

応用数学 期末レポート

佐々木良輔

1-1

$a(x)$ について

$f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \{-\pi \leq x \leq 0\} \\ e^{-x} & \{0 \leq x \leq \pi\} \end{cases}$$

で定義する. このとき Fourier 係数は以下で与えられる. まず a_0 について

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} e^{-x} dx \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\pi}) \end{aligned}$$

次に a_n について

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 1 \cdot \cos nx dx + \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \cos nx dx \right\} \end{aligned}$$

ここで $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \cos nx dx$ とすると, 部分積分を用いて

$$\begin{aligned} I &= [-e^{-x} \cos nx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n e^{-x} \sin nx dx \\ &= [-e^{-x} \cos nx]_0^{\pi} + n [e^{-x} \sin nx]_0^{\pi} - n^2 I \\ \therefore I &= \frac{e^{-\pi} n \sin n\pi - e^{-\pi} \cos n\pi + 1}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

であるので以下を得る.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi} \cos n\pi}{n^2 + 1}$$

同様に b_n について

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 1 \cdot \sin nx dx + \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \sin nx dx \right\} \end{aligned}$$

ここで $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \sin nx dx$ とすると

$$\begin{aligned} I &= [-e^{-x} \sin nx]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} ne^{-x} \cos nx dx \\ &= [-e^{-x} \sin nx]_0^{\pi} - n [e^{-x} \cos nx]_0^{\pi} - n^2 I \\ \therefore I &= \frac{-e^{-\pi} \sin n\pi - e^{-\pi} n \cos n\pi + n}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

であるので以下を得る.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos n\pi - 1}{n} + \frac{n - e^{-\pi} n \cos n\pi}{n^2 + 1} \right\}$$

以上から求める Fourier 級数 $a(x)$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\pi}) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi} \cos n\pi}{n^2 + 1} \cos nx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos n\pi - 1}{n} + \frac{n - e^{-\pi} n \cos n\pi}{n^2 + 1} \right\} \sin nx \right) \end{aligned}$$

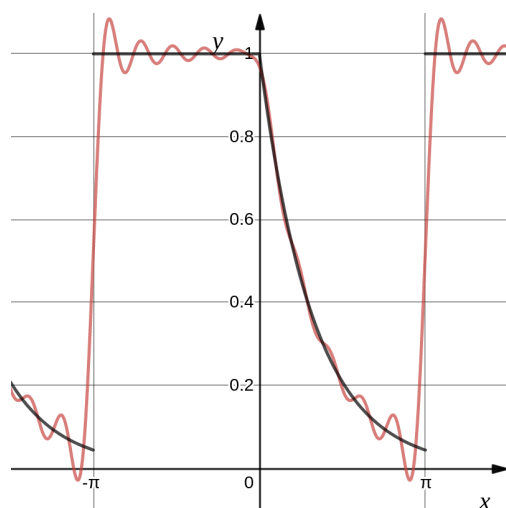


図 1 $y = f(x)$ (黒線) と $y = a(x)$ (赤線,10 次まで)(by desmos 計算機)

$b(x)$ について

$x \in [0, \pi]$ としたときの Fourier 余弦級数の係数は以下で与えられる. まず a_0 について

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - e^{-\pi}) \end{aligned}$$

次に a_n について

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi} \cos n\pi}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

以上から求める Fourier 余弦級数 $b(x)$ は以下のようになる.

$$b(x) = \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\pi}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi} \cos n\pi}{n^2 + 1}$$

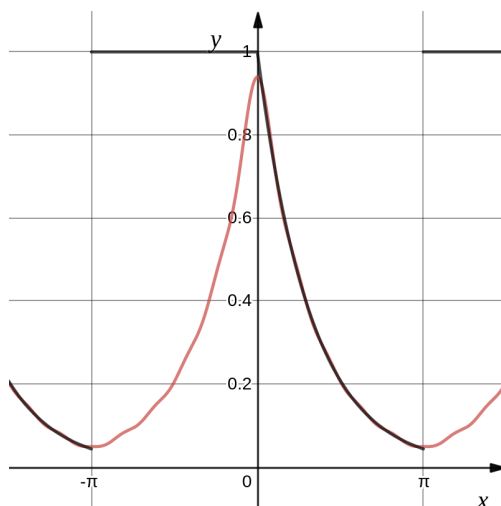


図2 $y = f(x)$ (黒線) と $y = b(x)$ (赤線, 10 次まで)(by desmos 計算機)

