物理学演習第 1 No.3, 4 レポート

佐々木良輔

3-3.(d)

$X = kL = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}L$, $Y = \kappa L = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}L$ とすると (b), (c) より以下が成り立つ.

$$Y = X \tan X \tag{1}$$
$$Y = -X \cot X \tag{2}$$
$$X^2 + Y^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}L^2 \tag{3}$$

X, Y はエネルギー E, V_0 に依る. したがって (3) と (1), (2) を同時に満たす点がエネルギー固有値となる. ここで (1) は $X = n\pi$ で $Y = 0$ となり (2) は $X = (n + \frac{1}{2})\pi$ で $Y = 0$ となる. したがってグラフの交点の個数は

$$\begin{cases} 2n+1 & \left(n\pi < X \leq (n+\frac{1}{2})\pi\right) \\ 2(n+1) & \left((n+\frac{1}{2})\pi < X \leq (n+1)\pi\right) \end{cases} \tag{4}$$

となる. 以上から束縛状態の数 $N(V_0)$ は

$$N(V_0) = \begin{cases} 2n+1 & \left(\frac{\hbar^2}{2mL^2}n^2\pi^2 < V_0 \leq \frac{\hbar^2}{2mL^2}(n+\frac{1}{2})^2\pi^2\right) \\ 2(n+1) & \left(\frac{\hbar^2}{2mL^2}(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 < V_0 \leq \frac{\hbar^2}{2mL^2}(n+1)^2\pi^2\right) \end{cases}$$

と与えられる.

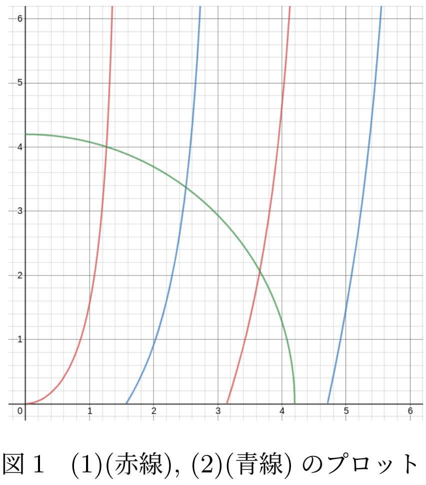

図 1　(1)(赤線), (2)(青線) のプロット

3-3.(e)

$2V_0L = g \qquad$ (const) としつつ $L \to 0$ としたとき

$$X^2 + Y^2 = \frac{mg}{\hbar^2}L \to 0 \tag{5}$$

となる. したがって束縛状態は $n = 0$ の基底状態のみを持ち $N(V_0) = 1$ となる.
また $X \simeq 0$ とできるので (1) 式は

$$Y \simeq X^2 \tag{6}$$

になる. したがって (3) と (6) を連立し

$$Y + Y^2 = \frac{mg}{\hbar^2}L$$

$$\therefore Y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4mg}{\hbar^2}L + 1} - 1\right) \qquad (\because y > 0) \tag{7}$$

$$\simeq \frac{mg}{\hbar^2}L \tag{8}$$

最後の式変形では $x \ll 1$ から $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$ を用いた. ここで $V_0 - E = \frac{Y^2}{L^2}\frac{\hbar^2}{2m}$ なので

$$E - V_0 = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}$$

となる.

4-1.(c)

$x<0$ のとき, $V(x)=0$ より Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_-(x)=-\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_-(x) \tag{10}$$

$E>0$ より解は以下のようになる.

$$\psi_-(x)=A\mathrm{e}^{ikx}+B\mathrm{e}^{-ikx} \qquad \left(E=\frac{k^2\hbar^2}{2m}\right) \tag{11}$$

$x>0$ のとき, $V(x)=V_0$ より Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_+(x)=-\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi_+(x) \tag{13}$$

$E-V_0>0$ より解は以下のようになる.

$$\psi_+(x)=C\mathrm{e}^{i\kappa x}+D\mathrm{e}^{-i\kappa x} \qquad \left(E-V_0=\frac{\kappa^2\hbar^2}{2m}\right) \tag{14}$$

波は x 負の方向から入射し $x=0$ で一部反射, 透過する状態を考えているので $x>0$ の領域には x 正方向の波は存在しない. したがって $D=0$ とする. 接続条件は

$$\begin{cases}\psi_-(0) & =\psi_+(0)\\ \psi'_-(0) & =\psi'_+(0)\end{cases} \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B & =C\\ k(A-B) & =\kappa C\end{cases} \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow\frac{A}{B}=\frac{k+\kappa}{k-\kappa},\quad \frac{A}{C}=\frac{k+\kappa}{2k} \tag{17}$$

