

電磁気学第 1 期末レポート

61908697 佐々木良輔

【1】

1-(ア)

任意の微分可能なスカラー関数 χ を用いて A' , ϕ' を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}A' &= A + \nabla\chi \\ \phi' &= \phi - \partial_t\chi\end{aligned}$$

このときそれぞれのポテンシャルから得られる磁束密度 B' , E' は

$$\begin{aligned}B' &= \nabla \times A' \\ &= \nabla \times A + \nabla \times (\nabla\chi) \\ &= \nabla \times A = B \\ E' &= -\nabla\phi' - \partial_t A \\ &= -\nabla\phi + \nabla(\partial_t\chi) - \partial_t A - \partial_t(\nabla\chi) \\ &= -\nabla\phi - \partial_t A = E\end{aligned}$$

となる. χ は任意であったので同じ B , E を与える A , ϕ を無数に作り出すことができる.

1-(イ)

Maxwell 方程式を以下に示す.

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho_{true} & (\text{Gauss の法則 (電気)}) \\ \nabla \cdot B = 0 & (\text{Gauss の法則 (磁気)}) \\ \nabla \times E = -\partial_t B & (\text{Faraday の法則}) \\ \nabla \times H = j + \partial_t D & (\text{Maxwell-Ampere の法則}) \end{cases}$$

これを A , ϕ で書き換える.

磁気に関する Gauss の法則

$B = \nabla \times A$ より

$$\begin{aligned}\nabla \cdot B &= \nabla \cdot (\nabla \times A) \\ &= 0\end{aligned}$$

であり, 恒等式 $\forall \mathbf{A}, \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ より自明である.

Faraday の法則

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ より同様に

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\ \nabla \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) &= 0\end{aligned}$$

ここで $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$ より

$$\nabla \times (-\nabla\phi) = 0$$

であり, 恒等式 $\forall \phi, \nabla \times (\nabla\phi) = 0$ より自明である.

Maxwell-Ampere の法則

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ と恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ から

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{H} \\ &= \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{\mu} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A})\end{aligned}$$

また $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$ から

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \mathbf{j} + \varepsilon \partial_t \mathbf{E} \\ &= \mathbf{j} + \varepsilon \partial_t (-\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A})\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}) &= \mathbf{j} + \varepsilon \partial_t (-\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}) \\ (\Delta - \varepsilon \mu \partial_t^2) \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \partial_t \phi) &= -\mu \mathbf{j}\end{aligned}\tag{1}$$

となる.

電気に関する Gauss の法則

$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$ から

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{true} \\ \nabla \cdot (-\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}) &= \frac{\rho_{true}}{\varepsilon} \\ \Delta\phi + \nabla \cdot (\partial_t \mathbf{A}) &= -\frac{\rho_{true}}{\varepsilon}\end{aligned}\tag{2}$$

となる.

ここで Lorentz 条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu\partial_t\phi = 0$ を課すと (1) 式は

$$(\Delta - \varepsilon\mu\partial_t^2)\mathbf{A} = -\mu\mathbf{j} \quad (3)$$

さらに

$$\nabla \cdot (\partial_t \mathbf{A}) = \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\varepsilon\mu\partial_t^2\phi$$

より (2) 式は

$$(\Delta - \varepsilon\mu\partial_t^2)\phi = -\frac{\rho_{true}}{\varepsilon} \quad (4)$$

となる. 以上から \mathbf{A} , ϕ に関して以下を得る.

$$\begin{cases} (\Delta - \varepsilon\mu\partial_t^2)\mathbf{A} = -\mu\mathbf{j} \\ (\Delta - \varepsilon\mu\partial_t^2)\phi = -\frac{\rho_{true}}{\varepsilon} \end{cases}$$

1-(ウ)

ラプラス方程式は以下の方程式である.

$$\Delta\phi = 0$$

ただし極座標でのラプラシアンは以下で与えられる.

