

# 生成モデルに拡張分離型格子隠れマルコフモデルを仮定した Image Inpainting 問題の実験結果報告

2021 年 1 月 4 日

## 目次

1	問題設定	3
1.1	問題設定 . . . . .	3
1.2	評価基準 . . . . .	4
1.3	事後分布の計算 . . . . .	5
1.4	準最適な決定関数 . . . . .	6
2	実験結果	7
2.1	人工データでの実験概要 . . . . .	7
2.2	実験結果 . . . . .	7
	付録	8
	付録 A 更新式	9

## ノテーション

- 画像の高さ:  $h \in \mathbb{N}$
- 画像の幅:  $w \in \mathbb{N}$
- 横方向に遷移する状態の状態数  $S1 \in \mathbb{N}$
- 縦方向に遷移する状態の状態数  $S2 \in \mathbb{N}$
- 横方向の状態  $\mathbf{S}^{(1)} := \{\mathbf{S}^{(1)}(i, j) \in \{0, 1\}^{S1} | i = 1, 2, \dots, h, j = 1, 2, \dots, w\}$
- 縦方向の状態  $\mathbf{S}^{(2)} := \{\mathbf{S}^{(2)}(i, j) \in \{0, 1\}^{S2} | i = 1, 2, \dots, h, j = 1, 2, \dots, w\}$
- 横方向の初期状態確率  $\mathbf{\Pi}^{(1)} := \{\pi_s^{(1)} = p(\mathbf{S}^{(1)}(1, j) = s) | s \in \{1, 2, \dots, S1\}\}$
- $\boldsymbol{\pi}^{(1)} := (\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \dots, \pi_{S1}^{(1)})$
- 縦方向の初期状態確率  $\mathbf{\Pi}^{(2)} := \{\pi_s^{(2)} = p(\mathbf{S}^{(2)}(i, 1) = s) | s \in \{1, 2, \dots, S2\}\}$
- $\boldsymbol{\pi}^{(2)} := (\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}, \dots, \pi_{S2}^{(2)})$
- 横方向の遷移確率  $\mathbf{A}^{(1)} := \{a_{s,s'}^{(1)} = p(\mathbf{S}^{(1)}(i, j) = s' | \mathbf{S}^{(1)}(i-1, j) = s) | s, s' \in \{1, 2, \dots, S1\}\}$
- 縦方向の状態  $s$  からの遷移確率  $\mathbf{a}_s^{(1)} := (a_{s,1}^{(1)}, a_{s,2}^{(1)}, \dots, a_{s,S1}^{(1)})$
- 縦方向の遷移確率  $\mathbf{A}^{(2)} := \{a_{s,s'}^{(2)} = p(\mathbf{S}^{(2)}(i, j) = s' | \mathbf{S}^{(2)}(i, j-1) = s) | s, s' \in \{1, 2, \dots, S2\}\}$
- 縦方向の状態  $s$  からの遷移確率  $\mathbf{a}_s^{(2)} := (a_{s,1}^{(2)}, a_{s,2}^{(2)}, \dots, a_{s,S2}^{(2)})$
- $\Phi = \{(\boldsymbol{\mu}_{s_1 s_2}, \boldsymbol{\Lambda}_{s_1 s_2}) | s_1 \in \{1, 2, \dots, S1\}, s_2 \in \{1, 2, \dots, S2\}\}$ : 出力パラメータ
- $\mathcal{A}$ : 決定空間
- $\Delta$ : 決定関数の集合
- $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ : 画素値の出力の集合 (本来は  $\{0, 1, \dots, 255\}^3$  であるが計算のため)

# 1 問題設定

## 1.1 問題設定

### 問題設定

#### 既知

- $U := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | i \in \{1, 2, \dots, h\}, j \in \{1, 2, \dots, w\}\}$ : 全体領域
- $I \subset U$ : 修正領域
- $O_{U \setminus I} := \{o(i, j) \in \mathcal{O} | (i, j) \in U \setminus I\}$ :  $U \setminus I$  内の画素値
- $S1 \in \mathbb{N}$ : 横方向に遷移する潜在変数の状態数
- $S2 \in \mathbb{N}$ : 縦方向に遷移する潜在変数の状態数