$c(x)$ について

$x \in [0, \pi]$ としたときの Fourier 正弦級数の係数は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{n - e^{-\pi} n \cos n\pi}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

以上から求める Fourier 正弦級数は以下ようになる.

$$c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{n - e^{-\pi} n \cos n\pi}{n^2 + 1}$$

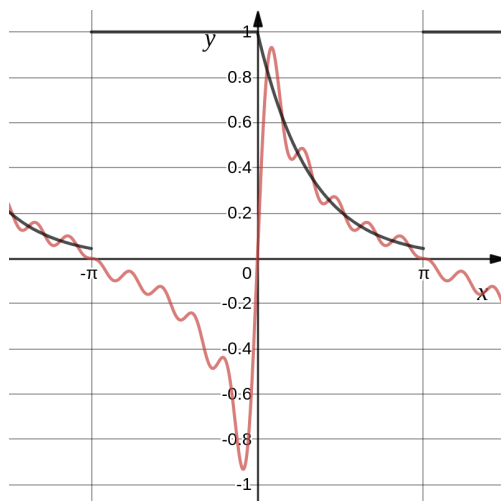


図 3 $y = f(x)$ (黒線) と $y = c(x)$ (赤線,10 次まで)(by desmos 計算機)

1-2-(a),(b)

以下に各次数の Fourier 係数を示す.

表 1 $a(x)$ の Fourier 係数

次数 n	a_n	b_n
0	$1 + (1 - e^{-\pi})/\pi$	0
1	$(1 + e^{-\pi})/2\pi$	$(e^{-\pi} - 3)/2\pi$
2	$(1 - e^{-\pi})/5\pi$	$(2 - 2e^{-\pi})/5\pi$
3	$(1 + e^{-\pi})/10\pi$	$(9e^{-\pi} - 11)/30\pi$
4	$(1 - e^{-\pi})/17\pi$	$(4 - 4e^{-\pi})/17\pi$
5	$(1 + e^{-\pi})/26\pi$	$(25e^{-\pi} - 27)/130\pi$

表 2 $b(x)$ の Fourier 係数

次数 n	a_n
0	$2(1 - e^{-\pi})/\pi$
1	$(1 + e^{-\pi})/\pi$
2	$(1 - e^{-\pi})/5\pi$
3	$(1 + e^{-\pi})/10\pi$
4	$(1 - e^{-\pi})/17\pi$
5	$(1 + e^{-\pi})/26\pi$

表 3 $c(x)$ について

次数 n	b_n
1	$(1 + e^{-\pi})/\pi$
2	$(4 - 4e^{-\pi})/5\pi$
3	$(3 + 3e^{-\pi})/5\pi$
4	$(8 - 8e^{-\pi})/17\pi$
5	$(5 + 5e^{-\pi})/13\pi$

したがって各 Fourier 級数をプロットすると以下のグラフを得る.

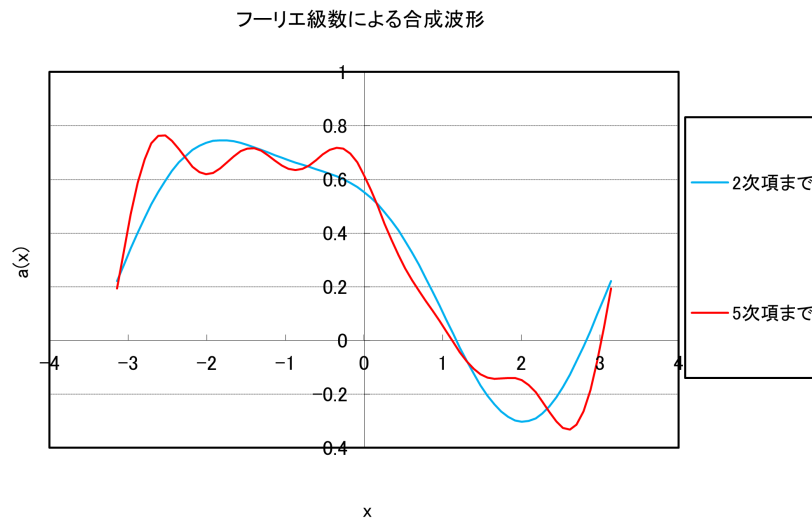


図 4 $a(x)$ のグラフ (水色:2 次まで, 赤:5 次まで)

