応用数学 期末レポート

佐々木良輔

1-1

$a(x)$ について

　$f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \{-\pi \leq x \leq 0\} \\ \mathrm{e}^{-x} & \{0 \leq x \leq \pi\} \end{cases}$$

で定義する. このとき Fourier 係数は以下で与えられる. まず a_0 について

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right\} \\ &= 1 + \frac{1}{\pi}(1-\mathrm{e}^{-\pi}) \end{aligned}$$

次に a_n について

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\cos nx\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\cdot\cos nx\mathrm{d}x\right\} \end{aligned}$$

ここで $I = \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\cdot\cos nx\mathrm{d}x$ とすると, 部分積分を用いて

$$\begin{aligned} I &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\cos nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\cos nx\right]_0^{\pi} + n\left[e^{-x}\sin nx\right]_0^{\pi} - n^2 I \\ \therefore \qquad I &= \frac{\mathrm{e}^{-\pi}n\sin n\pi - \mathrm{e}^{-\pi}\cos n\pi + 1}{n^2+1} \end{aligned}$$

であるので以下を得る.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}\cos n\pi}{n^2+1}$$

同様に b_n について

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\cdot\sin nx\mathrm{d}x\right\} \end{aligned}$$

ここで $I = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-x}\cdot\sin nx\mathrm{d}x$ とすると

$$\begin{aligned} I &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\sin nx\right]_0^\pi + \int_0^\pi n\mathrm{e}^{-x}\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\sin nx\right]_0^\pi - n\left[e^{-x}\cos nx\right]_0^\pi - n^2 I \\ \therefore \qquad I &= \frac{-\mathrm{e}^{-\pi}\sin n\pi - \mathrm{e}^{-\pi}n\cos n\pi + n}{n^2+1} \end{aligned}$$

であるので以下を得る.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos n\pi - 1}{n} + \frac{n - \mathrm{e}^{-\pi}n\cos n\pi}{n^2+1}\right\}$$

以上から求める Fourier 級数 $a(x)$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} a(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\pi}(1-\mathrm{e}^{-\pi})\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(&\frac{1}{\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}\cos n\pi}{n^2+1}\cos nx \\ &+\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos n\pi - 1}{n} + \frac{n-\mathrm{e}^{-\pi}n\cos n\pi}{n^2+1}\right\}\sin nx\Bigg) \end{aligned}$$

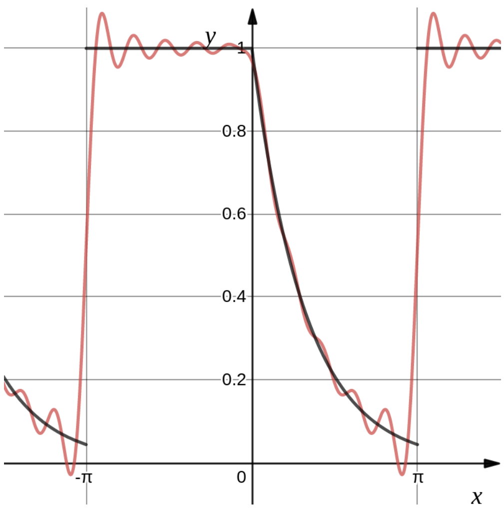

図 1　$y = f(x)$(黒線) と $y = a(x)$(赤線,10 次まで)(by desmos 計算機)

$b(x)$ について

$x \in [0, \pi]$ としたときの Fourier 余弦級数の係数は以下で与えられる. まず a_0 について

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}(1-\mathrm{e}^{-\pi})
\end{aligned}
$$

次に a_n について

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\cdot\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}\cos n\pi}{n^2+1}
\end{aligned}
$$

以上から求める Fourier 余弦級数 $b(x)$ は以下のようになる.

$$
b(x) = \frac{1}{\pi}(1-\mathrm{e}^{-\pi}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}\cos n\pi}{n^2+1}
$$

