

「行列プログラマー」 p.10

0.3.21 解答

RyodoTanaka

問題

補題 0.3.21 を証明せよ.

解答

$$g : U \rightarrow V, f : V \rightarrow W \quad (1)$$

とする.

このとき, 命題 0.3.12 より

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) &= g^{-1} \circ (f^{-1} \circ (f \circ g)) \\ &= g^{-1} \circ ((f^{-1} \circ f) \circ g) \\ &= g^{-1} \circ (\text{id}_V \circ g) \\ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) &= g^{-1} \circ g = \text{id}_U \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) &= f \circ (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1})) \\ &= f \circ ((g \circ g^{-1}) \circ f^{-1}) \\ &= f \circ (\text{id}_V \circ f^{-1}) \\ (f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) &= f \circ f^{-1} = \text{id}_W \end{aligned} \quad (3)$$

となる.

よって, (2), (3) より, $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ が言える.