物理数学 第一回レポート

佐々木良輔

2020 年 10 月 26 日

1-(a)

与式を $x,\ y$ で微分すると,Cauchy-Riemann の方程式より以下を得る.

$$u_x + v_x = u_x - u_y = v_x + v_y = 3(x^2 + 2xy - y^2) \tag{1.1}$$

$$u_y + v_y = u_x + u_y = -v_x + v_y = 3(x^2 - 2xy - y^2) \tag{1.2}$$

これらを連立すると

$$u_x = 3(x^2 - y^2) \tag{1.3a}$$

$$u_y = -6xy \tag{1.3b}$$

$$v_x = 6xy \tag{1.3c}$$

$$v_y = 3(x^2 - y^2) \tag{1.3d}$$

であり, したがって

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + C_1 \tag{1.4}$$

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C_2 \tag{1.5}$$

となる. ここで $C_1,\ C_2 \in \mathbb{C}$ は積分定数である. 一方 $u + v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ なので

$$C_1 + C_2 = 0 \tag{1.6}$$

を満たす必要がある. 以上より求める $f(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z) &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) + C \\ &= (x + iy)^3 + C \\ &= z^3 + C \qquad (C = C_1 + iC_2) \end{aligned}$$

1-(b)

与式を x, y について 1 階, 2 階偏微分すると

$$u_x = v_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \tag{1.7a}$$

$$u_y = -v_x = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \tag{1.7b}$$

$$u_{xx} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \tag{1.7c}$$

$$u_{yy} = -\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \tag{1.7d}$$

となる. したがって

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.8}$$

とラプラス方程式を満たし, これは調和関数である. また (1.7a), (1.7b) より

$$v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C \tag{1.9}$$

$$\tag{1.10}$$

となる. ここで $C \in \mathbb{C}$ は積分定数である. したがって求める $f(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + iC \\ &= \frac{\overline{z}}{z^2} + iC \\ &= \frac{1}{z} + iC \end{aligned}$$

ただし $f(z)$ の実部が u なので $C \in \mathbb{R}$ である.

2-(a)

$n \in \mathbb{N}$ において $\mathrm{Re(n + \frac{1}{2})} > 0$ なので, 漸化式 $\mathbf{\Gamma(z) = (z - 1)\Gamma(z - 1)}$ より

$$\mathbf{\Gamma}(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2}) \tag{2.1}$$

$$= (\frac{2n-1}{2})(\frac{2n-3}{2}) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2}) \tag{2.2}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2}) \tag{2.3}$$

ここで Gamma 関数と Beta 関数の関係から

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2})^2 &= \mathbf{B}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\mathbf{\Gamma}(1) \\ &= \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} dt \\ &= \pi \\ \therefore\ \ \mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi} \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる. 以上から

$$\mathbf{\Gamma}(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

2-(b)

$$\mathbf{\Gamma}(x+1) = \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t} dt \tag{2.5}$$

において $t = x\tau$, $dt = x d\tau$ とすると以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}(x+1) &= \int_0^\infty (x\tau)^x \mathrm{e}^{-x\tau} x d\tau && (2.6)\\
&= x^{x+1} \int_0^\infty \tau^x \mathrm{e}^{-x\tau} d\tau && (2.7)\\
&= x^{x+1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(\tau - \log\tau)} d\tau && (2.8)\\
&= x^{x+1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xh(\tau)} d\tau && (2.9)
\end{aligned}$$

ここで $h(\tau) =: \tau - \log\tau$ である. $h(\tau)$ の増減を考えると, 表 1 のように $\tau = 1$ で最小値を取る. $x \gg 1$ のとき, 図 1 のように $e^{-xh(\tau)}$ は急激に減衰するため $h(\tau)$ の最小値付近が支配的に積分に寄与する. よって $h(\tau)$ を $\tau = 1$ 周りでテイラー展開すると

$$h(\tau) = 1 + \frac{(\tau-1)^2}{2} - \frac{(\tau-1)^3}{3} + \frac{(\tau-1)^4}{4} - \cdots \tag{2.10}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}(x+1) &= x^{x+1} \int_0^\infty d\tau \ \exp -x\left[1 + \frac{(\tau-1)^2}{2} - \frac{(\tau-1)^3}{3} + \frac{(\tau-1)^4}{4} - \cdots\right] && (2.11)\\
&= \mathrm{e}^{-x} x^{x+1} \int_0^\infty d\tau \ \exp -x\left[\frac{(\tau-1)^2}{2} - \frac{(\tau-1)^3}{3} + \frac{(\tau-1)^4}{4} - \cdots\right] && (2.12)
\end{aligned}$$

ここで $y = \sqrt{x}(\tau - 1)$ と変数変換する. このとき $dy = \sqrt{x}dt$, 積分区間は $[-\sqrt{x}, \infty)$ なので

