# 生成モデルに拡張分離型格子隠れマルコフモデルを仮定した Image Inpainting 問題の実験結果報告

#### 2020年11月27日

# 発表の目的

今月は以下のことを行いました.

- 1. 人工データでの実験
  - 認識できる形の確認
  - 定量的な評価
- 2. 実データでの実験
  - 人工データでの実験で得られた知見が通用するかどうか.

その中で、次のことが問題点として挙がりました.

- 1. 同じ色のものを違う状態として認識できなかったこと.
- 2. 実データでの実験における定量的な評価が困難であること.

今回の中間発表では、特に2番の問題点についてコメントを頂きたいです.

# 目次

1		問題設定	4
		問題設定	
	1.2	評価基準	5
		事後分布の計算	
	1.4	準最適な決定関数	7
		実験結果	8
		人工データでの実験概要	
		実験結果	
	2.2.	1 実験 2	6
3		まとめ	ç

付録		11
付録 A	更新式	12

#### ノーテーション

- 画像の高さ:h ∈ ℕ
- 画像の幅:w∈N
- 横方向に遷移する状態の状態数 S1 ∈ N
- 縦方向に遷移する状態の状態数 S2 ∈ N
- 横方向の状態  $\mathbf{S}^{(1)}:=\{\mathbf{S}^{(1)}(i,j)\in\{0,1\}^{S1}|i=1,2,\cdots,h,j=1,2,\cdots,w\}$
- 縦方向の状態  $S^{(2)} := \{S^{(2)}(i,j) \in \{0,1\}^{S2} | i=1,2,\cdots,h,j=1,2,\cdots,w \}$
- 横方向の初期状態確率  $\Pi^{(1)} := \{\pi_s^{(1)} = p(S^{(1)}(1,j) = s) | s \in \{1,2,\cdots,S1\} \}$
- $\boldsymbol{\pi}^{(1)} := \left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \cdots, \pi_{S1}^{(1)}\right)$
- ・ 縦方向の初期状態確率  $\Pi^{(2)}:=\{\pi_s^{(2)}=p(S^{(2)}(i,1)=s)|s\in\{1,2,\cdots,S2\}\}$
- $\bullet \ \boldsymbol{\pi}^{(2)} := \left(\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}, \cdots, \pi_{S2}^{(2)}\right)$
- 横方向の遷移確率  $\mathbf{A}^{(1)}:=\{a_{s,s'}^{(1)}=p(S^{(1)}(i,j)=s'|S^{(1)}(i-1,j)=s)|s,s'\in\{1,2,\cdots,S1\}\}$
- 縦方向の状態 s からの遷移確率  $\boldsymbol{a}_s^{(1)} := (a_{s,1}^{(1)}, a_{s,2}^{(1)}, \cdots, a_{s,S_1}^{(1)})$
- ・ 縦方向の遷移確率  $\mathbf{A}^{(2)}:=\{a_{s,s'}^{(2)}=p(S^{(2)}(i,j)=s'|S^{(2)}(i,j-1)=s)|s,s'\in\{1,2,\cdots,S2\}\}$  ・ 縦方向の状態 s からの遷移確率  $\mathbf{a}_s^{(2)}:=(a_{s,1}^{(2)},a_{s,2}^{(2)},\cdots,a_{s,S2}^{(2)})$
- $\Phi = \{(\mu_{s_1s_2}, \Lambda_{s_1s_2}) | s_1 \in \{1, 2, \dots, S1\}, s_2 \in \{1, 2, \dots, S2\}\}$ :出力パラメータ
- A: 決定空間
- ∆:決定関数の集合
- $\mathcal{O}$  ⊂  $\mathbb{R}^3$ :画素値の出力の集合 (本来は  $\{0,1,\cdots,255\}^3$  であるが計算のため)

### 1 問題設定

#### 1.1 問題設定

- 問題設定 -

#### 既知

- $U := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | i \in \{1, 2, \dots, h\}, j \in \{1, 2, \dots, w\}\}$ :全体領域
- $I \subset U$ :修正領域
- $O_{U\setminus I} := \{o(i,j) \in \mathcal{O} | (i,j) \in U \setminus I\} : U \setminus I$  内の画素値
- S1 ∈ N:横方向に遷移する潜在変数の状態数
- S2 ∈ N:縦方向に遷移する潜在変数の状態数

