

応用数学 期末レポート

佐々木良輔

1-1

$a(x)$ について

$f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \{-\pi \leq x \leq 0\} \\ e^{-x} & \{0 \leq x \leq \pi\} \end{cases}$$

で定義する. このとき Fourier 係数は以下で与えられる. まず a_0 について

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} e^{-x} dx \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\pi}) \end{aligned}$$

次に a_n について

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 1 \cdot \cos nx dx + \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \cos nx dx \right\} \end{aligned}$$

ここで $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \cos nx dx$ とすると, 部分積分を用いて

$$\begin{aligned} I &= [-e^{-x} \cos nx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} ne^{-x} \sin nx dx \\ &= [-e^{-x} \cos nx]_0^{\pi} + n [e^{-x} \sin nx]_0^{\pi} - n^2 I \\ \therefore I &= \frac{e^{-\pi} n \sin n\pi - e^{-\pi} \cos n\pi + 1}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

であるので以下を得る.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi} \cos n\pi}{n^2 + 1}$$

同様に b_n について

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 1 \cdot \sin nx dx + \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \sin nx dx \right\} \end{aligned}$$

ここで $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \sin nx dx$ とすると

$$\begin{aligned} I &= [-e^{-x} \sin nx]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} ne^{-x} \cos nx dx \\ &= [-e^{-x} \sin nx]_0^{\pi} - n [e^{-x} \cos nx]_0^{\pi} - n^2 I \\ \therefore I &= \frac{-e^{-\pi} \sin n\pi - e^{-\pi} n \cos n\pi + n}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

であるので以下を得る.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos n\pi - 1}{n} + \frac{n - e^{-\pi} n \cos n\pi}{n^2 + 1} \right\}$$

以上から求める Fourier 級数 $a(x)$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\pi}) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi} \cos n\pi}{n^2 + 1} \cos nx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos n\pi - 1}{n} + \frac{n - e^{-\pi} n \cos n\pi}{n^2 + 1} \right\} \sin nx \right) \end{aligned}$$

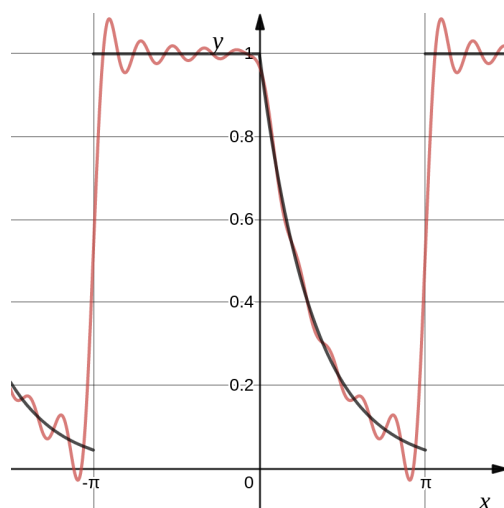


図 1 $y = f(x)$ (黒線) と $y = a(x)$ (赤線,10 次まで)(by desmos 計算機)

$b(x)$ について

$x \in [0, \pi]$ としたときの Fourier 余弦級数の係数は以下で与えられる. まず a_0 について

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - e^{-\pi}) \end{aligned}$$

次に a_n について

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi} \cos n\pi}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

以上から求める Fourier 余弦級数 $b(x)$ は以下のようになる.

$$b(x) = \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\pi}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi} \cos n\pi}{n^2 + 1}$$

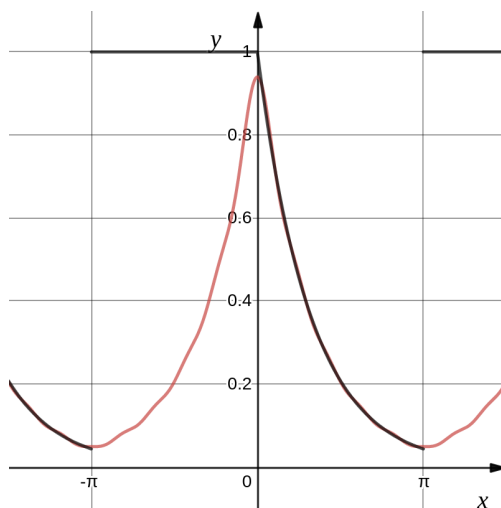


図2 $y = f(x)$ (黒線) と $y = b(x)$ (赤線, 10 次まで)(by desmos 計算機)

$c(x)$ について

$x \in [0, \pi]$ としたときの Fourier 正弦級数の係数は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{n - e^{-\pi} n \cos n\pi}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

以上から求める Fourier 正弦級数は以下ようになる.

$$c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{n - e^{-\pi} n \cos n\pi}{n^2 + 1}$$

