電磁気学第 1 期末レポート

61908697 佐々木良輔

1-(ア)

任意の微分可能なスカラー関数 χ を用いて $\boldsymbol{A}'$, ϕ' を以下のように定義する.

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$$
$$\phi' = \phi - \partial_t\chi$$

このときそれぞれのポテンシャルから得られる磁束密度 $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{E}'$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}' &= \nabla \times \boldsymbol{A}' \\
&= \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times (\nabla\chi) \\
&= \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{E}' &= -\nabla\phi' - \partial_t\boldsymbol{A} \\
&= -\nabla\phi + \nabla(\partial_t\chi) - \partial_t\boldsymbol{A} - \partial_t(\nabla\chi) \\
&= -\nabla\phi - \partial_t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

となる. χ は任意であったので同じ $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ を与える $\boldsymbol{A}$, ϕ を無数に作り出すことができる.

1-(イ)

Maxwell 方程式を以下に示す.

$$\begin{cases}
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{true} & \text{(Gauss の法則 (電気))} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 & \text{(Gauss の法則 (磁気))} \\
\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t\boldsymbol{B} & \text{(Faraday の法則)} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \partial_t\boldsymbol{D} & \text{(Maxwell-Ampere の法則)}
\end{cases}$$

これを $\boldsymbol{A}$, ϕ で書き換える.

① 磁気に関する Gauss の法則

$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ より

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

であり, 恒等式 $\forall\boldsymbol{A},\ \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$ より自明である.

② Faraday の法則

$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ より同様に

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} + \partial_t \boldsymbol{B} &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \partial_t (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= 0 \\ \nabla \times (\boldsymbol{E} + \partial_t \boldsymbol{A}) &= 0 \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}$ より

$$\nabla \times (-\nabla\phi) = 0$$

であり, 恒等式 $\forall\phi,\ \nabla \times (\nabla\phi) = 0$ より自明である.

③ Maxwell-Ampere の法則

$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ と恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$ から

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{H} \\ &= \frac{1}{\mu}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \\ &= \frac{1}{\mu}(\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

また $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}$ から

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \boldsymbol{j} + \varepsilon\partial_t \boldsymbol{E} \\ &= \boldsymbol{j} + \varepsilon\partial_t(-\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{j} + \varepsilon\partial_t(-\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}) \\ (\Delta - \varepsilon\mu\partial_t^2)\boldsymbol{A} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon\mu\partial_t\phi) &= -\mu\boldsymbol{j} \qquad (1) \end{aligned}$$

となる.

④ 電気に関する Gauss の法則

$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}$ から

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_{true} \\ \nabla \cdot (-\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}) &= \frac{\rho_{true}}{\varepsilon} \\ \Delta\phi + \nabla \cdot (\partial_t \boldsymbol{A}) &= -\frac{\rho_{true}}{\varepsilon} \qquad (2) \end{aligned}$$

となる.

ここで Lorentz 条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon\mu\partial_t\phi = 0$ を課すと (1) 式は

$$(\Delta - \varepsilon\mu\partial_t^2)\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{j} \tag{3}$$

さらに

$$\nabla \cdot (\partial_t \boldsymbol{A}) = \partial_t(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\varepsilon\mu\partial_t^2\phi$$

より (2) 式は

$$(\Delta - \varepsilon\mu\partial_t^2)\phi = -\frac{\rho_{true}}{\varepsilon} \tag{4}$$

となる. 以上から $\boldsymbol{A}$, ϕ に関して以下を得る.

$$\begin{cases} (\Delta - \varepsilon\mu\partial_t^2)\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{j} \\ (\Delta - \varepsilon\mu\partial_t^2)\phi = -\frac{\rho_{true}}{\varepsilon} \end{cases}$$