相対性理論 レポート No.3

佐々木良輔

Q20.

(5.3) 式から

$$
\begin{aligned}
\eta_{00} = -1 &= \sum_{\rho,\sigma} a^{\rho}{}_{0}\eta_{\rho\sigma}a^{\sigma}{}_{0} \\
&= \sum_{\sigma}\left(a^{0}{}_{0}\eta_{0\sigma}a^{\sigma}{}_{0} + a^{1}{}_{0}\eta_{1\sigma}a^{\sigma}{}_{0} + a^{2}{}_{0}\eta_{2\sigma}a^{\sigma}{}_{0} + a^{3}{}_{0}\eta_{3\sigma}a^{\sigma}{}_{0}\right) \\
&= -(a^{0}{}_{0})^2 + (a^{1}{}_{0})^2 + (a^{2}{}_{0})^2 + (a^{3}{}_{0})^2
\end{aligned} \tag{1}
$$

したがって

$$
(a^{0}{}_{0})^2 = 1 + (a^{1}{}_{0})^2 + (a^{2}{}_{0})^2 + (a^{3}{}_{0})^2 \geq 1 \tag{2}
$$

以上から

$$
|a^{0}{}_{0}| \geq 1 \tag{3}
$$

Q23.

Lorentz 変換の条件は (5.3) から

$$
\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} \tag{4}
$$

であった. ここで

$$
\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I} \tag{5}
$$

から Y は直交行列である. したがって (4) を両辺転置すると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}^T &= (\boldsymbol{A}^T)^T\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}^T \\
\boldsymbol{Y}^{-1} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{A}^T
\end{aligned} \tag{6}
$$

これをテンソルで表記すると

$$
\eta^{\mu\nu} = a^{\mu}{}_{\rho}\eta^{\rho\sigma}a^{\nu}{}_{\sigma} \tag{7}
$$