

電氣と磁氣

第2卷

A TREATISE ON ELECTRICITY & MAGNETISM

Vol. 2

James Clerk Maxwell

木口 勝義 · 近藤 康 訳

January 1, 2014

目次

第 III 部

磁気

第 I 章

磁気の初等理論

節	頁
371. 地球が作用するときの磁石の性質	3
372. 磁軸と磁力の方向の定義	3
373. 磁石の他の磁石への作用。磁力の法則	4
374. 磁気単位の定義とその次元	5
375. 磁力の法則の根拠について	5
376. 数学量としての磁気	6
377. 磁石のなかの反対種類の磁気の量はつねに厳密に等しい	6
378. 磁石の分割の効果	6
379. 磁石はそれが磁石である粒子から作られている	7
380. 磁気物質の理論	7
381. 磁化はベクトル性を持つ	8
382. 術語「磁気分極」の意味	10
383. 磁気粒子の性質	10
384. 磁気モーメント、磁化強度、磁化の成分の定義	11
385. 磁化された体積要素のポテンシャル	11
386. 有限サイズのポテンシャル。それぞれ、分極の理論と、磁気「物質」の理論に対応する、このポテンシャルの 2 つの式	12
387. 磁気粒子の他の磁気粒子への作用の研究	13
388. 特殊な場合	15
389. 任意の力の場のなかの磁石のポテンシャルエネルギー	18
390. 磁気モーメントと磁石の軸	19

節	頁
391. 磁石のポテンシャルの球調和関数による展開	20
392. 磁石の中心と中心をとおる主軸、副軸	22
393. この書での磁石の北端は北を指す端、南端は南を指す端。 北磁気は地球の北極や磁石の南端の近くに存在すると考 えられている磁気、南磁気は地球の南極や磁石の北端に 属する磁気。南磁気が正と考えられる	24
394. 磁力の方向は南磁気が向かおうとする方向、つまり、南 から北へ向かう方向。これが磁力線の方向。磁石はその 南端から北端へ磁化されていると言われる	24

第 II 章

磁力と磁気誘導

395. 磁気ポテンシャルを参照して定義された磁力	25
396. 円柱の軸に平行に一様に磁化された磁石のなかの円柱形 空洞中の磁力	25
397. 任意の磁石への応用	26
398. 細長い円柱。—— 磁力	26
399. 薄い円盤。—— 磁気誘導	27
400. 磁力、磁気誘導、磁化の関係	27
401. 磁力の線積分、つまり、磁気ポテンシャル	28
402. 磁気誘導の面積分	28
403. 磁気誘導のソレノイド分布	30
404. 磁気誘導の面と管	30
405. 磁気誘導のベクトルポテンシャル	31
406. スカラー-ポテンシャルとベクトル-ポテンシャルの関係	33

第 III 章

磁気ソレノイドと磁気板

407. 磁気ソレノイドの定義	35
408. 複合ソレノイドの定義と任意の点でのそのポテンシャル の表式	36

節	頁
409. 任意の点での磁気板のポテンシャルは磁気板の強さにその点で板の境界を区切る立体角をかけた積である	37
410. 他の証明法	37
411. 強さ I の板の正側の点でのポテンシャルは負側の最近接点でのポテンシャルを $4\pi\phi$ だけ上回る	38
412. 磁気のラメラ分布	38
413. 複合ラメラ分布	39
414. ソレノイド磁石のポテンシャル	39
415. ラメラ磁石のポテンシャル	40
416. ラメラ磁石のベクトル ポテンシャル	41
417. 与えられた点で閉曲線で区切られた立体角について	41
418. 球面上の曲線長によって表示された立体角について	42
419. 2つの線積分によって見出される立体角	43
420. II の行列式表示	44
421. 立体角は周期関数	45
422. 閉曲線のベクトル ポテンシャル理論	46
423. 磁場中に置かれた磁気板のポテンシャル エネルギー	48

第 IV 章 誘導された磁化

424. 磁力の作用下の物体が磁化されるとき、その現象は磁気誘導と呼ばれる	51
425. いろいろな物質の磁気誘導	52
426. 誘導磁化係数の定義	53
427. 磁気誘導の数学理論。ポアソンの方法	54
428. ファラディの方法	57
429. 磁気媒質によって囲まれた物体の場合	59
430. 誘導磁気の原因についてのポアソンの物理理論	61

第 V 章

特定の磁気誘導問題

節	ページ
431. 中空球殻の理論	63
432. κ が大きい場合	65
433. $i = 1$ の場合	65
434. 2 次元の対応する場合 (図 XV)	67
435. 磁化係数が方向によって異なる固体球の場合	67
436. 9 係数は 6 係数に還元される (図 XVI)	69
437. 一様な磁力の作用する楕円体の理論	71
438. 非常に平らな楕円体と非常の長い楕円体の場合	73
439. ノイマン、キルヒホフ、グリーンが解いた問題の提示	77
440. κ が非常に小さいときの一般問題の解の近似法。磁性体はもっとも磁力が強い方向に向こうとする。反磁性体は磁力がもっとも弱い方向に向こうとする。	78
441. 船舶の磁気について	79

第 VI 章

誘導磁気のウェーバーの理論

442. 磁化の最大値を指す実験	85
443. 一時磁化にたいするウェーバーの数学理論	86
444. 残留磁化を説明するための理論の修正	91
445. 修正理論による現象の説明	93
446. 磁化、脱磁化、再磁化	97
447. 磁石の大きさにかんする磁化の効果	99
448. ジュールの実験	100

第 VII 章

磁気の測定

449. 磁石の懸架	103
450. 鏡と物差しによる観測法。写真法	104
451. キュー天文台磁力系で採用された標準原理	108

節	頁
452. 磁軸の決定と磁力の水平分力の方向の決定	109
453. 磁石のモーメントの測定と磁力の水平分力の強度の決定	112
454. 偏角の観測	115
455. 正接法と正弦法	117
456. 振動の観測	118
457. 磁気誘導効果の消去	120
458. 水平分力の静的測定法	122
459. 2本吊	123
460. 天文台での観測システム	128
461. 伏角円板の観測	128
462. J. A. ブラウンの補正法	132
463. ジュールの懸架	133
464. 鉛直力磁気天秤	135

第 VIII 章 地磁気について

465. 磁力の要素	139
466. 一地方の磁気探査の結果の組合せ	140
467. 地球の磁気ポテンシャルの球面調和関数展開の演繹	142
468. 地球の磁極の定義。磁軸の端点にあるわけではない。偽極。それらは地表には存在しない	143
469. ガウスの最初の 4 調和関数の 24 係数の計算	143
470. 磁力の内部原因と外部原因の分離	144
471. 太陽変化、月変化	145
472. 周期変化	145
473. 扰乱とその 11 年周期	146
474. 磁気研究にたいする考察	146

第 IV 部

電磁気

第 I 章

電磁力

節		頁
475.	エルステッドの電流の磁石への作用の発見	151
476.	電流近くの空間は磁気の場である	151
477.	鉛直電流の磁石への作用	152
478.	無限に長い直線電流による力は距離に逆比例することの 証明	152
479.	電流の電磁的な尺度	153
480.	直線電流によるポテンシャル関数。それは多価関数であ る	153
481.	この電流の作用を無限に長い辺と無限遠に拡がる対辺を 持つ磁気板の作用と比較する	153
482.	小さな回路は遠くでは磁石のように作用する	154
483.	このことから、任意の形と大きさの閉じた回路の、電流 自身の内部にはない任意の点への作用を導く	154
484.	回路と磁気板の比較	155
485.	閉じた回路の磁気ポテンシャル	155
486.	電流のまわりの磁石の連続的な回転の条件	156
487.	閉じた回路による磁気の等ポテンシャル面の形。 (図 XVIII)	157
488.	任意の磁石の系と 1 つの閉じた電流のあいだの相互作用	158
489.	回路の反作用	159
490.	磁場中に置かれた電流を運ぶ導線に作用する力	160
491.	電磁的な回転の理論	161
492.	一つの電流の他の電流の全体または任意の部分への作用	163
493.	私たちの研究法はファラディの研究法である	163
494.	平行電流に適用された方法の図解	164

節	頁
495. 電流の単位の次元	164
496. 導線はその磁気作用が磁力を強める側から弱める側へ動かそうとされる	165
497. 無限長、直線電流の同一平面内にある任意の電流への作用	165
498. 電磁力の法則の提示。電流による磁力	166
499. これらの法則の一般性	167
500. 磁場内に置かれた回路に作用する力	167
501. 電磁力は、電流それ自身ではなく、導体に作用する機械的な力である	168

第 II 章

アンペールによる電流の相互作用の研究

502. アンペールによる電流要素間の力の法則の研究	169
503. 彼の実験法	169
504. アンペールの天秤	170
505. アンペールの第一実験。同じ大きさで反対方向の電流は互いを中性化する。	170
506. アンペールの第二実験。多数の折れ曲がりを持つ導体は同じ電流を運ぶ直線導体に等価である	171
507. 第三実験。閉じた電流が他の電流の要素へ作用するとき、作用はその要素に垂直である	171
508. 第四実験。幾何学的に相似した系の同じ大きさの電流は同じ力を生成する	172
509. これらの実験で、作用をおこなう電流は、すべて、閉じた電流である	174
510. しかし、両方の電流は、数学的な目的のため、基本要素から成り立ち、回路の作用はこれらの要素の作用の合力を考えることができる	174
511. 2つの線要素間の関係の必要な形	174

節		頁
512.	相対位置を決める幾何学量	175
513.	それらの相互作用の成分の形	176
514.	それらの 3 方向への分解。それぞれの方向は、それらを 結ぶ直線と、線要素自身に平行である	178
515.	有限の電流の他の要素への作用の一般式	179
516.	アンペールの第 3 の場合の平衡によって与えられる条件	180
517.	電気力学の作用の準線と行列式の理論	181
518.	電流のベクトルポテンシャルによる行列式の表式	182
519.	力の不確定部分はポテンシャルの空間変動として表示で きる	182
520.	2 つの有限流のあいだの作用の完結した表式	183
521.	2 つの閉じた電流の相互ポテンシャル	183
522.	この研究での四元数の適正性	184
523.	アンペールの第 4 の場合の平衡による関数形の決定	184
524.	電流の電気力学単位と電磁単位	184
525.	2 要素間の電磁力にたいする最終式	185
526.	4 つの異なる受け入れ可能な理論の形	185
527.	これらのなかで、アンペールの理論が好まれる	187

第 III 章

電流の誘導

528.	ファラディの発見。彼の方法の本質	189
529.	ファラディの方法に基づくこの書の方法	190
530.	磁気-電気誘導現象	191
531.	電流の誘導の一般法則	193
532.	誘導電流の方向の図解	193
533.	地球の運動による誘導	194

節	頁
534. 誘導による駆電力は導体の素材に依存しない	194
535. それは導体を動かそうとはしない	195
536. 誘導の法則にかんするフェリチの実験	196
537. 駆電力の時間積分を決めるための検流器の使用	197
538. 2コイルの共役位置	198
539. 全誘導力の数学的表式	199
540. 電気緊張状態についてのファラディの概念	199
541. 磁力線にかんする誘導法則のファラディの提示法	201
542. レンツの法則とノイマンの誘導理論	202
543. ヘルムホルツによる誘導の、エネルギー保存の原理による電流の機械的な作用からの導出	203
544. トムソンによる同じ原理の適用	204
545. ウェーバーの電気科学への寄与	206

第 IV 章

電流の自己誘導について

546. 電磁石によって与えられる衝撃	207
547. 電気のみかけの運動量	207
548. この場合と水流を含む管の場合の差	208
549. もし運動量が存在するなら、電気の動きの運動量ではない	208
550. それにもかかわらず、現象はまさに運動量の現象に類似している	208
551. 電流はエネルギーを持つ。それを電気運動エネルギーと呼ぶことができる	208
552. このことにより電流の力学理論の形成へと導かれる	209

第 V 章

結合系の運動方程式について

節	頁
553. 高度の力学研究にたいする適切なアイデアを与えるラグ ランジの方法	211
554. これらのアイデアは数学の言語から物理の言語へ翻訳されねばならない	211
555. 結合系の自由度	212
556. 一般化された速度の意味	213
557. 一般化された力の意味	213
558. 一般化された運動量と撃力の意味	213
559. 小さな撃力によってなされる仕事	215
560. 運動量の言葉による運動エネルギー, (T_p)	216
561. ハミルトンの運動方程式	217
562. 速度と運動量の言葉による運動エネルギー, (T_{pl})	218
563. 速度の言葉による運動エネルギー, ($T_{\dot{q}}$)	219
564. T_p と $T_{\dot{q}}$ のあいだ、 p と \dot{q} のあいだの関係	219
565. 運動量と、慣性と可動度の積	221
566. これらの係数が満たさねばならない必要条件	222
567. 数学、力学、電気学のアイデアのあいだの関係	223

第 VI 章

電磁気の力学理論

568. 電流はエネルギーを持つ	225
569. 電流は運動学的現象である	225
570. 駆電力によってなされる仕事	226
571. 電流を含む系の運動エネルギーのもっとも一般的な表式	227
572. 電気の変数はこの表式には現れない	228
573. 導体に作用する機械的な力	229
574. 通常の速度と電流の強さの積に依存する部分は存在しない	230

節	頁
575. そのほかの実験的検証	232
576. 駆電力にたいする議論	235
577. もし速度と電流の積を含む項があれば、その項は駆電力を導入したであろうが、それは観測されていない	235

第 VII 章 電流の理論

節	頁
578. 線形回路系の電気運動エネルギー	237
579. それぞれの回路中の駆電力	238
580. 電磁力	239
581. 2回路の場合	239
582. 誘導電流の理論	240
583. 回路間の機械的な作用	241
584. 2回路の相互作用現象はすべて1つの量、2回路のポテンシャルに依存する	242

第 VIII 章 2次回路をつかった場の探求

585. 2次回路の電気運動-運動量	245
586. 線積分として表示された	245
587. 任意の隣接する回路系はその外部境界によって形成される回路に等価である	246
588. 面積分として表示された電気運動-運動量	247
589. 回路のぎざぎざ部分は直線部分と等価	248
590. ベクトルとして表示された1点での電気運動-運動量, \mathfrak{A}	248
591. その磁気誘導, \mathfrak{B} との関係。方程式 (A)	249

節	頁
592. これらの名称の正当化	251
593. 並進、回転の符号にかんする規約	251
594. 滑走片の理論	252
595. 導体の運動による駆電力	253
596. 滑走片上の駆電力	254
597. 磁気誘導線の 4 つの定義	254
598. 駆電力の一般式。方程式 (B)	255
599. 駆電力の解析	257
600. 動座標軸にかんする一般式	259
601. 軸の運動は電気ポテンシャルの見かけの値以外、なにも 変えない	260
602. 導体上の電磁力	261
603. 伝導物体の要素上の電磁力。方程式 (C)	262

第 IX 章

電磁場の一般式

604. 要約	267
605. 磁化の式、(D)	268
606. 磁力と電流のあいだの関係	269
607. 電流の式、(E)	270
608. 電気変位の式、(F)	271
609. 電気伝導の式、(G)	272
610. 全電流の式、(H)	273
611. 駆電力の言葉による電流、(I)	273
612. 自由電気の体積密度、(J)	274
613. 自由電気の面密度、(K)	274
614. 透磁率の式、(L)	274
615. 磁石のアンペール理論	274
616. 電気運動-運動量の言葉による電流	275
617. 電流のベクトル-ポテンシャル	277

節	頁
618. 電磁気量の四元数表示	277
619. 電磁場の四元数表式	279
第 IX 章の付録	281

第 X 章 電気単位の次元

620. 2 つの単位系	287
621. 12 の基本量	287
622. これらの量のあいだの 15 の関係	288
623. $[e]$ と $[m]$ の言葉による次元	289
624. 2 つの系の相反性	290
625. 静電単位系と電磁単位系	290
626. 2 つの系の 12 の量の次元	292
627. 6 つの組み立て単位	292
628. 2 つの単位系での対応する単位の比	293
629. 電気の実用単位系。実用単位の表	294

第 XI 章 電磁場のエネルギーと応力

630. 自由電気とポテンシャルをつかって表示された静電エネルギー	297
631. 駆電力と電気変位をつかって表示された静電エネルギー	297
632. 磁化と磁力をつかって表示された磁気エネルギー	298
633. 磁力の平方をつかって表示された磁気エネルギー	298
634. 電気運動量と電流をつかった電気運動エネルギー	299
635. 磁気誘導と磁力をつかった電気運動エネルギー	300
636. この書の方法	301
637. 磁気エネルギーと電気運動エネルギーを比較する	301
638. 磁気エネルギーは電気運動エネルギーに還元される	302

節	頁
639. 物質の磁化による物質粒子に作用する力	304
640. それをとおる電流による電磁力	304
641. 媒質中の応力の仮説によるこれらの力の説明	306
642. 現象を生成するために要する応力の一般的な性質	308
643. 磁化がないとき、応力は磁力線の方向に張力であり、磁力線に垂直なすべての方向へ圧力と組み合わされており、 張力と圧力の大きさは $\frac{1}{8\pi} \mu^2$ である。ここで μ は磁力である	309
644. 電流を運ぶ導体に作用する力	311
645. ファラディによって述べられた媒質中の応力理論	311
646. 磁気張力の数値	312
XI 章の付録 I	313
XI 章の付録 II	315

第 XII 章 電流シート

647. 電流シートの定義	317
648. 流れ関数	317
649. 電気ポテンシャル	318
650. 定常電流の理論	318
651. 一様伝導度の場合	319
652. 閉じた電流を持つ電流シートの磁気作用	319
653. 電流シートによる磁気ポテンシャル	320
654. 無限大の伝導度のシート中の電流の誘導	320
655. そのようなシートは磁気作用を透さない	321
656. 平面電流シートの理論	321
657. 一つの関数の微分として表示された磁気関数	322
658. シート上の変動磁気系の作用	324
659. 外部作用がないとき、電流は減衰し、シートを一定速度 R で取りはぶくと、その磁気作用は減少する	325

節		頁
660.	瞬間的な磁気系の導入によって励起されたとき、電流は その系の像に等価な効果を生成する	326
661.	この像は元の位置から速度 R で去っていく	327
662.	連続的に運動している磁気系によって形成された像の跡	327
663.	誘導電流に効果にたいする数学的な表式	328
664.	磁極の一様運動の場合	329
665.	磁極に作用する力の値	330
666.	曲線運動の場合	331
667.	シートの端近くの運動の場合	331
668.	アラゴの回転円盤の理論	331
669.	螺旋形の像の跡	335
670.	球面電流シート	336
671.	ベクトルポテンシャル	337
672.	球殻内に一定磁力の場を生成する	338
673.	懸架コイル上に一定の力を生成する	340
674.	平面に平行な電流	341
675.	平面電流。球殻。楕円殻	341
676.	ソレノイド	342
677.	長いソレノイド	344
678.	終端ちかくの力	345
679.	誘導コイル対	346
680.	導線の適切な太さ	347
681.	終端のないソレノイド	348

XIII 章 平行電流

節		頁
682.	円柱形導体	351
683.	円柱導線の外部磁気作用は円柱をとおる電流の総量にのみ依存する	352
684.	ベクトルポテンシャル	353
685.	電流の運動エネルギー	354
686.	直行電流と帰還電流のあいだの反発	355
687.	導線の張力。アンペールの実験	355
688.	自分自身に重ねられた導線の自己誘導	356
689.	円柱導線中の強度の変化する電流	357
690.	駆電力と全電流のあいだの関係	359
691.	平面中の 2 つの図形の幾何平均距離	364
692.	特定の事例	364
693.	絶縁導線にコイルへの方法の応用	368

XIV 章 円形電流

694.	球形の椀によるポテンシャル	371
695.	任意の点で円によって区切られた立体角	374
696.	2 円形電流のポテンシャルエネルギー	375
697.	2 コイル間に作用する偶力のモーメント	376
698.	P'_i の値	377
699.	2 平行円形電流のあいだの引力	377
700.	有限断面のコイルにたいする係数の計算	378
701.	楕円積分によって表示された 2 平行円のポテンシャル	380
702.	円形電流のまわりの力線 (図 XVIII)	382
703.	2 円のポテンシャルの微分方程式	383
704.	2 円が互いにごく近いときの近似	384
705.	さらなる近似	386
706.	最大自己誘導コイル	389

節

	頁
XIV 章の付録 I	390
XIV 章の付録 II	392
XIV 章の付録 III	393

XV 章

電磁機器

707.	標準検流器と高感度検流器	395
708.	標準検流器の作成	396
709.	検流器の数学理論	397
710.	正接検流器と正弦検流器の原理	398
711.	1コイルをもつ検流器	398
712.	ゴーガンの偏心懸架	400
713.	ヘルムホルツの2重コイル(図 XIX)	400
714.	4コイルをもつ検流器	401
715.	3コイルをもつ検流器	402
716.	検流器の導線の適切な太さ	404
717.	高感度検流器	405
718.	最大感度検流器の理論	406
719.	導線の太さの法則	406
720.	一様な太さの導線をもつ検流器	409
721.	懸架されたコイル。懸架の方式	410
722.	トムソンの高感度コイル	411
723.	懸架コイルと正接検流器による磁力の決定	411
724.	トムソンの懸架コイルと検流計の組合せ	412
725.	ウェーバーの電力計	413
726.	ジュールの電流重量計	417
727.	ソレノイドの吸い込み	418
728.	懸架コイルに垂直な一様な力	418
729.	捩じり腕をもつ電力計	418

XVI 章 電磁観測

節	頁
730. 振動の観測	421
731. 対数らせん内の運動	421
732. 抵抗媒質中の直線振動	424
733. 連続する伸長値	424
734. データと探求値	424
735. 3 連続伸長値から決められた平行位置	424
736. 対数減衰率の決定	426
737. いつ実験を止める	426
738. 3 通過から振動の時間を決める	427
739. 2 系列の観測	428
740. 振幅と減衰にたいする補正	428
741. 速示検流器	429
742. 検流器による一定電流の測定	430
743. 正接検流器の最良偏向角	431
744. 電流を導入する最良の方法	431
745. 第一伸長値による電流の測定	432
746. 一定電流上の一連の観測を行う	433
747. 微弱電流の倍増法	433
748. 第一伸長値による遷移電流の測定	435
749. 減衰にたいする補正	436
750. 観測系列。Zurückwerfungs(反射) 法	437
751. 倍増法	440

XVII 章 コイルの比較

752. 直接測定よりもしばしば正確な電気測定	443
753. G_1 の決定	444
754. g_1 の決定	445

節		頁
755.	2 コイルの相互誘導の決定	445
756.	コイルの自己誘導の決定	448
757.	2 コイルの自己誘導の比較	449
	XVII 章の付録	

XVIII 章
抵抗の電磁単位

758.	抵抗の定義	455
759.	キルヒホフの方法	455
760.	遷移電流にたいするウェーバーの方法	457
761.	彼の観測法	458
762.	制動によるウェーバーの方法	458
763.	回転コイルによるトムソンの方法	462
764.	回転コイルの数学理論	462
765.	抵抗の計算	464
766.	補正	465
767.	ジュールの熱量測定法	465

第 XIX 章
静電単位と電磁単位の比較

768.	研究の本質と重要性	467
769.	単位の比は一つの速度である	468
770.	規約による電流	469
771.	ウェーバーとコウルラウシュの方法	469
772.	電位計と電力計の分離によるトムソンの方法	471
773.	電位計と電力計の結合によるマクスウェルの方法	471
774.	コンデンサー容量の電磁測定、ジェンキンの方法	472
775.	間欠電流による方法	474
776.	ホイートストン橋の腕としてのコンデンサーと交換子	474

節	頁
777. 作用があまりにも速いときの補正	478
778. コイルの自己誘導と比較されたコンデンサーの容量	479
779. コイルとコンデンサーの組合せ	481
780. 抵抗の静電尺度の抵抗の電磁尺度との比較	484

第 XX 章

光の電磁理論

781. 電磁媒質の性質と光の波動理論の媒質の性質との比較	487
782. 伝搬中の光のエネルギー	487
783. 電磁擾乱の伝搬の方程式	489
784. 媒質が非伝導体であるときの解	491
785. 波の伝搬の特性	492
786. 電磁擾乱の伝搬速度	492
787. この速度の光の速度との比較	493
788. 誘電体の比誘導容量はその屈折率の平方である	494
789. パラフィンの場合のこれらの量の比較	494
790. 平面波の理論	495
791. 電気変位と磁気の擾乱は波面の平面内にあり、互いに垂直である	497
792. 輻射のあいだのエネルギーと応力	498
793. 光の圧力	499
794. 結晶性媒質の運動方程式	502
795. 平面波の伝搬	503
796. 2つの波のみが伝わる	504
797. 理論はフレネル理論に一致する	504
798. 電気伝導度と不透明性のあいだの関係	505
799. 事実の比較	506
800. 透明な金属	506
801. 媒質が導体であるときの方程式の解	507

節	頁
802. 初期条件が与えられている無限媒質の場合	507
803. 拡散の特性	508
804. 電流が流れ始めたときの電磁場の擾乱	508
805. 最終状態への急速な接近	509

XXI 章

光への磁気作用

806. 磁気と光のあいだの関係の可能な形	511
807. 磁気の作用による偏向面の回転	512
808. 現象の法則	512
809. 強磁性媒質中の負の回転のベルデの発見	513
810. 磁気と独立に、水晶、テレビン油などによって生成される回転	513
811. 現象の運動学的解析	514
812. 円偏光光線の速度は回転の方向により異なる	514
813. 右まわりおよび左まわり光線	514
814. それ自身回転性を持つ媒質中では、速度は右手配置と左手配置で異なる	515
815. 磁気が作用する媒質中では、速度は反対方向の回転にたいして異なる	516
816. 数学的に考察すると、光の擾乱はベクトルである	516
817. 円偏光の運動学的方程式	516
818. 媒質の運動エネルギーとポテンシャルエネルギー	517
819. 波伝搬の条件	518
820. 磁気の作用は磁力の方向を軸とする実際の回転に依存する	518
821. 現象の解析結果の提示	519

節	頁
822. 分子渦仮説	520
823. ヘルムホルツの法則にしたがう渦の変動	520
824. 扰乱をうけた媒質の運動エネルギーの変動	521
825. 電流と速度をつかった表式	523
826. 平面波の場合の運動エネルギー	523
827. 運動方程式	524
828. 円偏光光線の速度	525
829. 磁気回転	526
830. ベルデの研究	527
831. 分子渦の機械的理論への注釈	530

第 XXII 章

強磁性と反磁性の分子電流による説明

832. 磁気は分子の現象である	533
833. 磁気分子の現象は電流によって模倣できる	533
834. 連続的な磁石の初等理論と分子電流の理論の差	534
835. 電気理論の単純性	535
836. 完全導体回路中の電流の理論	535
837. 電流がまったく誘導による場合	536
838. 反磁性のウェーバーの理論	536
839. 磁気結晶誘導	537
840. 完全導体の理論	537
841. 完全電導性球形分子を含む媒質	538
842. それが励起する電流への磁力の機械的な作用	538
843. 原始的な電流をもつ分子の理論	539
844. ウエーバー理論の修正	540
845. 理論の帰結	540

第 XXIII 章
遠隔作用の理論

節	頁
846. アンペールの公式に入ってくる量	543
847. 2つの電気粒子の相対運動	543
848. 4つの電気粒子の相対運動、フェヒナーの理論	544
849. アンペールの公式の2つの新しい形	545
850. 運動する2電気粒子間の力にたいする2つの異なる表式	546
851. これらはそれぞれガウスとウェーバーによる	547
852. すべての力はエネルギー保存の原理と無矛盾でなければ ならない	548
853. ウェーバーの公式はこの原理と無矛盾であるがガウスの 公式はそうではない	548
854. ヘルムホルツのウェーバーの公式からの演繹	548
855. 2つの電流のポテンシャル	550
856. ウェーバーの電流誘導の理論	550
857. 導体中の力の分離	551
858. 動いている導体の場合	552
859. ガウスの公式は誤った結果に導く	553
860. ウェーバーの公式は現象と一致する	553
861. ガウスのウェーバーへの手紙	554
862. リーマンの理論	554
863. C. ノイマンの理論	555
864. ベッティの理論	556
865. 媒質のアイデアへの反感	556
866. 媒質のアイデアは取り除けない	557
索引	558
図面	586

PART III

磁氣

第Ⅰ章

磁気の初等理論。

371.] ある物体、たとえば、ロードストーンと呼ばれる鉄鉱石や、地球自身や、ある処理をされた鋼片は、次のような性質を持つことが分っており、磁石と呼ばれている。

磁極以外の任意の場所の地表近くで、磁石が鉛直軸のまわりに自由に回転するように吊るされたなら、一般に、磁石は自分自身をある方位角に向けようとする。もしこの位置から乱されると、磁石はそのまわりに振動する。非磁化物体はそのような傾向を持たず、すべての方位角で、同じように、平衡になる。

372.] 物体に働く力は、磁石の軸と呼ばれる物体中のある直線を、磁力の方向と呼ばれる空間中のある直線と、平行にしようとすることが分る。

磁石は固定点のまわりのすべての方向に自由に回転するように吊られていると考えよう。その重さの作用を消すために、この点は磁石の重心であると考えてよい。磁石が平衡の位置に来たとする。磁石のうえの2点に印をつけ、空間中のその位置を書きとめる。つぎに磁石を新しい平衡位置に置き、磁石の上の2つの印された点の空間中の位置を書きとめる。

磁石の軸は両位置での磁力の方向と一致するので、運動の前後で同じ位置を占める磁石中の直線を見つけなければならない。形の変わらない物体の運動の理論からそのような直線はつねに存在し、現実の運動に等価な運動がこの直線回りの単純な回転によって起こったように見えるであろう。

この直線を見出すために、それぞれの印のつけられた点の最初と最後の位置を結び、この直線を直角に2等分する面を描く。これらの面の交線が必要な直線であり、それが磁石の軸の方向と空間中の磁力の方向を指し示す。

ここで記述された方法はこれらの方向の実際の決定に便利な方法ではない。私たちが磁気の測定を扱うとき、この問題にたちかえろう。

磁力の方向は地表のいろいろな場所で異なっていることが分る。北方向をさす磁石の軸の終端に印がつけられたなら、それが向く方向は、一般に、真の子午面からかなりの程度ずれており、印のつけられた終端は全体として北半球では下を、南半球では上をさしていることが分っている。

真の北から西へ測った磁力の方向の方位角は偏差とか磁気偏角と呼ばれる。磁力の方向と水平面のあいだの角度は磁気伏角と呼ばれる。これら 2 つの角が磁力の方向を決め、磁気強度も知られているとき、磁力は完全に決まる。地表のいろいろな場所でこれら 3 要素の値を決めること、観測の場所と時間にしたがって、どのように変わるかを議論すること、これが地磁気の科学の内容である。

373.] さて、いくつかの磁石の軸が決められ、それぞれの北を指す終端に印がつけられたと考えよう。このとき、もしこれらの磁石の一つが自由に吊下げられ、他の磁石がその近くに運ばれたなら、2 つの印のつけられた終端は互いに斥けあい、印のつけられた終端とつけられていない終端は互いに引きつけあい、印のつけられていない終端は互いに斥けあうことが分かる。

もし磁石が長い棒や針金の形をしており、一様に縦方向に磁化されているなら（384 節参照）、一方の磁石の終端が他方の終端のちかくに保持されたとき最大の力が現れること、現象が磁石の同種の終端が互いに斥けあうと考えると説明できること、異種の終端が互いに引きつけあうこと、磁石の中間部分がそれほどの相互作用を持たないことが分かる。

長くて細い磁石の終端は、通常、その極と呼ばれる。

長さ全体にわたって一様に磁化された無限に細い磁石の場合、その極点は力の中心として作用し、磁石の残りの部分は磁気作用がないようにみえる。実際の磁石では、すべて、磁化は一様からずれており、したがって、1 点を極とすることはできない。しかし、クーロンは注意深く磁化された長く細い棒を使って 2 つの同種の磁極間の力の法則を確立することに成功した^{註 1}。{ それらのあいだの媒質は空気である。 }

^{註 1} Coulomb, *Mém. de l'Acad.* 1785, p. 603, および Biot の *Traité de Physique*, tome iii.

2つの同種の磁極のあいだの斥力はそれらを結ぶ直線上にあり、その数値は極の強さの積をそれぞれのあいだの距離の2乗で割ったものに等しい。

374.] もちろん、この法則はそれぞれの極の強さがある単位を使って測られていることを仮定しており、その大きさはその法則をつかって導かれる。

単位の極は北を指す極で、空气中で、もう一つの単位の極から単位の距離に置かれたとき、単位の力で斥ける。単位の力は6節で定義されている。南を指す極は負と数えられる。

もし m_1 と m_2 が2つの磁極の強さ、 l がそれらのあいだの距離、 f が斥力で、すべてが数として表示されるなら、

$$f = \frac{m_1 m_2}{l^2},$$

である。しかし、もし $[m]$, $[L]$, $[F]$ が磁極、長さ、力の具体的な単位なら

$$f[F] = \left[\frac{m}{L} \right]^2 \frac{m_1 m_2}{l^2},$$

である。したがって、

$$[m^2] = [L^2 F] = [L^2 \frac{ML}{T^2}],$$

つまり

$$[m] = [L^{\frac{3}{2}} T^{-1} M^{\frac{1}{2}}],$$

が出てくる。

p. 4

それゆえ、単位の大きさの極の次元は長さにかんして $\frac{3}{2}$ 、時間にかんして (-1) 、質量にかんして $\frac{1}{2}$ である。これらの次元は電気の静電単位の次元と同じであり、41, 42節と同じ方法で厳密に特徴づけられる。

375.] この法則の正確性は振り秤を使ったクーロンの実験で確立され、ガウスとウェーバーや磁気観測所の観測者たち全員の実験によって確かめられていると考えることができる。観測者たちは、日夜、磁気量の測定をしており、もし法則を誤って仮定したなら、互いに矛盾する結果を得てしまうからである。

376.] 私たちがここまで極の強さと呼んできた量は「磁気」量と呼んでもよい。ただし、磁極で観測される性質以外の性質を「磁気」の性質に帰さないかぎりにおいて、である。

与えられた「磁気」量のあいだの力の法則の式は同じ数値の「電気」量のあいだの力の法則とまったく同じ数学形式を持っているので、磁気の数学的な取扱いの多くは電気のそれと似たものでなければならない。しかし、心に留めておかねばならない磁気の性質が他にもあり、それらは物体の電気的な性質になにかしらの光を投げかける。

磁極間の関係。

377.] 磁石の一方の極の磁気量はもう一つの極の磁気量とつねに同じ大きさで反対符号である。より一般には:—

どの磁石でも、磁気の総量は(代数的に計算して)零である。

したがって、磁石で占められた空間全体で一様で平行な力の場のなかでは、印のつけられた終端に作用する力は印のつけられていない終端に作用する力に厳密に同じ大きさで、反対方向で平行であり、したがって合力は静的な偶力であり、磁石の軸を決まった方向に向けようとするが、全体としてどの方向にも磁石を動かそうとはしない。

このことは磁石を小さな容器の中に置き、容器を水に浮かべることによってたやすく証明できる。磁石の置かれた容器はある方向に回転し、地球の磁力の方向に可能なだけ近くに磁石の軸を持っていくが、全体としてどのような方向にも容器の運動はない。したがって、南に向かう力が北に向かう力を上まわることも、その逆もありえない。また鋼片の磁化がその重さを変えない事実からもそれを示すことができる。鋼片の磁化はその重心の見かけの位置を変え、それを、これらの緯度では、北に向けて軸方向を変えさせる。回転現象から決められた慣性中心は変わらないで維持されている。

378.] もし長く細い磁石の中間部を調べると、磁気の性質を持たないことが分かるが、もし磁石がその点で割られると、そのそれぞれの破片は割れた場所に磁極を持ち、この新しい極はその破片の他の極とまったく同じ大きさで反対符号であることが分かる。磁化によっても、磁石の破断によても、そ

のほかのどのような手段によっても、極の大きさが同じではない磁石を得ることはできない。

もし長く細い磁石をいくつかの短い片に割るなら、一連の短い磁石を手にいれ、そのそれぞれはもとの長い磁石の強さとほとんど同じ強さの極を持つ。この極の増加は必ずしもエネルギーの生成ではない。磁石を破断したあと、互いの引力の結果として、部分部分を分離するため仕事をしなければならないことを思い出さなければならないからである。

379.] さて、磁石の全破片を最初と同じ形に集めよう。それぞれの接合点でまったく同じ大きさで反対の種類の 2 極があり、接触して置かれると、どの他極と合わせた作用も零になるであろう。それゆえ、こうして再構成された磁石は最初と同じ性質を持つ。つまり、それぞれの終端に 1 つずつ、互いに同じ大きさで反対で、これらの極のあいだの部分は磁気作用を示さない。

この場合、長い磁石は小さな短い磁石からできているから、また、現象は破断されていない磁石の場合と同じだから、破断される前でさえ、長い磁石は小さな粒子からできており、そのそれぞれが 2 つの同じ大きさで反対の極を持っているとみなすことができる。もしすべての磁石がそのような粒子からできていると考えると、それぞれの粒子の磁気の代数的な量は零だから、磁石全体の量も零であり、言いかえれば、その極は同じ強さで反対種類であることは明らかである。

p. 6

「磁気物質」の理論。

380.] 磁気作用の法則の形は電気作用の法則の形と同一であるから、電気現象を 1 「流体」または 2 「流体」の作用に帰すために与えることができる理由を、1 種類の磁気物体の存在の方がよいのか、それとも 2 種類の磁気物質がよいのか、流体がよいのか、それとも他のもののほうがよいのか、にも使うことができる。事実、磁気物質の理論は、もし純粹に数学としてだけ使われたなら、新しい法則を現実の事実を説明するために自由に導入すると、どんな現象も説明できないことはない。

これらの新しい法則の一つは、磁気流体はある磁石分子または粒子から他の磁石粒子へ移ることができないが、磁化の過程はそれぞれの粒子のなかで

2 流体をあるていど分離することでなければならず、一方の流体を粒子の一方の端に濃縮し、もう一方の流体を他端に濃縮させるものでなければならぬ。これがポアソンの理論である。

ポアソンの理論では、磁化が可能な物体の粒子は電荷を持たない小さな絶縁された導体の類似物であり、それは、2 流体理論では無限に大きいがまったく同じ大きさの2つの電気量を含んでいる。駆電力が導体に作用したとき、駆電力が電気を分離し、電気を導体の反対側に現れるようにさせる。同様に、この理論にしたがうと、磁力がもともと中性状態にあった2種類の磁気を分離させ、磁気粒子の反対側に現れさせる。

軟鉄や永久磁化できない磁性体のような、ある種の物質では、この磁気状態は、導体の帶電と同じように、誘導力が除かれたとき、消える^{註2}。硬鋼のような、他の物質では、磁気状態は、生成することは困難だが、生成されると、誘導力が除かれたあとも、維持される。

p. 7 このことは、後者の場合、保磁力があり、磁化の変化を防ごうとしており、磁石の力が増加減少するまえに、保磁力に勝たなければならないと述べることで表示される。帶電物体の場合、これはある種の電気抵抗に対応し、金属中で観測される抵抗とはちがって、ある値以下の駆電力にたいしては、完全な絶縁体であることに等価である。この磁気理論は、対応する電気理論に似ているが、あきらかに、事実にたいしてあまりにも大きいものであり、人為的な条件によって制限される必要がある。ある物体が他の物体と、なぜ両流体をより多く持つと違うかについて、なんの理由を与えないだけではなく、1 磁気流体を余分に含む物体の性質がどのような性質を持っていたかを述べることすら可能にしたはずであるからである。なぜそのような物体が存在できないかの理由が与えられていることは本当だが、この理由はこの特定の事実を説明するために、後知恵で導入されたにすぎない。それは理論からは出てこない。

381.] それゆえ、あまりにも多くの表示可能にすることなく、新しい事実から発展する新しいアイデアを導入する余地を残した表示法を探さなければならぬ。磁気粒子が分極していると述べることから始めると、これが得られると、私は思う。

註2 48 ページの脚注参照。

術語「分極」の意味。

物質粒子が物体中のある直線、つまり、方向に関係した性質を持つとき、そして、物体が、この性質を保ったまま、この方向が逆転するように回されたとき、もし他の物体にかんして粒子のこれらの性質が逆転するなら、粒子は、これらの性質にかんして、分極していると言われ、その性質は特定の種類の分極を構成していると言われる^{註3}。

こうして軸のまわりの物体の回転は一種の分極を構成する。なぜなら、もし、回転が続くあいだ、軸の方向が反転されたら、物体は空間にかんして反対方向にまわるからである。

そのなかで電気が流れている導体粒子は分極していると言うことができる。なぜなら、もし導体粒子が回されたとして、もし流れがその粒子にかんして同じ方向に流れ続けるなら、空間中のその方向は逆転するからである。

簡単に言うと、もし数学量や物理量が、11節で定義されたような、ベクトル性を持つなら^{註4}、この方向のある量、つまり、ベクトルが属する任意の物体や粒子は分極^{註5}していると言うことができる。なぜなら、それは方向の p. 8 ある量の2つの反対方向、つまり、極で反対の性質を持つからである。

たとえば、地球の極は回転に関係があり、したがって異なる名前を持っている。

^{註3} 訳註: 物体を鏡に映すと、鏡の中の物体の像は前後が逆転しているが、磁気分極の方向は逆転しない。しかし、電気分極の方向は逆転する。

^{註4} 訳註: 四元数は、外積が自動的に計算できることから分かるように、私たちが高校で学ぶ空間のベクトルよりも大きな概念である。単位四元数は球面 S^3 の持つ対称性 $SU(2)$ を完全に表すことができる。

^{註5} polarization (分極、偏り) と言う言葉は光学ではこれと矛盾する意味で使われてきた。光学では光線がその側面にかんする性質を持つとき、光線は偏っていると言われ、それは光線の反対側面でも同一である。この種の偏りはもう一つの種類の方向のある量を指しており、双極性の量と呼ぶことができる。单極性と呼ぶことのできた前の種類とは対立している。

双極性の量が反転されたとき、その量は前と同じまま維持される。固体中の張力や圧力、拡張、圧縮、歪み、結晶体の光学的、電気的、磁気的な性質のほとんどは双極性の量である。

入射光の偏りの面を捩る透明な物体中の磁気によって生成された性質は、磁気それ自身と同じように单極性である。303節で参照された回旋性もまた单極性である。^{註6}

^{註6} 訳註: マクスウェルが双極性の量として挙げた例（応力、歪）は、マクスウェルがベクトルの線形関数と呼んでいる、2階対称テンソルで表される量である。マクスウェルが单極性の量として挙げた例は、マクスウェルがベクトルのベクトル値関数と呼んでいる2階反対称テンソルで表される量で、2階反対称テンソルはベクトルとしても表される。

術語「磁気分極」の意味。

382.] 磁石の粒子の状態を磁気分極として話すとき、磁石が分解される最小部分のそれぞれが磁化軸と呼ばれる粒子をとおる決まった方向にかんするある性質を持ち、この軸の一端に関係した性質が他端にかんする性質と逆であることを意味している。

私たちが粒子に帰す性質は完全な磁石で観測される性質と同じ種類のものであり、粒子がこれらの性質を持つと仮定して、磁石を小片にまで破碎することによって立証できることをたんに主張するだけである。小片のそれぞれが磁石であると分かるからである。

磁化された粒子の性質。

383.] 体積要素 $dxdydz$ を磁石の粒子とする。その磁気の性質は磁石の正の極の強さが m 、その長さが ds の磁石のものであるとする。このとき、もし P が正の極からの距離が r 、負の極からの距離が r' の空間中の任意の点なら、 P での磁気ポテンシャルは正の極による $\frac{m}{r}$ と負の極による $-\frac{m}{r'}$ 、つまり、

$$V = \frac{m}{rr'}(r' - r), \quad (1)$$

である。もし、極のあいだの距離 ds が非常に小さいなら、

$$r' - r = ds \cos \epsilon, \quad (2)$$

p. 9

と置くことができる。ここで、 ϵ は磁石から P へ引いたベクトルと磁石の軸^{註 7} のあいだの角度であり、極限で

$$V = \frac{mds}{r^2} \cos \epsilon, \quad (3)$$

である。

^{註 7} { 正の軸方向は負極から正極へである。 }

磁気モーメント。

384.] 一様に縦方向に磁化された棒磁石の長さと正の極の強さとの積は磁気モーメントと呼ばれる。

磁化の強度。

磁気粒子の磁化の強度はその磁気モーメントの粒子の体積にたいする比である。それを I で表記する。

磁石の任意の点での磁化はその強度と方向によって定義される。その方向は方向余弦 λ, μ, ν によって定義できる。

磁化の成分。

磁石の点での磁化は(ベクトル、つまり、方向のある量であり、)座標軸にかんする 3 成分を使って表示される。これらを A, B, C , と呼ぶと、

$$A = I\lambda, \quad B = I\mu, \quad C = I\nu \quad (4)$$

であり、 I の数値は方程式

$$I^2 = A^2 + B^2 + C^2, \quad (5)$$

によって与えられる。

385.] もし磁石の考えている部分が微分体積要素 $dxdydz$ なら、そして、もし I がこの要素の磁化強度を表記するなら、その磁気モーメントは $Idxdydz$ である。これを式(3)の mds に代入し、

$$r \cos \epsilon = \lambda(\xi - x) + \mu(\eta - y) + \nu(\zeta - z), \quad (6)$$

を思い起す。ここで、 ξ, η, ζ は点 (x, y, z) から描かれたベクトル r の先端の座標である。磁化された (x, y, z) による点 (ξ, η, ζ) でのポテンシャルにたいして

$$\{A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)\} \frac{1}{r^3} dxdydz, \quad (7)$$

であることが分かる。

有限の大きさの磁石による点 (ξ, η, ζ) でのポテンシャルを得るために、磁石によって占められた空間に含まれる各体積要素にたいするこの積分

$$V = \iiint \{A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)\} \frac{1}{r^3} dx dy dz. \quad (8)$$

をみいださなければならない。

部分積分を行うと、これは

$$\begin{aligned} V &= \iint A \frac{1}{r} dy dz + \iint B \frac{1}{r} dz dx + \iint C \frac{1}{r} dx dy \\ &\quad - \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

となる。ここで最初の 3 項の 2 重積分は磁石の表面に、4 項めの 3 重積分はその中の空間にかんするものである。

もし l, m, n が面要素 dS から外向きに引かれた法線の方向余弦なら、21 節と同様に、最初の 3 項の和を

$$\iint (lA + mB + nC) \frac{1}{r} dS,$$

と書くことができる。ここで積分は磁石の全表面にわたる。

もし式

$$\begin{aligned} \sigma &= lA + mB + nC, \\ \rho &= -\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right) \end{aligned}$$

によって定義される、新しい記号、 σ, ρ を導入すると、ポテンシャルに対する式は

$$V = \iint \frac{\sigma}{r} dS + \iiint \frac{\rho}{r} dx dy dz,$$

と書かれる。

386.] この式は表面に面密度 σ の帶電があり、その物質全体にわたって体積密度 ρ の帶電がある物体による電気ポテンシャルの式と同一である。したがって、もし σ, ρ は「磁気物質」と呼ばれる仮想的実体の分布の面および体積密度であると仮定すると、この仮想的分布によるポテンシャルは磁石のすべての要素の実際の磁化によるポテンシャルと同一であろう。

面密度 σ は外向きに引かれた面の法線方向の磁化 I の強度の成分であり、体積密度 ρ は磁石の与えられた点での磁化の「収束」(25 節を見よ) である。

「磁気物質」の分布をつかった磁気作用のこの表現法はたいへん便利であるが、分極物質系の作用を表現する人為的な方法にすぎないことをつねに忘れてはならない。

ある磁気分子のもう一つの磁気分子への作用。

387.] もし、球面調和関数にかんする 129b 節と同じように、 l, m, n を軸 h の方向余弦として

$$\frac{d}{dh} = l \frac{d}{dx} + m \frac{d}{dy} + n \frac{d}{dz} \quad (1)$$

とすると、分子軸が h に平行で、磁気モーメントが m_1 である原点にある磁気分子によるポテンシャルは、

$$V_1 = -\frac{d}{dh_1} \frac{m_1}{r} = \frac{m_1}{r^2} \lambda_1, \quad (2)$$

である。ここで λ_1 は h_1 と r のあいだの角の余弦である。

ふたたび、モーメントが m_2 で軸が h_2 に平行な第 2 の磁気分子が動径ベクトル r の先端に置かれたなら、一方の磁石のもう一方の磁石への作用によるポテンシャルエネルギーは

$$W = m_2 \frac{dV_1}{dh_2} = -m_1 m_2 \frac{d^2}{dh_1 dh_2} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (3)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{r^3} (\mu_{12} - 3\lambda_1 \lambda_2), \quad (4)$$

である。ここで μ_{12} は 2 分子の軸が互いになす角の余弦であり、 λ_1, λ_2 は 2 分子の軸が r となす角である。

第 1 の磁石が第 2 の磁石をその中心のまわりの回そうとする偶力のモーメントを決めよう。

第 2 の磁石が、第 3 軸 h_3 に垂直な面内で、角度 $d\phi$ だけ回ったと考えると、磁力に抗してなされる仕事は $\frac{dW}{d\phi} d\phi$ で、この面内で磁石へはたらく値からの

モーメントは

$$-\frac{dW}{d\phi} = -\frac{m_1 m_2}{r^3} \left(\frac{d\mu_{12}}{d\phi} - 3\lambda_1 \frac{d\lambda_2}{d\phi} \right), \quad (5)$$

p. 12

である。

それゆえ、第 2 の磁石へ作用する実際のモーメントは 2 つの偶力の合成と考えられ、第 1 の偶力は両磁石の軸に平行な面内で作用し、モーメントが

$$\frac{m_1 m_2}{r^3} \sin(h_1 h_2), \quad (6)$$

である偶力で、それらのあいだの角を増やそうとし、第 2 の偶力は r と第 2 の磁石の軸をとおる面内で作用し、モーメントが

$$\frac{3m_1 m_2}{r^3} \cos(rh_1) \sin(rh_2) \quad (7)$$

である偶力で、これらの方向のあいだの角度を減少させようとする。ここで $(rh_1), (rh_2), (h_1 h_2)$ は直線 r, h_1, h_2 のあいだの角を表記する^{註 8}。

直線 h_3 に平行な方向に第 2 の磁石に作用する力を決めるために

$$-\frac{dW}{dh_3} = m_1 m_2 \frac{d^3}{dh_1 dh_2 dh_3} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (8)$$

$$= -m_1 m_2 \frac{|3!Y_3|}{r^4}, \quad 129c \text{ 節によって},$$

$$= 3 \frac{m_1 m_2}{r^4} \{ \lambda_1 \mu_{23} + \lambda_2 \mu_{31} + \lambda_3 \mu_{12} - 5\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \}, \quad 133 \text{ 節によって}, \quad (9)$$

$$= 3\lambda_3 \frac{m_1 m_2}{r^4} (\mu_{12} - 5\lambda_1 \lambda_2) + 3\mu_{13} \frac{m_1 m_2}{r^4} \lambda_2 + 3\mu_{23} \frac{m_1 m_2}{r^4} \lambda_1. \quad (10)$$

^{註 8} { もし θ_1, θ_2 が 2 つの磁石の軸がそれぞれ r となす角、 ψ が r と第 1 の磁石軸を含む面と、 r と第 2 の磁石軸を含む面のなす角なら

$$\mu_{12} - 3\lambda_1 \lambda_2 = -2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \psi,$$

である。こうして、第 2 磁石に作用する偶力は、軸が r, ψ を増やそうとするそのモーメント $-\frac{dW}{d\psi}$ が

$$\frac{m_1 m_2}{r^3} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \psi,$$

である偶力と、 r と第 2 磁石の軸の面内の θ_2 を増やそうとする第 2 磁石のモーメント $-dW/d\theta_2$ が

$$-\frac{m_1 m_2}{r^3} \{ 2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \psi \},$$

であるの偶力を合わせたものに等価である。これらの偶力は (6), (7) で与えられたものと等価である。}

を計算しなければならない。

もし実際の力はそれぞれ、 r, h_1, h_2 方向の 3 つの力 R, H_1, H_2 の複合と考えると、 h_3 方向の力は

$$\lambda_3 R + \mu_{13} H_1 + \mu_{23} H_2, \quad (11)$$

である。

p. 13

h_3 の方向は自由に選べるから、

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{3m_1 m_2}{r^4} (\mu_{12} - 5\lambda_1 \lambda_2), \\ H_1 &= \frac{3m_1 m_2}{r^4} \lambda_2, \quad H_2 = \frac{3m_1 m_2}{r^4} \lambda_1, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

が成り立たなければならない。

力 R は斥力で、 r を増やそうとする。 H_1 と H_2 はそれぞれ第 1 および第 2 の磁石の軸の方向に第 2 の磁石に作用する。

2 つの小さな磁石に作用する力の解析は、最初に、1860 年 1 月の *Quarterly Math. Journ.* にテイト教授により与えられた。

特別な位置。

388.] (1) もし λ_1 と λ_2 がそれぞれ 1 に等しいなら、つまり、もし磁石の軸が 1 本の直線上にあり、同じ方向なら $\mu_{12} = 1$ であり、磁石間の力は斥力

$$R + H_1 + H_2 = -\frac{6m_1 m_2}{r^4} \quad (13)$$

である。負符号は力は引力であることを指している。

(2) もし λ_1 と λ_2 が零で、 μ_{12} が 1 なら、磁石の軸は互いに平行で、 r に垂直で、力は斥力

$$\frac{3m_1 m_2}{r^4}, \quad (14)$$

である。これらの場合のいずれも偶力はない。

(3) もし

$$\lambda_1 = 1 \text{かつ} \lambda_2 = 0, \text{ そのとき} \mu_{12} = 0, \quad (15)$$

なら。

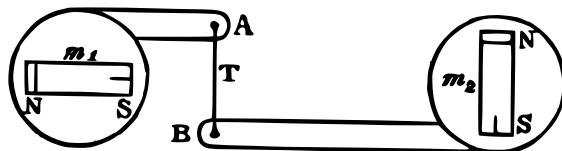


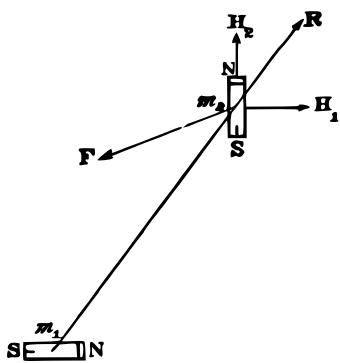
図 1.