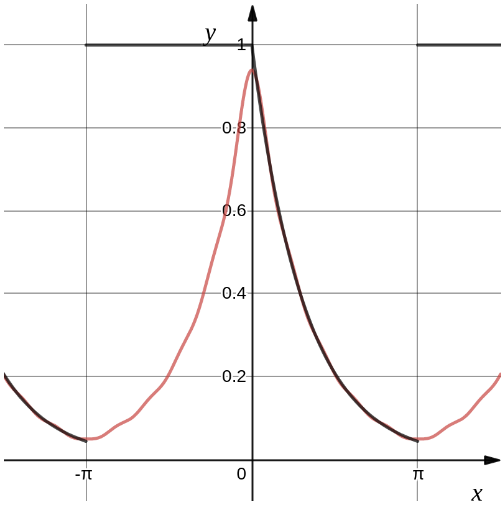

図 2　$y=f(x)$(黒線) と $y=b(x)$(赤線,10 次まで)(by desmos 計算機)

$c(x)$ について

$x \in [0, \pi]$ としたときの Fourier 正弦級数の係数は以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\cdot\sin nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{n-\mathrm{e}^{-\pi}n\cos n\pi}{n^2+1}
\end{aligned}
$$

以上から求める Fourier 正弦級数は以下のようになる．

$$
c(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{n-\mathrm{e}^{-\pi}n\cos n\pi}{n^2+1}
$$

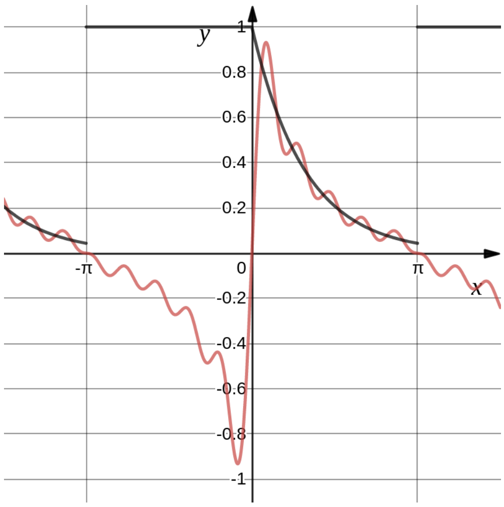

図 3　$y = f(x)$(黒線) と $y = c(x)$(赤線,10 次まで)(by desmos 計算機)

1-2-(a),(b)

以下に各次数の Fourier 係数を示す．

表 1　$a(x)$ の Fourier 係数

次数 n	a_n	b_n
0	$1+(1-\mathrm{e}^{-\pi})/\pi$	0
1	$(1+\mathrm{e}^{-\pi})/2\pi$	$(\mathrm{e}^{-\pi}-3)/2\pi$
2	$(1-\mathrm{e}^{-\pi})/5\pi$	$(2-2\mathrm{e}^{-\pi})/5\pi$
3	$(1+\mathrm{e}^{-\pi})/10\pi$	$(9\mathrm{e}^{-\pi}-11)/30\pi$
4	$(1-\mathrm{e}^{-\pi})/17\pi$	$(4-4\mathrm{e}^{-\pi})/17\pi$
5	$(1+\mathrm{e}^{-\pi})/26\pi$	$(25\mathrm{e}^{-\pi}-27)/130\pi$

表 2　$b(x)$ の Fourier 係数

次数 n	a_n
0	$2(1-\mathrm{e}^{-\pi})/\pi$
1	$(1+\mathrm{e}^{-\pi})/\pi$
2	$(1-\mathrm{e}^{-\pi})/5\pi$
3	$(1+\mathrm{e}^{-\pi})/10\pi$
4	$(1-\mathrm{e}^{-\pi})/17\pi$
5	$(1+\mathrm{e}^{-\pi})/26\pi$

表 3　c(x) について

次数 n	b_n
1	$(1+\mathrm{e}^{-\pi})/\pi$
2	$(4-4\mathrm{e}^{-\pi})/5\pi$
3	$(3+3\mathrm{e}^{-\pi})/5\pi$
4	$(8-8\mathrm{e}^{-\pi})/17\pi$
5	$(5+5\mathrm{e}^{-\pi})/13\pi$

したがって各 Fourier 級数をプロットすると以下のグラフを得る.

