

### 3 単純な古典系の複雑な振舞 — カオス (中西 秀, 能勢 修一, 高野 宏)

非線形の常微分方程式系で記述される多くの系において、カオスと呼ばれる不規則な運動が広く見られることが知られている。カオスと呼ばれる運動の特徴として、系の状態を表す変数の初期状態でのわずかの違いが、時間とともに指数関数的に大きくなることもある。このため、決定論的に記述される系であるにもかかわらず、初期状態を完全に正確に知り得ない場合、後の時刻における系の状態を予測することができなくなってしまう。

この章では、まず常微分方程式を数値的に解く方法について学ぶ。次に、簡単な物理系として減衰のある単振り子に振動的外力を加えた場合を考え、その運動方程式を数値的に解いてみる。そして、この系が、パラメータの値によって、周期運動やカオスなどの様々な振る舞いを示すことを見る。

#### 3.1 常微分方程式の数値解法

まず、1 階の常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

を初期条件  $x(0) = x_0$  の下で解くこと、即ち、微分方程式を  $t = 0$  から積分し  $x$  を  $t$  の関数として求めることを考える。ここで、 $f(t, x)$  は与えられた関数である。数値的に解く場合、 $t$  のとびとびの値 (離散化した  $t$  の値)

$$t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, \dots$$

に対する  $x(t)$  の値を求めることが問題となる。ここで、 $\tau$  はある“小さな”量で、以下では、

$$t_n \equiv n\tau, \quad x_n \equiv x(t_n)$$

とする。以下では、初期値  $x_0$  と  $t_0$  から  $x_1$  を求め、 $x_1$  と  $t_1$  から  $x_2$  を求め、 $\dots$ 、 $x_i$  と  $t_i$  から  $x_{i+1}$  を求め、 $\dots$ 、ということを繰り返して行くことを考える。

最も簡単な方法は、 $x_{i+1} = x(t_i + \tau)$  を Taylor 展開した式

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\equiv x(t_i + \tau) \\ &= x(t_i) + \tau \frac{dx}{dt}(t_i) + O(\tau^2) \\ &= x_i + \tau f(t_i, x_i) + O(\tau^2) \end{aligned}$$

において  $\tau^2$  以下の項を無視し

$$x_{i+1} = x_i + \tau f(t_i, x_i) \quad (2)$$

を用いて解く方法である。この方法をオイラー法 (Euler's method) という。

ある  $t = T$  における  $x$  をオイラー法で求めるとする。 $T = N\tau$  とすると、(2) 式を  $N$  回用いることになる。(2) 式は  $\tau^2$  以下の項を無視しているので、(2) 式を 1 回用いるたびに  $O(\tau^2)$  の誤差が生じる。従って、 $t = T$  における  $x$  を求めたときには、 $\tau^2 \times N = \tau^2 \times \frac{T}{\tau} = T\tau$  に比例した誤差が生じると考えられる。このように、オイラー法では、 $\tau$  を小さくしても誤差は  $\tau$  の 1 次でしか小さくならず、よい精度で数値解を求めるには適していない。

誤差が  $\tau$  の 2 次で小さくなるようにオイラー法を改良した方法として、修正オイラー法 (Modified Euler's method) がある。修正オイラー法は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + k_1 \\ \begin{cases} k_0 &= \tau f(t_i, x_i) \\ k_1 &= \tau f(t_i + \frac{\tau}{2}, x_i + \frac{k_0}{2}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式は  $\tau$  の 2 次まで正しく、ある  $t = T$  における  $x$  を求めたとき  $\tau^3 \times \frac{T}{\tau} = T\tau^2$  に比例した誤差が生じると考えられる。このことは次のようにして示すことができる。

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + (\gamma_0 k_0 + \gamma_1 k_1) \\ \begin{cases} k_0 &= \tau f(t_i, x_i) \\ k_1 &= \tau f(t_i + \alpha\tau, x_i + \beta k_0) \end{cases} \end{aligned}$$

の形で  $x(t_i + \tau) \approx x_{i+1}$  が  $\tau$  の 2 次迄正しくなるように (誤差が  $O(\tau^3)$  になるように)  $\alpha, \beta, \gamma_0, \gamma_1$  を選ぶことを考える。

$$\begin{aligned} x(t_i + \tau) &= x(t_i) + \tau \frac{dx}{dt}(t_i) + \frac{1}{2}\tau^2 \frac{d^2x}{dt^2}(t_i) + O(\tau^3) \\ &= x(t_i) + \tau f(t_i, x(t_i)) + \frac{1}{2}\tau^2 \frac{d}{dt_i} f(t_i, x(t_i)) + O(\tau^3) \\ &= x(t_i) + \tau f(t_i, x(t_i)) + \frac{1}{2}\tau^2 \left[ \frac{\partial}{\partial t_i} f(t_i, x(t_i)) + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(t_i, x(t_i)) \right\} \frac{d}{dt_i} x(t_i) \right] + O(\tau^3) \\ &= x(t_i) + \tau f(t_i, x(t_i)) + \frac{1}{2}\tau^2 \left[ \frac{\partial}{\partial t_i} f(t_i, x(t_i)) + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(t_i, x(t_i)) \right\} f(t_i, x(t_i)) \right] + O(\tau^3) \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} k_0 &= \tau f(t_i, x_i) \\ k_1 &= \tau f(t_i, x_i) + \alpha\tau^2 \frac{\partial}{\partial t_i} f(t_i, x_i) + \beta k_0 \tau \frac{\partial}{\partial x_i} f(t_i, x_i) + O(\tau^3) \\ &= \tau f(t_i, x_i) + \alpha\tau^2 \frac{\partial}{\partial t_i} f(t_i, x_i) + \beta\tau^2 f(t_i, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} f(t_i, x_i) + O(\tau^3) \end{aligned}$$

より、

$$x_{i+1} = x_i + \tau(\gamma_0 + \gamma_1)f(t_i, x(t_i)) + \gamma_1\tau^2 \left[ \alpha \frac{\partial}{\partial t_i} f(t_i, x_i) + \beta f(t_i, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} f(t_i, x_i) \right] + O(\tau^3)$$

となる。これより、 $x(t_i + \tau) \approx x_{i+1}$  が  $\tau$  の 2 次迄正しくなるための条件

$$\gamma_0 + \gamma_1 = 1$$

$$\gamma_1 \alpha = \gamma_1 \beta = \frac{1}{2}$$

を得る。修正オイラー法は  $\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1, \alpha = \beta = 1/2$ , に対応している。

実際の数値計算では、さらに改良された、ルンゲ・クッタ法 (Runge-Kutta method) と呼ばれる方法がよく用いられる。それは、

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad (4)$$

$$\begin{cases} k_0 &= \tau f(t_i, x_i) \\ k_1 &= \tau f(t_i + \tau/2, x_i + k_0/2) \\ k_2 &= \tau f(t_i + \tau/2, x_i + k_1/2) \\ k_3 &= \tau f(t_i + \tau, x_i + k_2) \end{cases} \quad (5)$$