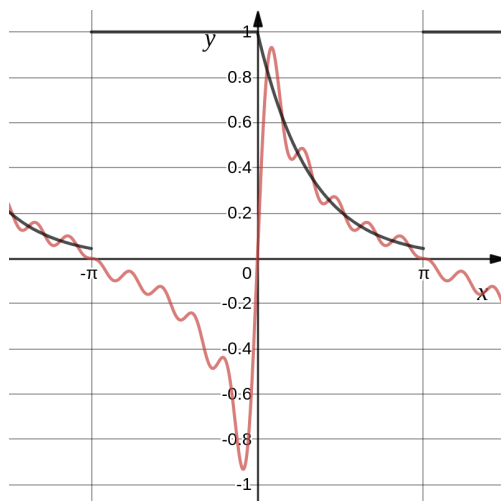


図 3 $y = f(x)$ (黒線) と $y = c(x)$ (赤線,10 次まで)(by desmos 計算機)

1-2-(a),(b)

以下に各次数の Fourier 係数を示す.

表 1 $a(x)$ の Fourier 係数

次数 n	a_n	b_n
0	$1 + (1 - e^{-\pi})/\pi$	0
1	$(1 + e^{-\pi})/2\pi$	$(e^{-\pi} - 3)/2\pi$
2	$(1 - e^{-\pi})/5\pi$	$(2 - 2e^{-\pi})/5\pi$
3	$(1 + e^{-\pi})/10\pi$	$(9e^{-\pi} - 11)/30\pi$
4	$(1 - e^{-\pi})/17\pi$	$(4 - 4e^{-\pi})/17\pi$
5	$(1 + e^{-\pi})/26\pi$	$(25e^{-\pi} - 27)/130\pi$

表 2 $b(x)$ の Fourier 係数

次数 n	a_n
0	$2(1 - e^{-\pi})/\pi$
1	$(1 + e^{-\pi})/\pi$
2	$(1 - e^{-\pi})/5\pi$
3	$(1 + e^{-\pi})/10\pi$
4	$(1 - e^{-\pi})/17\pi$
5	$(1 + e^{-\pi})/26\pi$

表 3 $c(x)$ について

次数 n	b_n
1	$(1 + e^{-\pi})/\pi$
2	$(4 - 4e^{-\pi})/5\pi$
3	$(3 + 3e^{-\pi})/5\pi$
4	$(8 - 8e^{-\pi})/17\pi$
5	$(5 + 5e^{-\pi})/13\pi$

したがって各 Fourier 級数をプロットすると以下のグラフを得る.

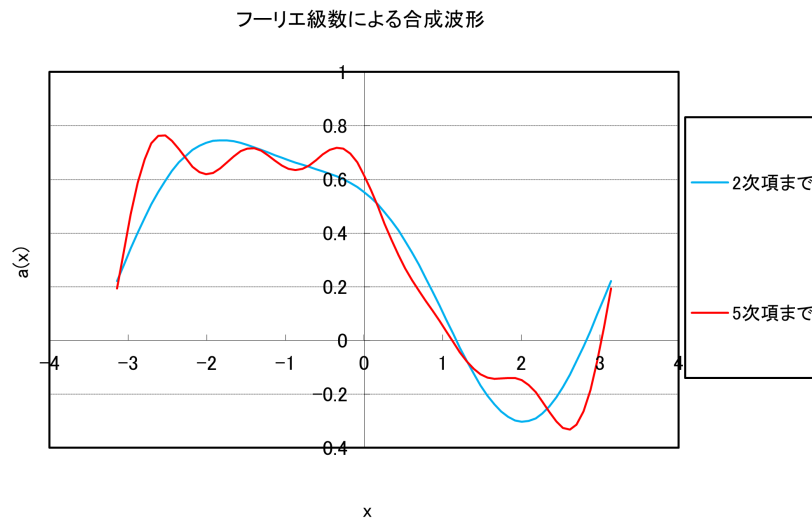


図 4 $a(x)$ のグラフ (水色:2 次まで, 赤:5 次まで)

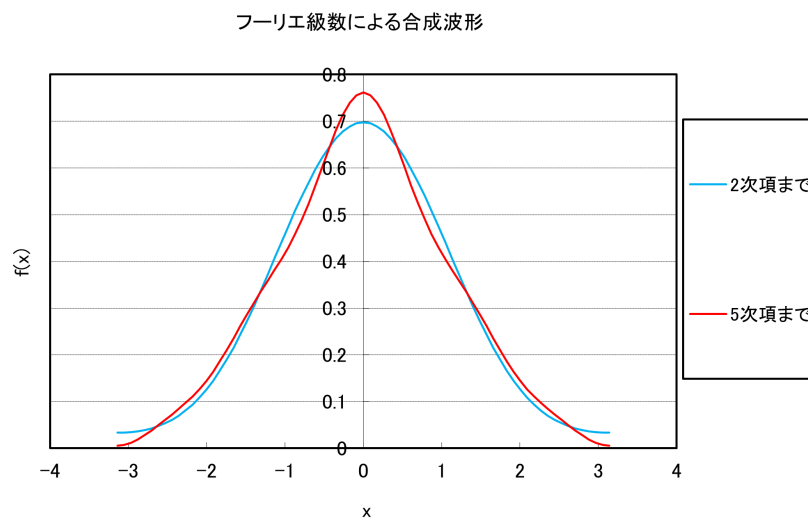


図 5 $b(x)$ のグラフ (水色:2 次まで, 赤:5 次まで)