#### 未知

- $O_I := \{o(i, j) \in \mathcal{O} | (i, j) \in I\}$ :  $I$  内の画素値
- $s^{(1)}$ : 横方向に遷移する状態
- $s^{(2)}$ : 縦方向に遷移する状態
- $\pi^{(1)}$ : 横方向に遷移する状態の初期状態確率
- $\pi^{(2)}$ : 縦方向に遷移する状態の初期状態確率
- $A^{(1)}$ : 横方向に遷移する状態の遷移確率
- $A^{(2)}$ : 縦方向に遷移する状態の遷移確率
- $\phi$ : 出力パラメーター ( $\Theta := \{\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \Phi\}$ )

#### 仮定

- 生成モデル (拡張分離型格子隠れマルコフモデル)  

$$p(o(i, j) | s^{(1)}, s^{(2)}, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \phi)$$

$$= \prod_{s_1=1}^{S1} \prod_{s_2=1}^{S2} \mathcal{N}(o(i, j) | \mu_{s_1 s_2}, (\Lambda_{s_1 s_2})^{-1})^{S_{s_1}^{(1)}(i, j) S_{s_2}^{(2)}(i, j)}$$
- 事前分布  

$$p(s^{(1)}, s^{(2)}, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \phi | \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, m, \beta, W, \nu)$$

$$= \text{Dir}(\pi^{(1)} | \eta^{(1)}) \times \text{Dir}(\pi^{(2)} | \eta^{(2)}) \times \left\{ \prod_{s_1=1}^{S1} \text{Dir}(a_{s_1}^{(1)} | \epsilon_{s_1}^{(1)}) \right\} \times \left\{ \prod_{s_2=1}^{S2} \text{Dir}(a_{s_2}^{(2)} | \epsilon_{s_2}^{(2)}) \right\}$$

$$\times \left\{ \prod_{s_1=1}^{S1} \prod_{s_2=1}^{S2} (\mathcal{N}(\mu_{s_1 s_2} | m_{s_1 s_2}, (\beta_{s_1 s_2} \Lambda_{s_1 s_2})^{-1}) \mathcal{W}(\Lambda_{s_1 s_2} | W_{s_1 s_2}, \nu_{s_1 s_2})) \right\}$$

#### 決定関数

$$d: \mathcal{O}^{|U \setminus I|} \rightarrow \mathcal{O}^{|I|} \quad (1)$$

#### 評価基準

- 0-1 誤差を損失関数としたときのベイズリスク関数

## 1.2 評価基準

**定義 1.** (損失  $l$ )

次式で書ける関数  $l : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \rightarrow \{0, 1\}$  を損失と呼ぶ.

$$l(o(i, j), \hat{o}(i, j)) = \begin{cases} 0 & o(i, j) = \hat{o}(i, j) \\ 1 & o(i, j) \neq \hat{o}(i, j) \end{cases} \quad (2)$$

**定義 2.** (損失関数  $L$ )

次式で書ける関数  $L : \mathbf{S}^{(1)} \times \mathbf{S}^{(2)} \times \Theta \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  を損失関数と呼ぶ.

$$L(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}) := \sum_{(i,j) \in I} \int l(o(i, j), \mathbf{a}(i, j)) p(o(i, j) | \mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{o}(i, j) \quad (3)$$

**定義 3.** (リスク関数  $R$ )

次式で書ける関数  $R : \mathbf{S}^{(1)} \times \mathbf{S}^{(2)} \times \Theta \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  を損失関数と呼ぶ.

$$R(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, d) := \int l(o(i, j), d_{i,j}(\mathbf{o}_{U \setminus I})) p(\mathbf{o}_{U \setminus I} | \mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{o}_{U \setminus I} \quad (4)$$

**定義 4.** (ベイズリスク関数  $BR$ )

次式で書ける関数  $BR : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  をベイズリスク関数と呼ぶ.

$$BR(d) := \sum_{\mathbf{S}^{(1)}} \sum_{\mathbf{S}^{(2)}} \int_{\Theta} R(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, d) p(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (5)$$