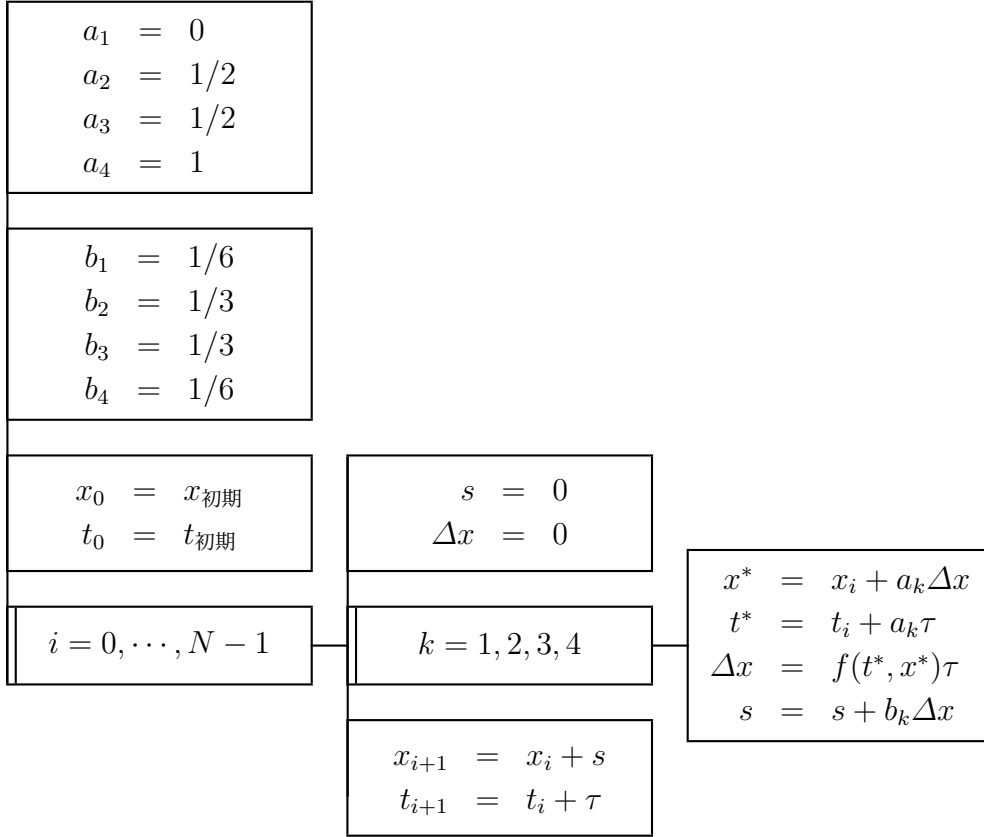
で与えられる。一般に

$$x_{i+1} = x_i + \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_n k_n \quad (6)$$

$$k_n = \tau f(t_i + \alpha_n \tau, x_i + \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n,m} k_m), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

の形で  $x(t_i + \tau) \approx x_{i+1}$  が  $\tau$  の  $M$  次迄正しくなるようにとったものを  $N$  段  $M$  次の Runge-Kutta 型公式という。上で紹介した (4), (5) 式は 4 段 4 次の公式である。

ルンゲ・クッタ法 (4), (5) 式を  $N$  ステップ計算するアルゴリズムは PAD を用いて次のように表すことができる。



これまでは1変数  $x(t)$  に対する1階の常微分方程式を考えてきた。 $n$  変数  $x^{(m)}(t)$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) に対する1階の常微分方程式

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = f^{(m)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

に対しても、これまでの  $x(t)$ ,  $f(t, x)$  を

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f^{(1)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \\ f^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \\ \vdots \\ f^{(n)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \end{pmatrix} \quad (9)$$

のようにベクトル  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  に拡張すれば同様に取り扱うことができる。前出の PAD では、ベクトルの代入式が  $n$  個の成分ごとの代入式を表すことに注意すること。

一方、1変数  $x(t)$  に対する  $n$  階の常微分方程式

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}) \quad (10)$$

の場合は、

$$x^{(m)} = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

とおくことにより、 $n$  変数  $x^{(m)}(t)$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) に対する 1 階の常微分方程式

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = x^{(2)} \quad (12)$$

$$\frac{dx^{(2)}}{dt} = x^{(3)} \quad (13)$$

$$\vdots \quad (14)$$

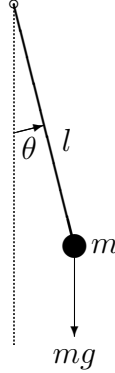
$$\frac{dx^{(n-1)}}{dt} = x^{(n)} \quad (15)$$

$$\frac{dx^{(n)}}{dt} = f(t, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \quad (16)$$

に書き直すことができる。多変数の高階常微分方程式も同様に多変数の 1 階常微分方程式に書き直すことができ、前述の数値解法を適用することができる。

### 3.2 振動的外力を加えた減衰単振り子

図のような、長さ  $l$  の棒の先に質量  $m$  の質点がついた単振り子を考える。重力加速度を  $g$  とする。



これに、速度に比例した抵抗と三角関数的な外力 (角振動数  $\omega_e$ ) が加わった場合、運動方程式は、

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + mg \sin \theta = F \cos(\omega_e t) \quad (17)$$

で与えられる。抵抗と外力のないときの微小振動の角振動数  $\sqrt{g/l}$  の逆数を時間の単位に取り、無次元化した時間  $\hat{t} = t\sqrt{g/l}$  を用いると、この方程式は

$$\frac{d^2\theta}{d\hat{t}^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\theta}{d\hat{t}} + \sin \theta = G \cos(\Omega \hat{t}) \quad (18)$$

と書ける。 $1/Q$  は抵抗の強さ、 $G$  は外力の強さ、 $\Omega$  は外力の角振動数を表す無次元のパラメーターである。 $1/Q = 0$ ,  $G = 0$  の時、(18) 式は単振り子の運動方程式

$$\frac{d^2\theta}{d\hat{t}^2} + \sin \theta = 0 \quad (19)$$

になる。以後、 $\hat{t}$  を  $t$  と書くことにする。

### 3.3 相空間、保存系、散逸系、ポアンカレ断面

#### 3.3.1 相空間

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = f^{(m)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \quad m = 1, 2, \dots, n$$

のように、右辺に  $t$  を陽に含まない微分方程式系 (自励的 (autonomous) 微分方程式系と呼ぶ) に対して  $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  の空間を相空間と呼ぶ。ある初期条件に対するこの自励的微分方程式系の解  $(x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n)}(t))$  は、相空間内の軌道で表される。

単振り子の運動方程式 (19) 式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\sin\theta$$

の場合、 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  として

$$\frac{d\omega}{dt} = -\sin\theta \quad (20)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (21)$$

のように書けるので、 $(\omega, \theta)$  の空間が相空間となる。ただし、 $\theta$  は区間  $(-\pi, \pi]$  の範囲で、周期的境界条件で考えるものとする。

振動的外力の加わった減衰振り子

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{1}{Q} \frac{d\theta}{dt} - \sin\theta + G \cos\Omega t$$

の場合、 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ,  $\phi = \Omega t$  として

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{Q}\omega - \sin\theta + G \cos\phi \quad (22)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (23)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega \quad (24)$$

のように書けるので、 $(\omega, \theta, \phi)$  の空間が相空間となる。ただし、 $\theta$  は区間  $(-\pi, \pi]$  の範囲で、 $\phi$  は区間  $[0, 2\pi)$  の範囲で、周期的境界条件で考えるものとする。

