

流体弾性体力学 期末レポート

61908697 佐々木良輔

レポート 1

ナビエ方程式は

$$\rho(\mathbf{r})\partial_t^2\mathbf{u} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} \quad (1)$$

である. また変位ベクトルは

$$\mathbf{u}(x, z) = \begin{pmatrix} \sum_{\nu} A e^{\nu z} e^{ik(x-vt)} \\ 0 \\ \sum_{\nu} B e^{\nu z} e^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \sum_{\nu} A f(\nu, x, z) \\ 0 \\ \sum_{\nu} B f(\nu, x, z) \end{pmatrix} \quad (2)$$

の実部である. ここで $f(\nu, x, z) = e^{\nu z} e^{ik(x-vt)}$ とした. このとき

$$\partial_t^2\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sum_{\nu} A(-ikv)^2 f(\nu, x, z) \\ 0 \\ \sum_{\nu} B(-ikv)^2 f(\nu, x, z) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x u_x + \partial_z u_z) \\ 0 \\ \partial_z(\partial_x u_x + \partial_z u_z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\nu} ik(ikA + \nu B) f(\nu, x, z) \\ 0 \\ \sum_{\nu} \nu(ikA + \nu B) f(\nu, x, z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} (\partial_x^2 + \partial_z^2)u_x \\ 0 \\ (\partial_x^2 + \partial_z^2)u_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\nu} ((ik)^2 + \nu^2) A f(\nu, x, z) \\ 0 \\ \sum_{\nu} ((ik)^2 + \nu^2) B f(\nu, x, z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

これらを (1) に代入して $f(\nu, x, z)$ の係数を比較すると x 成分については

$$\sum_{\nu} (\rho k^2 v^2 A + (\lambda + \mu)(-k^2 A + ik\nu B) + \mu(\nu^2 - k^2)A) = 0 \quad (6)$$

同様に z 成分については

$$\sum_{\nu} (\rho k^2 v^2 B + (\lambda + \mu)(ik\nu A + \nu^2 B) + \mu(\nu^2 - k^2)B) \quad (7)$$

それぞれ ν について独立であるとする

$$\rho k^2 v^2 A + (\lambda + \mu)(-k^2 A + ik\nu B) + \mu(\nu^2 - k^2)A = 0 \quad (8)$$

$$\rho k^2 v^2 B + (\lambda + \mu)(ik\nu A + \nu^2 B) + \mu(\nu^2 - k^2)B = 0 \quad (9)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \rho k^2 v^2 - k^2(\lambda + \mu) + \mu(\nu^2 - k^2) & ik\nu(\lambda + \mu) \\ ik\nu(\lambda + \mu) & \rho k^2 v^2 + \nu^2(\lambda + \mu) + \mu(\nu^2 - k^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (10)$$

となる. これが非自明な解を持つためには

$$\begin{vmatrix} \rho k^2 v^2 - k^2(\lambda + \mu) + \mu(\nu^2 - k^2) & ik\nu(\lambda + \mu) \\ ik\nu(\lambda + \mu) & \rho k^2 v^2 + \nu^2(\lambda + \mu) + \mu(\nu^2 - k^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

これを整理すると

$$(\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)\mu) (\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)(\lambda + 2\mu)) = 0 \quad (12)$$

となる. ここで

$$c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (13)$$

を用いると

$$(c_t^2 \nu^2 - k^2(c_t^2 - v^2)) (c_l^2 \nu^2 - k^2(c_l^2 - v^2)) = 0 \quad (14)$$

となるので

$$\nu_1^2 = k^2 \left(1 - \frac{v^2}{c_l^2}\right), \quad \nu_2^2 = k^2 \left(1 - \frac{v^2}{c_t^2}\right) \quad (15)$$

となる. これを用いると (8), (9) は

$$\frac{B}{A} = \frac{k^2(v^2 - c_l^2) + \nu^2 c_t^2}{-ik\nu(c_l^2 - c_t^2)} \quad (16)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{-ik\nu(c_l^2 - c_t^2)}{k^2(v^2 - c_t^2) + \nu^2 c_l^2} \quad (17)$$

更に ν_1, ν_2 を代入したときの A, B を A_1, B_1 及び A_2, B_2 とすると

$$\frac{B_1}{A_1} = -\frac{i\nu_1}{k}, \quad \frac{B_2}{A_2} = \frac{k}{i\nu_2} \quad (18)$$