第 2 磁石への力はその軸方向に $\frac{3m_1m_2}{r^4}$ であり、偶力は $\frac{2m_1m_2}{r^3}$ で、第 2 磁石を第 1 磁石に平行になるように回そうとする。これは第 2 磁石の軸方向に平行に作用する、 r を m_2 から $2/3$ の長さの点で切る、1 つの力 $\frac{3m_1m_2}{r^4}$ に等価である^{註 9}。こうして、図(1)では 2 つの磁石が水に浮かべられている。
p. 14
 m_2 は m_1 の軸方向にあるが、 m_2 はその軸は m_1 の軸に直角にしている。もし、それぞれ、 m_1, m_2 に剛体的に結びつけられた 2 点 A, B が糸 T を使って結ばれているなら、 T が m_1 から m_2 へ、距離の $1/3$ の点で直角に切り分けるなら、糸は平行状態にある。

(4) もし第 2 の磁石が安定な平衡位置にくるまで、磁石の中心のまわりに自由に回ることを許すと、 W は h_2 にかんして最小になり、それゆえ、 m_2 による力の h_2 方向に分解された成分は最大になる。したがって、もし磁石を使って与えられた方向に与えられた点で最大限可能な磁力を生成したいなら、この効果を生成するためにこれらの磁石の軸の適当な方向を決めるために、与えられた点で与えられた方向に磁石を置き、もう一つの与えられた点のそれぞれにその中心が置かれたとき、第 2 磁石の軸の安定平衡の方向を観測しなければならないだけである。磁石をその軸にかんして第 2 の磁石の軸によって指される方向に置かなければならない。

もちろん、この実験をおこなうとき、地磁気を、もし存在すれば、考慮しなければならない。

^{註 9} { (3) の場合、第 1 磁石は第 2 磁石に対して「エンドオン」(端を観測者に) と呼ばれ、第 1 磁石は第 2 磁石にたいして「ブロードオン」(側面を観測者に) と呼ばれる、公式 (6), (7) によって、もし第 1 磁石が第 2 にたいして「ブロードオン」なら第 2 への偶力は m_1m_2/r^3 となつことは容易く証明できる。こうして、振れた磁石が「エンドオン」のとき、偶力はそれが「ブロードオン」のときとくらべて 2 倍大きい。ガウスはもし力の法則が極のあいだの距離の p 乗に逆比例するなら、偶力は、振れた磁石が「エンドオン」の場合、「ブロードオン」のときと較べて p 倍になることを証明している。これらの位置での偶力を比較することによって、振り秤によって可能な精度より、より正確に逆 2 乗法則を確かめることができる。 }



図：2.

第2の磁石がその方向にかんして安定な平衡位置にあるとする。このとき、磁石に作用する偶力は零だから、第2磁石の軸は第1磁石の軸と同じ平面内になければならない。したがって、

$$(h_1 h_2) = (h_1 r) + (r h_2), \quad (16)$$

であり、偶力は

p. 15

$$\frac{m_1 m_2}{r^3} (\sin(h_1 h_1) - 3 \cos(h_1 r) \sin(r h_2)), \quad (17)$$

である。これが零のとき、

$$\tan(h_1 r) = 2 \tan(r h_2), \quad (18)$$

$$\tan H_1 m_2 R = 2 \tan R m'_2 H_2, \quad (19)$$

であることが分かる。

第2磁石がこの位置をとるとき、Wの値は

$$m_2 \frac{dV_1}{dh_2},$$

となる。ここで h_2 は m_2 での m_1 による力線の方向にある。したがって、

$$W = -m_2 \sqrt{\left| \frac{dV_1}{dx} \right|^2 + \left| \frac{dV_1}{dy} \right|^2 + \left| \frac{dV_1}{dz} \right|^2}, \quad (20)$$

である。

したがって第2磁石はより大きな合力の場所にむかって動こうとする。

第2磁石への力は、この場合、つねに第1磁石にむかって引力である力 R と、第1磁石の軸に平行な力、 H_1 に分解できる。ここで

$$R = 3 \frac{m_1 m_2}{r^4} \frac{4\lambda_1^2 + 1}{\sqrt{3\lambda_1^2 + 1}}, \quad H_1 = 3 \frac{m_1 m_2}{r^4} \frac{\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1^2 + 1}}, \quad (21)$$

である。

卷末の図 XIV では、力線と等ポテンシャル面が 2 次元で描かれている。それらを生成する磁石は 2 つの長い円柱形の棒と考えられており、その断面は円形の空白で表現され、これらの棒は矢印の方向にそって磁化されている。

もし力線にそって張力があることを思い出すと、それぞれの磁石は時計の針の運動方向に回転させようすることは容易く分かる。

右手のものは、また、全体として、上向きに動こうとし、左手のものはページの下に動こうとする。

磁場中に置かれた磁石のポテンシャルエネルギー。

389.] V を考察中の磁石に作用する任意の磁石の系による磁気ポテンシャルとする。 V を外部磁力のポテンシャルと呼ぼう。もし、強さが m で、長さが ds の小さな磁石がその正の極をポテンシャルが V の点に、負の極をポテンシャルが V' の点に置いたなら、この磁石のポテンシャルエネルギーは $m(V - V')$ になる。つまり、もし ds が負極から正極へ測られたなら、

$$m \frac{dV}{ds} ds, \quad (1)$$

である。

もし I が磁化強度で、 λ, μ, ν が方向余弦なら、

$$mds = I dx dy dz,$$

そして

$$\frac{dV}{ds} = \lambda \frac{dV}{dx} + \mu \frac{dV}{dy} + \nu \frac{dV}{dz},$$

と書くことができ、最終的に、もし A, B, C が磁化の成分なら、

$$A = \lambda I, \quad B = \mu I, \quad C = \nu I.$$

と書くことができ、したがって、磁石の要素にたいするポテンシャルエネルギーの式 (1) は

$$(A \frac{dV}{dx} + B \frac{dV}{dy} + C \frac{dV}{dz}) dx dy dz, \quad (2)$$

となる。

有限の大きさの磁石のポテンシャルエネルギーを得るために、磁石の各要素にたいするこの式を積分しなければならない。こうしてそれが置かれた磁場にかんする磁石のポテンシャルエネルギーの値として、

$$W = \iiint (A \frac{dV}{dx} + B \frac{dV}{dy} + C \frac{dV}{dz}) dx dy dz \quad (3)$$

をえる。

ここでポテンシャルエネルギーが磁化の成分と、外的な原因から生じる磁力の成分を使って表示された。

部分積分によって、それを磁気物質の分布と磁気ポテンシャルの分布を使って表示でき、

$$W = \iint (Al + Bm + Cn) V dS - \iiint V \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right) dx dy dz, \quad (4)$$

となる。ここで l, m, n は面要素 dS での法線の方向余弦である。もしこの式に 385 節で与えられた磁気物質の面密度、体積密度にたいする式を代入すると、式は

$$W = \iint V \sigma dS + \iiint V \rho dx dy dz, \quad (5)$$

となる。

p. 17

式 (3) を

$$W = - \iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dx dy dz, \quad (6)$$

の形に書くことができる。ここで α, β, γ は外部磁気の成分である。

磁気モーメントと磁石の軸。

390.] もし、磁石によって占められた全空間にわたって外部磁力が方向、大きさが一様なら、 α, β, γ は定数となり、もし

$$\iiint A dx dy dz = lK, \iiint B dx dy dz = mK, \iiint C dx dy dz = nK, \quad (7)$$

と書くと、積分は磁石の全物質にわたり、 W の値は

$$W = -K(l\alpha + m\beta + n\gamma), \quad (8)$$

と書かれる。

この式で、 l, m, n は磁石の軸の方向余弦であり、 K は磁石の磁気モーメントである。もし ϵ が磁石の軸が磁力 \mathfrak{H} の方向となす角なら、 W の値は

$$W = -K\mathfrak{H} \cos \epsilon, \quad (9)$$

と書くことができる。

もし、通常のコンパスの針のように、磁石が鉛直軸のまわりに自由に回転するように吊るされるなら、磁石の軸の方位角が ϕ 、水平面にたいして角 θ 傾いているとする。地磁気の力は方位角が δ 、伏角が ζ とすると、

$$\alpha = \mathfrak{H} \cos \zeta \cos \delta, \quad \beta = \mathfrak{H} \cos \zeta \sin \delta, \quad \gamma = \mathfrak{H} \sin \zeta; \quad (10)$$

$$l = \cos \theta \cos \phi, \quad m = \cos \theta \sin \phi, \quad n = \sin \theta \quad (11)$$

である。したがって

$$W = -K\mathfrak{H}\{\cos \zeta \cos \theta \cos(\theta - \delta) + \sin \zeta \sin \theta\}, \quad (12)$$

である。

鉛直軸のまわりに磁石を回すことにより ϕ を増加させようとする力のモーメントは

$$-\frac{dW}{d\phi} = -K\mathfrak{H} \cos \zeta \cos \theta \sin(\phi - \delta), \quad (13)$$

である。

磁石のポテンシャルの体調和関数展開。

391.] V を点 (ξ, η, ζ) に置かれた単位極によるポテンシャルとする。点 x, y, z での V の値は

$$V = \{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

である。

この式は原点を中心として球調和関数を使って展開できる。このとき

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \&c, \quad (2)$$

となる。ここで、

$$V = \frac{1}{r}, \quad (3)$$

r は原点から (ξ, η, ζ) への距離

$$V_1 = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r^3} \quad (4)$$

$$V_2 = \frac{3(\xi x + \eta y + \zeta z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{2r^5} \\ \&c, \quad (5)$$

である。

磁石がこのポテンシャルで表示される力の場に置かれたとき、ポテンシャルエネルギーの値を決めるためには、 ξ, η, ζ と r を定数と考えて、 x, y, z にかんして 389 節の方程式 (3) の W にたいする式を積分しなければならない。

もし V_0, V_1, V_2 によって導入された項のみを考えると、結果は次の体積積分に依存する：

$$lK = \iiint A dx dy dz, mK = \iiint B dx dy dz, nK = \iiint C dx dy dz; \quad (6)$$

$$L = \iiint A x dx dy dz, M = \iiint B y dx dy dz, N = \iiint C z dx dy dz; \quad (7)$$

$$P = \iiint (Bz + Cy) dx dy dz, Q = \iiint (Cx + Az) dx dy dz, \\ R = \iiint (Ay + Bx) dx dy dz. \quad (8)$$

点 (ξ, η, ζ) に単位の極があるところへ置かれた磁石のポテンシャルエネルギーの値にたいして

$$W = K \frac{l\xi + m\eta + n\zeta}{r^3} \\ + \frac{\xi^2(2L - M - N) + \eta^2(2M - N - L) + \zeta^2(2N - L - M) + 3(P\eta\zeta + Q\zeta\xi + R\xi\eta)}{r^5} \\ + \&c, \quad (9)$$

であることがわかる。

この式は磁石がある所で単位極のポテンシャルエネルギー、または、より単純に磁石に対する点 (ξ, η, ζ) でのポテンシャルとみなすことができる。

磁石の中心と第 1 主軸、第 2 主軸。

392.] この式は座標の方向と原点を変えると簡単化される。まず、 x 軸の方向を磁石の軸に平行にする。これは

$$l = 1, \quad m = 0, \quad n = 0, \quad (10)$$

とすることと等価である。

もし座標原点を (x', y', z') に変え、軸の方向を変えなければ、体積積分 lK , mK , nK は変わらないが、そのほかは次のように変わるであろう:

$$L' = L - lKx', \quad M' = M - mKy', \quad N' = N - nKz'; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P' &= P - K(mz' + ny'), \quad Q' = Q - K(nx' + lz'), \\ R' &= R - K(ky' + mx') \end{aligned} \quad (12)$$

もし x 軸の方向を磁石の軸に平行にし、

$$x' = \frac{2L - M - N}{2K}, \quad y' = \frac{R}{K}, \quad z' = \frac{Q}{K}, \quad (13)$$

と置くと、新しい軸にたいして M, N はその値を変えず、 L' の値は $\frac{1}{2}(M+N)$ となる。 P は変わらずに残り、 Q, R は零になる。それゆえ、ポテンシャルを

$$K \frac{\xi}{r^3} + \frac{\frac{3}{2}(\eta^2 - \zeta^2)(M - N) + 3P\eta\zeta}{r^3} + \dots, \quad (14)$$

のよう書くことができる。

こうして、磁石に固定された点で、その点を座標原点にとると、ポテンシャルの第 2 項がもっとも簡単な形になる点を見出した。それゆえ、この点を磁石の中心と定義し、以前に磁軸の方向として定義した方向に中心をとおって引いた軸を磁石の主軸と定義することができる。

x 軸のまわりに正接が $\frac{P}{M-N}$ である角度の半分だけ y, z 軸を回転すると、結果がもう少し簡単になる。これによって P は零になり、ポテンシャルの最終形は

$$K \frac{\xi}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{(\eta^2 - \zeta^2)(M - N)}{r^5} + \&c, \quad (15)$$

と書くことができる。

p. 20

これが磁石のポテンシャルの最初の 2 項のもっとも簡単な形である。 y 軸, z 軸がこのように置かれたとき、それらは磁石の第 2 軸と呼ばれる。

座標原点の位置を見つけることによって磁石の中心も決めることができる。座標原点にたいして、ポテンシャルの第 2 項の 2 乗の単位半径の球にわたる面積分は極小である。

最小とすべき量は、141 節によって

$$4(L^2 + M^2 + N^2 - MN - NL - LM) + 3(P^2 + Q^2 + R^2), \quad (16)$$

である。

原点の位置の変化によるこの量の値の変化は (11), (12) 式から導かれる。したがって最小条件は

$$\left. \begin{array}{l} 2l(2L - M - N) + 3nQ + 3mR = 0, \\ 2m(2M - N - L) + 3lR + 3nP = 0, \\ 2n(2N - L - M) + 3mP + 3lQ = 0, \end{array} \right\} \quad (17)$$

である。もし $l = 1, m = 0, n = 0$ を仮定すると、これらの条件は

$$2L - M - N = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad (18)$$

となり、それは以前の研究で使われた条件である。

この研究は重力物質系のポテンシャルを展開する研究と比較できる。重力系の場合、原点として仮定するのにもっとも便利な点は系の重力中心であり、もっとも便利な軸は重心をとおる慣性主軸である。磁石の場合、重力中心に対応する点は軸方向の無限遠にあり、磁石の中心と呼んだ点は重力中心の性質とは異なる性質を持つ。 L, M, N は必ずしも正の量ではない点を除いて、量 L, M, N は慣性モーメントに対応し、 P, Q, R 物体の慣性乗積に対応する。

磁石の中心を原点とすると、2次の球面調和関数は扇形であり、その軸を磁石の軸に一致させるが、これは他の点にはあてはまらない。

磁石は、回転体の場合のように、この軸のすべての側面で対称であり、2次の調和項を含む項は完全に消える。

p. 21

393.] 極地域のいくつかの部分を除いて、地表のすべての部分で、磁石の一方の終端は北、または、少なくとも、北向きの方向を指し、他端は南向きの方向を指す。磁石の終端について話すとき、北を指す終端を磁石の北端と呼ぶ通俗的な方法を探ることにする。しかし、磁気流体の理論の言葉で話すとき、Boreal(北) および Austral(南) という言葉を使う。Boreal(北) 磁気は地球の北の部分でもっとも豊富であると考えられている仮想的な種類の物質である。Austral(南) 磁気は地球の南の領域でまさる仮想的な磁気物質である。磁石の北端の磁気は Austral(南) 磁気であり、南端の磁気は Boreal(北) 磁気である。それゆえ、磁石の北端、南端について話すとき、私たちは磁石を巨大な磁石としての地球と較べたりはせず、たんに磁石が自由に動くとき、磁石が取ろうとする位置を表示する。他方、仮想的な磁気流体の分布を地球の中での分布と較べるとき、より大袈裟な言葉、Boreal(北) 磁気、Austral(南) 磁気を使う。

394.] 磁力の場について話すとき、コンパスが力の場の中に置かれたとき、コンパスの針の北端が指す方向を磁北という言葉を使うこととする。

磁力線について話すとき、つねに、磁力線は磁南の方向から磁北の方向へ迫られると考え、この方向を正と呼ぶこととする。同様に、磁石の磁化の方向は磁石の南端から北端に向かって描かれた直線によって指示され、北を指す磁石の終端は正端と計算される。

私たちは南磁気、つまり、北を指す磁石の終端の磁気を正と考えることにする。もしその数値を m で記述するなら。磁気ホテンシャルは

$$V = \sum \left(\frac{m}{r} \right),$$

であり、力線の正の方向は V が減少する方向である。

第 II 章

磁力と磁気誘導。

395.] すでに 385 節で磁石による与えられた点での磁気ポテンシャルを決定している。磁石の磁化はその物質の各点で与えられており、数学的な結果は、磁石の各要素の実際の磁化を使うか、または、一部は磁石の面に濃縮し、一部は物質全体に拡散している「磁気物質」の仮想的な分布を使うかの、どちらかで表示できることを示している。

このように定義された磁気ポテンシャルは、与えられた点が磁石の外であっても中であっても、同じ数学過程によって見出される。磁石の外の任意の点に置かれた単位の大きさの磁極に働く力は対応する電気の問題での同じ微分の過程によってポテンシャルから導くことができる。この力の要素が α, β, γ なら、

$$\alpha = -\frac{dV}{dx}, \quad \beta = -\frac{dV}{dy}, \quad \gamma = -\frac{dV}{dz}, \quad (1)$$

である。

磁石内部の点で磁力を実験によって決めるためには、磁化された物質の一部を取りのぞき、磁極を置くことができる空洞を形成することから始めなくてはならない。磁極に作用する力は、一般に、この空洞の形に依存し、空洞の壁の磁化の方向への傾きに依存する。したがって、磁石内部の磁力について話すときの曖昧さを避けるために、力が測られる空洞の形と位置を特定することが必要である。空洞の形と位置が特定されたとき、磁極が置かれる点はもはや磁石の物質の内部ではないとみなさなければならず、それゆえ、力を決める通常の方法がただちに適用できることは明らかである。

p. 23

396.] 磁化の方向と強度が一様な磁石の一部を考えよう。この部分の内部に空洞を円柱形に空けよう。円柱の軸は磁化の方向に平行とし、単位の強さ

の磁極を軸の中点に置こう。

この円柱の母線は磁化の方向であるから、曲面上に磁気の表面分布はなく、円柱の円形の終端は磁化の方向に垂直であるから、一様な表面分布があり、その面密度は負端で I , 正端で $-I$ である。

円柱の軸長を $2b$ 、その半径を a とする。軸の中点に置かれた磁極にはたらくこの表面分布から生じる力は正側の円盤の引力によるものと、負側の円盤の斥力によるものである。これら 2 力は同じ大きさ、同じ方向で、その和は

$$R = 4\pi I \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad (2)$$

である。

この式から力は空洞の絶対的な大きさには依存せず、円柱の長さの直径への比に依存するように見える。したがって、いかに小さく空洞を作っても、空洞の壁のうえの面分布から生じる力は、一般に、有限のまま残る。

397.] これまで円柱が空けられた磁石の全部分にわたって磁化は一様で同じ方向であると考えてきた。磁化がこのように制限されていないとき、一般に、磁石の物質にわたって仮想磁気物質の分布がある。円柱の切出しこそ分布の一部を取り除くが、相似な立体中では対応する点での力は形状の長さの次元に比例するから、磁気物体の体積密度による磁極への力の変化は空洞の大きさが減少するにつれて無限に小さくなるが、空洞の壁の上の面密度による効果は、一般に、有限のまま残る。

それゆえ、円柱の大きさは非常に小さく、除かれた部分の磁化はいずれの場所でも円柱の軸に平行で、一定の強度 I であるとみなせると仮定すると、円柱中空の軸の中点に置かれた磁極への力は 2 つの力の合成になる。その第 1 は磁石の外側面上と空洞化された部分を除く内部全体での磁気物質の分布によるものである。この力の成分は式 (1) によるポテンシャルから導かれる α, β, γ である。第 2 は磁化の方向に円柱の軸に沿って作用する力、 R である。この力は円柱中空の長さの直径にたいする比に依存する。

398.] 場合 I。この比が非常に大きいとする。つまり、円柱の直径がその長さにくらべて小さいとする。 R の式を $\frac{a}{b}$ の幂に展開すると、 b の a に対する比を無限大にすると零になる量

$$R = 4\pi I \left\{ \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} - \frac{3}{8} \frac{a^4}{b^3} + \&c, \right\} \quad (3)$$

が見つかる。したがって、空洞が磁化方向に平行な軸にかんして非常に狭い円筒であるとき、空洞中の磁力は円柱の端での面分布によって影響を受けず、磁力の成分はたんに、 α, β, γ である。ここで、

$$\alpha = -\frac{dV}{dx}, \quad \beta = -\frac{dV}{dy}, \quad \gamma = -\frac{dV}{dz}, \quad (4)$$

である。

この形の空洞中の力を磁石のなかの磁力と定義する。ウィリアム トムソン卿はこれを磁力の極を使った定義と呼んだ。この力をベクトルと考えるとき、それを \mathfrak{H} と表記する。

399.] 案 II。円柱の長さがその直径とくらべて非常に小さいとする。したがって、円柱は薄い円盤になる。 R の式を $\frac{b}{a}$ の幕で展開すると、

$$R = 4\pi I \left\{ 1 - \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \frac{b^3}{a^3} - \&c.\right\}, \quad (5)$$

となる。 a の b にたいする比を無限大にしたとき、その極限値は $4\pi I$ である。 p. 25

したがって、空洞が薄い円盤形で、円盤面の法線が磁化の方向であるとき、軸の中央に置かれた単位の大きさの磁極は、円盤の円形面上の表面磁気から生じる、磁化の方向の $4\pi I$ の力をうける^{註 1}。

I の成分は A, B, C であるから、力の成分は $4\pi A, 4\pi B, 4\pi C$ である。これが成分が α, β, γ の力と加えあわされなければならない。

400.] 単位磁極への実際の力はベクトル \mathfrak{B} によって表記されるとする。その成分 a, b, c は

$$\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A. \\ b &= \beta + 4\pi B, \\ c &= \gamma + 4\pi C, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (6)$$

註 1

ほかの形の空洞内部の力について。

1. 任意の狭い割れ目。表面磁気から生じる力は割れ目の面の法線の方向に $4\pi I \cos \epsilon$ である。ここで ϵ は面の法線と磁化の方向のなす角である。割れ目が磁化の方向と平行なら磁力は \mathfrak{H} である。割れ目が磁化の方向に垂直なら力は磁気誘導 \mathfrak{B} である。
2. 無限に長い円柱で、その軸が磁化の方向と角 ϵ をなすとき、表面磁気から生じる力は軸と磁化の方向を含む面内で軸に垂直に $2\pi I \sin \epsilon$ である。
3. 球の中で、表面磁気から生じる力は磁化の方向に $\frac{4}{3}\pi I$ である。

である。平側面の法線が磁化方向である中空円盤内の力を、磁石内部の磁気誘導と定義しよう。ウィリアム トムソン卿はこれを磁力の電磁的定義と呼んだ。

3つのベクトル、磁化 \mathfrak{J} , 磁力 \mathfrak{H} , 磁気誘導 \mathfrak{B} , はベクトル方程式

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}, \quad (7)$$

によって結びついている。

磁力の線積分。

401.] 398 節で定義されたように、磁力は表面と磁石内部にわたる自由磁気の分布によるものであり、それは空洞の表面磁気の影響を受けないから、磁石のポテンシャルの一般式から直接導くことができ、点 A から点 B まで任意の曲線に沿ってとられた磁力の線積分は

$$\int_A^B (\alpha \frac{dx}{ds} + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds}) ds = V_A - V_B, \quad (8)$$

である。ここで V_A , V_B はそれぞれ A と B でのポテンシャルを表記する。

磁気誘導の面積分。

402.] 面 S 全体にわたる磁気誘導は、積分

$$Q = \iint \mathfrak{B} \cos \epsilon dS, \quad (9)$$

の値と定義される。ここで \mathfrak{B} は面要素 dS での磁気誘導の大きさを表記し、 ϵ は誘導の方向と面要素の法線のなす角である。積分は全表面にわたる。それは閉じているかもしれない、閉じた曲線で境界づけられているかもしれない。

もし α, β, γ が磁気誘導の成分を、 l, m, n が法線の方向余弦を表記するなら、面積分は

$$Q = \iint (la + mb + nc) dS, \quad (10)$$

と書くことができる。

もし磁気誘導の成分に磁力の成分と、400節で与えられた磁化を使った値を代入すると、

$$Q = \iint (la + m\beta + n\gamma) dS + 4\pi \iint (lA + mB + nC) dS, \quad (11)$$

であることがわかる。

さて、積分面は閉じた面と考え、この式の右辺の2項の値を調べよう。

磁力と自由磁気の間の数学形式は電気力と自由電気のあいだの数学形式と同じであるから、77節の電気力の成分 X, Y, Z の代わりに磁力の成分 α, β, γ , を代入し、自由電気の代数和 e の代わりに閉じた面内の自由磁気の代数和を M を代入することによって、 Q の値の第1項に77節で与えられた結果を応用できる。

こうして方程式

$$\iint (l\alpha + m\beta + n\gamma) dS = 4\pi M, \quad (12)$$

を得る。

p. 27

どの磁気粒子も2極を持ち、それは数値的に同じ大きさで反対符号であるから、粒子の磁気の代数和は零である。したがって、閉じた面 S 内に完全にあるこれらの粒子は S 内の磁気の代数和にまったく寄与しない。それゆえ、 M の値は面 S によって切りとられる磁気粒子にのみ依存する。

長さが s 、横断面が k^2 で、長さの方向に磁化され、その極の強さが m である小さな磁石要素を考える。この小磁石のモーメントは ms 、磁気モーメントの体積にたいする比である磁化強度は

$$I = \frac{m}{k^2}, \quad (13)$$

である。

この小磁石が面 S に切りとられ、磁化の方向が面から外向きに引かれた法線と角 ϵ' をなすとすると、そのとき、もし dS が断面の面積を表記するなら、

$$k^2 = dS \cos \epsilon' \quad (14)$$

である。

この磁石の負極 $-m$ は面 S 内にある。

したがって、 dM によって、この小磁石が寄与する S 内の自由磁気の部分を表記するなら、

$$\begin{aligned} dM &= -m = -Ik^2, \\ &= -I \cos \epsilon' dS. \end{aligned} \quad (15)$$

である。

閉じた面 S 内にある自由磁気の総和、 M を見出すため、この式を閉じた面全体で積分しなければならず、したがって

$$M = - \iint \cos \epsilon' dS,$$

つまり、磁化の成分を A, B, C 、外向きに引かれた法線の方向余弦を l, m, n と書く、

$$M = - \iint (lA + mB + nC) dS, \quad (16)$$

である。これが(11)式の右辺 2 項の積分の値を与える。それゆえ、その式の Q の値は(12)式、(16)式から、

$$Q = 4\pi M - 4\pi M = 0, \quad (17)$$

p. 28

である。つまり、任意の閉じた面全体にわたる磁気誘導の面積分は零である。

403.] もし閉じた面として、微分体積要素 $dxdydz$ の面を仮定すると、方程式

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0, \quad (18)$$

を得る。これはソレノイド条件(湧出、吸込なし)であり、磁気誘導の成分はつねにこの条件を満たす。

磁気誘導の分布はソレノイド的だから、閉じた曲線を境界とする面をつらぬく誘導は閉じた曲線の形と位置のみに依存し、面それ自体には依存しない。

404.] 面の各点で

$$la + mb + nc = 0 \quad (19)$$

である面は無誘導面と呼ばれ、そのような 2 面の交線は誘導線と呼ばれる。曲線 s が誘導線である条件は

$$\frac{1}{a} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{b} \frac{dy}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dz}{ds}, \quad (20)$$

である。

閉じた曲線の各点をとおって引かれた誘導線の系は誘導管と呼ばれる管面を作る。

そのような管の任意の断面を横切る誘導は同じである。もし誘導が単位量なら、管は単位誘導管と呼ばれる。

ファラディ^{註2}が磁力線や磁気スフォンディロイズ^{註3}にかんして述べたことは、もし磁気誘導の線、管と理解するなら、すべて、数学的に真である。

磁力と磁気誘導は磁石の外部では同一であるが、磁気物質の中では注意深く区別しなければならない。

もし直線的に一様に磁化された棒の中で、磁石自身による磁力は正の極と呼んでいる北を指す終端から南端つまり負極へ向き、両者とも磁石内にあり、その外の空間にはない。

他方、磁気誘導は磁石外では正極から負極に向かい、磁石内では負極から正極に向かい、したがって誘導の線や管は、再入する、つまり、周期的に繰り返す図形である。

p. 29

物理量としての磁気誘導の重要性は電磁現象を学ぶとき、より明らかに分るであろう。ファラディの「実験研究」3076で行ったように、磁場を動いている導線を使って調べるとき、直接に測定されるのは磁気誘導であって、磁力ではない。

磁気誘導のベクトルポテンシャル。

405.] 403節で示したように、閉じた曲線を境界とする面をとおる磁気誘導は閉じた曲線に依存し、その曲線を境界とする面の形には依存しないから、曲線のダイアフラム（隔膜）を形成する面の構成を含まず、曲線の性質にのみ依存する過程によって、閉じた曲線を貫く誘導を決定することが可能である。これは、閉じた曲線を一周する \mathfrak{A} の線積分が閉じた曲線を境界とする面全体にわたる \mathfrak{B} の面積分に等しくなるような、磁気誘導 \mathfrak{B} と関係したベクトル \mathfrak{A} を見つけることにより行われる。

註² *Exp. Res.*, series xxviii.

註³ 訳注：2回転面に囲まれた図形。甲虫を意味するギリシャ語からの造語。

もし、24 節で、 \mathfrak{A} の成分を F, G, H 、 \mathfrak{B} の成分を a, b, c と書くと、これらの要素のあいだの関係として

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \quad c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}, \quad (21)$$

が分る。

成分が F, G, H であるベクトル \mathfrak{A} は磁気誘導のベクトルポテンシャルと呼ばれる。

もしモーメントが m で磁化の軸の方向が (λ, μ, ν) である磁気分子が座標原点にあるなら、原点から距離 r の点 (x, y, z) でのポテンシャルは、387 節によって、

$$\begin{aligned} & -m(\lambda \frac{d}{dx} + \mu \frac{d}{dy} + \nu \frac{d}{dz}) \frac{1}{r}, \\ \therefore c &= m(\lambda \frac{d^2}{dxdz} + \mu \frac{d^2}{dydz} + \nu \frac{d^2}{dz^2}) \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

であり、それはラプラス方程式によって、

$$m \frac{d}{dx} (\lambda \frac{d}{dz} - \nu \frac{d}{dx}) \frac{1}{r} - m \frac{d}{dy} (\nu \frac{d}{dy} - \mu \frac{d}{dx}) \frac{1}{r}$$

の形に持ち込むことができる。

p. 30

量 a, b は同様の方法で扱うことができる。したがって、

$$\begin{aligned} F &= m(\nu \frac{d}{dy} - \mu \frac{d}{dz}) \frac{1}{r}, \\ &= \frac{m(\mu z - \nu y)}{r^3}, \end{aligned}$$

である。

この式から G, H は対称性を使って見出すことができる。

こうして、原点に置かれた磁化された粒子による与えられた点でベクトルポテンシャルは数値的に粒子の磁気モーメントを動径ベクトルの 2 乗によって割り、磁化の軸と動径ベクトルの間の角の正弦をかけたものに数値的に等しいこと、ベクトルポテンシャルの方向が磁化の軸と動径ベクトルの面に垂直であること、磁石の方向を正の方向と見る目には、ベクトルポテンシャルは時計の張りの回転方向にとられていることが分る。

したがって、 A, B, C が点 (x, y, z) の磁化の成分である任意の形の磁石にたいして、 (ξ, η, ζ) でのベクトルポテンシャルの成分は

$$\left. \begin{aligned} F &= \iiint (B \frac{dp}{dz} - C \frac{dp}{dy}) dx dy dz, \\ G &= \iiint (C \frac{dp}{dx} - A \frac{dp}{dz}) dx dy dz, \\ H &= \iiint (A \frac{dp}{dy} - B \frac{dp}{dx}) dx dy dz, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

である。ここで、簡潔性のため、 (ξ, η, ζ) と (x, y, z) の間の距離の逆数を p と置いており、積分は磁石が占める空間全体にわたっている。

406.] 385 節のスカラー、つまり、通常の磁力のポテンシャルは同じ記法で表示すると、

$$V = \iiint (A \frac{dp}{dx} + B \frac{dp}{dy} + C \frac{dp}{dz}) dx dy dz. \quad (23)$$

となる。

$\frac{dp}{dx} = -\frac{dp}{d\xi}$ であること、および、積分

$$\iiint A (\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2}) dx dy dz$$

は、点 (ξ, η, ζ) が積分領域内に含まれているとき、 $-4\pi(A)$ 、含まれていないとき、零であること、ただし、 (A) は点 (ξ, η, ζ) での A の値であることを思い出すと、磁気誘導の x 成分の値は

p. 31

$$\begin{aligned} a &= \frac{dH}{d\eta} - \frac{dG}{d\zeta} \\ &= \iiint \{ A (\frac{d^2 p}{dy d\eta} + \frac{d^2 p}{dz d\eta}) - B \frac{d^2 p}{dx d\eta} - C \frac{d^2 p}{dz d\zeta} \} dx dy dz \\ &= -\frac{d}{d\xi} \iiint \{ A \frac{dp}{dx} + B \frac{dp}{dy} + C \frac{dp}{dz} \} dx dy dz \\ &\quad - \iiint A (\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2}) dx dy dz \end{aligned} \quad (24)$$

である。

この式の第 1 項はあきらかに $-\frac{dV}{d\xi}$ 、つまり、磁力の成分 a である。

第 2 項の積分記号下の量は、点 (ξ, η, ζ) が含まれる体積要素以外の各体積要素にたいして零である。もし点 (ξ, η, ζ) での A の値が (A) なら、第 2 項の値は、たやすく、 $4\pi(A)$ であることが証明される。ただし、 (A) は磁石の外部のすべての点で零である。

磁気誘導の x 成分の値を

$$a = \alpha + 4\pi(A), \quad (25)$$

と書くことができ、400 節で与えられた式の最初のものと同一である。 b よび c にたいする式も 400 節の式と一致する。

すでに磁力 \mathfrak{H} はスカラー磁気ポテンシャル V からハミルトンの演算子 ∇ を適用して導かれ、17 節でのように、

$$\mathfrak{H} = -\nabla V, \quad (26)$$

と書くことができ、この式は磁石の中でも外でも真であることが分っている。

ここで調べたことから磁気誘導 \mathfrak{B} がベクトルポテンシャル \mathfrak{A} から、同じ演算子を適用することによって導かれ、結果は磁石の中でも外でも同様に正しいように見える。

この演算子をベクトル関数へ適用すると、一般に、スカラー量もベクトル量も生成される。しかし、ベクトル関数の収束と呼んだスカラー部はソレノイド条件

$$\frac{dF}{d\xi} + \frac{dG}{d\eta} + \frac{dH}{d\zeta} = 0. \quad (27)$$

を満たすとき、零になる。

式 (22) で F, G, H にたいする式を微分することによって、この式はソレノイド条件を満たすことが分る。

p. 32

4 元数と 4 元数の積。

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

それゆえ、磁気誘導とベクトルポテンシャルの間の関係を

$$\mathfrak{B} = \nabla \mathfrak{A},$$

と書くことができ、これは、言葉で、磁気誘導はベクトルポテンシャルの curl (渦, rot 回転) であると表示できる。

第 III 章

磁気ソレノイドと磁気板^{註1}。

特別な形の磁石。

407.] もし、金属線のような、磁気物質の細く長いフィラメントがいざれの場所でも縦方向に磁化されているなら、フィラメントの任意の横断面の面積に断面を横切る磁化の平均強度をかけた積はその断面での磁石の強度と呼ばれる。もしフィラメントが磁化を変えることなく、その断面で2つに切られたなら、分離のとき、2面は同じ大きさで反対符号の表面磁化を持ち、そのそれぞれは断面での磁石の強度に数値的に等しい。

磁気物質は、その長さのどの部分で断面が作られても、強度がどの断面でも同じであるなら、磁気ソレノイドと呼ばれる。

もし m がソレノイドの強さ、 ds がその線要素で s は負磁極から正磁極に向いて測られ、 r は与えられた点からその要素までの距離、 ϵ は r が要素の磁化軸となす角なら、要素によるポテンシャルは与えられた点で

$$\frac{mds \cos \epsilon}{r^2} = -\frac{m}{r^2} \frac{dr}{ds} ds,$$

である。

この式を s にかんして積分し、ソレノイドの全要素を考慮すると、ポテンシャルは

$$V = m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

であることが分かる。 r_1 は、 V が測られる点から、ソレノイドの正端までの距離、 r_2 は負端までの距離である。

p. 34

^{註1} W. Thomson 候の ‘Mathematical Theory of Magnetism,’ *Phil. Trans.*, June 1849 および June 1850, または 論文集の復刻 *Electrostatics and Magnetism*, p.340 を参照せよ。

したがって、ソレノイドによるポテンシャルは、またその帰結として、すべての磁気の効果は、その強さと 2 端点の位置にのみ依存し、2 端点のあいだの形には依存せず、直線でも曲線でも同じである。

したがって、ソレノイドの終端は、厳密な意味で、極と呼ぶことができる。

もしソレノイドが閉じた曲線を形成するなら、ソレノイドによるポテンシャルはあらゆる点で零であり、したがって、そのようなソレノイドはまったく磁気作用をなさず、ある点でそれを破壊し端を分離してはじめて、その磁化を発見することができる。

もし磁石がソレノイドに分割でき、ソレノイドはすべて閉じた曲線か磁石の外面にその端点を持つなら、磁化はソレノイダルといわれ、磁石の作用はまったくソレノイドの終端に依存するので、仮想の磁気物質の分布はまったく外面だけにある。

したがって、磁化がソレノイダルである条件は

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0,$$

である。ここで A, B, C は磁石の任意の点での磁化の成分である。

408.] 縦に磁化されたフィラメントの強さがその長さのいろいろな部分で変化するとき、そのフィラメントはいろいろな長さのソレノイドの束からできており、与えられた断面をとおるすべてのソレノイドの強さの和をその断面でのフィラメントの磁気の強さと考えることができる。したがって、任意の縦に磁化されたフィラメントは複合ソレノイドと呼ぶことができる。

もし複合ソレノイドの任意の断面での強さが m なら、その作用によるポテンシャルは

$$\begin{aligned} V &= - \int \frac{m}{r^2} \frac{dr}{ds} ds \quad \text{ここで } m \text{ は変数である} \\ &= \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} - \int \frac{1}{r} \frac{dm}{ds} ds, \end{aligned}$$

である。

この場合、この式は、2 端は強さが異なってもよく、この 2 端の作用の他に、フィラメントにそって線密度

$$\lambda = -\frac{dm}{ds},$$

の仮想的な磁気物質の分布による作用があることを示している。

磁気板。

409.] もし磁気物質の薄い板が、いたるところ、その面の法線方向に磁化されているなら、任意の点での磁化強度にその場所の板の厚さをかけたものはその場所の磁気板の強さと呼ばれる。

もし板の強さが至るところ同じなら、それは単純磁気板と呼ばれる。もし板の強さが点から点へ変化するなら、板はいくつかの単純磁気板が互いに重なりあってできていると考えることができる。それゆえ、それは複合磁気板と呼ばれる。

もし、 dS が Q での板の面要素、 Φ が板の強さなら、板の要素による任意の点 P でのポテンシャルは

$$dV = \Phi \frac{1}{r^2} dS \cos \epsilon,$$

である。ここで ϵ はベクトル QP 、つまり、 r と板の正側から外向きに引かれた法線のあいだの角度である。

しかし、もし $d\omega$ が点 P で dS によって張られた立体角ならば、

$$r^2 d\omega = dS \cos \epsilon,$$

したがって

$$dV = \Phi d\omega,$$

であり、それゆえ、単純磁気板の場合、

$$V = \Phi \omega,$$

つまり、任意の点で磁気板によるポテンシャルは板の強さに与えられた点で板の縁によって張られた立体角をかけた積である^{註2}。

410.] 同じ結果は任意の磁力の場のなかに置かれた磁気板を考え、板の位置によるポテンシャルエネルギーを決めるこことによって、ちがった方法で得ることができる。

もし V が要素 dS でのポテンシャルなら、この要素によるエネルギーは

$$\Phi(l \frac{dV}{dx} + m \frac{dV}{dy} + n \frac{dV}{dz}) dS,$$

^{註2} この定理はガウス、「地磁気の一般理論」 §38 による。」

p. 36

である。つまり、板の強さに板の要素 dS による $dV/d\nu$ の面積分の部分をかけた積である。

したがって、そのような要素すべてにかんして積分すると、場の中の板の位置によるエネルギーは板の強さに、板の面にわたる磁気誘導の面積分をかけた積に等しい。

この面積分は同じ境界の縁を持ち、あいだに何の力の中心も含まない、任意の 2 面にたいして同じだから、磁気板の作用はその縁の形にのみ依存する。

さて、力の場は強さ m の磁極によるものだと考える。与えられた縁を境界とする面全体の面積分は極の強さに極で縁によって張られた立体角をかけた積であることが分かった(74 節系)。したがって極と板の相互作用によるエネルギーは

$$\Phi m\omega,$$

であり、グリーンの定理によって、これは極の強さに極での板によるポテンシャルをかけた積に等しい。それゆえ、板によるポテンシャルは $\Phi\omega$ である。