以上より入射波, 反射波, 透過波についての解 $\psi_I(x)$, $\psi_R(x)$, $\psi_T(x)$ は

$$\psi_I(x)=A\mathrm{e}^{ikx} \tag{18}$$

$$\psi_R(x)=B\mathrm{e}^{-ikx} \tag{19}$$

$$\psi_T(x)=C\mathrm{e}^{i\kappa x} \tag{20}$$

それぞれの流れの密度 j_I, j_R, j_T は

$$j_I=\frac{1}{m}\mathrm{Re}\left(\psi_I^*\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_I\right) \tag{21}$$

$$=\frac{1}{m}\mathrm{Re}\left(A^*\mathrm{e}^{-ikx}\frac{\hbar}{i}Aik\mathrm{e}^{ikx}\right) \tag{22}$$

$$=\frac{\hbar k}{m}|A|^2 \tag{23}$$

同様に

$$j_R = -\frac{\hbar k}{m}|B|^2 \tag{24}$$

$$j_T = \frac{\hbar \kappa}{m}|C|^2 \tag{25}$$

したがって反射率 R は (17) より

$$\begin{aligned} R &= -\frac{j_R}{j_I} &(26)\\ &= \left(\frac{k-\kappa}{k+\kappa}\right)^2 &(27)\\ &= \left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}\right)^2 \end{aligned}$$

同様に透過率 T は

$$\begin{aligned} T &= \frac{j_T}{j_I} &(28)\\ &= \frac{\kappa}{k}\left|\frac{C}{A}\right|^2 &(29)\\ &= \frac{4\sqrt{E(E-V_0)}}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^2} \end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned} R+T &= \left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}\right)^2 + \frac{4\sqrt{E(E-V_0)}}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

4-1.(d)

$\epsilon := \frac{E}{V_0}$ とすると

$$T = \frac{4\sqrt{E(E-V_0)}}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^2} \tag{30}$$
$$= \frac{4\sqrt{\frac{E}{V_0}(\frac{E}{V_0}-1)}}{(\sqrt{\frac{E}{V_0}}+\sqrt{\frac{E}{V_0}-1})^2} \tag{31}$$
$$= \frac{4\sqrt{\epsilon(\epsilon-1)}}{(\sqrt{\epsilon}+\sqrt{\epsilon-1})^2} \tag{32}$$

ここで $0 \leq \epsilon - 1 \ll 1$ とし ϵ の 2 乗以上の項を近似すると

$$T = \frac{4\sqrt{\epsilon^2-\epsilon}}{\sqrt{\epsilon^2}+\sqrt{(\epsilon-1)^2}+2\sqrt{\epsilon-1}} \tag{33}$$
$$\simeq \frac{4\sqrt{1-\epsilon}}{1+0+2\sqrt{\epsilon-1}} \tag{34}$$
$$= 4\sqrt{1-\epsilon}\left(1+2\sqrt{\epsilon-1}\right)^{-1} \tag{35}$$
$$\simeq 4\sqrt{1-\epsilon}\left(1-2\sqrt{\epsilon-1}\right) \tag{36}$$
$$= 4\sqrt{1-\epsilon} - 8\sqrt{1-\epsilon^2} \tag{37}$$
$$\simeq 4\sqrt{1-\epsilon}$$

3 行目から 4 行目の式変形において $\sqrt{\epsilon-1} \ll 1$ から $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$ を用いた.
また $\epsilon \gg 1$ として $\epsilon - 1 \simeq \epsilon$ とすると

$$T = \frac{4\sqrt{\epsilon^2-\epsilon}}{(\sqrt{\epsilon}+\sqrt{\epsilon-1})^2} \tag{38}$$
$$\simeq \frac{4\sqrt{\epsilon^2-\epsilon}}{(2\sqrt{\epsilon})^2} \tag{39}$$
$$= \sqrt{1(1-\frac{1}{\epsilon})} \tag{40}$$
$$\simeq 1 - \frac{1}{2\epsilon}$$

また図 2 にこの関数の概形を示す.

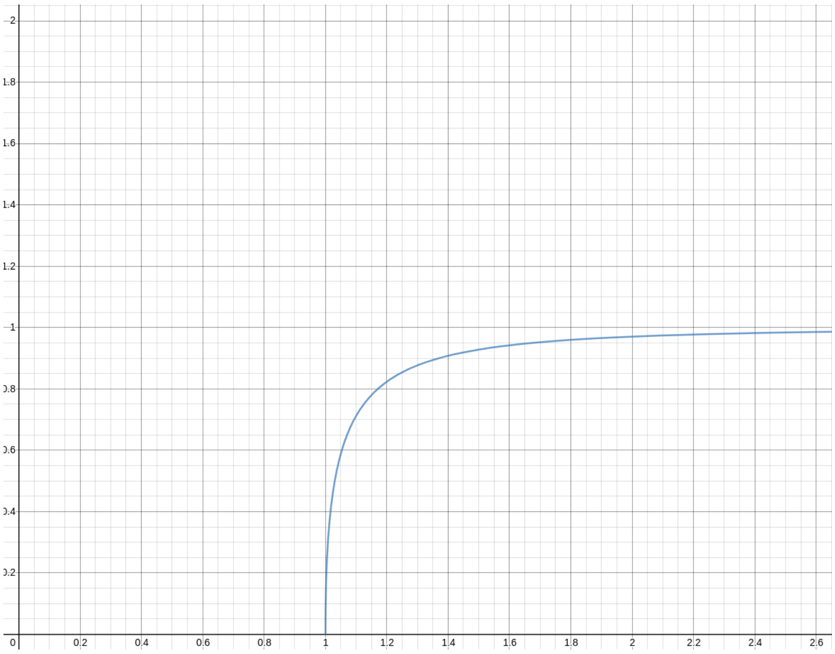

図 2　概形