相対性理論 レポート No.12

佐々木良輔

3 次元球座標における線素ベクトルは

$$d\boldsymbol{r} = dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta d\phi\boldsymbol{e}_\phi \tag{1}$$

であり基底ベクトルが直交することから線素は

$$ds^2 = (d\boldsymbol{r})^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{2}$$

である. ここで半径 a の 2 次元球面座標上での微小変位を考えると, 球面上での移動においては動径方向の変位が無いので (2) において

$$dr = 0 \tag{3}$$

とすればよい. したがって 2 次元球面上での線素 ds^2 は

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{4}$$

となる. ここで

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{5}$$

なので

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= a^2 \\ g_{\phi\phi} &= a^2\sin^2\theta \\ g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

であり

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \begin{cases} 2a^2\sin\theta\cos\theta & (\lambda=\theta, \mu=\nu=\phi) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{7}$$

したがって

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\phi\phi} &= \frac{1}{2}(-\partial_\theta g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\theta\phi} + \partial_\phi g_{\phi\theta}) \\ &= -a^2\sin\theta\cos\theta \\ &= -\Gamma_{\phi\theta\phi} = -\Gamma_{\phi\phi\theta} \end{aligned} \tag{8}$$

それ以外の $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ は 0 である. また計量を行列表示すると

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{9}$$

したがって

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

以上から Christoffel 記号は

$$\begin{aligned} \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = g^{\theta\rho}\Gamma_{\rho\phi\phi} &= g^{\theta\theta}\Gamma_{\theta\phi\phi} + g^{\theta\phi}\Gamma_{\phi\phi\phi} \\ &= \frac{1}{a^2}(-a^2 \sin\theta\cos\theta) \\ &= -\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = g^{\phi\rho}\Gamma_{\rho\theta\phi} &= g^{\phi\theta}\Gamma_{\theta\theta\phi} + g^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\theta\phi} \\ &= \frac{1}{a^2\sin^2\theta}(a^2 \sin\theta\cos\theta) \\ &= \cot\theta = \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} \end{aligned} \tag{12}$$

それ以外の $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ は 0 である.
　次に曲率テンソルを考える. 対称性から

$$R_{\alpha\alpha\mu\nu} = R\alpha\beta\mu\mu = 0 \tag{13}$$

となるので, 残るのは $\alpha \neq \beta$ かつ $\mu \neq \nu$ である

$$R_{\theta\phi\theta\phi}, R_{\theta\phi\phi\theta}, R_{\phi\theta\theta\phi}, R_{\phi\theta\phi\theta} \tag{14}$$

のみである, 更に対称性から

$$\begin{aligned} R_{\theta\phi\theta\phi} &= -R_{\theta\phi\phi\theta} \\ &= -R_{\phi\theta\theta\phi} \\ &= -(-R_{\phi\theta\phi\theta}) \end{aligned} \tag{15}$$

となるので 1 つの成分だけ考えれば十分である. したがって

$$\begin{aligned} R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi} + \Gamma^{\theta}{}_{\theta\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}{}_{\phi\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\theta\phi} \\ &= \partial_\theta(-\sin\theta\cos\theta) - 0 + (0+0) - (0 + (-\sin\theta\cos\theta)\cot\theta) \\ &= -\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta \\ &= \sin^2\theta \end{aligned} \tag{16}$$

${R^\alpha}_{\beta\mu\nu}$ は $\mu\nu$ について反対称なので

$$ {R^\theta}_{\phi\phi\theta} = -\sin^2\theta \tag{17} $$

である. また

$$ \begin{aligned} R_{\theta\phi\theta\phi} &= g_{\theta\rho}{R^\rho}_{\phi\theta\phi} \\ &= g_{\theta\theta}{R^\theta}_{\phi\theta\phi} + 0 \\ &= a^2\sin^2\theta = -R_{\phi\theta\theta\phi} \end{aligned} \tag{18} $$

よって

$$ \begin{aligned} {R^\phi}_{\theta\theta\phi} &= g^{\phi\rho}R_{\rho\theta\theta\phi} \\ &= \frac{1}{a^2\sin^2\theta}(-a^2\sin^2\theta) + 0 \\ &= -1 \end{aligned} \tag{19} $$

であり, また

$$ {R^\phi}_{\theta\phi\theta} = 1 \tag{20} $$

となる. 次に Ricci テンソルは

$$ R_{\theta\theta} = {R^\alpha}_{\theta\theta\alpha} = -1 + 0 = -1 \tag{21} $$

$$ R_{\theta\phi} = {R^\theta}_{\theta\phi\theta} + {R^\phi}_{\theta\phi\phi} = 0 = R_{\phi\theta} \tag{22} $$

$$ R_{\phi\phi} = -\sin^2\theta \tag{23} $$

となる. 次にスカラー曲率は $g^{\theta\phi} = g^{\phi\theta} = 0$ から

$$ \begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ &= g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} \\ &= \frac{1}{a^2}(-1) + \frac{1}{a^2\sin^2\theta}(-\sin^2\theta) \\ &= -\frac{2}{a^2} \end{aligned} \tag{24} $$

となる.