自励的微分方程式系で記述される系がカオスを示すためには、相空間の次元 (独立変数の数) が 3 以上で微分方程式が非線形項を持つことが必要であることが知られている。これより、(20),(21) 式の単振り子の場合は相空間の次元が 2 なのでカオスを示さないことがわかる。これに対し、(22),(23),(24) 式の振動的外力をうけた減衰単振り子の場合は、相空間の次元が 3 で方程式に非線形項があるので、カオスを示す可能性があることがわかる。

### 3.3.2 保存系、散逸系

相空間中の体積が運動によって変わらない系を保存系、減少する系を散逸系という。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

の場合、相空間中の体積  $V$  を考え、その表面を  $S$  とすると、単位時間当りの体積の変化は

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV$$

で与えられる。従って、 $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$  ならば系は保存系であり、 $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$  ならば系は散逸系であることがわかる。

(20), (21) 式の単振り子の場合は

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial \omega}(-\sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \omega = 0$$

より保存系、(22),(23),(24) 式の振動的外力をうけた減衰単振り子の場合は

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial \omega}(-\frac{1}{Q}\omega - \sin \theta + G \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} \omega + \frac{\partial}{\partial \phi} \Omega = -\frac{1}{Q} < 0$$

より散逸系となる。

### 3.3.3 アトラクター

自励的微分方程式系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

を考える。相空間中の集合  $D$  が存在し、その集合中の任意の 1 点  $\mathbf{x}_0$  から時刻  $t = 0$  に出発した微分方程式の解  $\mathbf{x}(t)$  が  $t \rightarrow \infty$  である集合  $A$  に収束していくとき、 $A$  をアトラクター (attractor)、 $D$  を引き込み領域 (basins of attraction) と呼ぶ。

例えば、減衰調和振動子

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0$$

を考える。  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  として

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{Q}\omega - \theta \quad (25)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (26)$$

のように書ける。  $t=0$  で  $\begin{pmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$  から出発した解は、

$$\begin{pmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} \lambda_+ e^{\lambda_+ t} & \lambda_- e^{\lambda_- t} \\ e^{\lambda_+ t} & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 - \lambda_- \theta_0 \\ -\omega_0 + \lambda_+ \theta_0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。ただし、

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} \right]$$

である。  $Q > 0$  ならば  $\text{Re}\lambda_{\pm} < 0$  であるので、  $\begin{pmatrix} \omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  がアトラクターで、全相空間が引き込み領域であることがわかる。

同様に、振動的外力を受けた減衰調和振動子

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\theta}{dt} + \theta = G \cos(\Omega t)$$

を考える。この場合、  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ,  $\phi = \Omega t$  として

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{Q}\omega - \theta + G \cos \phi \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Omega \end{aligned}$$

のように書ける。アトラクターは

$$\begin{pmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{G\Omega}{(-\Omega^2 + 1)^2 + (\Omega/Q)^2} [ -(-\Omega^2 + 1) \sin \Omega t + (\Omega/Q) \cos \Omega t ] \\ \frac{G}{(-\Omega^2 + 1)^2 + (\Omega/Q)^2} [ (-\Omega^2 + 1) \cos \Omega t + (\Omega/Q) \sin \Omega t ] \\ \Omega t \end{pmatrix} \quad (27)$$

のように外力と同じ角振動数の周期運動で与えられる。この軌道は

$$\begin{pmatrix} \omega(\phi) \\ \theta(\phi) \end{pmatrix} = \frac{G}{\sqrt{(-\Omega^2 + 1)^2 + (\Omega/Q)^2}} \begin{pmatrix} -\Omega \sin(\phi - \delta) \\ \cos(\phi - \delta) \end{pmatrix} \quad (28)$$



ただし

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \frac{G}{\sqrt{(-\Omega^2 + 1)^2 + (\Omega/Q)^2}} \begin{pmatrix} -\Omega^2 + 1 \\ \Omega/Q \end{pmatrix}$$

のように表され、 $\phi$  の値が 0 から  $2\pi$  まで変化するにつれ  $(\omega, \theta)$  面上の楕円を一周するような、相空間内の一本の螺旋状の曲線であることがわかる。

系がカオスを示すような場合、非常に複雑なアトラクターが現れることが知られている。

### 3.3.4 ポアンカレ断面

相空間中のアトラクターの軌道を横切るある平面  $S$  を考え、その平面を軌道がある一定の方向に通過する点を  $P_0, P_1, P_2, \dots$  のようにプロットする。これをアトラクターのポアンカレ断面という。例えば、上記の振動的外力をうけた減衰調和振動子の場合に、 $(\omega, \theta, \phi)$  の相空間中の  $\phi = 0$  の面を  $S$  とすると、(27) 式で  $t = 2\pi n/\Omega$  の時刻での  $(\omega(t), \theta(t))$  の値をプロットしたものがポアンカレ断面となる。この場合、

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{G}{(-\Omega^2 + 1)^2 + (\Omega/Q)^2} \begin{pmatrix} \Omega^2/Q \\ -\Omega^2 + 1 \end{pmatrix}$$

の一点がポアンカレ断面となる。また、別の  $\phi = \phi_P = \text{一定}$  の面を  $S$  とすると、(28) 式で  $\phi = \phi_P$  とした点がポアンカレ断面となる。

ポアンカレ断面を見ることにより、相空間でのアトラクターの軌道そのものを見るより単純化して、アトラクターの性質を調べることができる。

## 3.4 振動的外力を加えた減衰単振り子の数値計算

以下では、振動的外力を加えた減衰単振り子の運動方程式 (22), (23), (24) 式の数値計算を行ない、その振る舞いを見てみる。参考文献 1) に従って、 $Q, \Omega$  はそれぞれ  $Q = 2, \Omega = 2/3$  に固定し  $G$  のみを

- (a)  $G = 0.9$
- (b)  $G = 1.07$
- (c)  $G = 1.15$
- (d)  $G = 1.35$
- (e)  $G = 1.45$
- (f)  $G = 1.47$
- (g)  $G = 1.5$

のように変化させる。以下に、数値計算で得られたアトラクターに関して、相空間  $(\phi, \theta, \omega)$  での軌道、それを  $(\theta, \omega)$  面に射影したもの、 $\phi = 0$  でのポアンカレ断面を示す。これらより、

- (a) 外力と同じ周期の周期運動
- (b) 外力の倍周期の周期運動
- (c) カオスの運動
- (d) 外力と同じ周期の周期運動
- (e) 外力の倍周期の周期運動
- (f) 外力の 4 倍周期の周期運動
- (g) カオスの運動

という振る舞いがわかる。

この計算で (c) および (g) の場合は、振り子の軌道が非常に複雑になっていることがわかる。振動的な外力を加えた減衰単振り子という簡単なシステムに、このような複雑な運動が見られるということはある意味で非常な驚きである。このような現象の存在自体は古くから示唆されていた。しかし、それがカオス (chaos) と呼ばれ広く一般に認識されるようになったのは、計算機が発達し数値シミュレーションが容易に行えるようになってからである。現在では、同様な現象が自然界に広く見られることが知られている。

カオス軌道のアトラクターは、そのポアンカレ断面を見てもわかるように、非常に複雑な構造をしており、ストレンジ・アトラクター (Strange Attractor) と呼ばれている。このようなカオス軌道の“長時間に渡る予想は不可能である”と言われている。これは、カオス軌道では、隣接する軌道が時間の経過とともに指数関数的に離れて行くためである。