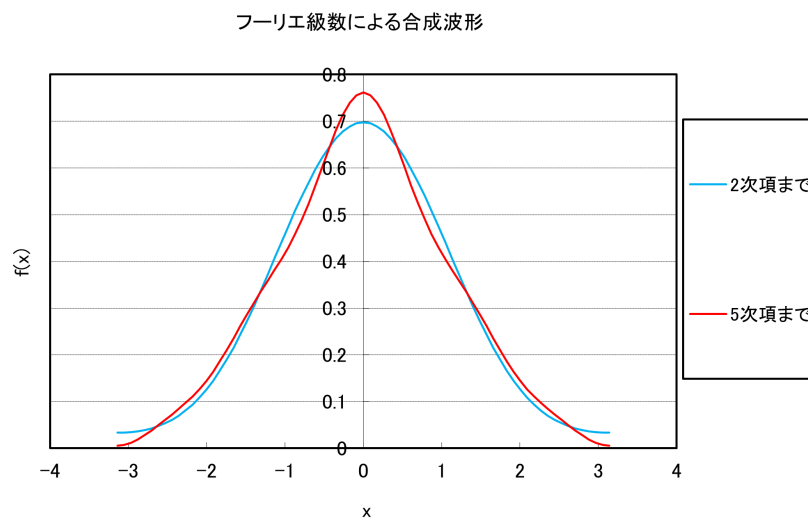


図 5 $b(x)$ のグラフ (水色:2 次まで, 赤:5 次まで)

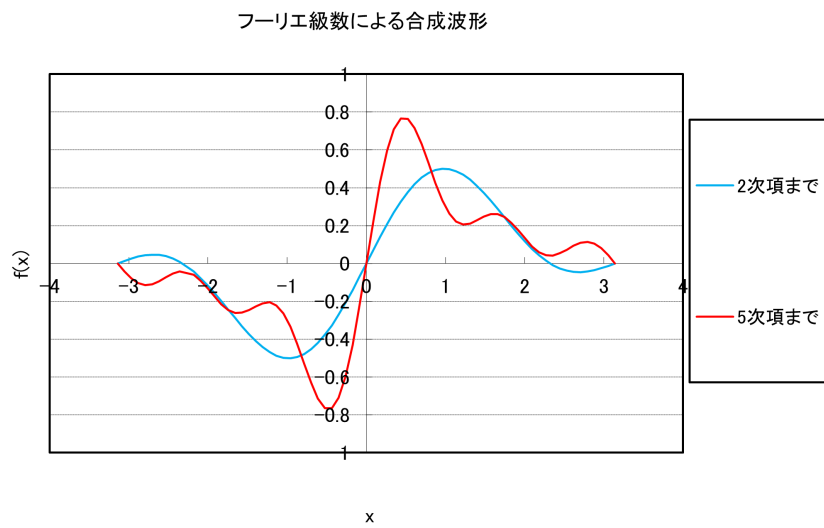


図 6 $c(x)$ のグラフ (水色:2 次まで, 赤:5 次まで)

1-3

以下に $\Delta a(x)$, $\Delta b(x)$, $\Delta c(x)$ のグラフを示す.