となる. 以上から u はこれらの線形結合で表されるので

$$\mathbf{u}_x = (A_1 e^{\nu_1 z} + A_2 e^{\nu_2 z}) e^{ik(x-vt)} \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_z = \left(-\frac{i\nu_1}{k} A_1 e^{\nu_1 z} + \frac{k}{i\nu_2} A_2 e^{\nu_2 z} \right) e^{ik(x-vt)} \quad (20)$$

となる. また表面においては z 方向の応力が 0 となるべきなので

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (21)$$

すなわち

$$\lambda(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2\mu u_{zz} = (\lambda + 2\mu)u_{zz} + \lambda u_{xx} = 0 \quad (22)$$

および

$$u_{xz} + u_{zx} = 0 \quad (23)$$

となる. これに (19), (20) を用いると表面では $z = 0$ であることから

$$(\lambda + 2\mu) \left(-\frac{i\nu_1^2}{k} A_1 + \frac{k}{i} A_2 \right) + \lambda i k (A_1 + A_2) = 0 \quad (24)$$

$$2\nu_1 A_1 + \left(\nu_2 + \frac{k^2}{\nu_2} \right) A_2 = 0 \quad (25)$$

(24) に c_l, c_t を用いると

$$\begin{aligned} c_l^2 \left(k \left(1 - \frac{v^2}{c_l^2} \right) A_1 + k A_2 \right) - k(c_l^2 + 2c_t^2)(A_1 + A_2) &= 0 \\ \left(2 - \frac{v^2}{c_t^2} \right) A_1 + 2A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

また (25) は

$$2\nu_1 A_1 + \frac{k^2}{\nu_2} \left(2 - \frac{v^2}{c_t^2} \right) A_2 = 0 \quad (27)$$

以上から (26), (27) は

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{v^2}{c_t^2} & 2\nu_2 \\ 2\nu_1 & k^2 \left(2 - \frac{v^2}{c_t^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2/\nu_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (28)$$

これが非自明な解を持つためには

$$\begin{aligned} k^2 \left(2 - \frac{v^2}{c_t^2} \right)^2 &= 4\nu_1 \nu_2 \\ k^4 \left(2 - \frac{v^2}{c_t^2} \right)^4 &= 16k^4 \left(1 - \frac{v^2}{c_l^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c_t^2} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで $v = c_t x$, $c_t/c_l = \gamma$ とすると

$$\begin{aligned} 0 &= 16(1-x^2)(1-\gamma^2 x^2) - (2-x^2)^4 \\ &= -x^8 + 8x^6 - (16a^2 - 24)x^4 + 16(1-a^2)x^2 \end{aligned} \quad (30)$$

したがって

$$0 = x^6 - 8x^4 - 8x^2(2\gamma^2 - 3) + 16(\gamma^2 - 1) \quad (31)$$

を得る.[1]

レポート 2

流体に粘性が無いことから動径方向の流速が一定とする. さらに流体の速度が x 方向のみであることから, 流体は渦なしである. したがって管内の流体は渦なし非圧縮流体となり, ベルヌーイの定理を適用できる. 断面積の変化は十分遅く, 流れポテンシャルの変化は十分小さいものとする. すなわち

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \simeq 0 \quad (32)$$

とする. ここで図 1 のように断面積が S_0 の位置で速度 v_0 , 断面積が $S_0 + \delta S(x, t)$ の位置で速度 v とおく. するとベルヌーイの定理から

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} &= \frac{v(x)^2}{2} + \frac{P_0 + \nu \delta S(x, t)}{\rho} \\ v(x)^2 &= v_0^2 - \frac{2\nu \delta S(x, t)}{\rho} \end{aligned} \quad (33)$$

よって

$$v(x) = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{2\nu \delta S(x, t)}{\rho}} \quad (34)$$

となる. ここで十分長い距離 L で v^2 を平均すると (33) 式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_0^L v(x)^2 dx &= \frac{1}{L} \int_0^L v_0^2 - \frac{2\nu \delta S(x, t)}{\rho} dx \\ &= v_0^2 - \frac{1}{L} \int_0^L \frac{2\nu \delta S(x, t)}{\rho} dx \end{aligned} \quad (35)$$

δS は十分な長さに渡って平均すれば 0 になると考えられるので

$$\frac{1}{L} \int_0^L v(x)^2 dx = v_0^2 \quad (36)$$

となる. このことから断面積 S_0 の位置での速度 v_0 は位置 x での速度 v の平均値に一致すると考えられる. 速度の平均値が 0 であると仮定すると

$$\begin{aligned} v(x) &= \pm \sqrt{0 - \frac{2\nu\delta S(x,t)}{\rho}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{2\nu|\delta S(x,t)|}{\rho}} \end{aligned} \quad (37)$$

となる.

