第 6 回 1-(3)

佐々木良輔

問題：

$$
\begin{cases}
(\Delta\phi - \epsilon\mu\partial_t^2\phi) + \partial_t(\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \epsilon\mu\partial_t\phi) = -\dfrac{\rho}{\epsilon} \\
(\Delta\boldsymbol{A} - \epsilon\mu\partial_t^2\boldsymbol{A}) + \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \epsilon\mu\partial_t\phi) = -\mu\boldsymbol{i}
\end{cases}
\tag{2}
$$

$$
\phi_L = \phi + \partial_t u_L, \qquad \boldsymbol{A}_L = \boldsymbol{A} - \mathrm{grad}\ u_L
$$

式 (2) が上のゲージ変換において u_L が適当な関係式を満たすとき以下のように書き換わることを示せ.

$$
\begin{cases}
\Delta\phi_L - \epsilon\mu\partial_t^2\phi_L = -\dfrac{\rho}{\epsilon} \\
\Delta\boldsymbol{A}_L - \epsilon\mu\partial_t^2\boldsymbol{A}_L = -\mu\boldsymbol{i}
\end{cases}
\tag{3}
$$

解答：

式 (2) にゲージ変換を適用すると

$$
\begin{cases}
(\Delta\phi_L - \epsilon\mu\partial_t^2\phi_L) + \partial_t(\mathrm{div}\boldsymbol{A}_L + \epsilon\mu\partial_t\phi_L) = -\dfrac{\rho}{\epsilon} \\
(\Delta\boldsymbol{A}_L - \epsilon\mu\partial_t^2\boldsymbol{A}_L) + \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}_L + \epsilon\mu\partial_t\phi_L) = -\mu\boldsymbol{i}
\end{cases}
$$

このとき

$$
\mathrm{div}\boldsymbol{A}_L + \epsilon\mu\partial_t\phi_L = 0 \tag{1'}
$$

ならば式 (3) となる. 式 (1') に ϕ_L, $\boldsymbol{A}_L$ を代入すると.

$$
\mathrm{div}\boldsymbol{A} - \mathrm{div\ grad}\ u_L + \epsilon\mu\partial_t(\phi + \partial_t u_L) = 0
$$

$\mathrm{div\ grad} = \Delta$ より u_L に関する項を左辺に揃えると

$$
(\Delta - \epsilon\mu\partial_t^2)u_L = \mathrm{div}\boldsymbol{A} + \epsilon\mu\partial_t\phi \tag{2'}
$$

よって式 (1') を満たす u_L が存在し, それが式 (2') から求まることがわかる. したがって式 (2') のもとで式 (2) は式 (3) のように書き換わる. 式 (2') を満たすゲージ変換を Lorentz 変換と呼ぶ.

ただし Lorentz 変換は以下を満たす χ について自由度が残っている.

$$
(\Delta - \epsilon\mu\partial_t^2)\chi = 0 \tag{3'}
$$

実際に式 (2') と辺々足すことで

$$
(\Delta - \epsilon\mu\partial_t^2)(u_L + \chi) = \mathrm{div}\boldsymbol{A} + \epsilon\mu\partial_t\phi
$$

となり $u_L + \chi$ という変換のもとで式 (3) が得られることがわかる.