**命題 1.** ベイズ基準のもと最適な決定関数  $d_{i,j}^*$  は次式のように与えられる.

$$d_{i,j}^*(\mathbf{o}_{U \setminus I}) := \arg \max_{\mathbf{o} \in \mathcal{O}} \sum_{\mathbf{S}^{(1)}} \sum_{\mathbf{S}^{(2)}} \int_{\Theta} p(o(i, j) | \mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{o}_{U \setminus I}) d\boldsymbol{\theta} \quad (6)$$

### 1.3 事後分布の計算

(6) 式を計算するために事後分布  $p(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{o}_{U \setminus I})$  の計算が必要であるが、計算が困難である。そこである因子分解性を仮定し  $p(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{o}_{U \setminus I})$  との KL 情報量が最小になる近似事後分布  $q(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta})$  の計算を行う。

**命題 2.** 次の因子分解性を仮定する。

$$q(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}) = q(\mathbf{s}^{(1)})q(\mathbf{s}^{(2)})q(\boldsymbol{\theta}) \quad (7)$$

このとき、それぞれの近似事後分布は次式で計算される。

$$\log q(\mathbf{s}^{(1)}) = E_{q(\mathbf{s}^{(2)})q(\boldsymbol{\theta})}[\log p(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{o}_{U \setminus I})] \quad (8)$$

$$\log q(\mathbf{s}^{(2)}) = E_{q(\mathbf{s}^{(1)})q(\boldsymbol{\theta})}[\log p(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{o}_{U \setminus I})] \quad (9)$$

$$\log q(\boldsymbol{\theta}) = E_{q(\mathbf{s}^{(1)})q(\mathbf{s}^{(2)})}[\log p(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{o}_{U \setminus I})] \quad (10)$$

上式で計算を行うと、

$$q(\mathbf{s}^{(1)}) = C_1 \times \left\{ \prod_{(i,j) \in U \setminus I} \prod_{s_1=1}^{S1} (N_{s_1}(i,j))^{\mathbf{s}_s^{(1)}(i,j)} \right\} \times \left\{ \prod_{j=1}^w \prod_{s=1}^{S1} (p_s^{(1)})^{\mathbf{s}_s^{(1)}(1,j)} \right\} \times \left\{ \prod_{i=1}^h \prod_{j=2}^w \prod_{s=1}^{S1} \prod_{s'=1}^{S1} (t_{s,s'}^{(1)})^{\mathbf{s}_s^{(1)}(i,j-1)\mathbf{s}_{s'}^{(1)}(i,j)} \right\} \quad (11)$$

$$q(\mathbf{s}^{(2)}) = C_2 \times \left\{ \prod_{(i,j) \in U \setminus I} \prod_{s=1}^{S2} (N_2(i,j))^{\mathbf{s}_s^{(2)}(i,j)} \right\} \times \left\{ \prod_{i=1}^h \prod_{s=1}^{S2} (p_s^{(2)})^{\mathbf{s}_s^{(2)}(i,1)} \right\} \times \left\{ \prod_{j=1}^w \prod_{i=2}^h \prod_{s=1}^{S2} \prod_{s'=1}^{S2} (t_{s,s'}^{(2)})^{\mathbf{s}_s^{(2)}(i-1,j)\mathbf{s}_{s'}^{(2)}(i,j)} \right\} \quad (12)$$

$$q(\boldsymbol{\theta}) = C_3 \times \text{Dir}(\boldsymbol{\pi}^{(1)} | \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}) \times \text{Dir}(\boldsymbol{\pi}^{(2)} | \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(2)}) \times \left\{ \prod_{s=1}^{S1} \text{Dir}(\mathbf{a}_s^{(1)} | \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)}) \right\} \times \left\{ \prod_{s=1}^{S2} \text{Dir}(\mathbf{a}_s^{(2)} | \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)}) \right\} \quad (13)$$

$$\times \left\{ \prod_{s_1=1}^{S1} \prod_{s_2=1}^{S2} \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{s_1,s_2} | \tilde{\mathbf{m}}_{s_1,s_2}, (\tilde{\beta}_{s_1,s_2} \boldsymbol{\Lambda}_{s_1,s_2})^{-1}) \mathcal{W}(\boldsymbol{\Lambda}_{s_1,s_2} | \tilde{\mathbf{W}}_{s_1,s_2}, \tilde{\nu}_{s_1,s_2}) \right\} \quad (14)$$

