流体弾性体力学 期末レポート

61908697 佐々木良輔

レポート 1

ナビエ方程式は

$$\rho(\boldsymbol{r})\partial_t^2\boldsymbol{u} = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{1}$$

である. また変位ベクトルは

$$\boldsymbol{u}(x,z) = \begin{pmatrix} \sum_\nu A_{x,\nu}\mathrm{e}^{\nu z}\mathrm{e}^{ik(x-vt)} \\ 0 \\ \sum_\nu A_{z,\nu}\mathrm{e}^{\nu z}\mathrm{e}^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \sum_\nu A_{x,\nu}f(\nu,x,z) \\ 0 \\ \sum_\nu A_{z,\nu}f(\nu,x,z) \end{pmatrix} \tag{2}$$

の実部である. ここで $f(\nu,x,z) = \mathrm{e}^{\nu z}\mathrm{e}^{ik(x-vt)}$ とした. このとき

$$\partial_t^2\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \sum_\nu A_{x,\nu}(-ikv)^2 f(\nu,x,z) \\ 0 \\ \sum_\nu A_{z,\nu}(-ikv)^2 f(\nu,x,z) \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) &= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x u_x + \partial_z u_z) \\ 0 \\ \partial_z(\partial_x u_x + \partial_z u_z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_\nu ik(ikA_{x,\nu} + \nu A_{z,\nu})f(\nu,x,z) \\ 0 \\ \sum_\nu \nu(ikA_{x,\nu} + \nu A_{z,\nu})f(\nu,x,z) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{u} &= \begin{pmatrix} (\partial_x^2 + \partial_z^2)u_x \\ 0 \\ (\partial_x^2 + \partial_z^2)u_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_\nu((ik)^2 + \nu^2)A_{x,\nu}f(\nu,x,z) \\ 0 \\ \sum_\nu((ik)^2 + \nu^2)A_{z,\nu}f(\nu,x,z) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

これらを (1) に代入して $f(\nu,x,z)$ の係数を比較すると x 成分については

$$\sum_\nu \left(\rho k^2 v^2 A_{x,\nu} + (\lambda+\mu)(-k^2 A_{x,\nu} + ik\nu A_{z,\nu}) + \mu(\nu^2 - k^2)A_{x,\nu}\right) = 0 \tag{6}$$

同様に z 成分については

$$\sum_\nu \left(\rho k^2 v^2 A_{z,\nu} + (\lambda+\mu)(ik\nu A_{x,\nu} + \nu^2 A_{z,\nu}) + \mu(\nu^2 - k^2)A_{z,\nu}\right) \tag{7}$$

それぞれ ν について独立であるとすると

$$\begin{aligned} \rho k^2 v^2 A_{x,\nu} + (\lambda+\mu)(-k^2 A_{x,\nu} + ik\nu A_{z,\nu}) + \mu(\nu^2 - k^2)A_{x,\nu} = 0 \\ \rho k^2 v^2 A_{z,\nu} + (\lambda+\mu)(ik\nu A_{x,\nu} + \nu^2 A_{z,\nu}) + \mu(\nu^2 - k^2)A_{z,\nu} = 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \rho k^2 v^2 - k^2(\lambda+\mu) + \mu(\nu^2 - k^2) & ik\nu(\lambda+\mu) \\ ik\nu(\lambda+\mu) & \rho k^2 v^2 + \nu^2(\lambda+\mu) + \mu(\nu^2 - k^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x,\nu} \\ A_{z,\nu} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{8}$$

となる. これが非自明な解を持つためには

$$\begin{vmatrix} \rho k^2 v^2 - k^2(\lambda+\mu) + \mu(\nu^2 - k^2) & ik\nu(\lambda+\mu) \\ ik\nu(\lambda+\mu) & \rho k^2 v^2 + \nu^2(\lambda+\mu) + \mu(\nu^2 - k^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

これを整理すると

$$\left(\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)\mu\right)\left(\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)(\lambda + 2\mu)\right) = 0 \tag{10}$$

となる. また境界条件から

$$\sigma_{ij} = 0 = \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{u} \delta_{ij} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}_{ij}|_{z=0} \tag{11}$$

両辺 $i = j$ で和を取ると $\mathrm{Tr}\ \boldsymbol{\epsilon} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$ から

$$0 = (3\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \boldsymbol{u}|_{z=0} \tag{12}$$

したがって

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{u}|_{z=0} = 0 \\ ikA_{x,\nu} + \nu A_{z,\nu} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

となる. 以上から

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)\mu\right)\left(\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)(\lambda + 2\mu)\right) \\ 0 &= ikA_{x,\nu} + \nu A_{z,\nu} \end{aligned} \tag{14}$$

が満たすべき方程式である.

