相対性理論 レポート No.1

佐々木良輔

Q3.

(1)

Lorentz 変換は 1 次変換なので x', y', z', t' は以下のように表されるべきである

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\
t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t
\end{aligned}
$$

これらの係数は x, y, z, t には依存すべきではないが v には依存しても良い. y', z' が陽に t に依存するとき, これらは時間経過とともに移動することになる. これは系 S' が x 軸方向にのみ移動しているという仮定に反するので $a_{24} = a_{34} = 0$ となるべきである. また y' が x, z, z' が x, y に依存するとき y', z' は y, z に対して傾いた軸になるため, $a_{21} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0$ となるべきである. ここまでで y', z' は

$$
\begin{aligned}
y' &= a_{22}(v)y \\
z' &= a_{33}(v)z
\end{aligned}
$$

ここで空間の等方性から y', z' は対等であるべきなので $a_{22} = a_{33}$ である. また空間の反転に対して対称であるべきなのでこれらの係数は $|v|$ にのみ依るべきである. また S' から S をみたとき同様に

$$
\begin{aligned}
y &= a_{22}(|-v|)y' \\
z &= a_{22}(|-v|)z'
\end{aligned}
$$

であり, 以上から

$$
\begin{aligned}
a_{22}(|v|)^2 &= 1 \\
\therefore a_{22}(|v|) &= \pm 1
\end{aligned}
$$

さらに $v \to 0$ で明らかに $y' = y$, $z' = z$ であるべきなので

$$
a_{22}(|v|) = 1
$$

である. 以上から

$$y' = y \tag{1}$$
$$z' = z \tag{2}$$

となる.

(2)

まず x' について x' 軸と x 軸は一致すべきなので $a_{12} = a_{13} = 0$ である. また $x' = 0$ は $x = vt$ と一致すべきなので定数 A を用いて

$$x' = A(v)(x - vt) \tag{3}$$

という形であるべきである. また $s^2 = 0 \Leftrightarrow s'^2 = 0$ より比例関係

$$s'^2 = \alpha(v)s^2$$

が成り立つべきである. また空間の反転に対して対称であるべきなので α は $|v|$ にのみ依るべきである. また前問と同様に

$$s^2 = \alpha(|v|)s'^2$$

であるべきなので

$$\alpha(|v|) = \pm 1$$

また $v \to 0$ で $s'^2 = s^2$ であることから

$$\alpha(|v|) = 1$$

となる. 以上から

$$s'^2 = s^2$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$$

(1), (2), (3) から

$$A(v)^2(x - vt)^2 - c^2(a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t)^2 = x^2 - (ct)^2$$

右辺に y, z が現れないことから $a_{42} = a_{43} = 0$ である. したがって新たな定数 B, D を用いて

$$\begin{aligned} x^2 - (ct)^2 &= A(v)^2(x - vt)^2 - c^2(B(v)x + D(v)t)^2 \\ &= (A^2 - c^2B^2)x^2 - (c^2D^2 - v^2A^2)t^2 + (-2vA^2 - 2c^2BD)xt \end{aligned}$$

よって係数を比較すれば

$$A^2 - c^2B^2 = 1 \tag{4}$$
$$c^2D^2 - v^2A^2 = c^2 \tag{5}$$
$$vA^2 + c^2BD = 0 \tag{6}$$

を得る. まず (6) から

$$B = -\frac{vA^2}{c^2 D}$$

これを (4) に代入すると

$$A^2 - \frac{v^2}{c^2 D^2} A^4 = 1$$

また (5) から

$$A^2 = \frac{c^2}{v^2}(D^2 - 1) \tag{7}$$

これらを連立すると

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{v^2}(D^2-1) - \frac{v^2}{c^2 D^2}\left(\frac{c^2}{v^2}(D^2-1)\right)^2 &= 1 \\ (D^2-1)\left(1 - \frac{D^2-1}{D^2}\right) &= \frac{v^2}{c^2} \end{aligned}$$

$$D = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

これと (7) を連立すると

$$A = D = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ここで (3) において $v \to 0$ のとき $x' = x$ となるべきなので符号が確定し

$$A = D = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{8}$$

となる. また (4) から

$$B = \pm\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

であり (6) が成り立つことから符号が確定し

$$B = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

となる. 以上から x', t' と x, t の間の関係は

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(-vx/c^2 + t) \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

を得る.

Q4.

明らかに

$$y = y', z = z'$$

である. また x については

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ x &= x'\frac{1}{\gamma} + vt \end{aligned} \tag{9}$$

同様に t については

$$t = t'\frac{1}{\gamma} + \frac{v}{c^2}x \tag{10}$$

(9) に (10) を代入すると

$$\begin{aligned} x &= x'\frac{1}{\gamma} + t'\frac{v}{\gamma} + \beta^2 x \\ x(1-\beta^2) &= x'\frac{1}{\gamma} + t'\frac{v}{\gamma} \\ x\frac{1}{\gamma^2} &= x'\frac{1}{\gamma} + t'\frac{v}{\gamma} \\ x &= \gamma(x' + vt') \end{aligned}$$

同様に (10) に (9) を代入すると

$$\begin{aligned} t &= t'\frac{1}{\gamma} + \frac{v}{\gamma c^2}x' + \frac{v^2}{c^2}t \\ t(1-\beta^2) &= t'\frac{1}{\gamma} + \frac{v}{\gamma c^2}x' \\ t &= \gamma(vx'/c^2 + t') \end{aligned}$$

以上から Lorentz 変換を逆に解くと S と S' を入れ替え, β と $-\beta$ に置き換えたものになっている.