# 確率分布と共役事前分布

## 1　確率分布

### 1.1　ベルヌーイ分布 (Bernoulli)

$$\mathrm{Bern}\left(x|\mu\right) = \mu^{x}\left(1-\mu\right)^{1-x} \tag{1}$$

ただし，

$$x \in \{0,1\}, \qquad \mu \in [0,1]$$

### 1.2　二項分布 (Binomial)

$$\begin{aligned}\mathrm{Bin}\left(m|\pi,N\right) &= \frac{N!}{m!(N-m)!}\pi^{m}\left(1-\pi\right)^{N-m} &(2)\\ &\overset{\pi}{\propto} \pi^{m}\left(1-\pi\right)^{N-m} &(3)\end{aligned}$$

ただし，

$$m \in \{0,\ldots,N\}, \qquad \mu \in [0,1]$$

### 1.3　ポアソン分布 (Poisson)

$$\begin{aligned}\mathrm{Po}\left(x|\lambda\right) &= \frac{\lambda^{x}}{x!}\exp\left(-\lambda\right) &(4)\\ &\overset{\lambda}{\propto} \lambda^{x}\exp\left(\lambda\right) &(5)\end{aligned}$$

### 1.4　カテゴリカル分布 (Categorical)

$$\mathrm{Cat}\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\pi}\right) = \prod_{k=1}^{K}\pi_{k}^{x_k} \tag{6}$$

ただし，

$$x_k \in \{0,1\}, \qquad \sum_{k=1}^{K} x_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1$$

### 1.5　多項分布 (Multinomial)

$$\begin{aligned} \mathrm{Multi}\left(\boldsymbol{m}|\boldsymbol{\pi}, N\right) &= \frac{N!}{m_1! \cdots m_K!} \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{m_k} && (7) \\ &\overset{\boldsymbol{\pi}}{\propto} \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{m_k} && (8) \end{aligned}$$

ただし,

$$N = \sum_{k=1}^{K} m_k, \qquad \sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1$$

### 1.6　ベータ分布 (Beta)

$$\begin{aligned} \mathrm{Beta}\left(\pi|a, b\right) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \pi^{a-1} \left(1-\pi\right)^{b-1} && (9) \\ &\overset{\pi}{\propto} \pi^{a-1} \left(1-\pi\right)^{b-1} && (10) \end{aligned}$$

ただし,

$$\pi \in [0, 1], \qquad a, b > 0$$

### 1.7　ディリクレ分布 (Dirichlet)

$$\begin{aligned} \mathrm{Dir}\left(\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{\alpha}\right) &= \frac{\Gamma(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_K)} \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{\alpha_k - 1} && (11) \\ &\overset{\pi}{\propto} \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{\alpha_k - 1} && (12) \end{aligned}$$

ただし,

$$\sum_{k=1}^{K} \mu_k = 1, \qquad \alpha_k > 0$$

### 1.8　ガウス分布 (Normal)

$$\mathcal{N}\left(x|\mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (13)$$

ただし,

$$\sigma^2 > 0$$

### 1.9 多変量ガウス分布 (Multivariate normal)

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\Sigma) &= (2\pi)^{-\frac{D}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right) && (14)\\
&\overset{\boldsymbol{\mu}}{\propto} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x})\right) && (15)\\
&\overset{(\boldsymbol{\mu},\Sigma)}{\propto} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right) && (16)\\
&\overset{(\boldsymbol{\mu},\Sigma)}{\propto} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}\right)\right) && (17)\\
&\overset{\boldsymbol{x}}{\propto} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x})\right) && (18)
\end{aligned}$$

### 1.10 ガンマ分布 (Gamma)

$$\begin{aligned}
\Gamma(\lambda|a,b) &= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}\exp(-b\lambda) && (19)\\
&\overset{\lambda}{\propto} \lambda^{a-1}\exp(-b\lambda) && (20)
\end{aligned}$$