411.] もし磁極 m が磁気板の負の面上の点から出発し、空間中の任意の経路を辿って、縁をまわって、板の正側上だが出発点のすぐそばの点までくると、立体角は連続的に変わり、この過程で 4π 増加するであろう。極が行った仕事は $4\pi\Phi m$ であり、板の正の側面上の任意の点のポテンシャルは板の負の側面上の近傍の点のポテンシャルより $4\pi\Phi$ だけ大きい。

もし磁気板が閉じた面を形成するなら、板の外のポテンシャルはいずれの場所でも零であり、中の空間でのポテンシャルは $4\pi\Phi$ であり、板の正の面が内向きであるとき、正である。したがって、そのような板は板の外側であろうと内側であろうと、どのような磁石にも作用を及ぼさない。

412.] もし磁石を単純磁気板に分割できるなら、閉じた板であっても、磁石の面上に縁を持つても、どちらでも、磁気の分布はラメラ^{註3} と呼ばれる。もし、 ϕ が、与えられた点から点 (x, y, z) へ進む点の描く直線が磁石の内部で横切るすべての板の強度の和なら、ラメラ磁化の条件は

$$A = \frac{d\phi}{dx}, \quad B = \frac{d\phi}{dy}, \quad C = \frac{d\phi}{dz},$$

である。

^{註3} 訳註； ラテン語で金属の薄い板のこと。

このように量, ϕ , は任意の点で磁化を完全に決め、 ϕ は磁化のポテンシャルと呼ばれる。磁化ポテンシャルは磁気ポテンシャルと注意深く区別しなければならない。 p. 37

413.] 複合磁気板に分割できる磁石は複合ラメラ磁気分布をもつと呼ばれる。そのような分布の条件は磁化の線は、面の系が磁化線を直角に切って描かれるようなものでなければならない。この条件はよく知られた式、

$$A\left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right) + B\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) + C\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right) = 0,$$

によって表示される。

ソレノイド磁石とラメラ磁石のポテンシャルの形。

414.] 磁石のスカラーポテンシャルにたいする一般式は

$$V = \iiint (A\frac{dp}{dx} + B\frac{dp}{dy} + C\frac{dp}{dz})dxdydz,$$

である。ここで、 p は (ξ, η, ζ) に置かれた単位磁極によるポテンシャルを表記する。言葉を変えると、ポテンシャルが測られる点 (ξ, η, ζ) とポテンシャルの原因となる磁石の要素の位置 (x, y, z) のあいだの距離の逆数である。この量は、96 節, 386 節でしたように、部分積分でき、

$$V = \iint p(Al + Bm + Cn)dS - \iiint p\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right)dxdydz,$$

となる。ここで、 l, m, n は磁石の面要素 dS から外向きに引かれた方向余弦である。

磁石がソレノイダルであるとき、第 2 項の積分記号下の式は磁石内部の各点で零であり、したがって 3 重積分は零であり、任意の点でのスカラーポテンシャルは、磁石の内部でも外部でも、第 1 項の面積分によって与えられる。

ソレノイド磁石のスカラーポテンシャルは、それゆえ、面の各点で磁化の法線成分が知られているとき、完全に決められる。それは磁石内部のソレノイドの形に独立である。

415.] ラメラ磁石の場合、磁化は、磁化のポテンシャル ϕ によって決められ、したがって、

$$A = \frac{d\phi}{dx}, \quad B = \frac{d\phi}{dy}, \quad C = \frac{d\phi}{dz},$$

p. 38

である。

それゆえ、 V にたいする式は

$$V = \iiint \left(\frac{d\phi}{dx} \frac{dp}{dx} + \frac{d\phi}{dy} \frac{dp}{dy} + \frac{d\phi}{dz} \frac{dp}{dz} \right) dx dy dz,$$

と書ける。

この式を部分積分して、

$$V = \iint \phi \left(l \frac{dp}{dx} + m \frac{dp}{dy} + n \frac{dp}{dz} \right) dS - \iiint \left(\phi \left(\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2} \right) \right) dx dy dz,$$

がわかる。

第 2 項は点 (ξ, η, ζ) が磁石の中にはないかぎり、零であり、磁石の中にある場合、 $4\pi(\phi)$ となる。ここで (ϕ) は点 (ξ, η, ζ) での ϕ の値である。面積分は、 (x, y, z) から (ξ, η, ζ) へ引かれた直線、 r と、この直線が dS から外向きに引かれた法線となす角 θ を使って表示でき、したがって、ポテンシャルは

$$V = \iint \frac{1}{r^2} \phi \cos \theta dS + 4\pi(\phi),$$

と書くことができる。ここで、第 2 項は点 (ξ, η, ζ) が磁石本体に含まれないときはもちろん零である。

この式によって表示されるポテンシャル、 V 、は磁石の表面で ϕ が突然零になるにもかかわらず、磁石の表面でさえ連続である。なぜなら、もし

$$\Omega = \iint \frac{1}{r^2} \phi \cos \theta dS$$

と書くなら、そして、もし Ω_1 が面のすぐ内部の点での Ω の値、 Ω_2 が面の外部で第 1 の点のすぐそばの点での Ω の値なら、

$$\Omega_2 = \Omega_1 + 4\pi(\phi),$$

つまり、

$$V_2 = V_1.$$

だからである。量 Ω は磁石面で連続ではない。

磁気誘導の成分は Ω と式

$$a = -\frac{d\Omega}{dx}, \quad b = -\frac{d\Omega}{dy}, \quad c = -\frac{d\Omega}{dz},$$

によって関係している。

416.] ラメラ磁気分布の場合、磁気誘導のベクトルポテンシャルも簡単化できる。

その x 成分は

$$F = \iiint \left(\frac{d\phi}{dy} \frac{dp}{dz} - \frac{d\phi}{dz} \frac{dp}{dy} \right) dx dy dz.$$

と書ける。

部分積分により、これを面積分の形

$$\begin{aligned} F &= \int \phi \left(m \frac{dp}{dz} - n \frac{dp}{dy} \right) dS, \\ \text{または } F &= - \iint p \left(m \frac{d\phi}{dz} - n \frac{d\phi}{dy} \right) dS, \end{aligned}$$

と置くことができる。

p. 39

ベクトルポテンシャルの他の成分はこれらの式から適当な代入を行うことによって書き下すことができる。

立体角について。

417.] 任意の点 P で磁気板によるポテンシャルは板の縁によって張られた立体角に板の強さをかけたものに等しいことを既に証明している。電気回路の理論で立体角を参照することがあるので、立体角がどのように測定されるかを説明しよう。

定義。与えられた点で閉じた曲線によって限られた立体角は球面積によって測られる。その球の中心は与えられた点であり、球の半径は 1 である。動径ベクトルが閉じた曲線を辿るとき、動径ベクトルと球との交わりは球面に描かれる曲線を辿る。この面積は与えられた点から見たとき、動径ベクトルの経路の左手または右手にあるかにしたがって正または負と数えられる^{註 4}。

(ξ, η, ζ) を与えられた点とし、 (x, y, z) を閉じた曲線上の点とする。座標 x, y, z は、与えられた点から数えた曲線の長さ、 s の関数である。それらは s の周期関数であり、 s が閉じた曲線の全長だけ増加すると、繰り返す。

定義から直接立体角を計算できる。 (ξ, η, ζ) を中心として球座標を使い、

$$x - \xi = r \sin \theta \cos \phi, \quad y - \eta = r \sin \theta \sin \phi, \quad z - \zeta = r \cos \theta,$$

と置くと、球上の任意の曲線の面積は積分

$$\omega = \int (1 - \cos \theta) d\phi,$$

によって、つまり、直交座標をつかって

$$\omega = \int d\phi - \int_0^s \frac{z - \zeta}{r \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\}} \left[(x - \xi) \frac{dy}{ds} - (y - \eta) \frac{dx}{ds} \right] ds,$$

である。積分は曲線 s 一周にわたる。

p. 40

もし z 軸が閉じた曲線を一度だけ通りぬけるなら、第 1 項は 2π である。もし z 軸が閉曲線を通りぬけなければ、この項は零である。

418.] 立体角を計算するこの方法は軸の選択を含み、その選択はかなり恣意的であり、それは閉じた曲線のみに依存するわけではない。したがって、面の構成を考えない以下の方法が幾何学的な正当性のために述べられる。

与えられた点を始点とする動径ベクトルが閉じた曲線を辿るとき、与えられた点を通る面が、閉じた曲線の各点で接平面になるようつぎつぎと回っていくとする。与えられた点で、この曲面に垂直に、単位長の直線を描くとする。平面が閉じた曲線を一周すると、垂線の端点は第 2 の閉じた曲線を辿る。第 2 の曲線の長さを σ とすると、第 1 の閉じた曲線が張る立体角は

$$\omega = 2\pi - \sigma.$$

である。

註 4 { もし、与えられた曲線によって張られた立体角を決める点が動きまわると、動径ベクトルの先端はつねに同じ方向にまわると考えると、そのとき、もし球の中心から見たとき動径ベクトルの終端の運動が時計方向に見える球の側面にあるとき、球上の面積は正とし、もう一方の側面上にあるなら負とする。 }

これは単位半径の球面上の閉じた曲線の面積は、極曲線^{註5}の周長とあわせると、球の大円の周長に等しいと言う、よく知られた定理から出てくる。

この構成は直線図形で張られた立体角を計算するとき、しばしば、便利である。物理現象にかんして明確なアイデアを形成するという、私たちの目的には、以下の方法のような、問題の物理的なデータから出てこない構成は使わない方法が望ましい。

419.] 閉じた曲線, s , が空間中に与えられ、与えられた点 P で s で張られた立体角を見出さなければならない。もし立体角を、単位の強さの磁気板のポテンシャルであり、磁気板の縁は閉じた曲線と一致すると考えると、立体角は単位磁気が無限遠から点 P まで動くとき、磁力に抗して単位磁気が行う仕事であると定義しなければならない。したがって、もし σ が極が点 P に近付く経路なら、ポテンシャルはこの経路に沿った線積分でなければならない。それは閉じた曲線 s に沿った線積分の結果でもなければならない。それゆえ、立体角の表式の適切な形式は 2 曲線 s と σ にかんする 2 重積分の形式でなければならない。

P が無限遠にある時、立体角はあきらかに零である。点 P が近付くにつれて、閉じた曲線は、動点から見たとき、広げられていくように見える。閉曲線の全立体角は動点が近付くとき、閉曲線のいろいろな要素の見かけの運動により生成されたと考えることができる。

点 P が線要素 $d\sigma$ 上を P から P' へ動くとき、閉曲線の要素 QQ' を ds と書くが、 QQ' は P に相対的にその位置を変え、 QQ' に対応する単位球上の線は球面上の面積を掃きあげ、その面積は

$$d\omega = \Pi ds d\sigma, \quad (1)$$

と書くことができる。

Π を見出すため、閉曲線が自分自身に平行に PP' と同じ大きさで反対方向に距離 $d\sigma$ 動かされるあいだ、 P は固定されていると考える。点 P の相対的な運動は実際の場合と同じになるであろう。

この運動のあいだ、要素 QQ' は辺の長さが QQ' と PP' に等しい平行四辺形の面積を生成する。もしこの平行四辺形を底面とし、頂点を P とするビ

^{註5} 訳註； 定義は前段の第 2 曲線のとおり。19C に発達した代数幾何学の用語。曲面の種類のような不変量を求めるときに使われた概念。

ラミッドを構成すると、このピラミッドの立体角が私たちが探している増分 $d\omega$ である。

この立体角を決めるために、 θ, θ' を、それぞれ、 $ds, d\sigma$ が PQ となす角とし、 ϕ をこれら 2 つの角がなす面のあいだの角とすると、 PQ つまり r に垂直な面への平行四辺形 $ds.d\sigma$ の射影の面積は

$$dsd\sigma \sin \theta \sin \theta' \sin \phi,$$

となり、これは $r^2 d\omega$ に等しいから、

$$dw = \Pi dsd\sigma = \frac{1}{r^2} \sin \theta \sin \theta' \sin \phi dsd\sigma, \quad (2)$$

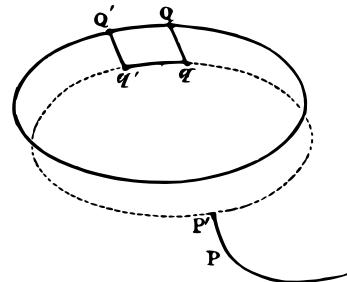


図 : 3.

が分る。

したがって、

$$\Pi = \frac{1}{r^2} \sin \theta \sin \theta' \sin \phi, \quad (3)$$

である。

420.] 角 θ, θ', ϕ を r と s, σ にかんする r の微分を使って表示できる。

$$\cos \theta = \frac{dr}{ds}, \quad \cos \theta' = \frac{dr}{d\sigma}, \quad \sin \theta \sin \theta' \cos \phi = r \frac{d^2 r}{dsd\sigma}, \quad (4)$$

p. 42

であるからである。

こうして、 Π^2 にたいする次の値がわかる。

$$\Pi^2 = \frac{1}{r^2} [1 - (\frac{dr}{ds})^2] [1 - (\frac{dr}{d\sigma})^2] - \frac{1}{r^2} (\frac{d^2 r}{dsd\sigma})^2. \quad (5)$$

直交座標を使った σ に対する第 3 の表式が立体角が $d\omega$ 、側辺が r のピラミッドの体積が

$$\frac{1}{3} r^3 d\omega = \frac{1}{3} r^3 \Pi dsd\sigma.$$

であることから導かれる。

しかし、このピラミッドの体積は、 $r, ds, d\sigma$ の x, y, z 軸への射影を使っても、それら 9 つの射影から作られる行列式としても表示でき、それを第 3 部

品としてとらなければならない。こうして Π ^{註 6} の値として、

$$\Pi = -\frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \xi - x, & \eta - y, & \zeta - z, \\ \frac{d\xi}{d\sigma} & \frac{d\eta}{d\sigma} & \frac{d\zeta}{d\sigma} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} \quad (6)$$

が分る。この式は（5）式が導入する符号の不定性がない。

421.] 点 P で閉じた曲線によって張られた立体角, ω , の値は

$$\omega = \iint \Pi ds d\sigma + \omega_0, \quad (7)$$

と書くことができる。ここで、 s にかんする積分は閉じた曲線一周にわたり、 σ にかんして曲線上の固定点 A から点 P にわたる。定数 ω_0 は点 A での立体角の値である。もし A が閉じた曲線から無限の距離にあれば、 ω_0 は零である。

任意の点 P での ω の値は P と A のあいだの曲線が板磁石を通らないかぎり、曲線の形とは独立である。もし板が無限に薄いと考えられ、 P と P' が 2 つの互いに近い点だが、 P は板の正の面に、 P' は負の面にあるとすると、曲線 AP と曲線 AP' は板の縁の反対側になければならず、したがって PAP' は無限に短い線 PP' とともに、縁をなかに抱き込む閉じた回路を形成する。
p. 43

での ω の値は P' での値を 4π 、つまり半径 1 の球の表面積だけ、上まわる。

したがって、もし閉曲線が板を 1 度とおるように描かれるなら、言葉をかえると、閉曲線が板の縁に 1 度絡むと、両曲線を一周する積分 $\iint \Pi ds d\sigma$ の値は 4π である。

それゆえ、この積分は、閉曲線 s にのみ依存すると考えられ、恣意的な曲線 AP は多値関数の一例になっている。もし A から P へ異なった経路をとおるなら、積分は曲線 AP が曲線 s の回りを何回捻られるかにしたがって異なる値をとるからである。

もし A と P のあいだの曲線のひとつの形が他の形に曲線 s と交わることなく連続的な運動によって変形できるなら、積分は両曲線にたいして同じ値

^{註 6} { Π の符号は単純な場合を考えればもっとも簡単に得ることができる。円盤面に垂直に磁化された円盤がこの目的にはひじょうに便利である。 }

を持つが、もし変形の途中で閉曲線と n 回交わるなら、積分の値は $4\pi n$ 異なるであろう。

もし s と σ が空間中の任意の 2 つの閉曲線で、もしそれらに絡みがないなら、両方を一周する積分は零である。

もしそれらが同じ方向に n 回絡むなら、積分の値は $4\pi n$ である。しかし、2 曲線が交互に反対方向に絡むことは可能で、積分の値は零であるが、2 曲線が分離不能に絡むことは可能である。図 4 を見よ。

この積分は閉じた電流の存在のもとで閉じた曲線を描くときに磁極になされる仕事を表示し、2 つの閉じた曲線のあいだの幾何学的な結びつきを指し示している。まさにガウスによるこの積分の発見がガウスをライプニッツ、オイラー、ヴァンデルモンド以来、位置の幾何学にほどんど進歩がなかったと悲しませたものである。しかし、私たちはここで、おもに、リーマン、ヘルムホルツ、リストティングによるいくつかの進歩があることを報告しなければならない。

422.] s にかんして閉じた回路 1 周の積分結果を調べよう。式 (7) の中の II の項の一つは

$$-\frac{\xi - x}{r^3} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{dz}{ds} = \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{r} \frac{dz}{ds} \right), \quad (8)$$

である。

簡単のため、もし閉じた曲線 s を 1 周してとられた積分を

$$F = \int \frac{1}{r} \frac{dx}{ds} ds, G = \int \frac{1}{r} \frac{dy}{ds} ds, H = \int \frac{1}{r} \frac{dz}{ds} ds, \quad (9)$$

と書くと、II のこの項は

$$\frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2H}{d\xi ds},$$

と書くことができ、 $\int \Pi ds$ の対応する項は

$$\frac{d\eta}{d\sigma} \frac{dH}{d\xi}.$$

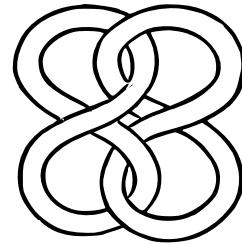


図 : 4.

となる。

Π のすべての項を集めると、

$$\begin{aligned} -\frac{d\omega}{d\sigma} &= -\int \Pi ds \\ &= \left(\frac{dH}{d\eta} - \frac{dG}{d\zeta} \right) \frac{d\xi}{d\sigma} + \left(\frac{dF}{d\zeta} - \frac{dH}{d\xi} \right) \frac{d\eta}{d\sigma} + \left(\frac{dG}{d\xi} - \frac{dF}{d\eta} \right) \frac{d\zeta}{d\sigma}, \end{aligned} \quad (10)$$

である。

この量は、あきらかに、曲線 σ を進むときの磁気ポテンシャルの減少率である。言いかえれば、 $d\sigma$ 方向の磁力である。

$d\sigma$ を、順次、 x, y, z 軸方向と仮定して、磁力の成分の値にたいして

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{dH}{d\eta} - \frac{dG}{d\zeta}, \\ \beta &= -\frac{d\omega}{d\eta} = \frac{dF}{d\zeta} - \frac{dH}{d\xi}, \\ \gamma &= -\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{dG}{d\xi} - \frac{dF}{d\eta}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を得る。

量 F, G, H は曲線 s を縁とする強さ 1 の磁気板のベクトルポテンシャルの成分である。それらは、一連の値を持つ関数であるスカラーポテンシャル ω と違って、空間の各点で完全に決められている。

閉じた曲線を境界とする磁気板による点 P でのベクトルポテンシャルは以下の幾何学的な構成により見いだすことができる:

点 Q が閉じた曲線を P からの距離に数値的に等しい速度で 1 周するとし、第 2 の点 R が固定点 A から出発し、速度の方向がつねに Q の方向に平行で、
速度の大きさが 1 である速度で動くとする。 Q が閉じた曲線を 1 周したとき、
 AR を結ぶと、直線 AR はその方向と数値的な大きさが点 P での閉じた曲線
によるベクトルポテンシャルを表す。

磁場中に置かれた磁気板のポテンシャルエネルギー。

423.] 既に 410 節で、ポテンシャルが V である磁場の中に置かれた強さ 1 の板のポテンシャルエネルギーは

$$M = \phi \iint (l \frac{dV}{dx} + m \frac{dV}{dy} + n \frac{dV}{dz}) dS, \quad (12)$$

であることを示している。ここで l, m, n は正の側から外向きに引かれた板の法線の方向余弦であり、面積分は板全体にわたる。

さて、この面積分は磁場のベクトルポテンシャルを使って線積分に変形でき、

$$M = -\phi \int (F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds}) ds, \quad (13)$$

と書くことができる。ここで積分は磁気板の縁を形成する閉じた曲線 1 周にわたり、 ds の方向は、板の正の側から見たとき、時計の針の方向の反対方向である。

もし磁場の強さが ϕ' の第 2 の磁気板によるものと考えるなら、 F の値を直接 416 節の結果から、つまり、405 節から決めることができる。もし l', m', n' が第 2 の板の要素 dS' の法線の方向余弦なら、

$$F = \phi' \iint (m' \frac{d}{dz'} \frac{1}{r} - n' \frac{d}{dy'} \frac{1}{r}) dS',$$

が成り立つ。ここで、 r は要素 dS' と第一の板の境界上の点のあいだの距離である。

さて、この面積分は第 2 の板の境界をまわる線積分に変更できる。すなわち、それは

$$\phi' \int \frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} ds'. \quad (14)$$

p. 46

である。

同様に

$$G = \phi' \int \frac{1}{r} \frac{dy'}{ds'} ds',$$

$$H = \phi' \int \frac{1}{r} \frac{dz'}{ds'} ds'.$$

である。

これらの値を M の式に代入すると

$$M = -\phi\phi' \iint \frac{1}{r} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \right) ds ds', \quad (15)$$

である。ここで、積分は s について一周、 s' について一周にわたる。この式は 2 つの板の相互作用によるポテンシャルエネルギーを与える。それは、どうせん、 s と s' を交換しても同じである。それぞれの板の強さが 1 であるとき、その符号を反対にしたこの式は 2 つの閉じた曲線 s と s' のポテンシャルと呼ばれる。これは電気回路の理論で非常に重要な量である。もし要素 ds と ds' のあいだの角度を ϵ と書くと、 s と s' のポテンシャルは

$$\iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds'. \quad (16)$$

と書くことができる。これは明らかに長さの次元をもつ量である。

第IV章

誘導された磁気。

424.] これまで私たちは磁石の実際の磁化分布は、所与のデータとして、あからさまに与えられていると考えてきた。この磁化が永久的なものか一時的なものかについて、なんの仮定も設けなかった。しかし、磁石を小さな部分まで分解し、小さい部分を磁石のどの部分の磁化も変えないように磁石から取り除くと考えて推論した部分は別である。

ここで、物体の磁化を磁化の生成、変化の仕方にかんして考えなければならない。地球の磁気の方向に平行に置かれた鉄の棒は磁石になることが分かっている。その極は地球の極と反対方向に変わる。つまり、安定な平衡位置にあるコンパスの磁針の極と同じようになる。

磁場のなかに置かれた軟鉄片はどれも磁性を示すことが分かる。もし軟鉄を、馬蹄形磁石の極のあいだのような、場の中の磁力が大きい部分に置くと、鉄の磁気は強くなる。もし鉄を磁場から離すと、鉄の磁性は大きく弱められるか、完全に消え去る。もし鉄の磁性が鉄が置かれた場の磁力にまったく依存するなら、その鉄は軟鉄と呼ばれる。磁気的な意味で軟らかい鉄は文字どおりの意味でも軟らかい。それを曲げ、永久変形を与えることは易しいが、破壊することは困難である。

磁場から取りだしたとき、磁性を保持する鉄は硬鉄と呼ばれる。そのような鉄は軟鉄のように磁気状態をたやすく取ることはない。叩き出しや振動をあたえることによって、磁力の影響下の硬鉄にたやすく磁気状態をとらせ、磁化力が除かれたとき、磁気を、たやすく、なくさせることができる^{註1}。磁気的に硬い鉄はより曲げにくく、より脆くなりやすい。

p. 48

^{註1} Ewing(*Phil. Trans.*, Part ii. 1885) は振動や脱磁化力のない軟鉄はもっとも硬い鋼より大きい割合の磁気を保持できることを示している。

叩き出し、転がし、伸線、急冷の過程は鉄を硬化させ、焼き鈍しの過程は鉄を軟化させる。

硬い鋼と軟らかい焼き戻された鋼のあいだの磁気の差は、機械的性質の差と同様、硬鉄、軟鉄間の差よりはるかに大きい。軟鋼は鉄と同じように簡単に磁化し、脱磁化させられるが、もっとも硬い鋼は永久的であって欲しい磁石の最良の素材である。

鋳鉄は鋼より多くの炭素を含むが、磁化をそれほど保持できない。

もし、どのような磁石をもってきて作用させても、磁化分布が変わらないよう、磁石が作られたなら、その磁石は硬く磁化された物体と呼べたであろう。この性質を満たすことが知られている物体は一定の電流が流された導体の回路のみである。

そのような回路は磁性を示し、それゆえ、電磁石とよぶことができるが、その磁性は場のなかの他の磁力による影響を受けない。IV 部でこの問題に戻ろう。

実際の磁石は、硬化鋼から作られていても、磁鉄鉱から作られていても、すべて、磁石に影響を与えるために持ってこられた、どのような磁力からも影響を受けることがわかる。

科学的な目的には、永久磁化を磁力と独立に存在する磁化と定義し、一時磁化を磁力に依存する磁化と定義して、永久磁化と一時磁化を区別すると便利である。しかし、この区別は磁化される物質の本質的な性質にたいする知識に基づくものではないことをわきまえておかなければならない。この区別は現象にかかる計算を行うために導入された仮説の表示にすぎない。第 6 章で磁化の物理理論に戻ろう。

425.] ここでは、物質の任意の粒子の磁化はその粒子に作用する磁力のみに依存すると仮定して、一時磁化を調べよう。この磁力は一部は外的な原因から生じ、一部は隣り合う粒子の一時磁化から生じる。

磁力の作用によってこのように磁化された物体は誘導によって磁化されたと言われ、磁化は磁化力によって誘導されたと言われる。

与えられた磁化力によって誘導される磁化は物質が異なれば異なる。磁化はもっとも純粹でもっとも軟らかい鉄で最大で、そのような鉄では磁化の磁

力にたいする比は値 32 から 45 にさえも達する^{註 2}。

その他の物質、たとえばニッケルやコバルトなどの金属は、鉄には劣るが、磁化されうる。物質は、すべて、十分に強い磁力にしたがうとき、分極の兆候を与えることが分っている。

鉄、ニッケル、コバルトなどのように、磁化の方向が磁力の方向と同じであるとき、物質は、常磁性、強磁性、さらに簡単に磁性と呼ばれる。ビスマスなどのように、誘導磁化が磁力と反対方向のとき、物質は反磁性と呼ばれる。

これらの反磁性物質はすべて、磁化を生成する磁力に対する磁化の比は極めて小さく、ビスマスの場合、およそ $\frac{1}{400000}$ にすぎない。ビスマスはこれまで知られている中でもっとも大きな反磁性を示す物質である。

結晶化した、歪を持つ、有機物質では、磁化の方向は必ずしも磁化を生成する磁力の方向と一致しない。物体に固定した軸にかんする磁化の成分と、磁力の成分のあいだの関係は 3 つの線形方程式系によって表示される。これらの方程式に含まれる 9 つの係数のうち、6 個だけが独立であることを示そう。この種の物質の現象は磁気結晶現象の名のもとに分類される。

磁力の場のなかに置かれたとき、結晶は自分自身の最大常磁性誘導軸や、最小反磁性軸を磁力線に平行な方向に向けようとする傾向がある。436 節参照。p. 50

軟鉄では、磁化の方向はその点の磁気の方向と一致し、磁力の値が小さいとき、磁化はほぼ磁力に比例する^{註 3}。しかし、磁力が増加するにつれ、磁化は増加が緩慢になり、VI 章で記述する実験から、磁化の限度値があり、磁力の値がなんであれ、その限度を越えることはできないようにみえる。

以下の誘導磁気の理論の概略では、磁化は磁力に比例し、磁力と同一線上にあると考えることから始める。

誘導磁化係数の定義

426.] μ は、398 節で定義されたように、物体の任意の場所での磁力とする。 α はその点での磁化とする。このとき、 α の μ に対する比は誘導磁化係

^{註 2} Thalén, *Nova Acta, Reg. Soc. Sc.*, Upsal, 1863. {Ewing (同所) はそれは 279 まで大きくなることができ、もし、磁力が適用されているあいだ、鉄線が振られたらそれは 1600 に匹敵するまで上昇できることを示している。}

^{註 3} {Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* 23, p. 225, 1887, は、磁化力が地球の水平磁力の $\frac{1}{10}$ より小さいとき、磁化は磁化力に比例するが、力が大きくなると、そうではなくなることを示した。}

数と呼ばれる。

この係数 κ と表記すると、誘導磁気の基礎方程式は

$$\mathfrak{J} = \kappa \mathfrak{H}, \quad (1)$$

である。

係数 κ は鉄や常磁性物質にたいして正であり、ビスマスや反磁性物質にたいして負である。 κ は鉄では値 {1600} にたっし、ニッケルやコバルトの場合は大きいといわれるが、他の場合はそれは小さな数で、0.00001 より大きいことはない。

力 \mathfrak{H} は一部は誘導によって磁化された物体にとって外的な磁石の作用から生じ、一部は物体自身の誘導磁化から生じる。両部分ともポテンシャルをもつ条件を満たす。

427.] V を物体に外的な磁気によるポテンシャルとし、 Ω を誘導磁化によるポテンシャルとする。このとき、もし U が両方の原因による実際のポテンシャルなら

$$U = V + \Omega, \quad (2)$$

である。

p. 51

磁力 \mathfrak{H} の x, y, z 方向に分解された成分を α, β, γ とし、磁化のそれらの成分を A, B, C とすると、式 (1) によって

$$\left. \begin{array}{l} A = \kappa \alpha \\ B = \kappa \beta \\ C = \kappa \gamma \end{array} \right\}, \quad (3)$$

である。

これらの式に、それぞれ、 dx, dy, dz をかけ、加えあわせると

$$Adx + Bdy + Cdz = \kappa(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz),$$

が分かる。しかし、 α, β, γ はポテンシャル U から導かれるので、右辺は $-\kappa dU$ と書くことができる。

したがって、もし物質全体で κ が一定なら、左辺も x, y, z の関数の完全微分でなければならない。その関数を ϕ と呼ぶこととすると、式は

$$d\phi = -\kappa dU, \quad (4)$$

となる。ここで

$$A = \frac{d\phi}{dx}, \quad B = \frac{d\phi}{dy}, \quad C = \frac{d\phi}{dz}, \quad (5)$$

である。

それゆえ、412 節で定義されたように、磁化はラメラである。

385 節で、もし ρ が自由磁気の体積密度なら

$$\rho = -\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right),$$

あることが示されており、これは式(3)によって

$$\rho = -\kappa\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right),$$

となる。

しかし、77 節によって

$$\frac{d\alpha}{d\beta} + \frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = -4\pi\rho,$$

である。

したがって

$$(1 + 4\pi\kappa)\rho = 0,$$

である。したがって、物質全体で

$$\rho = 0, \quad (6)$$

であり、それゆえ、磁化はラメラであるとともに、ソレノイダルである。404 節参照。

それゆえ、自由磁気は、物体の境界面を除いて、存在しない。もし ν が表面から中にむかって引かれた法線なら、磁気表面密度は

$$\sigma = -\frac{d\phi}{d\nu}, \quad (7)$$

である。

p. 52

任意の点でのこの磁化によるポテンシャル Ω は、それゆえ、面積分

$$\Omega = \iint \frac{\sigma}{r} dS, \quad (8)$$

から分る。

Ω の値はいずれの場所でも有限で、連續であり、ラプラス方程式を境界面の中でも外でも各点で満たす。もしダッシュ記号で面の外側の Ω の値を区別すると、もし ν' が外にむいて引かれた法線なら、表面で、

$$\Omega' = \Omega; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\nu} + \frac{d\Omega'}{d\nu'} &= 4\pi\sigma, \quad 78b \text{ 節によって}, \\ &= 4\pi \frac{d\phi}{d\nu}, \quad \text{式 (7) によって}, \\ &= -4\pi\kappa \frac{dU}{d\nu}, \quad \text{式 (4) によって}, \\ &- 4\pi\kappa \left(\frac{dV}{d\nu} + \frac{d\Omega}{d\nu} \right), \quad \text{式 (2) によって}. \end{aligned}$$

が成り立つ。

それゆえ、第 2 表面条件を

$$(1 + 4\pi\kappa) \frac{d\Omega}{d\nu} + \frac{d\Omega'}{d\nu'} + 4\pi\kappa \frac{dV}{d\nu} = 0, \quad (10)$$

と書くことができる。

したがって、面 S を境界とし、ポテンシャル V の外部磁力が作用する、一様等方物体中の誘導磁気の決定は以下の数学的な問題になる。

以下の条件を満たす 2 関数、 Ω, Ω' を見つけなければならない：

面 S の内部で Ω は有限で連續で、ラプラス方程式を満たさねばならない。

面 S の外部で Ω' は有限、連續で、無限遠で零になり、ラプラス方程式を満たさねばならない。

表面の各点で $\Omega = \Omega'$ であり、 Ω, Ω' と V の法線にかんする微分は式 (10) を満たさなければならない。

誘導磁気の問題のこの取り扱い方はポアソンによる。ポアソンが論文で使った量 k は κ と同じではなく、 κ と次のように関係している：

$$4\pi\kappa(k - 1) + 3k = 0. \quad (11)$$

428.] 誘導磁気の問題は、ファラディにしたがって誘導磁気と呼んできた量を導入して、異なった方法で扱うことができる。

磁気誘導 \mathfrak{V} と 磁力 \mathfrak{H} 、磁化 \mathfrak{J} のあいだの関係は

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}. \quad (12)$$

によって表示される。

誘導磁気を磁力を使って表示する式は

$$\mathfrak{J} = \kappa\mathfrak{H}, \quad (13)$$

である。

したがって、 \mathfrak{J} を消去すると、磁化が磁力によって誘導されている物質中の磁気誘導と磁力のあいだの関係は

$$\mathfrak{V} = (1 + 4\pi\kappa)\mathfrak{H}, \quad (14)$$

であることが分る。

もっとも一般の場合、 κ は物質中の点の位置の関数であるだけではなく、ベクトル \mathfrak{H} の方向の関数であるが、私たちがここで考えている場合では κ は数值である。

次にもし

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa, \quad (15)$$

と書くと、 μ を磁気誘導の磁力にたいする比と定義できる。この比を物質の磁気誘導容量とよび、誘導磁化係数 κ と区別することができる。

もし、外的な原因によるポテンシャル V と誘導磁化によるポテンシャル Ω の複合された全磁気ポテンシャルを U と書くと、磁気誘導の成分 a, b, c と磁力の成分 α, β, γ をつぎのように表示できる:

$$\left. \begin{array}{l} a = \mu\alpha = -\mu\frac{dU}{dx}, \\ b = \mu\beta = -\mu\frac{dU}{dy}, \\ c = \mu\gamma = -\mu\frac{dU}{dz}. \end{array} \right\} \quad (16)$$

成分 a, b, c はソレノイダル条件

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0, \quad (17)$$

を満たす。

p. 54

したがって、ポテンシャル U はラプラス方程式

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0 \quad (18)$$

を μ が一定の各点で、つまり、一様な物質内部の各点または空虚な空間で、満たさなければならない。

表面それ自体では、もし ν が磁気物質中に向かう法線、 ν' が外向き法線なら、また、もし物質の外側の量の記号をダッシュ記号で区別すると、磁気誘導の連続条件は

$$a \frac{dx}{d\nu} + b \frac{dy}{d\nu} + c \frac{dz}{d\nu} + a' \frac{dx}{d\nu'} + b' \frac{dy}{d\nu'} + c' \frac{dz}{d\nu'} = 0; \quad (19)$$

つまり、式 (16) によって

$$\mu \frac{dU}{d\nu} + \mu' \frac{dU'}{d\nu'} = 0, \quad (20)$$

である。磁石の外側の誘導係数、 μ' 、は、それを取り囲む媒質が、常磁性、強磁性、反磁性でないかぎり、1 である。

もし U に V と Ω を使った値を入れ、 μ に κ を使った値を入れると、ポアソンの方法によって到達した同じ式 (10) を得る。

誘導磁気の問題は、磁気誘導と磁力の間の関係について考察するとき、310 節で与えられた。非一様媒質中の電流の伝導問題にまさに対応する。

磁力は、電気力が電気ポテンシャルから導かれるのとまったく同様に、磁気ポテンシャルから導かれる。

磁気誘導はフラックスの性質をもつ量であり、電流が満たす連続性条件を満たす。

等方媒質では、磁気誘導は、電流が駆電力に依存する仕方にまさに対応する仕方で、磁力に依存する。

ある問題での比磁気誘導容量はほかの問題での比伝導率に対応する。したがって、トムソンは、かれの誘導磁気の理論（復刻版 p. 484）で、この量を媒質の透磁率と呼んでいる。

さて、私がファラディの観点だと考える観点から誘導磁気の理論を考える準備ができた。

磁力が任意の媒質に作用するとき、磁性的であろうと、反磁性的であろうと、中立であろうと、磁力は物質のなかに磁気誘導と呼ばれる現象を生成する。

磁気誘導はフラックスの性質をもつ方向のある量であり、磁気誘導は電流やその他のフラックス量と同じ連続の条件を満たす。

等方媒質では、磁力と磁気誘導は同じ方向であり、磁気誘導は磁力と、 μ によって表示した誘導係数と呼ばれる量の積である。

空虚な空間では、誘導係数は 1 である。磁化を誘導できる物体中では、誘導係数は

$$1 + 4\pi\kappa = \mu$$

である。ここで、 κ はすでに誘導磁化係数として定義された量である。

429.] μ, μ' を 2 媒質を分離する面の反対側の μ の値とすると、もし V, V' が 2 媒質中のポテンシャルなら、2 媒質中で面に向かう磁力は $\frac{dV}{d\nu}, \frac{dV'}{d\nu'}$ である。

面要素 dS をとおる磁気誘導量はそれぞれ 2 媒質中で dS に向かって計算して、 $\mu \frac{dV}{d\nu} dS, \mu' \frac{dV'}{d\nu'} dS$ である。 dS 向かう全フラックスは零だから

$$\mu \frac{dV}{d\nu} + \mu' \frac{dV'}{d\nu'} = 0,$$

である。しかし、密度 σ の面近くのポテンシャルの理論によって

$$\frac{dV}{d\nu} + \mu' \frac{dV'}{d\nu'} = 0,$$

である。

したがって、

$$\frac{dV}{d\nu} \left(1 - \frac{\mu}{\mu'}\right) + 4\pi\sigma = 0,$$

である。

もし κ_1 が表面磁化の、係数が μ である第 1 媒質中の法線方向の力にたいする比なら

$$4\pi\kappa_1 = \frac{\mu - \mu'}{\mu'},$$

が成り立つ。

したがって、 κ_1 は μ が μ' とくらべて大きいか小さいかにしたがって正または負である。もし $\mu = 4\pi\kappa + 1$, $\mu' = 4\pi\kappa' + 1$ とおくと

$$\kappa_1 = \frac{\kappa - \kappa'}{4\pi\kappa' + 1},$$

p. 56

である。

この式で、 κ, κ' は空気中でなされた実験から導かれた第 1 および第 2 媒質の誘導磁化係数である。 κ_1 は第 1 媒質が第 2 媒質によって囲まれているときの第 1 媒質の誘導磁化係数である。

もし κ' が κ より大きければ、 κ_1 は負であり、第 1 媒質の見かけの磁化は磁力の方向の反対方向である。

こうして、もし鉄の常磁性塩の弱い水溶液を含む容器が同じ塩のより強い溶液中に吊るされており、磁石が作用しているなら、容器は、あたかも、磁石がおなじ面内に吊るされているなら磁石が向いた方向の反対方向に磁化されたかのように動く。

これは容器中の溶液はほんとうは磁力と同じ方向に磁化されているが、容器を囲う溶液が同じ方向により強く磁化されているとの仮説によって説明できる。したがって、容器は 2 つの強い磁石の間に置かれた弱い磁石に似ており、そこでは、すべてが同じ方向に磁化されており、したがって、反対の極が接触している。弱い磁石の北極は強い磁石の北極と同じ方向を指しているが、強い磁石の南極と接しているから、弱い磁石の北極の近くには南磁気が余分にあり、それが弱い磁石を反対方向に磁化されているように見えさせている。

しかし、見かけの磁化が、いわゆる真空中に吊るされているときできえ、負である物質がある。

もし、真空中にたいして $\kappa = 0$ を仮定すると、 κ はこれらの物質にたいして負である。しかしながら、 κ が $\frac{1}{4\pi}$ より数値的に大きい負の値を持つ物質は発見されておらず、それゆえ、これまで知られているすべての物質にたいして、 μ は正である。

κ が負である、それゆえ、 μ が 1 よりも小さい物質は反磁性物質と呼ばれる。 κ が正で、 μ が 1 より大きい物質は、常磁性、強磁性、または単純に磁性物質と呼ばれる。

常磁性、反磁性の性質の物理理論を、電磁気を論じるとき、832–845 節で考えることとする。

p. 57

430.] 磁気誘導の数学理論は、最初、ポアソンによって与えられた^{註4}。かれの理論が基礎に置いた物理的な仮定は、2 磁気流体の理論の仮定で、その仮定は 2 電気流体の理論と同じ数学的な利点と物理的な困難を抱えている。しかし、軟鉄片は誘導によって磁化されうるが、同量ではない 2 種の磁気を荷なわすことができないという事実を説明するため、かれは物質は一般にこれらの流体の不導体であると考え、流体が流体に作用する力に自由にしたがう状況下で、物質のある小部分のみが流体を含むと考えた。これらの小さな磁気要素物質はそれぞれ、等量の 2 流体を含み、それぞれの要素内で流体は完全に自由に動くが、流体はある磁気要素から他の要素にけっして受け渡されることはない。

それゆえ、問題は誘電性絶縁媒質中に散りばめられたいいくつかの小さな電気導体に関係した問題と同種のものである。導体は小さく、互いに接触しないかぎり、どのような形でもよい。

もしそれらが細長い物体で、すべてが同じ一般的な方向を向いているなら、つまり、もし他の方向よりもある方向に詰まっているならポアソン自身が示しているように、媒質は等方ではない。したがって、不要な複雑さを避けるため、それぞれの磁気要素が球であり、要素は軸に関係なく散布されている場合をポアソンは検討した。単位体積の物質中にある磁気要素すべての全体積は k であると考えた。

すでに 314 節で、中で他の媒質からなる小さな球が分布している媒質の電気伝導度を考えている。

もし媒質の伝導度が μ_1 であり、球の伝導度が μ_2 なら、複合系の伝導度は

$$\mu = \mu_1 \frac{2\mu_1 + \mu_2 + 2k(\mu_2 - \mu_1)}{2\mu_1 + \mu_2 - k(\mu_2 - \mu_1)},$$

であることが分っている。 $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \infty$ と置くと、これは

$$\mu = \frac{1 + 2k}{1 - k},$$

となる。

p. 58

^{註4} *Memoires de l'Institut*, 1824, p. 247.

この量 μ は伝導度 1 の媒質中に散りばめられた完全導体球からなる媒質の電気伝導度で、単位体積中の球の総体積は k である。

記号 μ は媒質の磁気誘導係数も表現し、媒質は透磁率が 1 の媒質中に散りばめられた透磁率無限大の球からなる。

記号 k をポアソンの磁気係数と呼ぶこととするが、 k は磁気要素の体積の物質の全体積にたいする比を表現している。

記号 κ はノイマンの誘導による磁化係数として知られている。それはポアソンの記号より便利である。

記号 μ を磁気誘導係数と呼ぶこととする。その利点は磁気の問題の電気や熱の問題への変換を容易にする点にある。

これら 3 つの記号の関係は次のとおりである：

$$\begin{aligned} k &= \frac{4\pi\kappa}{4\pi\kappa + 3}, & k &= \frac{\mu - 1}{\mu + 2}, \\ \kappa &= \frac{\mu - 1}{4\pi}, & \kappa &= \frac{3k}{4\pi(1 - k)}, \\ \mu &= \frac{1 + 2k}{1 - k}, & \mu &= 4\pi\kappa + 1. \end{aligned}$$

もし、軟鉄についてのタレン^{註 5} の実験値、 $\kappa = 32$ とおくと、 $k = \frac{134}{135}$ であることが分る。ポアソンの理論にしたがうと、これは磁気分子の体積の鉄の全体積にたいする比である。空間と同じ大きさの球で、球の体積の空間全体に対する比が 1 近くになるように充填することは不可能であり、鉄の体積のそれほど大きな部分が、どのような形のものであれ、固体分子で占められることはまったくありそうにないことである。これが私たちがポアソンの仮説を捨てなければならない一つの理由である。他の理由は VI 章で述べられる。もちろん、ポアソンの数学的な研究の価値は損なわれない。その数学研究は彼の仮説の上に立つものではなく、誘導磁気の実験事実に基づいているからである。

^{註 5} *Recherches sur les propriétés magnétiques du fer, Nova Acta, Upsal, 1863.*

第V章

特定の磁気誘導問題。

中空球殻

431.] 磁気誘導の問題の完全な解が与えられた最初の例は任意の磁力が作用する中空球殼にたいしてポアソンが与えたものである。

簡単のため、磁力の源は殼の外の空間中にあると考えよう。もし V が外部磁気系によるポテンシャルを表記するなら、 V を

$$V = C_0 S_0 + C_1 S_1 r + \&c. + C_i S_i r^i + \dots \quad (1)$$

の形の体調和関数の級数に展開できる。ここで、 r は殼の中心からの距離、 S_i は位数 i の球面調和関数、 C_i は展開係数である。

この級数は r がこのポテンシャルを生成する系のもっとも近い磁石までの距離より小さいかぎり収束する。したがって、中空球殼とそのなかの空間にたいして、この展開は収束する。

球殼の外側半径を a_2 、内側半径を a_1 とし、誘導磁気によるポテンシャルを Ω とする。関数 Ω の形は、一般に、中空空間と、殼の物質中と、それを越えた空間中では異なる。もしこれらの関数を調和級数に展開し、面調和関数 S_i を含む項に注目すると、もし Ω_1 が殼の内部の中空空間に対応するものなら、 Ω_1 は $A_1 S_i r_i$ の形の正の調和関数でなければならないことが分る。ポテンシャルは半径が a_1 の球の内部で無限大にならざるを得ないからである。

殼の物質中では r は a_1 と a_2 の間にあるが、級数は

$$A_2 S_i r^i + B_2 S_i r^{-(i+1)},$$

の形の、 r の正負両方の幕を含むことができる。

p. 60

殻の外では、 r は a_2 よりも大きく、級数は r がいかに大きくとも収束しなければならないから、

$$B_3 S_i r^{-(i+l)},$$

の形の項のみでなければならない。

関数 Ω が満たさなければならない条件は: Ω は 1° 有限で、2° 連続、3° 無限遠で零、4° 至る所でラプラス方程式をみたさなければならない。

1° によって、 $B_1 = 0$.