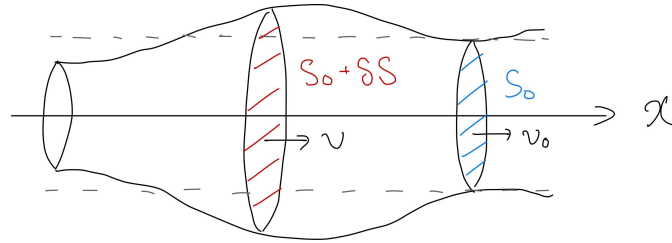


図 1 断面積の変化

レポート 3

d 次元空間の任意の閉曲面 S に囲まれた領域 D を考える. D に含まれる粒子の全運動量の i 成分は, 速度場と密度場の存在を仮定すれば

$$\int_D \rho(\mathbf{r}, t) v_i(\mathbf{r}, t) dV \quad (38)$$

となる. この時間変化は

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV \quad (39)$$

である. 一方で領域 D を出入りする粒子により増減する運動量の i 成分はその流束が

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{v} \rho v_i \quad (40)$$

と書けることから曲面 S の法線ベクトル \hat{n} を用いて

$$- \int_S \rho v_i \mathbf{v} \cdot \hat{n} dS \quad (41)$$

と書ける. ただし符号は流入を正とするためにつけている. ガウスの発散定理を用いると

$$- \int_S \rho v_i \mathbf{v} \cdot \hat{n} dS = - \int_D \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho v_i) dV \quad (42)$$

となる. ここで ∇ は d 次元でのナブラベクトルであり第 n 次元の基底ベクトルを e_n として

$$\nabla = \sum_{n=1}^d \frac{\partial}{\partial x_n} e_n \quad (43)$$

と表される。また運動量は外力によっても変化するので、これを計算する。まず体積力を g とすると領域 D にかかる力は

$$\int_D \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{g} dV \quad (44)$$

次に曲面 S を通じて加わる圧力は

$$-\int_S P(\mathbf{r}) dS = -\int_D \nabla P(\mathbf{r}) dV \quad (45)$$

となる。以上から (42), (44), (45) の総和が運動量の時間変化に等しいので

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) dV &= \int_D -\nabla \cdot (\mathbf{v} \rho v_i) + \rho g_i - (\nabla P)_i dV \\ \int_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho v_i) dV &= \int_D \rho g_i - (\nabla P)_i dV \end{aligned} \quad (46)$$

積分領域が等しいことから

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho v_i) = \rho g_i - (\nabla P)_i \quad (47)$$

ここで左辺について

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho v_i) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho) \right) v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \rho) \cdot \nabla v_i \quad (48)$$

この右辺第 1 項は連続の式から 0 になるので (47) は

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \rho) \cdot \nabla v_i = \rho g_i - (\nabla P)_i \quad (49)$$

以上から

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (50)$$

を得る。

レポート 4

非圧縮渦なし完全流体であることから流れポテンシャルは

$$\Delta \phi = 0 \quad (51)$$

のラプラス方程式を満たす。またベルヌーイの定理が適用でき

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{Const} \quad (52)$$

ここで定数として $P_0/\rho + gh_0$ と置けば

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + g(z - h_0) = \frac{1}{\rho}(P_0 - P) \quad (53)$$

となる. これは水面において

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gh(x, t) = \frac{f}{\rho} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \quad (54)$$

となる. ここで v が十分小さいとして左辺第 2 項を無視すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -gh + \frac{f}{\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (55)$$

両辺 t で微分すると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (56)$$

また水面付近での z, x 方向の速度を \tilde{v}_z, \tilde{v}_x とすると

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \tilde{v}_z - \frac{\partial h}{\partial x} \tilde{v}_x \quad (57)$$

ここで右辺第 2 項は微小量の 2 次なので無視すると

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \tilde{v}_z = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \quad (58)$$