ただし，

$$a > 0, \qquad b > 0$$

### 1.11 逆ウィシャート分布 (Inverse Wishart)

$$\begin{aligned}
\mathcal{IW}(\Sigma|\Psi,\nu) &= \frac{|\Sigma|^{-\frac{\nu+D+1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Psi\Sigma^{-1})\right)}{c_D(\nu)|\Psi|^{-\frac{\nu}{2}}} && (21)\\
&\overset{\Sigma}{\propto} |\Sigma|^{-\frac{\nu+D+1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Psi\Sigma^{-1})\right) && (22)
\end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
c_D(\nu) &= 2^{\frac{D\nu}{2}}\quad\Gamma_D\left(\frac{\nu}{2}\right)\\
\Gamma_D(\nu) &= \pi^{\frac{D(D-1)}{4}}\prod_{i=1}^{D}\Gamma\left(\frac{\nu+(1-i)}{2}\right)
\end{aligned}$$

また，$D$ は次元数，$\nu$ は自由度を示し，$D \leq \nu$ を満たす．$\Psi$ は，$D \times D$ の対称行列である．

### 1.12 正規逆ウィシャート分布 (Normal-inverse-Wishart)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{NIW}(\boldsymbol{\mu},\Sigma|\boldsymbol{\mu}_0,\lambda_0,\Psi_0,\nu_0) &= \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}},\frac{1}{\lambda_0}\Sigma)\,\mathcal{IW}(\Sigma|\Psi_0,\nu_0) \qquad (23)\\
&\overset{\boldsymbol{\mu},\Sigma}{\propto} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\lambda_0}{2}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}})\right)\\
&\quad\times|\Sigma|^{-\frac{\nu_0+D+1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Psi_0\Sigma^{-1})\right) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

$$
\overset{\boldsymbol{\mu},\Sigma}{\propto} |\Sigma|^{-\frac{\nu_0+D+2}{2}}\exp\left(-\frac{\lambda_0}{2}\left(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}+\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}{}^T+\frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right)\right)\right) \qquad (25)
$$

## 2 多項分布とディリクレ分布

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Multi}\left(\boldsymbol{m}|\boldsymbol{\mu},N\right)\times\mathrm{Dir}\left(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\alpha}\right) &\propto \prod_{k=1}^{K}\mu_k^{m_k}\times\prod_{k=1}^{K}\mu_k^{\alpha_k-1} \qquad (26)\\
&= \prod_{k=1}^{K}\mu_k^{(m_k+\alpha_k)-1} \qquad (27)\\
&\propto \mathrm{Dir}\left(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\alpha}\right) \qquad (28)
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\boxed{\mathrm{Multi}\left(\boldsymbol{m}|\boldsymbol{\mu},N\right)\times\mathrm{Dir}\left(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\alpha}\right) \propto \mathrm{Dir}\left(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\alpha}\right) \qquad (29)}
$$

## 3 多変量ガウス分布と多変量ガウス分布 (平均)

分散共分散行列は固定された状態であることに注意する.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\Sigma\right)\times\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{c},X\right) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)\right)\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c}\right)^TX^{-1}\left(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c}\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c}\right)^TX^{-1}\left(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c}\right)\right) \qquad (30)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)+\left(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c}\right)^TX^{-1}\left(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c}\right)\right\}\right) \qquad (31)
\end{aligned}
$$

ここで，exp の中カッコ $\{\cdot\}$ に囲まれた部分について考えると，

$$
\begin{aligned}
\{\cdot\} &= \left\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c})^T X^{-1} (\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c})\right\} && (32)\\
&= \left(\boldsymbol{x}^T-\boldsymbol{\mu}^T\right) \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) + \left(\boldsymbol{\mu}^T-\boldsymbol{c}^T\right) X^{-1} (\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c}) && (33)\\
&= \boldsymbol{x}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}\\
&+\ \boldsymbol{\mu}^T X^{-1}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^T X^{-1}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}^T X^{-1}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{c}^T X^{-1}\boldsymbol{c} && (34)\\
&= \boldsymbol{x}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}\\
&+\ \boldsymbol{\mu}^T X^{-1}\boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\mu}^T X^{-1}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}^T X^{-1}\boldsymbol{c} && (35)\\
&= \boldsymbol{\mu}^T\left(\Sigma^{-1}+X^{-1}\right)\boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\mu}^T\left(\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}+X^{-1}\boldsymbol{c}\right) + \left(\boldsymbol{x}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}^T X^{-1}\boldsymbol{c}\right) && (36)
\end{aligned}
$$