2° によって、 $r = a_1$ のとき、

$$(A_1 - A_2)a_1^{2i+1} - B_2 = 0, \quad (2)$$

であり、 $r = a_2$ のとき

$$(A_2 - A_3)a_2^{2i+l} + B_2 - B_3 = 0, \quad (3)$$

である。

3° によって $A_3 = 0$ 、であり、条件 4° は、関数は調和だから、至る所で満たされる。

しかし、このほかに、427 節、式 (10) によって、内面および外面で満たさなければならない条件がある。

内面 $r = a_1$ で、

$$(1 + 4\pi\kappa)\frac{d\Omega_2}{dr} - \frac{d\Omega_1}{dr} + 4\pi\kappa\frac{dV}{dr} = 0, \quad (4)$$

であり、外面 $r = a_2$ で

$$-(1 + 4\pi\kappa)\frac{d\Omega_2}{dr} + \frac{d\Omega_3}{dr} - 4\pi\kappa\frac{dV}{dr} = 0, \quad (5)$$

である。

これらの条件から方程式

$$(1 + 4\pi\kappa)\{iA_2a_1^{2i+1} - (i+1)B_2\} - iA_1a_1^{2i+1} + 4\pi\kappa iC_ia_1^{2i+1} = 0, \quad (6)$$

$$(1 + 4\pi\kappa)\{iA_2a_2^{2i+1} - (i+1)B_2\} + (i+1)B_3 + 4\pi\kappa iC_ia_2^{2i+1} = 0, \quad (7)$$

が成立ち、もし

$$N_i = \frac{1}{(1+4\pi\kappa)(2i+1)^2 + (4\pi\kappa)^2 i(i+1)(1 - (\frac{a_1}{a_2})^{2i+1})}, \quad (8)$$

とおくと、

$$A_1 = -(4\pi\kappa)^2 i(i+1)(I - (\frac{a_1}{a_2})^{2i+1})N_i C_i, \quad (9)$$

$$A_2 = -4\pi\kappa i[2i+1 + 4\pi\kappa(i+1)(1 - (\frac{a_1}{a_2})^{2i+1})]N_i C_1, \quad (10)$$

$$B_2 = 4\pi\kappa i(2i+1)a_1^{2i+1}N_i C_i, \quad (11)$$

$$B_3 = -4\pi\kappa i\{2i+1 + 4\pi\kappa(i+1)\}(a_2^{2i+1} - a_1^{2i+1})N_i C_i, \quad (12)$$

が分る。

これらの量は、調和展開に代入されると、殻の磁化によるポテンシャル部分を与える。量 N_i は、 $1+4\pi\kappa$ はけっして負にはならないので、つねに正である。したがって、 A_1 はつねに負、つまり、言葉を代えると、殻の内部の点での磁化された殻の作用はつねに外部磁力の作用の反対であり、これは殻が常磁性か、反磁性かにはよらない。殻の内部の合成ポテンシャルの実際の値は

p. 61

$$(C_i + A_1)S_i r^i,$$

$$\text{つまり } (1+4\pi\kappa)(2i+1)^2 N_i C_i S_i r^i, \quad (13)$$

である。

432.] 軟鉄の場合のように、 κ が大きい数であるとき、殻が非常に薄くないかぎり、殻の内部の磁力は外部磁力の小さな割合でしかない。

こうして、W. トムソン卿は船舶用検流器を軟鉄の管で囲んで、それを外部磁力から独立にした。

433.] 実用上、もっとも重要な場合は $i = 1$ の場合である。この場合、

$$N_1 = \frac{1}{9(1+4\pi\kappa) + 2(4\pi\kappa)^2(1 - (\frac{a_1}{a_2})^3)} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -2(4\pi\kappa)^2 \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right) N_1 C_1, \\ A_2 &= -4\pi\kappa \left[3 + 8\pi\kappa \left(-1 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)\right] N_1 C_1, \\ B_2 &= 12\pi\kappa a_1^3 N_1 C_1, \\ B_3 &= -4\pi\kappa (3 + 8\pi\kappa) (a_2^3 - a_1^3) N_1 C_1, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

である。

中空の殻の内部の磁力は、この場合、一様で、大きさは

$$C_1 + A_1 = \frac{9(1 + 4\pi\kappa)}{9(1 + 4\pi\kappa) + 2(4\pi\kappa)^2 \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right)} C_1, \quad (16)$$

に等しい。

もし中空殻内部の磁力を測定し、それを外部磁力と較べることによって κ を決めたければ、殻の厚さの最良値は方程式

$$1 - \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{9}{2} \frac{1 + 4\pi\kappa}{(4\pi\kappa)^2}. \quad (17)$$

から分る。 $\left\{ \frac{a_1}{a_2} \right\}$ のこの値は $\frac{d}{d\kappa} \left\{ 1 + \frac{A_1}{C_1} \right\}$ を最大にする。したがって、 $\frac{(C_1 + A_1)}{C_1}$ の与えられた誤差にたいして、 κ 中の対応する誤差は可能なかぎり小さくなる。} このとき、殻の内部の磁力は外部の値の半分である。

p. 62

鉄の場合、 κ は 20 と 30 のあいだの数であり、殻の厚さはその半径のおおよそ、200 分の 1 とすべきである。この方法は κ の値が大きいときのみ適用できる。 κ が非常に小さいとき、 A_1 の値は κ の 2 乗に比例するので、それは気がつかないほど小さい。

非常に小さい球形の中空を持つほとんど中まで詰まった球にたいして、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{2(4\pi\kappa)^2}{(3 + 4\pi\kappa)(3 + 8\pi\kappa)} C_1, \\ A_2 &= -\frac{4\pi\kappa}{3 + 4\pi\kappa} C_1, \\ B_3 &= -\frac{4\pi\kappa}{3 + 4\pi\kappa} C_1 a_2^3, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

である。

この研究はすべて、312 節で与えられた、球殻をとおる伝導の研究から、312 節で与えられた式で、 $k_1 = (1 + 4\pi\kappa)k_2$ と置き、伝導の問題の A_1 と A_2 は磁気誘導の問題の $C_1 + A_1$ と $C_1 + A_2$ に等価であることを思い出すと、直接に導くことができたであろう。

434.] 2 次元の対応する解は図形的に巻末の図 XV に表現されている。誘導線は、図の中心から遠いところでほぼ水平であるが、横方向に磁化され安定な平衡の位置に置かれた円柱棒によって乱されているように表現されている。この系を直角に切る線は等ポテンシャル面を表し、その一つは円柱である。点線で示された大円は常磁性円柱の断面を表現し、そのなかの点線で示された水平直線は外部誘導線と連続しており、物質内部の誘導線を表現している。点線で示された垂直線は内部等ポテンシャル面を表現し、外部の系と連続している。誘導線は物質内部ではより近くに集まるように描かれ、等ポテンシャル面は常磁性円柱によってさらに分離されていることが観測される。ファラディの言葉では、誘導線をまわりの媒質よりも良く伝導している。

もし垂直線の系を誘導線と考え、水平な系を等ポテンシャル面と考えると、第一に、円柱が横方向に磁化され、力線のあいだで不安定な平衡位置に置かれ、円柱が力線を発散させている場合になる。第 2 に、点線で示された大円を反磁性物質の断面と考えると、断面の中の点で示された直線は、物体外の線とともに、誘導線を分離する反磁性物質の効果を表現し、ともに等ポテンシャル面が描かれ、そのような物質はまわりの媒質よりも磁気誘導の悪い導体である。

p. 63

磁化係数が方向により異なる球の場合。

435.] α, β, γ を磁力の成分、 A, B, C を任意の点での磁化の成分とすると、これらの量の間のもっとも一般的な関係は式

$$\left. \begin{aligned} A &= r_1\alpha + p_3\beta + q_2\gamma, \\ B &= q_3\alpha + r_2\beta + p_1\gamma, \\ C &= p_2\alpha + q_1\beta + r_3\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

によって与えられる。ここで、 r, p, q は 9 個の磁化係数である。

さて、これらが半径 a の球内の磁化の条件で、物質の各点での磁化は一様で同じ方向で、成分 A, B, C を持つと考えよう。

また、外部磁化力も一様で一方向に平行で、成分として X, Y, Z を持つと考える。

したがって、 V の値は

$$V = -(Xx + Yy + Zz), \quad (2)$$

で、磁化球の外のポテンシャル Ω' の値は、391 節によって、

$$\Omega' = \frac{4\pi}{3} \frac{a^3}{r^3} (Ax + By + Cz), \quad (3)$$

である。

磁化球の内部のポテンシャル、 Ω の値は

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} (Ax + By + Cz), \quad (4)$$

である。

p. 64 球内の実際のポテンシャルは $V + \Omega$ であり、したがって、球内の磁力の成 分にたいして

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = X - \frac{4}{3}\pi A, \\ \beta = Y - \frac{4}{3}\pi B, \\ \gamma = Z - \frac{4}{3}\pi C, \end{array} \right\} \quad (5)$$

が成り立つ。

したがって

$$\left. \begin{array}{lll} (l + \frac{4}{3}\pi r_1)A + & \frac{4}{3}\pi p_3B + & \frac{4}{3}\pi q_2C = r_1X + p_3Y + q_2Z, \\ \frac{4}{3}\pi q_3A + & (1 + \frac{4}{3}\pi r_2)B + & \frac{4}{3}\pi p_1C = q_3X + r_2Y + p_1Z, \\ \frac{4}{3}\pi p_2A + & \frac{4}{3}\pi q_1B + & (1 + \frac{4}{3}\pi r_3)C = p_2X + q_1Y + r_3Z, \end{array} \right\} \quad (6)$$

である。

これらの方程式を解くと、

$$\left. \begin{array}{l} A = r'_1X + p'_3Y + q'_2Z, \\ B = q'_3X + r'_2Y + p'_1Z, \\ C = p'_2X + q'_1Y + r'_3Z, \end{array} \right\} \quad (7)$$

が分る。ここで、

$$\left. \begin{aligned} D'r'_1 &= r_1 + \frac{4}{3}\pi(r_3r_1 - p_2q_2 + r_1r_2 - p_3q_3) + (\frac{4}{3}\pi)^2D, \\ D'p'_1 &= p_1 - \frac{4}{3}\pi(q_2q_3 - p_1r_1), \\ D'q'_1 &= q_1 - \frac{4}{3}\pi(p_2p_3 - q_1r_1), \\ &\quad \&c., \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

である。ここで、 D は式 (6) の右辺の係数の行列式であり、 D' は左辺の係数の行列式である。

新しい係数系 p', q', r' は系 p, q, r が対称であるときのみ、つまり、形式 p の係数が形式 q の対応する係数と等しいときのみ、対称である。

436.] 註¹ 球を x 軸のまわりに y から z へ回そうとする偶力のモーメントが、基本体積要素から生じる偶力を考え、全球にたいしてモーメントの和をとることによって見出される。結果は

$$\begin{aligned} L &= \frac{4}{3}\pi a^3(\gamma B - \beta C) \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3\{p'_1 Z^2 - q'_1 Y^2 + (r'_2 - r'_3)YZ + X(q'_3 Z - p'_2 Y)\}, \end{aligned} \quad (9)$$

である。

p. 65

もし

$$X = 0, \quad Y = F \cos \theta, \quad Z = F \sin \theta,$$

註¹ [係数 p と q の等値性は次のようにして示される：球に作用する力が球を方向余弦が λ, μ, ν である直径のまわりに角度 $\delta\theta$ だけ回すとすると、もし W が球のエネルギーを表すなら、436 節によって、

$$-\delta W = \frac{4}{3}\pi a^3\{(ZB - YC)\lambda + (XC - ZA)\mu + (YA - XB)\nu\}\delta\theta,$$

が成り立つ。しかし、もし座標軸が球に固定されているなら、回転の結果、

$$\delta X = (Y\nu - Z\mu)\delta\theta, \quad \text{などなど},$$

が成り立つ。

したがって

$$-\delta W = \frac{4}{3}\pi a^3(A\delta X + B\delta Y + C\delta Z),$$

と置くことができる。

球の回転はエネルギー源にはならないので、最後の式の右辺の式は完全微分でなければならない。したがって、 A, B, C は X, Y, Z の線形関数であるから、 W は X, Y, Z の 2 次関数であることが出てき、必要な結果がたちに導かれる。

また、W. トムソン卿の *Papers on Electrostatics and Magnetism*, 復刻版 pp. 480-481, 参照。]

とすると、これは yz 面中で、 y 軸へ角 θ 傾いた磁極 F に対応している。もしこの力が一定であるあいだに球を回すと、球を回すときになされた仕事はそれぞれ 1 回転で $\int_0^{2\pi} L d\theta$ である。しかし、これは

$$\frac{4}{3}\pi^2 a^3 F^2 (p'_1 - q'_1), \quad (10)$$

に等しい。

したがって、球の回転がエネルギーの無尽蔵の源にならないためには、 $p'_1 = q_1$ 、であり、同様に $p'_2 = q'_2$ 、 $p_2 = q_3$ である。

これらの条件は元の方程式の第 3 式の B の係数は第 2 式の係数に等しいことを示している。したがって方程式系は対称であり、方程式は、磁化の主軸方向を座標として表したとき、

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{r_1}{1 + \frac{4}{3}\pi r_1} X, \\ B &= \frac{r_2}{1 + \frac{4}{3}\pi r_2} Y, \\ C &= \frac{r_3}{1 + \frac{4}{3}\pi r_3} Z, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。

x 軸のまわりに球を回そうとする偶力のモーメントは

$$L = \frac{4}{3}\pi a^2 \frac{r_2 - r_3}{(1 + \frac{4}{3}\pi r_2)(1 + \frac{4}{3}\pi r_3)} YZ, \quad (12)$$

である。

ほとんどの場合、異なる方向での磁化係数の差は小さいので、もし r で係数の平均値を表すと

$$L = \frac{2}{3}\pi a^3 \frac{r_2 - r_3}{(1 + \frac{4}{3}\pi r)^2} F^2 \sin 2\theta \quad (13)$$

と置くことができる。

これは x 軸まわりに y から z 方向に結晶球を回そうとする力である。その力は最大磁気係数（もしくは最小反磁性係数）の軸を磁力線に平行にしようとする。

2次元の対応する場合が図 XVI に表現されている。

もし図の上が北を向いていると考えると、図は、北側を東に向けて置かれた横に磁化された円柱によって乱された、磁力線とポテンシャル面を表現している。点で示された大円は結晶物質の円柱の断面を表現し、結晶物質は北西から南東への軸よりも北東から南西への軸に沿って、より大きな誘導係数をもっている。円内の点線は誘導線と等ポテンシャル面を表現している。この場合、それらは直交していない。円柱に作用する合力はあきらかに円柱を東から北へ回そうとする。

437.] 一様で平行な磁力の場のなかに置かれた楕円体の場合はポアソンによってきわめて巧妙に解かれた。

もし V が点 (x, y, z) での一様密度 ρ の任意の形の物体の自己重力ポテンシャルなら、 $-\frac{dV}{dx}$ は、強さ $I = \rho$ で x 方向に一様に磁化された同じ物体の磁気のポテンシャルである。

なぜなら、任意の点での $-\frac{dV}{dx}\delta x$ の値は物体のポテンシャル V の値の、物体が x 方向へ $-\delta x$ だけ移動したときのポテンシャル値 V' に対する過剰分であるからである。

もし物体を距離 $-\delta x$ だけ移動し、物体の密度を ρ から $-\rho$ へ変えたなら、(つまり、重力を引力ではなく斥力にしたら、) $-\frac{dV}{dx}\delta x$ は 2 物体によるポテンシャルになったであろう。

さて、体積 δv を含む物体の任意の体積要素部分を考える。その量は $\rho\delta v$ であり、それにたいして、距離 $-\delta x$ に量が $-\rho\delta v$ の移動された物体の要素がある。これら 2 要素の効果は強さが $\rho\delta v$ 、長さが δx の磁石の効果に等しい。磁化の強度は要素の磁気モーメントを要素の体積で割ると分る。

したがって、 $-\frac{dV}{dx}\delta x$ は x 方向に強度 $\rho\delta v$ で磁化された物体の磁気ポテンシャルであり、 $-\frac{dV}{dx}$ は強度 ρ で磁化された物体の磁気ポテンシャルである。

このポテンシャルは別の見方でも考えることができる。物体は距離 δx だけ移動され、密度を $-\rho$ にされた。2 つの位置にある物体に共通の空間部分では密度は零である。引力にかんするかぎり、2 つの同じ大きさで反対の密度はたがいに打ち消しあうからである。それゆえ、一方側に正の物質の板、他方側に負の物質の板が残り、合成ポテンシャルをこれらによるものとみなすことができる。外に向かって引かれた法線が x 軸と角 ϵ をなす点での板の厚さ

p. 66

p. 67

は $\delta x \cos \epsilon$ であり、その密度は ρ である。それゆえ、面密度は $\rho \delta x \cos \epsilon$ であり、ポテンシャルが $-\frac{dV}{dx}$ の場合、面密度は $\rho \cos \epsilon$ である。

このようにして、与えられた方向に平行に一様に磁化された任意の物体の磁気ポテンシャルを見つけることができる。さて、もしこの一様磁化が磁気誘導によるなら、物体中のすべての点で磁力もまた、一様で平行でなければならぬ。

この力は 2 つの部分からなる。1 つは外的な原因によるもので、もう 1 つは物体の磁化によるものである。それゆえ、もし外部磁力が一様で平行なら、磁化による磁力も物体内のすべての点で一様で平行でなければならない。

したがって、この方法が磁気誘導の問題の答へ導くためには、 $\frac{dV}{dx}$ は物体内の座標 x, y, z の線形関数でなければならず、それゆえ、 V は座標の 2 次関数でなければならない。

物体のなかで V が座標の 2 次関数である私たちが熟知している唯一の場合は 2 位の完全面（境界をもたない面）を境界とする物体の場合のみである。そのような物体が有限の大きさである唯一の場合はそれが橢円体であるときである。それゆえ、橢円体の場合に、この方法を適用しよう。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

を橢円面の式とする。 Φ_0 は定積分

$$\int_0^\infty \frac{d(\phi^2)}{\sqrt{(a^2 + \phi^2)(b^2 + \phi^2)(c^2 + \phi^2)}} \text{ 註 } 2 \quad (2)$$

p. 68

を表記するとする。

このとき、もし

$$L = 4\pi abc \frac{d\Phi_0}{d(a^2)}, \quad M = 4\pi abc \frac{d\Phi_0}{d(b^2)}, \quad N = 4\pi abc \frac{d\Phi_0}{d(c^2)},$$

とすると、橢円体内でのポテンシャルの値は

$$V_0 = -\frac{\rho}{2}(Lx^2 + My^2 + Nz^2) + \text{定数}, \quad (4)$$

である。

註 2 トムソンとテイトの *Natural Philosophy*, §525, 第 2 版、参照。

もし楕円体が一様な強度 I で、 x 軸と余弦が l, m, n をなす方向に磁化されており、磁化の成分が

$$A = Il, \quad B = Im, \quad C = In,$$

なら、楕円体内の磁化によるポテンシャルは

$$\Omega = I(Llx + Mmy + Nnz), \quad (5)$$

となる。

もし外部磁化力が \mathbf{J} で、もしその成分が X, Y, Z なら、そのポテンシャルは

$$V = -(Xx + Yy + Zz), \quad (6)$$

となる。それゆえ、物体内の任意の点での実際の磁化力の成分は

$$X + AL, \quad Y + BM, \quad Z + CN, \quad (7)$$

である。

磁化と磁化力のあいだのもっとも一般的な関係は 9 つの係数を含む、3 つの線形方程式で与えられる。しかし、エネルギー保存の条件を満たすためには、磁気誘導の場合、これらの 3 つは、それぞれ、他の 3 つに等しいはずで、したがって

$$\left. \begin{aligned} A &= \kappa_1(X + AL) + \kappa'_3(Y + BM) + \kappa'_2(Z + CN), \\ B &= \kappa'_3(X + AL) + \kappa_2(Y + BM) + \kappa'_1(Z + CN), \\ C &= \kappa'_2(X + AL) + \kappa'_1(Y + BM) + \kappa_3(Z + CN), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

が成り立つ。

これらの方程式から X, Y, Z をつかって A, B, C を決めることができ、これが問題のもっとも一般的な解を与える。

このとき、楕円体の外のポテンシャルは楕円体の磁化によるものと、外部磁力に依るものとあわせたものである。

438.] 実用上重要な唯一の場合は

$$\kappa'_1 = \kappa'_2 = \kappa'_3 = 0. \quad (9)$$

の場合である。

p. 69

このとき、

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\kappa_1}{1 - \kappa_1 L} X, \\ B &= \frac{\kappa_2}{1 - \kappa_2 M} Y, \\ C &= \frac{\kappa_3}{1 - \kappa_3 N} Z, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

が成り立つ。

もし橢円体が 2 つの等しい軸を持ち、惑星状、つまり、偏平形なら、

$$b = c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} L &= -4\pi \left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \sin^{-1} e \right), \\ M = N &= -2\pi \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \sin^{-1} e - \frac{1 - e^2}{e^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。

もし橢円が卵形、つまり伸長形なら、

$$a = b = \sqrt{1 - e^2} c; \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} L = M &= -2\pi \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \log \frac{1 + e}{1 - e} \right), \\ N &= -4\pi \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2e} \log \frac{1 + e}{1 - e} - 1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

である。

球の場合、 $e = 0$ のときで、

$$L = M = N = -\frac{4}{3}\pi, \quad (15)$$

である。

非常に偏平な小惑星形、つまり、偏平な極限の橢円体の場合、 L は -4π で M, N は $-\pi^2 \frac{a}{c}$ になる。

非常に細長い卵形の場合、 L と M は -2π の値で近似され、 N は

$$-4\pi \frac{a^2}{c^2} \left(\log \frac{2c}{a} - 1 \right),$$

の形で近似でき、 $e = 1$ のとき、零になる。

これらの結果から以下のようにみえる――

(1) 磁化係数 κ が非常に小さいとき、正であっても負であっても、誘導磁化はほとんど磁化力に κ をかけたものに等しく、それは物体の形にほとんど独立である。

(2) κ が正の大きい量であるとき、磁化は主として物体の形に依存し、ほとんど κ の正確な値には独立である。ただし、 κ が大きくて $N\kappa$ が小さい量であるように伸ばされた卵形に作用する縦方向の力の場合を除く。

p. 70

(3) もし κ の値が負で、 $\frac{1}{4\pi}$ に等しくなることができたなら、平らな板や円盤の法線方向に作用する磁化力の場合、無限大の磁化になるはずである。この馬鹿げた結果は私たちが 428 節で述べたことを確かめている。

したがって、 κ の値を決める実験は、 κ が非常に小さいかぎり、任意の形の物体で行うことができる。すべての常磁性物体合や、鉄、ニッケル、コバルトをのぞく磁性物質の場合、これに当てはまるからである。

しかし、鉄の場合、 κ は非常に大きく、球や偏平な形についての実験は κ を決めるためには不適当である。たとえば、球の場合、磁化力にたいする磁気の比は、もし、ある種の鉄のように、 $\kappa = 30$ なら 1 から 4.22 であり、もし κ が無限大なら比は 1 から 4.19 であり、したがって、磁化の決定のごく小さな誤差が κ の値に非常におおきな誤差を導入する。

しかし、もし非常に長い卵形の鉄片を使うと、 $N\kappa$ が 1 の程度の値であれば、磁化の決定値から κ の値を導くことができる。 N の値が小さくなればなるほど、 κ の値はより正確になる。

事実、もし $N\kappa$ を十分に小さくできるなら、 N 自身の値の小さな誤差は大きな誤差を導入せず、したがって、卵形の代わりに^{註3} 導線や長い棒のよう、任意の伸長物体を使うことができる。

しかし、積 $N\kappa$ が 1 とくらべて小さいときのみ、この置き換えが許される。事実、平坦な終端を持つ長い円柱上の磁気の分布は長い卵形の上の磁気分布

とは似ていない。自由磁気は円柱の終端にむかって大きく集中するが、卵形の場合、赤道からの距離とともに直接に変化するからである。

しかし、円柱上の電気の分布は、すでに 152 節で見てきたように、卵形の場合の分布と本当に同じ程度である。

これらの結果はなぜ永久磁石の磁気モーメントが磁石が細長いときそれほど大きくなりうるのかを理解することを可能にする。もし円盤面の法線方向に強度 I で円盤を磁化し、そのままにしておいたなら、内部の粒子は $4\pi I$ に等しい一定の脱磁化力を受け、これが、もしそれだけで磁化を一部破壊するためには不十分なら、振動や温度の変化に助けられて^{註 4} すぐに破壊するのである。

もし円柱を横方向に磁化したなら、脱磁化力は $2\pi I$ にすぎない。

もし磁石が球なら、脱磁力は $\frac{4}{3}\pi I$ であろう。

横方法に磁化された円盤中では、脱磁力は $\pi^2 \frac{a}{c} I$ であり、縦方向に伸長された卵形では脱磁力は $4\pi \frac{a^2}{c^2} I \log \frac{2c}{a}$ でしかない。

したがって、伸長磁石は短く太い磁石よりもその磁気を失いにくい。

3 軸にたいして異なる磁気係数をもつ樁円体に働き、それを x 軸のまわりの回そうとする力のモーメントは

$$\frac{3}{4}\pi abc(BZ - CY) = \frac{4}{3}\pi abcYZ \frac{\kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_2\kappa_3(M - N)}{(1 - \kappa_2M)(1 - \kappa_3N)},$$

である。

したがって、もし κ_2, κ_3 が小さいなら、その大きさが非常に不等でないかぎり、この力は主として物質の結晶の質に依存し、その形には依らない。しかし、もし、鉄の場合のように、 κ_2, κ_3 がかなりの大きさなら、力は主として物体の形に依存し、物体はその長い方の軸を力線に平行にするように回転する。

^{註 3} { もし金属線を使うなら、その長さは少なくとも直径の 300 倍なければならない。 }

^{註 4} { 円盤中の磁力、 $= X + AL$ は

$$= \frac{X}{1 - \kappa L},$$

であり、この場合、 $L = -4\pi$ だから磁力は

$$\frac{X}{1 + 4\pi\kappa},$$

である。こうして、円盤をつらぬく磁気誘導は、もし円盤が取りはぶかれたなら空气中で持つ

もし十分に強いが一様な磁力の場が得られたなら、細長い等方常磁性物体はその最長の大きさを磁力線に平行に持つていったであろう。

p. 72

439.] 任意の磁力のもとでの回転楕円体の磁化の分布の問題は J. ノイマンによって研究された^{註 5}。キルヒホフ^{註 6}は任意の力の作用する無限長の円柱の場合に方法を拡大した。

グリーンは、考察録の 17 節で、軸に平行な一様な外的な力 X の作用する有限長の円柱中の磁気の分布の研究を行った。この研究のいくつかの段階はそれほど厳密ではないが、その結果はこのもっとも重要な場合の現実の磁化をおおよそ表現している。それは κ が大きな数値の円柱の場合から小さな数値の円柱への遷移を非常にうまく表示しているが、反磁性物質のような κ が負の場合は完全に失敗している。

グリーンは半径が a , 長さが $2l$ の円柱の中点から距離 x の自由磁気の線密度は

$$\lambda = \pi \kappa X p a \frac{e^{\frac{px}{a}} - e^{-\frac{px}{a}}}{e^{\frac{pl}{a}} + e^{-\frac{pl}{a}}}$$

であることを見つけていた。ここで p は方程式

$$0.231863 - 2 \log_e p + 2p = \frac{1}{\pi \kappa p^2},$$

からわかる数値量である。

以下は p と κ のいくつかの対応する値である。

κ	p	κ	p
∞	0.	11.802	0.07
336.4	0.01	9.137	0.08
62.02	0.02	7.517	0.09
48.416	0.03	6.319	0.10
29.475	0.04	0.1427	1.00
20.185	0.05	0.0002	10.00
14.794	0.06	0.0000	∞
負		虚数。	

p. 73

値、 X である。}

註 5 Crelle, bd. xxxvii (1848).

註 6 Crelle, bd. xlvi (1854).

円柱の長さがその半径とくらべて大きいとき、円柱の中央のどちらかの側にある全自由磁気量は、当然のことながら、

$$M = \pi a^2 \kappa X.$$

である。

このうち、 $\frac{1}{2}pM$ は円柱の平らな終端上にあり^{註 7}、円柱の終端から全量 M の重心への距離は $\frac{p}{a}$ である。

κ が非常に小さいとき、 p は大きく、ほとんど全自由磁気は円柱の終端上有る。 κ が増加すると、 p は減少し、自由磁気は終端から大きな距離に広がる。 κ が無限大のとき、円柱の任意の点での自由磁気はたんに中点からの距離に比例し、分布は一様な力の場のなかの導体上の自由電気の分布に似ている。

440.] 鉄、ニッケル、コバルト以外のすべての物質で、磁化係数は非常に小さく、物体の誘導磁化は磁場のなかの力をほんのわずかしか変えない。それゆえ、第 1 近似として、物体中の実際の磁場はもし物体がそこになかったときと同じであると仮定できる。それゆえ、物体の表面磁化は、第 1 近似で、 $\kappa \frac{dV}{d\nu}$ である。ここで $\frac{dV}{d\nu}$ は内向きに引かれた面の法線方向の外部磁気による磁気ポテンシャルの増加率である。もしこの面分布によるポテンシャルを計算するなら、第 2 近似に進むとき、それを使うことができる。

この第 1 近似で磁気の分布による力学的エネルギーを見出すために、物体

^{註 7} { 円柱の正側の曲面上の自由磁気の量は

$$= \int_0^l \lambda dx = \pi a^2 \kappa X (1 - \operatorname{sech} \frac{pl}{a}).$$

である。平らな終端上の量は、密度が $x = l$ のときの曲面上と同じだと考えると、

$$\frac{\pi \kappa X p a}{2\pi a} \tanh \frac{pl}{a} \cdot \pi a^2,$$

である。こうして、自由磁気の総量は

$$\pi a^2 \kappa X (1 - \operatorname{sech} \frac{pl}{a} + \frac{p}{2} \tanh \frac{pl}{a})$$

である。 pl/a が大きいとき、これは

$$M(1 + \frac{p}{2})$$

に等しい。}

の全面にわたって取られた面積分

$$E = \frac{1}{2} \iint \kappa V \frac{dV}{d\nu} dS$$

を取らなければならない。さて、100 節でこれは、物体が占める全空間にわたって取られた体積積分

$$E = -\frac{1}{2} \iiint \kappa \left(\left| \frac{d\bar{V}}{dx} \right|^2 + \left| \frac{d\bar{V}}{dy} \right|^2 + \left| \frac{d\bar{V}}{dz} \right|^2 \right) dx dy dz$$

に等しいことを示している。つまり、もし R が磁気の合力なら

$$E = -\frac{1}{2} \iiint \kappa R^2 dx dy dz,$$

である。

さて、変位 δx のあいだに物体上の磁力によってなされた仕事は、 X を x 方向の機械的な力として、 $X\delta x$ であるから、また

$$X\delta x + E = \text{一定},$$

だから、

$$X = -\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \iiint \kappa R^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint \kappa \frac{d.R^2}{dx} dx dy dz,$$

であり、これは物体に作用する力は物体の各部分が R^2 の小さい所から大きい所へ、各単位体積上で

$$\frac{1}{2} \kappa \frac{d.R^2}{dx}$$

である力で、動こうとするかのようであることを示している。反磁性体のように、 κ が負なら、ファラディが最初に示したように、磁場のより強い部分からより弱い部分へ向いている。反磁性体の場合に観測されるほとんどの作用はこの性質に依存している。

船舶の磁気。

441.] 磁気科学のほとんどすべての部分はその応用を航海に見出す。磁針の地磁気の方向指示作用は太陽や星が隠れているとき航路を確かめる唯一の

p. 75

方法である。真の子午面からの針の偏角は最初は航海へのコンパスの応用の障害と思われたが、磁気海図の作成によってこの困難が克服されたあと、偏角それ自身が海員が船舶の位置を決める助けをしているように思われる。

航海の最大の困難はつねに経度を確かめることであった。しかし、偏角は同じ経度の平行線の異なる点で異なるので、偏差の観測を緯度の知識とあわせて海員は磁海図上の位置を見出すことができた。

しかし、最近では船舶の建造に鉄が非常に多く使われ、磁針への磁気物体としての船舶の作用を考慮しなければ、コンパスを使うことがまったく不可能になった。

地磁気の影響のもとで任意の形の大量の鉄のなかでの磁気の分布を決めることは、たとえ機械的な歪や擾乱がなくとも、これまで見てきたように、非常に困難な問題である。

しかし、この場合、以下の考察により、問題は簡単化される。

コンパスは船舶の固定点をその中心として置かれており、任意の鉄から非常に遠く、針の磁気は船舶のなかでなんらの感知できるような磁気を生成しないと考える。コンパスの針の大きさは非常に小さいと考えられており、針の各点での磁力は同じであるとみなすことができる。

船舶の鉄は 2 種類のみであると考える。

(1) 硬鉄、一定の仕方で磁化されている。

(2) 軟鉄、その磁化は地球や他の磁石により誘導されている。

厳密には、最硬鉄は誘導が可能であるだけではなく、いろいろな仕方でいわゆる永久磁化の一部を失うことを認めねばならない。

最軟鉄はいわゆる残留磁化を保持することができる。現実の鉄の性質は上で定義された硬鉄、軟鉄の複合物と考えることでは正確には表現できない。しかし、地球の磁力のみが船舶に作用し、天候によるどのような異常な応力のもとにはないとき、船舶の磁気は一部は永久磁化により、一部は誘導によると考えることは、コンパスの補正に応用されたとき、十分に正確な結果へと導く。

コンパスの変動の理論はある方程式に基づいて見出されるが、その方程式はポアソンによって、*Memoires de l'Institute*, 研究所紀要、第 5 卷、533 頁、(1824) で与えられた。

p. 76

これらの方程式に含まれる誘導磁気にかんする唯一の仮定は、もし外部磁気による磁力 X が船舶の鉄に誘導磁化を生成するなら、そして、もしこの誘導磁化がコンパスの針に、成分が X', Y', Z' である擾乱力を及ぼすなら、そのとき、もし外部磁力が与えられた割合で変わるなら、擾乱力の成分は同じ割合で変わることである。

鉄に作用する磁力が非常に大きいとき、誘導磁化はもはや外部磁力に比例しないことは真であるが、この比例性の欠如は地球の作用による磁力の大きさの磁力にはかかわらない。

したがって、実際には、もし単位の値の磁力が船舶の鉄の介在をとおしてコンパスの針に擾乱力を生成し、その成分が x 方向に a 、 y 方向に d 、 z 方向に g なら、 x 方向の力 X による擾乱力は aX, dX, gX であると仮定してよい。

それゆえ、船舶の舳先が x 方向、右舷が y 方向、竜骨が Z 方向になるように船舶に軸が固定されていると仮定し、もし X, Y, Z がこれらの方向の地球の磁力の成分を表現し、 X', Y', Z' がコンパスの針の上の地球と船舶の合成磁力の成分を表現しているなら、

$$\left. \begin{aligned} X' &= X + aX + bY + cZ + P, \\ Y' &= Y + dX + eY + fZ + Q, \\ Z' &= Z + gX + hY + kZ + R, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

である。

これらの式 $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ は総量、配置、船舶の軟鉄の誘導容量に依存する 9 つの定数係数である。

P, Q, R は船舶の永久磁化に依存する一定の量である。

もし磁気誘導が磁力の線形関数なら、これらの方程式は十分に一般的であることは明らかである。これらが他のベクトルの線形関数としてもっとも一般的な式にはかならないからである。

それらが一般的すぎではないことを示すこともできる。なぜなら、鉄の適切な配置によって、係数のどれもが他とは独立に変えられるからである。

こうして、縦方向の磁力の作用のもとの長く細い鉄棒は極を持つようになり、そのそれぞれの強さは棒の断面積に磁力と誘導磁化係数の積に数値的に等しい。棒の横方向に磁力ははるかに微弱な磁化を生成し、その効果は数直径離れるとほとんど感じられない。

もし長い鉄棒が船舶全体にわたって、その一端をコンパスの針から距離 x に置き、船舶首にむかって測るなら、そのとき、もし棒の断面が A で、その磁化係数が κ なら、極の強さは $A\kappa X$ となり、もし $A = \frac{ax^2}{\kappa}$ なら、この極がコンパスの針に及ぼす力は aX となる。棒は非常に長く、コンパス上の他の極の効果は無視できると考えることができる。

こうして、係数 a に任意の必要な値を与える方法を手に入れた。

もし断面が B の他の棒をその端点を、コンパスから船舶首にむけて距離 x にある、同じ点に置き、離れた極がコンパスに影響しない距離まで右舷にむかって広げると、この棒による擾乱力は x 方向で、 $\frac{B\kappa Y}{x^2}$ に等しい、つまり、

$$B = \frac{bx^2}{\kappa} \text{ なら、力は } bY \text{ である。}$$

それゆえ、この棒は係数 b を導入する。

同じ点から下に伸びる第 3 の棒は係数 c を導入する。

係数 d, e, f はコンパスの右舷への点から船舶首、右舷、下へ伸びる 3 つの棒により生成され、 g, h, k はコンパスの下の点から平行方向の 3 つの棒によって生成される。

したがって、9 つの係数のそれぞれを、鉄棒を適切に置くことによって、別々に変えることができる。

P, Q, R はたんに船舶の永久磁化から生じるコンパス上の力と、永久磁化の作用による誘導磁化の部分から生じる力を合わせた成分である。

方程式 (1) と、コンパスによって示される航路と船舶の真の磁気航路のあいだの関係の完全な議論はアーチバルドスミス氏によって、海軍コンパス偏差マニュアルに与えられている。

そこで問題を調べるために価値のある図形法が与えられている。固定点を原点にとる。この点から直線を引き、方向と大きさでコンパスの針のうえの実際の磁力の水平部分を表現する。船舶が揺れてまわり、つぎつぎと船舶の船舶首をいろいろな方位角を持っていくと、この線分の先端は曲線を描き、そのそれぞれの点は特定の方位角に対応する。

そのような曲線はダイゴグラム、力学角度測定図と呼ばれ、そのような曲線によってコンパス上の力の方向と大きさが船舶の磁気航跡を使って与えられる。

2 種類のダイゴグラムがある。第 1 の曲線は、船舶がまわるとき、空間中

に固定された平面上を辿る。第2の曲線は船舶にかんして固定された平面上を辿る。

第1種のダイゴグラはパスカルの蝸牛形であり、第2種のそれは橢円である。これらの曲線を作り使うために、また、航海士にとって重要であり、数学者の興味を引く多くの理論を理解するために、読者は海軍コンパス偏差マニュアルを参照するとよい。

第VI章

ウェーバーの誘導磁気理論。

442.] ポアソンは鉄の磁化はそれぞれの磁気分子の中で 2 つの磁気流体が分離することから成り立っていると考えたことを見てきた。もし磁気流体の存在の仮定を避けたければ、磁化力が作用するとき、鉄の分子のそれぞれが磁石になるとと言えば、同じ理論を違った形で述べることができる。

ウェーバーの理論はこれとは異なる。鉄分子は磁化力を適用する前でも、つねに磁石であるが、通常の鉄では、分子の磁軸があらゆる方向に差違なく向けられており、したがって鉄は全体として磁性を示さないと仮定するのである。

磁力が鉄に作用するとき、磁力は分子の軸をすべて 1 方向に向けようとし、鉄を全体として磁石にする。

もしすべての分子の軸を互いに平行にしたら、鉄は最大限可能な強度の磁化を示したであろう。したがって、ウェーバーの理論は限界磁気強度の存在を含意している。それゆえ、そのような限度が存在する実験的な証拠が理論には必要である。磁気の限界値への接近を示す実験がジュール^{註 1} や J. ミューラー^{註 2} やエーゲン^{註 3} やロード^{註 4} によって行なわれてきた。

磁力の作用のもとに置かれた電気分解鉄についてのベーツ^{註 4} の実験がこの限度のもっとも完全な証拠を与えていた。――

銀線を被膜で覆い、被膜のうえに細い縦のかき傷を作り、金属上で非常に細い線を裸にしておく。金属線を鉄塩溶液に浸し、かき傷を磁力線の方向に

註 1 *Annals of Electricity*, iv. p. 131, 1839; *Phil. Mag.* [4] iii. p. 32.

註 2 *Pogg.*, *Ann. lxxix*. p. 337, 1850.

註 3 *Phil. Trans.* 1889. A. p. 221.

註 4 *Pogg.* cxi. 1860.

して磁場のなかに置く。導線を溶液をとおる電流の陰極として、鉄を金属線の狭い曝露面上に 1 分子、1 分子、置いていく。このように形成した鉄のフィラメントを磁気的に検査する。その磁気モーメントは非常に少量の鉄にたいして非常に大きいことが分かり、強力な磁化力を同じ方向に作用させたとき、一時磁化の増加は非常に小さいが、永久磁化は変わらないことが分る。逆方向の磁化力により、ファラメントはただちに通常の方法で磁化された鉄の状態に戻る。

ウェーバーの理論は、この場合、磁化力がそれぞれの分子の軸を分子が析出した瞬間に同じ方向に向けると考えるが、その理論は観測されたことと非常によく一致している。

ベーツは磁化力の作用のもとで電気分解が続けられたとき、引き続いて析出した鉄の磁化の強度は減少することを見出した。おそらく、分子の軸は、すでに析出している分子と隣り合って置かれたとき、磁化力の線から逸られ、近似的な平行性は非常に細い鉄のフィラメントの場合にのみ得られるのであろう。

もし、ウェーバーが考えたように、鉄の分子がすでに磁石であるなら、鉄分子が電気分解で析出したとき、磁力の強さが軸を平行にするのに十分なら、どのような強さであれ、そのような磁力は析出したフィラメント中でもっとも強度の大きい磁化を生成するのに十分である。

他方、もし鉄の分子が磁石ではなく、磁化されることができるだけなら、析出フィラメントの磁化は、一般に軟鉄の磁化が磁化力に依存する仕方と同じ仕方で、磁化力に依存する。ベーツの実験は後者の仮説には余地を残さない。

p. 81

443.] ウェーバーとともに、鉄の各単位体積に n 個の磁気分子があり、それぞれの磁気モーメントは m であると仮定しよう。もしすべての分子の軸が互いに平行に置かれたなら、単位体積の磁気モーメントは

$$M = nm,$$

であろうが、これが鉄の可能な最大の磁気強度であったであろう。

通常の鉄の非磁化状態では、ウェーバーは鉄分子の軸はすべての方向に差異なく置かれていると仮定している。

これを表示するため、1つの球を描き、 n 個の分子のそれぞれの軸の方向と平行に球の中心から 1 分子につき 1 半径を描くと考える。これらの半径の先端の分布は分子の軸の分布を表現する。通常の鉄の場合、これらの n 点は球面上のすべての部分にわたって等分布する。したがって、軸が x 軸にたいして α より小さい角をなす分子の数は

$$\frac{n}{2}(1 - \cos \alpha),$$

であり、それゆえ、分子軸が x 軸となす角が α と $\alpha + d\alpha$ のあいだの分子の数は

$$\frac{n}{2} \sin \alpha d\alpha.$$

である。

これはまったく磁化されていない鉄片中の分子の配置である。

さて、 x 軸方向に磁力 X を鉄に作用させたと考え、始めに軸が x 軸にたいして α だけ傾いていた分子を考えよう。

もしこの分子が完全に自由に回転するなら、分子はその軸を x 軸に平行にもっていく。もしすべての分子がそうしたなら、ごくわずかな磁化力が非常に高度の磁化を展開するのに十分であったであろう。

しかし、これはそうではない。分子はその軸が x に平行になるように回ることにはならない。これは一つには分子をもとの方向へ保とうとする力がそれぞれの分子に作用しているからであり、一つはそれと等価な効果を分子の全体系の相互作用が作りだしているからである。

p. 82

ウェーバーはこれらの仮説のうち、もっとも簡単なものとして、前者を採用し、それぞれの分子は、偏向されたとき、元の軸方向に作用する磁気力、 D 、が生成する力と同じ力で、元の位置へ戻ろうとすると考えた。

それゆえ、軸が実際にとる位置は X と D の合力の方向である。 APB は球の断面を表現し、球の半径は、ある決まったスケールで、力 D を表現するとする。半径 OP は特定の分子の元の位置での軸に平行な半径であるとする。

SO はおなじスケールで、 S から O へ作用すると考えられる磁化力 X を表現するとする。このとき、もし分子に SO の方向に力 X が作用し、軸のもとの方向、 OP に平行な方向に力 D が作用するなら、その軸は X と D の合力の方向、 SP に向けられる。

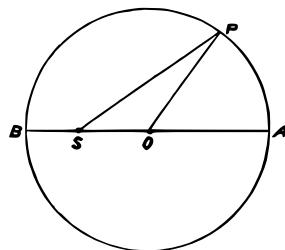


図 5.

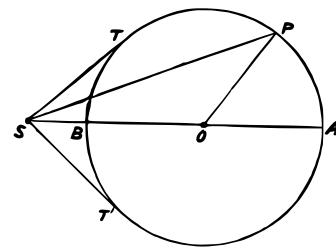


図 6.

分子の軸は、もともと、すべての方向を向いているから、 P は球上のどの点にあっても差異がない。図 5 では X は D より小さい。軸の最終位置, SP , はどのような方向をも向くことができるが、差異なしとはならない。より多くの分子が軸を B より A の方向へ回すからである。図 6 では、 X は D より大きく、分子の軸はすべて球に接する錐 TST' 内に閉じ込められる。

したがって、 X が D より小さいか大きいかにしたがって、2 つの異なる場合がある。

p. 83

$\alpha = AOP$, 分子軸の x 軸にたいする傾き,

$\theta = ASP$, 力 X によって振れた軸の傾き,

$\beta = SPO$, 偏向角,

$SO = X^{\text{註} 5}$, 磁化力,

$OP = D$, もとの位置に向けようとする力,

$SP = R$, X と D の合力,

m = 分子の磁気モーメント,

とする。

註 5 { 磁石内部で磁極に作用する力は、極が置かれた空洞の形に依存して、不定である。これら分子磁石の配置形についてなにも知らないから、力が、他の形ではなく、この形の空洞中のものだと仮定するどのような理由もあるとは思えないでの、力 X は不定である。さらなる仮定をしないかぎり、 $X = X_0 + pI$ と置かざるをえないように思われる。ここで、 X_0 は外部磁力であ

このとき、角 θ を減少させようとする、 X による静的な偶力のモーメントは、

$$mL = mX \sin \theta.$$

であり、 θ を増加させようとする、 D による偶力のモーメントは

$$mL = mD \sin \beta,$$

である。

これらの値を等しいとおき、 $\beta = \alpha - \theta$ を思い出すと、

$$\tan \theta = \frac{D \sin \alpha}{X + D \cos \alpha}, \quad (1)$$

が分かり、偏向のあの軸の方向が決まる。

つぎに力 X によって集団として生成される磁化強度を見つけなければならぬ。この目的のために各分子の磁気モーメントを x 方向に分解し、分解された成分をすべて加えあわさなければならない。

分子のモーメントの x 方向に分解された成分は

$$m \cos \theta,$$

である。もとの傾きが α と $\alpha + d\alpha$ のあいだにある分子の個数は

$$\frac{n}{2} \sin \alpha d\alpha,$$

である。

それゆえ、 θ は α の関数であることを思い出して、積分

$$I = \int_0^\pi \frac{mn}{2} \cos \theta \sin \alpha d\alpha, \quad (2)$$

を行わなければならない。

p. 84

θ, α とも、 R をつかって表示することができ、積分すべき式は

$$-\frac{mn}{4X^2 D} (R^2 + X^2 - D^2) dR, \quad (3)$$

り、 p は定数であり、それについて 0 と 4π のあいだになければならないとしか言えない。 X の値のこの不確定性は鉄のなかでは I は X_0 よりはるかに大きく、したがって、不確定性のある項が 2 つの項のなかでより重要である事実には、さらに当惑させられる。

}

となる。その一般積分は

$$-\frac{mnR}{12X^2D}(R^2 + 3X^2 - 3D^2) + C, \quad (4)$$

である。

第1の場合、 X は D より小さく、積分範囲は $R = D + X$ から $R = D - X$ までである。第2の場合、 X は D より大きく、積分範囲は $R = X + D$ から $R = X - D$ までである。

X が D より小さいとき、

$$I = \frac{2}{3} \frac{mn}{D} X, \quad (5)$$

である。 X が D に等しいとき、

$$I = \frac{2}{3} mn, \quad (6)$$

である。 X が D より大きいとき、

$$I = mn\left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2}\right), \quad (7)$$

であり、 X が無限大になると、

$$I = mn, \quad (8)$$

である。

ウェーバー^{註 6} によって採用されたこの形の理論にしたがうと、磁化力が 0 から D に増加すると、磁化はそれに比例して増加する。磁化力が D にたつしたとき、磁化は限界値の $2/3$ である。磁化力がさらに増加すると磁化は、無限に増加するかわりに、有限の限度に向かおうとする。

磁化の法則が図 7 に表示されている。ここで磁化力は O から右へ数値が増し、磁化は縦座標で表示されている。ウェーバー自身の実験はこの法則とよ

^{註 6} ウェーバーが Abhandlungen der Kg. Sachs-Gesellschaft der Wissens. i. p. 572 (1852), または Pogg., Ann., lxxxvii. p. 167 (1852), で、この積分の結果として与えた公式には誤りがある。彼はこの段階を与えてはいない。彼の公式は

$$I = mn \frac{X}{\sqrt{X^2 + D^2}} \frac{X^4 + \frac{7}{6}X^2D^2 + \frac{2}{3}D^4}{X^4 + X^2D^2 + D^4},$$

である。

く一致する結果をあたえている。しかし、おそらく、 D の値は同じ鉄片のすべての分子にたいして必ずしも同じではなく、したがって、 O から E の直線から E を越えた曲線への遷移はここで表示されているほど急激ではないかもしない。

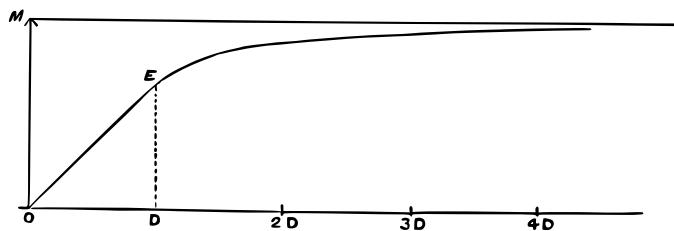


図 7.