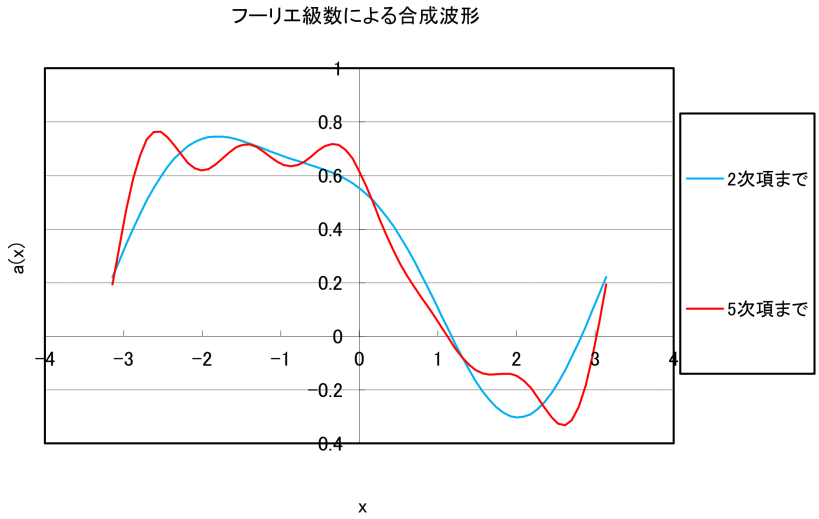

図 4　$a(x)$ のグラフ (水色:2 次まで, 赤:5 次まで)

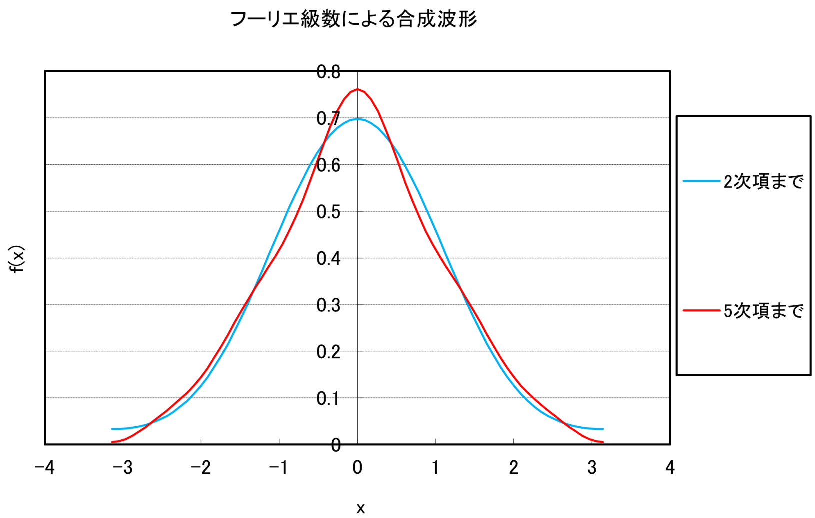

図 5　$b(x)$ のグラフ (水色:2 次まで, 赤:5 次まで)

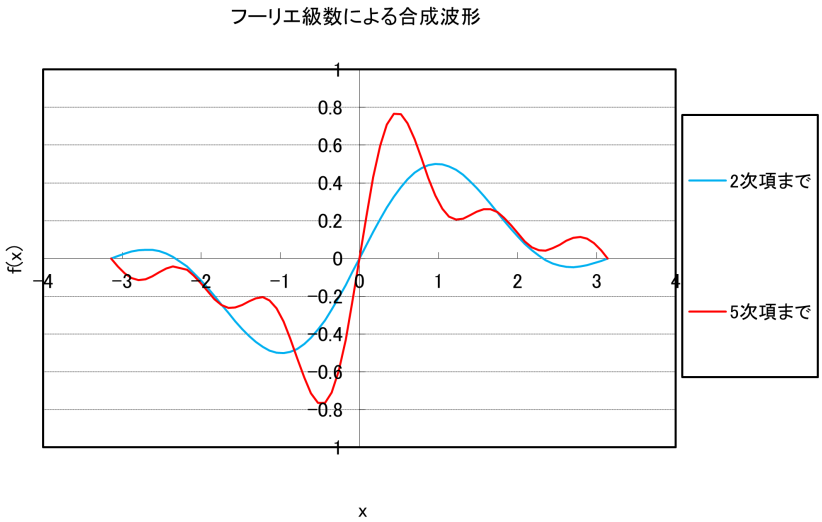

図 6　$c(x)$ のグラフ (水色:2 次まで, 赤:5 次まで)

1-3

以下に $\Delta a(x)$, $\Delta b(x)$, $\Delta c(x)$ のグラフを示す.