### 3.5 補足: プログラムから X ウィンドウ上に図形を描く

`/home/kyozai/jy/comp-phys/samples/sec3/{pendx.f90,xsub.c}` というプログラムは、X ウィンドウ上に振り子のアニメーションを描きます。以下では、この使い方について説明します。

#### 3.5.1 リモートマシンから X ウィンドウを使う

(注意 1) 2020 年度以降、リモートの計算サーバーに代わり、ローカルサーバーで全ての実習計算を行う方式に変更になったため、この節の設定は不要になりました。X-プロトコル (画像転送) の理解のために下記の文章を残してあります。それ以降の文章に関しては、リモートサーバー (ks3...) をローカルサーバーに置き換えて読んでください。

(注意 2) 遠隔授業で手元の PC が Linux (UNIX) 系の場合には、リモートサーバーを ITC の計算機、ローカルサーバーを手元 PC として読み替えて下さい。

(注意 3) 手元の PC が Windows など、X プロトコルを受け付けない場合は、別途 X サーバーをインストールした後、(注意 2) にしたがって下さい。

(注意 4) 手元の PC で、この節のプログラムを実行する場合には、X11 ライブラリが必要になります。Linux でも、標準では搭載されていない場合もありますので、別途 install する必要がある場合があります。

理工学 ITC のワークステーションルームからリモートログインして計算サーバー (ks3) を使っているとき、計算サーバーで走っているプログラムが理工学 ITC のワークステーションの X ウィンドウの画面上に図形を描くことができます。そのためには、次のような準備が必要です。

まず、理工学 ITC のワークステーション上で X ウィンドウを起動します。このとき、2つの xterm(kterm) と書かれたウィンドウから理工学 ITC のワークステーションを使える状態 (プロンプトの出た状態) になっているはずです。次に、そのうちの 1つの xterm ウィンドウから計算サーバーにリモートログインします。これによって、一方の xterm ウィンドウには理工学 ITC のワークステーションのプロンプトが、もう一方の xterm ウィンドウには計算サーバーのプロンプトが出ている状態になります。

旧来の方法(セキュリティ上の問題があるため、今ではほとんど使われていません)

ここでは X Window 開発時からの標準的な設定方法を紹介します。ssh(slogin)等を利用している場合には、この項で基本的な remote 間通信手順を理解した後で、次項を参照してください。

理工学 ITC のワークステーション (WS) のプロンプトの出ているウィンドウをアクティブ・ウィンドウにして、

```
% xhost 計算用ワークステーションのホスト名↵
```

とタイプします。これにより、WS に対して、理工学 ITC の WS の X ウィンドウの使用を許可します。次に、計算サーバーのプロンプトの出ているウィンドウをアクティブ・ウィンドウにして、

```
% setenv DISPLAY 現在のワークステーションのホスト名:0.0↵
```

とタイプします。これにより、計算用 WS 上で X ウィンドウの画面に表示を行なう使うプログラムを走らせたとき、理工学 ITC の WS の X ウィンドウの画面に対して表示を行なうようになります。ここで、理工学 ITC の WS のホスト名は理工学 ITC の WS のプロンプトの出ているウィンドウをアクティブ・ウィンドウにして、

```
% hostname↵
```

とタイプすることにより、ウィンドウ画面上に表示されます。

#### ssh(slogin) 使用時の設定

ssh(slogin) は、通信を暗号化してネットワーク上のセキュリティを向上させるプログラム群です。X window システム使用時には、通常のテキスト通信 (xterm 等

を使用しているときに keyboard から入力するような信号) の他に、X window の制御に必要な信号 (例えば、新しく開く画面のサイズ等、この形式を X protocol と呼びます) を remote 並びに local host の間で通信する必要があります。ssh(slogin) は、これら 2 種類の通信をどちらも暗号化して通信することができます。

ssh(slogin) を使用している (slogin で remote ホストに login) 場合には、slogin プログラムが、(標準設定にもよりますが) ディスプレイを適切に設定してくれます。slogin でのディスプレイ設定は、セキュリティ上の理由から、通常のディスプレイ設定とは異なります。というわけで、slogin を使用している場合には、xhost 並びに DISPLAY 変数によるディスプレイ設定は行わないでください。

ITC から計算サーバーに slogin する場合には、標準設定でディスプレイが設定されるようです。但し、login 時設定のカスタマイズによっては、動作が異なる場合があります。

初期設定等により、うまく作動しない場合は、

```
% slogin -X ユーザー名@ホスト名↵
```

としてみてください。上の -X オプションは、X protocol の ssh による転送を許可するものです。version によっては、X クライアントからの操作を自由に許可する -Y オプションが使用できる場合もあり、アプリケーションによってはこのオプションを指定しなければならない場合もありえますが、キーボードのストロークデータが盗まれる可能性が生じる等、セキュリティ上は危険度が増します。因みに、-x オプションは、ssh による X protocol 転送を行わない設定になります。

### 3.5.2 サンプルプログラムのコンパイル、リンク

サンプルプログラムは /home/kyozai/jy/comp-phys/samples/sec3 というディレクトリの下で pendx.f90 と xsub.c からなっています。これらは、計算用 WS の ks3.educ.cc.keio.ac.jp で使うためのプログラムです。pendx.f90 の方は、メインプログラムで xsub.c の方は、FORTRAN で書かれたメインプログラムから X ウィンドウ上に図形を描くためのサブルーチンで C で書かれています。これらのファイルを自分のディレクトリにコピーします。まず xsub.c をコンパイルします。

```
% gcc -I/usr/include/X11 -c xsub.c↵
```

とタイプすることにより、xsub.c がコンパイルされ、オブジェクト・ファイル xsub.o が作られます。次に pendx.f90 をコンパイルします。

```
% gfortran -c -fno-underscoring pendx.f90↵
```

とタイプすることにより、pendx.f90 がコンパイルされ、オブジェクト・ファイル pendx.o が作られます。最後に、これらをリンクします。

```
% gfortran pendx.o xsub.o -lX11
```

とタイプすることにより、pendx.o と xsub.o および X ウィンドウ用のサブルーチンがリンクされ実行可能ファイル a.out が作られます。pendx.f90 のコンパイルと最後のリンクは

```
% f90 -fno-underscoring pendx.f90 xsub.o -lX11
```

とタイプすることにより一度に行なうこともできます。ここで、'-fno-underscoring' というオプションは、Linux 上の gfortran コンパイラで、C 言語プログラムと FORTRAN プログラムを混在させて実行するのに必要なオプションです。このように 2 言語以上のソースプログラムをコンパイル&リンクして実行するには、コンパイラシステムによって異なる対応が必要になる場合が有りますので、詳細についてはマニュアルで確認して下さい。

### 3.5.3 サンプルプログラムの説明

- pendx.f90 は ginit, gcls, gline, gdraw という 4 つのサブルーチンを使って X ウィンドウにグラフを書いています。
- X ウィンドウをプログラム中で使い始めるために

```
call ginit(wname)
```

を実行します。これによって画面の左上にウィンドウが作られます。wname は、ウィンドウのタイトルを表す文字列です。背景は黒色で白色の縁がついています。ウィンドウは左上が (0,0) 右下が (639,479) の整数値の座標の点からなっています。 $x$  座標は横方向で右にいくほど座標値が増えます。 $y$  座標は縦方向で下にいくほど座標値が増えます。