444.] この形の理論は磁化力が取り除かれたあと存在することが分かっている残留磁化を考慮していない。それゆえ、私は分子の平衡位置が永久的に変わった条件のもとで、その条件に関係したさらなる仮定を行った結果を検討する必要があると考えた。

磁気分子の軸は、もし β_0 より小さい任意の角 β 偏向させられたなら、偏向力が取り除かれたとき、もとの位置に戻るであろうが、もし偏向 β が β_0 を越えると、偏向力が取り除かれたとき、軸はそのもとの位置に戻らず、角度 $\beta - \beta_0$ だけ永久的に偏向させられるであろう。これは分子の永久歪み^{註7}と呼ぶことができる。

分子偏向の法則にかんする仮定は物体の詳細な構造の正確な知識に基づくものだとみなすべきではない。この仮定は、事例の真の状態を知らないところで、ウェーバーによって示唆された考察に従うとき、想像力を助けるものとして採用されている。

$$L = D \sin \beta_0, \quad (9)$$

とすると、もし分子に作用する偶力のモーメントが mL より小さいなら、永久偏向ではなく、もし mL を越えるなら、平衡位置の永久的な変化がある。

^{註7} { マクスウェルがほんとうに行った仮定はこのパラグラフにある仮定ではなく、445 節の脚注で数え上げられたものであるように見える。 }

この仮説の結果をたどるために、中心が O 、半径が $OL = L$ の球を書こう。 X が L より小さいかぎり、すべてはすでに考えられた場合と同じになるが、 X が L を越えると、ただちに、それはいくつかの分子の永久偏向を生成し始める。

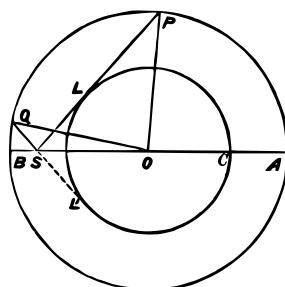


図 8.

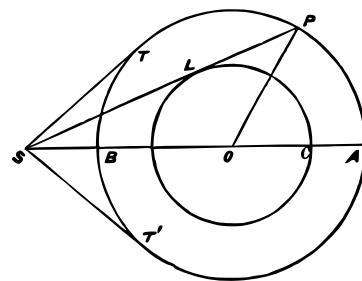


図 9.

p. 86

X が L より大きいが、 D よりも小さい、図 8 の場合を取り上げよう。 S を頂点として球 L に接する 2 重錐を描く。この錐が球 D と P 、 Q で交わるとする。もしもとの位置で分子の軸が OA と OP のあいだ、または、 OB と OQ にあいだにあるなら、分子軸は β_0 より小さい角だけ偏向させられ、永久的には偏向されない。しかし、もし分子軸がもともと OP と OQ のあいだにあれば、モーメントが L よりも大きい偶力が分子軸に作用し、それを位置 BP に偏向させ、力 X が作用を止めても、分子軸はもとの方向には戻らず、永久的に OP の方向に据え付ける。

$$L = X \sin \theta_0 \quad \text{ここで} \quad \theta_0 = PSA \quad \text{または} \quad QSB,$$

と置こう。このとき、以前の仮説で、軸が θ_0 と $\pi - \theta_0$ のあいだの θ の値を持つこれらの分子のすべてが力 X の作用のあいだ、値 θ_0 を持つようにされる。

それゆえ、力 X の作用のあいだ、軸が、偏向させられたとき、半対頂角が θ_0 の 2 重錐のどちらかの一葉内にある分子は前の場合のように配置されるだろうが、以前の理論では軸が錐面の外にあるこれらすべては永久的に偏向させられ、 A に向いてある錐面のまわりの濃い外片を形成する。

X が増加すると、 B まわりの錐に属する分子数は連続的に減少する。 X が

D と等しくなるとき、分子はすべてとの平衡位置から捩りだされ、 A のまわりの錐の外辺に強制され、したがって X は D より大きくなるとき、分子はすべて A まわりの錐の、その外辺の一部を形成する。

p. 87

力 X が取り除かれたとき、 X が L より小さい場合、すべては基本状態に戻る。 X が L と D のあいだにあるとき、 A のまわりに角度

$$AOP = \theta_0 + \beta,$$

の錐があり、 B のまわりに

$$BOQ = \theta_0 - \beta_0,$$

の錐がある。

これらの錐の中では、分子軸は一様に分布している。しかし、分子のもとの方向がこれらの両錐の外にあるすべての分子が基本位置から捩りだされ、 A にかんする錐のまわりの外辺を形成する。

もし X が D より大きいなら、 B まわりの錐は完全に消散し、錐を形成した分子はすべて A まわりの外辺に変換され、角 $\theta_0 + \beta_0$ で傾く。

445.] この場合を以前と同じ様に取り扱うと^{註8} 力 X が作用するあいだの一時磁化の強度にたいして、力 X はそれまで磁化されたことがない鉄に作用すると考えて、

$$X \text{ が } L \text{ より小さいとき, } I = \frac{2}{3}M\frac{X}{D}.$$

$$X \text{ が } L \text{ と等しいとき, } I = \frac{2}{3}M\frac{L}{D}.$$

$$X \text{ が } L \text{ と } D \text{ のあいだのとき, } I = M\left\{\frac{2}{3}\frac{X}{D} + \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right)\left[\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{X^2}{D^2} - \frac{L^2}{D^2}}\right]\right\}$$

$$X \text{ が } D \text{ に等しいとき, } I = M\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

X が D より大きいとき、

$$I = M\left\{\frac{1}{3}\frac{X}{D} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{D}{X} + \frac{(D^2 - L^2)^{\frac{3}{2}}}{6X^2D} - \frac{\sqrt{X^2 - L^2}}{6X^2D}(2X^2 - 3XD + L)\right\}.$$

X が無限大のとき、 $I = M$.

であることが分る。

X が L より小さいとき、磁化は以前の法則にしたがい、磁化力に比例する。 X が L を越えるとただちに磁化はある錐から他の錐へ輸送され始める分子のためにより急激な増加率を取る。しかし、この急激な増加は負の錐を構成する分子数が減少するため、すぐに終わる。最終的に磁化は限界値 M に達する。

L の値と D の値が異なる分子にたいして異なると仮定できたなら、磁化の異なる段階がそれほど判然とは記されない結果を得たはずである。

磁化力 X によって生成され、力が取り除かれたあと観測される残留磁化、 I' は以下のとおりである：

註 8 [本文中で与えられた結果は、一部のわずかな例外をのぞいて、以下の過程によって与えられる。444 節修正理論の所説は以下のようである：磁気分子の軸は、もし β_0 より小さい角度 β だけ偏向するなら、偏向力が取り除かれたときもとの位置に戻る。しかし、偏向が β_0 を越えるなら偏向に対抗しようとする力が負け、分子は偏向が β_0 である方向と同じ方向に偏向されてもよい。偏向力が取り除かれたとき、分子は偏向が β_0 であった分子の方向に平行な方向をとる。この方向は分子の永久歪みと呼ばれる。]

$X > L < D$ の場合、磁気モーメントにたいする式 I は 2 つの部分からなる。その第 1 は錐 AOP, BOQ 内の分子によるものであり、積分限界にたいする当然の注意をして、443 節のようにして正確に見出されるはずである。図 8 を参照して、第 2 の部分にたいして、理論上の説にしたがって、

$$\frac{1}{2}mn \cos ASP \times \frac{QP \text{ の } BA \text{ 上の射影}}{OP},$$

であることが分かる。2 つの部分を合わせて、簡単にすると、本文の結果がでてくる。

$X > D$ のとき、積分は再び 2 つの部分から成り立つ。その一つは 443 節のように錐 AOP 上でとられる。第 2 部分は、(図 9)

$$\frac{1}{2}mn \cos ASP \times \frac{BP \text{ の } BA \text{ 上の射影}}{OP},$$

である。

この場合 I の値は、簡単化したとき、本文第 3 項で与えられる値が異なっている。すなわち：
 $-\frac{1}{6}\frac{D}{X}$ ではなく、 $-\frac{1}{6}\frac{D^2}{X^2}$ がなりたつ。この変更の表の数値への効果は $X = 6, 7, 8$ のとき、 I の対応する値は 887, 917, 936 となる。この変更は図 10 で与えられている一時磁化曲線の一般的な性質を変えることはない。

図 8 の場合、 I' の値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mn \{ & \int_0^{AOP} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha + \int_{AOQ}^{\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ & + \cos AOP \times \frac{QP \text{ の } BA \text{ 上の射影}}{OP} \}, \end{aligned}$$

である。図 9 の場合、 I' の値は同様に見つけることができる。]

X が L より小さいとき, 残留磁化はない。

X が L と D のあいだのとき,

$$I' = M \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right) \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right).$$

X が D に等しいとき,

$$I' = M \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^2$$

p. 89

X は D より大きいとき,

$$I = \frac{1}{4}M \left\{ 1 - \frac{L^2}{XD} + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}} \right\}^2.$$

X が無限大のとき,

$$I' = \frac{1}{4}M \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} \right\}^2.$$

もし

$$M = 1000, \quad L = 3, \quad D = 5,$$

とすると、以下の一時磁化、残留磁化の値が分る。

磁化力	一時磁化	残留磁化
X	I	I'
0	0	0
1	133	0
2	267	0
3	400	0
4	729	280
5	837	410
6	864	485
7	882	537
8	897	575
∞	1000	810

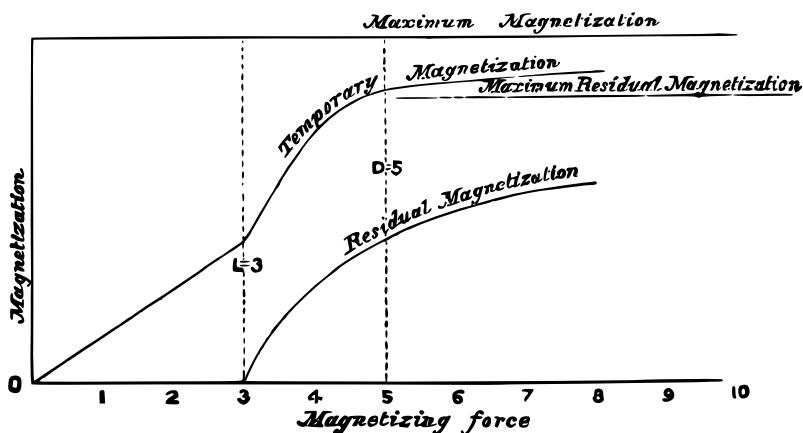


図 10.

これらの結果は図 10 に図表化されている。

一時磁化の曲線は最初は $X = 0$ から $X = L$ までは直線である。 $X = D$ まで、急激に大きくなり、 X がさらに増加すると、磁化は水平な漸近線に近付く。

p. 90
残留磁化の曲線は $X = L$ から始まり、縦座標が $= 0.81M$ の漸近線に近付く。

このように見出された残留磁化は、外部力が取り除かれたとき、物体自身の磁気分布から生じる消磁力がない場合に対応していることを思い出さなければならない。それゆえ、計算は縦方向に磁化された非常に細長い物体のみに適用できる。短く太い物体の場合、残留磁化は、外部の逆磁化力を物体に作用させたときと同じように、自由磁気の反作用によって減少する^{註9}。

註9 { 正方向の磁力のもとにある鉄片の場合を考える。磁力を零から永久磁化を生成するのに十分な値 X_0 まで増加させる。そして、磁力を再び零まで減少させる。前述の理論では、磁気の強度はいくつかの分子磁石に与えられた永久歪みの結果、この力が増加するときよりも減少するとき、与えられた磁力の値にたいして、より大きくなることは明らかである。こうして、磁場中の鉄の振舞は以前の取扱いに依存する。この効果はエーウィングによってヒステリシスと呼ばれ、彼によって完全に調べられた。(Phil. Trans. Part II, 1885 参照)しかし、445 節で与えられた理論はエーウィングによって発見された現象を必ずしもすべて説明していない。もし上の場合磁力を減少させたあと、再び増加させたなら、磁力の値 $X_1 < X_0$ にたいして、磁化の値は、力をまず X_1 まで減少させたときと同じであるはずだからである。しかし、エーウィングの研究はそうではないことを示している。これらの短い説明や同様の研究は付録巻に与えられるであろ

446.] この種の理論の科学的な価値はある一組の実験とのたんなる数値的一致によって評価できるものではない。これら理論では非常に多くの仮定を行ない、非常に多くの調整可能な数値を導入しているのである。もしそれがなんらかの価値を持つなら、磁化のあいだに鉄片に何が生じているか、心の中にイメージを形成できるからである。理論を検証するために、その理論を、鉄片が磁化力 X_0 のもとに置いたあと、再び、磁化力 X_1 のもとに置いた場合に適用しよう。

新しい力 X_1 が X_0 が作用していたのと同じ方向に作用しているなら、それを正の方向と呼ぶことにすると、そのとき、 X_1 は、もし X_0 より小さいなら、永久歪み分子を生成せず、 X_1 が取り除かれたとき、残留磁化は X_0 によって生成されたものと同じである。もし X_1 が X_0 より大きいなら、 X_0 が作用していなかったときと、まさに同じ効果を生成する。

しかし、 X_1 が負の方向に作用するとし、 $X_0 = L \operatorname{cosec} \theta_0$, $X_1 = -L \operatorname{cosec} \theta_1$ だと考えよう。

p. 91

X_1 の数値が増加するにつれて、 θ_1 は減少する。 X_1 が永久偏向を生成する最初の分子は A のまわりの錐の外辺を形成し^{註 10}、偏向が解かれたとき、 $\theta + \beta_0$ の傾きを持つ。

$\theta - \beta$ が $\theta + \beta_0$ より小さくなるとただちに、消磁過程は始まる。この瞬間、 $\theta_1 = \theta_0 + 2\beta$ であるから、消磁を始めるために必要な力 X_1 は磁化を生じさせた力 X_0 より小さい。

もし D の値と L の値がすべての分子で同じであつたら、 X_1 のごくわずかな増加が、軸が傾き $\theta + \beta$ を持つ分子の外辺全体を、負の軸 OB にたいする傾きが $\theta + \beta$ である軸位置へ、捩ったであろう。

消磁はこのように突然起こることはないが、非常に速く起こり、このような過程の説明法を確かめるなんらかの手段を与える。

さて、逆力 X_1 に適切な値を与えて、 X_1 を取り除いたとき、鉄片を完全に消磁したと考えよう。

分子軸が、磁化されたことのない鉄片のように、すべての方向に差違なく配置されることではなく、3つのグループを作る。

う。}

^{註 10} { これは図 8 と図 9 で、 P が C の右にあることを仮定している。 }

(1) 正の極を囲む半対頂角 $\theta_1 - \beta_0$ の錐内で、分子軸はその基本位置を取り続ける。

(2) 負の極を囲む半対頂角 $\theta_0 - \beta_0$ の錐内で、同じようになる。

(3) 他のすべての分子の軸の方向が負の極を囲む円錐面を形成し、方向は傾き $\theta_1 + \beta_0$ である。

X_0 が D より大きいとき、第 2 グループはない。 X_1 が D より大きいとき第 1 グループはない。

それゆえ、鉄の状態は、見かけ上、消磁されているが、磁化されたことのない鉄片の状態とは異なる。

これを示すため、正の方向か負の方向のどちらかに作用する磁化力 X_2 の効果を考えよう。そのような力の最初の永久効果は分子軸が負軸と角 = $\theta_1 + \beta_0$ をなす分子の第 3 グループ上に生じる。

もし力 X_2 が負の方向に作用するなら、 $\theta_2 + \beta_0$ が $\theta_1 + \beta_0$ より小さくなるとすぐ、つまり、 X_2 が X_1 より大きくなるとすぐ、永久効果を生じ始める。しかし、もし X_2 が正の方向に作用すると、 $\theta_2 - \beta_0$ が $\theta_1 + \beta_0$ より小さくなるとすぐ、つまり、 $\theta = \theta_1 + 2\beta_0$ のとき、または X_2 が X_1 よりはるかに小さいあいだに、鉄の再磁化を始める。

それゆえ、私たちの仮説からみえることは——

鉄片が力 X_0 で磁化されたとき、その残留磁化を X_0 より大きい力を適用することなく増加させることはできない。 X_0 より小さい、逆の力はその残留磁化を消すのに十分である。

もし鉄が反対方向の力 X_1 によって、完全に消磁されたなら、 X_1 より大きな力を適用しないと、逆方向に磁化することはできないが、 X_1 より小さい正の力は鉄をそのもの的方向に再磁化を始めるのに十分である。

これらの結果はリッティ註 11、ヤコビ註 12、マリアニイニイ註 13、ジュール註 14らによって現実に観測されたことと無矛盾である。

註 11 *Phil. Mag.* 3, 1833.

註 12 *Pogg., Ann.*, 81, 367, 1834.

註 13 *Ann. de Chimie et de Physique*, 16, pp. 436 および 448, 1846.

註 14 *Phil. Trans.*, 1856, p. 287.

鉄および鋼の磁化の磁力と機械的な張力との関係の完結した説明がヴィーデマンの *Galvanismus* に与えられている。磁化の効果と捩りの効果の詳しい比較によって、ヴィーデマンは金属線の一時および永久捩れの実験から私たちが導いた弾性と塑性の考え方方が鉄と鋼の一時および永久磁化に同じ妥当性で適用できることを示している。

447.] マトウチ^{註 15} は磁気力が作用しているあいだの硬鉄棒の延伸は一時磁気を増加させることを見出した^{註 16}。

鉄棒の永久磁化は延伸されると増加し、圧縮されると減少する。

p. 93

したがって、鉄片が、最初、ある方向に磁化され、つぎに他の方向に引き延ばされたなら、磁化の方向は延伸の方向に近付こうとする。もし圧縮されたなら、磁化の方向は圧縮方向に垂直になろうとする。

これがヴィーデマンの実験結果を説明する。電流は鉛直導線を下向きに通っている。もし電流が流れているあいだ、または、電流が止まったあと、導線が右ねじの方向に捻られたなら、下の終端が北極になる。

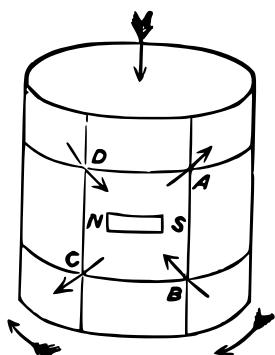


図 11.

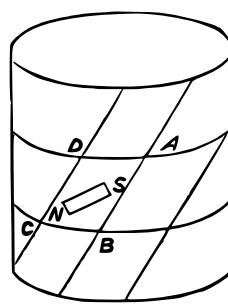


図 12.

ここでは下向きの電流が導線の各部分を、文字 *NS* で示されているように、接線方向に磁化している。

^{註 15} *Ann. de Chimie et de Physique*, 53, p. 385, 1858.

^{註 16} { ヴィラリはこのことは磁化力がある臨界値よりも小さいときのみ真であるが、磁化力がこの値を越えたとき、伸長は磁化の強度を減少させることを示している。Pogg., *Ann.* 126, p. 87, 1865.

軟鉄棒の振舞にかんする本文中の記述は小さな張力や低い磁場にたいしては成り立たない。}

右ねじ方向への導線の捻りは $ABCD$ 部分を対角線 AC にそう引き延ばし、対角線 BD にそって圧縮を引き起こす。それゆえ、磁化の方向は AC に近付き、 BD から遠ざかり、下端が北極になり、上端が南極になる。

磁化の磁石の大きさへの効果。

448.] 1842 年、ジュール^{註 17} は鉄棒がそれを囲むコイルを流れる電流によって磁性を与えられたとき、鉄棒が長くなることを見出している。ジュールは、後に^{註 18} ガラス管のなかの水中に棒を置いて、鉄の体積はこの磁化によって増えていないことを示し、横方向の大きさは収縮していると結論した。

p. 94 最後に、彼は鉄管の軸に電流を通し、管の外側を背中合わせて、管を閉じた磁気ソレノイドにし、磁化が管の軸に直角になるようにした。管の軸の長さは、この場合、短くなっていることが見出された。

彼は縦方向の圧力下の鉄棒も磁化されたとき、伸ばされることを見出した。しかし、棒がかなりの縦方向の張力下にあるとき、磁化の効果はそれを短くする。

これは直径 $1/4$ インチの導線にたいして張力が 600 ポンド重を越えたとき正しい。

硬い鋼線の場合、磁化力の効果は、導線が張力下にあっても圧力下にあっても、どの場合も導線を短くすることであった。長さの変化は磁化力が作用中であるかぎり続き、鋼の永久磁化による長さの変化は観測されなかった。

ジュールは鉄の伸びはおおよそ実際の磁化の平方に比例し、したがって消磁電流の第一の効果は導線を短くする^{註 19} ことであったことを見出した。

他方、ジュールは張力下の導線や鋼への短縮化効果は磁化と磁化電流の積に比例して変化することを見出した。ヴィーデマンはもし鉛直導線が南端を上端にして磁化され、そのとき、もし電流が導線を下方向に通るなら、導線の下端は、もし自由なら、上から見て時計の針の方向に捻られる、言葉を代

^{註 17} Sturgeon's *Annals of Electricity*, vol. viii. p. 219.

^{註 18} *Phil. Mag.*, xxx. 1847.

^{註 19} { シエルフォード ミドウェルは磁化力が非常に大きいとき、磁石の長さは磁化力が増加すると、減少することを示している。 *Proc. Roy. Soc.* xl, p. 109. }

えると、導線はもし縦方向の電流と磁化流のあいだの関係が右手の向きなら、導線は右ねじのように捻られることを見出している。

この場合、電流の作用と以前から存在していた磁化による合成磁化は導線まわりの右ねじ方向である。したがって、捻りは鉄が磁化されたとき鉄は磁化の方向に伸び、磁化の直角方向に縮むことを指している。これはジュールの結果と一致する。

磁化の理論のさらなる進展について、832-845節を見よ。

第VII章

磁気の測定。

449.] 主となる磁気の測定は磁石の磁軸と磁気モーメントを決めることと、与えられた場所での磁力の方向と強度を決めることである。

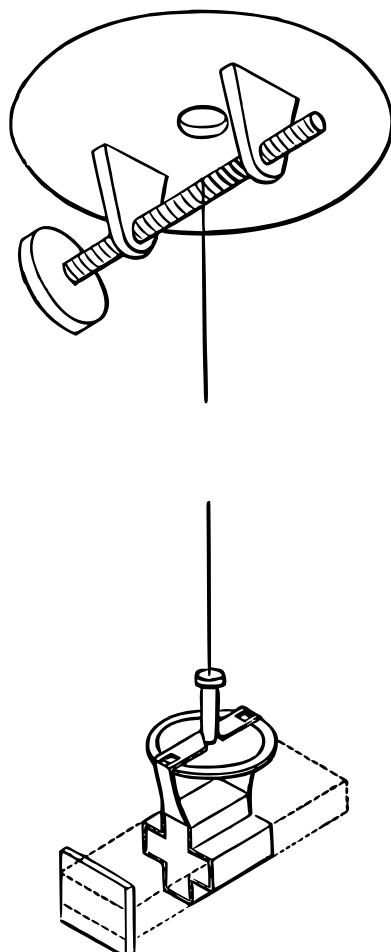
これらの測定は地表近くでおこなわれる所以、磁石はつねに地磁気の作用とともに重力の作用を受ける。磁石は鋼からできているので、その磁気は一部は永久的なものであり、一部は誘導されたものである。永久磁気は温度の変化、強い誘導、激しい強打によって変化し、誘導磁気は外部磁力の変動とともに変動する。

磁石に作用する力を観測するもっとも便利な方法は磁石を鉛直軸のまわりに自由に回転させるものである。通常のコンパスでは、これは磁石を鉛直なピボット上でつりあわせることによってなされる。ピボットの点が小さくなればなるほど磁力の作用を妨害する摩擦のモーメントは小さくなる。より洗練された観測では磁石は絹のファイバーから捩じることなく作られた糸によって吊るされる。糸は一重または二重にして十分な回数組合せて、平行なファイバーからなる糸を形成し、それぞれのファイバーは可能なかぎり等しい大きさの重量を支える。そのような糸を捩じる力は同じ強度のワイヤーを捩じる力よりはるかに小さく、捩じる力は磁石の方位角の観測値から計算できる。ピボットの摩擦力から生じる力の場合は、そうはいかない。

懸架ファイバーは固定されたナットの中で動く水平なネジを回すことにより上下される。ファイバーはネジすじにそってまかれ、したがって、ネジが回されたとき、懸架ファイバーはつねに同じ鉛直線の中を下がっている。 p. 96

懸架ファイバーは捩円と呼ばれる小さな水平な目盛環と鎧形の保持具を担い、保持具を指針が捩円のどの分点とも一致するように置くことができる。

保持具は磁石棒が、4つの側面の一つを一番上にして、磁軸を水平にして収まるように成形されている。



図：13.

p. 97

捩じれの零点を確かめるために、磁石と同じ重量の非磁気物体を鎧になかに置き、平衡になったとき、捩円の位置を確かめる。

磁石それ自身は固く焼き入れられた鋼片である。ガウスとウェーバーによると、その長さは少なくとも横方向の最大の大きさの8倍なければならない。これは磁石内部の磁軸の方向の永久性がもっとも重要な考察点であるときに必要である。運動の機敏さが必要とされる所では磁石は短くなければならず、横方向に磁化され、最大長を鉛直にして吊られている棒を使うことが磁力の突然の変化を観測するためには推奨される^{註1}。

450.] 磁石には向きを測定する装備が配置される。通常の目的のためには、磁石の端に点をつけ、その端の下に分割目盛環を置き、分割目盛環によって、磁石の向きを、吊り糸と針の点によって決まる平面内に目を置いて読みとる。

より正確に観測するためには、磁石に平面鏡を固定し、鏡の法線を磁化軸と可能なかぎり近くで一致させる。これがガウスとウェーバー

^{註1} Joule, *Proc. Phil. Soc., Manchester*, Nov. 29, 1864. Fig. 13.

が採用した方法である。

もう一つの方法として、磁石の一端にレンズを取り付け、他端にガラスに刻印された物差を取り付ける方法がある。物差からレンズまでの距離はレンズの主焦点の長さに等しい。物差の零点とレンズの光学中心を結ぶ直線は可能なかぎり磁軸と一致しなければならない。

懸架された装置の向きを測定するこれらの光学的な方法は多くの物理研究にたいして非常に重要なので、ここでその数学理論を考えることとする。

鏡法の理論。

向きを決めるべき装置は鉛直軸のまわりに回転できるとする。この軸は一般にファイバーかワイヤーで、それによって装置が吊るされている。鏡は真の平面で、鏡から数メートルの距離に置かれたミリメートルの物差を反射により明瞭に見ることができる。

鏡の中央をとおる法線は懸架の軸上の1点を通らなければならず、また、正確に水平でなければならない。この法線を装置の視準線ということにする。

なすべき実験のあいまに視準線の平均方向をおおよそ確かめたあと、望遠鏡を鏡の前に適当な距離をおいて、鏡の水準のすこし上に設置する。

望遠鏡は鉛直面内で動かすことができ、鏡の真上にある懸架ファイバーに向かれており、固定マークが視線中に対物レンズからの水平距離が対物レンズから鏡の距離の2倍に等しい所に立てられる。もし可能なら、このマークは壁か、そのほかの固定された対象の上にくるように、装置を配置すべきである。望遠鏡をとおして、マークと懸架ファイバーを同時に見るために、対物レンズ上に鉛直直径にそってスリットをもつ蓋を置くことができる。これはほかの観測をするとき、取り除かれる。望遠鏡をマークが望遠鏡の焦点にある鉛直なワイヤーと一致するようにはっきり見えるように調整する。錘線を対物レンズの光学中心の前面近くを通り、望遠鏡の下まで吊り下がるように調整する。望遠鏡の下、錘線のすぐ後ろに、目盛が等分された物差を、マークと懸架ファイバーと錘線を中に含む平面によって直角に2分されるように置く。床から物差の高さと対物レンズの高さの和は鏡の高さの2倍に等しい。ここで望遠鏡を鏡に向け、観測者はその中に物差の反射像を見る。も

p. 98

し錐線が物差を横切る物差の部分が望遠鏡の鉛直ワイヤーと一致するように見えるなら、鏡の視準線はマークと対物レンズの光学中心を通る面に一致する。もしワイヤーが物差の他の分点と一致するなら、視準線の角位置は次のようにして見出される：

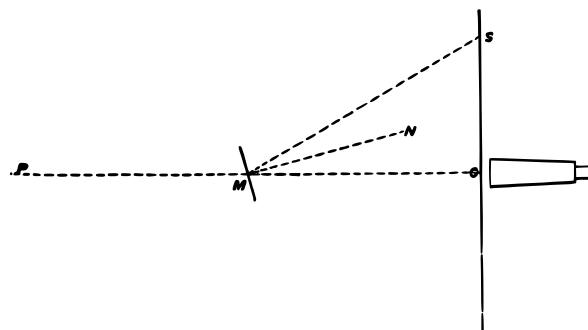


図 14.

紙面を水平面とし、いろいろな点がこの面上に射影されているとする。 O を望遠鏡の対物レンズの中心とし、 P を固定マークとする。 P と望遠鏡の鉛直ワイヤーは対物レンズにかんする共役焦点^{註2}とする。 M を OP が平面鏡を横切る点とする。 MN を鏡の法線とする。このとき、 $OMN = \theta$ は視準線が固定面となす角である。 MS を OMS と MNS がつくる面内の、角 $NMS = OMN$ となるような直線とすると、 S は反射によって望遠鏡の鉛直ワイヤーと一致するように見える物差の部分である。さて、 MN は水平なので、図 14 の射影角 OMN と NMS は等しく、 $OMS = 2\theta$ である。したがって $OS = OM \tan 2\theta$ である。

それゆえ、物差の目盛を使って OM を測る必要がある。そのとき、もし s_0 が錐線と一致する物差の目盛で、 s が観測された目盛なら、

$$s - s_0 = OM \tan 2\theta,$$

であり、したがって s が分る。 OM を測るとき、もし鏡が背面を銀メッキされたガラスなら、仮想反射面はガラスの前面から $= \frac{t}{\mu}$ だけ後ろにあることを憶えておかなければならない。ここで t はガラスの厚さ、 μ は屈折率である。

^{註2} 訳注：光軸上の光源とその像が結ばれる点。

また、もし懸架線が反射点を通らなければ、 M の位置は θ とともに変わることも憶えておかなければならない。したがって、可能な時は、鏡の中心が懸架線と一致するようにすることが推奨される。

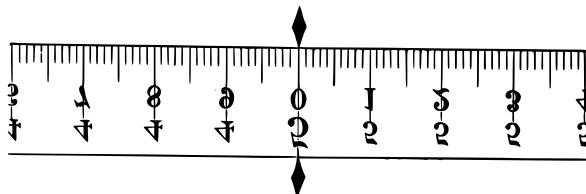


図 15.

特に、大角度の運動を観測しなければならないとき、懸架線を軸とする凹円柱面の形の物差を作ることも推奨される。このとき、角度はただちに正接表を参照せずに弧度で観測される。物差は円柱軸が懸架ファイバーと一致するように注意深く調整しなければならない。物差の上の数は、負数の読みを避けるように、一端から他端へつねに同じ方向に振られるべきである。図 15 は鏡と反転望遠鏡を使った物差の中央付近を表現している。

この観測方法は運動がゆっくりしているとき最良である。観測者は望遠鏡のもとに座り、物差の像が望遠鏡の鉛直ワイヤーの右左へ動くのを見る。観測者は時計を横に置いて与えられた物差の目盛がワイヤーを通る瞬間を記録することができる。もしくは、与えられた時計の刻みに通りすぎる物差の目盛を記録できる。また、振動のそれぞれの極大を記録することもできる。

p. 100

動きがさらに速いとき、振動の極点で止まる瞬間をのぞいて物差の目盛を読むことは不可能になる。明確なマークを物差の分かっている目盛の所に置き、このマークを通過する瞬間を記録する。

装置がひじょうに軽く、力が変動するとき、運動は即時に素早くおこり、望遠鏡をとおした観測は役に立たない。この場合、観測者は物差を直接に見て、ランプによって物差に投射される鉛直ワイヤーの像の運動を観測する。

鏡で反射され対物レンズで屈折された物差の像が鉛直ワイヤーと一致するから、鉛直ワイヤーの像は、もし十分に照射されたなら、物差と一致するようになることは明らかであろう。これを観測するためには、部屋を暗くし、ランプの集光線を対物レンズをとおして鉛直ワイヤーに投射する。その運動

を目で追うことができ、像が止まるときの物差の目盛を目で固定し、ゆっくりと読みとることができる。もし物差の与えられた点を輝点が通過する瞬間を記録する必要なら、ピンまたは光るワイヤーを通過時間に反射光を返すように置くとよい。

十字線に代えて隔膜にあけた小さな穴を使うと、像は物差の上で左右に動く小さな照射された点となり、物差を写真紙で覆われた円柱に代え、円柱を水平軸のまわりに時計仕掛けで回転させると、スポット光が曲線を辿り、後に曲線を可視化することができる。この曲線の横軸はそれぞれ特定の時間に対応し、縦軸はその時間での鏡の向きに対応する。このようにして、キューリ立天文台やその他の天文台で地磁気のすべての要素の連続的な自動記録システムが確立された。

望遠鏡を省き、鉛直ワイヤーをその後ろに置かれたランプで照射することもある。鏡は凹面で、光の帯を横切る暗線として物差の上のワイヤーの像を形成する。

451.] キューリ天文台可搬装置では、磁石は管の形で作られ、一端にレンズを持ち、他端にガラス尺を持ち、ガラス尺はレンズの主焦点にあるように調整される。光はガラス尺の背後から入れられ、レンズを通したあと、望遠鏡を使って視られる。

物差はレンズの主焦点にあるから、物差の任意の目盛からきた光線はレンズから平行に出る。もし望遠鏡が遠くの天体を見るように調整されているなら、望遠鏡の十字線と光学的に一致して物差を示す。もし物差の与えられた目盛が十字線の交わりと一致するなら、目盛とレンズの光学中心を結ぶ直線は望遠鏡の視準線と平行でなければならない。磁石を固定し、望遠鏡を動かすことによって、物差の目盛の角度値を確かめることができ、磁石が吊るされ、望遠鏡の位置が知られているとき、任意の瞬間での磁石の位置を十字線と一致する物差の目盛を読みとることによって決めることができる。

望遠鏡は懸架ファイバーを中心とする腕に支えられ、望遠鏡の位置は器具の方位目盛環上の副尺によって読み取られる。

この配置は全装置が 1 つの三脚上で支えられている小型可搬磁力計に適しており、その中では偶然の擾乱による振動は急激に静まる。

磁石の軸方向と地磁気の方向の決定。

452.] 磁石に座標軸系を定める。座標軸の z 軸は棒の長さの方向で、 x, y 軸は平行 6 面体と考えている棒の側面に垂直とする。

l, m, n および λ, μ, ν は、それぞれ、磁軸と視準線がこれらの軸となす角度とする。

M を磁石の磁気モーメント、 H を地磁気の水平成分、 Z を鉛直成分、 δ を H が作用する方位角で、北から西に数えられているとする。

ζ を視準線の方位角の観測値とし、 α を鎧形保持具の方位角、 β を捩円の目盛の読みとすると、 $\alpha - \beta$ は懸架ファイバーの下端の方位角である。 γ は捩じれがないときの $\alpha - \beta$ の値であるとすると、 α を小さくしようとする捩力のモーメントは $\tau(\alpha - \beta - \gamma)$ となる。ここで τ はファイバーの性質に依存する捩じり係数である。

p. 102

x 軸と視準線の xz 面への射影のあいだの角、 λ_x を決めるために、 y が鉛直上向き、 z が北向き、 x が西向きになるよう鎧を固定する。つぎに磁石をはずし、 z 軸のまわりに角度 π だけ回し、磁石をこの反転した位置に置き換え、 y が下向き、 x が東向きのとき、視準線方位角 ζ を観測すると、

$$\zeta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \lambda_x, \quad (1)$$

$$\zeta' = \alpha - \frac{\pi}{2} + \lambda_x, \quad (2)$$

である。したがって、

$$\lambda_x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta), \quad (3)$$

である。

つぎに、鎧形保持具を懸架ファイバーにかけ、保持具のなかに磁石をおき、 y が鉛直上向きになるように注意深く調整すると、 α を増加させようとする力のモーメントは

$$MH \sin m \sin(\delta - \alpha - \frac{\pi}{2} + l_x) - \tau(\alpha - \beta - \gamma); \quad (4)$$

である。ここで l_x は x 軸と xz 面上の磁軸の射影のあいだの角である。

しかし、もし ζ が視準線の観測された方位角なら、

$$\zeta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \lambda_x, \quad (5)$$

であり、したがって力は

$$MH \sin m \sin(\sigma - \zeta + l_x - \lambda_x) - \tau(\zeta + \lambda_x - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma), \quad (6)$$

と書ける。

装置が平衡状態のとき、この量は特定の ζ の値にたいして零である。

装置が静止に至らず、振動状態で観測しなければならないとき、平衡位置に対応する ζ の値は 735 節で記述することになる方法によって計算できる。

p. 103

捩力が磁力のモーメントとくらべて小さいとき、その角度の正弦の代わりに $\delta - \zeta + l_x - \lambda_x$ と置くことができる。

もし捩円の読み β に 2 つの異なる値 β_1, β_2 を与えたなら、そしてもし ζ_1, ζ_2 が ζ の対応する値なら、

$$MH(\zeta_2 - \zeta_1) \sin m = r(\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2), \quad (7)$$

つまり、もし

$$\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2} = \tau', \text{ とおくと } \tau = \tau' MH \sin m, \quad (8)$$

であり、式 (6) は、 $MH \sin m$ で割ると、

$$\delta - \zeta + l_x - \lambda_x - \tau'(\zeta + \lambda_x - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma) = O, \quad (9)$$

となる。

もし y が下向きになるよう磁石をひっくり返し、装置を y が正確に鉛直になるまで調整すると、もし ζ' が新しい方位角の値、 δ' が対応する伏角なら

$$\delta' - \zeta' - l_x + \lambda_x - \tau'(\zeta' - \lambda_x + \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma) = 0, \quad (10)$$

であり、したがって

$$\frac{\delta + \delta'}{2} = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta') + \frac{1}{2}\tau'\{\zeta + \zeta' - 2(\beta + \gamma)\}, \quad (11)$$

である。

ここで、 τ' の係数が可能なかぎり零に近くなるように、捩円の読みが調整されなければならない。この目的のため、捩じれがないときの $\alpha - \beta$ の値、

γ を決めなくてはならない。 τ' は小さいから、それほどの精度は要求されない。磁石と同じ重さの捩じり棒を使うもう一つの方法がある。棒はそのなかに磁気モーメントが主磁石の磁気モーメントの $\frac{1}{n}$ の非常に小さい磁石を含んでいる。 τ は同じまま維持されるから、 τ' は $n\tau'$ になり、もし ζ_1, ζ'_1 が捩じり棒で見出された ζ の値なら、

$$\frac{\delta + \delta'}{2} = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta'_1) + \frac{1}{2}n\tau'\{\zeta_1 + \zeta'_1 - 2(\beta + \gamma)\}, \quad (12)$$

である。

この式を (11) から引くと、

$$2(n-1)(\beta + \gamma) = (n + \frac{1}{\tau'})(\zeta_1 + \zeta'_1) - (1 + \frac{1}{\tau'})(\zeta + \zeta'), \quad (13)$$

である。

このようにして $\beta + \gamma$ の値を見つけると、捩円の読み β が、装置の通常の位置で

$$\zeta + \zeta' - 2(\beta + \gamma) = 0, \quad (14)$$

にできるかぎり近くなるまで、変更されるべきである。

p. 104

このとき、 τ' はひじょうに小さい数値だから、そして、その係数はひじょうに小さいから、 δ の式の第 2 項の値は値がまったく正確に知られていない量、 τ', γ の値の小さな誤差にたいしてそれほど変化しない。

実験中、伏角が一定にとどまるなら、磁気伏角、 δ 、の値をかなり正確にこのように見つけることができ、 $\delta' = \delta$ と仮定することができる。

高度の正確さが要請されるとき、実験中の δ の変動を考慮する必要がある。この目的のため、もう一つの懸架磁石の観測を、いろいろな ζ の値が観測される同じ瞬間に行うべきである。もし η, η' が ζ, ζ' に対応する第 2 磁石の方位角の観測値なら、そして、 δ, δ' が δ の対応する値なら、

$$\delta' - \delta = \eta' - \eta, \quad (15)$$

である。

したがって、 δ の値を見出すためには、(11) に補正

$$\frac{1}{2}(\eta - \eta'),$$

を加えなければならない。それゆえ、最初の観測のときの伏角は

$$\delta = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta' + \eta - \eta') + \frac{1}{2}\tau'(\zeta + \zeta' - 2\beta - 2\gamma), \quad (16)$$

である。

磁石のなかの磁軸の方向を見出すために、(9) から (10) を引き、(15) を加えると

$$l_x = \lambda_x + \frac{1}{2}(\zeta - \zeta') - \frac{1}{2}(\eta - \eta') + \frac{1}{2}\tau'(\zeta - \zeta' + 2\lambda_x - \pi), \quad (17)$$

となる。

x 軸が鉛直上向き、下向きであるように、その 2 辺上の棒にかんする実験をくり返し、 m の値を見つけることができる。もし視準軸を調節できるなら、厳密に反転していない磁石から生じる誤差をできるかぎり小さくするよう、視準軸を磁軸とできるかぎり一致させるべきである^{註3}。

磁力の測定について。

453.] 磁力のもっとも重要な測定は磁石の磁気モーメント、 M 、と地磁気の水平成分、 H 、を決める実験である。一般にこれは 2 つの実験結果を組み合わせて行われる。その一つはこれら 2 つの量の比を決め、もう一つは 2 つの量の積を決める。

p. 105

磁気モーメントが M である無限に小さい磁石による磁力の強度は、磁石の軸の正の方向に、磁石の中心から距離 r の点で、

$$R = 2 \frac{M}{r^3}, \quad (1)$$

であり、 r 方向を向いている。もし磁石が有限の大きさで球形、軸の方向に一様に磁化されているなら、この力の値は厳密である。もし磁石が長さ $2L$ のソレノイド棒磁石なら、

$$R = 2 \frac{M}{r^3} \left(1 + 2 \frac{L^2}{r^2} + 3 \frac{L^4}{r^4} + \&c.\right), \quad (2)$$

^{註3} W. Swan による論文、‘Imperfect Inversion,’ *Trans. R. S. Edin.*, vol. xxi (1855), p. 349 を見よ。

である。

もし磁石がどのような種類であっても、磁石の大きさがすべて、 r と較べて小さいかぎり、

$$R = 2 \frac{M}{r^3} \left(1 + A_1 \frac{1}{r} + A_2 \frac{1}{r^2} + \&c. \right), \quad (3)$$

である。ここで $A_1, A_2, \&c.$ は棒の磁化の分布に依存する係数である。

H を任意の場所での地磁気の水平部分の強度とする。 H は磁極方向を向いている。 r を磁西にむかって測ると、 r の先端での磁力は北に H 、西に R である。合力は西にむかって測ると、磁気子午面と角 θ をなし、

$$R = H \tan \theta, \quad (4)$$

のようである。

したがって、 $\frac{R}{H}$ を決めるため、次のように進む：—

磁北の方向が確かめられており、それほど大きくない磁石が前の実験のように吊り下げられ、偏向磁石 M が中心が懸架磁石の中心から距離 r に、同じ水平面内で、真の磁東に、置かれる。

M の軸は水平で r 方向になるように注意深く調整される。

懸架磁石は M が近くに運ばれる前にも、また所定の場所に置かれたあとにも、観測される。もし θ が観測された偏角なら、もし近似公式 (1) を使うと、

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} \tan \theta; \quad (5)$$

となる。つまり、もし公式 (3) をつかうと、

$$\frac{1}{2} \frac{H}{M} r^3 \tan \theta = 1 + A_1 \frac{1}{r} + A_2 \frac{1}{r^2} + \&c. \quad (6)$$

である。

p. 106

ここで、偏角 θ は高精度で観測できるが、両磁石が固定され磁石の中心がマークで定義されていないかぎり、磁石の中心間の距離 r は正確に決めるとのできない量であることを心に留めておかなければならない。

この困難はこのように克服できる：

磁石 M を懸架磁石の両側に東西に伸びる目盛をつけられた物差の上に置く。 M の終端間の中点が磁石の中心と見なされる。この点を磁石の上にマー

クすることができ、その位置を物差上で観測できる。つまり、両端の位置を観測し、算術平均をとる。これを s_1 と呼び、吊るされた磁石の懸架ファイバーの直線が、生成されたとき、物差を s_0 で切るとすると、 $r_1 = s_1 - s_0$ である。ここで s_1 は正確に、 s_0 は近似的に知られている。 s_1 を M のこの位置で観測された偏角とする。

さて、 M をひっくり返す。すなわち、物差上で磁石の端をひっくり返して置く。このとき、 r_1 は同じになるが、 M と、 $A_1, A_3, \&c.$ は符号を変え、したがって、もし θ_2 が西への偏角なら、

$$-\frac{1}{2} \frac{H}{M} r_1^3 \tan \theta_2 = 1 - A_1 \frac{1}{r_1} + A_2 \frac{1}{r_1^2} + \&c., \quad (7)$$

である。

(6) と (7) の算術平均をとると、

$$\frac{1}{4} \frac{H}{M} r_1^3 (\tan \theta_1 - \tan \theta_2) = 1 + A_2 \frac{1}{r_1^2} + A_4 \frac{1}{r_1^4} + \&c., \quad (8)$$

である。

さて、 M を吊るされた磁石の西側に移動し、物差の上の $2s_0 - s_1$ とマークされた点を中心にして置く。軸が最初の位置にあるとき、偏角が θ_3 、第 2 の位置にある時、 θ_4 とすると、前のように、

$$\frac{1}{4} \frac{H}{M} r_2^3 (\tan \theta_3 - \tan \theta_4) = 1 + A_2 \frac{1}{r_2^2} + A_4 \frac{1}{r_2^4} + \&c., \quad (9)$$

である。

吊られた磁石の中心の真の位置は s_0 ではなく $s_0 + \sigma$ であると考えると、

$$r_1 = r - \sigma, \quad r_2 = r + \sigma, \quad (10)$$

そして

$$\frac{1}{2} (r_1^n + r_2^n) = r^n \left\{ 1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\sigma^2}{r^2} + \&c. \right\}; \quad (11)$$

であり、 $\frac{\sigma^2}{r^2}$ はもし測定が注意深くなされれば、無視できるから、 r^n について、 r_1^n と r_2^n の算術平均をとることができることは確かである。

したがって、(8), (9) の算術平均をとって、

$$\frac{1}{8} \frac{H}{M} r^3 (\tan \theta_1 - \tan \theta_2 + \tan \theta_3 - \tan \theta_4) = 1 + A_2 \frac{1}{r^2} + \&c., \quad (12)$$

であり、

$$\frac{1}{4} (\tan \theta_1 - \tan \theta_2 + \tan \theta_3 - \tan \theta_4) = D, \quad (13)$$

とすると

$$\frac{1}{2} \frac{H}{M} Dr^3 = 1 + A_2 \frac{1}{r^2} + \&c.,$$

である。

454.] さて D, r を正確に決定できるとみなすことができる。

量 A_2 はどのような場合も $2L^2$ を越えることはできない。ここで L は磁石の長さの半分で、したがって、 r が L と較べてかなりあるとき、 A_2 の中の項を無視し、 H の M にたいする比をただちに決めることができる。

A_4 の項やすべての高次項は安全に無視することができる。

A_2 を消去するために、実験をくり返し、距離 $r_1, r_2, r_3, \&c.$, を使い、 D の値が $D_1, D_2, D_3, \&c.$, であるとすると、

$$D_1 = \frac{2M}{H} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{A_2}{r_1^5} \right), \quad D_2 = \frac{2M}{H} \left(\frac{1}{r_2^3} + \frac{A_2}{r_2^5} \right), \&c.\&c.,$$

である。

これらの式の確率誤差が等しいと考える。誤差が D の決定値のみに依存するなら、たしかに、そうなる。そして、もし r について不確定性がないなら、それぞれの式に r^{-3} をかけて、結果をたしあわせて、一つの式を得、それぞれの式に r^{-6} をかけて、結果をたしあわせて、もう一つの式を得、それぞれの式の確率誤差が同じと考えられるときの誤りを免れない測定の組合せの理論の一般規則にしたがう。

$$D_1 r_1^{-3} + D_2 r_2^{-3} + D_3 r_3^{-3} + \&c. \quad \text{を} \quad \Sigma(Dr^{-3})$$

と書き、他の記号群に和にたいする同様の式を使うと、2つの合成方程式を

$$\Sigma(Dr^{-3}) = \frac{2M}{H} \{ \Sigma(r^{-6}) + A_2 \Sigma(r^{-8}) \},$$

$$\Sigma(Dr^{-5}) = \frac{2M}{H} \{ \Sigma(r^{-8}) + A_2 \Sigma(r^{-10}) \},$$

と書くことができる。したがって

$$\frac{2M}{H} \{ \Sigma(r^{-6})\Sigma(r^{-10}) - [\Sigma(r^{-8})]^2 \} = \Sigma(Dr^{-3})\Sigma(r^{-10}) - \Sigma(Dr^{-5})\Sigma(r^{-8}),$$

であり、

$$A_2 \{ \Sigma(Dr^{-3})\Sigma(r^{-10}) - \Sigma(Dr^{-5})\Sigma(r^{-8}) \} = \Sigma(Dr^{-5})\Sigma(r^{-6}) - \Sigma(r^{-3})\Sigma(r^{-8}),$$

p. 108

である。

これらの式から導かれた A_2 の値は磁石 M の長さの平方の半分より小さいはずである。もしそうでないなら、観測でなんらかの誤りがあったと考えられる。この観測法とその修正法はガウスによって「磁気協会の第一報告」で与えられた。

観測者が距離 r_1 と r_2 で 2 系列の実験のみを行うことができるとき、これらの実験から導かれる $\frac{2M}{H}$ と A_2 の値は

$$Q = \frac{2M}{H} = \frac{D_2 r_1^5 - D_1 r_2^5}{r_1^2 - r_2^3}, \quad A_2 = \frac{D_2 r_2^3 - D_1 r_1^3}{D_1 r_1^5 D_2 r_2^5} r_1^2 r_2^2,$$

である。

もし δD_1 , δD_2 が観測された偏角 D_1 , D_2 の実際の誤差なら、計算結果 Q の実際の誤差は

$$\delta Q = \frac{r_1^5 \delta D_1 - r_2^5 \delta D_2}{r_1^2 - r_2^2},$$

となる。

もし誤差 δD_1 , δD_2 が独立と考えられるなら、どちらかの確率誤差が δD なら、 Q の計算値の誤差の確率値は δQ となる。ここで

$$(\delta Q)^2 = \frac{r_1^{10} + r_2^{10}}{(r_1^2 - r_2^2)^2} (\delta D)^2,$$

である。

もしこれらの距離の一つ、たとえば、小さい方が与えられていると考えるなら、大きい方の距離の値は δQ を最小にするように決めることができる。この条件は r_1^2 の 5 次方程式へ導き、それは r_2^2 より大きい唯一つの実数根を持っている。これから、 r_1 の最良の値は

$$r_1 = 1.3189 r_2^{\frac{1}{5}}$$

であることが分かる。

もし 1 観測のみがとられるなら、最良の距離は

$$\frac{\delta D}{D} = \sqrt{3} \frac{\delta r}{r}, \text{ 註 } 5$$

のときである。ここで δD は偏角の測定の確率誤差であり、 δr は距離の測定の確率誤差である。

p. 109

正弦法。

455.] ここで記述してきた方法は、偏角の正接が磁力の尺度だから、正接法と呼ぶことができる。

もし直線 r_1 を、東西に測るのではなく、偏向させられた磁石の軸と直角になるまで調整するなら、 R は前と同じだが、吊られた磁石が r に垂直であり続けるためには、力 H の r 方向に分解された部分が R と同じ大きさで反対方向でなければならない。したがって、もし θ が偏角なら $R = H \sin \theta$ である。

この方法は正弦法と呼ばれる。これは R が H より小さいときのみ適用できる。

キュート天文台可搬装置ではこの方法が採用された。吊るされた磁石は装置の一部から下げられ、装置は望遠鏡と偏角磁石のための腕とともに回転する。全体の回転は方位角目盛環上で測定される。

まず、装置を望遠鏡の軸が擾乱を受けない状態で磁石の視準線の平均位置と一致するように調整する。もし磁石が振動しているなら、磁北の真の方位角は透明な物差の振動の極大点を観測し、方位角目盛環の適当な補正を行うことによって見出される。

註 ⁴ Airy の *Magnetism* を見よ。

註 ⁵ { この場合、 A_2 の項を無視すると

$$(\delta Q)^2 = (\delta D)^2 r^6 + 9 \frac{Q^2}{r^3} (\delta r)^2,$$

が成り立ち、これは

$$\frac{\delta D}{D} = \sqrt{3} \frac{\delta r}{r},$$

のとき最小である。}.

