物性物理学 No.3

61908697 佐々木良輔

問 1

E_k^0 は波数 k の平面波のエネルギーに等しいので

$$\begin{aligned} E_k^0 - E_{k-h_1}^0 &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 (k-h_1)^2}{2m} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{\pi}{a} - \Delta k\right)^2 - \left(-\frac{\pi}{a} - \Delta k\right)^2\right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{4\pi}{a}\Delta k = \frac{2\hbar^2\pi}{ma}\Delta k =: \Delta E \end{aligned} \tag{1}$$

問 2

$$\begin{aligned} E_\pm &= \frac{1}{2}(E_k^0 + E_{k-h_1}^0) \pm |V_1|\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta E}{2|V_1|}\right)^2} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + (\Delta k)^2\right) \pm |V_1|\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta E}{2|V_1|}\right)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $\Delta E \propto \Delta k$ であることから $(\Delta E/2|V_1|)^2 \ll 1$ とすると

$$\begin{aligned} E_\pm &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + (\Delta k)^2\right) \pm |V_1|\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta E}{2|V_1|}\right)^2\right) \\ &\simeq \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \pm |V_1| + \left(\frac{\hbar^2}{2m} \pm \frac{\hbar^4\pi^2}{2m^2a^2|V_1|}\right)(\Delta k)^2 \\ &= E_{\frac{\pi}{a}}^0 \pm |V_1| + \frac{\hbar^2}{2m}\left(1 \pm \frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2|V_1|}\right)(\Delta k)^2 \\ &= E_{\frac{\pi}{a}}^0 \pm |V_1| + \frac{\hbar^2}{2m}\left(1 \pm 2\frac{E_{\frac{\pi}{a}}^0}{|V_1|}\right)(\Delta k)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

問 3

(3) 式から分散関係は $k = \pi/a$ 近傍において図 1 のように 2 次曲線的な振る舞いをすると考えられる．また $2E_{\frac{\pi}{a}}^0/|V_1| > 0$ なので E_- の曲率は E_+ よりも小さいことがわかる．また基底状態の分

散関係は図 2 のようになめらかに繋がっているべきなので E_- の $(\Delta k)^2$ の係数は負となるべきである．すなわち $|V_1|$ の大きさは $E^0_{\frac{\pi}{a}}$ に比べて十分小さいか, せいぜい同程度であるべきであり, そうでなければ摂動近似が成り立たないと考えられる．

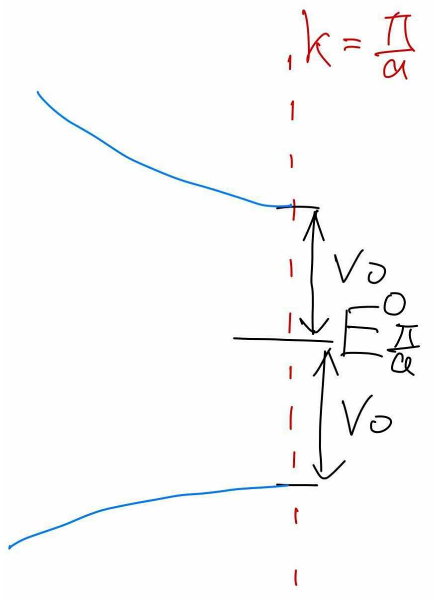

図 1　$k = \pi/a$ 近傍での振る舞い

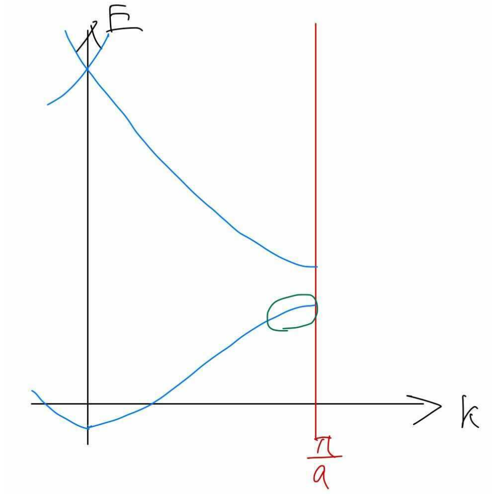

図 2　基底状態の分散関係