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2$$

したがって $\phi = R(r)Y(\theta, \varphi)$ と変数分離すると

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)RY + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)RY + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2RY = 0$$

両辺 r^2 を掛け, RY で割る

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{RY} \cdot \frac{Y}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)R &= -\frac{r^2}{RY} \cdot \frac{R}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)Y - \frac{r^2}{RY} \cdot \frac{R}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2Y \\ \frac{1}{R}\partial_r(r^2\partial_r)R &= -\frac{1}{Y}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)Y + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2Y\right\} \end{aligned}$$

両辺はそれぞれ r と θ, φ のみに依る関数なので定数 λ とおける. したがって

$$\begin{cases} \frac{1}{R}\partial_r(r^2\partial_r)R = \lambda \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{Y}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)Y + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2Y\right\} = -\lambda \end{cases} \quad (6)$$

さらに $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ とすると (6) 式は以下のように変数分離できる.

$$\sin^2 \theta \cdot \frac{1}{\Theta \Phi} \left\{ \frac{\Phi}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) \Theta + \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \Phi \right\} = -\sin^2 \theta \lambda$$

$$\frac{1}{\Theta} \sin \theta \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Theta) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \partial_\varphi^2 \Phi$$

これも同様に定数 κ とおけるので

$$\begin{cases} \frac{1}{\Theta} \sin \theta \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Theta) + \lambda \sin^2 \theta = \kappa \\ \frac{1}{\Phi} \partial_\varphi^2 \Phi = -\kappa \end{cases} \quad (7)$$

$$(8)$$

よって (5) 式, (7) 式, (8) 式がそれぞれの微分方程式となる.

1-(工)

Poisson 方程式に対する Green 関数 $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ は以下で与えられる.

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

したがって ϕ の解は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (-\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{-\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

1-(オ)

電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ は δ 関数を用いて以下のように表される.

$$\rho(\mathbf{r}) = \{-q\delta(y+3a) + q\delta(y+a) + q\delta(y-a) - q\delta(y-3a)\}\delta(x)\delta(z)$$

\mathbf{r}'_i を各電荷の位置ベクトルとすると $|\mathbf{r}'_1|^2 = |\mathbf{r}'_4|^2 = 9a^2$, $|\mathbf{r}'_2|^2 = |\mathbf{r}'_3|^2 = a^2$ である. 四重極子モーメントテンソル \tilde{Q} を計算する. $x' = z' = 0$ なので

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{xx} &= \tilde{Q}_{zz} = \int \rho(\mathbf{r}') (3x'x' - r'^2 \delta_{11}) dV' \\ &= (-q)(-9a^2) + q(-a^2) + q(-a^2) + (-q)(-9a^2) \\ &= 16qa^2 \end{aligned}$$

x', z' を含むので

$$\tilde{Q}_{xy} = \tilde{Q}_{yx} = 0$$

$$\tilde{Q}_{yz} = \tilde{Q}_{zy} = 0$$

$$\tilde{Q}_{zx} = \tilde{Q}_{xz} = 0$$

$$\tilde{Q}_{xx} + \tilde{Q}_{yy} + \tilde{Q}_{zz} = 1 \text{ から}$$

$$\tilde{Q}_{yy} = -32qa^2$$

以上から

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 16qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & -32qa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 16qa^2 \end{pmatrix}$$

したがって四重極子モーメント Q は

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i,j} x_i x_j \tilde{Q}_{ij} \\ &= 16qa^2(x^2 + z^2) - 32qa^2y^2 \end{aligned}$$

スカラーポテンシャル ϕ_Q は

$$\begin{aligned} \phi_Q &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \frac{1}{2} Q \\ &= \frac{2qa^2}{\pi\epsilon_0} \frac{(x^2 - 2y^2 + z^2)}{r^5} \end{aligned}$$

電場ベクトル (E_x, E_y, E_z) は

$$\begin{cases} E_x = -\partial_x \phi_Q = \frac{2qa^2}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{2x}{r^5} - \frac{5x(x^2 - 2y^2 + z^2)}{r^7} \right) \\ E_y = -\partial_y \phi_Q = \frac{2qa^2}{\pi\epsilon_0} \left(-\frac{4y}{r^5} - \frac{5y(x^2 - 2y^2 + z^2)}{r^7} \right) \\ E_z = -\partial_z \phi_Q = \frac{2qa^2}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{2z}{r^5} - \frac{5z(x^2 - 2y^2 + z^2)}{r^7} \right) \end{cases}$$

1-(力)

導体に与えられた電荷は全て表面に分布する. また対称性から電荷 Q は球の表面に均一に分布する. したがって球体表面の電荷密度を σ とすると

$$\begin{aligned} Q &= \int \sigma dS \\ &= 4\pi a^2 \sigma \\ \therefore \sigma &= \frac{Q}{4\pi a^2} \end{aligned}$$

