

天体物理学レポート No.5

61908697 佐々木良輔

Friedmann 方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho \quad (1)$$

であり両辺に a^2 を掛けて $\tau = H_0 t$ と変換すれば

$$\begin{aligned} \left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 &= -\frac{Kc^2}{H_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} + \frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2} \rho a^2 \\ &= -k_0 + \lambda_0 a^2 + \frac{\rho}{\rho_c} a^2 \end{aligned} \quad (2)$$

ここでエネルギー方程式

$$\dot{\rho} = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) (\rho + P) \quad (3)$$

を考える, 相対論的 (すなわち輻射的) な時には $P = \rho/3$ であるので

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \frac{4\rho}{3} \\ \frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -4 \frac{\dot{a}}{a} \\ \frac{d}{dt} \log \rho &= -4 \frac{d}{dt} \log a \\ \therefore \rho &\propto a^{-4} \end{aligned} \quad (4)$$

一方で非相対論的 (すなわち物質的) な時には $\rho \gg P$ として

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \rho \\ \frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -3 \frac{\dot{a}}{a} \\ \therefore \rho &\propto a^{-3} \end{aligned} \quad (5)$$

となり ρ は a^{-4} の輻射成分と a^{-3} の物質成分に分離できることが期待できるので

$$\rho = \rho_{0r} a^{-4} + \rho_{0m} a^{-3} \quad (6)$$

と置く. さらに

$$\Omega_{0r} = \frac{\rho_{0r}}{\rho_c}, \quad \Omega_{0m} = \frac{\rho_{0m}}{\rho_c} \quad (7)$$

とすれば (2) 式は

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \Omega_{0r}a^{-2} + \Omega_{0m}a^{-1} - k_0 + \lambda_0a^2 \quad (8)$$

となる. 以下では $\Lambda = 0$ の場合を取り扱うので

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \Omega_{0r}a^{-2} + \Omega_{0m}a^{-1} - k_0 \quad (9)$$

となる.

(i) $k_0 = 0$ のとき

(a) 輻射優勢なとき

輻射優勢なときには $\Omega_{0r} \gg \Omega_{0m}$ なので

$$\begin{aligned} \left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 &= \Omega_{0r}a^{-2} \\ \frac{da}{d\tau}a &= \sqrt{\Omega_{0r}} \end{aligned} \quad (10)$$

両辺積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} &= \sqrt{\Omega_{0r}}\tau + C \\ a(\tau) &= \sqrt{2(\sqrt{\Omega_{0r}}\tau + C)} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで現在時刻を $\tau = 0$ とすると現在のスケール因子は 1 と定義されるので

$$C = \frac{1}{2} \quad (12)$$

となる. 以上から

$$a(t) = \sqrt{2H_0\sqrt{\Omega_{0r}}t + 1} \quad (13)$$

である. したがって宇宙は時間の $1/2$ 乗程度のスケールで膨張する.

(b) 物質優勢なとき

物質優勢なときには $\Omega_{0m} \gg \Omega_{0r}$ なので

$$\begin{aligned}\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 &= \Omega_{0m} a^{-1} \\ \frac{da}{d\tau} \sqrt{a} &= \sqrt{\Omega_{0m}} \\ \frac{2}{3} a^{3/2} &= \sqrt{\Omega_{0m}} \tau + C\end{aligned}\tag{14}$$

$a(0) = 1$ とすれば

$$a(\tau) = \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{0m}} \tau + 1\right)^{2/3}\tag{15}$$

したがって

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{0m}} t + 1\right)^{2/3}\tag{16}$$

したがって宇宙は時間の $2/3$ 乗程度のスケールで膨張する.

(ii) $k_0 \neq 0$ のとき

Friedmann 方程式は

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 - \frac{\Omega_{0r}}{a^2} - \frac{\Omega_{0m}}{a} = -k_0\tag{17}$$

ここで

$$U(a) = -\frac{\Omega_{0r}}{a^2} - \frac{\Omega_{0m}}{a}\tag{18}$$

とすると (17) はポテンシャル $U(a)$ 下での質点 a の運動と考えられる. ここで $\Omega_{0r}, \Omega_{0m} > 0$ とすると $U(a)$ は図 1 のような概形になる. したがって $k_0 > 0$ のとき $a(t)$ は最初増加し, 途中で減少に転じるとわかる. 一方で $k_0 < 0$ のとき $a(t)$ は増加し続けると考えられる. 実際 $\Lambda = 0$ のときの解は Friedmann モデルと呼ばれ, 曲率に応じて閉じた宇宙, 平坦な宇宙, 開いた宇宙が解として存在する.[1]

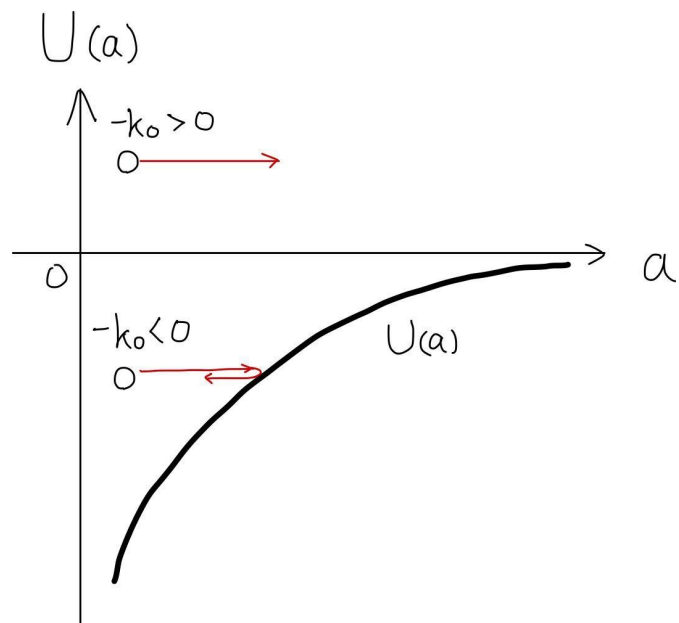


図 1 $U(a)$ の概形

参考文献

- [1] 工学院大学. 現代宇宙論 no.4. <http://www.ns.kogakuin.ac.jp/~ft13245/lecture/2017/Cosmology/CosmologyNo04.pdf>, 2017. (Accessed on 01/20/2022).