(各パラメーターの更新式は付録参照)

## 1.4 準最適な決定関数

近似事後分布を用いて、準最適な決定の計算を行う。

**命題 3.** 予測分布の近似は多次元混合 t 分布になる。

$$\sum_{\mathbf{s}^{(1)}} \sum_{\mathbf{s}^{(2)}} \int_{\Theta} p(\mathbf{o}(i, j) | \mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{o}_{U \setminus I}) d\boldsymbol{\theta} \quad (15)$$

$$\simeq \sum_{s_1}^{S1} \sum_{s_2}^{S2} q(s_{s_1}^{(1)}(i, j)) q(s_{s_2}^{(2)}(i, j)) \text{St}(\mathbf{o}(i, j) | \tilde{\mathbf{m}}_{s_1, s_2}, L_{s_1, s_2}, \tilde{\nu}_{s_1, s_2} + 1 - D) \quad (16)$$

ただし、

$$L_{s_1, s_2} = \frac{\tilde{\beta}_{s_1, s_2}(\tilde{\nu}_{s_1, s_2} + 1 - D)}{1 + \tilde{\beta}_{s_1, s_2}} \quad (17)$$

**命題 4.** 準最適な決定は、

$$d_{i, j}^*(\mathbf{o}_{U \setminus I}) := \tilde{\mathbf{m}}_{s_k^{(1)}, s_l^{(2)}} \quad (18)$$

ただし、

$$k, l := \arg \max_{s_1, s_2 \in \mathbb{N}} q(s_{s_1}^{(1)}(i, j)) q(s_{s_2}^{(2)}(i, j)) \quad (19)$$

## 2 実験結果

### 2.1 人工データでの実験概要

- 画像サイズ  $400 \times 400$
- 変分ベイズの計算 50 回
- 修復領域  $10 \times 100$
- 状態数  $S1 = 2, S2 = 2$
- 目的
  - － 色の境目を認識できるか確かめる.
  - － 曲線を認識できるか確かめる.

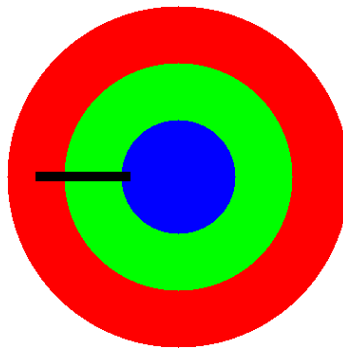


図 1 Input 画像

### 2.2 実験結果

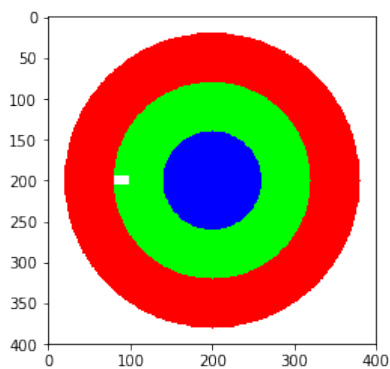


図 2 Output 画像

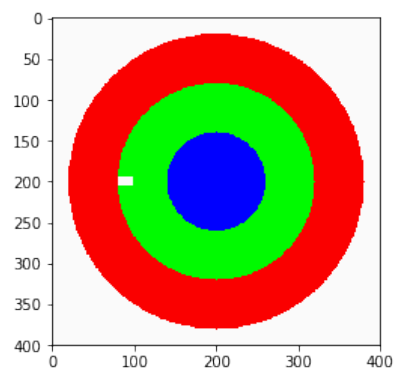


図 3 特定の状態に出力色を定めて出力した画像

## 参考文献

- [1] Christopher M. Bishop. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006.
- [2] 慶介熊木, 吉彦南角, 恵一徳田. 拡張分離型格子 hmm に基づく顔画像認識. 電子情報通信学会技術研究報告. PRMU, パターン認識・メディア理解, Vol. 110, No. 97, pp. 4550, jun 2010.