ここで，これが多変量ガウス分布 $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}|\hat{\boldsymbol{c}},\hat{X})$ に従うとすると，

$$
\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}|\hat{\boldsymbol{c}},\hat{X}) \quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{\mu}-\hat{\boldsymbol{c}})^T \hat{X}^{-1} (\boldsymbol{\mu}-\hat{\boldsymbol{c}})\right\}\right) \tag{37}
$$

先と同様に $\{\cdot\}$ の部分について考えると

$$
\begin{aligned}
\{\cdot\} &= \left\{(\boldsymbol{\mu}-\hat{\boldsymbol{c}})^T \hat{X}^{-1} (\boldsymbol{\mu}-\hat{\boldsymbol{c}})\right\} && (38)\\
&= \boldsymbol{\mu}^T\hat{X}^{-1}\boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\mu}^T\hat{X}^{-1}\hat{\boldsymbol{c}} + \hat{\boldsymbol{c}}^T\hat{X}^{-1}\hat{\boldsymbol{c}} && (39)
\end{aligned}
$$

ここで，式を見比べると，

$$
\begin{aligned}
\hat{X}^{-1} &= \Sigma^{-1}+X^{-1} && (40)\\
\hat{X}^{-1}\hat{\boldsymbol{c}} &= \Sigma^{-1}\boldsymbol{x}+X^{-1}\boldsymbol{c} && (41)
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &= \left\{\Sigma^{-1}+X^{-1}\right\}^{-1} && (42)\\
&= \Sigma(\Sigma+X)^{-1}X && (43)\\
&= X(\Sigma+X)^{-1}\Sigma && (44)\\
\hat{\boldsymbol{c}} &= \hat{X}\left(\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}+X^{-1}\boldsymbol{c}\right) && (45)\\
&= X(\Sigma+X)^{-1}\boldsymbol{x} + \Sigma(\Sigma+X)^{-1}\boldsymbol{c} && (46)
\end{aligned}
$$

よって，

$$\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\Sigma\right)\times\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{c},X\right) \quad\propto\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}|\hat{\boldsymbol{c}},\hat{X}\right) \tag{47}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\hat{X} &= \left\{\Sigma^{-1}+X^{-1}\right\}^{-1} && (48)\\
&= \Sigma\left(\Sigma+X\right)^{-1}X && (49)\\
&= X\left(\Sigma+X\right)^{-1}\Sigma && (50)\\
\hat{\boldsymbol{c}} &= \hat{X}\left(\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}+X^{-1}\boldsymbol{c}\right) && (51)\\
&= X\left(\Sigma+X\right)^{-1}\boldsymbol{x}+\Sigma\left(\Sigma+X\right)^{-1}\boldsymbol{c} && (52)
\end{aligned}$$

## 4　多変量ガウス分布と逆ウィシャート分布 (分散共分散)

平均は固定された状態であることに注意する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\Sigma\right)\times\mathcal{IW}(\Sigma|X,p,n) &\propto |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)\right)\\
&\quad\times|\Sigma|^{-\frac{n+p+1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X\Sigma^{-1})\right) && (53)\\
&= |\Sigma|^{-\frac{(n+1)+p+1}{2}}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X\Sigma^{-1})\right) && (54)\\
&= |\Sigma|^{-\frac{(n+1)+p+1}{2}}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)+\mathrm{tr}(X\Sigma^{-1})\right\}\right) && (55)\\
&= |\Sigma|^{-\frac{(n+1)+p+1}{2}}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)\right)+\mathrm{tr}(X\Sigma^{-1})\right\}\right) && (56)\\
&= |\Sigma|^{-\frac{(n+1)+p+1}{2}}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\Sigma^{-1}\right)+\mathrm{tr}(X\Sigma^{-1})\right\}\right) && (57)\\
&= |\Sigma|^{-\frac{(n+1)+p+1}{2}}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\Sigma^{-1}+X\Sigma^{-1}\right\}\right) && (58)\\
&= |\Sigma|^{-\frac{(n+1)+p+1}{2}}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\left(\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T+X\right)\Sigma^{-1}\right\}\right) && (59)\\
&\propto \mathcal{IW}\left(\Sigma\;\middle|\;\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^T+X,p,n+1\right) && (60)
\end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\Sigma)\times\mathcal{IW}(\Sigma|X,p,n) \quad \propto \quad \mathcal{IW}\left(\Sigma|\hat{X},p,\hat{n}\right) \tag{61}$$

