

問題：

$$\begin{cases} (\Delta\phi - \epsilon\mu\partial_t^2\phi) + \partial_t(\operatorname{div}\mathbf{A} + \epsilon\mu\partial_t\phi) = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ (\Delta\mathbf{A} - \epsilon\mu\partial_t^2\mathbf{A}) + \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{A} + \epsilon\mu\partial_t\phi) = -\mu\mathbf{i} \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi_L = \phi + \partial_t u_L, \quad \mathbf{A}_L = \mathbf{A} - \operatorname{grad} u_L$$

式 (2) が上のゲージ変換において u_L が適当な関係式を満たすとき以下のように書き換わることを示せ.

$$\begin{cases} \Delta\phi_L - \epsilon\mu\partial_t^2\phi_L = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \Delta\mathbf{A}_L - \epsilon\mu\partial_t^2\mathbf{A}_L = -\mu\mathbf{i} \end{cases} \quad (3)$$

解答：

式 (2) にゲージ変換を適用すると

$$\begin{cases} (\Delta\phi_L - \epsilon\mu\partial_t^2\phi_L) + \partial_t(\operatorname{div}\mathbf{A}_L + \epsilon\mu\partial_t\phi_L) = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ (\Delta\mathbf{A}_L - \epsilon\mu\partial_t^2\mathbf{A}_L) + \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{A}_L + \epsilon\mu\partial_t\phi_L) = -\mu\mathbf{i} \end{cases}$$

このとき

$$\operatorname{div}\mathbf{A}_L + \epsilon\mu\partial_t\phi_L = 0 \quad (1')$$

ならば式 (3) となる. 式 (1') に ϕ_L, \mathbf{A}_L を代入すると.

$$\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} u_L + \epsilon\mu\partial_t(\phi + \partial_t u_L) = 0$$

$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$ より u_L に関する項を左辺に揃えると

$$(\Delta - \epsilon\mu\partial_t^2)u_L = \operatorname{div}\mathbf{A} + \epsilon\mu\partial_t\phi \quad (2')$$

よって式 (1') を満たす u_L が存在し, それが式 (2') から求まることがわかる. したがって式 (2') のもとで式 (2) は式 (3) のように書き換わる. このゲージ変換を Lorentz ゲージと呼ぶ.

ただし Lorentz ゲージは以下を満たす χ について自由度が残っている.

$$(\Delta - \epsilon\mu\partial_t^2)\chi = 0 \quad (3')$$

実際に式 (2') と辺々足すことで

$$(\Delta - \epsilon\mu\partial_t^2)(u_L + \chi) = \operatorname{div}\mathbf{A} + \epsilon\mu\partial_t\phi$$

となり $u_L + \chi$ という変換のもとで式 (3) が得られることがわかる.