#### 未知

- $O_I := \{ o(i,j) \in \mathcal{O} | (i,j) \in I \} : I$  内の画素値
- s<sup>(1)</sup>:横方向に遷移する状態
- $s^{(2)}$ :縦方向に遷移する状態
- π<sup>(1)</sup>:横方向に遷移する状態の初期状態確率
- π<sup>(2)</sup>:縦方向に遷移する状態の初期状態確
- A<sup>(1)</sup>:横方向に遷移する状態の遷移確率
- A<sup>(2)</sup>:縦方向に遷移する状態の遷移確率
- $\phi$ :出力パラメーター ( $\Theta := \{\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \Phi\}$ )

#### 仮定

• 生成モデル (拡張分離型格子隠れマルコフモデル)

$$\begin{array}{l} p(\boldsymbol{o}(i,j)|\boldsymbol{s}^{(1)},\boldsymbol{s}^{(2)},\boldsymbol{\pi}^{(1)},\boldsymbol{\pi}^{(2)},\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\boldsymbol{\phi}) \\ = \prod_{s_1=1}^{S1} \prod_{s_2=1}^{S2} \mathcal{N}(\boldsymbol{o}(i,j)|\boldsymbol{\mu}_{s_1s_2},(\boldsymbol{\Lambda}_{s_1s_2})^{-1})^{S_{s_1}^{(1)}(i,j)S_{s_2}^{(2)}(i,j)} \end{array}$$

事前分布

$$\begin{aligned} & p(\boldsymbol{s}^{(1)}, \boldsymbol{s}^{(2)}, \boldsymbol{\pi}^{(1)}, \boldsymbol{\pi}^{(2)}, \boldsymbol{A}^{(1)}, \boldsymbol{A}^{(2)}, \boldsymbol{\phi} | \boldsymbol{\eta}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}^{(2)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{\nu}) \\ & = \operatorname{Dir}(\boldsymbol{\pi}^{(1)} | \boldsymbol{\eta}^{(1)}) \times \operatorname{Dir}(\boldsymbol{\pi}^{(2)} | \boldsymbol{\eta}^{(2)}) \times \left\{ \prod_{s_1 = 1}^{S1} \operatorname{Dir}(\boldsymbol{a}_{s_1}^{(1)} | \boldsymbol{\epsilon}_{s_1}^{(1)}) \right\} \times \left\{ \prod_{s_2 = 1}^{S2} \operatorname{Dir}(\boldsymbol{a}_{s_2}^{(2)} | \boldsymbol{\epsilon}_{s_2}^{(2)}) \right\} \\ & \times \left\{ \prod_{s_1 = 1}^{S1} \prod_{s_2 = 1}^{S1} \left( \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{s_1 s_2} | \boldsymbol{m}_{s_1 s_2}, (\boldsymbol{\beta}_{s_1 s_2} \boldsymbol{\Lambda}_{s_1 s_2})^{-1}) \mathcal{W}(\boldsymbol{\Lambda}_{s_1 s_2} | \boldsymbol{W}_{s_1 s_2}, \boldsymbol{\nu}_{s_1 s_2}) \right\} \end{aligned}$$

#### 決定関数

$$d: \mathcal{O}^{|U\setminus I|} \to \mathcal{O}^{|I|} \tag{1}$$

#### 評価基準

0 − 1 誤差を損失関数としたときのベイズリスク関数

#### 1.2 評価基準

#### 定義 1. (損失 l)

次式で書ける関数  $l: \mathcal{O} \times \mathcal{O} \rightarrow \{0,1\}$  を損失と呼ぶ.

$$l(\mathbf{o}(i,j),\hat{\mathbf{o}}(i,j)) = \begin{cases} 0 & \mathbf{o}(i,j) = \hat{\mathbf{o}}(i,j) \\ 1 & \mathbf{o}(i,j) \neq \hat{\mathbf{o}}(i,j) \end{cases}$$
(2)

#### 定義 2. (損失関数 L)

次式で書ける関数  $L: \mathbf{S}^{(1)} \times \mathbf{S}^{(2)} \times \Theta \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$  を損失関数と呼ぶ.

$$L(s^{(1)}, s^{(2)}, \theta, a) := \sum_{(i,j) \in I} \int l(o(i,j), a(i,j)) p(o(i,j)|s^{(1)}, s^{(2)}, \theta) do(i,j)$$
(3)

#### 定義 3. (リスク関数 R)

次式で書ける関数  $R: \mathbf{S}^{(1)} \times \mathbf{S}^{(2)} \times \Theta \times \Delta \to \mathbb{R}$  を損失関数と呼ぶ.