- 画面上に直線を描くには

```
call gline(ix1, iy1, ix2, iy2, icol)
```

を実行します。ここで、ix1, iy1, ix2, iy2, icol は 4 バイトの整数型の変数または定数です。(ix1, iy1) と (ix2, iy2) は直線の両端の座標を、icol は 0 から 7 までの値をとり、直線を描く色の番号を表します。色番号と色は

色番号	0	1	2	3	4	5	6	7
色	黒	青	赤	紫	緑	水	黄	白

のように対応します。

- pendx.f90 中では使っていませんが、画面上に点を描くには、

```
call gpoint(ix1, iy1, icol)
```

を実行します。ここで、ix1、iy1、icol は 4 バイトの整数型の変数または定数です。(ix1, iy1) は点の座標を、icol は 0 から 7 までの値を取り、点を描く色の番号を表します。

- 描いた画面を消去するには

```
call gcls
```

を実行します。これにより、すべての点が黒になります。

- 直接画面に多くの直線を描くと、描いている途中が表示されるため、画面が見づらくなります。そのため gline は実際には表示されないメモリー上の画面に直線を描いています。同様に gpoint は実際には表示されないメモリー上の画面に点を描いています。gcls は実際には表示されないメモリー上の画面を消去しています。多くの直線を描き終えた後、メモリーの内容を表示画面にコピーして、表示するためには、

```
call gdisp
```

を実行します。

- これらのサブルーチンは xsub.c の中で定義されています。これは、本来 C で書かれた X ウィンドウを使うためのライブラリを FORTRAN から使うための便宜的なサブルーチンで一般性のあるものではありません。C 言語の使える人は自分でこれらのサブルーチンを改良してみてください。
- 現在のバージョンの gline , gpoint は色番号が適切な範囲にあるかチェックしていませんので、サブルーチンを呼ぶ側で注意してください。

### 3.6 参考文献

- 1) G.L. Baker and J.P. Gollub: *Chaotic dynamics: an introduction*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1990). 邦訳, G.L. ベイカー, J.P. グラブ著, 松下貢訳: “カオス力学入門 – 基礎とシミュレーション” (啓学出版, 東京, 1992).
- 2) 森正武: “FORTRAN77 数値計算プログラミング (増補版)” (岩波書店, 東京, 1986).
- 3) 木下凌一: “X-Window Ver.11 プログラミング [第 2 版]”, (日刊工業新聞社, 東京, 1993).

### 3.7 課題

#### 3-A. 調和振動子の運動方程式

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -x \\ \frac{dx}{dt} &= v\end{aligned}$$

を適当な初期条件の下でルンゲ・クッタ法を用いて数値的に解きなさい。結果をグラフにプロットし、厳密解と比較しなさい。

$t = 0$  で  $x(0) = 0, v(0) = 1$  の初期条件で  $t = 8$  迄解き、 $x(8)$  と  $v(8)$  を数値的に求める。時間の刻み幅  $\tau$  を  $\tau = 1/4, 1/8, 1/16, \dots$  と変え、誤差  $|x(8) - \sin 8|, |v(8) - \cos 8|$  の  $\tau$  依存性を両対数グラフにプロットしなさい。誤差は  $\tau$  何乗に比例しているか。

**3-B.** 振動的外力の加わった減衰振りの運動方程式 (22), (23), (24)  $Q = 2, \Omega = 2/3$  として、本文の (a), (b), (f), (g) の  $G$  の値に対してルンゲ・クッタ法を用いて数値的に解きなさい。時間刻みを  $(2\pi/\Omega) \times 10^{-3}$  にとり、 $50 \times (2\pi/\Omega)$  の時間経過した後の結果をアトラクターとして用い、アトラクターの  $(\theta, \omega)$  面への射影、 $\phi = 0$  の面でのポアンカレ断面をプロットしなさい。

**3-C.** パラメータ  $G$  が (c) または (g) の場合に、アトラクター上の軌道がどのように振る舞うか以下のように調べよ。

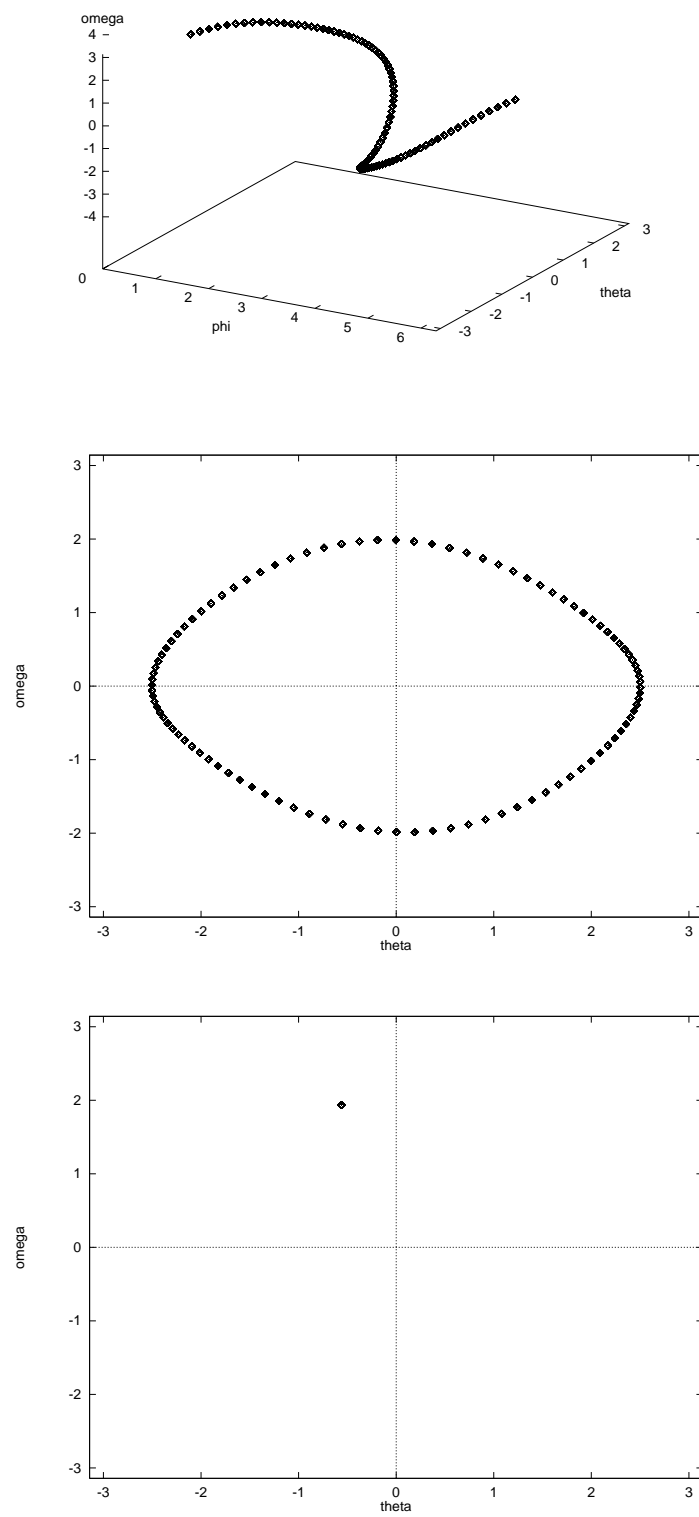
- (1) アトラクター上の一点  $P$  を選び、それを初期条件とする軌道  $(\theta_P(t), \omega_P(t))$  を求める。 $P$  点からわずかに離れた  $Q$  を初期条件とする軌道  $(\theta_Q(t), \omega_Q(t))$  を求め、これと  $P$  から出発した軌道との間の距離