## 付録 A 更新式

$$N_{s_1}(i, j) := \prod_{s_2=1}^{S2} E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)] E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log \mathcal{N}(\mathbf{o}(i, j) | \boldsymbol{\mu}_{s_1, s_2}, \boldsymbol{\Lambda}_{s_1, s_2})] \quad (20)$$

$$= \prod_{s_2=1}^{S2} q(s_{s_2}(i, j)) \left\{ -\frac{D}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \psi \left( \frac{\tilde{\nu}_{s_1, s_2} + 1 - i}{2} \right) + 3 \log 2 + \log |\tilde{\nu}_{s_1, s_2} \tilde{\mathbf{W}}_{s_1 s_2}| \right\} \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{o}(i, j)^\top \left( \tilde{\nu}_{s_1, s_2} \tilde{\mathbf{W}}_{s_1 s_2} \right) \mathbf{o}(i, j) - \tilde{m}_{s_1, s_2}^\top \left( \tilde{\nu}_{s_1, s_2} \tilde{\mathbf{W}}_{s_1 s_2} \right) \mathbf{o}(i, j) + \frac{1}{2} \tilde{m}_{s_1, s_2}^\top \left( \tilde{\nu}_{s_1, s_2} \tilde{\mathbf{W}}_{s_1 s_2} \right) \tilde{m}_{s_1, s_2}^\top \right\} \quad (22)$$

$$N_{s_2}(i, j) := \prod_{s_1=1}^{S1} E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)] E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log \mathcal{N}(\mathbf{o}(i, j) | \boldsymbol{\mu}_{s_1, s_2}, \boldsymbol{\Lambda}_{s_1, s_2})] \quad (23)$$

$$= \prod_{s_1=1}^{S1} q(s_{s_1}(i, j)) \left\{ -\frac{D}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \psi \left( \frac{\tilde{\nu}_{s_1, s_2} + 1 - i}{2} \right) + 3 \log 2 + \log |\tilde{\nu}_{s_1, s_2} \tilde{\mathbf{W}}_{s_1 s_2}| \right\} \quad (24)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{o}(i, j)^\top \left( \tilde{\nu}_{s_1, s_2} \tilde{\mathbf{W}}_{s_1 s_2} \right) \mathbf{o}(i, j) - \tilde{m}_{s_1, s_2}^\top \left( \tilde{\nu}_{s_1, s_2} \tilde{\mathbf{W}}_{s_1 s_2} \right) \mathbf{o}(i, j) + \frac{1}{2} \tilde{m}_{s_1, s_2}^\top \left( \tilde{\nu}_{s_1, s_2} \tilde{\mathbf{W}}_{s_1 s_2} \right) \tilde{m}_{s_1, s_2}^\top \right\} \quad (25)$$

$$\log p_s^{(1)} := E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log \pi_s] \quad (26)$$

$$= \psi(\tilde{\eta}_s^{(1)}) - \psi \left( \sum_{s=1}^{S1} \tilde{\eta}_s^{(1)} \right) \quad (27)$$

$$\log p_s^{(2)} := E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log \pi_s] \quad (28)$$

$$= \psi(\tilde{\eta}_s^{(2)}) - \psi \left( \sum_{s=1}^{S2} \tilde{\eta}_s^{(2)} \right) \quad (29)$$

$$\log t_{s, s'}^{(1)} := E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log a_{s, s'}^{(1)}] \quad (30)$$

$$= \psi(\tilde{\epsilon}_{s, s'}^{(1)}) - \psi \left( \sum_{s'=1}^{S1} \tilde{\epsilon}_{s, s'}^{(1)} \right) \quad (31)$$

$$\log t_{s, s'}^{(2)} := E_{q(\boldsymbol{\theta})}[\log a_{s, s'}^{(2)}] \quad (32)$$

$$= \psi(\tilde{\epsilon}_{s, s'}^{(2)}) - \psi \left( \sum_{s'=1}^{S2} \tilde{\epsilon}_{s, s'}^{(2)} \right) \quad (33)$$