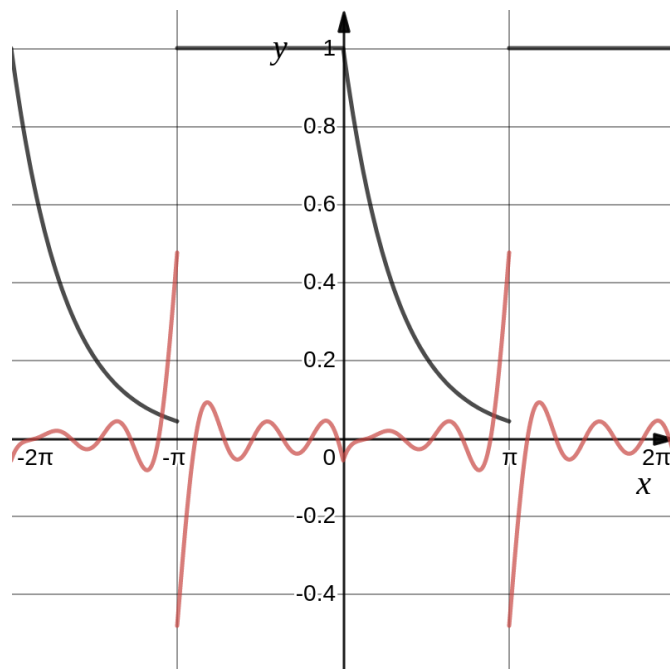


図 7 $y = f(x)$ (黒線) と $y = \Delta a(x)$ (赤線,5 次まで)(by desmos 計算機)

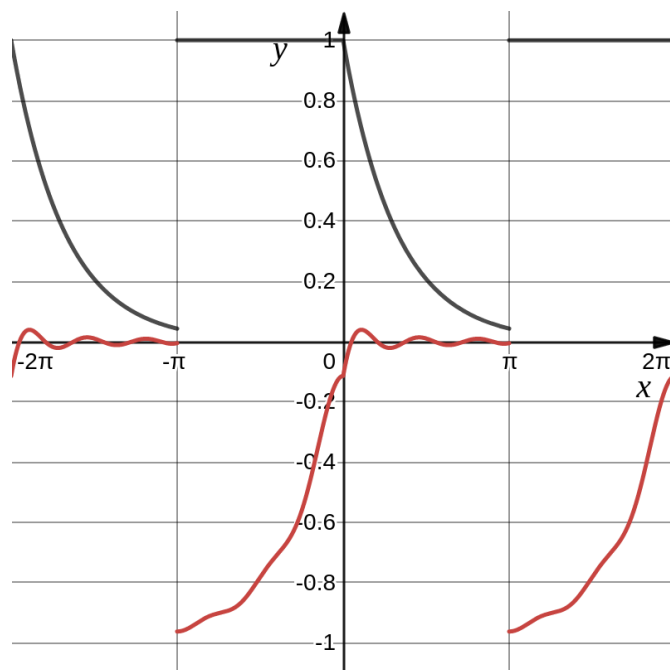


図 8 $y = f(x)$ (黒線) と $y = \Delta b(x)$ (赤線, 5 次まで)(by desmos 計算機)

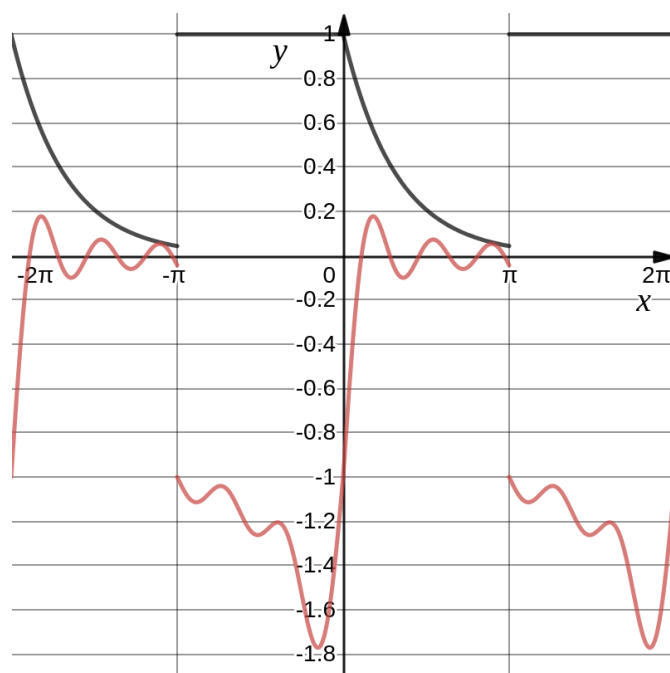


図 9 $y = f(x)$ (黒線) と $y = \Delta c(x)$ (赤線, 5 次まで)(by desmos 計算機)

1-4

(1) 図 1 や図 4 から級数の次数が高いほど元の波形に近づいていることがわかる. そして無限級数となったとき, 級数は元の波形と一致する.(完全性)

(2) 図 6 や図 1 の不連続点をみると関数の不連続点 $x = x_0$ では級数の値は

$$\frac{\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow +x_0} f(x)}{2}$$

に収束している.(Dirichlet の定理)

(3) 図 1, 図 7 を見ると, 不連続点では誤差が大きくなっていることがわかる. 不連続点では項数が有限である限り級数は収束しない.(Gibbs の現象)

(4) 表 2, 表 3 を見ると $b(x)$ の方が $c(x)$ に比べて係数がすぐに小さくなっていることがわかる. そのため図 5, 図 6 のように, $b(x)$ の方が $c(x)$ より早く元の関数に近づいていることがわかる.