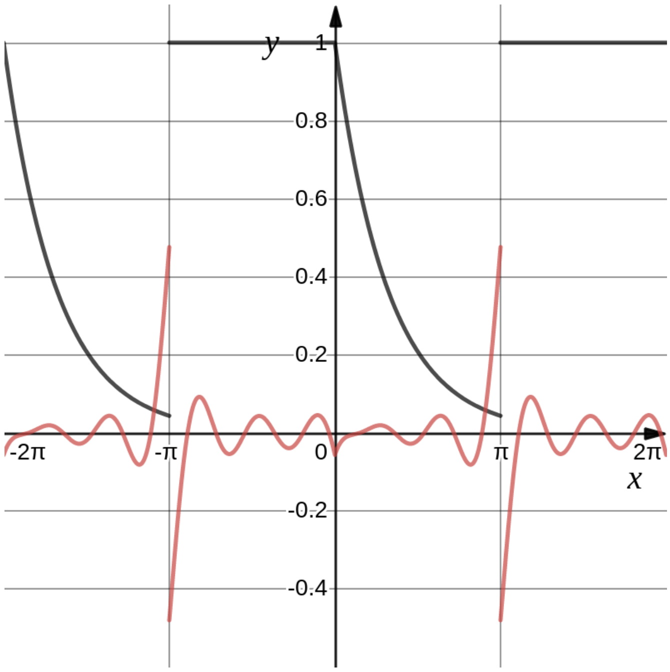

図 7　$y = f(x)$(黒線) と $y = \Delta a(x)$(赤線,5 次まで)(by desmos 計算機)

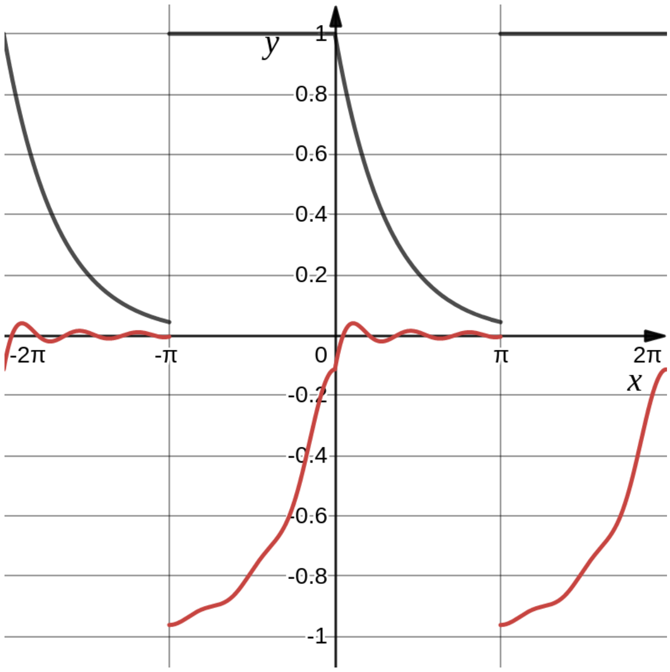

図 8　$y = f(x)$(黒線) と $y = \Delta b(x)$(赤線,5 次まで)(by desmos 計算機)

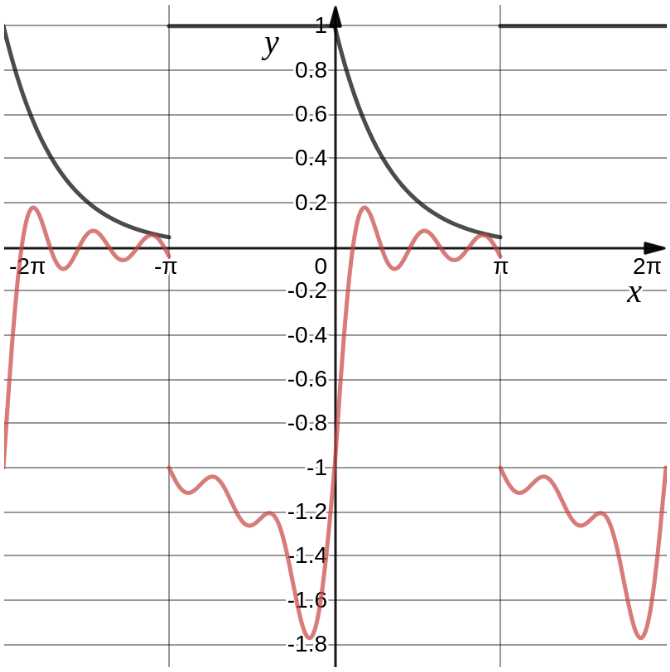

図 9　$y = f(x)$(黒線) と $y = \Delta c(x)$(赤線,5 次まで)(by desmos 計算機)

