第 1 回 3-(2)

佐々木良輔

関数 $f(z)$ の特異点を求めその周りで Laurent 展開せよ. また, 各特異点での留数はいくらか.

$$f(z) = \frac{(z+1)^2}{z(z+3)^2}$$

$f(z)$ を部分分数分解すると

$$f(z) = \frac{1}{9z} + \frac{8}{9(z+3)} - \frac{4}{3(z+3)^2}$$

特異点は $z = 0, -3$ である. ここでは $z = -3$ 周りで Laurent 展開する.

(iii)　$0 < |z+3| < 3$ のとき

$w = z + 3$ として, $0 < |\frac{w}{3}| < 1$ なので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{w-3} \\
&= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w}{3}} \\
&= -\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{w}{3})^{n-1} \\
&= -\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{z+3}{3})^{n-1}
\end{aligned}$$

したがって

$$f(z) = -\frac{4}{3(z+3)^2} + \frac{8}{9(z+3)} - \frac{1}{27} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{z+3}{3})^{n-1}$$

となり, これは $z = -3$ 周りの Laurent 級数である.

(iv)　$3 < |z+3|$ のとき

$w = z+3$ として, $0 < |\dfrac{3}{w}| < 1$ なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{w-3} \\ &= \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{w}} \\ &= \frac{1}{w} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{w})^{n-1} \\ &= \frac{1}{z+3} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{z+3})^{n-1}\end{aligned}$$

したがって

$$f(z) = -\frac{4}{3(z+3)^2} + \frac{8}{9(z+3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-3}}{(z+3)^n}$$

となり, これは $z=-3$ 周りの Laurent 級数である.
また $z=-3$ は 2 位の極なので, $z=-3$ での留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=-3}(f(z)) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to -3} \left\{ \frac{d}{dz} (z+3)^2 \frac{(z+1)^2}{z(z+3)^2} \right\} = \frac{8}{9}$$

となる.