つぎに、偏向する磁石をまっすぐなロッド(桿)上に置く。ロッドは望遠鏡の軸に直角に回転装置の軸を通り、偏向磁石の軸が吊られた磁石の中心をとおる直線にあるように調整される。

つぎに、回転装置の全体を吊られた磁石の視準線が再び望遠鏡の軸と一致するまで動かす。もし必要なら、新しい方位角の読みを振動の極大点で物差の読みを使って修正する。

補正された方位角の差が偏角を与え、そのあと、 D の式のなかで $\tan \theta$ の代わりに $\sin \theta$ と置くことをのぞいて、正接法と同じように進む。

この方法では、懸架ファイバーの捩じれに対する補正はない。ファイバー、望遠鏡、磁石は各観測で同じであるからである。

p. 110

この方法では、2つの磁石の軸はつねに直角であり、したがって、長さの補正はより正確に行うことができる。

456.] このようにして偏向磁石のモーメントの地磁気の水平成分にたいする比を測定したので、つぎに、これらの量の積を見出さなければならない。これは磁石の軸が磁気子午面から振れるとき、同じ磁石を回そうとする地磁気の偶力のモーメントを決めるこによっておこなわれる。

この測定を行う2つの方法がある。動的方法では、地磁気の作用のもとでの磁気の時間変化が観測される。静的方法では、磁石が測定可能な静的偶力と地磁気のあいだの平衡状態に保たれる。

動的方法はより単純な装置でよく、絶対測定にたいしてより正確であるが、かなりの時間がかかる。静的方法はほぼ瞬間的な測定を可能にし、それゆえ、磁力の強度の変化を辿るのに役に立つが、より精密な装置を必要とし、絶対測定にたいしてそれほど正確ではない。

振動法。

磁石を磁軸を水平にして吊るし、小さな弧をなすように振動させる。振動をすでに記述した任意の方法を使って観測する。

振動の弧の中点に対応する物差の上の点を選ぶ。物差のこの点を正の方向に通過する瞬間を観測する。もし磁石が同じ点に戻る前に十分な時間があるなら、負の方向へ通過する瞬間も観測し、この過程を $n + 1$ 回正方向へ、 n

回負方向への通過を観測するまで続ける。もし振動が速くて引き続く各通過を観測できないなら、観測される通過が交互に正負になるように注意して、3度または5度に1回、通過を観測する。

観測された通過時間を T_1, T_2, T_{2n+1} とすると、もし

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} T_1 + T_3 + T_5 + \&c. + T_{2n-1} + \frac{1}{2} T_{2n+1} \right) = T_{n+1},$$

$$\frac{1}{n} (T_2 + T_4 + \&c. + T_{2n-2} + T_{2n}) = T'_{n+1};$$

と置くと、 T_{n+l} は正の通過の平均時間で、もし点を適切に選んでいたなら、負の通過の平均時間 T'_{n+1} と一致するはずである。これらの結果の平均が中点通過の平均時間としてとることができる。p. 111

多数回の振動が起こったあとだが、振動が不明確で不規則的になるまえに、観測者はもう一つの系列の観測を行い、それから第2系列の中点通過の平均時間を導く。

振動の周期を第1系列の観測か、第2系列からのどちらから計算することによって、2系列の中点通過のあいだの合間に起こっている全振動数を確かめることができるはずである。2系列の中点通過平均時間のあいだの間隔をこの振動数で割ると、振動の平均時間が得られる。

つぎに、観測された振動時間が振子の振動で使われたものと同種の公式によって無限小弧のなかの振動時間に戻される。もし振動が急速に振幅を減少させることができるとわかるなら、抵抗にたいするもう一つの補正がある。740節参照。しかし、これらの補正は、磁石がファイバーに架けられ、振動弧が数度にすぎないときは、非常に小さい。

磁石の運動方程式は

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + MH \sin \theta + HM\tau'(\theta - \gamma) = 0,$$

である。ここで θ は磁軸と力 H の方向のあいだの角度、 A は磁石と吊るされた装置の慣性モーメント、 M は磁石の磁気モーメント、 H は水平磁力の強度、 $MH\tau'$ は捩じれ係数である。 τ' は452節でのように決められ、非常に小さな量である。平衡にたいする θ の値は

$$\theta_0 = \frac{\tau' \gamma}{1 + \tau'} \quad \text{非常に小さい角度。}$$

であり、小振幅値にたいする方程式の解は

$$\theta = C \cos(2\pi \frac{t}{T} + \alpha) + \theta_0,$$

である。ここで T は周期、 α は定数、 C は振幅、そして

$$T^2 = \frac{4\pi^2 A}{MH(1 + \tau')};$$

p. 112

である。したがって MH の値は

$$MH = \frac{4\pi^2 A}{T^2(1 + \tau')},$$

であると分かる。

ここで T は観測から決められた 1 振動を完了する時間である。慣性能率 A はもし磁石が規則性のある形なら重さと大きさを測るか、慣性能率が分かれている物体と力学過程を比較するかのどちらかによって、すべての磁石にたいして厳密に見出されている。

この MH の値を以前に得られた $\frac{M}{H}$ の値と組み合わせて、

$$M^2 = (MH)\left(\frac{M}{H}\right) = \frac{2\pi^2 A}{T^2(1 + \tau')} Dr^3,$$

および

$$M^2 = (MH)\left(\frac{M}{H}\right) = \frac{8\pi^2 A}{T^2(1 + \tau')Dr^3},$$

が得られる。

457.] H, M は 2 系列の実験のあいだ一定であり続けると考えてきた。 H のゆらぎは、このあとすぐに記述される、2 本吊り磁力計の同時観測によつて確かめることができる。もし磁石が長く使われ続けており、実験中、温度の変化や打撃にさらされていないなら、 M の永久磁気に依存する部分は一定であると仮定できる。しかし、鋼磁石はすべて外部磁力の作用に依存する磁気を誘導することができる。

さて、磁石を偏角の実験に採用したとき、磁石はその軸を東西にして置かれ、地磁気の作用は磁石の横向で、 M を増減させることはない。磁石が振動させられたとき、磁石の軸は南北方向で、地磁気の作用は軸方向に磁石を磁

化させようとし、それゆえ、その磁気モーメントを量 kH だけ増やそうとする。ここで k は磁石の実験で見出される係数である。

この誤差の源を k を計算することなく避ける 2 つの方法がある。実験は、もう一つの偏角磁石を使ったとき、またそれ自身が揺れているとき、磁石が同じ条件であるように配置される。

偏向磁石を軸が北を指し、吊られた磁石の中心から距離 r に、直線 r が磁氣子午面と余弦が $\sqrt{\frac{1}{3}}$ である角をなすように、置くことができる。偏向磁石の吊られた磁石への作用は自分自身の方向に直角で、大きさは p. 113

$$R = \sqrt{2} \frac{M}{r^3},$$

に等しい。

ここで M は、振動の実験と同様、軸が北を指すときの磁気モーメントであり、したがって、誘導にたいしていかなる補正も行う必要がない。

しかし、偏向磁石のわずかな変位が導入する大きな誤差のため、この方法は極端に難しい。偏向磁石を逆転することによる補正をここでは使えないでの、対象が誘導係数を決めることがあるときをのぞいて、この方法にしたがうことはない。

次の方法では、振動のあいだ磁石は地磁気の誘導作用の影響を受けない。この方法は Dr. J. P. Joule^{註 6} による。

磁気モーメントが可能なかぎり等しい 2 つの磁石を用意する。偏角実験では、これらの磁石は別々に使われる。つまり、これらはより大きい偏角を生成するために吊るされた磁石の反対側に同時に置かれる。これらの実験では地磁気の誘導力は軸にたいして横向である。

これらの磁石の一方を吊るす。他方をその中心を吊られた磁石の中心の真下にし、軸を同じ方向にして、それと平行に置く。固定された磁石が吊られた磁石に作用する力は地磁気の方向とは逆方向である。もし固定された磁石がゆっくりと吊られた磁石に近付くと、振動時間が増加し、ある点まで来ると平衡は安定ではなくなり、この点を越すと、吊られた磁石が逆位置で振動する。このように実験することによって、地磁気の吊られた磁石への効果を正確に中立化する固定された磁石の位置が見いだされる。実験で見いだされ

^{註 6} Proc. Phil. S., Manchester, March 19, 1867.

p. 114

た距離で、2 磁石の軸を同じ方向に回し、2 磁石を平行になるように、互いにしっかりと結びつける。つぎに、それらを通常の方法で吊り、小さい弧でともに振動させる。

下の磁石は地磁気の上の磁石への効果を正確に中立化し、磁石はモーメントが等しいので、上の磁石は地球の下の磁石への誘導作用を中立化する。

それゆえ、 M の値は振動実験のときと、偏角の実験のとき、同じであり、誘導に対する補正は必要とされない。

458.] 水平磁力強度を確かめるもっとも正確な方法はいま記述した方法である。しかし、全系列の実験を 1 時間たらずで十分に正確に行なうことはできず、数分周期で起こる強度のどのような変化も観測を逃れる。したがって任意の瞬間の磁力の強度を観測するために、違った方法が必要とされる。

静的方法は水平面中で作用する静的偶力を使って磁石を振らせることからなる。 L を偶力のモーメントと、 M を磁石の磁気モーメント、 H を地磁気の水平成分、 θ を偏角とすると

$$MH \sin \theta = L,$$

である。したがって、もし L が θ を使って知られているなら、 MH を見いだすことができる。

偶力 L は 2 つの方法で生成される。一つはワイヤーの捩じり弾性によるもので、通常の捩じり秤と同様である。一つは吊られた装置の重量によるもので、2 本吊りと同様である。

捩じり秤では磁石は鉛直ワイヤーの端に結びつけられ、その上端が回され、その回転が捩じり目盛環を使って測られる。

このとき

$$L = \tau(\alpha - \alpha_0 - \theta) = MH \sin \theta$$

がなりたつ。ここで α_0 は磁軸が磁気子午面と一致するときの捩じり目盛環の読みの値であり、 α は実際の読みである。もし捩じり目盛環を回転し、磁石を磁気子午面にほとんど垂直に持つていき、

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

とするなら、

$$\tau(\alpha - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} + \theta') = MH(1 - \frac{1}{2}\theta'^2),$$

つまり

$$MH = \tau \left(1 + \frac{1}{2}\theta'^2\right) \left(\alpha - \sigma_0 - \frac{\pi}{2} + \theta'\right),$$

である。

p. 115

平衡時の磁石の偏角, θ' を観測することにより、 τ が分っているなら、 MH を計算することができる。

もし異なる時間の MH の相対的な値が知りたいだけなら、 M も τ も知っている必要はない。

同じワイヤーから非磁気物質を吊るし、その振動の時間を測定することによって、 τ を絶対測定で決めることがたやすくできる。このとき、もし A がこの物体の慣性モーメント、 T が 1 振動を完了する時間なら、

$$\tau = \frac{4\pi^2 A}{T^2},$$

である。

振り秤を使うことにたいする主な反対意見は α_0 の零読みが変化しやすいということである。磁石が北へむかって回る傾向から生じる、一定の振り力のもとで、ワイヤーは次第に永久的な捻りを獲得し、したがって、短い間隔で新たに振り円の零読みを決めることが必要になる。

2本吊り懸架。

459.] 2 本のワイヤーまたはファイバーによって磁石を吊る方法はガウスとウェーバーによって導入された。2 本吊りは多くの電気器具で使われているので、より詳しく調べることにする。懸架の一般的な外観は図 16 に示されている。図 17 は水平面上のワイヤーの射影を表現している。

AB と $A'B'$ は 2 本のワイヤーの射影である。

AA' と BB' はワイヤーの上下端を結ぶ直線である。

a と b は直線 AA' と BB' の長さである。

α と β はその方位角である。

W と W' はワイヤーの張力の鉛直成分である。

Q と Q' はその水平成分である。

h は AA' と BB' のあいだの鉛直距離である。

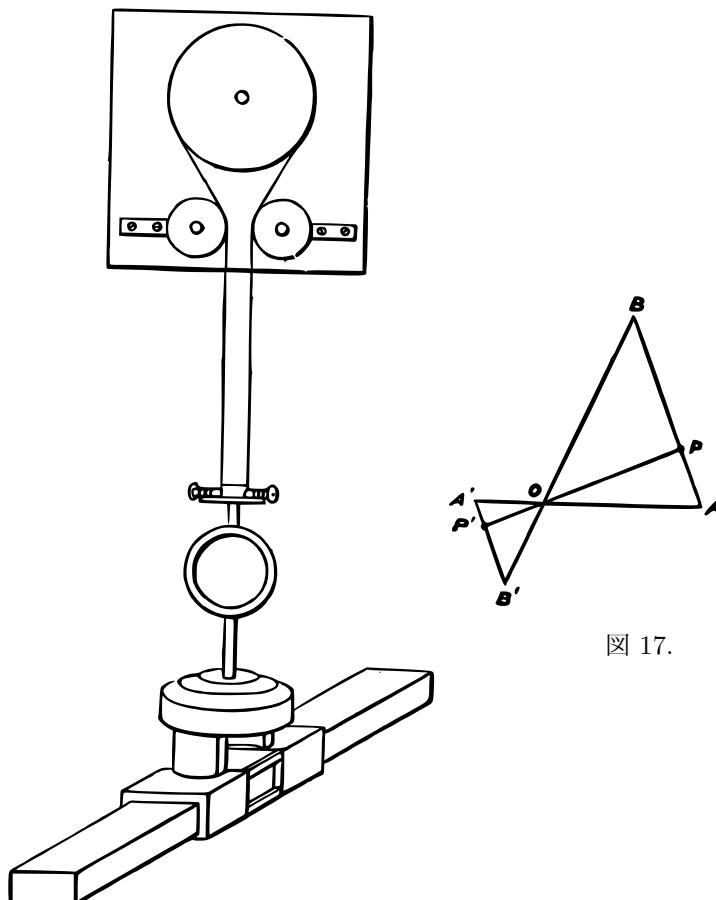


図 16.

図 17.

磁石に作用する力は——その重さ、地磁気から生じる偶力、ワイヤーの(もしあれば)捩じれとその張力である。これらのなかで、磁気の効果と捩じりの効果は偶力の性質を持つ。したがって、張力の合力は磁石の重さに等しい鉛直力とともに、偶力からなる。張力の鉛直成分の合力は、それゆえ、射影が AA' と BB' の交点 O である直線に沿う向きで、 AA' , BB' はどちらも W の W' にたいする比で O で分割されている。

p. 116

偶力から来る張力の水平成分は、それゆえ、同じ大きさで方向が平行である。これらのどちらかを Q と呼ぶと、それらが形成する偶力のモーメントは

$$L = Q \cdot PP', \quad (1)$$

である。ここで PP' は平行線 AB と $A'B'$ のあいだの距離である。

L の値を見つけるために、モーメントの式

$$Qh = W \cdot AB = W' \cdot A'B', \quad (2)$$

と幾何学的な式

$$(AB + A'B')PP' = ab \sin(\alpha - \beta), \quad (3)$$

がある。したがって

$$L = Q \cdot PP' = \frac{ab}{h} \frac{WW'}{W + W'} \sin(\alpha - \beta), \quad (4)$$

を得る。

もし m が吊り下げられた装置の質量、 g が重力の強度なら

$$W + W' = mg, \quad (5)$$

である。

もし、また

$$W - W' = nmg, \quad (6)$$

と書くと、

$$L = \frac{1}{4}(1 - n^2)mg \frac{ab}{h} \sin(\alpha - \beta), \quad (7)$$

が分る。

それゆえ、 L の値は n が零のとき、つまり、吊られた質量の重さが 2 本の金属線によって等しく支えられているとき、 n にかんして最大である。

振動時間を観測し、それを最小にすることによって、ワイヤーの張力が等しくなるように調節することができる。また、図 16 のように、ワイヤーの端に、張力が等しくなるまで回転する滑車を取り付けて、自動調整を手に入れることもできる。

懸架ワイヤーの上端間の距離は他の 2 つの滑車によって調整される。ワイヤーの下端間の距離も調節できる。

この張力の調節によって、ワイヤーの張力から生じる偶力は

$$L = \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin(\alpha - \beta),$$

となる。

ワイヤーの捩じりから生じる偶力のモーメントは

$$\tau(\gamma - \beta),$$

p. 117

の形をしている。ここで τ はワイヤーの捩じり係数の和である。

ワイヤーは $\alpha = \beta$ のとき捩じりがないはずで、そのとき、 $\gamma = \alpha$ とすることができる。

水平磁力から生じる偶力のモーメントは

$$MH \sin(\delta - \theta),$$

の形をしている。ここで δ は磁気偏角、 θ は磁石の軸の方位角である。磁石の軸が BB' に平行、つまり $\beta = \theta$ を仮定して、一般性を損なうことなく、不必要的記号の導入を避けよう。

このとき、運動方程式は

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} = MH \sin(\delta - \theta) + \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin(\alpha - \theta) + \tau(\alpha - \theta), \quad (8)$$

p. 118

となる。

この装置には 3 つの主要位置がある。

(1) α がほとんど δ に等しいとき。もし T_1 がこの位置での 1 振動完了の時間なら、

$$\frac{4\pi^2 A}{T_1^2} = \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg + \tau + MH. \quad (9)$$

である。

(2) α がほとんど $\delta + \pi$ に等しいとき。もし T_2 がこの位置での 1 振動完了の時間なら、磁石の北端がここで南に向かって回され、

$$\frac{4\pi^2 A}{T_2^2} = \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg + \tau - MH, \quad (10)$$

である。

この式の右辺の量は a や b を減少させることによって好きなだけ小さくできるが、負にしては、つまり、磁石の平衡を不安定にしてはならない。この位置の磁石は磁力方向の小さな変化に敏感な装置を形成している。

なぜなら、 $\theta - \delta$ がほとんど π に等しいとき、 $\sin(\delta - \theta)$ はほとんど $\theta - \delta - \pi$ に等しく、

$$\theta = a - \frac{MH}{\frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg + \tau - MH} (\delta + \pi - \alpha), \quad (11)$$

であることが分るからである。

最後の項の分母を減少させることによって、 δ の変化とくらべて θ の変化を非常に大きくすることができる。この式の δ の係数は負であり、磁力の方向が一方向に回るとき、磁石の方向は反対方向に回ることに注意しなければならない。

(3) 第 3 の位置では、懸架装置の上部分が磁軸が磁気子午面にほぼ垂直になるまで回される。

もし

$$\theta - \delta = \frac{\pi}{2} + \theta', \quad \alpha - \theta = \beta - \theta', \quad (12)$$

とすると、運動方程式は

$$A \frac{d^2 \theta'}{dt^2} = -MH \cos \theta' + \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin(\beta - \theta') + \tau(\beta - \theta'), \quad (13)$$

と書ける。

もし $H = H_0$ 、 $\theta' = 0$ のとき平衡があるなら、

$$-MH_0 + \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin \beta + \beta \tau = 0, \quad (14)$$

であり。もし H が小さな角度 θ' に対応する水平な力の値なら

p. 119

$$H = H_0 \left(1 - \frac{\frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \cos \beta + \tau}{\frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin \beta + \tau \beta} \theta' \right), \quad (15)$$

である。

磁石が安定な平衡状態であるためには第2因子の分数の分子が正であることが必要であるが、それが零に近付けば近付くほど、装置はより敏感に地磁気の水平成分の強度の値の変化を指示示す。

力の強度を評価する静的な方法は、力の大きさが異なると自然に異なる平衡位置をとる、装置の作用に依存する。したがって、磁石に取り付けられた鏡を使い、時計仕掛けで動かされる写真面に光のスポットを投射することによって、曲線を辿り、それから任意の瞬間の力の強度が物差しにしたがって決められるが、物差は、今のところ、自由に選べると考えている。

460.] 偏角と強度の連続的な記録システムが眼視観測か自動写真法のどちらかによって続けられている観測所では、偏角と強度の絶対値を、磁石の磁軸の位置とモーメントとともに、大きな正確度で決めることができている。

なぜなら、磁針偏差計は一定の誤差の影響を受ける各瞬間の偏差を与え、2本吊り磁力計は一定の係数をかけられた各瞬間の強度を与えるからである。実験では δ に $\delta' + \delta_0$ を代入する。ここで δ' は与えられた瞬間の磁針偏差計の読みであり、 δ_0 は分ってはいないが一定の誤差であり、したがって $\delta' + \delta_0$ はその瞬間の真の偏角である。

同様に、 H に CH' を代入する。ここで H' は自由にとった物差上の磁力計の読みであり、 C は分ってはいないが一定の乗数で、これらの読みを絶対的な測度に変換し、したがって、 CH' は与えられた瞬間の水平な力である。

量の絶対的な値を決めるための実験は、異なる磁石が互いに敏感に擾乱を及ぼすことがないように、磁針偏差計や磁力計を十分に離して行われなければならない。各観測の時間は記録をとり、 δ' や H' の対応する値が挿入される。そのとき、磁針偏差計の一定の誤差 δ_0 や磁力計の読みに適用される係数 C を見出すために方程式が取り扱われる。これらが見出されると、両装置の読みを絶対的な尺度で表示できる。しかし、絶対的な測定は磁軸や磁石の磁気モーメントに生じる変化を考慮にいれるために、なんども繰り返さなければならない。

461.] 地磁気の力の鉛直成分を決める方法は同じ精度にたつしたことはな

い。鉛直力は水平な軸のまわりに回る磁石に作用しなければならない。さて水平軸のまわりに回る物体は、鉛直軸のまわりに回り、ファイバーによって吊るされた物体のようには、小さな力の作用にそれほど敏感にすることはできない。このほかに、磁石の重さがそれに作用する磁力に較べて非常に大きく、等しくない膨張その他による慣性中心の変位が磁力のかなりの変化よりも大きい磁石の位置への効果を生成する。

したがって、鉛直な力の測定、つまり鉛直力と水平力の比較が磁気測定系のもっとも不完全な部分である。

磁力の鉛直部分は一般に水平力から全磁力の方向を決めるこことによって導かれる。

もし i が全磁力が水平成分となす角なら、 i は磁気伏角、または傾角とよばれ、もし H が既に見出されている水平力なら、鉛直力は $H \tan i$ であり、力全体は $H \sec i$ である。

磁気伏角は伏角計を使って見出される。理論的な伏角計は針の磁軸に垂直な慣性中心を通る軸を持つ磁石である。その軸の終端は小半径の円柱形に作られ、その軸は慣性中心を通る直線と一致する。円柱形終端は 2 つの水平面に静止し、その上を自由に転がる。

軸が磁西磁東に置かれたとき、磁針は磁気子午面中で自由に回転し、もし装置が完全に調整されているなら、磁軸は全磁力の方向に自分で向く。

しかしながら、伏角磁針を、その重さが平衡位置に影響しないようにすることは実際には不可能である。なぜなら、たとえ始めにその慣性中心が円柱端の転がる区分の中心を結ぶ直線中にあっても、針が極わずかに撓んだり、不等膨張したとき、慣性中心はその直線中にあることを止めるからである。さらに、磁石の真の慣性中心の決定は、磁力の重力との干渉により、非常に困難な操作である。

磁針の一端とピボットの一端がマークされていると考えよう。現実の、または想像上の直線を磁針の上に描き、それを視準線と呼ぼう。この直線の位置が鉛直円の上で読み取られる。 θ を視準線が、水平であると考えている零への指針となす角とする。 λ を磁軸が視準線となす角とする。したがって磁針がこの位置にある時、磁軸は水平にたいして $\theta + \lambda$ だけ傾いている。

p は軸が転がる平面上の慣性中心から垂直とすると、 p は転がり面の形にか

p. 121

かわらず θ の関数になる。軸の両端の転がり区間が円形なら、

$$p = c - a \sin(\theta + \alpha), \quad (1)$$

の形の方程式がなりたつ。ここで α は両転がり区間の中心を結ぶ直線からの慣性中心の距離であり、 α はこの直線が視準線となす角である。

もし M が磁気モーメント、 m が磁石の質量、 g が重力、 I が全磁力、 i が伏角なら、エネルギーの保存によって、安定方向があるとき、

$$MI \cos(\theta + \lambda - i) - mgp, \quad (2)$$

は θ について極大でなければならない。つまり、軸の両端が円柱形なら

$$\begin{aligned} MI \sin(\theta + \lambda - i) &= -mg \frac{dp}{d\theta}, \\ &= mga \cos(\theta + \alpha), \end{aligned} \quad (3)$$

p. 122

である。

また、もし T が平衡位置のまわりの振動の時間なら

$$MI + mga \sin(\theta + \alpha) = \frac{4\pi^2 A}{T^2}, \quad (4)$$

である。

伏角を決めるとき、磁気子午面内にあり、西向きに増える度目盛をもつ、伏角目盛環を使って読みがとられる。

もし θ_1 がこの読みなら、

$$MI \sin(\theta_1 + \lambda - i) = mga \cos(\theta_1 + \alpha), \quad (5)$$

がなりたつ。

さて、器具を鉛直軸のまわりに 180° 回す。したがって度目盛は東向きであり、もし θ_2 が新しい読みなら

$$MI \sin(\theta_2 + \lambda - \pi + i) = mga \cos(\theta_2 + \alpha), \quad (6)$$

である。

(5) から (6) をとり、 θ_1 はほとんど $\pi - i$ に等しく、 λ は小さい角度で、 $mga\lambda$ が MI とくらべて無視できることを思い出すと、

$$MI(\theta_1 - \theta_2 + \pi - 2i) = 2mga \cos i \cos \alpha, \quad (7)$$

である。

さて磁石をその軸受からとりだし、453 節の偏角装置のなかに置き、吊り磁石の偏角によってそれ自身の磁気モーメントを示すようにすると、

$$M = \frac{1}{2}r^3 HD, \quad (8)$$

である。ここで D は偏角の正接である。

つぎに、磁針の磁気を逆転し、正接が D' である新しい偏角を観測して、その新しい磁気モーメントを決める。このとき、距離は前と同じであり、

$$M' = \frac{1}{2}r^3 HD', \quad (9)$$

したがって

$$MD' = M'D, \quad (10)$$

である。

つぎに、それを軸受に置き、 θ_3 はほぼ $\pi + i$ 、 θ_4 はほぼ $-i$ である 2 つの読み、 θ_3 と θ_4 をとると、

$$M'I \sin(\theta_3 + \lambda' - \pi - i) = mga \cos(\theta_3 + \alpha), \quad (11)$$

$$M'I \sin(\theta_4 + \lambda' + i) = mga \cos(\theta_4 + \alpha), \quad (12)$$

である。したがって、前と同様、

$$M'I(\theta_3 - \theta_4 - \pi - 2i) = -2mga \cos i \cos \alpha, \quad (13)$$

であり、(7) を加えて

$$MI(\theta_1 - \theta_2 - \pi - 2i) + M'I(\theta_3 - \theta_4 - \pi - 2i) = 0, \quad (14)$$

つまり、

$$D(\theta_1 - \theta_2 + \pi - 2i) + D'(\theta_2 - \theta_4 - \pi - 2i) = 0, \quad (15)$$

である。したがって伏角

p. 123

$$i = \frac{D(\theta_1 - \theta_2 + \pi) + D'(\theta_3 - \theta_4 - \pi)}{2D + 2D'}, \quad (16)$$

が分かる。ここで D, D' は、それぞれ、1 回目、2 回目の磁化で磁針によって生成された偏角の正接である。

伏角目盛環を使って観測値をとるとき、磁石の軸が静止する平面軸受がどの方位角でも水平であるように、鉛直軸を注意深く調整する。終端 A が沈むように磁化された磁石を磁軸を平面軸受上に置き、磁気子午面中の目盛環の面を使い、目盛環の度数目盛側を東にして、観測値を取る。磁石のそれぞれの終端を、伏角目盛環と中心と同じにして動く腕の上で運ばれる読み取り用顕微鏡を使って観測する。顕微鏡の十字線が磁石上のマークの像と一致させ、腕の位置を遊標尺を使って伏角目盛環上で読み取る。

こうして、終端 A の観測値と終端 B の観測値を、目盛が東であるとき、得る。磁石の軸が伏角目盛環と共中心でないことから生じるすべての誤差を消去するために、両終端を観測することが必要である。

つぎに、目盛の入った側を西に回し、さらに 2 回の観測を行う。

そして、軸の両端が逆転するように磁石を回し、さらに 4 回の磁石の他の側面をみる観測を行う。

つぎに終端 B が沈むように磁石の磁化が逆転し、磁気モーメントを確かめ、この状態で 8 回の観測値を取り、真の伏角を決めるために 16 観測値を組み合わせる。

462.] 最大限の注意にもかかわらず、伏角を 1 つの伏角目盛環を使って行われた観測から導いたとき、伏角は同じ場所で他の伏角目盛環を使った観測から導いた伏角と、目で見て分かるほど異なっていることが分る。ブラウン氏は軸の軸受の橈円性による効果を指摘し、いろいろな強さに磁化された磁石を使って観測値をとることによって、どのように補正すればよいかを示した。

この方法の原理はこのように述べられる。どの 1 つの観測値の誤差も 1 度角を越さない小さな量であると考える。また、ある未知であるが規則正しい力が磁石に作用し、磁石を真の位置から乱していると考える。

もし L が擾乱力のモーメント、 θ_0 が真の伏角。 θ が伏角の観測値なら、 $\theta - \theta_0$

は小さいから、

$$L = MI \sin(\theta - \theta_0), \quad (17)$$

$$= MI(\theta - \theta_0), \quad (18)$$

である。

M が大きくなればなるほど、磁針がその固有な位置に近付くことは明らかである。さて、伏角をとる操作を 2 回行う。1 回目は磁針にできる最大値、 M_1 に等しい磁化で、2 回目ははるかに小さいが、読みを十分に識別でき、誤差はそれほどでもない M_2 に等しい値で行う。 θ_1, θ_2 をこれら 2 組の観測値から導かれた伏角とし、 L をそれぞれの決定の 8 つの位置での未知の擾乱力の平均値とする。擾乱力は両決定に対して同じであると考える。このとき、

$$L = M_1 I(\theta_1 - \theta_0) = M_2 I(\theta_2 - \theta_0), \quad (19)$$

である。

したがって、

$$\theta_0 = \frac{M_1 \theta_1 - M_2 \theta_2}{M_1 - M_2}, \quad L = M_1 M_2 I \frac{\theta_1 - \theta_2}{M_2 - M_1}, \quad (20)$$

である。

もし何回かの実験が L にたいしてほとんど等しい値を与えることが分るなら、 θ_0 は伏角の真の値に非常に近いはずだと考えられる。

463.] 最近、ジュール博士は新しい伏角目盛環を組み上げた。そこでは、磁針の軸は、水平碼碭板の上を転がる代わりに、2 本の絹または蜘蛛糸のフィラメント上でつり上げられ、フィラメントの両終端は精密な天秤の腕に結ばれている。

図 18 で、 NS は磁針、 CC' は磁針の軸で、まっすぐな円柱状ワイヤーでできており、 $PCQ, P'C'Q'$ は、その上で、軸が転がるフィラメントである。 POQ は天秤で、ワイヤーによって支えられた 2 重の曲がった梃子からできている。 $O'O'$ は 2 股に分れた部品の角のあいだで水平に伸び、釣合おもり R をのち、おもりは振子で上下することができ、したがって釣合は $O'O'$ のまわりで、中立平衡である。

磁針がフィラメントを転がるとき、中立平衡であるためには、重心は上下してはならない。したがって、距離 OC は磁針が転がるとき一定でなければ

ならない。この条件はもし天秤の腕 OP 、 OQ が等しく、フィラメントが腕に直角なら、満たされる。

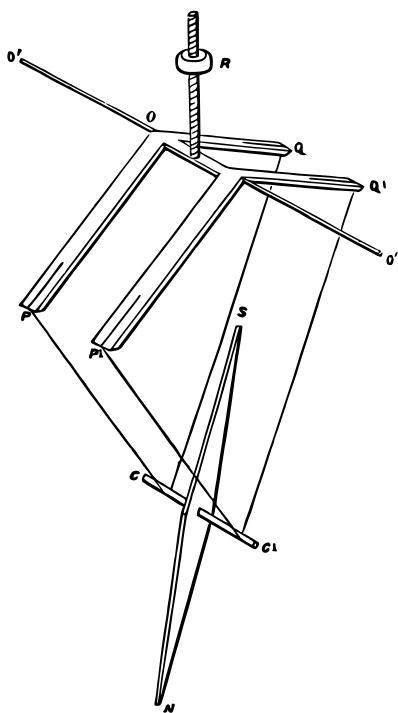


図 : 18.

ジュール博士は磁針は 5 インチを越えてはならないことを見出した。それが 8 インチのとき、磁針の曲がりが見かけの伏角を 1 分角の数分の 1 度減少させようとする。磁針の回転軸はもともと赤熱で鍛えられ重さで伸ばされた鋼線であったが、ジュール博士はこの新しい懸架では、白金や標準的な金でさえ十分に硬いので、鋼線を使う必要のないことを見出している。

天秤が 2 股の角のあいだで水平に約 1 フィート伸びたワイヤー $O'O'$ に取り付けられる。この 2 股は全体を支える三脚の頂部で円を使って方位角方向に回される。1 時間で 6 回の伏角の観測が完了する。一回の観測の平均誤差は 1 弧度の数分の 1 である。

ケンブリッジの物理研究室で伏角磁針を 2 重像装置を使って観測するとの提案があった。この装置

は図 19 のように置かれた 2 つの全反射プリズムからなり、鉛直角度目盛環上に据えられ、したがって反射面が、吊るされた伏角磁針の軸の延長線とほぼ一致する水平軸のまわりに回転することができる。プリズムの背後に置かれた望遠鏡を使って磁針を見る。磁針の 2 終端を図 20 のように同時に見る。鉛直目盛環の軸のまわりにプリズムを回転することによって磁針の上に描かれた 2 本の線の像を一致させることができる。こうして、磁針の傾きが鉛直目盛環の読みから決められる。

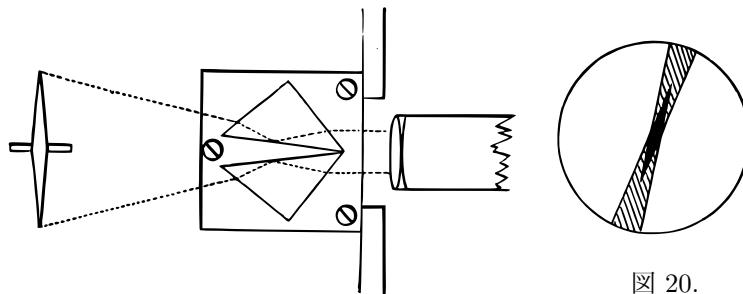


図 19.

図 20.