レポート 2

流体に粘性が無いことから動径方向の流速が一定とする. さらに流体の速度が x 方向のみであることから, 流体は渦なしである. したがって管内の流体は渦なし非圧縮流体となり, ベルヌーイの定

理を適用できる. 断面積の変化は十分遅く, 流れポテンシャルの変化は十分小さいものとする. すなわち

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \simeq 0 \tag{15}$$

とする. ここで図 1 のように断面積が S_0 の位置で速度 v_0, 断面積が $S_0 + \delta S(x,t)$ の位置で速度 v とおく. するとベルヌーイの定理から

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} = \frac{v(x)^2}{2} + \frac{P_0 + \nu\delta S(x,t)}{\rho}$$

$$v(x)^2 = v_0^2 - \frac{2\nu\delta S(x,t)}{\rho} \tag{16}$$

よって

$$v(x) = \pm\sqrt{v_0^2 - \frac{2\nu\delta S(x,t)}{\rho}} \tag{17}$$

となる. ここで十分長い距離 L で v^2 を平均すると (16) 式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}\int_0^L v(x)^2 dx &= \frac{1}{L}\int_0^L v_0^2 - \frac{2\nu\delta S(x,t)}{\rho} dx \\ &= v_0^2 - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{2\nu\delta S(x,t)}{\rho} dx \end{aligned} \tag{18}$$

δS は十分な長さに渡って平均すれば 0 になると考えられるので

$$\frac{1}{L}\int_0^L v(x)^2 dx = v_0^2 \tag{19}$$

となる. このことから断面積 S_0 の位置での速度 v_0 は位置 x での速度 v の平均値に一致すると考えられる. 速度の平均値が 0 であると仮定すると

$$\begin{aligned} v(x) &= \pm\sqrt{0 - \frac{2\nu\delta S(x,t)}{\rho}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{2\nu|\delta S(x,t)|}{\rho}} \end{aligned} \tag{20}$$

となる.

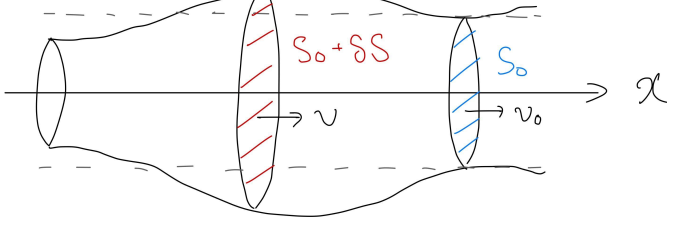

図 1　断面積の変化

レポート 3

d 次元空間の任意の閉曲面 S に囲まれた領域 D を考える．D に含まれる粒子の全運動量の i 成分は, 速度場と密度場の存在を仮定すれば

$$\int_D \rho(\boldsymbol{r},t)v_i(\boldsymbol{r},t)dV \tag{21}$$

となる. この時間変化は

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)dV \tag{22}$$

である．一方で領域 D を出入りする粒子により増減する運動量の i 成分はその流束が

$$\boldsymbol{j}_i = \boldsymbol{v}\rho v_i \tag{23}$$

と書けることから曲面 S の法線ベクトル $\hat{n}$ を用いて

$$-\int_S \rho v_i \boldsymbol{v}\cdot\hat{n}dS \tag{24}$$

と書ける. ただし符号は流入を正とするためにつけている．ガウスの発散定理を用いると

$$-\int_S \rho v_i \boldsymbol{v}\cdot\hat{n}dS = -\int_D \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i)dV \tag{25}$$

となる. ここで ∇ は d 次元でのナブラベクトルであり第 n 次元の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_n$ として

$$\nabla = \sum_{n=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_n}\boldsymbol{e}_n \tag{26}$$

と表される. また運動量は外力によっても変化するので, これを計算する．まず体積力を $\boldsymbol{g}$ とすると領域 D にかかる力は

$$\int_D \rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{g}dV \tag{27}$$

次に曲面 S を通じて加わる圧力は

$$-\int_S P(\boldsymbol{r})dS = -\int_D \nabla P(\boldsymbol{r})dV \tag{28}$$

となる. 以上から (25), (27), (28) の総和が運動量の時間変化に等しいので

$$\begin{aligned}\int_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)dV &= \int_D -\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i) + \rho g_i - (\nabla P)_i dV\\ \int_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i)dV &= \int_D \rho g_i - (\nabla P)_i dV\end{aligned} \tag{29}$$

積分領域が等しいことから

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\rho v_i) = \rho g_i - (\nabla P)_i \tag{30}$$

ここで左辺について

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\rho v_i) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\rho)\right) v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\rho) \cdot \nabla v_i \tag{31}$$

この右辺第 1 項は連続の式から 0 になるので (30) は

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\rho) \cdot \nabla v_i = \rho g_i - (\nabla P)_i \tag{32}$$

以上から

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{v} = -\nabla P + \rho \boldsymbol{g} \tag{33}$$

を得る.

レポート 4

非圧縮渦なし完全流体であることから流れポテンシャルは

$$\Delta \phi = 0 \tag{34}$$

のラプラス方程式を満たす. またベルヌーイの定理が適用でき

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \mathrm{Const} \tag{35}$$

ここで定数として $P_0/\rho + gh_0$ と置けば

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + g(z - h_0) = \frac{1}{\rho}(P_0 - P) \tag{36}$$

となる.(36) 式は水面付近において

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gh(x,t) = \frac{f}{\rho}\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \tag{37}$$

となる. ここで v が十分小さいとして左辺第 2 項を無視すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -gh + \frac{f}{\rho}\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \tag{38}$$

また水面付近での h を $\tilde{h}$, z, x 方向の速度を $\tilde{v}_z$, $\tilde{v}_x$ とすると

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = \tilde{v}_z - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}\tilde{v}_x \tag{39}$$

ここで右辺第 2 項は微小量の 2 次なので無視すると

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = \tilde{v}_z = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \tag{40}$$