$$\hat{\eta}_s^{(1)} := \sum_{i=1}^h E_{q(s^{(1)})}[s_s^{(1)}(i, 1)] + \eta_s^{(1)} \quad (34)$$

$$= \sum_{i=1}^h q(\mathbf{s}_s^{(1)}(i, 1)) + \eta_s^{(1)} \quad (35)$$

$$\hat{\eta}_s^{(2)} := \sum_{j=1}^w E_{q(s^{(2)})}[s_s^{(2)}(1, j)] + \eta_s^{(2)} \quad (36)$$

$$= \sum_{j=1}^w q(\mathbf{s}_s^{(2)}(1, j)) + \eta_s^{(2)} \quad (37)$$

$$\hat{\epsilon}_{s,s'}^{(1)} := \sum_{i=1}^h \sum_{j=2}^w E_{q(\mathbf{s}^{(1)})}[\mathbf{s}_s(i, j-1) \mathbf{s}'_s(i, j)] + \epsilon_{s,s'}^{(1)} \quad (38)$$

$$= q(\mathbf{s}_{s'}(i, j)^{(1)} \mathbf{s}_s(i, j-1)^{(1)}) + \epsilon_{s,s'}^{(1)} \quad (39)$$

$$\hat{\epsilon}_{s,s'}^{(2)} := \sum_{j=1}^w \sum_{i=2}^h E_{q(\mathbf{s}^{(2)})}[\mathbf{s}_s(i-1, j) \mathbf{s}'_s(i, j)] + \epsilon_{s,s'}^{(2)} \quad (40)$$

$$= q(\mathbf{s}_{s'}(i, j)^{(2)} \mathbf{s}_s(i-1, j)^{(2)}) + \epsilon_{s,s'}^{(2)} \quad (41)$$

$$\tilde{\beta}_{s_1, s_2} := \sum_{(i,j) \in U \setminus I} E_{q(\mathbf{s}^{(1)})}[\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)] E_{q(\mathbf{s}^{(2)})}[\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)] + \beta_{s_1, s_2} \quad (42)$$

$$= q(\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)) q(\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)) + \beta_{s_1, s_2} \quad (43)$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_{s_1, s_2} := \frac{1}{\tilde{\beta}_{s_1, s_2}} \left( \sum_{(i,j) \in U \setminus I} E_{q(\mathbf{s}^{(1)})}[\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)] E_{q(\mathbf{s}^{(2)})}[\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)] \mathbf{o}(i, j) + \beta_{s_1, s_2} \mathbf{m}_{s_1, s_2} \right) \quad (44)$$

$$= \frac{1}{\tilde{\beta}_{s_1, s_2}} \left( \sum_{(i,j) \in U \setminus I} q(\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)) q(\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)) \mathbf{o}(i, j) + \beta_{s_1, s_2} \mathbf{m}_{s_1, s_2} \right) \quad (45)$$

$$\tilde{\nu}_{s_1, s_2} := \sum_{(i,j) \in U \setminus I} E_{q(\mathbf{s}^{(1)})}[\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)] E_{q(\mathbf{s}^{(2)})}[\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)] + \nu_{s_1, s_2} \quad (46)$$

$$= q(\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)) q(\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)) + \nu_{s_1, s_2} \quad (47)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{s_1, s_2}^{-1} := \left( \sum_{(i,j) \in U \setminus I} E_{q(\mathbf{s}^{(1)})}[\mathbf{s}_{s_1}^{(1)}(i, j)] E_{q(\mathbf{s}^{(2)})}[\mathbf{s}_{s_2}^{(2)}(i, j)] \mathbf{o}(i, j) \mathbf{o}(i, j)^\top \right) + \beta_{s_1, s_2} \mathbf{m}_{s_1, s_2} \mathbf{m}_{s_1, s_2}^\top - \tilde{\beta}_{s_1, s_2} \tilde{\mathbf{m}}_{s_1, s_2} \tilde{\mathbf{m}}_{s_1, s_2}^\top + \mathbf{W}_{s_1}^{-1} \quad (48)$$