したがって静電張力は $dF/dS = \sigma^2 \hat{n}/2\epsilon_0$ で与えられるので

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dS} &= \left(\frac{Q}{4\pi a^2} \right)^2 \frac{\hat{n}}{2\epsilon_0} \\ &= \frac{Q^2 \hat{n}}{32\pi^2 \epsilon_0 a^4} \end{aligned}$$

1-(キ)

電荷に関する連続の式から

$$\begin{aligned}\partial_t \rho &= -\nabla \cdot \mathbf{j} \\ &= -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (\because \text{Ohm の法則}) \\ &= -\sigma \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\because \text{Gauss の法則})\end{aligned}$$

これは ρ に関する一次の微分方程式なので

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right)$$

したがって $\rho(t) = \rho_0/e$ となるのは

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

である.

【2】

問題

2-1

単位長さあたりの巻数を n , 半径 a , 長さ l の軸に直角に巻いたソレノイドに電流 I を流すとき, x 軸上での磁界を求めよ.

【参考：問題 7-1-15】

2-2

2-1 のソレノイドに透磁率 μ の磁性体の芯を入れ電磁石を作る. 磁性体の磁気モーメントを求めよ. ただしソレノイド内の等 x 面で磁界は一定であるとする.

【参考：問題 6-2-17】

2-3

2-2 の電磁石の重さが w である. 電磁石は図のように中心から距離 d 離れた支点 P で支えられ東西方向の軸で自由に回転できるとする. これが地磁気の強さ H , 伏角 i の北半球の地点に置かれたとき, この磁石を水平に保つための電流 I を求めよ.

【参考：問題 6-1-7.1】

解答

2-1

P 点から距離 x 離れた地点の dx には ndx 巻の電流ループが存在する. 図のように r, θ を定めると

$$x = a \cot \theta$$
$$dx = -\frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta = -\frac{r}{\sin \theta} d\theta$$

であり, 詳解電磁気学演習 問題 7-1-11 の結果を用いると

$$dH = \frac{a^2 I n dx}{2(a^2 x^2)^{3/2}} = -\frac{nI}{2} \sin \theta d\theta$$

したがって

$$\mathbf{H} = -\frac{nI}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \hat{x} = \frac{nI}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{x}$$

2-2

図のように θ'_1 を取ると $\cos \theta'_1 = -\cos \theta_1$ である。また

$$\begin{aligned}\cos \theta'_1 &= \frac{l-x}{\sqrt{a^2+(l-x)^2}} \\ \cos \theta_2 &= \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\end{aligned}$$

である。また透磁率 μ の磁性体に磁界 H を掛けたときの磁化は $J_m = (\mu - \mu_0)H$ であり、更に等 x 面での H が等しいので

$$J_m = \frac{nI(\mu - \mu_0)}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{a^2+(l-x)^2}} \right) \hat{x}$$

また磁気モーメントは $dM = J_m dV$ なので

$$\begin{aligned}M &= \int_0^l J_m \pi a^2 dx \\ &= \frac{nI(\mu - \mu_0)\pi a^2}{2} \hat{x} \int_0^l \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{a^2+(l-x)^2}} dx \\ &= \frac{nI(\mu - \mu_0)\pi a^2}{2} \left(\left[\sqrt{a^2+x^2} \right]_0^l - \left[\sqrt{a^2+(l-x)^2} \right]_0^l \right) \hat{x} \\ &= nI(\mu - \mu_0)\pi a^2 \sqrt{a^2+l^2} \hat{x}\end{aligned}$$

2-3

磁極の強さを m とし、図のように φ を定めるとモーメントの釣り合いから

$$\begin{aligned}-Wd \cos \varphi + mH(l-d) \sin(i-\varphi) + mHd \sin(i-\varphi) &= 0 \\ -Wd \cos \varphi + MH \sin(i-\varphi) &= 0\end{aligned}$$

これが水平で釣り合っているとき $\varphi = 0$ から

$$\begin{aligned}Wd &= MH \sin i \\ \therefore M &= \frac{Wd}{H \sin i} \\ I &= \frac{Wd}{H \sin i} \frac{1}{n(\mu - \mu_0)\pi a^2 \sqrt{a^2+l^2}}\end{aligned}$$

問題の意図

小型の人工衛星では自身の姿勢角を制御する装置として磁気トルカが用いられる。磁気トルカは電磁石による磁気モーメントと地磁気の相互作用によるトルクで姿勢角を制御する装置で、この問題では一次元の場合を考えた。