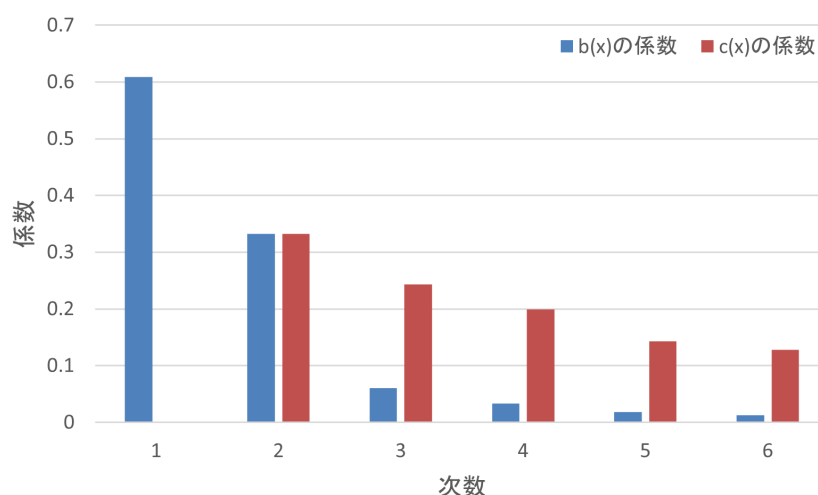


図 10 $b(x)$ と $c(x)$ の係数

(5) 図 5, 図 6 から Fourier 余弦級数は偶関数, Fourier 正弦級数は奇関数となっていることがわかる.

2-1

図 11, 図 12 に元波形と周波数スペクトルを示す. これらは自作の python スクリプト (を参照) で作成した. python スクリプトでは csv データを配列に格納し, これに numpy ライブラリの `fft.fft` 関数を掛けている. この関数は以下の定義式に基づき離散 Fourier 変換を行う.[1]

