相対性理論 レポート No.7

佐々木良輔

Q59.

$$W = c\sqrt{m^2c^2 + |p|^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{|p|^2}{m^2c^2}} \tag{1}$$

ここで $|p|/mc \ll 1$ であるならば 2 次まで展開すると

$$W \simeq mc^2(1 + \frac{|p|^2}{2m^2c^2}) = mc^2 + \frac{|p|^2}{2m} \tag{2}$$

となる.

Q62.

Lagrangian L_0 は

$$L_0 = -\sum_i m_i c^2 \sqrt{1 - \left|\frac{v(i)}{c}\right|^2} \tag{3}$$

であったので Hamiltonian H_0 は

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_i p_k(i)v^k(i) + \sum_i m_i c^2 \sqrt{1 - \left|\frac{v(i)}{c}\right|^2} \\ &= \sum_i p_k(i)v^k(i) + m_i c^2 \sqrt{1 - \left|\frac{v(i)}{c}\right|^2} \end{aligned} \tag{4}$$

となり, 各 i について計算すれば十分である. i に関する Hamiltonian を $H_0(i)$ とすると

$$\begin{aligned} H_0(i) &= p_k v^k + mc^2\sqrt{1 - \left|\frac{v}{c}\right|^2} \\ &= c\left(\frac{p^2}{mc} + mc\right)\sqrt{1 - \left|\frac{v}{c}\right|^2} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで Q61. の結果を用いると

$$\begin{aligned} H_0(i) &= c\left(\frac{p^2}{mc} + mc\right)\frac{mc}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} \\ &= c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \end{aligned} \tag{6}$$

以上から

$$H_0 = \sum_i H_0(i) = \sum_i c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \tag{7}$$