伏角の直線中の磁力の全強度 I は既に記述した 4 位置での振動の時間 T_1, T_2, T_3, T_4 から導くことができ、

$$I = \frac{4\pi^2 A}{2M + 2M'} \left\{ \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} + \frac{1}{T_3^2} + \frac{1}{T_4^2} \right\},$$

である。

M と M' は前に記した偏差法と振動法によって見出さなければならない。 A はその軸のまわりの磁石の慣性モーメントである。

ファイバーに吊るされた磁石による観測ははるかに正確なので、ふつうは全磁力を水平力から式

$$I = H \sec \theta,$$

を使って導く。ここで I は全磁力、 H は水平力、 θ は伏角である。

464.] 伏角を決める過程は面倒な過程なので、磁力の連続的な変化を決めるには都合が悪い。連続観測にたいしてもっとも便利な装置は鉛直力磁気計である。これはたんにナイフの歯の上でつりあう磁石で、磁石はその磁軸をほぼ水平にして安定な平衡状態にある。

もし Z が磁力の鉛直成分、磁気モーメント M 、磁軸が水平となす小さな角 θ なら、

$$MZ \cos \theta = m g a \cos(\alpha - \theta),$$

である。ここで m は磁石の質量、 g は重力、 a は懸架軸から重心までの距離、 α は軸と重心がとおる平面が磁軸となす角である。

したがって、鉛直力の小さな変化 δZ にたいして θ は非常に小さいから

$$M\delta Z = mga \sin(\alpha - \theta)\delta\theta,$$

であるような磁石の向きの小変動 $\delta\theta$ がある。

実際にはこの装置は鉛直力の絶対的な値を決めるためには使われず、その小さな変動を記録するだけである。

この目的のためには $\theta = 0$ のときの Z の絶対的な値と、 $\frac{dZ}{d\theta}$ の値を知れば十分である。

Z の値は、水平力と伏角が知られているとき、式 $Z = H \tan \theta_0$ から分かる。ここで θ_0 は伏角、 H は水平力である。

Z の与えられた変動による偏角を見出すために、磁石を取り、それを磁軸を東西に、磁石の中心を、偏角の実験でしたように、方位角計から東西に分かっている距離 r_1 離して、置く。偏角の正接を D_1 とする。

つぎに磁石を、その軸を鉛直にして、鉛直力磁力計の中心の上または下に r_2 の距離を中心にして、置き、磁力計のなかで生成される偏角の正接を D_2 とする。つぎの、もし偏角磁石のモーメントが M' なら、

$$2M = Hr_1^3 D_1 = \frac{dZ}{d\theta} r_2^3 D_2,$$

である。したがって、

$$\frac{dZ}{d\theta} = H \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{D_1}{D_2},$$

である。

任意の瞬間の鉛直力の実際の値は

$$Z = Z_0 + \theta \frac{dZ}{d\theta},$$

である。ここで Z_0 は $\theta = 0$ のときの Z の値である。

p. 128 決まった観測所での磁力の変化の連続的な観測には、一本吊り方位角計、2 本吊り水平力磁気計、鉛直力磁気計天秤がもっとも便利な装置である。

いくつかの観測所では、写真追跡が時計仕掛けで動く準備した紙の上に生成され、したがって各瞬間に 3 装置の指し示す連続記録が形成されている。これらの追跡はその標準値から力の 3 直交成分の変動を指し示す。方位角計は

平均磁西に向かう力を与える。2本吊り磁力計は磁北に向かう力の変動を与える。天秤磁気計は鉛直力の変動を与える。これらの力の標準値、つまり、これらの装置が零の連続を指すときの値は、絶対的な方位角、水平力、伏角の頻繁な観測から導かれる。

第VIII章

地磁気について。

465.] 地磁気にかんする私たちの知識は、ある任意に選んだ一時の地球表面上の磁力の分布と、いろいろな時のその分布の変化の研究から導かれたものである。

任意の場所、時刻での磁力はその3座標が分かれれば、分かったと言える。これらの座標は力の方位角の偏角、水平にたいする伏角、そして全強度によって与えられる。

しかし、地球表面の磁力の一般分布を研究するためにもっとも便利な方法は力の3成分の大きさ

$$\left. \begin{array}{l} X = H \cos \delta, \quad \text{真北方向へ,} \\ Y = H \sin \delta, \quad \text{真西方向へ,} \\ Z = H \tan \theta, \quad \text{鉛直下方向へ,} \end{array} \right\} \quad (1)$$

を考えることである。ここで H は水平分力、 δ は偏角、 θ は伏角である。

もし V が地球表面の磁気ポテンシャルなら、そしてもし地球を半径 a の球と考えるなら、

$$X = -\frac{1}{a} \frac{dV}{dl}, \quad Y = -\frac{1}{a \cos l} \frac{dV}{d\lambda}, \quad Z = \frac{dV}{dr}, \quad (2)$$

である。ここで l は緯度、 λ は経度、 r は地球中心からの距離である。

地球表面上の V の知識は以下のように水平分力の観測だけから得ることができる。

V_0 を北極での V の値とすると、任意の子午線に沿って線積分をとって緯 p. 130

度 l での子午線上のポテンシャル値は

$$V = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^l X dl + V_0, \quad (3)$$

であることが分かる。

こうしてポテンシャルが、各点での北成分、 X 、の値と、極での V の値、 V_0 が分かっていれば、地球表面の任意の点で見出される。

力は V の絶対的な値ではなく、その微分に依存するので、かならずしも、 V_0 を特定の値に固定する必要はない。

任意の点、 V の値は、もし任意の与えられた子午線に沿った X の値と全面にわたる Y の値が分かっていれば、確かめられる。

$$V_l = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^l X dl + V_0, \quad (4)$$

としよう。ここで積分は極から平行に与えられた子午線に沿って行われる。このとき、

$$V = V_l - a \int_{\lambda_0}^{\lambda} Y \cos l d\lambda, \quad (5)$$

である。ここで積分は与えられた子午線から必要な点まで平行線に沿って行われる。

これらの方針は地球表面で完全な磁気探査が行われており、したがって X や Y やその両方の値が与えられた時点で地球表面の各点で知られていることを含意している。実際に知られているものはある決まった数の測量点での磁気成分である。地球の文明化した部分では、これらの測量点は比較的数多くある。他の点ではデータのない地球表面の広大な地域がある。

磁気探査。註 1

466.] 最大数百マイル四方程度の大きさの地域で、偏角と水平分力の観測が地方全体に分布するかなりの数の測量点で行われてきたと考えよう。

註 1 { 読者は Rücker と Thorpe の論文、‘A Magnetic Survey of the British Isles,’ *Phil. Trans.*, 1890, A, pp. 53-328 を読むとよいであろう。 }

この地域の中では V の値は公式

$$V = \text{const.} - a(A_1 l + A_2 \lambda + \frac{1}{2} B_1 l^2 + B_2 l \lambda + \frac{1}{2} B_3 \lambda^2 + \&c), \quad (6)$$

によって十分正確に表現できると考える。したがって、

p. 131

$$X = A_1 + B_1 l + B_2 \lambda, \quad (7)$$

$$Y \cos l = A_2 + B_2 l + B_3 \lambda, \quad (8)$$

である。

緯度が $l_1, l_2, \dots \&c.$ 経度が $\lambda_1, \lambda_2, \&c.$ の n 測量点があり、 X と Y がそれぞれの測量点で見出されているとする。

$$l_0 = \frac{1}{n} \Sigma(l), \quad \lambda_0 = \frac{1}{n} \Sigma(\lambda), \quad (9)$$

とする。 l_0 と λ_0 は中央測量点の緯度、経度と呼ぶことができる。

$$X_0 = \frac{1}{n} \Sigma(X), \quad Y_0 \cos l_0 = \frac{1}{n} \Sigma(Y \cos l), \quad (10)$$

とする。このとき、 X_0 と Y_0 は仮想の中央測量点の X と Y の値であり、

$$X = X_0 + B_1(l - l_0) + B_2(\lambda - \lambda_0), \quad (11)$$

$$Y \cos l = Y_0 \cos l_0 + B_2(l - l_0) + B_3(\lambda - \lambda_0), \quad (12)$$

である。

n 個の (11) 形式の式と n 個の (12) 形式の式がある。もし X の決定値の確率誤差を ξ 、 $Y \cos l$ の確率誤差を η と表記すると、これらの誤差が H と δ の観測誤差から生じたと考えて、 ξ と η を計算することができる。

もし H の確率誤差を h 、 δ の確率誤差を Δ とすると、

$$dX = \cos \delta \cdot dH - H \sin \delta \cdot d\delta,$$

$$\xi^2 = h^2 \cos^2 \delta + \Delta^2 H^2 \sin^2 \delta,$$

同様に

$$\eta^2 = h^2 \sin^2 \delta + \Delta^2 H^2 \cos^2 \delta,$$

である。

もし形式 (11), (12) の式によって与えられる値から X と Y の変動が大きく観測の確率誤差を越えているなら、それは局所的な引力によると結論でき、 ξ の η に対する比に 1 以外の数値を与える理由がない。

最小二乗法にしたがって形式 (11) の式に η を掛け、形式 (12) の式に ξ を掛け、その確率誤差を同じにする。つぎに、それぞれの式に未知量の一つの係数 B_1 , または B_2 , または B_3 を掛け、その結果を加え合わせ、 B_1, B_2, B_3 を見出すための 3 つの方程式

$$\begin{aligned} P_1 &= B_1 b_1 + B_2 b_2, \\ \eta^2 P_2 + \xi^2 Q_1 &= B_1 \eta^2 b_2 + B_2 (\xi^2 b_1 + \eta^2 b_3) + B_3 \xi^2 b_2 \\ Q_2 &= B_2 b_2 + B_3 b_3; \end{aligned}$$

p. 132

を得る。ここで、簡単のため、

$$\begin{aligned} b_1 &= \Sigma(l^2) - nl_0^2, & b_2 &= \Sigma(l\lambda) - nl_0\lambda_0, & b_3 &= \Sigma(\lambda^2) - n\lambda_0^2, \\ P_1 &= \Sigma(lX) - nl_0 X_0, & Q_1 &= \Sigma(lY \cos l) - nl_0 Y_0 \cos l_0, \\ P_2 &= \Sigma(\lambda X) - n\lambda_0 X_0, & Q_2 &= \Sigma(\lambda Y \cos l) - n\lambda_0 Y_0 \cos l_0, \end{aligned}$$

と書いている。

B_1, B_2, B_3 を計算し、(11), (12) 式に代入して、探査の範囲内で局所的な擾乱のない任意の点での X, Y の値を得ることができる。局所擾乱は、測定点近くの岩が磁気を帯びているために存在することが分かっている。ほとんどの火成岩は磁気を帯びているのである。

この種の探査は磁気装置を持ち運び、それを非常に多くの測定点に設置できる地方でのみ行うことができる。世界のその他の場所では互いに非常に離れたわずかな測定点での値のあいだで内挿を行うことによって磁気要素の分布を見出すことで満足しなければならない。

467.] この種の過程によって、または、磁気要素の等值線の地図を作成する等価な图形的な過程によって、 X と Y の値と、そこからのポテンシャル V の値が地球に全表面にわたって分かるようになると考え方。つぎの段階は V を球面調和級数の形に展開することである。

もし地球が、その内部全体で、一様に同じ方向に磁化されているなら、 V は1位の調和関数で、磁気子午線はまったく反対の2極をとる大円であり、磁気赤道は大円で、水平分力は磁気赤道のすべての部分で同じで、もし H_0 がこの定数値なら、他の点での値は $H = H_0 \cos l'$ であろう。ここで l' は磁気緯度である。任意の点での鉛直分力は $Z = 2H_0 \sin l'$ で、もし θ が伏角なら、 $\tan \theta$ は $= 2 \tan l'$ であろう。

地球の場合、磁気赤道は伏角が零の線と定義される。それは球の大円ではない。

磁極は水平分力が零の点、または伏角が 90° の点と定義される。そのような2点が、一つは北領域に、一つは南領域にあるが、まったく正反対ではなく、それらを結ぶ線は地球の磁軸に平行ではない。

468.] 磁極は地球表面上の V の値が、極大、または極小、または停留である点である。 p. 133

ポテンシャルが極小である任意の点で、伏角針の北端は鉛直下方向を指し、コンパスの針がそのような点の近くに置かれると、北端はその点を指す。

ポテンシャルが極大の点で、伏角針の南端は下を指し、その近傍でコンパスの針の南端はその点を指す。

もし地球表面に V に p 個の極小があれば、他に $p - 1$ 個の伏角針の北端が下を指す点がある。しかし、その他点をまわる円周でコンパスを運んだとき、コンパス針の北端はつねにその点を指すように回る代わりに、針は反対方向に回転し、ときにはその北端を、ときにはその南端をその点に向けてまわる。

もしポテンシャルのある極小点を真の北極と呼ぶと、これらの他の点は偽の北極と呼ぶことができる。コンパスの針にたいしては北極ではないからである。もし p 個の真の北極があれば、 $p - 1$ 個の偽北極がなければならず、同様に、 q 個の真南極があれば $q - 1$ 個の偽南極がなければならない。同じ名前の極の数は奇数でなければならず、一時、優勢であった2個の北極と2個の南極があるとの意見は誤っている。ガウスによれば、事実は、地球表面にはただ1つの真の北極と、ただ1つの真の南極があり、それゆえ、偽極はない。これらの極を結ぶ直線は地球の直径ではなく、地球の磁軸に平行ではない。

469.] 地磁気の性質の初期の研究は、ほとんどが、その性質を、1つまたはそれ以上の棒磁石の極の位置を決めるべきものとして、それらの作用の結果

として表示しようとしてきた。ガウスが地磁気の分布をポテンシャルを体調和関数の級数に展開することによって完全に一般的な形で表示した最初の人である。彼はその展開係数を最初の 4 位にまで決定した。係数は 24 個あり、1 位が 3 個、2 位が 5 個、3 位が 7 個、4 位が 9 個である。地磁気の実際の状態の許容できる正確な表現を与えるためには、これらすべての項が必要なことが分かっている。

p. 134

観測された磁気のどの部分が外部原因で、どの部分が内部原因かを見つける。

470.] 地磁気の磁気ポテンシャルの球面調和関数での展開を得たと考えよう。展開は地球表面の各点で水平分力の実際の方向と大きさに無矛盾であるとする。ガウスは鉛直分力の観測値から、磁力が、磁化や電流のような、地表面の内部の原因によるものか、それとも、なんらかの部分が地表面の外部の直接的な原因によるものか、どのように決められるかを示した。

V を球面調和関数の 2 重級数に展開された実際のポテンシャルとする。

$$\begin{aligned} V = & A_1 \frac{r}{a} + \&c. + A_i \left(\frac{r}{a}\right)^i + \dots \\ & + B_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} + \&c. + B_i \left(\frac{r}{a}\right)^{-(i+1)} + \dots \end{aligned}$$

第 1 の級数は地球の外部原因によるポテンシャル部分を表現し、第 2 級数は地球に内部原因による部分を表現している。

水平分力の観測値は地球半径, $r = a$ のとき、これらの級数の和を与える。位数 i の項は

$$V_i = A_i + B_i,$$

である。

鉛直分力の観測値は

$$Z = \frac{dV}{dr},$$

を与え、 aZ の位数 i の項は

$$aZ_i = iA_i - (i+1)B_i,$$

である。

したがって、外部原因による部分は

$$A_i = \frac{(i+1)V_i + aZ_i}{2i+1},$$

であり、地球内部の原因による部分は

$$B_i = \frac{iV_i - aZ_i}{2i+1},$$

である。

V の展開は、ここまで、ある時点近くでの V の平均値にたいしてのみ計算されてきた。この平均値のほとんどの部分は地球の外部原因によるようには見えない。p. 135

471.] 私たちは未だ V の変動の太陽や月の影響がどのような形に展開されるか十分に知らず、これらの変動のなんらかの部分が外部から作用する磁力から生じているかどうかをこの方法によって決めることができない。しかし、MM. ストニイとチャンバーの計算が示したように、これらの変動の主要部分が、太陽や月が磁石であると考えても、それらの直接の磁気作用から生じ得ないことは明らかである^{註2}。

472.] 注意が向けてきた磁力の主要な変化はつぎのようである。

I. 規則正しい変動。

- (1) 1日の時間スケールや1年の時間スケールに依存する太陽変動。
- (2) 月の時角や月のそのほかの位置要素に依存する月変動。
- (3) これらの変動は年が変わると繰り返さないが、11年より長い周期変動にしたがっているように見える。

註2 ブラハのホルンスタイル教授は、周期 26.33 日の磁気要素の周期変化はほとんど正確に太陽赤道近くの黒点の観測から導かれた太陽自転の会合周期であることを発見した。太陽の目に見えない硬い物体の回転時間の磁針への効果による発見法は天文学からの借りの磁気による返済の最初の分割返済である。Anzeiger der k. Akad., Wien, June 15. 1871. Proc. R. S., Nov. 16, 1871 参照。

- (4) この他に、地磁気状態の永年変化があり、それは磁気観測がなされるようになってから、ずっと進んでおり、小周期の変動よりもはるかに大きい磁気要素の変化を生成している。

II. 摘乱。

473.] より規則正しい変化のほかに、磁気要素は、多かれ少なかれ、突然の擾乱に従う。ある時には、他の時とくらべて、擾乱はより強力でより頻繁であることが分かり、規則正しい変動は擾乱が小さい時は明確に分かるが、擾乱が大きい時は、規則正しい変動法則は隠されてしまう。したがって、大きな注意がこれらの擾乱に払われてきた。そこで、特定の種類の擾乱が日の時間スケールで、ある季節に、時間間隔をおいて、起こりやすいことが分かつてきた。これらより普通の擾乱のほかに、ときどき、過度の擾乱があり、そこでは、1日、2日のあいだ、磁気は強く乱される。これらは磁気嵐と呼ばれ、個々の擾乱が遠く離れた観測点で同じ瞬間に何度か観測されてきた、

エアリー氏はグリニッヂでの擾乱の大部分は地下にある近傍の電極によつて集められた電流に対応し、もし地電流が、その実際の方向を保持して、磁石の下に置かれた導線をとおつて伝導されたなら、磁石のなかに直接に生成されたはずのものであることを見出している。

極大擾乱の時期が11年毎にあり、これは太陽中の黒点数極大の時期と一致しているようにみえることが分かっている。

474.] 地磁気の研究によって招き入れられた研究領域は非常に深く、広い。太陽や月が地磁気に作用していることを私たちは知っている。この作用がこれらの物が磁石であると考えることでは説明できないことが証明されてきた。それゆえ、作用は間接的である。

太陽の場合、その一部は熱作用かもしれないが、月の場合、この原因に帰することはできない。これらの物体の引力が、地球内部で歪を引き起こし地球内にすでに存在している磁気に変化を生成し(447節)、ある種の潮汐作用が半日の変動を引き起こすことは可能であろうか?

しかし、これらの変動の総量は地磁気の大きな永年変動とくらべて非常に小さい。

地球外部であれ、地球深部であれ、どのような原因によって、磁極が地球のある部分から他の部分へ動くような地磁気の巨大な変動が生成されるのであろうか？地球の磁化の強度はきわめて大きく、その大きさは非常な困難をともなって始めて鋼の磁石中に生成される磁化とほとんど同じ大きさであることを考えたとき、そのような巨大な物体のこのような莫大な変動は、自然のもっとも強力な作用因を私たちはいまだ知らず、この作用因の舞台は地球の深部にあり、その知識を獲得しようとしても、ほとんど手段を持っていないと、結論を余儀なくさせる^{註3}。

p. 137

註3 { バルフォアスチュワートは、昼間変動は大気上空の希薄な空気が地球の磁力線を横切るとき、その中に誘導された電流によると示唆した。最近、Schuster *Phil. Trans. A*, 1889, p. 467, はガウスの方法を適用することによって、これらの擾乱の大きな部分はその起源を地球の表面の上方に持つことを示した。}

PART IV

電磁氣

第Ⅰ章

電磁力。

475.] 針をとおる放電や針の近くでおこる放電によって針の中で磁気が生成されたり破壊されたりする場合のあることを多くのいろいろな観測者が気付いていた。そして、磁気と電気のあいだの関係にかんしていろいろな種類の推論がなされてきた。しかし、これらの現象の法則、これらの関係の形はエルステッド (Hans Christian Örsted)^{註1} がコペンハーゲンで数人の進んだ学生にたいして行った私的な講義でボルタ電池の終端を結ぶ導線がその近傍の磁石に影響を与えることを観測するまで、まったく知られていなかった。この発見を彼は *Experimenta circa effectum Conflictus Electrici in Acum Magneticam*, 1820年 6月 21日と題した論文で出版した。

磁石と電気を荷された物体との関係についての実験はエルステッドが電流によって熱せられた導線の効果を確かめようとするまで、何の結果も得られないまま行われてきた。しかし、彼は導線の熱ではなく流れ自身が作用の原因であり、「電気の衝突は回転的に作用する。」つまり、電流を伝える導線の近くに置かれた磁石は導線に垂直になり、磁石が導線の周りで動かされたとき、同じ端は常に前方を指していることを発見した。

p. 139

476.] それゆえ、電流を伝える導線のまわりの空間中で磁石には導線の位置と電流の強さに依存する力が作用するようにみえる。これらの力が作用する空間はそれゆえ磁場と考えられ、通常の磁石の近傍の場で既に調べられているのと同じように、磁力線の道筋を辿り、各点での力の強さを測ることによって、調べる事ができる。

^{註1} Bence Jones 博士によるファラディの生涯 (Vol. ii, p. 395) にある Hansteen 教授からの手紙にあるエルステッドの発見についての他の説明も参照せよ。

477.] 電流を運ぶ無限に長いまっすぐな導線の場合から始めよう。もしもある人が、想像上、自分自身を電流が頭から足へ巡る導線の位置に置くなら、彼の前に自由に吊るされた磁石は、電流の作用のもとで、北を指す端が、右手の方向を指すようになる。

磁力線はいずれの場所でも導線を含む平面に直角である。それゆえ、磁力線はそれぞれ導線に垂直な平面内の円である。磁石の北を指す極は、これらの円の一つを左から右へまわって運ばれると、常に運動の方向に作用するを感じるであろう。おなじ磁石の他の極は反対方向のを感じるであろう。

478.] これらの力を比較するために、導線は鉛直で、電流は下降すると考え、磁石は装置の上に置かれ、その装置は導線に一致する鉛直軸のまわりに自由に回転するとする。これらの状況にもとで、導線を軸としてそのまわりに装置全体の回転を引き起こすような効果は電流にはないことが分かる。したがって、磁石の 2 つの極への鉛直電流の作用は電流を軸とした 2 つの力の静的なモーメントが同じ大きさで反対方向であるようなものである。 m_1 と m_2 を 2 つの極の強さ、 r_1 と r_2 を導線の軸からのそれらの距離、 T_1 と T_2 をそれぞれ、2 つの極での電流による磁力の強さとすると、 m_1 に働く力は $m_1 T_1$ であり、力は軸に直角だから、力のモーメントは $m_1 T_1 r_1$ である。同様にもう一つの極に働く力のモーメントは $m_2 T_2 r_2$ であり、運動は観測されていないから

$$m_1 T_1 r_1 + m_2 T_2 r_2 = 0.$$

である。

しかし、すべての磁石で

$$m_1 + m_2 = 0.$$

であることが分かっている。

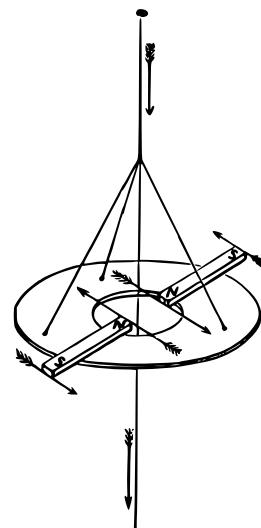


図: 21.

したがって

$$T_1 r_1 = T_2 r_2$$

つまり無限に長い直線電流による電磁力は電流に垂直で、電流からの距離に反比例して変化する。

479.] 積 Tr は電流の強さに依存しているから、電流の尺度として採用できる。この測定法は静電現象に基づく方法とは異なっており、電流によって生成された磁気現象に依存しているので、電磁測定系と呼ばれる。電磁系で、もし i が電流なら $Tr = 2i$ である。

480.] もし導線を z 軸と取ると T の直交成分は

$$X = -2i \frac{y}{r^2}, \quad Y = 2i \frac{x}{r^2}, \quad Z = 0.$$

である。

ここで $Xdx + Ydy + Zdz$ は全微分であり、

$$2i \tan^{-1} \frac{y}{x} + C.$$

の微分である。

したがって場の磁力は、以前のいくつかの例のように、ポテンシャル関数から導くことができるが、この場合のポテンシャルは公差 $4\pi i$ の無限列をなす値をもつ関数である。しかし、座標にかんするポテンシャルの微分係数は確定しており、各点で一価である。

電流近傍の場でのポテンシャル関数の存在はエネルギー保存原理の自明の結果ではない。現実の電流では、すべて、導線の抵抗に打ち勝つ電池の電気エネルギーの連続的な消費があり、この消費量が知られていないかぎり、電池のエネルギーの一部分が周期的に動く磁石になされた仕事を引き起こすのに使われたと疑われるからである。事実、磁極 m が導線を囲む閉曲線のまわりを一周すると現実に $4\pi mi$ の大きさの仕事がなされる。力の線積分が零になるのは導線を囲んでいない閉回路にたいしてのみである。それゆえ、いまのところ、力の法則とポテンシャルの存在はすでに記述した実験的な証拠に支えられていると考えなければならない。

481.] 無限に伸びる直線を囲む空間を考えると、一周回るとともに戻るので、サイクリックな空間であることが分かる。直線から始まり、その片方

p. 141

に無限遠まで拡がる平面か、その他の何らかの面を考えると、それはサイクリックな空間を非サイクリックな空間に戻すダイアフラムとみなすことができる。もし任意の固定点から他の点までダイアフラムを横切らないで曲線を描き、ポテンシャルをこれらの曲線の一つに沿って取られた力の線積分と定義すると、任意の点のポテンシャルは一価の確定した値をもつであろう。

磁場はこの面に一致する強度が i の板磁石による場とすべての点で同一である。この板は一つの縁で無限直線によって境界づけられている。境界の他の部分は場の考察している部分から無限の距離にある。

482.] 現実の実験では、すべて、電流は有限の大きさの閉じた回路を形成する。それゆえ、有限回路の磁気作用を回路が境界辺である板磁石の作用と比較しよう。

アンペールの実験が最初期のもので、ウェーバーの実験がもっとも正確なものであるが、数多くの実験によって、回路の大きさとくらべて遠い距離にある小さな平面回路の磁気作用は軸が回路の面の法線である磁気モーメントの作用と同じであり、その磁気モーメントは回路の面積に電流の強さをかけたものに等しい^{註2}。

もし回路が回路を境界とする面によって埋められ、ダイアフラムが形成されていると考えたなら、そもそもこの面と一致する強度 i の板磁石が電流の代りに置き換えられたら、遠くのすべての点で板磁石の作用は電流の作用と同一であろう。

483.] ここまで回路の大きさは場の検討されている部分から回路の任意の部分への距離とくらべて小さいと考えてきた。さて回路は任意の形でどんな大きさでもよいと考えて導線それ自身の中にはない任意の点 P での作用を検査しよう。以下の方法はこの目的のためにアンペールによって導入されたが、重要な幾何学的な応用をもつ。

回路が境界となる、点 P を通らない任意の面 S を考えよう。この面上に互いに交叉し曲線を要素部分に分割する 2 系列の曲線列を描く。要素部分の大きさは P からの距離とくらべて小さく、面の曲率半径とくらべても小さい。

これらの線要素のそれぞれに強さ i の電流が流れると考える。循環の方向

^{註2} {Ampere, *Théorie des phénomènes électrodynamiques*, 1826; Weber, *Elektrodynamische Maasbestimmungen (Abhandlungen der königlich Säck's. Gesellschaft zu Leipzig*, 1850-1852.)}

はすべての要素でもとの回路の中と同じであるとする。

2つの隣接する面要素の間の分割線を形成するすべての曲線に沿って、強さ i の2つの等しい電流が反対方向に流れる。

同じ場所での同じ大きさで反対方向の電流の効果は、いかなる観点で電流を考えようと、絶対的に零である。このように中性化されない唯一の回路要素の部分は元の回路と一致する部分だけである。それゆえ、回路要素の全効果は元の回路の効果に等価である。

484.] さてそれぞれの回路要素は P からの距離がその大きさとくらべて大きい小さな平面回路であるから、境界辺が回路要素と一致する強さ i の板磁石要素で置き換えることができる。 P への板磁石要素の磁気効果は回路要素の効果と等価である。板要素の全体は強さ i の板磁石を構成し、面 S と一致し、元の回路が境界をなす板全体の P の上への磁気作用は回路の磁気作用と等価である。

p. 143

回路の作用は面 S の形に独立であることは明白である。面は回路を埋めるようにまったく任意の方法で描かれたのである。このことから板磁石の作用は板の形にはよらず、板の縁の形にのみ依存することが分かる。この結果は、以前、410節で得ているが、どのようにして電磁気の考察から導くことができるかを見ておくことは教育的である。

任意の点での磁力は、それゆえ、回路が境界をなす、その点を通らない板磁石による力と大きさも方向も同一である。板の強さは数値的に電流の強さに等しい。回路中の電流の方向は板の磁化の方向に関係しており、したがって、もし人が北を指そうとする正の側面と呼ばれる板磁石の側面に足を置いて立つなら、彼の前の電流は右から左であろう。

485.] 回路の磁気ポテンシャルは、しかしながら、板磁石の物質中にあるこれらの点に対する板磁石のポテンシャルとは異なる。

もし ω を点 P で板磁石が張る立体角とし、板の正、つまり、austral(南)側が点 P に隣り合うとき正と数えると、板自体の中にはない任意の点での磁気ポテンシャルは $\omega\phi$ である。ここで ϕ は板の強さである。板の物質中の任意の点で、私たちは板が強さが ϕ_1 と ϕ_2 、 $\phi_1 + \phi_2 = \phi$ の2つの部分に分割されており、その点は ϕ_1 の正側にあり、 ϕ_2 の負側にあると考えることができ

る。この点のポテンシャルは

$$\omega(\phi_1 + \phi_2) - 4\pi\phi_2.$$

である。

板の負側面でポテンシャルは $\phi(\omega - 4\pi)$ となる。この場合、それゆえ、ポテンシャルは連続で、各点で一価の決まった値を持つ。他方、電気回路の場合、導線それ自身の中にはない各点で磁気ポテンシャルは $i\omega$ に等しい。ここで、 i は電流の強さであり ω はその点で回路によって張られる立体角で、点 P からみて時計の針の反対方向に電流が循環するとき、正と数える。

量 ω は公差が $4\pi i$ の値の無限列を持つ関数である。しかし、座標にかんする ω の微分係数は空間の各点で一価の決まった値を持つ。

p. 144

486.] もし長く細く曲がりやすい管状磁石を電流の近傍に置くと、管の北端と南端は導線のまわりに反対方向に動こうとするであろう。そして、もしそれが自由に磁力に従うなら、磁石は最終的に導線にまわりに巻き付いて閉じたコイルになるであろう。もし磁石が唯一つの極を持つことができたら、もしくは、大きさの異なる極を持つことができたら、磁石は一方方向に連続的に導線のまわりをなんども回るであろうが、どの磁石の極も同じ大きさで反対符号だから、このような結果はけっして生じない。しかしファラディは、一つの極が電流のまわりをなんども回り、他の極は回らないことを可能にすることによって、電流のまわりの磁石の一方の極の連続的な回転を生成する方法を示した。この過程が無限に繰り返されうるには、磁石の本体は、それぞれの回転につき一度、電流の一方の側から他の側へ移し変えられなければならない。これを電気の流れを中断することなく行うため、一方の枝を磁石を通すように開けたとき、電流が他の枝をとおって流れ続けるように、電流を 2 つの枝に分ける。ファラディはこの目的のために、491 節図 23 に示されているように、水銀が循環する樋を使った。電流は導線 AB を通って樋に入る。電流は B で分割され、弧 BQP と弧 BRP を巡ったあと、 P で合流する。導線 PO を通って樋を去り、水銀容器 O 、 O から下に伸びる鉛直導線があり、それを下って電流が流れる。

磁石（図には示されていない）が O をとおる鉛直軸のまわりに回転できるよう、そして、導線 OP がそれとともに回転するよう、装着されている。磁石の本体は樋が作る開孔を通り、一方の極、たとえば北極は、樋の面の下に

あり、他は上にある。磁石と導線 OP が鉛直軸を回ると、電流は次第に磁石の前方にある樋の枝から後方にある樋に移され、回りきるごとに磁石は電流の一方の側から他の側へ通っていく。磁石の北極は下降流のまわりに北東南西の方向に回転する。もし ω, ω' が 2 極で円形樋によって張られる立体角(符号に無関係に)なら、一回転で電磁力によってなされた仕事は

p. 145

$$mi(4\pi - \omega - \omega')$$

である。ここで m はどちらかの極の強さであり、 i は電流の強さである^{註3}。

487.] さて直線電流近くの磁場の状態の概念を形成する努力をしよう。

回路によって張られる立体角 ω の値が空間の各点で分かっているとし、 ω が一定である面が描かれているとしよう。これらの面は等ポテンシャル面で

^{註3} [この問題は次のように議論できる。491 節 23 図を参照して、 OP を任意の位置にとり、仮想的に釣合う、 BO に沿う電流 i 、 OB に沿う電流 x 、 y を導入する。 OP に取り付けられた磁石が一回転運ばれたとき、電流は $ABOZ$ に沿って通ると考えると、電流 i によって南極には仕事はなされないので、南極は電流を抱き込まない閉じた曲線を描いている。しかし、北極は電流を抱き込む閉じた曲線を描き、それになされた仕事は $4\pi mi$ である。さて回路 $BPOB$ 中の電流 x と $BROB$ 中の電流 y の効果を評価しなければならない。これらの回路の平面の下にある北極のポテンシャルは

$$-mx\omega_\theta + my(\omega - \omega_\theta),$$

南極のポテンシャルは

$$-mx\omega'_\theta - my(-\omega' + \omega'_\theta)$$

である。ここで ω_θ と ω'_θ は 2 つの極で BOP が張る立体角を表記し、 ω, ω' は円形樋が張る立体角である。結果としてのポテンシャルは

$$my(\omega + \omega') - mi(\omega_\theta + \omega'_\theta).$$

したがって、 OP が OP から北東南西の方向に回転して再び OP になると、ポテンシャルは $-mi(\omega + \omega')$ だけ変わるであろう。電流によってなされた仕事は、それゆえ、テキストに与えられているものである。]

{ 以下はこの結果を得るわずかに異なった方法である：— 導線と水銀の樋をとおる電流は樋を回る円形電流 $i - x$ 、回路 POB を回る電流 i 、 AB 、 BO 、鉛直導線 OZ を通る電流 i に等価である。円形電流は明らかに電流の回路と共軸である円のまわりにいすれかの極を巡らせようとするどのような力も生成しないであろう。北極は回路 AB 、 BO 、鉛直 OZ を各回転で一度通り、それになされる仕事はそれゆえ $4\pi im$ である。もし Ω, Ω' がそれぞれ磁石の北極、南極で回路 POB が張る立体角の数値なら、磁石と回路のポテンシャルエネルギーは $-mi(\Omega + \Omega')$ である。したがって、もし θ が角 POB なら、一周で磁石になされる仕事は

$$-\int_0^{2\pi} mi \frac{d}{d\theta} (\Omega + \Omega') d\theta = -mi(\omega + \omega')$$

である。したがって磁石になされる全仕事は

$$mi\{4\pi - (\omega + \omega')\}$$

である。 }

p. 146

ある。これらの面のそれぞれは回路によって囲まれており、任意の 2 面 ω_1 、 ω_2 は回路中で角度 $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ ^{註 4} で交わるであろう。

この巻末の図 XVIII は円形電流による等ポテンシャル面の断面を表現している。小さな円は導線の断面を表現し、図底の水平線は円形電流面の中心を通る垂線である。 $\frac{\pi}{6}$ だけ異なる ω の値の列に対応して描かれた 24 の等ポテンシャル面は回転面で、共通軸としてこの線を持っている。それらは明らかに偏平な図で、軸の方向に平たくされている。それらは互いに 15° の角度で回路の線の中で互いに交わる。

等ポテンシャル面の任意の点に置かれた磁極に働く力はこの面に垂直であり、引き続く等ポテンシャル面の間の距離に逆比例する。図 XVIII 中の導線の断面を囲む閉曲線は力線である。それらはトムソン卿の「渦運動」^{註 5} からコピーされている。

任意の磁石系への電気回路の作用。

488.] 電気回路近傍の任意の磁気系への電気回路の作用を板磁石の理論から導くことができる。なぜなら、もし強さが流れの強さに数値的に等しく、板の縁が電流の位置と一致するが、板それ自身は磁気系のいかなる部分も通らない板磁石を構成するなら、磁気系への板の作用は電流の作用と同一であろうからである。

註 4 { これは次のようにして導くことができる：2 つの等ポテンシャル面の交線の近くに面 ω_1 の上に点 P を考える。 O を P の近くの交線上の点とし、 O を中心とする単位円を描く。 P で回路が張る立体角は面 ω_1 の点 O での接平面が単位球を切り取る面積によって測られ、 O からある距離での回路の形によって決められる不規則な錐によって切り取られる面積によって測られる。さて o の近くの第 2 面 ω_2 上の点 Q を考えると、この点に電流が張る立体角は O での ω_2 の接平面によって中心 O の単位球が切り取られる面積、によって測られるであろう。もし P と Q が互いに非常に近いなら前と同じ不規則形の錐によって測られるだろう。こうして、立体角の間の差は接平面の間の月型の面積であり、この面積は接平面間の角度の 2 倍であり、それは ω_1 と ω_2 が交叉する角の 2 倍であり、つまり面の間の角は $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ である。

}
註 5 *Trans. R. S. Edin.*, vol. xxv, p. 217, (1869).

電気回路への磁石系の反作用。

489.] これから、作用と反作用は同じ大きさで反対方向であるという原理を適用して、電気回路上の磁気系の力学作用は回路を縁に持つ板磁石の作用と同じであると結論する。

ポテンシャルが V である磁力の場の中に置かれた強さ ϕ の板磁石のポテンシャルエネルギーは、410 節によって、

p. 147

$$= \phi \iint (l \frac{dV}{dx} + m \frac{dV}{dy} + n \frac{dV}{dz}) dS$$

である。ここで l, m, n は板の要素 dS の正の側面から描かれた法線の方向余弦であり、積分は板の面全体にわたる。

さて、 a, b, c を磁気誘導の成分とすると、面積分

$$N = \iint (la + mb + nc) dS$$

は板を通る磁気誘導の量、つまり、ファラディの言葉で、代数的に数えられた磁気誘導線の数を表す。磁気誘導線は板を負の側から正の側に通り、反対方向に板を通る線は負であると数えられている。

板はポテンシャル V が依存する磁石系には属さないこと、それゆえ、磁力は磁気誘導に等しいことを思い出すと、

$$a = -\frac{dV}{dx}, \quad b = -\frac{dV}{dy}, \quad c = -\frac{dV}{dz},$$

を得、板磁石のポテンシャルエネルギー M の値、

$$M = -\phi N.$$

を書くことができる。

もし、 δx_1 が板の任意の変位を表現し、 X_1 が変位を起こさせる板に作用する力を表現するなら、エネルギー保存の原理から

$$X_1 \delta x_1 + \delta M = 0,$$

つまり

$$X_1 = \phi \frac{dN}{dx_1}.$$

p. 148

である。

板の任意の与えられた変位に対応する力の性質を決めた。その力は変位が板をとおる誘導線の数である N を増加減少させるのにしたがって、変位を促し、それに抗する。

同じことが等価な電気回路についても真である。回路の任意の変位は回路を正の方向に通る誘導線の数を増加減少させるにしたがって促され抗されるであろう。

磁気誘導線の正の方向は北を指す磁極が線にそって動こうとする方向であること、また、縦方向の運動が右ねじの回転運動と関連するように誘導線の方向が回路中のガラス電気の流れの方向と関連しているとき、誘導線が回路を正方向に貫くことを思い出さなければならない。

490.] 回路の全体としての任意の変位に対応する力は板磁石の理論からただちに導くことができる。しかし、これがすべてではない。回路の一部が自由に曲がり、他とは独立に変位されうるなら、板を屈曲自在なジョイントでつながれた十分な数の部分に切り分けることによって板の縁に同じような種類の変位をさせることができる。したがって、与えられた方向の回路の任意の部分の変位によって回路を貫く誘導線の数を増加させるなら、この変位は回路に作用する電磁力によって促進されるであろう。

それゆえ、回路のどの部分も回路の囲みの中で誘導線をより多く含むように、回路に磁気誘導線を横切らせる力の作用を受けている。この変位のあいだにその力によってなされた仕事は付加された誘導線の数に電流の強さをかけたものに等しい。

強さ i の電流が流れる回路の要素 ds をそれ自身に平行に空間中で δx だけ動かすと、平行な辺がそれぞれ ds と δx である平行四辺形の形をした面積を掃きだす。

もし磁気誘導が \mathfrak{B} と表記されるなら、そしてもしその方向が平行四辺形の法線と角 ϵ をなすなら、変位に対応する N の増分値は平行四辺形の面積に $\mathfrak{B} \cos \epsilon$ をかけたものであることが分る。この操作の結果は幾何学的に平行六面体の体積で表現できる。その平行六面体は辺の長さと方向が $\delta x, ds, \mathfrak{B}$ であり、ここで与えられた順で 3 方向を指さしたとき、指さした方向が時計の針の方向に平行六面体の対角線のまわりに回るとき、体積は正であると計算

する^{註6}。この平行六面体の体積は $X\delta x$ に等しい。

もし θ が ds と \mathfrak{B} の間の角なら ds と \mathfrak{B} を辺とする平行四辺形の面積は $ds.\mathfrak{B} \sin \theta$ である。そしてもし η が変位 δx が平行四辺形の法線となす角なら、平行六面体の体積は

$$ds.\mathfrak{B} \sin \theta.\delta x \cos \eta = \delta N$$

である。

さて

$$X\delta x = i\delta N = ids.\mathfrak{B} \sin \theta \delta x \cos \eta,$$

および

$$X = ids.\mathfrak{B} \sin \theta \cos \eta$$

は δx の方向に分解された ds を動かそうとする力である。

それゆえ、この力の方向は平行四辺形に垂直で、その大きさは $i.ds.\mathfrak{B} \sin \theta$ に等しい。

これは辺の大きさと方向が ids と \mathfrak{B} である平行四辺形の面積である。それゆえ ds に作用する力はこの平行四辺形の面積によって大きさが表現され、右ねじが電流 ids から磁気誘導 \mathfrak{B} の方向へ回されたとき右ねじが進む方向によって描かれるその平面の法線によって方向が表現される。

四元数の言葉でこの力の方向と大きさを、電流の要素、ベクトル ids に磁気誘導、ベクトル \mathfrak{B} を掛けた結果のベクトル部分であると言ふことによって表示できる。

491.] こうして私たちは磁場中に置かれた電気回路の任意の部分に作用する力を完全に決定した。もし回路が任意の方法で動かされ、いろいろな形と位置をとつた後、もとの位置に戻るなら、運動のあいだ電流の強さは一定に維持され、

^{註6} { この ds は i の方向に描かれ、観測者はそこから dx , ds , \mathfrak{B} が描かれた平行六面体のかどにいると考えられている。 }

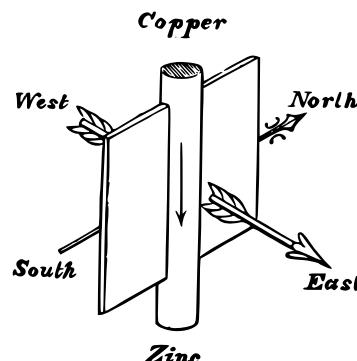


図: 22.

p. 150

電磁力によってなされた仕事の総量は零である。これは回路の運動のいかなるくり返しについても真であるから、摩擦抵抗その他に対して一定の強さの線形回路の任意の部分の連続的な回転を電磁力によって維持するのは不可能であることがわかる。

しかし、電流の通り道のある部分で他の導体の上を滑る一つの導体から電流が通るなら、連続的な回転を生成することは可能である。

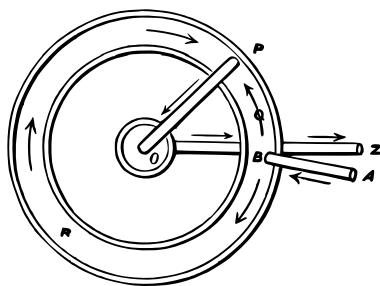


図: 23.

回路の中に滑らかな固体や流体の表面と導体の滑り接触があるとき、回路はもはや一定の強さの単一の線形回路とは考えられず、いろいろな強さの 2 つもしくはそれ以上の数の回路の系とみなさなければならず、電流はそれらのあいだに分布し、 N が増加している回路は正の方向に電流があり、 N が減少している回路には負の方向に電流がある。

こうして、図 23 に表現された装置では、 OP は可動導体で、その一端は水銀容器 O あり、他端は O と中心を共にする水銀の円形の樋の中に浸されている。

電流 i は AB に沿って入り、円形の樋の中で 2 つの部分に分けられ、その 1 つ、 x は弧 BQP に沿って巡り、他の y は BRP にそって巡る。これらの流れは P で合い、可動導体 PO に沿って巡り、電極 OZ が電池の亜鉛端に繋がれている。 PO と OZ に沿う電流の強さは $x + y$ 、つまり i である。

ここで、電流の強さ x で正の方向に巡る $ABQPOZ$ と、電流の強さ y で負の歩行に巡る $ABRPOZ$ の 2 つに回路を得た。

\mathfrak{B} を磁気誘導とし、円の面の法線上向きであるとする。

OP が時計の針の動きと反対方法に角 θ をなして動くあいだに、第 1 の回路の面積は $\frac{1}{2}OP^2\cdot\theta$ 、だけ増加し、第 2 の回路の面積は同じ量だけ減少する。第 1 の回路の電流の強さは x だから、それによってなされた仕事は $\frac{1}{2}OP^2\cdot\theta\cdot\mathfrak{B}$ であり、第 2 の回路の強さは $-y$ だから、それによってなされた仕事は $\frac{1}{2}y\cdot0P^2\cdot\theta\cdot\mathfrak{B}$

である。それゆえ全仕事

$$\frac{1}{2}(x+y)OP^2.\theta\mathfrak{B} \text{ つまり } \frac{1}{2}i.OP^2.\theta\mathfrak{B}$$

は PO の電流の強さにのみ依存する。したがって、もし i が一定に維持され p. 151 ているなら、腕 OP はモーメントが $\frac{1}{2}iOP^2.\mathfrak{B}$ である一様な力で円の回りを何度も運ばれる。

492.] ここで磁石と電流の相互作用から一つの回路の他の回路への作用へ移ることができる。任意の磁気系 M_2 にかんする電気回路 C_1 の磁気的な性質は縁が回路に一致し、強さが電気回路の強さに数値的に等しい、板磁石 S_1 の性質と同一であるからである。磁気系 M_2 を板磁石 S_2 とすると、 S_1 と S_2 のあいだの相互作用は S_1 と、 S_2 の縁と一致し同じ強さの回路 C_2 のあいだの相互作用と同一であり、後者の作用は C_1 と C_2 のあいだの作用と同一である。したがって 2 回路 C_1 と C_2 のあいだの相互作用は対応する板磁石 S_1 と S_2 のあいだの相互作用と同一である。

私たちは既に 423 節で縁が閉曲線 s_1 、 s_2 である 2 つの板磁石の相互作用を研究している。

$$M = \int_0^{s_2} \int_0^{s_1} \frac{\cos \epsilon}{r} ds_1 ds_2,$$

とする。ここで ϵ は要素 ds_1 と ds_2 のあいだの角であり、 r はそれらのあいだの距離であり、積分は s_2 の一周、 s_1 の一周にわたる。もし M を 2 つの閉曲線 s_1 と s_2 のポテンシャルと呼ぶと、2 つの回路を境界とする強さが i_1 、 i_2 の板磁石の相互作用によるポテンシャルエネルギーは

$$-i_1 i_2 M$$

であり、任意の変位 δx を促進する力 X は

$$i_1 i_2 \frac{dM}{dx}$$

である。

電気回路の任意の部分へもう一つの回路の作用によって作用する力の理論は、すべて、この結果から導くことができる。

493.] この章で私たちがしたがった方法はファラディの方法である。次章では、アンペールにしたがって、ある回路の一部の他の部分への直接作用か

ら始めるつもりだが、ここでは、第 1 に、回路は板磁石と同じ磁石への効果を作りだし、言い換えれば、回路による磁場の性質を決めるこことを示す。第 2 に、回路は、任意の磁場の中に置かれたとき、板磁石と同じ力を受けることを示す。こうして磁場の中に置かれた回路に作用する力を決める。最後に、磁場は第 2 の電気回路によると考えることによって一つの回路の他の回路の全体もしくは一部への作用を決める。

494.] この方法を平行直線導体の一部に作用する無限長の直線電流の場合に適用しよう。

第 1 の導体中の電流 i は鉛直下向きに通ると考えよう。この場合、北を指す磁石の端は電流の軸から電流を見る人（足は下向きとして）の右手を指す。

磁気誘導線はそれゆえ水平な円で、その中心を電流の軸に持ち、その正の方向は北、東、南、西である。

もう一つの下降鉛直電流を第一の真東に置く。第一の電流による磁気誘導線は、ここでは、北を向いている。第 2 の電流に作用する力の方向は電流の方向、つまり天底向きから、磁気誘導の方向、つまり北向きへ、2 つの向きの決める平面内で右ねじを回すことによって決められる。ねじは東に向かって進む、つまり、第 2 の電流に作用する力は第 1 の電流に向く。つまり、一般に、現象は電流の相対位置にのみ依存するので、同じ方向に電流を運ぶ 2 つの平行回路は互いに引き合う。

同じように、反対方向に電流を運ぶ 2 つの平行回路は互いに斥けあう。

495.] 強さ i の直線電流から距離 r での磁気誘導の強度は、479 節で示されているように、

$$2\frac{i}{r}.$$

である。

したがって、第 1 の導体に平行な第 2 の導体の一部分は、もし同じ方向に電流を運ぶなら、第 1 の方へ、力

$$F = 2ii'\frac{a}{r},$$

で引きつけられるであろう。ここで a は考察されている部分の長さであり、 r は第 1 の導体からの距離である。

a の r に対する比はこれらの線のどちらかの絶対的な値に独立な数値であるから、電磁系で測られた 2 つの電流の積は力の次元の量でなければならず、したがって電流の単位の次元は

$$[i] = [F^{\frac{1}{2}}] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

である。

496.] 回路に作用する力の方向を決めるもう一つの方法は、電流の他の電流への磁気作用と磁石への作用との関係を考えることである。

電流を運ぶ導線の片側で、電流による磁気作用が他の電流による磁気作用と同じか、ほとんど同じ方向ならば、導線の他の側で、これらの力は反対か、ほとんど反対方向で、導線に作用する力は力が互いに強めあう側から互いに打ち消しあう側へ向くであろう。

こうして、もし下降流が北向きの磁場の中に置かれたなら、その磁気作用は西側で北向きであり、東側で南向きである。したがって西側で互いを強めあい、東側で互いを対抗するであろう。したがって、回路には西から東へ力が作用する。149 ページ、22 図を見よ。

この巻末での図 XVII で、小さな円は下降流を運ぶ導線の断面を表現し、図の左へ向かって作用する一様な磁力の中に置かれている。磁力は導線の上より下でより大きい。それゆえ図の底部から頂部に力を受ける。

497.] もし 2 つの電流が同じ平面上にあり、平行ではないなら、この原理を適用できる。導体の一つを紙面の中の無限直線で、紙面は水平と考えよう。電流の右側^{註 7} で、磁力は下向きに作用し、左側で上向きに作用する。同じ面内の第 2 の電流の任意の短い部分による磁力について、同じことが真である。もし第 2 の電流が第 1 の右側にあるなら、磁力は右側で互いに強めあい、左側で互いに打ち消しあう。したがって第 2 の電流を運ぶ回路はその右側から左側に動かそうとする力によって作用を受ける。この力の大きさは第 2 の電流の位置にのみ依存し、その方向にはよらない。もし第 2 の回路が第 1 の左側にあるなら、それは左から右へ動かそうとされるであろう。

したがって、もし第 2 の電流が第 1 の電流と同じ方向なら、その回路は引きつけられる。もし反対方向なら斥けあう。もし第 2 の電流が第 1 の電流と

^{註 7} { 電流の右側とは、電流が頭から入り足から去るよう置かれた紙に脊を向けた観測者の右である。 }

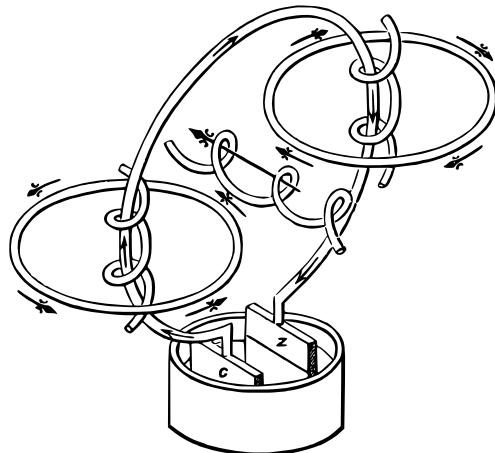


図 24: 電流と右ねじによって示される磁気誘導線のあいだの関係。

直角をなして流れ、第1の電流から去っていくなら、第1の電流の方向に動かされる。もし第2の電流が第1の電流に向かって行くなら、第1の電流が巡る方向の反対方向に動かされる。

2つの電流の相互作用を考察するとき、右ねじを使って説明しようとしてきた電気と磁気のあいだの関係を心にとどめる必要はない。たとえ、もしこれらの関係を忘れたとしても、2つの可能な関係の形の一つを首尾一貫して守り続けるなら、正しい結果に到達するであろう。

p. 155
498.] さて電気回路の磁気現象をそれらを調べてきた範囲で纏めよう。

電気回路をボルタ電池とその終端を結ぶ導線からなると考えることもできるし、熱電設備や、正負の被覆を結ぶ導線をもった荷電されたライデン瓶や、決まった経路に沿って電流を生成する任意のその他の装置からなると考えてもよい。

電流はその近傍に磁気効果を生成する。

もし任意の閉曲線が描かれ、磁力の線積分が完全にそれをまわって取られたなら、そのとき、もし閉曲線が回路と絡んでいないなら、線積分は零であるが、もし閉曲線が回路と絡んでおり、電流 i が閉曲線が囲む面を通り抜けるなら、線積分は $4\pi i$ で、もし閉曲線をまわる積分の方向が、電流が流れる