1-4

(1) 図 1 や図 4 から級数の次数が高いほど元の波形に近づいていることがわかる. そして無限級数となったとき, 級数は元の波形と一致する.(完全性)
(2) 図 6 や図 1 の不連続点をみると関数の不連続点 $x = x_0$ では級数の値は

$$\frac{\lim_{x\to -x_0} f(x) + \lim_{x\to +x_0} f(x)}{2}$$

に収束している.(Dirichlet の定理)
(3) 図 1, 図 7 を見ると, 不連続点では誤差が大きくなっていることがわかる. 不連続点では項数が有限である限り級数は収束しない.(Gibbs の現象)
(4) 表 2, 表 3 を見ると $b(x)$ の方が $c(x)$ に比べて係数がすぐに小さくなっていることがわかる. そのため図 5, 図 6 のように, $b(x)$ の方が $c(x)$ より早く元の関数に近づいていることがわかる.

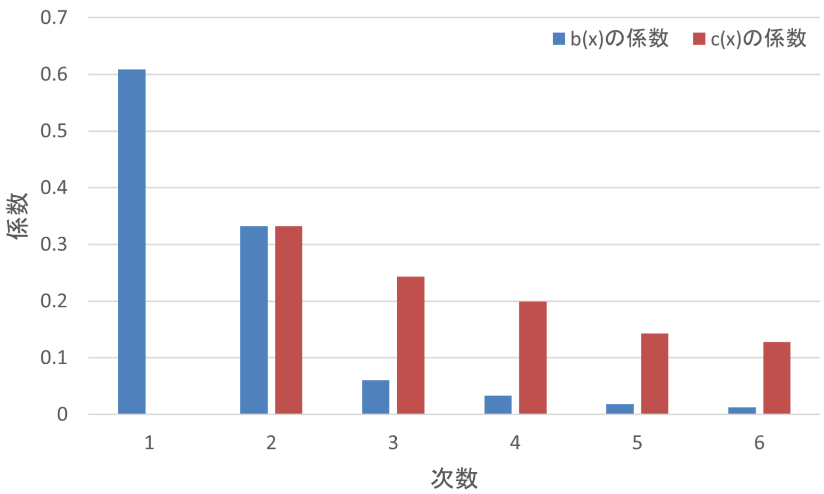

図 10　$b(x)$ と $c(x)$ の係数

(5) 図 5, 図 6 から Fourier 余弦級数は偶関数, Fourier 正弦級数は奇関数となっていることがわかる.

2-1

図 11, 図 12 に元波形と周波数スペクトルを示す. これらは自作の python スクリプト (を参照) で作成した. python スクリプトでは csv データを配列に格納し, これに numpy ライブラリの fft.fft 関数を掛けている. この関数は以下の定義式に基づき離散 Fourier 変換を行う.[1]

$$F_k = \sum_{m=0}^{n-1} f_k \exp\left(-2\pi i \frac{mk}{n}\right)$$

この値は複素数であるので, スペクトルにおいては絶対値を取った. 結果は matplotlib にて出力した.