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}(x+1) &= \mathrm{e}^{-x} x^{x+1} \int_{-\sqrt{x}}^\infty \frac{dy}{\sqrt{x}} \ \exp -x\left[\frac{y^2}{2x} - \frac{y^3}{3x\sqrt{x}} + \frac{y^4}{4x^2} - \cdots\right] && (2.13)\\
&= \mathrm{e}^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{x}}^\infty dy \ \exp\left[-\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3\sqrt{x}} - \frac{y^4}{4x} + \cdots\right] && (2.14)
\end{aligned}$$

ただし図 2 のように $y \leq -\sqrt{x}$ で級数は減衰しているので, 積分区間を $(-\infty, \infty)$ に拡張し

$$\mathbf{\Gamma}(x+1) \simeq \mathrm{e}^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^\infty dy \ \exp\left[-\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3\sqrt{x}} - \frac{y^4}{4x} + \cdots\right] \tag{2.15}$$

を得る.

表 1　増減表

τ	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dh}{d\tau}$	$-$	0	$+$
$h(\tau)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

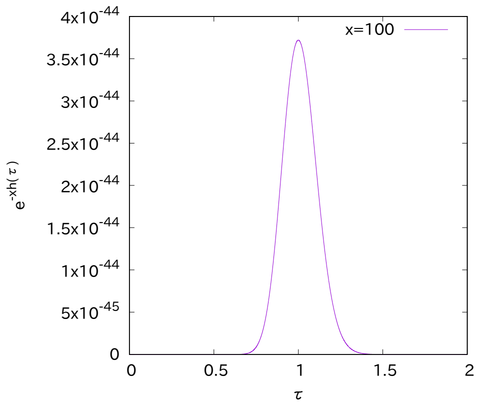

図 1　$e^{-xh(\tau)}$ の減衰

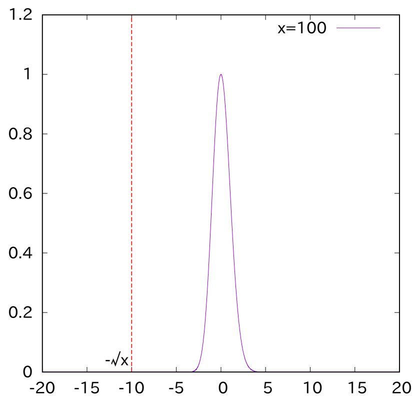

図 2　$x = -\sqrt{x}$ と級数との関係

2-(c)

(2.15) を再掲する．

$$\mathbf{\Gamma}(x+1) \simeq \mathrm{e}^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \ \exp\left[-\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3\sqrt{x}} - \frac{y^4}{4x} + \cdots\right] \tag{2.15}$$

$$= \mathrm{e}^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \ \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{y^3}{3\sqrt{x}}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y^4}{4x}} \cdots \tag{2.16}$$

ここで被積分項を $\frac{1}{\sqrt{x}}$ について展開し，$\frac{1}{x}$ までの項を拾うと

$$\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{y^3}{3\sqrt{x}}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y^4}{4x}} \cdots = \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} (1 + \frac{y^3}{3\sqrt{x}} + \frac{y^6}{18x} \cdots)(1 - \frac{y^4}{4x} + \cdots) \tag{2.17}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} (1 + \frac{y^3}{3\sqrt{x}} - \frac{y^4}{4x} + \frac{y^6}{18x} \cdots) \tag{2.18}$$

したがって (2.16) は

$$\mathbf{\Gamma}(x+1) \simeq \mathrm{e}^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \ \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} (1 + \frac{y^3}{3\sqrt{x}} - \frac{y^4}{4x} + \frac{y^6}{18x} \cdots) \tag{2.19}$$

と展開される．ここで以下の積分を考える．

$$\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.20}$$

ここで n : 奇数 のとき, 被積分関数は奇関数なので

$$\mathrm{I}_n = 0 \tag{2.21}$$

である. 一方で n : 偶数 のとき $m \in \mathbb{N}$ を用いて

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{2m} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx &(2.22)\\
&= -\left[x^{2m-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + (2m-1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{2(n-1)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx &(2.23)\\
&= (2m-1)\mathrm{I}_{2n-2} &(2.24)\\
&= (2m-1)!! \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx &(2.25)\\
&= (2m-1)!!\sqrt{2\pi} &(2.26)
\end{aligned}$$

したがって (2.19) は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}(x+1) &\simeq \mathrm{e}^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}(1 - \frac{1}{4x}\cdot 3 + \frac{1}{18x}\cdot 3 \cdot 5 + \cdots) &(2.27)\\
&= \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{12x} + \cdots) &(2.28)
\end{aligned}$$

となる.