ただし

$$\hat{X} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T + X \tag{62}$$

$$\hat{n} = n+1 \tag{63}$$

## 5　多点多変量ガウス分布と多変量ガウス分布 (平均)

分散共分散行列は固定された状態であることに注意する．

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N}\mathcal{N}(\boldsymbol{x_n}|\boldsymbol{\mu},\Sigma)\times\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{c},X) &\propto \prod_{n=1}^{N}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu})\right)\times\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c})^TX^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c})\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu})+(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c})^TX^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c})\right\}\right)\end{aligned} \tag{64}$$

ここで，exp の中カッコ $\{\cdot\}$ に囲まれた部分について考えると，

$$\{\cdot\} = \left\{\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu})+(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c})^TX^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{c})\right\} \tag{65}$$

$$= \boldsymbol{\mu}^T\left(\sum_{n=1}^{N}\Sigma^{-1}+X^{-1}\right)\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\left(\sum_{n=1}^{N}\Sigma^{-1}\boldsymbol{x_n}+X^{-1}\boldsymbol{c}\right)+Const \tag{66}$$

$$= \boldsymbol{\mu}^T\left(N\Sigma^{-1}+X^{-1}\right)\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\left(\Sigma^{-1}\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n})+X^{-1}\boldsymbol{c}\right)+Const \tag{67}$$

ここで，これが多変量ガウス分布 $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}|\hat{\boldsymbol{c}},\hat{X})$ に従うとすると，

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}|\hat{\boldsymbol{c}},\hat{X}) \quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{\mu}-\hat{\boldsymbol{c}})^T\hat{X}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\hat{\boldsymbol{c}})\right\}\right) \tag{68}$$

先と同様に $\{\cdot\}$ の部分について考えると

$$\{\cdot\} = \left\{(\boldsymbol{\mu}-\hat{\boldsymbol{c}})^T\hat{X}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\hat{\boldsymbol{c}})\right\} \tag{69}$$

$$= \boldsymbol{\mu}^T\hat{X}^{-1}\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\hat{X}^{-1}\hat{\boldsymbol{c}}+Const \tag{70}$$

ここで，式を見比べると，

$$\hat{X}^{-1} = N\Sigma^{-1}+X^{-1} \tag{71}$$

$$\hat{X}^{-1}\hat{\boldsymbol{c}} = \Sigma^{-1}\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n})+X^{-1}\boldsymbol{c} \tag{72}$$

より，

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &= \left(N\Sigma^{-1} + X^{-1}\right)^{-1} && (73)\\
\hat{\boldsymbol{c}} &= \hat{X}\left(\Sigma^{-1}\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n}) + X^{-1}\boldsymbol{c}\right) && (74)\\
&= \left(N\Sigma^{-1} + X^{-1}\right)^{-1}\left(\Sigma^{-1}\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n}) + X^{-1}\boldsymbol{c}\right) && (75)
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\prod_{n=1}^{N}\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x_n}|\boldsymbol{\mu},\Sigma\right)\times\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{c},X\right) \quad\propto\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}|\hat{\boldsymbol{c}},\hat{X}\right) \qquad (76)
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &= \left(N\Sigma^{-1} + X^{-1}\right)^{-1} && (77)\\
\hat{\boldsymbol{c}} &= \hat{X}\left(\Sigma^{-1}\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n}) + X^{-1}\boldsymbol{c}\right) && (78)\\
&= \left(N\Sigma^{-1} + X^{-1}\right)^{-1}\left(\Sigma^{-1}\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n}) + X^{-1}\boldsymbol{c}\right) && (79)
\end{aligned}
$$

## 6　多点多変量ガウス分布と逆ウィシャート分布 (分散共分散)

平均は固定された状態であることに注意する．

$$
\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{N}\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x_n}|\boldsymbol{\mu},\Sigma\right)\times\mathcal{IW}(\Sigma|X,p,n) &\propto |\Sigma|^{-\frac{N}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu}\right)^{T}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu}\right)\right)\\
&\quad\times|\Sigma|^{-\frac{n+p+1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X\Sigma^{-1})\right) && (80)\\
&= |\Sigma|^{-\frac{(n+N)+p+1}{2}}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu}\right)^{T}+X\right)\Sigma^{-1}\right\}\right)\\
&\propto \mathcal{IW}\left(\Sigma\,\middle|\,\sum_{n=1}^{N}\left(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu}\right)^{T}+X,p,n+N\right) && (81)
\end{aligned}
$$

