相対性理論 レポート No.1

佐々木良輔

Q11.

どの慣性系からみても波の位相は一致すべきなので

$$\begin{aligned} -\omega t + k_x \cdot x &= -\omega' t' + k'_x \cdot x' \\ -\omega t + k_y \cdot y &= -\omega' t' + k'_y \cdot y' \\ -\omega t + k_z \cdot z &= -\omega' t' + k'_z \cdot z' \end{aligned} \tag{1}$$

ここで S' から S への Lorentz 変換は

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right) \\ x &= \gamma \left(x' + \beta c t' \right) \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{2}$$

である. これを (1) に代入すると y, z 成分については直ちに

$$k'_y = k_y,\ k'_z = k_z$$

とわかる. また t, z 成分については

$$\begin{aligned} -\omega' t' + k'_x \cdot x' &= -\omega\gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right) + k_x \gamma \left(x' + \beta c t' \right) \\ &= t' \gamma \left(k_x \beta c - \omega \right) + x' \gamma \left(k_x - \frac{\beta}{c} \omega \right) \end{aligned} \tag{3}$$

t', x' について係数を比較すれば

$$\begin{aligned} \frac{\omega'}{c} &= \gamma \left(\frac{\omega}{c} - k_x \beta \right) \\ k'_x &= \gamma \left(k_x - \frac{\beta}{c} \omega \right) \end{aligned} \tag{4}$$

を得る.

Q16.

(1)

相対論的な速度の合成則において $v/c \ll 1$, $u_x/c \ll 1$, $u'_x/c \ll 1$ としてこれらの 2 次以上の微小項を無視すると

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x}{c}\frac{u_x}{c}} \simeq \frac{u'_x + v}{1 + O(\frac{v^2}{c^2})} = u'_x + v \tag{5}$$

また

$$\gamma = \left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \tag{6}$$

なので

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{u'_i}{\gamma\left(1 + \frac{u'_x}{c}\frac{v}{c}\right)} \\ &\simeq \frac{u'_i}{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\left(1 + \frac{u'_x}{c}\frac{v}{c}\right)} \\ &\simeq \frac{u'_i}{1 + O(\frac{v^2}{c^2})} = u'_i \qquad (i = y, z) \end{aligned} \tag{7}$$

となる.

(2)

S' で見たときの y, z 成分が 0 なので $u'_y = u'_z = 0$ また x 成分に関して $u'_x/c =: \beta'$ とすると相対論的な速度の合成則から

$$u_x = c\frac{\beta' + \beta}{1 + \beta'\beta} \tag{8}$$

ここで β を定数と見て β' について微分すると

$$\frac{\partial u_x}{\partial \beta'} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta'\beta)^2} \tag{9}$$

$0 \le \beta < 1$ なので (9) は常に正であり u_x は β' について単調増加である. ここで $0 \le \beta' < 1$ なので $u_x < u_x|_{\beta'=1}$ であるので

$$u_x < c\frac{1 + \beta}{1 + \beta} = c \tag{10}$$

であり $u_x < c$ が示された.

(3)

$(u_x, u_y) = c(\cos\theta, \sin\theta)$ とする. また $(u'_x, u'_y) = c(\cos\theta', \sin\theta')$ とする. したがって $\tan\theta = u_y/u_x$, $\tan\theta' = u'_y/u'_x$ である. 速度の合成則を逆に解くには S と S' を入れ替えればよいので

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x}{c}\frac{v}{c}} \\ u'_i &= \frac{u_i}{\gamma\left(1 - \frac{u_x}{c}\frac{v}{c}\right)} \qquad (i = y, z) \end{aligned} \tag{11}$$

したがって

$$\begin{aligned} \tan\theta' &= \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{\frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{u_x}{c}\frac{v}{c}\right)}}{\frac{u_x - v}{1-\frac{u_x}{c}\frac{v}{c}}} \\ &= \frac{u_y}{\gamma(u_x - v)} \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{u_x}\frac{1}{1 - \frac{v}{u_x}} \end{aligned} \tag{12}$$

ここで $c = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ より

$$\begin{aligned} \frac{v}{u_x} &= \frac{v}{u_x}\sqrt{\frac{u_x^2 + u_y^2}{c^2}} \\ &= \frac{v}{c}\sqrt{1 + \left(\frac{u_y}{u_x}\right)^2} \\ &= \beta\sqrt{1 + \tan^2\theta} = \frac{\beta}{\cos\theta} \end{aligned} \tag{13}$$

なので

$$\begin{aligned} \tan\theta' &= \frac{1}{\gamma}\tan\theta\frac{1}{1 - \beta\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\theta}{\cos\theta - \beta} \end{aligned} \tag{14}$$

を得る.