$$d(t) = \sqrt{(\theta_P(t) - \theta_Q(t))^2 + (\omega_P(t) - \omega_Q(t))^2}$$

が、時間  $t$  とともにどのように大きくなって行くか調べよ。

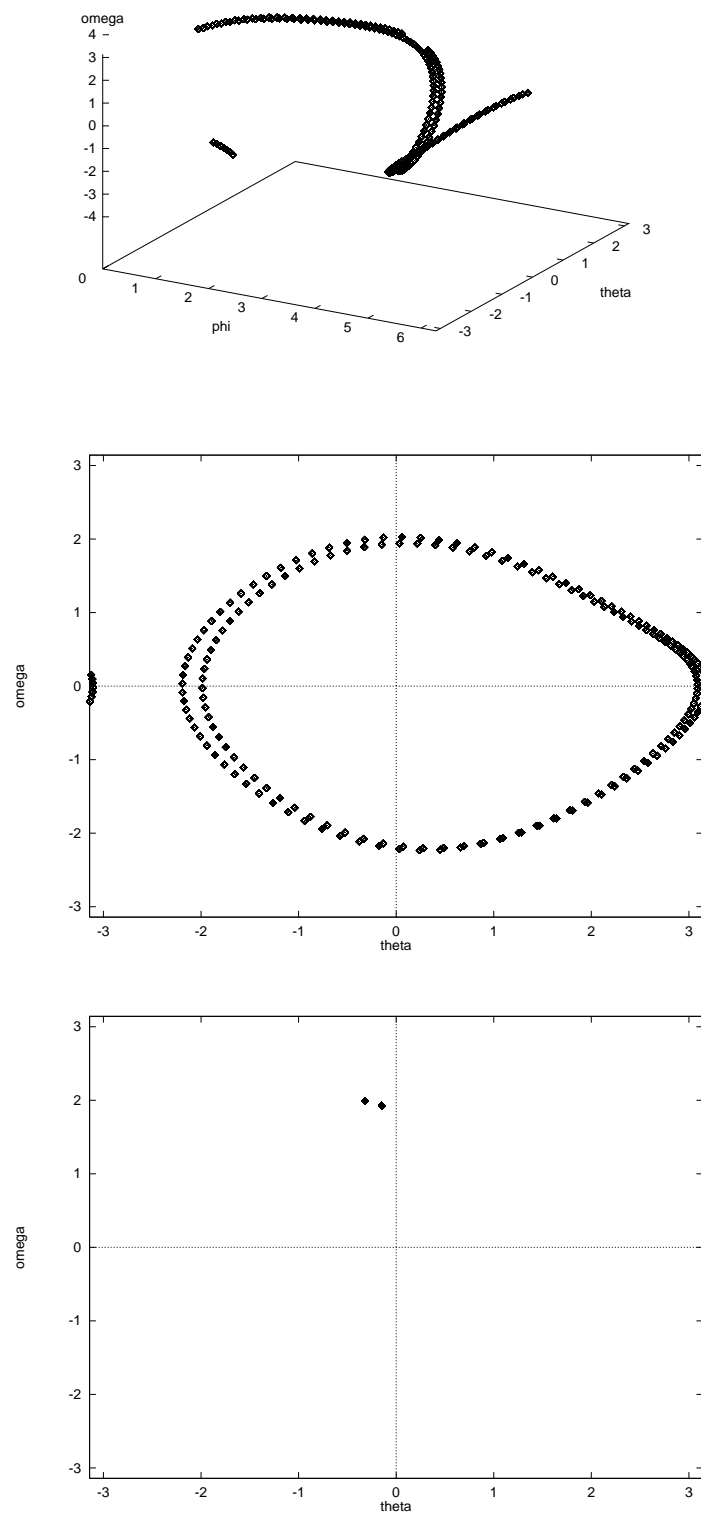
(ヒント：「わずかに離れた」とあるが、これは遠慮せずに、思いっきり数値的に近い初期状態を作成して比較せよという意味である。)

- (2) カオスが現れないパラメータの場合には (1) の結果はどのように変わるか調べよ。
- (3) これらの結果から、“カオス軌道の長時間予測は不可能である” ということはどういうことか考えよ。

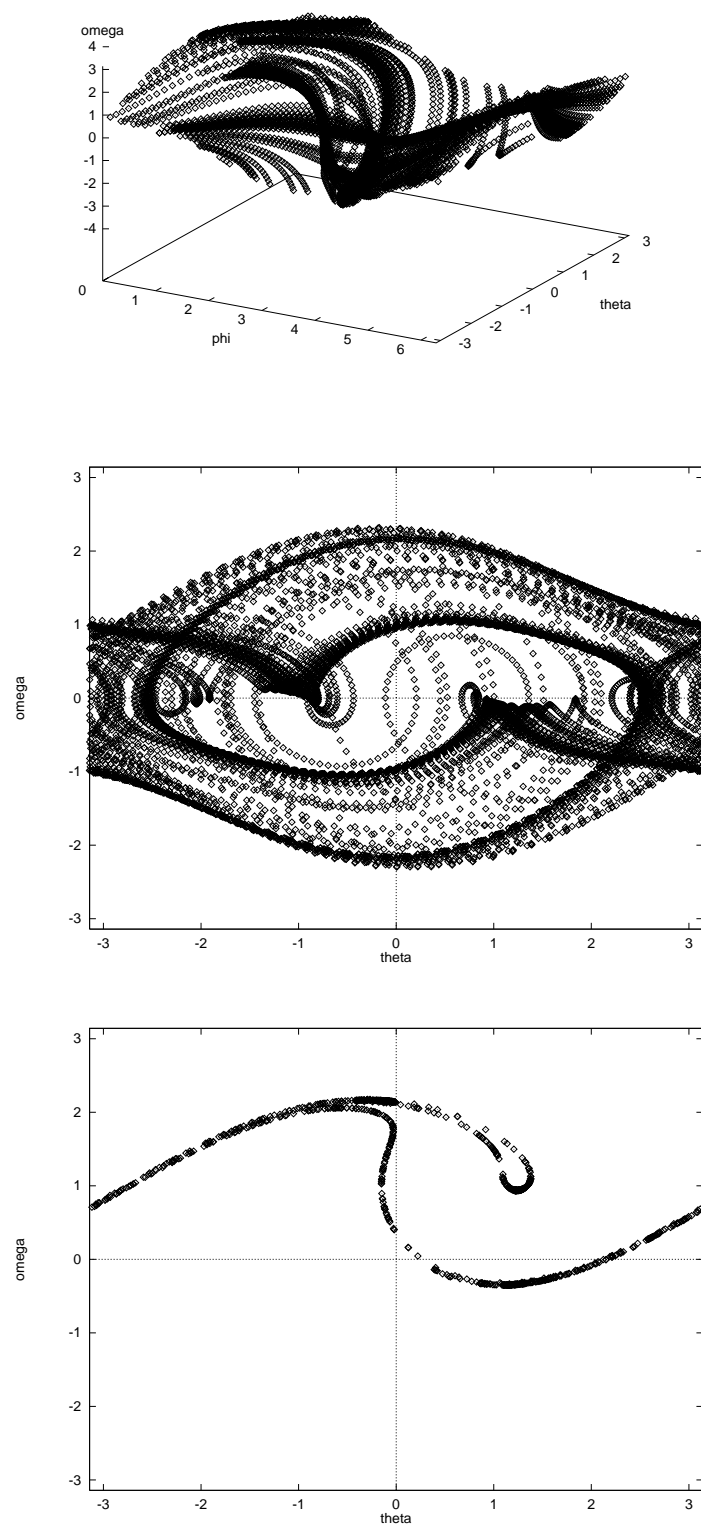


(a)