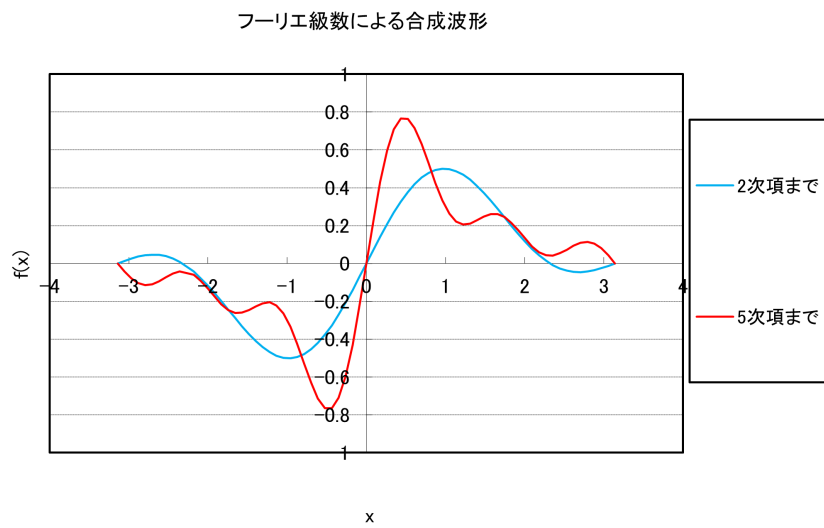


図 6 $c(x)$ のグラフ (水色:2 次まで, 赤:5 次まで)

1-3

以下に $\Delta a(x)$, $\Delta b(x)$, $\Delta c(x)$ のグラフを示す.

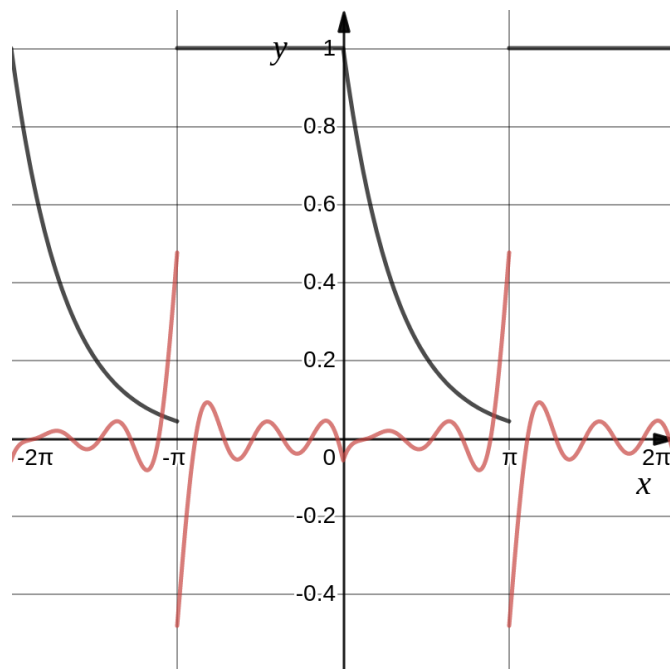


図 7 $y = f(x)$ (黒線) と $y = \Delta a(x)$ (赤線,5 次まで)(by desmos 計算機)

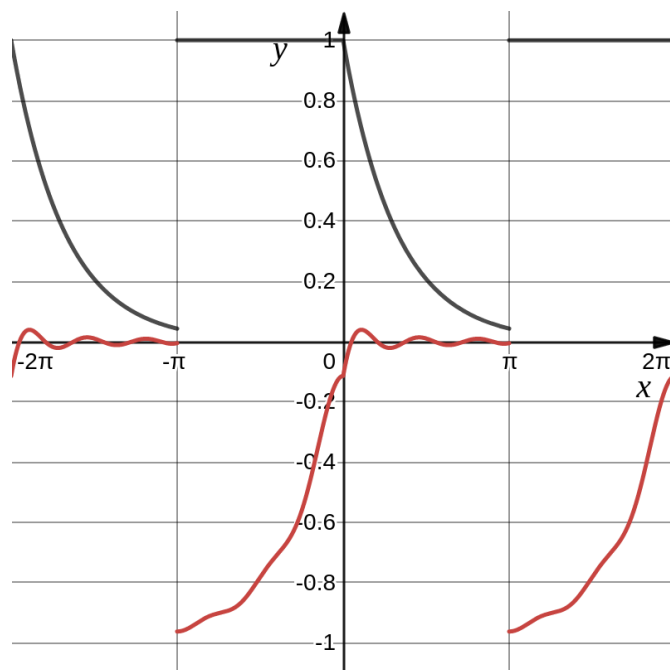


図 8 $y = f(x)$ (黒線) と $y = \Delta b(x)$ (赤線,5 次まで)(by desmos 計算機)

