物理学演習第 1 No.1, 2 レポート

佐々木良輔

1-1.(d)

関数 $f(x) = x^2$ を Fourier 級数で表わせ

$f(x)$ は偶関数なので

$$\begin{aligned}
B_n &= 0 \\
A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2 \\
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[x^2 \frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \mathrm{d}x\right\} \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left\{\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{2}{n^2\pi}(\pi \cos n\pi + \pi \cos n\pi) \\
&= \frac{4}{n^2}\cos n\pi \\
&= \frac{4}{n^2}(-1)^n
\end{aligned}$$

以上から

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \tag{1}$$

1-1.(e)

(i)

(1) 式において $x = \pi$ とすると

$$
\begin{aligned}
f(\pi) &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \pi^2 \\
\therefore \zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

(ii)

(1) 式において $x = 0$ とすると

$$
f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0
$$

両辺に -1 を掛けると

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= 0 \\
-\mathrm{Li}_2(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}
$$

2-3.(d)

　$A = x,\ B = p$ としたとき交換関係を考える．

$$
\begin{aligned}
[x, p]\psi &= x\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi - \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\psi \\
&= x\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi - \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x \cdot \psi + \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi \cdot x\right) \\
&= -\frac{\hbar}{i}\psi = i\hbar\psi
\end{aligned}
$$

したがって $[x, p] = i\hbar$ であり $C = \hbar$ となる．以上と Kennard-Robertson の不等式から

$$
\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}
$$

が示された．

　また等号成立時は $I(\lambda) = \langle(\lambda\tilde{A} + i\tilde{B})\psi, (\lambda\tilde{A} + i\tilde{B})\psi\rangle = 0$ より $(\lambda\tilde{A} + i\tilde{B})\psi = 0$ である．ここで

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= x - \langle x\rangle \\
\tilde{p} &= \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \langle p\rangle
\end{aligned}
$$

なので $(\lambda\tilde{A}+i\tilde{B})\psi=0$ は以下のように書き換わる.

$$\left[\lambda(x-\langle x\rangle)+\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-i\langle p\rangle\right]\psi=0$$

この微分方程式を解く.

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=\left[-\frac{\lambda}{\hbar}(x-\langle x\rangle)+\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle\right]\psi$$

変数分離法を用いると

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi}&=\int\mathrm{d}x\left(-\frac{\lambda}{\hbar}(x-\langle x\rangle)+\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle\right)\\\log|\psi|&=-\frac{\lambda}{2\hbar}(x-\langle x\rangle)^2+\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle x+C\\|\psi|&=\exp\left((x-\langle x\rangle)^2+\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle x+C\right)\end{aligned}$$

右辺は正なので絶対値をはずし

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\exp\left((x-\langle x\rangle)^2+\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle x+C\right)\\&=A\exp\left(\left(x-\frac{2\langle x\rangle+\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle}{2}\right)^2\right)\qquad\left(A:=\mathrm{e}^{\langle x\rangle^2+C-\left(\frac{2\langle x\rangle+\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle}{2}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

となり, これは確かにガウス関数である.