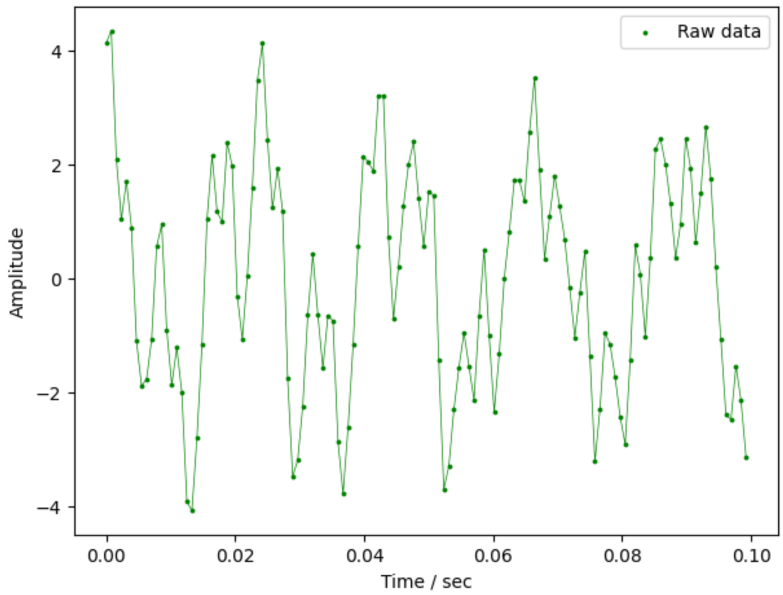

図 11　元波形

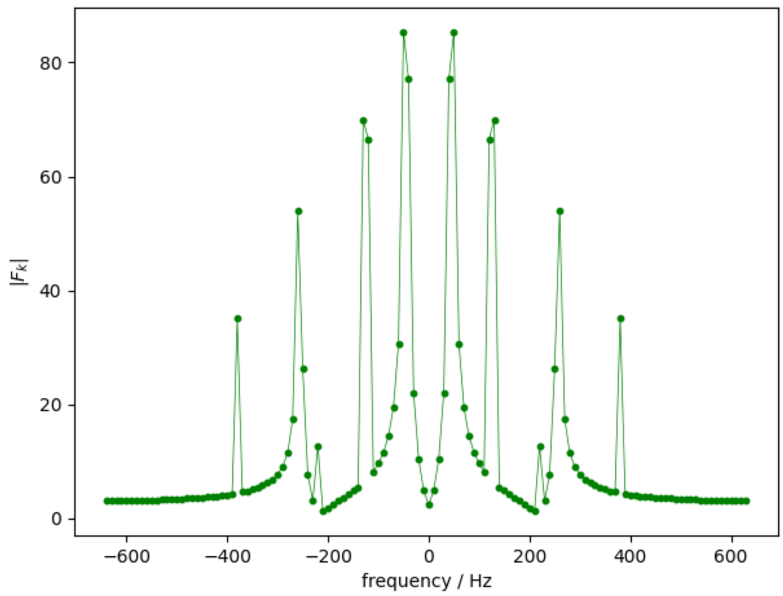

図 12　周波数スペクトル

2-2

元データは幾つかの余弦波の合成であるので, 理想的には周波数スペクトルは図 13 のように δ 関数からなるはずである. しかし実際には, 図 12 のように量子化誤差や離散化によりノイズやサイドローブが乗っていると考えられる. したがって振幅スペクトルのピークを拾うことでノイズを除去し, 元の余弦波を得る. ピークは Scipy ライブラリの signal.find_peaks 関数による極大値, ならびに閾値により検出している.

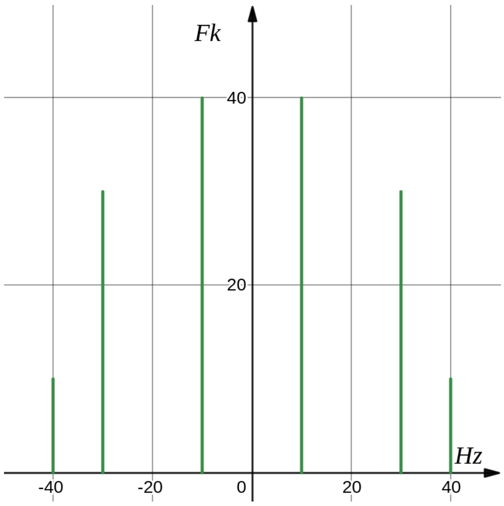

図 13　理想的なスペクトルの例

図 14 に振幅スペクトル, 図 15 に位相スペクトルを示す. それぞれのスペクトルには振幅スペクトルのピークを書き込んでいる. なお振幅は以下のように計算される.

$$A_k = \frac{|F_k| \times 2}{N}$$

また表 4 にはノイズ除去により得られたピーク周波数と, そこでの振幅, 位相を示す. これを元に再合成した波形を図 16 に示す. 図 16 のように再合成した波形は元データをある程度再現している. したがって元データは表 4 に示した周波数, 振幅, 位相の余弦波の重ね合わせであると考えられる.