$$R(\boldsymbol{s}^{(1)}, \boldsymbol{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, d) := \int l(\boldsymbol{o}(i, j), d_{i, j}(\boldsymbol{o}_{U \setminus I})) p(\boldsymbol{o}_{U \setminus I} | \boldsymbol{s}^{(1)}, \boldsymbol{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{o}_{U \setminus I}$$
(4)

#### 定義 4. (ベイズリスク関数 BR)

次式で書ける関数  $BR: \Delta \to \mathbb{R}$  をベイズリスク関数と呼ぶ.

$$BR(d) := \sum_{\mathbf{S}^{(1)}} \sum_{\mathbf{S}^{(2)}} \int_{\Theta} R(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, d) p(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$$
 (5)

**命題 1.** ベイズ基準のもと最適な決定関数  $d_{i,j}^*$  は次式のように与えられる.

$$d_{i,j}^*(\boldsymbol{o}_{U\setminus I}) := \underset{\boldsymbol{o}\in\mathcal{O}}{\arg\max} \sum_{\boldsymbol{S}^{(1)}} \sum_{\boldsymbol{S}^{(2)}} \int_{\Theta} p(\boldsymbol{o}(i,j)|\boldsymbol{s}^{(1)},\boldsymbol{s}^{(2)},\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{s}^{(1)},\boldsymbol{s}^{(2)},\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{o}_{U\setminus I}) d\boldsymbol{\theta}$$
(6)

#### 1.3 事後分布の計算

(6) 式を計算するために事後分布  $p(s^{(1)}, s^{(2)}, \boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{o}_{U \setminus I})$  の計算が必要であるが、計算が困難である。 そこである因子分解性を仮定し  $p(s^{(1)}, s^{(2)}, \boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{o}_{U \setminus I})$  との KL 情報量が最小になる近似事後分布  $q(s^{(1)}, s^{(2)}, \boldsymbol{\theta})$  の計算を行う。

命題 2. 次の因子分解性を仮定する.

$$q(s^{(1)}, s^{(2)}, \theta) = q(s^{(1)})q(s^{(2)})q(\theta)$$
 (7)

このとき、それぞれの近似事後分布は次式で計算される.

$$\log q(\boldsymbol{s}^{(1)}) = E_{q(\boldsymbol{s}^{(2)})q(\boldsymbol{\theta})}[\log p(\boldsymbol{s}^{(1)}, \boldsymbol{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{o}_{U\setminus I})]$$
(8)

$$\log q(\boldsymbol{s}^{(2)}) = E_{q(\boldsymbol{s}^{(1)})q(\boldsymbol{\theta})}[\log p(\boldsymbol{s}^{(1)}, \boldsymbol{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{o}_{U\setminus I})]$$
(9)

$$\log q(\boldsymbol{\theta}) = E_{q(\boldsymbol{s}^{(1)})q(\boldsymbol{s}^{(2)})}[\log p(\boldsymbol{s}^{(1)}, \boldsymbol{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{o}_{U\setminus I})]$$
(10)

上式で計算を行うと,

$$q(\mathbf{s}^{(1)}) = C_1 \times \left\{ \prod_{(i,j) \in U \setminus I} \prod_{s_1=1}^{S1} (N_{s_1}(i,j))^{\mathbf{s}_s^{(1)}(i,j)} \right\} \times \left\{ \prod_{j=1}^w \prod_{s=1}^{S1} (p_s^{(1)})^{\mathbf{s}_s^{(1)}(1,j)} \right\} \times \left\{ \prod_{i=1}^h \prod_{j=2}^w \prod_{s=1}^{S1} \prod_{s'=1}^{S1} (t_{s,s'}^{(1)})^{\mathbf{s}_s^{(1)}(i,j-1)} \mathbf{s}_s^{(1)}(i,j) \right\}$$

$$(11)$$

$$q(\mathbf{s}^{(2)}) = C_2 \times \left\{ \prod_{(i,j) \in U \setminus I} \prod_{s=1}^{S2} (N_2(i,j))^{\mathbf{s}_s^{(2)}(i,j)} \right\} \times \left\{ \prod_{i=1}^h \prod_{s=1}^{S2} (p_s^{(2)})^{\mathbf{s}_s^{(2)}(i,1)} \right\} \times \left\{ \prod_{j=1}^w \prod_{i=2}^h \prod_{s=1}^{S2} \prod_{s'=1}^{S2} (t_{s,s'}^{(2)})^{\mathbf{s}_s^{(2)}(i-1,j)} \mathbf{s}_s^{(2)}(i,j) \right\}$$