$$F_k = \sum_{m=0}^{n-1} f_m \exp\left(-2\pi i \frac{mk}{n}\right)$$

この値は複素数であるので、スペクトルにおいては絶対値を取った。結果は matplotlib にて出力した。

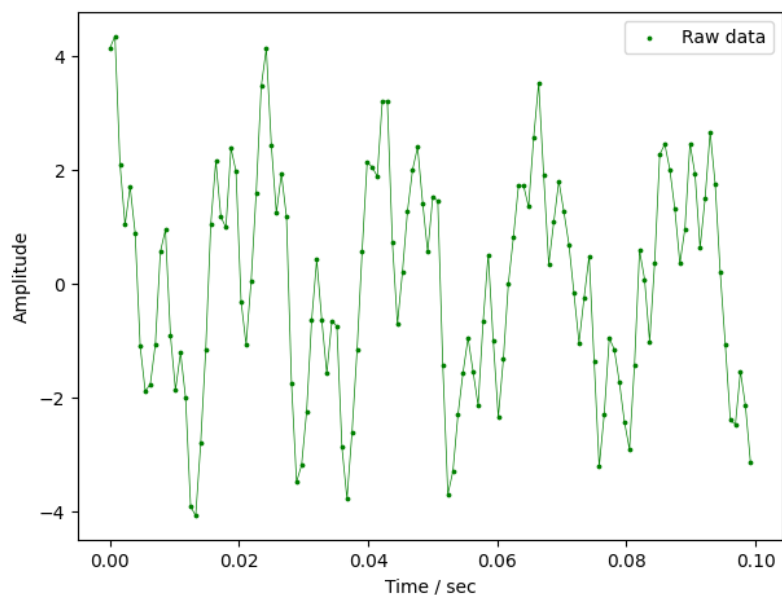


図 11 元波形

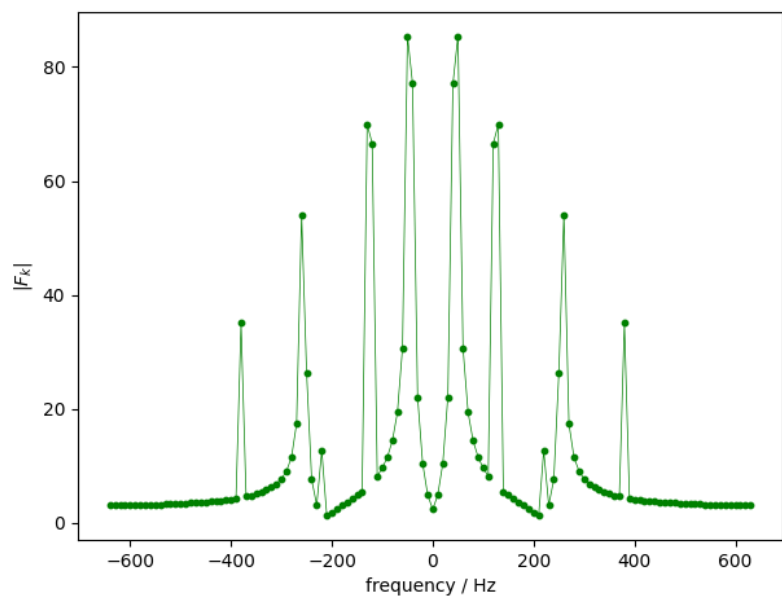


図 12 周波数スペクトル

2-2

元データは幾つかの余弦波の合成であるので、理想的には周波数スペクトルは図 13 のように δ 関数からなるはずである。しかし実際には、図 12 のように量子化誤差や離散化によりノイズやサイドローブが乗っていると考えられる。したがって振幅スペクトルの極大値を拾うことでノイズを除去し、元の余弦波を得る。

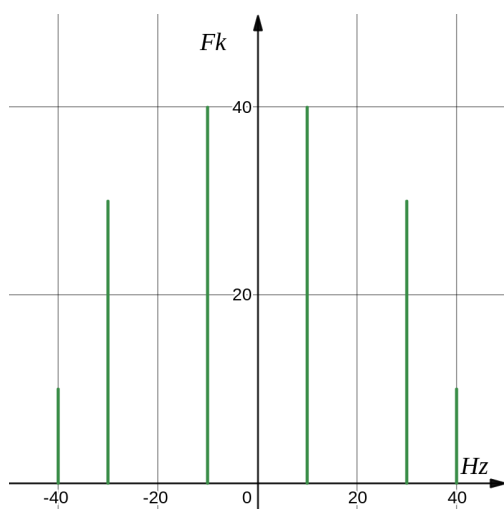


図 13 理想的なスペクトルの例

図 14 に振幅スペクトル、図 15 に位相スペクトルを示す。それぞれのスペクトルには振幅スペクトルのピークを書き込んでいる。なお振幅は以下のように計算される。

$$A_k = \frac{|F_k| \times 2}{N}$$

また表 4 にはノイズ除去により得られたピーク周波数と、そこでの振幅、位相を示す。これを元に再合成した波形を図 16 に示す。図 16 のように再合成した波形は元データのある程度再現している。したがって元データは表 4 に示した周波数、振幅、位相の余弦波の重ね合わせであると考えられる。

