相対性理論 レポート No.5

佐々木良輔

Q44.

$f_{\mu\nu}$ は反対称テンソルなので $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$, $f_{\mu\mu} = 0$ である．したがって $\mu < \nu$ だけ考えれば良い．まず $\mu = 0$ かつ $\nu \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f_{0\nu} &= \partial_0 A_\nu - \partial_\nu A_0 \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\eta_{0\rho}A^\rho \\ &= \frac{1}{c}\left(\eta_{\nu\rho}\frac{\partial A^\rho}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}\right) \\ &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $E = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\phi$ だったので

$$\begin{aligned} f_{0\nu} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\phi\right)_\nu \\ &= -\frac{E_\nu}{c} \end{aligned} \tag{2}$$

$\mu = 1$, $\nu = 2$ のとき

$$\begin{aligned} f_{12} &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\eta_{2\rho}A^\rho - \frac{\partial}{\partial y}\eta_{1\sigma}A^\sigma \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{A})_y - \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{A})_x \\ &= (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_z = B_z \end{aligned} \tag{3}$$

同様に $\mu = 1$, $\nu = 3$ のとき

$$\begin{aligned} f_{13} &= \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{A})_x - \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{A})_z\right) \\ &= -(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_y = -B_y \end{aligned} \tag{4}$$

$\mu = 2,\, \nu = 3$ のとき

$$\begin{aligned} f_{23} &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{A})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{A})_y \\ &= B_x \end{aligned} \tag{5}$$

となる.

Q52.

S' 系の原点に固定された電荷 e の作る電場 $\boldsymbol{E}'$ は

$$\boldsymbol{E}' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}(\boldsymbol{e}'_x, \boldsymbol{e}'_y, \boldsymbol{e}'_z) \tag{6}$$

である. また $f'^{\mu\nu}$ は $\alpha = E'/c = e/4\pi\varepsilon_0 c r'^2$ を用いて

$$f'^{\mu\nu} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}' \tag{7}$$

である. ここで S 系が S' 系に対して $-x$ 方向に速度 v で移動する場合の特殊 Lorentz 変換において変換は

$$a^{\mu}{}_{\nu} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \begin{pmatrix} \gamma\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \tag{8}$$

で表される. このとき S 系では $f^{\mu\nu} = a^{\mu}{}_{\rho} a^{\nu}{}_{\sigma} f^{\rho\sigma} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{F}' \boldsymbol{A}$ なので

$$\begin{aligned} f^{\mu\nu} &\stackrel{\mathrm{r}}{=} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{F}' \boldsymbol{A} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha\beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\gamma & \alpha\gamma \\ -\alpha\gamma & \alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma^2(1-\beta^2) & \alpha\gamma & \alpha\gamma \\ -\alpha\gamma^2(1-\beta^2) & 0 & \alpha\gamma\beta & \alpha\gamma\beta \\ -\alpha\gamma & -\alpha\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\alpha\gamma & -\alpha\beta\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha\gamma & \alpha\gamma \\ -\alpha & 0 & \alpha\gamma\beta & \alpha\gamma\beta \\ -\alpha\gamma & -\alpha\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\alpha\gamma & -\alpha\beta\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

よって

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E' \\ \gamma E' \\ \gamma E' \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E'}{c}\gamma\beta \\ \frac{E'}{c}\gamma\beta \end{pmatrix} \tag{10}$$

なので

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{v} \tag{11}$$