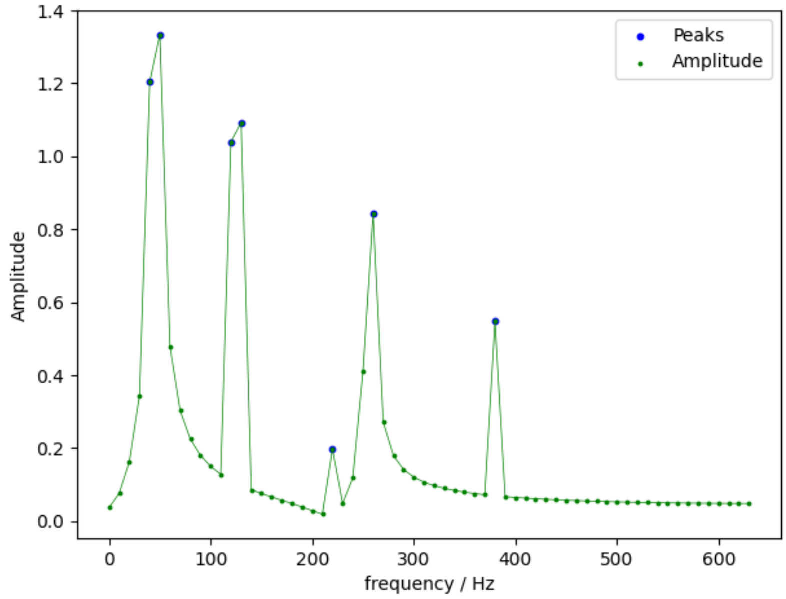

図 14　振幅スペクトルとそのピーク

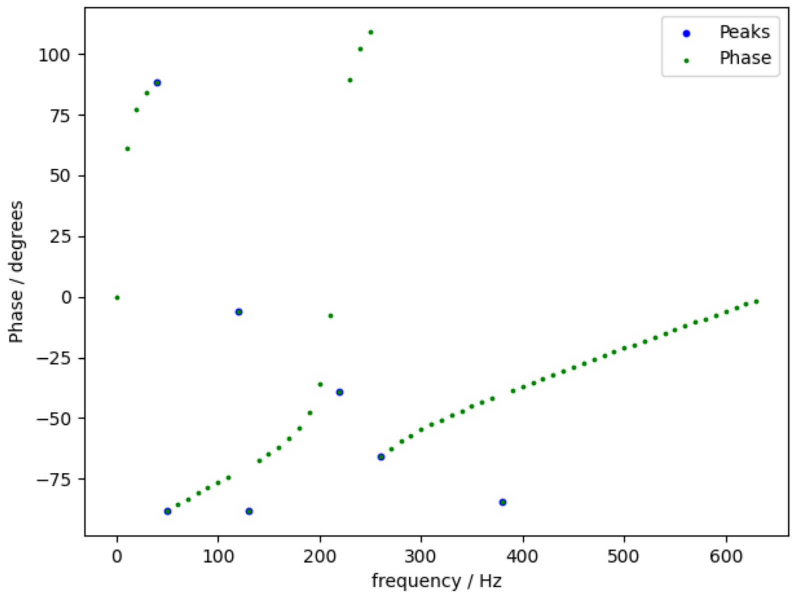

図 15　位相スペクトル

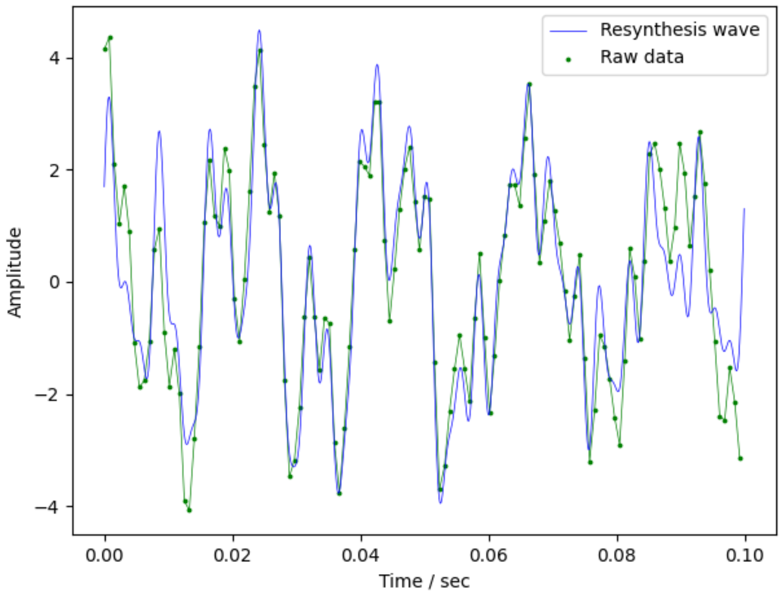

図 16　再合成した波形

表 4　ピーク周波数, 振幅, 位相

周波数 / Hz	振幅	位相 / °
40.0	1.20	88.2
50.0	1.33	-88.4
120	1.04	-5.86
130	1.09	-88.2
220	0.197	-38.9
260	0.843	-65.9
380	0.548	-84.4

3-1

図 17 に元データと再合成した波形, 図 18 に周波数スペクトルを示す. これらはの python スクリプトで描画した. また Nyquist 周波数 f_{N1} は以下のようになる.