$$(12)$$

$$q(\boldsymbol{\theta}) = C_3 \times \operatorname{Dir}(\boldsymbol{\pi}^{(1)}|\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}) \times \operatorname{Dir}(\boldsymbol{\pi}^{(2)}|\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(2)}) \times \left\{ \prod_{s=1}^{S1} \operatorname{Dir}(\boldsymbol{a}_s^{(1)}|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)}) \right\} \times \left\{ \prod_{s=1}^{S2} \operatorname{Dir}(\boldsymbol{a}_s^{(2)}|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)}) \right\}$$
(13)

$$\times \left\{ \prod_{s_{1}=1}^{S_{1}} \prod_{s_{2}=1}^{S_{2}} \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{s_{1},s_{2}} | \tilde{\boldsymbol{m}}_{s_{1},s_{2}}, (\tilde{\beta}_{s_{1},s_{2}} \boldsymbol{\Lambda}_{s_{1},s_{2}})^{-1}) \mathcal{W}(\boldsymbol{\Lambda}_{s_{1},s_{2}} | \tilde{\boldsymbol{W}}_{s_{1},s_{2}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{s_{1},s_{2}}) \right\}$$

$$(14)$$

(各パラメーターの更新式は付録参照)

#### 1.4 準最適な決定関数

近似事後分布を用いて、準最適な決定の計算を行う.

命題 3. 予測分布の近似は多次元混合 t 分布になる.

$$\sum_{\mathbf{S}^{(1)}} \sum_{\mathbf{S}^{(2)}} \int_{\Theta} p(\mathbf{o}(i,j)|\mathbf{s}^{(1)},\mathbf{s}^{(2)},\boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{s}^{(1)},\mathbf{s}^{(2)},\boldsymbol{\theta}|\mathbf{o}_{U\setminus I}) d\boldsymbol{\theta}$$
(15)

$$\simeq \sum_{s_1}^{S1} \sum_{s_2}^{S2} q(s_{s_1}^{(1)}(i,j)) q(s_{s_2}^{(2)}(i,j)) \operatorname{St}(\boldsymbol{o}(i,j) | \tilde{\boldsymbol{m}}_{s_1,s_2}, L_{s_1,s_2}, \tilde{\nu}_{s_1,s_2} + 1 - D)$$
(16)

ただし,

$$L_{s_1,s_2} = \frac{\tilde{\beta}_{s_1,s_2}(\tilde{\nu}_{s_1,s_2} + 1 - D)}{1 + \tilde{\beta}_{s_1,s_2}}$$
(17)

命題 4. 準最適な決定は,

$$d_{i,j}^*(\mathbf{o}_{U\setminus I}) := \tilde{\mathbf{m}}_{s_k^{(1)}, s_l^{(2)}} \tag{18}$$

ただし,

$$k, l := \underset{s_1, s_2 \in \mathbb{N}}{\text{arg max}} \, q(s_{s_1}^{(1)}(i, j)) q(s_{s_2}^{(2)}(i, j)) \tag{19}$$

# 2 実験結果

# 2.1 人工データでの実験概要

- 画像サイズ 400 × 400
- 変分ベイズの計算 50 回
- 修復領域 10×100
- 状態数 S1 = 2, S2 = 2
- 目的
  - 色の境目を認識できるかを確かめる.
  - 曲線を認識できるか確かめる.

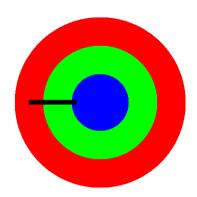


図1 Input 画像

#### 2.2 実験結果

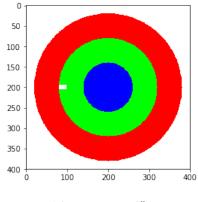


図 2 Output 画像

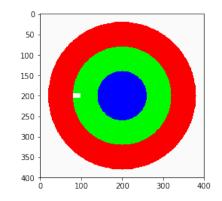


図3 特定の状態に出力色を定めて出力した画像

# 参考文献

- [1] Guilin Liu, Fitsum A Reda, Kevin J Shih, Ting-Chun Wang, Andrew Tao, and Bryan Catanzaro. Image inpainting for irregular holes using partial convolutions. In Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV), pages 85–100, 2018.
- [2] 慶介熊木, 吉彦南角, 恵一徳田. 拡張分離型格子 hmm に基づく顔画像認識. 電子情報通信学会技術研究報告. PRMU, パターン認識・メディア理解, Vol. 110, No. 97, pp. 4550, jun 2010.