よって

$$\prod_{n=1}^{N}\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x_n}|\boldsymbol{\mu},\Sigma\right)\times\mathcal{IW}(\Sigma|X,p,n) \quad\propto\quad \mathcal{IW}\left(\Sigma|\hat{X},p,\hat{n}\right) \tag{82}$$

ただし

$$\hat{X} \quad=\quad \sum_{n=1}^{N}\left(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{\mu}\right)^T+X \tag{83}$$

$$\hat{n} \quad=\quad n+N \tag{84}$$

# 7　多点多変量ガウス分布と正規逆ウィシャート分布

$$\prod_{n=1}^{N}\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x_n}|\boldsymbol{\mu},\Sigma\right)\times\mathcal{NIW}(\boldsymbol{\mu},\Sigma|\boldsymbol{\mu}_0,\lambda_0,\Psi_0,\nu_0) \tag{85}$$

$$\begin{aligned}\overset{\boldsymbol{\mu},\Sigma}{\propto}\quad & \prod_{n=1}^{N}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x_n}+\boldsymbol{x_n}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x_n}\right)\right)\\ & \times|\Sigma|^{-\frac{\nu_0+D+2}{2}}\exp\left(-\frac{\lambda_0}{2}\left(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu_0}+\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T+\frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}\overset{\boldsymbol{\mu},\Sigma}{\propto}\quad & |\Sigma|^{-\frac{N}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x_n}+\boldsymbol{x_n}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x_n}\right)\right)\\ & \times|\Sigma|^{-\frac{\nu_0+D+2}{2}}\exp\left(-\frac{\lambda_0}{2}\left(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu_0}+\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T+\frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}\overset{\boldsymbol{\mu},\Sigma}{\propto}\quad & |\Sigma|^{-\frac{N}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(N\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2N\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}+\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x_n}\right)\right)\\ & \times|\Sigma|^{-\frac{\nu_0+D+2}{2}}\exp\left(-\frac{\lambda_0}{2}\left(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu_0}+\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T+\frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{88}$$

この時，$\bar{\boldsymbol{x}}$ は以下の式で定義される．

$$\bar{\boldsymbol{x}} \quad=\quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n} \tag{89}$$

ここで，$|\Sigma|$ の部分についてみると，

$$|\Sigma|^{-\frac{N}{2}}\times|\Sigma|^{-\frac{\nu_0+D+1}{2}} \quad=\quad |\Sigma|^{-\frac{(N+\nu_0)+D+2}{2}} \tag{90}$$

であることが分かる．次に，$\boldsymbol{\mu}$ に関する式を確認すると，

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(N\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2N\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}\right)\right)\times\exp\left(-\frac{\lambda_0}{2}\left(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu_0}\right)\right) \tag{91}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(N\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} - 2N\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda_0\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} - 2\lambda_0\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu_0}\right)\right) \tag{92}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left((N+\lambda_0)\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} - 2\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}(N\cdot\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda_0\cdot\boldsymbol{\mu_0})\right)\right) \tag{93}$$

$$= \exp\left(-\frac{N+\lambda_0}{2}\left(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} - 2\cdot\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\left(\frac{N\cdot\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda_0\cdot\boldsymbol{\mu_0}}{N+\lambda_0}\right)\right)\right) \tag{94}$$

となる．最後に，残った項 ($\boldsymbol{\mu}$ の 0 次の項) について考えると，

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x_n}\right) \times \exp\left(-\frac{\lambda_0}{2}\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right)\right) \tag{95}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x_n} + \lambda_0\cdot\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right)\right)\right) \tag{96}$$