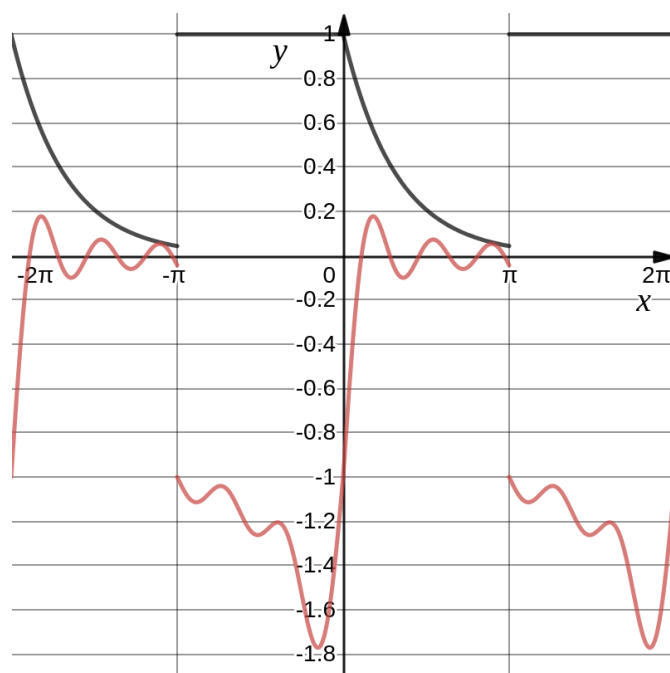


図 9 $y = f(x)$ (黒線) と $y = \Delta c(x)$ (赤線,5 次まで)(by desmos 計算機)

1-4

(1) 図 1 や図 4 から級数の次数が高いほど元の波形に近づいていることがわかる. そして無限級数となったとき, 級数は元の波形と一致する.(完全性)

(2) 図 6 や図 1 の不連続点をみると関数の不連続点 $x = x_0$ では級数の値は

$$\frac{\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow +x_0} f(x)}{2}$$

に収束している.(Dirichlet の定理)

(3) 図 1, 図 7 を見ると, 不連続点では誤差が大きくなっていることがわかる. 不連続点では項数が有限である限り級数は収束しない.(Gibbs の現象)

(4) 表 2, 表 3 を見ると $b(x)$ の方が $c(x)$ に比べて係数がすぐに小さくなっていることがわかる. そのため図 5, 図 6 のように, $b(x)$ の方が $c(x)$ より早く元の関数に近づいていることがわかる.

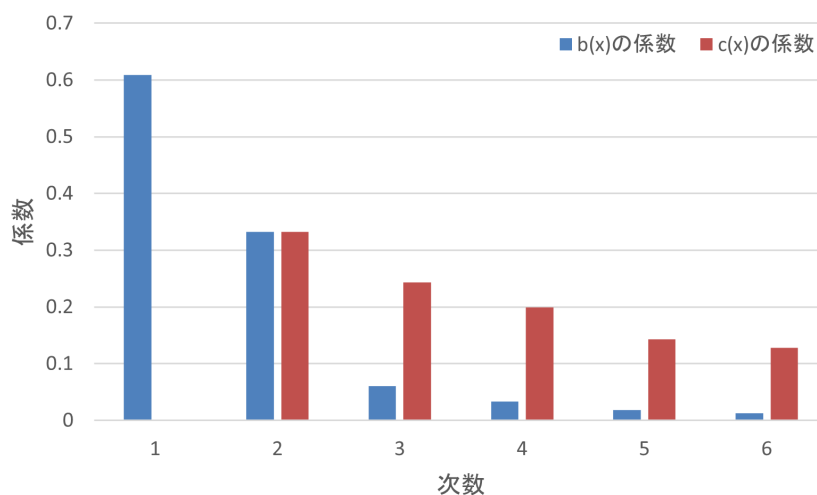


図 10 $b(x)$ と $c(x)$ の係数

(5) 図 5, 図 6 から Fourier 余弦級数は偶関数, Fourier 正弦級数は奇関数となっていることがわかる.