物理数学 第一回レポート

佐々木良輔

2020 年 10 月 14 日

1-(a)

与式を x, y で微分すると,Cauchy-Riemann の方程式より以下を得る.

$$u_x + v_x = u_x - u_y = v_x + v_y = 3(x^2 + 2xy - y^2) \tag{1.1}$$
$$u_y + v_y = u_x + u_y = -v_x + v_y = 3(x^2 - 2xy - y^2) \tag{1.2}$$

これらを連立すると

$$u_x = 3(x^2 - y^2) \tag{1.3a}$$
$$u_y = -6xy \tag{1.3b}$$
$$v_x = 6xy \tag{1.3c}$$
$$v_y = 3(x^2 - y^2) \tag{1.3d}$$

であり, したがって

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + C_1 \tag{1.4}$$
$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C_2 \tag{1.5}$$

となる. ここで $C_1,\ C_2 \in \mathbb{C}$ は積分定数である. 一方 $u + v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ なので

$$C_1 + C_2 = 0 \tag{1.6}$$

を満たす必要がある. 以上より求める $f(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z) &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) + C \\ &= (x + iy)^3 + C \\ &= z^3 + C \qquad (C = C_1 + iC_2) \end{aligned}$$

1-(b)

与式を x, y について 1 階, 2 階偏微分すると

$$u_x = v_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \tag{1.7a}$$

$$u_y = -v_x = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \tag{1.7b}$$

$$u_{xx} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \tag{1.7c}$$

$$u_{yy} = -\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \tag{1.7d}$$

となる. したがって

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.8}$$

とラプラス方程式を満たし, これは調和関数である. また (1.7a), (1.7b) より

$$v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C \tag{1.9}$$

$$\tag{1.10}$$

となる. ここで $C \in \mathbb{C}$ は積分定数である. したがって求める $f(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + iC \\ &= \frac{\overline{z}}{z^2} + iC \\ &= \frac{1}{z} + iC \end{aligned}$$

ただし $f(z)$ の実部が u なので $C \in \mathbb{R}$ である.

2-(a)

$n \in \mathbb{N}$ において $\mathrm{Re(n + \frac{1}{2})} > 0$ なので, 漸化式 $\mathbf{\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)}$ より

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}(n+\frac{1}{2}) &= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2}) &(2.1)\\
&= (\frac{2n-1}{2})(\frac{2n-3}{2})\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2}) &(2.2)\\
&= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2}) &(2.3)
\end{aligned}$$

ここで Gamma 関数と Beta 関数の関係から

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2})^2 &= \mathbf{B}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\mathbf{\Gamma}(1)\\
&= \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}dt &(2.4)\\
&= \pi\\
\therefore\ \mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

となる. 以上から

$$\mathbf{\Gamma}(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

2-(b)

$$\mathbf{\Gamma}(x+1)=\int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t}dt \tag{2.5}$$

において $t=x\tau$, $dt=xd\tau$ とすると以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}(x+1)&=\int_0^\infty (x\tau)^x \mathrm{e}^{-x\tau}xd\tau &(2.6)\\
&=x^{x+1}\int_0^\infty \tau^x \mathrm{e}^{-x\tau}d\tau &(2.7)\\
&=x^{x+1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(\tau-\log\tau)}d\tau &(2.8)\\
&=x^{x+1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xh(\tau)}d\tau &(2.9)
\end{aligned}$$

ここで $h(\tau)=:\tau-\log\tau$ である. $h(\tau)$ の増減を考えると, 表 1 のように $\tau=1$ で最小値を取る. $x\gg 1$ のとき, 図 1 のように $e^{-xh(\tau)}$ は急激に減衰するため $h(\tau)$ の最小値付近が支配的に積分に寄与する. よって $h(\tau)$ を $\tau=1$ 周りでテイラー展開すると

$$h(\tau)=1+\frac{(\tau-1)^2}{2}-\frac{(\tau-1)^3}{3}+\frac{(\tau-1)^4}{4}-\cdots \tag{2.10}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}(x+1)&=x^{x+1}\int_0^\infty d\tau\ \exp -x\left[1+\frac{(\tau-1)^2}{2}-\frac{(\tau-1)^3}{3}+\frac{(\tau-1)^4}{4}-\cdots\right] &(2.11)\\
&=\mathrm{e}^{-x}x^{x+1}\int_0^\infty d\tau\ \exp -x\left[\frac{(\tau-1)^2}{2}-\frac{(\tau-1)^3}{3}+\frac{(\tau-1)^4}{4}-\cdots\right] &(2.12)
\end{aligned}$$

ここで $y=\sqrt{x}(\tau-1)$ と変数変換する. このとき $dy=\sqrt{x}dt$, 積分区間は $[-\sqrt{x},\infty)$ なので

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}(x+1)&=\mathrm{e}^{-x}x^{x+1}\int_{-\sqrt{x}}^\infty \frac{dy}{\sqrt{x}}\ \exp -x\left[\frac{y^2}{2x}-\frac{y^3}{3x\sqrt{x}}+\frac{y^4}{4x^2}-\cdots\right] &(2.13)\\
&=\mathrm{e}^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{x}}^\infty dy\ \exp\left[-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3\sqrt{x}}-\frac{y^4}{4x}+\cdots\right] &(2.14)
\end{aligned}$$

ただし図 2 のように $y\leq-\sqrt{x}$ で級数は減衰しているので, 積分区間を $(-\infty,\infty)$ に拡張し

$$\mathbf{\Gamma}(x+1)\simeq\mathrm{e}^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty dy\ \exp\left[-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3\sqrt{x}}-\frac{y^4}{4x}+\cdots\right] \tag{2.15}$$

を得る.

表 1　増減表

τ	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dh}{d\tau}$	$-$	0	$+$
$h(\tau)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

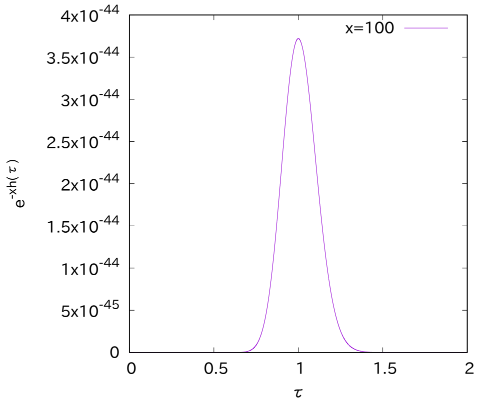

図 1　$e^{-xh(\tau)}$ の減衰

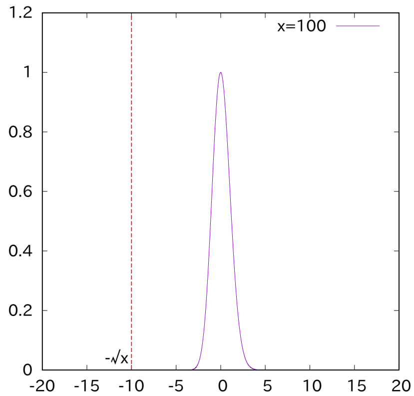

図 2　$x = -\sqrt{x}$ と級数との関係

2-(c)