となる．簡単のために，$\exp\left(-\frac{1}{2}(\cdot)\right)$ の中についてのみ計算すると，

$$\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x_n} + \lambda_0\cdot\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right) \tag{97}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{x_n}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{x_n}\right) + \lambda_0\cdot\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right) \tag{98}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{x_n}\boldsymbol{x_n}^T\Sigma^{-1}\right) + \lambda_0\cdot\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right) \tag{99}$$

$$= \mathrm{tr}\left(\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}\boldsymbol{x_n}^T\Sigma^{-1}\right) + \lambda_0\cdot\mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right) \tag{100}$$

$$= \mathrm{tr}\left(\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}\boldsymbol{x_n}^T\Sigma^{-1} + \lambda_0\left(\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \frac{1}{\lambda_0}\Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right) \tag{101}$$

$$= \mathrm{tr}\left(\left(\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}\boldsymbol{x_n}^T + \lambda_0\cdot\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right) \tag{102}$$

$$= \mathrm{tr}\left(\left(\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n}-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_n}-\bar{\boldsymbol{x}})^T + N\cdot\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T + \lambda_0\cdot\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \Psi_0\right)\Sigma^{-1}\right) \tag{103}$$

ここで，

$$\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n}-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_n}-\bar{\boldsymbol{x}})^T = \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}\boldsymbol{x_n}^T - \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}\bar{\boldsymbol{x}}^T - \sum_{n=1}^{N}\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x_n}^T + \sum_{n=1}^{N}\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T \tag{104}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}\boldsymbol{x_n}^T - N\cdot\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T - N\cdot\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T + N\cdot\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T \tag{105}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}\boldsymbol{x_n}^T - N\cdot\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T \tag{106}$$

より，

$$\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x_n}\boldsymbol{x_n}^T = \sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n}-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_n}-\bar{\boldsymbol{x}})^T + N\cdot\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T \tag{107}$$

を用いた．ここで，ここまでで求めた数式が最終的に$\mathcal{NIW}$分布になるには，パラメータを$\boldsymbol{\mu^*}, \lambda^*, \Psi^*, \nu^*$とすると，

$$\begin{aligned}
& \mathcal{NIW}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma | \boldsymbol{\mu^*}, \lambda^*, \Psi^*, \nu^*) \\
\overset{\boldsymbol{\mu},\Sigma}{\propto} \quad & |\Sigma|^{-\frac{\nu^*+D+2}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda^*}{2}\left(\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu^*} + \mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu^*}\boldsymbol{\mu^*}^T + \frac{1}{\lambda^*}\Psi^*\right)\Sigma^{-1}\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{108}$$

これらを用いて，式 (108) と式 (94) を比べて，

$$\nu^* = N + \nu_0 \tag{109}$$

$$\lambda^* = N + \lambda_0 \tag{110}$$

$$\boldsymbol{\mu^*} = \frac{N \cdot \bar{\boldsymbol{x}} + \lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}}{N + \lambda_0} \tag{111}$$

が分かる．また，$\boldsymbol{\mu}$の 0 次の項については，式 (108) の対応する部分を少し変形し，

$$\lambda^* \cdot \mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{\mu^*}\boldsymbol{\mu^*}^T + \frac{1}{\lambda^*}\Psi^*\right)\Sigma^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(\left(\lambda^* \cdot \boldsymbol{\mu^*}\boldsymbol{\mu^*}^T + \Psi^*\right)\Sigma^{-1}\right) \tag{112}$$

としたうえで，式 (103) と比較し，

$$\lambda^* \cdot \boldsymbol{\mu^*}\boldsymbol{\mu^*}^T + \Psi^* = \sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})^T + N \cdot \bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T + \lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \Psi_0 \tag{113}$$

$$\Psi^* = \sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})^T + N \cdot \bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T + \lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \Psi_0 - \lambda^* \cdot \boldsymbol{\mu^*}\boldsymbol{\mu^*}^T \tag{114}$$

また，$\lambda^* \cdot \boldsymbol{\mu^*}\boldsymbol{\mu^*}^T$ はそれぞれ $\lambda^*, \boldsymbol{\mu^*}$ が既に分かっているので，

$$\lambda^* \cdot \boldsymbol{\mu^*}\boldsymbol{\mu^*}^T = (N + \lambda_0) \cdot \left(\frac{N \cdot \bar{\boldsymbol{x}} + \lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}}{N + \lambda_0}\right)\left(\frac{N \cdot \bar{\boldsymbol{x}} + \lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}}{N + \lambda_0}\right)^T \tag{115}$$

$$= \frac{1}{N + \lambda_0}\left(N \cdot \bar{\boldsymbol{x}} + \lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}\right)\left(N \cdot \bar{\boldsymbol{x}} + \lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}\right)^T \tag{116}$$