## 付録 A 更新式

$$N_{s_1}(i,j) := \prod_{s_2=1}^{S2} E_{q(\boldsymbol{\theta})}[s_{s_2}^{(2)}(i,j)] E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log \mathcal{N}(\boldsymbol{o}(i,j)|\boldsymbol{\mu}_{s_1,s_2},\boldsymbol{\Lambda}_{s_1,s_2})]$$
(20)

$$= \prod_{s_2=1}^{S2} q(s_{s_2}(i,j)) \left\{ -\frac{D}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \psi\left(\frac{\tilde{\nu}_{s_1,s_2} + 1 - i}{2}\right) + 3\log 2 + \log|\tilde{\nu}_{s_1,s_2}\tilde{\boldsymbol{W}}_{s_1s_2}| \right.$$
(21)

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{o}(i,j)^{\top} \left( \tilde{\nu}_{s_1,s_2} \tilde{\boldsymbol{W}}_{s_1s_2} \right) \boldsymbol{o}(i,j) - \tilde{m}_{s_1,s_2}^{\top} \left( \tilde{\nu}_{s_1,s_2} \tilde{\boldsymbol{W}}_{s_1s_2} \right) \boldsymbol{o}(i,j) + \frac{1}{2} \tilde{m}_{s_1,s_2}^{\top} \left( \tilde{\nu}_{s_1,s_2} \tilde{\boldsymbol{W}}_{s_1s_2} \right) \tilde{m}_{s_1,s_2}^{\top} \right)$$

$$(22)$$

$$N_{s_2}(i,j) := \prod_{s_1=1}^{S_1} E_{q(\boldsymbol{\theta})}[s_{s_1}^{(1)}(i,j)] E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log \mathcal{N}(\boldsymbol{o}(i,j)|\boldsymbol{\mu}_{s_1,s_2},\boldsymbol{\Lambda}_{s_1,s_2})]$$
(23)

$$= \prod_{s_1=1}^{S1} q(s_{s_1}(i,j)) \left\{ -\frac{D}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \psi\left(\frac{\tilde{\nu}_{s_1,s_2} + 1 - i}{2}\right) + 3\log 2 + \log|\tilde{\nu}_{s_1,s_2}\tilde{\boldsymbol{W}}_{s_1s_2}| \right.$$
(24)

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{o}(i,j)^{\top} \left( \tilde{\nu}_{s_1,s_2} \tilde{\boldsymbol{W}}_{s_1s_2} \right) \boldsymbol{o}(i,j) - \tilde{m}_{s_1,s_2}^{\top} \left( \tilde{\nu}_{s_1,s_2} \tilde{\boldsymbol{W}}_{s_1s_2} \right) \boldsymbol{o}(i,j) + \frac{1}{2} \tilde{m}_{s_1,s_2}^{\top} \left( \tilde{\nu}_{s_1,s_2} \tilde{\boldsymbol{W}}_{s_1s_2} \right) \tilde{m}_{s_1,s_2}^{\top} \right)$$

$$(25)$$

$$\log p_s^{(1)} := E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log \pi_s] \tag{26}$$

$$= \psi(\tilde{\eta}_s^{(1)}) - \psi\left(\sum_{s=1}^{S1} \tilde{\eta}_s^{(1)}\right)$$
 (27)

$$\log p_s^{(2)} := E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log \pi_s] \tag{28}$$

$$= \psi(\tilde{\eta}_s^{(2)}) - \psi\left(\sum_{s=1}^{S2} \tilde{\eta}_s^{(2)}\right)$$
 (29)

$$\log t_{s,s'}^{(1)} := E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log a_{ss'}^{(1)}] \tag{30}$$

$$= \psi(\tilde{\epsilon}_{s,s'}^{(1)}) - \psi\left(\sum_{s'=1}^{S1} \tilde{\epsilon}_{s,s'}^{(1)}\right) \tag{31}$$

$$\log t_{s,s'}^{(2)} := E_{q(\theta)}[\log a_{ss'}^{(2)}] \tag{32}$$

$$= \psi(\tilde{\epsilon}_{s,s'}^{(2)}) - \psi\left(\sum_{s'=1}^{S2} \tilde{\epsilon}_{s,s'}^{(2)}\right) \tag{33}$$

