ヤコビ法，ガウス・ザイデル法の収束条件と対角優位性

係数行列Aが以下の性質を満たしていれば、どの初期点から始めても真の解に収束する.
（**対角優位性：収束のための十分条件**）

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}\right| \quad i = 1,2,\cdots,n$$ （（狭義行）対角優位）

対角優位

第 i 行の、対角項以外の成分の絶対値の和よりも対角項の絶対値が大きい場合

証明：定常反復法の構成（1/2）

- 連立一次方程式:　$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
- 定常反復法:　$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Mx}^{(k)} + \mathbf{Nb}$（$\mathbf{M}$:反復行列）
- 以下のように考える:$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

証明：定常反復法の構成（2/2）

ヤコビ法

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (1 \le i \le n)$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}), \quad \mathbf{N} = \mathbf{D}^{-1}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}\left[\mathbf{b} - (\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)}\right]$$

ガウス・ザイデル法

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (1 \le i \le n)$$

$$\mathbf{M} = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}, \quad \mathbf{N} = (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}\left[\mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}\right]$$

証明：ヤコビ法の収束（1/2）

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{N}\mathbf{b} \\
\mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{N}\mathbf{b} \\
\mathbf{x}^{(k-1)} &= \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k-2)} + \mathbf{N}\mathbf{b} \\
&\cdots \\
\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{M}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{N}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{M}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right) = \cdots \\
&= \mathbf{M}^{k}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \le \left\|\mathbf{M}\right\|^{k} \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|
$$

- k→∞の時，||**M**||<1であれば，任意の初期値$\mathbf{x}^{(0)}$に対して，$\mathbf{x}^{(k)}$が解**x**に収束する
- ~~スペクトル半径（絶対値最大固有値）ρ(**M**)≦||**M**||より，ρ(**M**)<1のとき，$\mathbf{x}^{(k)}$は解**x**に収束する~~

証明：ヤコビ法の収束（2/2）

- **対角優位な行列において ||M||<1が満たされる**
- **対角優位な行列のスペクトル半径は1より小さい**

$$\mathbf{M} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$ 列方向の絶対値の和の最大値

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$ 行方向の絶対値の和の最大値

$$\therefore \ \left\| \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \right\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right) < 1$$

$$\rho\left(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\right) \le \left\| \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \right\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right) < 1$$