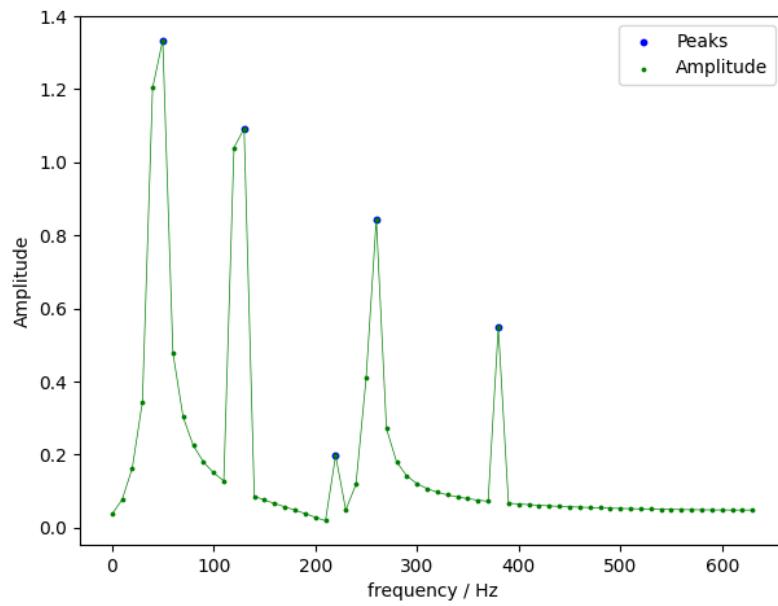


図 14 振幅スペクトルとそのピーク

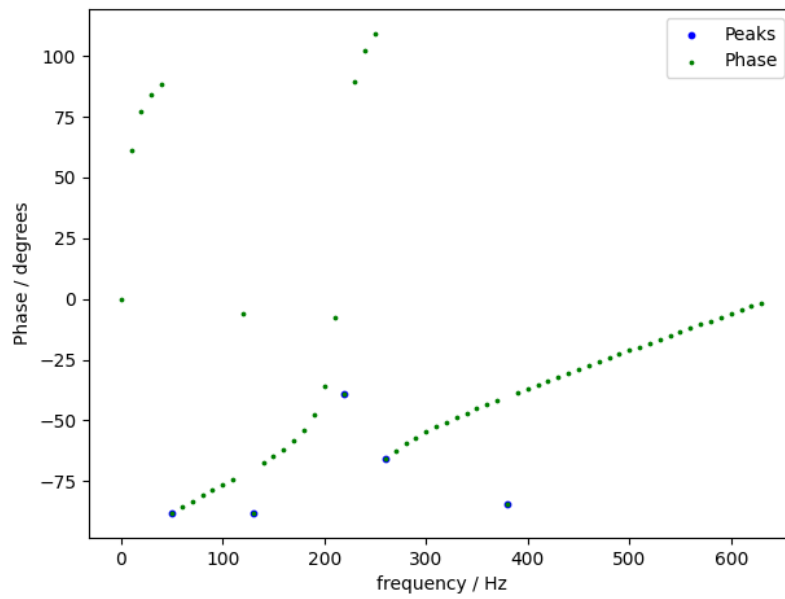


図 15 位相スペクトル

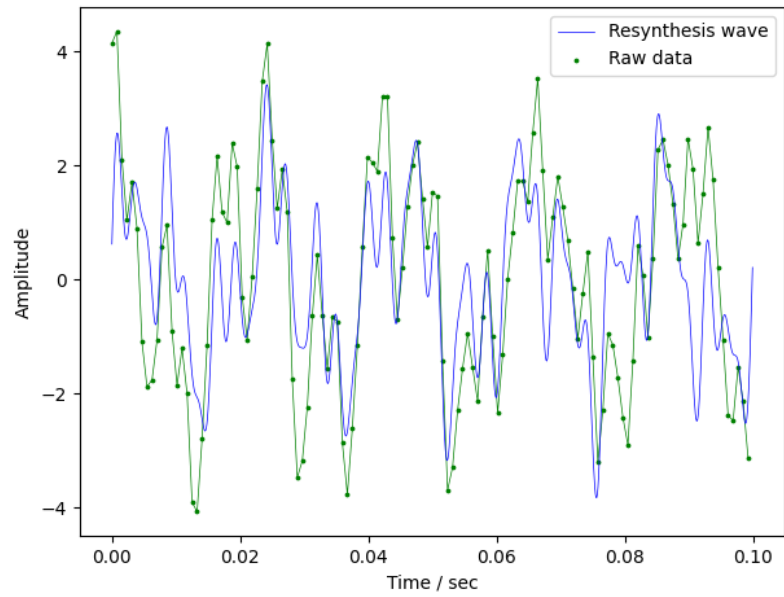


図 16 再合成した波形

表 4 ピーク周波数, 振幅, 位相

周波数 / Hz	振幅	位相 / °
50.0	1.33	-88.4
130	1.09	-88.2
220	0.197	-38.9
260	0.843	-65.9
380	0.548	-84.4

参考文献

- [1] numpy. Discrete fourier transform (numpy.fft) numpy v1.19 manual. <https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.fft.html#module-numpy.fft>. (Accessed on 01/26/2021).