$$\hat{\eta}_s^{(1)} := \sum_{i=1}^h E_{q(s^{(1)})}[s_s^{(1)}(i,1)] + \eta_s^{(1)}$$
(34)

$$= \sum_{i=1}^{h} q(\mathbf{s}_s^{(1)}(i,1)) + \eta_s^{(1)}$$
(35)

$$\hat{\eta}_s^{(2)} := \sum_{j=1}^w E_{q(\mathbf{s}^{(2)})}[s_s^{(2)}(1,j)] + \eta_s^{(2)}$$
(36)

$$= \sum_{i=1}^{w} q(\mathbf{s}_s^{(2)}(1,j)) + \eta_s^{(2)}$$
(37)

$$\hat{\epsilon}_{s,s'}^{(1)} := \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=2}^{w} E_{q(s^{(1)})}[s_s(i,j-1)s_s'(i,j)] + \epsilon_{s,s'}^{(1)}$$
(38)

$$= q(\mathbf{s}_{s'}(i,j)^{(1)}\mathbf{s}_s(i,j-1)^{(1)}) + \epsilon_{s,s'}^{(1)}$$
(39)

$$\hat{\epsilon}_{s,s'}^{(2)} := \sum_{i=1}^{w} \sum_{i=2}^{h} E_{q(s^{(2)})}[s_s(i-1,j)s_{s'}(i,j)] + \epsilon_{s,s'}^{(2)}$$

$$(40)$$

$$= q(\mathbf{s}_{s'}(i,j)^{(2)}\mathbf{s}_{s}(i-1,j)^{(2)}) + \epsilon_{s,s'}^{(1)}$$
(41)

$$\tilde{\beta}_{s_1, s_2} := \sum_{(i, j) \in U \setminus I} E_{q(\mathbf{s}^{(1)})}[\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)] E_{q(\mathbf{s}^{(2)})}[\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)] + \beta_{s_1, s_2}$$

$$(42)$$

$$= q(\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i,j))q(\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i,j)) + \beta_{s_1,s_2}$$
(43)

$$\tilde{\boldsymbol{m}}_{s_1, s_2} := \frac{1}{\tilde{\beta}_{s_1, s_2}} \left( \sum_{(i, j) \in U \setminus I} E_{q(\boldsymbol{s}^{(1)})}[\boldsymbol{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)] E_{q(\boldsymbol{s}^{(2)})}[\boldsymbol{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)] \boldsymbol{o}(i, j) + \beta_{s_1, s_2} \boldsymbol{m}_{s_1, s_2} \right)$$
(44)

$$= \frac{1}{\tilde{\beta}_{s_1, s_2}} \left( \sum_{(i, j) \in U \setminus I} q(\boldsymbol{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)) q(\boldsymbol{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)) \boldsymbol{o}(i, j) + \beta_{s_1, s_2} \boldsymbol{m}_{s_1, s_2} \right)$$
(45)

$$\tilde{\nu}_{s_1,s_2} := \sum_{(i,j)\in U\setminus I} E_{q(\mathbf{s}^{(1)})}[\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i,j)] E_{q(\mathbf{s}^{(2)})}[\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i,j)] + \nu_{s_1,s_2}$$
(46)

$$= q(\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i,j))q(\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i,j)) + \nu_{s_1,s_2}$$

$$(47)$$

$$\tilde{\boldsymbol{W}}_{s_{1},s_{2}}^{-1} := \left(\sum_{(i,j)\in U\setminus I} E_{q(\boldsymbol{s}^{(1)})}[\boldsymbol{s}_{s_{1}}^{(1)}(i,j)]E_{q(\boldsymbol{s}^{(2)})}[\boldsymbol{s}_{s_{2}}^{(2)}(i,j)]\boldsymbol{o}(i,j)\boldsymbol{o}(i,j)^{\top}\right) + \beta_{s_{1},s_{2}}\boldsymbol{m}_{s_{1},s_{2}}\boldsymbol{m}_{s_{1},s_{2}}^{\top} - \tilde{\beta}_{s_{1},s_{2}}\tilde{\boldsymbol{m}}_{s_{1},s_{2}}^{\top} + \boldsymbol{W}_{s_{1},s_{2}}^{-1}$$

$$(48)$$

(49)