よって (56) 式は水面近傍においては

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \quad (59)$$

ここで ϕ を

$$\phi(\mathbf{r}, t) = R(z) \sin(k(x - ct)) \quad (60)$$

と展開する. ラプラス方程式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \sin(k(x - ct)) - k^2 R(z) \sin(k(x - ct)) &= 0 \\ \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - k^2 R &= 0 \end{aligned} \quad (61)$$

したがって

$$R(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (62)$$

ここで水底においては流体の速度の鉛直成分は 0 であるべきなので

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \\ (A - B)k \sin(k(x - ct)) &= 0 \end{aligned} \quad (63)$$

したがって

$$A = B \quad (64)$$

であり

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = A \cosh(kz) \sin(k(x - ct)) \quad (65)$$

となる. これと (59) 式から

$$k^2 c^2 \phi = gkA \sinh(kh_0) \sin(k(x - ct)) + \frac{f}{\rho} k^3 A \sinh(kh_0) \sin(k(x - ct)) \quad (66)$$

両辺 ϕ で割ると

$$k^2 c^2 = \left(gk + \frac{f}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh_0) \quad (67)$$

$$\therefore c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{f}{\rho} k \right) \tanh(kh_0)} \quad (68)$$

を得る.

レポート 5

ナビエストークス方程式は動粘性係数 ν を用いて

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + g + \nu \Delta \boldsymbol{v} \quad (69)$$

ストークス近似を用いると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + g + \nu \Delta \boldsymbol{v} \quad (70)$$

となる. 更に外力が存在せず, 定常であるとする

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \boldsymbol{v} \quad (71)$$

ここで一様な流れ V の中の原点に半径 a の球を設置する. 境界条件として非圧縮性から

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad (72)$$

物体表面では

$$v = 0 \quad (73)$$

とする. 無限遠での圧力を P_0 として速度場と圧力場は以下で与えられる.

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) - \frac{3}{4} \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \mathbf{r} \left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right) \quad (74)$$

$$P = P_0 - \frac{3a\rho\nu}{2} \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (75)$$

実際 $r \rightarrow \infty$ で

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{V}, \quad P \rightarrow P_0 \quad (76)$$

を満たす. また物体表面 ($r = a$) では

$$\mathbf{v}|_{r=a} = \mathbf{V} \left(1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{4} \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{a^2} \mathbf{r} (1 - 1) = 0 \quad (77)$$

から (73) を満たす. また

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{3\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{4r^3} a - \frac{3\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{4r^5} a^3 \right) - \frac{3}{4} \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right) = 0 \quad (78)$$

から (72) を満たす. また

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla P &= \frac{3a\nu}{2} \nabla \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{3a\nu}{2r^5} \begin{pmatrix} V_x r^2 - 3x \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} \\ V_y r^2 - 3y \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} \\ V_z r^2 - 3z \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix} \\ &= \frac{3a\nu}{2r^5} (\mathbf{V} r^2 - 3(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (79)$$

$$\Delta \frac{1}{r} = 4\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (80)$$

ただし球の外部の流れを考えるので

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \quad (81)$$

$$\Delta \frac{1}{r^3} = \frac{6}{r^5} \quad (82)$$

また

$$\begin{aligned} \left(\Delta \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \mathbf{r} \right)_x &= (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \frac{V_x x + V_y y + V_z z}{r^3} x \\ &= \frac{2V_x}{r^3} - 3x \frac{5V_x x + 3V_y y + 3V_z z}{r^5} + 15x \frac{x^2(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^7} \\ &\quad - 3x \frac{V_x x + 3V_y y + V_z z}{r^5} + 15x \frac{y^2(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^7} \\ &\quad - 3x \frac{V_x x + V_y y + 3V_z z}{r^5} + 15x \frac{z^2(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^7} \\ &= \frac{2V_x}{r^3} - x \frac{6(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^5} \end{aligned}$$

より

$$\Delta \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \mathbf{r} = \frac{2}{r^5} (\mathbf{V} r^2 - 3(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}) \quad (83)$$

また

$$\begin{aligned} \left(\Delta \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right)_x &= (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \frac{V_x x + V_y y + V_z z}{r^5} x \\ &= \frac{2V_x}{r^5} - 5x \frac{V_x x + V_y y + V_z z}{r^7} - 10x \frac{2V_x x + V_y y + V_z z}{r^7} + 35x \frac{x^2(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^9} \\ &\quad - 5x \frac{V_x x + V_y y + V_z z}{r^7} - 10x \frac{V_y y}{r^7} + 35x \frac{y^2(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^9} \\ &\quad - 5x \frac{V_x x + V_y y + V_z z}{r^7} - 10x \frac{V_z z}{r^7} + 35x \frac{z^2(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^9} \\ &= \frac{2V_x}{r^5} \end{aligned}$$