$$f_{N1} = \frac{1}{2\Delta t} = 64.0 \text{ Hz}$$

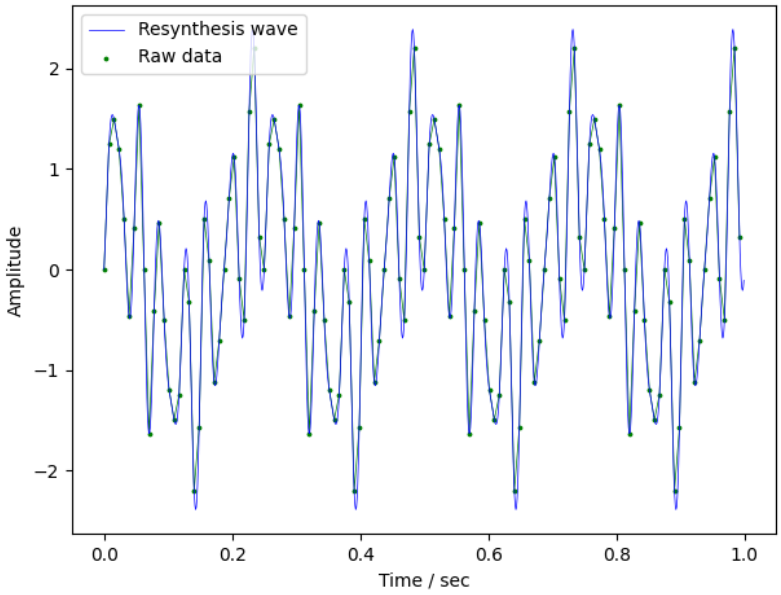

図 17　元データと再合成したデータ

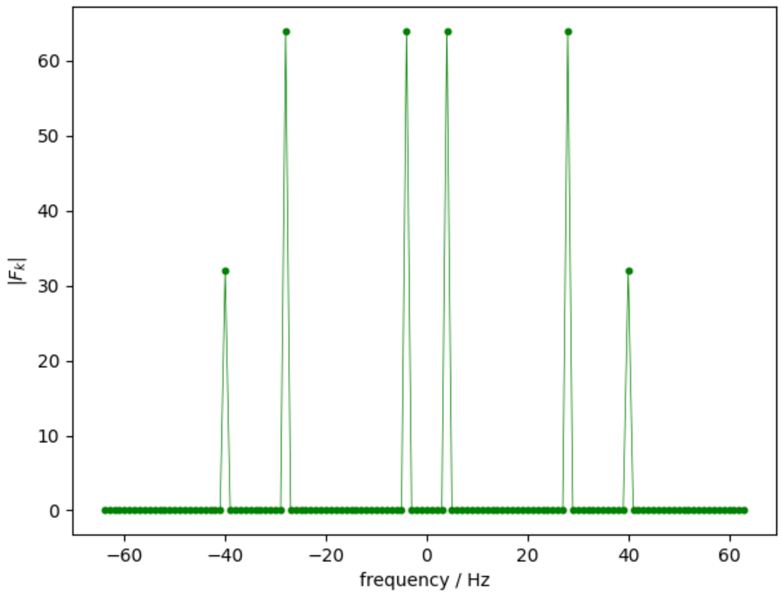

図 18　周波数スペクトル

参考文献

[1] numpy. Discrete fourier transform (numpy.fft) — numpy v1.19 manual. https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.fft.html#module-numpy.fft. (Accessed on 01/26/2021).