ としても問題はない. グラフが 1-連結であることは, 定義よりグラフが連結であることである. また定義より $n, m \in \mathbb{N}, n < m$ のとき, グラフ G が m -連結ならば G は n -連結である. グラフ G が k -連結になる最大整数 k を連結度といい, $\kappa(G)$ で表す.

1.2 縮約 (Contraction)

定義 1.2.1. グラフ $G = (V, E)$ とその辺 $xy \in E$ に対して, $v_{xy} \notin V$ として

$$(\{V \setminus \{x, y\} \cup \{v_{xy}\}\}, \{vw \in E \mid \{x, y\} \cap \{v, w\} = \emptyset\} \cup \{v_{xy}w \mid w \in V \setminus \{x, y\} \text{ s.t. } xw \in E \vee yw \in E\})$$

すなわち

$$G - \{x, y\} \cup \{v_{xy}\} + \{v_{xy}w \mid w \in V \setminus \{x, y\} \text{ s.t. } xw \in E \vee yw \in E\}$$

で与えられるグラフを G/xy で表す.

ここからすぐに次のことがわかる. $N(\{x, y\}) = N(v_{xy})$ $G - \{x, y\} = G/e - v_{xy}$

2 3-連結グラフについて

2.1 準備

補題 2.1.1. G : グラフ, $e = xy \in G$,

G : 連結 $\Leftrightarrow G/e$: 連結

Proof. G : 連結とすると, $\forall a, b \in G, \exists P: a$ と b を結ぶ G 上の path . ここで $\{a, b\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, $P' = G/e[P \cup \{v_{xy}\}]$ とすると,

- (i) $P \cap \{x, y\} = \emptyset$ のとき, $P \subset G - \{x, y\} = G/e - v_e \subset G/e$.
- (ii) $P \cap \{x, y\} = \{x\}$ (or $\{y\}$) のとき, P : 連結と $P \ni x$ (or y) より P' は連結であり, $a, b \in P' \subset G/e$.
- (iii) $P \cap \{x, y\} = \{x, y\}$ のとき, P : 連結と $P \ni x, y$ より P' は連結であり, $a, b \in P' \subset G/e$.

であるから, a と b を結ぶ G/e 上の path が存在することがわかる. また, $\{a, b\} \cap \{x, y\} = \{x \text{ (or } y)\}$ の場合は (ii) の最後を v_{xy}, b (or a, v_{xy}) $\in P' \subset G/e$ とすればよい. $\{a, b\} \cap \{x, y\} = \{x, y\}$ の場合は a, b は G/e 上で一点 $v_{x,y}$ になる. よって G/e : 連結である. 逆も同様に示せる. \square

補題 2.1.2. G : グラフ, $e = xy \in G$, $x, y, v_{xy} \notin S$: vertices set,

$(G - S)/e = G/e - S$

Proof.

$$\begin{aligned}
 V((G - S)/e) &= (V(G) \setminus S) \setminus \{x, y\} \cup \{v_{xy}\} \\
 &= (V(G) \setminus \{x, y\} \cup \{v_{xy}\}) \setminus S \quad (x, y, v_{xy} \notin S \text{ より}) \\
 &= V(G/e - S)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E((G - S)/e) &= \{vw \in E(G - S) \mid \{x, y\} \cap \{v, w\} = \emptyset\} \cup \\
&\quad \{v_{xy}w \mid w \in V(G - S) \setminus \{x, y\} \text{ s.t. } xw \in E(G - S) \vee yw \in E(G - S)\} \\
&= \{vw \in E(G - S) \mid \{x, y\} \cap \{v, w\} = \emptyset\} \cup \\
&\quad \{v_{xy}w \mid w \in V(G - S) \setminus \{x, y\} \text{ s.t. } xw \in E(G - S) \vee yw \in E(G - S)\} \\
&= \{vw \in E \mid (\{x, y\} \cup S) \cap \{v, w\} = \emptyset\} \cup \\
&\quad \{v_{xy}w \mid w \in V(G - S) \setminus \{x, y\} \text{ s.t. } xw \in E \vee yw \in E\} \\
&\quad \because V(G - S) = V - S, \\
&\quad w \in V(G - S) \wedge x, y \notin S \Rightarrow (xw(yw) \in E \Leftrightarrow xw(yw) \in E(G - S)) \\
&= \{vw \in E \mid (\{x, y\} \cup S) \cap \{v, w\} = \emptyset\} \cup \\
&\quad \{v_{xy}w \mid w \in V \setminus \{x, y\} \text{ s.t. } (xw \in E \vee yw \in E) \wedge w \notin S\} \\
&= \{vw \in E(G/e) \mid \{v, w\} \cap S = \emptyset\} \\
&= E(G/e - S)
\end{aligned}$$

□

補題 2.1.3. G : グラフ, $e = xy \in G$, $x, y, v_{xy} \notin S$: vertices set,
 $(G - S)$: 連結 $\Leftrightarrow G/e - S$: 連結

Proof. 補題 2.1.1, 補題 2.1.2 よりわかる.

□

定理 2.1.4. G : 3-連結グラフ,
 $|G| > 4 \Rightarrow \exists e \in E(G) \text{ s.t. } G/e : 3\text{-連結}$

Proof. そのような辺が存在しない, つまり $\forall e = xy \in G \text{ s.t. } \kappa(G/e) \leq 2$ とする. すなわち $\exists S \subset G/e$: vertex set s.t. $|S| \leq 2 \wedge G/e - S$: 非連結である. 今, $v_{xy} \notin S$ とすると, $S \subset G/e - v_{xy} = G - \{x, y\}$ より $x, y \notin S$ である. よって補題 2.1.3 より $G - S$: 非連結となり, $\kappa(G) \leq 2$ となり G : 3-連結グラフに矛盾する. よって $v_{xy} \in S$ である. また $|S| = 1$ すなわち $S = \{v_{xy}\}$ とすると, これも $G/e - S = G - \{x, y\}$ より $\kappa(G) \leq 2$ となり矛盾する. したがって $|S| \leq 2 \wedge v_{xy} \in S$, がわかる.

以上をまとめると $\forall x, y \in G \text{ s.t. } xy \in E(G), \exists z, G - \{x, y, z\}$: 非連結 が導ける. ここで, $G - \{x, y, z\}$ は非連結より 2 つ以上の連結成分を持ち, G が 3-連結であることから x, y, z はすべての連結成分と隣接していることに注意する. ここで $G - \{x, y, z\}$ の中で一番位数が小さい連結成分を C とし, $|C|$ が最小になるように x, y を取り直す. $v \in V(C) \text{ s.t. } vz \in E(G)$ とすると v の存在性は明らか. また, 仮定より G/vz は 3-連結ではないため, $\exists w \in G \text{ s.t. } G - \{z, v, w\}$: 非連結. x と y が隣接していることから, $G - \{z, v, w\}$ は $D \cap \{x, y\} = \emptyset$ となる連結成分 D をも

つ. $u \in V(D)$ s.t. $vu \in E(G)$ とすると u の存在性は明らかであり, $v \in V(C)$ より $u \in V(C)$ i.e. $C \cap D \neq \emptyset$ がわかる. $x, y, z \notin D$ より D は $G - \{x, y, z\}$ の連結成分の部分グラフであるため, $D \subseteq C$. また $v \notin D$, $v \in C$ であるため $D \subsetneq C$ である. ゆえに C の最小性に反する. \square