より

$$\Delta \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} = \frac{2\mathbf{V}}{r^5} \quad (84)$$

以上から (71) は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} &= \frac{3a\nu}{2r^5} (\mathbf{V} r^2 - 3(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}) - \frac{a^3 \nu \mathbf{V}}{4} \frac{6}{r^5} \\ &\quad - \frac{3a\nu}{4} \frac{2}{r^5} (\mathbf{V} r^2 - 3(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}) + \frac{3a^3 \nu}{4} \frac{2\mathbf{V}}{r^5} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (85)$$

となり, この解はナビエーストークス方程式を満たす.

次にストークス抵抗を求める. ここで \mathbf{r} と \mathbf{V} のなす各を θ とすると (75) は

$$P = P_0 - \frac{3a\rho\nu}{2} \frac{V \cos \theta}{r^2} \quad (86)$$

となる. 球にかかる力は対称性から \mathbf{V} に平行な方向にかかるべきである. よって球にかかる全圧力は圧力の \mathbf{V} に平行な成分 $P \cos \theta$ を球面で積分すれば良いので

$$\begin{aligned} F_p &= \int_{\text{球表面}} -P \cos \theta \, dS \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(P_0 - \frac{3a\rho\nu}{2} \frac{V \cos \theta}{r^2} \right) \cos \theta a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= -2\pi a^2 P_0 \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \, d\theta + 2\pi \frac{3\rho\nu a}{2} V \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= -2\pi a^2 P_0 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^\pi + 3\pi \rho \nu a V \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \\ &= 0 + 3\pi \rho \nu a V \frac{2}{3} = 2\pi \rho \nu a V \end{aligned}$$

となる.

次に粘性応力を考える. V を z 方向にとっても一般性を失わないため, 以下では $V \parallel z$ とする.
 v の r 成分は

$$\begin{aligned} v_r = \mathbf{v} \cdot \hat{e}_r &= V \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) - \frac{3}{4} \frac{V r \cos \theta}{r^2} r \left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right) \\ &= V \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \end{aligned} \quad (87)$$

θ 成分は

$$v_\theta = \mathbf{v} \cdot \hat{e}_\theta = V \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \quad (88)$$

ϕ 成分は

$$v_\phi = \mathbf{v} \cdot \hat{e}_\phi = 0 \quad (89)$$

となる. 球面において応力は常に r 面に加わる. よって球面上での接線方向の応力は

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta r} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} \right) \Big|_{r=a} \\ &= \eta \left(\frac{1}{a} \right) (-V \sin \theta) \left(1 - \frac{3a}{2a} + \frac{a^3}{2a^3} \right) + a(-V \sin \theta) \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{3a}{2a^3} + \frac{a^3}{a^5} \right) \\ &= -\frac{3\eta}{2a} V \sin \theta \end{aligned} \quad (90)$$

この応力の V に平行な成分 $-\sigma_{\theta r} \sin \theta$ を面積分すると, ワイスの公式を用いて

$$\begin{aligned} F_v &= \int_{\text{球表面}} -\sigma_{\theta r} \sin \theta dS \\ &= 2\pi \frac{3\eta}{2a} V \int_0^\pi \sin^2 \theta a^2 \sin \theta d\theta \\ &= 3\pi \rho \nu a V \left(\left[-\frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{3} \right]_0^\pi + 2 \frac{2}{3} \right) \\ &= 4\pi \rho \nu a V \end{aligned} \quad (91)$$

以上から球の受ける全力は

$$F = F_p + F_v = 6\pi \rho \nu a V \quad (92)$$

となる.[2]

参考文献

- [1] 岩熊 哲夫 — 東北大学. 11.3 表面波. <http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/nisikozo/s4node10.html>, 2 2013. (Accessed on 01/24/2022).

- [2] 中野徹 —中央大学. ナヴィエ = ストークス方程式. [https://www.phys.chuo-u.ac.jp/labs/nakano/hydrod/sec8\(2010\).pdf](https://www.phys.chuo-u.ac.jp/labs/nakano/hydrod/sec8(2010).pdf), 2010. (Accessed on 01/24/2022).