物理学演習第 1 No.1, 2 レポート

佐々木良輔

1-1.(d)

　関数 $f(x) = x^2$ を Fourier 級数で表わせ

$f(x)$ は偶関数なので

$$
\begin{aligned}
B_n &= 0 \\
A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2 \\
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \mathrm{d}x\right\} \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left\{\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{2}{n^2\pi}(\pi\cos n\pi + \pi\cos n\pi) \\
&= \frac{4}{n^2}\cos n\pi \\
&= \frac{4}{n^2}(-1)^n
\end{aligned}
$$

以上から

$$
f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \tag{1}
$$

1-1.(e)

(i)

(1) 式において $x = \pi$ とすると

$$
\begin{aligned}
f(\pi) &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \pi^2 \\
\therefore \zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

(ii)

(1) 式において $x = 0$ とすると

$$
f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = 0
$$

両辺に -1 を掛けると

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= 0 \\
-\mathrm{Li}_2(-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}
$$

2-3.(d)

$A = x$, $B = p$ としたとき交換関係を考える.

$$
\begin{aligned}
[x,p]\psi &= x\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi - \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\psi \\
&= x\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi - \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\cdot\psi + \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi\cdot x\right) \\
&= -\frac{\hbar}{i}\psi = i\hbar\psi
\end{aligned}
$$

したがって $[x,p] = i\hbar$ であり $C = \hbar$ となる. 以上と Kennard-Robertson の不等式から

$$
\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}
$$

が示された.

また等号成立時は $I(\lambda) = \langle(\lambda\tilde{A} + i\tilde{B})\psi, (\lambda\tilde{A} + i\tilde{B})\psi\rangle = 0$ より $(\lambda\tilde{A} + i\tilde{B})\psi = 0$ である. ここで

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= x - \langle x\rangle \\
\tilde{p} &= \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \langle p\rangle
\end{aligned}
$$

なので $(\lambda\tilde{A} + i\tilde{B})\psi = 0$ は以下のように書き換わる.

$$\left[\lambda(x - \langle x \rangle) + \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - i\langle p \rangle\right]\psi = 0$$

この微分方程式を解く.

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \left[-\frac{\lambda}{\hbar}(x - \langle x \rangle) + \frac{i}{\hbar}\langle p \rangle\right]\psi$$

変数分離法を用いると

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}\psi}{\psi} &= \int \mathrm{d}x \left(-\frac{\lambda}{\hbar}(x - \langle x \rangle) + \frac{i}{\hbar}\langle p \rangle\right) \\
\log\psi &= -\frac{\lambda}{2\hbar}(x - \langle x \rangle)^2 + \frac{i}{\hbar}\langle p \rangle x + C \\
\psi &= \exp\left((x - \langle x \rangle)^2 + \frac{i}{\hbar}\langle p \rangle x + C\right) \\
&= \exp\left((x - \langle x \rangle)^2 + \frac{i}{\hbar}\langle p \rangle x + C\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \psi(x) = A\exp\left(\left(x - \frac{2\langle x \rangle + \frac{i}{\hbar}\langle p \rangle}{2}\right)^2\right) \qquad (A := \mathrm{e}^{\langle x \rangle^2 + C - \left(\frac{2\langle x \rangle + \frac{i}{\hbar}\langle p \rangle}{2}\right)^2})$$

となり, これは確かにガウス関数である.