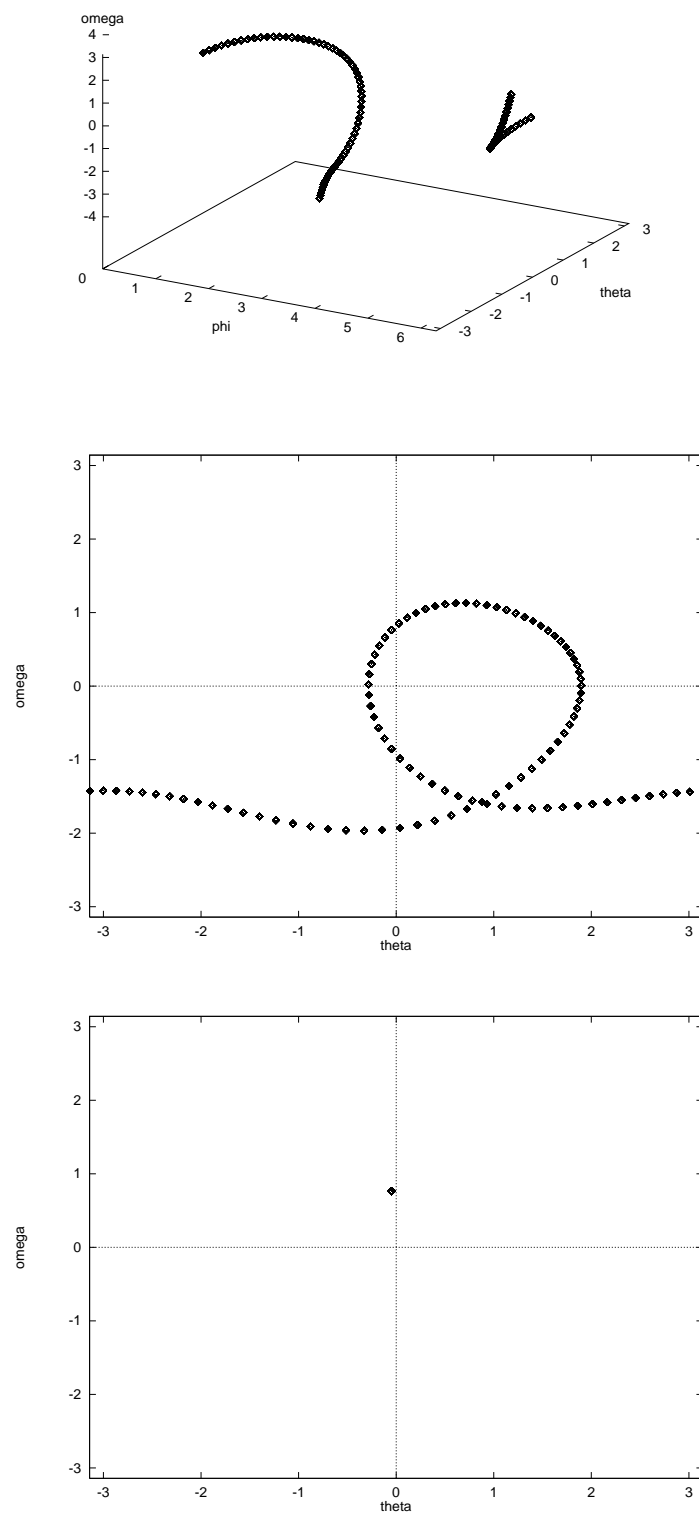




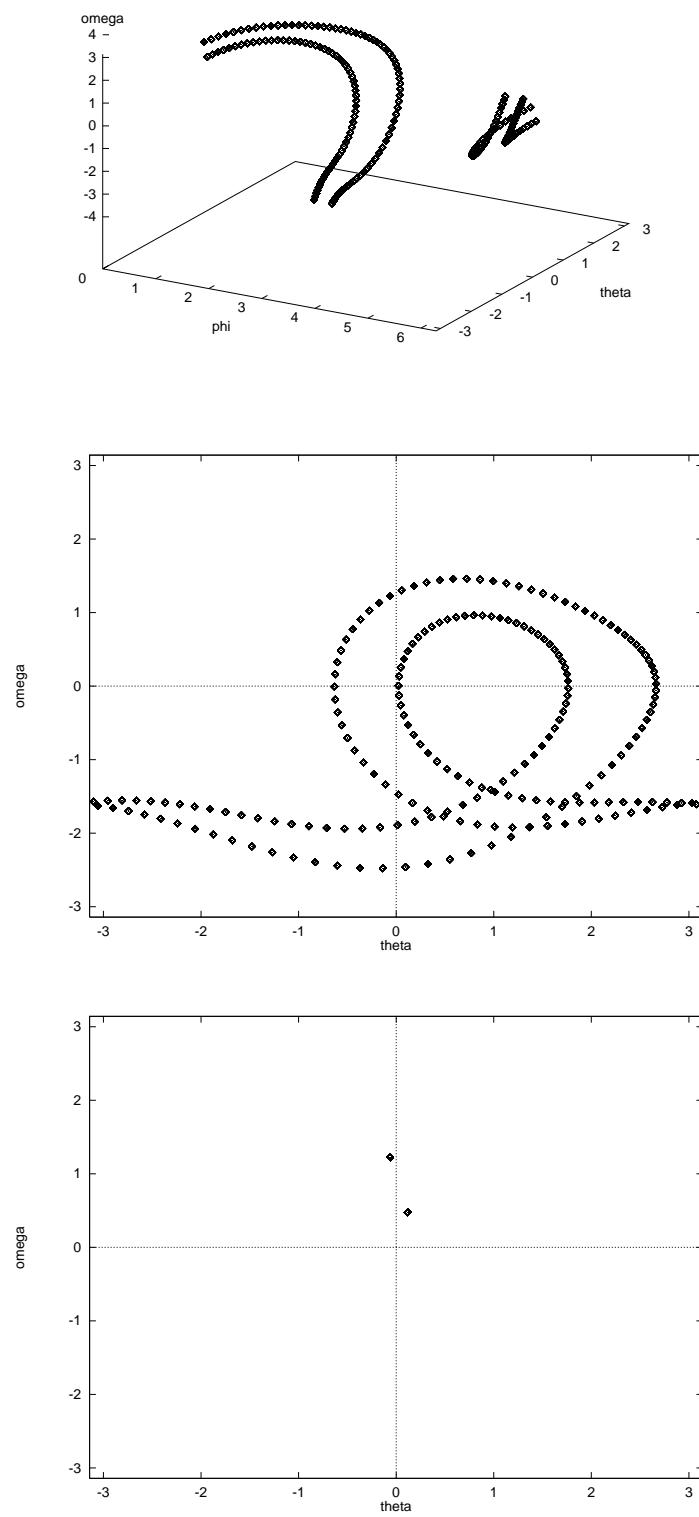
(b)