$$= \frac{1}{N + \lambda_0}\left(N^2 \cdot \bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T + N\lambda_0 \cdot \bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mu_0}^T + N\lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}\bar{\boldsymbol{x}}^T + \lambda_0^2 \cdot \boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T\right) \tag{117}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
\Psi^* = & \sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})^T + N \cdot \bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T + \lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T + \Psi_0 \\
& - \frac{1}{N + \lambda_0}\left(N^2 \cdot \bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T + N\lambda_0 \cdot \bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mu_0}^T + N\lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}\bar{\boldsymbol{x}}^T + \lambda_0^2 \cdot \boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T\right)
\end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned}
= & \sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})^T + \Psi_0 + \left(\frac{N^2 + N\lambda_0 - N^2}{N + \lambda_0}\right)\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T \\
& + \left(\frac{N\lambda_0 + \lambda_0^2 - \lambda_0^2}{N + \lambda_0}\right)\boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T - \left(\frac{N\lambda_0}{N + \lambda_0}\right)\left(\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mu_0}^T + \boldsymbol{\mu_0}\bar{\boldsymbol{x}}^T\right)
\end{aligned} \tag{119}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})^T + \Psi_0 + \left(\frac{N\lambda_0}{N + \lambda_0}\right)\left(\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^T - \bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mu_0}^T - \boldsymbol{\mu_0}\bar{\boldsymbol{x}}^T + \boldsymbol{\mu_0}\boldsymbol{\mu_0}^T\right) \tag{120}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})^T + \Psi_0 + \left(\frac{N\lambda_0}{N + \lambda_0}\right)\left(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0}\right)\left(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0}\right)^T \tag{121}$$

となる．

$$\prod_{n=1}^{N} \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x_n}|\boldsymbol{\mu},\Sigma\right) \times \mathcal{NIW}(\boldsymbol{\mu},\Sigma|\boldsymbol{\mu}_0,\lambda_0,\Psi_0,\nu_0) \quad \propto \quad \mathcal{NIW}(\boldsymbol{\mu},\Sigma|\boldsymbol{\mu^*},\lambda^*,\Psi^*,\nu^*) \tag{122}$$

ただし

$$\nu^* = N + \nu_0 \tag{123}$$

$$\lambda^* = N + \lambda_0 \tag{124}$$

$$\boldsymbol{\mu^*} = \frac{N \cdot \bar{\boldsymbol{x}} + \lambda_0 \cdot \boldsymbol{\mu_0}}{N + \lambda_0} \tag{125}$$

$$\Psi^* = \sum_{n=1}^{N} (\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_n} - \bar{\boldsymbol{x}})^T + \Psi_0 + \left(\frac{N\lambda_0}{N+\lambda_0}\right)(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0})(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0})^T \tag{126}$$

## 8 ポアソン分布とガンマ分布

$$\mathrm{Po}\left(x|\lambda\right) \times \Gamma(\lambda|a,b) \quad \propto \quad \lambda^x \exp\left(-\lambda\right) \times \lambda^{a-1} \exp\left(-b\lambda\right) \tag{127}$$

$$= \lambda^{(a+x)-1} \exp\left\{-(b+1)\lambda\right\} \tag{128}$$

よって，

$$\mathrm{Po}\left(x|\lambda\right) \times \Gamma(\lambda|a,b) \quad \propto \quad \Gamma(\lambda|a+x,b+1) \tag{129}$$

## 9 多点ポアソン分布とガンマ分布

$$\prod_{n=1}^{N} \mathrm{Po}\left(x_n|\lambda\right) \times \Gamma(\lambda|a,b) \quad \propto \quad \prod_{n=1}^{N} \left\{\lambda^{x_n} \exp\left(-\lambda\right)\right\} \times \lambda^{a-1} \exp\left(-b\lambda\right) \tag{130}$$

$$= \lambda^{\sum_{n=1}^{N} x_n} \exp\left(-N\lambda\right) \times \lambda^{a-1} \exp\left(-b\lambda\right) \tag{131}$$

$$= \lambda^{(a+\sum_{n=1}^{N} x_n)-1} \exp\left\{-(b+N)\lambda\right\} \tag{132}$$

よって，

$$\mathrm{Po}\left(x|\lambda\right) \times \Gamma(\lambda|a,b) \quad \propto \quad \Gamma(\lambda|a+\sum_{n=1}^{N} x_n, b+N) \tag{133}$$