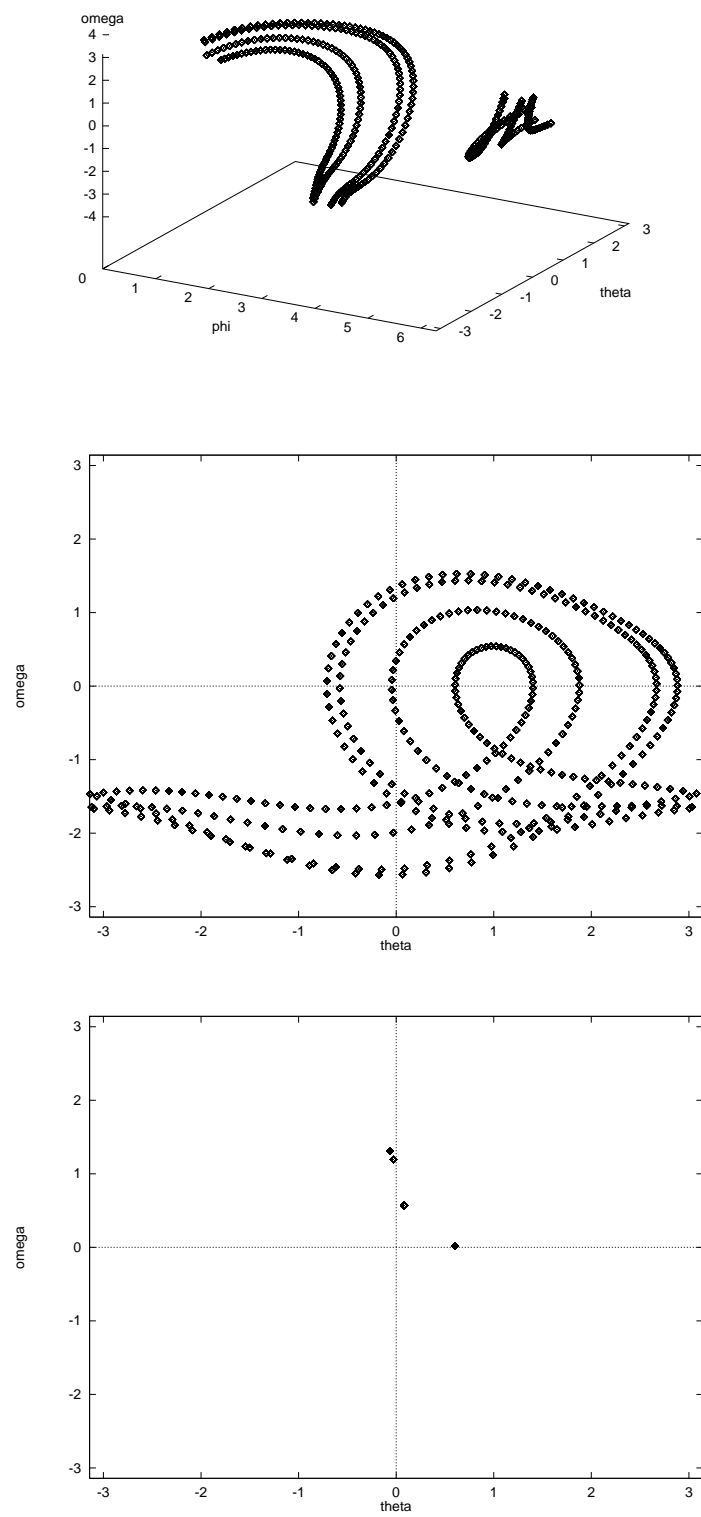
(c)



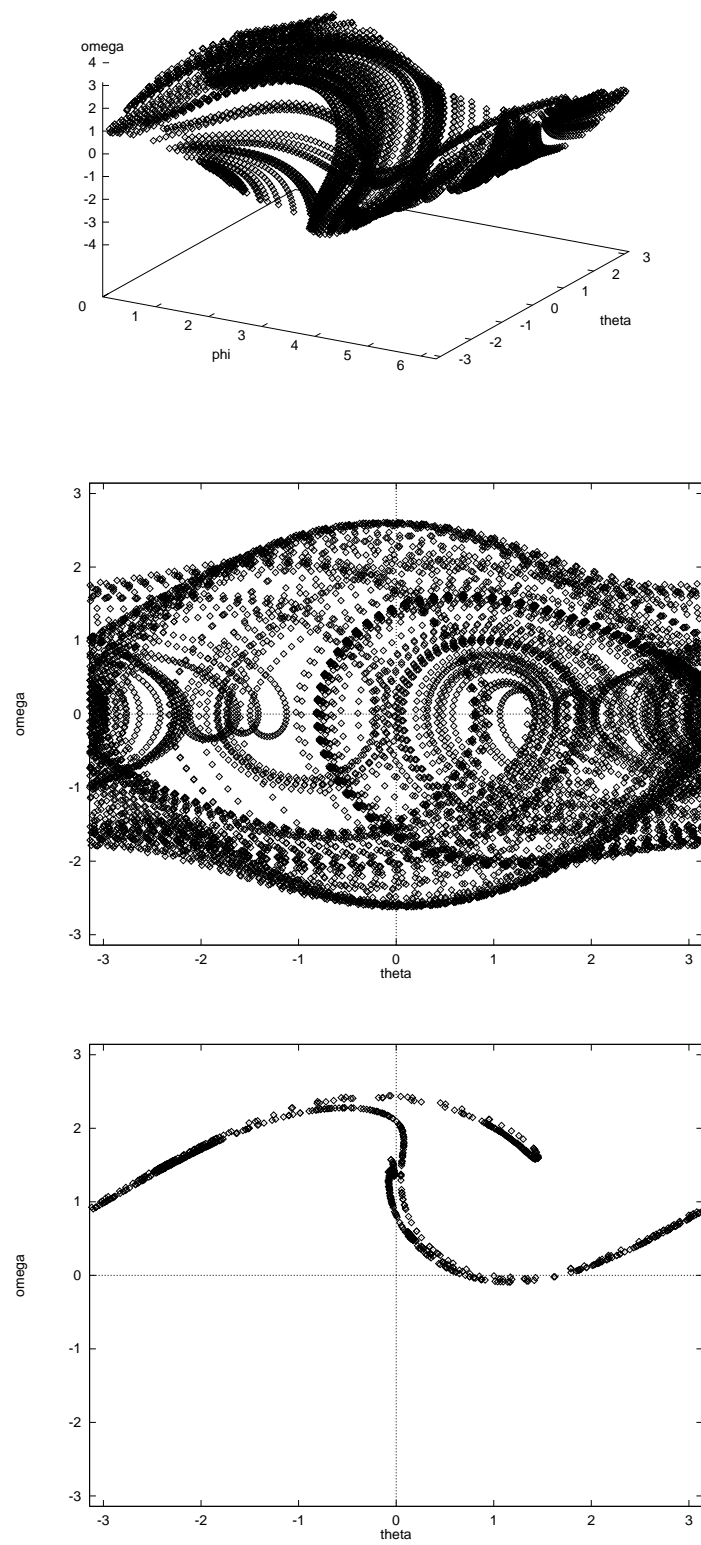
(d)



(e)



(f)



(g)