方向に進む人が見たとき、時計の針の進む方向と一致したなら正である。積分の方向に閉曲線にそって動き、電気回路を貫いて通る人にとって、流れの方向は時計の針の方向のように見えるであろう。私たちはこれを他の方法で2つの閉曲線の方向のあいだの関係は右ねじを電流のまわりに書き、右ねじを閉曲線のまわりに書くことによって表示できると述べることにより表示できる。どちらかの筋道の回転方向が、私たちがそれに沿って通るとき、他の正の方向と一致するなら、線積分は正で、反対の場合は負であろう。

499.] 註—線積分 $4\pi i$ は電流の量にのみ依存し、どのようなものであれ、その他には依存しない。それは、たとえば、それが金属であるか、電解質であるか、不完全導体であるかどうかといった、電流が流れる導体の性質には依存しない。適当な導体がなく、荷電、放電のあいだのライデン瓶のガラスの中のようなたんに電気変位だけのときでさえ、電気の動きの磁気効果は完全に同じであると信ずる理由がある。

また、線積分 $4\pi i$ の値は閉曲線が描かれている媒質の性質にはよらない。閉曲線が全体にわたって空気中に描かれようと、磁石や、軟鉄や、その他のどのような物質を貫いて通ろうと、常磁性体であろうと反磁性体であろうと同じである。

p. 156

500.] 回路が磁場中に置かれたとき、電流と場のその他の構成要素のあいだの相互作用は回路によって境界づけられた任意の面をとおる磁気誘導の面積分に依存する。もし回路、またはその一部の与えられた動きによってこの面積分が増やされたなら、導体や導体の一部を与えられた方法で動かそうとする機械的な力が存在するであろう。

面積分を増加させる導体のこの種の運動は電流の方向に垂直で、誘導線を横切る運動である。

もし平行四辺形が描かれ、その辺が任意の点で電流の強さに平行で比例し、同じ点で磁気誘導に平行で比例するなら、単位長さの導体上の力は数値的にこの平行四辺形の面積に等しく、その面に垂直で、電流の方向から磁気誘導の方向への右ねじの回転運動がねじを進ませる方向に作用する。

したがって、磁気誘導線の新しい電磁気的な定義を得た。それは導体への力がつねに垂直な線である。

p. 157

電流を流したとき、電流を運ぶ導体がその線に沿って力を感じない線と定

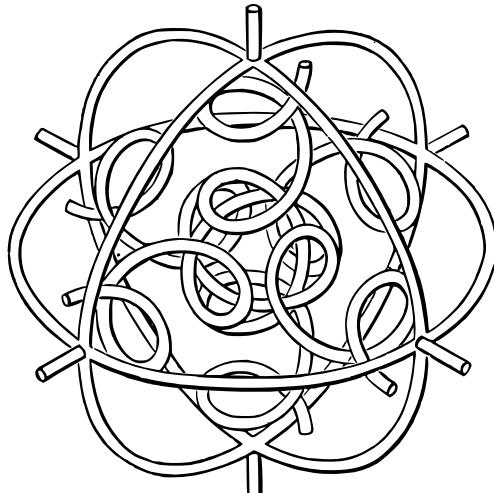


図 25: 運動の正の方向と、3 つの右ねじによって示された回転の方向の関係。

義することもできる。

501.] 電流を担う導体に磁力線を横切らせようとする機械的な力は、電流に作用するのではなく、電流を運ぶ導体に作用することを注意して覚えておかなければならない。もし導体が回転円盤や流体であったなら、それはこの力にしたがって運動するであろう。この運動は導体が運ぶ電流の位置の変化を伴うかもしれないし、伴わないかもしれない。[しかし、もし電流が固定された固体の導体や導線のネットワークを通る任意の経路を自由に選ぶなら、一定の磁力を系に作用させたとき、導体を通る電流の経路は必ずしも永続的に変わらないわけではなく、誘導流と呼ばれる遷移現象が静まった後、電流の分布は磁力が作用していなかったときと同じであることがわかるであろう。]^{註 8}

電流に作用する力は電磁力だけである。それはこの章の主題である機械的な力とは区別されなければならない。

^{註 8} { ホール氏は定常磁場がほとんどの導体で電流の分布をわずかに変えることを発見している (Phil. Mag. ix. p. 225, x. p. 301, 1880) ので、角括弧の中で述べたことは近似的に正しいにすぎないと見なさなければならない。 }

第 II 章

アンペールの電流の相互作用の研究。

502.] 前章で、電流によって生成された磁場の性質と、磁場の中に置かれた電流を運ぶ導体に作用する機械的な力について考察した。ここから、第 2 の回路によって生成された磁場による第 1 の回路への作用を決定することにより、ある電気回路の他の回路への作用の考察に進んだ。しかし、ある回路の他の回路への作用は、もともと、アンペールにより、エルステッドの発見の出版の直後に、直接的な仕方で研究されている。それゆえ、アンペールの方法の概要を与え、次章でこの書の方法を再開しよう。

アンペールを導いたアイデアは遠隔作用を認める系に属し、これらのアイデアに基づく考察と研究の非凡な道筋は、ガウス、F.E. ノイマン、リーマン、ベッティ、C. ノイマン、L. ローレンツ、その他によって遂行されており、新事実の発見、電気理論の形成の両面で非凡な結果をもたらしている。846–866 節参照。

私が従っていこうと試みたアイデアは、ある部分から隣接する部分への媒質を通る作用というものである。これらのアイデアはファラディによって採用され、アイデアを数学形式として展開し、既知の事実と結果を比較することがこれまで出版してきた私の論文の目的であった。哲学的な観点から、第一原理から完全に反する 2 つの方法の結果の比較は科学的な考察の条件の研究にたいして価値あるデータへと導くに違いない。

p. 159

503.] アンペールの電気回路の相互作用の理論は 4 つの実験的な事実と 1 つの仮説に基づいている。

アンペールの基本的な実験はすべて力を比較する零位法と呼ばれてきた方法の例になっている。214 節参照。物体の運動への力学的な効果から力を測

定したり、物体の重さや纖維の弾性と静的につり合させたりすることによって力を測定するのではなく、零位法では同じ源による 2 つの力を既に平衡にある物体に同時に作用させても、いかなる効果も生成しないことが、これらの力が平衡にあることを示している。この方法は電流がいろいろな形の回路を通るとき、電流の効果を比較するのに特異的に価値がある。すべての導体を一つの連続的な系列に結び付けることにより、流れの強さがその道筋の各点で同じであることを確実なものにし、電流はその道筋のどこでもほぼ同じ瞬間に始まるので、吊るされた物体へのその作用による力は平衡にあることを物体は電流の開始、停止によってまったく影響を受けないことを観測することにより証明できる。

504.] アンペールの天秤は鉛直軸のまわりに回転できる軽い枠からなり、同じ面または平行な面の中で、同じ面積の 2 つの回路を形成する導線を携えており、2 つの回路で電流は反対方向に巡る。この配置の目的は地磁気の導線への効果を取り除くことである。電気回路が自由に動くときは、回路は可能な最大数の誘導線を抱き込む位置に自らを持っていこうとする。もしこれらの線が地磁気によるものなら、鉛直面中の回路にたいして、この位置は回路の面が磁東と磁西であるときであり、電流の方向が太陽の見かけの経路に反対方向のときである。

同じ大きさの電流が反対方向に走る平行な平面中の同じ面積の 2 つの回路を剛体的に結び付けることによって、地磁気の影響を受けない組合せが形成され、それゆえ、無定位組合せと呼ばれている。26 節参照。しかし、それは近くにある 2 つの回路に異なった作用をする電流や磁石から生じる力によって作用を受ける。

505.] アンペールの第 1 の実験は互いにすぐ近くにある 2 つの同じ大きさの反対方向の電流の効果についてのものである。絶縁物質によって覆われた導線が重ねられ、無定位天秤の回路の一つの近くに置かれる。導線と天秤に電流を通したとき、天秤の平衡は乱されないまま維持され、反対方向の互いに近い 2 つの同じ大きさの電流は互いを中性化する。もし、2 导線を横に並べる代わりに金属管の中央で導線が絶縁され、電流が導線を通り、管によつて戻るなら、管の外の作用は近似的ではなく、正確に零である。この原理は電気装置を構成するさいに非常に重要である。それは電流計やその他の器具

を、器具に入り出す途中で電流によって作りだされた電磁効果をなくすように電流を運ぶ手段を与えるからである。互いに完全に絶縁状態を保つよう注意を払えば、実際には導線を互いに結び付けるだけで一般には十分であるが、装置の任意の敏感な部分の近くを通らなければならない所では、導体の一方を管にし、他の導線をその中に通す方がよい。

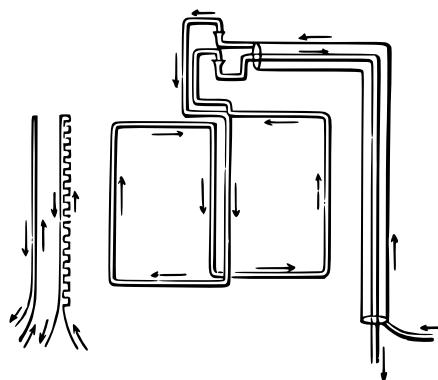


図 26.

506.] アンペールの第 2 の実験では、一方の導線を曲げていくつもの小さな弯曲を作るが、その道筋のどの部分でも、直線導線のごく近くに留まるようする。電流は曲がった導線を通り、再び直線導体を通って流れるが、無定位天秤に影響しないことが分かる。これは導線の任意の曲がった部分を走る電流の効果は、先端を結ぶ直線を走る電流と、屈曲した線がいかなる部分でも直線から遠くに離れないなら、同じであることを証明している。したがって、回路の任意の小さな要素は 2 つまたはそれ以上の成分を持つ要素に等価であり、成分要素と合成要素のあいだの関係は変位や速度の成分と合成のあいだの関係と同じである。

p. 161

507.] 第 3 の実験では長さの方向にのみ動くことのできる導体が無定位天秤の代わりをする。電流は空間の固定点で導体に入り、出て行く。近くに置かれたいかなる閉回路も導体を動かさないことが分かる。

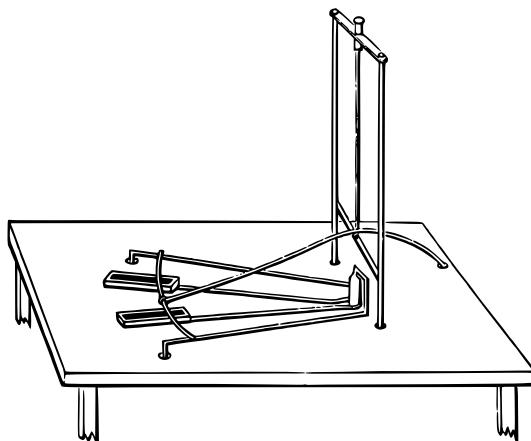


図 27.

この実験の導体は鉛直軸のまわりに回転できる枠に吊るされた円弧の形の導線である。円弧は水平で、その中心は鉛直軸に一致する。2つの小さな樋が水銀の凸面が樋の水準の上に上がるまで水銀で満たされる。樋は円弧の下に置かれ、水銀が導線に触れるように調整される。導線はよくアマルガム化された銅である。電流は一方の樋から入り、樋のあいだの円弧の部分を横切り、他方の樋から逃げる。電流は円弧の部分を横切り、弧は同時に長さの方向にかなり自由に動くことができる。任意の閉じた電流や磁石が可動導体に近づけられるが、長さの方向への動きのわずかな傾向も作りださない。

p. 162
508.] 無定位天秤での第 4 の実験では 2 つの回路が使われる。それぞれは天秤の中の回路の一つに相似であるが、その一方、 C は n 倍大きく、他方 A は n 倍小さい、これらは天秤の回路に対して反対側に置かれ、天秤の回路を B と呼ぶが、それにかんして同じように置かれ、 B から C への距離は B から A への距離より n 倍大きい。

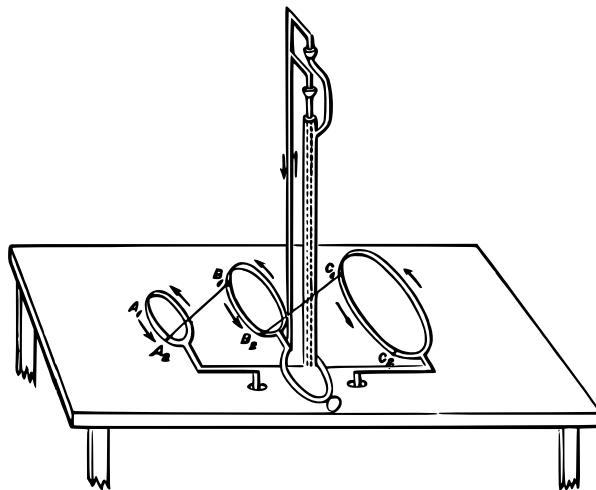


図 28.

電流の方向と強さは A と C で同じである。 B での電流の方向は同じかもしれないし、反対かもしれない。これらの状況のもので、それらが上に与えられた関係を持っているなら、3回路の形や距離がなんであれ、 B は A と C の作用と平衡であることが分かる。全回路のあいだの作用は回路要素のあいだの作用によると考えられるので、私たちはこれらの作用の法則を決める以下の方法を使うことができる。

A_1, B_1, C_1 を 3 つの回路の対応する要素とし、 A_2, B_2, C_2 もまた回路の別の部分の対応する要素とする。 B_1 の A_2 にかんする状況は C_1 の A_2 にかんする状況と似ているが、 C_1 と B_2 の距離と大きさは、それぞれ、 B_1 と A_2 の距離と大きさの n 倍である。もし電磁作用の法則が距離の関数なら B_1 と A_2 のあいだの作用は、形や量がなんであれ、

$$F = B_1 \cdot A_2 f(\overline{B_1 A_2}) ab,$$

と書け、 C_1 と B_2 のあいだの作用は

$$F' = C_1 \cdot B_2 f(\overline{C_1 B_2}) bc,$$

と書ける。ここで a, b, c は A, B, C での電流の強さである。しかし $nB_1 = C_1$, p. 163

$nA_2 = B_2$, $n\overline{B_1 A_2} = \overline{C_1 B_2}$, そして $a = c$ である。したがって、

$$F' = n^2 B_1 \cdot A_2 f(n\overline{B_1 A_2}) ab,$$

であり、実験によって、これは F に等しい。したがって、

$$n^2 f(n\overline{A_2 B_1}) = f(\overline{A_2 B_1}),$$

を得る。つまり、力は距離の平方の逆数にしたがって変化する^{註 1}。

509.] これらの実験にかんしてどの電流も閉回路を形成していることを見てとることができる。アンペールによって用いられた電流は、ボルタ電池によって生成されたもので、もちろん、閉回路中にある。導体の火花放電による電流の場合は、開いた有限の線を形作る電流を持ったと考えられるかもしれないが、この本の見解に従うと、この場合でさえ、閉じた回路の電流である。閉じていない電流の相互作用についていかなる実験もなされてはいない。したがって、回路のどの 2 要素の相互作用についての言明も、純粹な実験の基礎の上に立っていると言うことはできない。回路の一部への他の電流の作用を確かめるために回路の一部を動かせるようにできたことは真であるが、これらの電流は、可動部分の電流とあわせて、必然的に閉じた回路を形成し、実験の最終結果は閉じた回路の全体または一部への一つないしそれ以上の閉じた電流の作用である。

510.] しかし、実験の解析では、閉じた回路のそれ自体の要素への、もしくは、他の回路への作用を数学的目的のため、第 1 の回路が分割されたと考えられる分離した部分に依存するいくつかの別々の力の合成と見なすことができる。

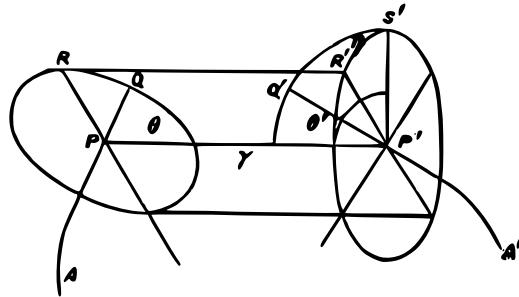
これはたんに作用の数学的な解析にすぎず、それゆえ、これらの力が実際に別々に作用していようと、そうでなかろうと、完全に正当である。

511.] 回路を表現する空間中の 2 つの線のあいだの純粹に幾何学的な関係の考察から始めよう。

空間中に 2 つの曲線があり、そのそれぞれに固定点が取られ、そこから弧が曲線に沿って決まった方向に測定されるとする A, A' をこれらの点とする。 PQ と $P'Q'$ を 2 つの曲線に要素とする。

^{註 1} { この実験が逆二乗則へ導く他の証明が 523 節で与えられている。おそらく読者は前のもよりそれがより単純で説得力があると分るであろう。 }

$$\left. \begin{array}{l} AP = s, \quad A'P' = s', \\ PQ = ds, \quad P'Q' = ds', \end{array} \right\} \quad (1)$$



図：29

とし、距離 PP' は r と表記されるとする。角 $P'PQ$ は θ 、角 $PP'Q'$ は θ' と表記されるとする。これらの角が決める平面のあいだの角を η と表記されるとする。

2要素の相対位置はこれらの距離 r 、角 η 、 θ' 、 η によって十分に定義される。もしこれらが与えられたなら、それらが同じ剛体の一部分を形成したかのように、そ

れらの相対位置が完全に決められるからである。

512.] もし直交座標を使い、 x, y, z を P の座標、 x', y', z' を P' の座標とするなら、そして l, m, n と l', m', n' によって、それぞれ、 PQ と $P'Q'$ の方向余弦とすると、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{ds} = l, \quad \frac{dy}{ds} = m, \quad \frac{dz}{ds} = n \\ \frac{dx'}{ds'} = l', \quad \frac{dy'}{ds'} = m', \quad \frac{dz'}{ds'} = n' \end{array} \right\} \quad (2)$$

そして

$$\left. \begin{array}{l} l(x' - x) + m(y' - y) + n(z' - z) = r \cos \theta, \\ l'(x' - x) + m'(y' - y) + n'(z' - z) = -r \cos \theta', \\ ll' + mm' + nn' = \cos \epsilon, \end{array} \right\} \quad (3)$$

である。ここで ϵ は要素自身の方向のあいだの角であり、

$$\cos \epsilon = -\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \eta \quad (4)$$

である。再び

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \quad (5)$$

p. 165

である。

$$\left. \begin{aligned} \text{それゆえ} \quad r \frac{dr}{ds} &= -(x' - x) \frac{dx}{ds} - (y' - y) \frac{dy}{ds} - (z' - z) \frac{dz}{ds}, \\ &\qquad\qquad\qquad = -r \cos \theta. \\ \text{同様に} \quad r \frac{dr}{ds'} &= (x' - x) \frac{dx'}{ds} + (y' - y) \frac{dy'}{ds} + (z' - z) \frac{dz'}{ds}, \\ &\qquad\qquad\qquad = -r \cos \theta'; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

であり、 $r \frac{dr}{ds}$ を s' にかんして微分して、

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^2r}{dsds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} &= -\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'}, \\ &= -(ll' + mm' + nn'), \\ &= -\cos \epsilon, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

がなりたつ。

それゆえ、3つの角 θ , θ' , η 、そして補助角 ϵ を s および s' にかんする微分係数を使ってつぎのように表示することができる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{dr}{ds}, \\ \cos \theta' &= -\frac{dr}{ds'}, \\ \cos \epsilon &= -r \frac{d^2r}{dsds'} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}, \\ \sin \theta \sin \theta' \cos \eta &= -r \frac{d^2r}{dsds'} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

513.] つぎに要素 PQ と $P'Q'$ が互いに作用することを、どのように数学的に取り扱えるかを考えよう。そのとき、最初はその相互作用が必ずしもそれらを結ぶ直線上にあるとは仮定しないこととする。

私たちは、要素の成分がベクトルの加法の規則にしたがって組み合わされたとき、合成としてもとの要素を生成するなら、それぞれの要素が他の要素に分解されると考えてよいことを見てきた。

それゆえ、平面 $P'PQ$ 内で、 ds が r 方向に $\cos \theta ds = \alpha$ と r の垂直方向に $\sin \theta ds = \beta$ に分解されると考えよう。

また ds' が r の反対方向に $\cos \theta' ds' = \alpha'$ 、 β が測ら

れる方向と平行に $\sin \theta' \cos \eta ds' = \beta'$ に分解され、 $\sin \theta' \sin \eta ds' = \gamma'$ が α' と β' の垂直方向に分解されると考えよう。

一方で成分 α と β 、他方で α' , β' , γ' のあいだの作用を考えよう。

(1) α と α' が同じ直線内にある。それゆえ、それらのあいだの力はこの線内にあらねばならない。私たちはそれを引力

$$= A\alpha\alpha'ii',$$

であると考える。

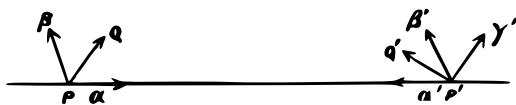
(2) β と β' は互いに平行で、それらを結ぶ線に垂直である、これらのあいだの作用は

$$B\beta\beta'i'i',$$

と書くことができる。

この力は明らかに β と β' を結ぶ線上にある。それはそれら両方がある平面内になければならず、もし β , β' を反対方向に測ったとしても、この表式の値は同じままで、それはもしそれが力を表現しているなら力は β 方向の成分を持たないことを示し、それゆえ、 r に沿った方向でなければならないからである。この表式が正のとき、引力を表現すると仮定しよう。

(3) β と γ' が互いと、それらを結ぶ線に垂直である。そのような関係で要素間の唯一の可能な作用はその軸が r に平行な偶力のみである。私たちはいま力に係わっているので、これは考察の外に置いておく^{註2}。



図：30

^{註2} { β と γ' の両方に直角で、 γ' が β まわりに 90° 右ねじによって運ばれる方向というような規則が、もしどちらかの成分が逆にされ、両方は逆にはされないと仮定することは正しくないという異議があるかもしれない。そのような力が存在しないと仮定する理由は力の方向がたんに電流の方向によってのみ決められ、その相対的な位置によってではないことである。こうして例えばもし図 30 で P' が P の右ではなくて左にあるなら、要素のあいだの力は斥力から引力に変わるであろう。 }

(4) α と β' の作用が、もしそれらが互いに作用するなら、 $C\alpha\beta'ii'$ と表示されなければならない。この表式の符号はもし β' を測る方向を逆にするなら、逆になる。それゆえ、それは β' の方向の力を表現するか、 α と β' の平面内の偶力を表現するかのどちらかである。私たちは偶力を調べていないので、それは β' 方向に働く力と考えよう。

p. 167

もちろん、 β' に作用する同じ大きさで反対方向の力がある。

同じ理由によって α に作用する γ' 方向の力

$$C\alpha\gamma'ii',$$

と β に作用する β が測られる方向の逆方向の力

$$C\beta\alpha'ii',$$

を得る。

514.] 以上の結果を総合すると、 ds への作用は次の力の複合であることが分かる。

$$\left. \begin{array}{ll} X = (A\alpha\alpha' + B\beta\beta')ii' & r \text{ の方向に} \\ Y = C(\alpha\beta' - \alpha'\beta)ii' & \beta \text{ の方向に,} \\ Z = C\alpha\gamma'ii' & \gamma' \text{ の方向に.} \end{array} \right\} \quad (9)$$

ds に作用するこの力は 3 つの力、 r の方向に作用する $Rii'dsds'$ 、 ds の方向に作用する $Sii'dsds'$ 、 ds' の方向に作用する $S'i'i'dsda'$ の合成と考えよう。このとき、 θ, θ', η を使って

$$\left. \begin{array}{l} R = A + 2C \cos \theta \cos \theta' + B \sin \theta \sin \theta' \cos \eta, \\ S = -C \cos \theta', \quad S' = C \cos \theta, \end{array} \right\} \quad (10)$$

である。

r の微分係数を使うと

$$\left. \begin{array}{l} R = A + 2C \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - Br \frac{d^2r}{dsds'}, \\ S = C \frac{dr}{ds'}, \quad S' = -C \frac{dr}{ds}, \end{array} \right\} \quad (11)$$

である。

$l, m, n,$ と l', m', n' を使うと

$$\left. \begin{aligned} R &= -(A + 2C + B) \frac{1}{r^2} (l\xi + m\eta + n\zeta)(l'\xi + m'\eta + n'\zeta) + B(l'l' + mm' + nn,), \\ S &= C \frac{1}{r} (l'\xi + m'\eta + n'\zeta), \quad S' = C \frac{1}{r} l\xi + m\eta + n\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。ここで ξ, η, ζ は、それぞれ、 $x' - x, y' - y, z' - z$ に代えて書かれている。

515.] 次に有限の電流 s' が有限の流れ s に作用する力を計算しなければならない。電流 s は $s = 0$ である A から、 s を持つ P まで拡がる。おのおのの流れの上の位置の座標は s 、または s' の関数である。

もし F が点の位置の任意の関数なら、その P での値の A での値にたいする超過分を表記するため、下添字 $(s,0)$ を使おう。こうして、

$$F_{(s,0)} = F_P - F_A,$$

である。

p. 168

$A'P'$ が AP に作用する全体の力の成分を $ii'X, ii'Y, ii'Z$ とする。すると、 ds' が ds に作用する力の X に平行な成分は $ii' \frac{d^2X}{dsds'} dsds'$ である。

したがって

$$\frac{d^2X}{dsds'} = R \frac{\xi}{r} + Sl + S'l', \quad (13)$$

である。

R, S, S' の値を (12) から代入して、

$$l'\xi + m'\eta + n'\zeta = r \frac{dr}{ds'}, \quad (14)$$

l, m, n にかんする項を整理して

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dsds'} &= l\{-(A + 2C + B) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds'} \xi^2 + C \frac{dr}{ds'} + (B + C) \frac{l'\xi}{r}\} \\ &\quad + m\{-(A + 2C + B) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds'} \xi\eta + C \frac{l'\eta}{r} + B \frac{m'\xi}{r}\} \\ &\quad + n\{-(A + 2C + B) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds'} \xi\zeta + C \frac{l'\zeta}{r} + B \frac{n'\xi}{r}\}, \end{aligned} \quad (15)$$

であることがわかる。

A, B, C は r の関数だから、

$$P = \int_r^\infty (A + 2C + B) \frac{1}{r^2} dr, \quad Q = \int_r^\infty C dr, \quad (16)$$

と書くことができる。 A, B, C は $r = \infty$ のとき零になるから、積分は r と ∞ のあいだでとられる。したがって

$$(A + B) \frac{1}{r^2} = -\frac{dP}{dr}, \quad \text{かつ} \quad C = -\frac{dQ}{dr}, \quad (17)$$

である。

516.] アンペールの平衡の第 3 の場合により、 s' が閉じた回路のとき、 ds に作用する力は ds の方向に垂直である、つまり、言葉を変えれば、 ds それ自身の方向の力の成分は零であることが分かっている。それゆえ、 $l = 1, m = 0, n = 0$ とすることによって、 x 軸の方向を ds に平行であると仮定しよう。このとき (15) 式は

$$\frac{d^2 X}{ds ds'} = \frac{dP}{ds'} \xi^2 - \frac{dQ}{ds'} + (B + C) \frac{l' \xi}{r}, \quad (18)$$

になる。

ds への単位長さあたりの力、 $\frac{dX}{ds}$ を見出すため、この s' にかんして積分しなければならない。第 1 項を部分積分して、

$$\frac{dX}{ds} = (P \xi^2 - Q)_{(s', 0)} - \int_0^{s'} (2Pr - B - C) \frac{l' \xi}{r} ds', \quad (19)$$

であることがわかる。

s' が閉回路のとき、この表式は零でなければならない、第 1 項は自然に零となる。しかし、第 2 項は、積分の記号下の量が常に零でないかぎり、閉じた回路の場合一般には消えないであろう。したがって、アンペールの条件を満たすためには、

$$P = \frac{1}{2r} (B + C), \quad (20)$$

と置かなければならない。

517.] さて、 P を消去することができ、 $\frac{dX}{ds}$ の一般的な値が

$$\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= \left\{ \frac{B+C}{2} \frac{\xi}{r} (l\xi + m\eta + n\zeta) + Q \right\}_{(s',0)} \\ &+ m \int_0^{s'} \frac{B-C}{2} \frac{m'\xi - l'\eta}{r} ds' - n \int_0^{s'} \frac{B-C}{2} \frac{l'\zeta - n'\xi}{r} ds', \end{aligned} \quad (21)$$

であることが分かる。

s' が閉回路のとき、この表式の第 1 項が消え、もし

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \int_0^{s'} \frac{B-C}{2} \frac{n'\eta - m'\zeta}{r} ds', \\ \beta' &= \int_0^{s'} \frac{B-C}{2} \frac{nl'\zeta - n'\xi}{r} ds', \\ \gamma' &= \int_0^{s'} \frac{B-C}{2} \frac{m'\xi - l'\eta}{r} ds', \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

で、積分は閉回路 s' 一周にわたるとすると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= m\gamma' - n\beta', \\ \text{同様に } \frac{dY}{ds} &= n\alpha' - l\gamma', \\ \frac{dZ}{ds} &= l\beta' - m\alpha', \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

と書くことができる。

量 α', β', γ' はしばしば回路 s' の点 P にかんする決定因子^{註 3} と呼ばれる。アンペールはその合成 $(\alpha', \beta', \gamma')$ を電磁作用の準線^{註 4} と呼んだ。

式から、成分が $\frac{dX}{ds} ds$, $\frac{dY}{ds} ds$, $\frac{dZ}{ds} ds$, である力は ds とその準線に垂直であることは明らかで、数値的に辺が ds と準線である平行四辺形の面積によって表現される。

四元数の言葉で ds 上の合力は準線に ds をかけた積のベクトル部分である。

すでに準線は回路 s' 中の単位の電流による磁力と同じものであることを知っているので、これ以降、準線を回路による磁力と言おう。

p. 170

註 3 訳註: determinants. 接尾語 -ant は determin するものを表す。

註 4 訳註: directrix. 接尾語 -trix は direct する女性を表す。

518.] 閉、開に関わりなく 2 つの有限の電流のあいだに作用する力の成分の計算を完了させよう。

ρ を r の新しい関数で

$$\rho = \frac{1}{2} \int_r^\infty (B - C) dr, \quad (24)$$

のようなものとすると、(17) と (20) によって

$$A + B = r \frac{d^2}{dr^2} (Q + \rho) - \frac{d}{dr} (Q + \rho), \quad (25)$$

であり、(11) 式は

$$\left. \begin{aligned} R &= -\frac{d\rho}{dr} \cos \epsilon. + r \frac{d^2}{dsds'} (Q + \rho), \\ S &= -\frac{dQ}{ds'}, \quad S' = \frac{dQ}{ds}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

となる。

成分の力のこれらの値によって、(13) 式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dsds'} &= -\cos \epsilon \frac{d\rho}{dr} \frac{\xi}{r} + \xi \frac{d^2}{dsds'} (Q + \rho) - l \frac{dQ}{ds'} + l' \frac{dQ}{ds}. \\ &= \cos \epsilon \frac{d\rho}{dx} + \frac{d^2 \{(Q + \rho)\xi\}}{dsds'} + l \frac{d\rho}{ds'} - l' \frac{d\rho}{ds}, \end{aligned} \quad (27)$$

となる。

519.]

$$F = \int_0^s l \rho ds, \quad G = \int_0^s m \rho ds, \quad H = \int_0^s n \rho ds, \quad (28)$$

$$F' = \int_0^{s'} l' \rho ds, \quad G' = \int_0^{s'} m' \rho ds, \quad H' = \int_0^{s'} n' \rho ds, \quad (29)$$

とする。

これらの量は空間の任意の与えられた点で決まった値を持っている。回路が閉じたとき、それは回路のベクトルポテンシャルの成分に対応する。

L を

$$L = \int_0^r r(Q + \rho) dr, \quad (30)$$

のような、 r の新しい関数とし、 M を二重積分

$$\int_0^{s'} \int_0^{s'} \rho \cos \epsilon ds ds', \quad (31)$$

とする。それは、回路が閉じられたとき、それらの相互ポテンシャルとなり、 p. 171 (27) 式は

$$\frac{d^2 X}{ds ds'} = \frac{d^2}{ds ds'} \left\{ \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dx} + F - F' \right\}, \quad (32)$$

と書ける。

520.] 与えられた極限のあいだで、 s と s' にかんして積分すると

$$\begin{aligned} X = & \frac{dM}{dx} - \frac{d}{dx} (L_{PP'} - L_{AP'} - L_{A'P} + L_{AA'}), \\ & + F_{P'} - F_{A'} - F'_P + F'_A, \end{aligned} \quad (33)$$

であることが分かる。ここで L の下添字は距離, r , を指し、量 L はその関数である。 F と F' の下添字はその値が取られる点を指している。

Y, Z にたいする表式もこれから書き下すことができる。3 つの成分に、それぞれ、 dx, dy, dz をかけて

$$\begin{aligned} X dx + Y dy + Z dz = & DM - D(L_{PP'} - L_{AP'} - L_{A'P} + L_{AA'}) \\ & - (F' dx + G' dy + H' dz)_{(P-A)} \\ & + (F dx + G dy + H dz)_{(P'-A')}, \end{aligned} \quad (34)$$

を得る。ここで D は全微分の記号である。

$F dx + G dy + H dz$ は一般に x, y, z の関数の全微分ではないから、 $X dx + Y dy + Z dz$ は、そのどちらかが閉じていないとき、一般には電流の全微分ではない。

521.] しかし、両方の電流が閉じているなら、 L, F, G, H, F', G', H' の項は消え、

$$X dx + Y dy + Z dz = DM, \quad (35)$$

となる。ここで M は単位の電流を運ぶ 2 つの閉回路の相互ポテンシャルである。量 M は回路が自分自身に平行に無限の距離からその実際の位置まで動かされたとき、導体回路のどちらかへ電磁力によってなされた仕事である。

その位置の任意の平行は、それによって M は増加するが、電磁力によって助けられるであろう。

490 節、592 節のように、回路の運動がそれ自身に平行ではないとき、それに作用する力は一方の回路の他方へのポテンシャル、 M の変化によって決まっていることを示すことができる。

522.] この研究で使われた唯一の実験事実は閉回路の他の回路の任意の部分への作用は後者の方向に垂直であるというアンペールによって確立された事実である。研究の他のどの部分も空間中の線の性質に依存した純粹に数学的な考察に依存している。それゆえ、推論は、そのような幾何学的な関係の表式—ハミルトンの四元数、に特別に採用された数学的方法のアイデアと言葉をつかうことによって、より凝縮され適當な形式で提示できる。

これはティト教授により、*Quarterly Journal of Mathematics*, 1866, と彼の著書四元数のアンペールのもともとの研究に対する節, §399, でなされており、学生は簡単にここで与えられたものより少し一般的な研究に同じ方法を採用することができる。

523.] これまで、量 A, B, C にかんして、それらが要素間の距離 r の関数であるという以外、なんの仮定もしなかった。私たちは次にこれらの関数の形を突き止めなければならず、この目的のため、アンペールの平衡の第 4 の場合、508 節、を使う。そこで、もし 2 回路の系の線形次元と距離のすべてが同じ割合で変えられたなら、電流は同じまま維持されることが示されており、2 回路のあいだの力は同じまま維持されるであろう。

単位の電流にたいする回路のあいだの力は $\frac{dM}{dx}$ であり、これは系の大きさに独立だから、それは無次元量でなければならない。したがって、回路の相互ポテンシャルの係数、 M それ自身は長さの次元の量でなければならない。(31) から ρ は長さの逆数でなければならない、それゆえ、(24) によって、 $B - C$ は長さの逆 2 乗でなければならない。しかし、 B, C は両方とも r の関数であるから、 $B - C$ は r の逆 2 乗かその数値倍でなければならない。

524.] 私たちが採用した乗数は私たちの測定系に依存する。もし電磁系を採用すると、それは磁気の測定にたいして既に確立された系に一致するのでそう呼ばれるが、 M の値は境界がそれぞれ 2 つの回路である強さ 1 の 2 つに板磁石のポテンシャルの乗数に一致するはずである。その場合の M の値は、

423 節によつて、

$$M = \iint \frac{\cos \epsilon}{r} dsds', \quad (36)$$

であり、積分は両回路の正の方向をまわつて行われる。

p. 173

M の数値としてこれを採用し、(31) と比較すると

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \text{かつ} \quad B - C = \frac{2}{r^2}, \quad (37)$$

であるところが分かる。

525.] さて、 ds' の作用から生じる ds への力の成分を実験事実と矛盾しないもつとも一般的な形で表示できる。

ds への力は引力

$$\left. \begin{aligned} Rii' dsds' &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - 2r \frac{d^2 r}{dsds'} \right) ii' dsds' + r \frac{d^2 Q}{dsds'} ii' dsds' && r \text{ の方向に,} \\ Sii' dsds' &= -\frac{dQ}{ds'} ii' dsds' && s \text{ の方向に,} \\ Sii' dsds' &= \frac{dQ}{ds} ii' dsds' && ds' \text{ の方向に,} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

の複合されたものである。ここで $Q = \int_r^\infty C dr$ であり、 C は r の未知の関数であるから、 Q は r のなんらかの関数であることだけを知つてゐる。

526.] 量 Q は能動的な電流が閉回路を形成する実験から、なんらかの仮定なしでは決めることができない。アンペールとともにもし要素 ds と ds' のあいだの作用はそれらを結ぶ直線内にあると考えるなら、 S 、 S' は消えなければならず、 Q は定数または零でなければならない。このとき力はその値が

$$Rii' dsds' = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - 2r \frac{d^2 r}{dsds'} \right) ii' dsds', \quad (39)$$

である引力に還元される。この研究を磁気単位系が確立されるはるか以前に行つたアンペールはこれの半分の数値をもつ公式、つまり、

$$Rjj' dsds' = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - r \frac{d^2 r}{dsds'} \right) jj' dsds', \quad (40)$$

を使った。

ここでは電流の強さは電磁尺度と呼ばれるもので測られている。もし i, i' が電磁尺度での電流の強さで j, j' が同じ電流の電気力学尺度での強さなら、

$$jj' = 2ii', \quad \text{つまり} \quad j = \sqrt{2}i, \quad (41)$$

は明白である。

したがって電磁尺度で採用された単位の電流は電気力学尺度で採用されたものより、1にたいして $\sqrt{2}$ の比で大きい。

p. 174
考察のための電気力学単位の唯一の拠り所はそれがもともと、電流のあいだの作用の法則の発見者、アンペールによって採用されたことである。そこで見出される計算における $\sqrt{2}$ の絶え間ない繰り返しは不便であり、電磁系はすべての磁気の公式と数値的に一致するという大きな利点を持っている。学生が $\sqrt{2}$ で掛けるべきか割るべきか、心に留めることは困難なので、これ以降、ウェーバーやその他の著者によって採用された、電磁系のみを使うことをとする。

Q の形や値は、少なくとも能動的な電流は常に閉じたものである、これまで行われたいかなる実験にも影響はないので、もしよければ、公式を簡単化するように思える Q のいかなる値も採用することができる。

こうしてアンペールは 2 要素のあいだの力はそれらを結ぶ直線内にあると仮定した。これは $Q = 0$,

$$Rii'dsds' = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - 2r \frac{d^2r}{dsds'} \right) iidsds', \quad S = 0, \quad S' = 0, \quad (42)$$

を与える。

グラスマン^{註 5} は同じ直線内の 2 要素は相互作用を持たないと仮定した。これは

$$Q = -\frac{1}{2r}, \quad R = -\frac{3}{2r} \frac{d^2r}{dsds'}, \quad S = -\frac{1}{2r^2} \frac{dr}{ds'}, \quad S' = \frac{1}{2r} \frac{dr}{ds}, \quad (43)$$

を与える。

もしそうしたいなら、与えられた距離での 2 要素のあいだの引力はそれらのあいだの角度の余弦に比例すると仮定してもよい。この場合、

$$\underline{Q = -\frac{1}{r}, \quad R = \frac{1}{r^2} \cos \epsilon, \quad S = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds'}, \quad S' = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds}}, \quad (44)$$

^{註 5} Pogg., Ann. 64, p. 1 (1845).

である。

最後に、引力と斜めの力は要素がそれらを結ぶ線となす角度にのみ依存すると仮定してもよく、そのときは

$$Q = -\frac{2}{r}, \quad R = -3 \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}, \quad S = -\frac{2}{r^2} \frac{dr}{ds'}, \quad S = \frac{2}{r^2} \frac{dr}{ds}, \quad (45)$$

を得たであろう。

527.] 4つの異なる仮定のなかで、アンペールの仮定が疑いもなく最良である。それが2要素への力が同じ大きさで反対方向であるだけではなく、それらを結ぶ直線内にあるからである。

第 III 章

電流の誘導について。

528.] エルステッドによる電流の磁気作用の発見は、直接的な推論により、電流による磁化の発見や、電流のあいだの機械的な作用の発見へと導いた。しかし、1831年になって、やっと、長らく磁気や電気の作用による電流の生成に勤めていたファラディが磁気電気誘導の条件を発見したのである。ファラディが研究で採用した方法は、彼のアイデアの正しさを検証する方法として絶えず実験に訴え、実験の直接の影響下で絶えずアイデアを耕し続けることにあった。出版された彼の研究で、これらのアイデアが揺籃期の科学にまったく適した言葉で表示されていることが分る。確立された数学的思考形式に慣れた物理学者のスタイルとはいくぶん異質のものであるからである。

アンペールが電流間の機械的な作用の法則を確立した実験的な研究は科学のもっとも輝かしい業績の一つである。

理論と実験、その全体は「電気のニュートン」の頭脳から、成熟し完全武装して飛び出したかのように見える。それは形式的に完全で、議論の余地なく正確で、ひとつの公式にまとめられ、その公式からすべての現象が導かれ、その公式は常に電気力学の基本公式であり続けるにちがいない。

しかし、アンペールの方法は、帰納的な形式に鑄造されているが、それを導いたアイデアの形成を辿ることを許さない。アンペールが記述している実験によってアンペールがその法則を本当に発見したとは信じられない。実際、彼が私たちに自分自身について何を語っていても^{註1}、私たちに示していないなんらかの過程によって法則を発見したのではないか、彼が後で完全な証明を組み上げたとき、彼は自分が上ってきた足場の跡をすべて取り去ったの

ではないかと、疑わざるをえない。

他方、ファラディは成功した実験とともに不成功であった実験も、発展させられたアイデアとともに荒削りなアイデアも私たちに示し、読者は、帰納能力で彼にどれほど劣っているとしても、賞讃を越え共感を覚え、もし機会があれば、読者もまた発見者であったのではないかと信じさせるものがある。それゆえ、どの学生もアンペールの研究を発見の報告の科学的なスタイルの素晴らしい例として読むべきであるが、ファラディによって学生に紹介された新しく発見された事実と学生自身の心の中の搖籃期のアイデアのあいだで起ころる作用と反作用によって、科学精神を耕すためファラディを研究すべきである。

ファラディは空間、時間、力の基礎的な形について完全に気づいていたが、ファラディはプロの数学者ではなかったことが、おそらく科学の強みとなつた。彼は数学的な形式で提示されていたなら彼の発見が示唆した純粋数学における多くの興味深い研究に入っていこうとはしなかつたし、彼の結果を当時の数学的な趣向で受け入れられる形に無理に持っていくことも、数学者が攻めることのできる形式でそれを表示することも求められているとは感じなかつた。彼はこうして彼に相応しい仕事をし、彼のアイデアを彼の事実に従つて配置し、それを自然な、非技術的な言葉で表示する余裕を残した。

主として、これらのアイデアを数学的な方法の基礎とする希望をもって、私はこの書に取り組んできた。

529.] 私たちは宇宙は部分からできていると考えることに慣れており、数学者は、通常、一粒子を考えることから始め、他の粒子等々との関係を考える。これが一般にもっとも自然な方法と考えられてきた。しかし、粒子を考えるには抽象的過程が必要である。私たちの感覚はすべて広がりを持つ物体に関係しており、おそらく、与えられた瞬間に私たちの意識のなかにあるすべてのアイデアは任意の個々のものごとのアイデアと同様、素朴なアイデアだからである。したがつて部分から全体への代わりに、全体から部分へ進む数学的な方法がありうる。たとえば、ユークリッドは、彼の最初の書物で、線が点によって跡を辿られたものであり、面は線によって掃き出されたものであり、立体は面によって生成されたと考えている。しかし、また、彼は面を立

註 1 Théorie des phénomènes Électrodynamiques, p. 9.

体の境界、線を面の縁、点を線の端と定義している。

同様に、物質系のポテンシャルを場の中で物体の質量にかんした積分のある過程で見出された関数と考えてもよく、またこれらの質量自身を $\frac{1}{4\pi}\nabla^2\Psi$ の体積積分以外の数学的な意味を持たないと考えてもよい。ここで Ψ はポテンシャルである。

電気の研究で、そこに含まれている量がある物体の距離であり、これらの物体の帶電であり、電流である公式を使ってもよく、また、そのそれぞれが全空間にわたる他の量を含む公式を使ってもよい。

第 1 の方法で採用された数学過程は、線に沿い、面の上で取られ、有限の空間全体にわたる積分であり、第 2 の方法で採用されたものは偏微分方程式であり、全空間にわたる積分である。

ファラディの方法は本質的に第 2 の取り扱い方に関連しているように思える。彼は、けっして、物体は物体間に距離以外の何も持たずに存在するとも、また、物体は物体間の距離の関数にしたがって互いに作用するとも考えなかつた。彼は空間全体を力の場と考えた。力線は一般に曲がり、任意の物体による力線は物体からすべての側面に拡がっていき、力線方向は他の物体の存在によって変えられるのである。彼は力線をある意味で物体の一部として物体に属し、したがって離れた物体への作用において、作用する物体がない所で作用することはできない、とまで述べている^{註2}。しかし、これは、ファラディの主たるアイデアではない。むしろ、空間の場は力線で満たされており、力線の配置は場のなかの物体の配置に依存し、それぞれの物体への機械的および電気的な作用はそれに隣接する力線によって決められている、と言いたかったのではないかと私は思う。

p. 178

磁気-電気誘導現象^{註3}

^{註2} *Exp. Res.*, vol. ii. p. 293; vol. iii. p. 447.

^{註3} ファラディの *Experimental Researches*, Series i and ii を読め。

1. 1 次電流の変化による誘導。

1 次回路、2 次回路の 2 つの導体回路があるとする。1 次回路はボルタ電池に繋がれており、それにより 1 次電流を生成でき、維持し、止め、逆転することができる。2 次回路はそのなかに形成されたどのような電流も示すように電流計を含む。この電流計は 1 次電流がその表示に感知しうる直接の影響を持たないように、1 次電流のすべての部品から離れた場所に置かれている。

1 次回路の一部はまっすぐな導線からなり、2 次回路の一部は 1 次の近くで、まっすぐな導線に平行で、回路の他の部分は互いにずっと離れた所にあるとする。

1 次回路のまっすぐな導線に電流を送った瞬間、2 次回路の電流計は 2 次のまっすぐな導線の反対方向の電流を示す。これが誘導電流と呼ばれる。もし 1 次電流が一定に維持されると、誘導電流はまもなく消え、1 次電流は 2 次回路にいかなる影響も生成しないようにみえる。さてもし 1 次電流が止められたなら、2 次電流が観測され、それは 1 次電流と同じ方向である。1 次電流の変化ごとに 2 次回路中に駆電力を生成する。1 次電流が増加するとき、駆電力は電流の反対方向である。それが減少するとき、駆電力は電流と同じ方向である。1 次電流が一定のとき、駆電力はない。

これら誘導の効果は 2 つの導線を互いに近づけると増加する。それらを互いに近くに置かれた 2 つの円にしたり、渦巻コイルにすると増加し、コイルの中に鉄の棒や鉄線の束を入れるとさらに増加する、

2. 1 次回路の運動による誘導。

1 次電流が一定に維持され、静止しているとき、2 次電流は急激に消えていくことを見てきた。
p. 179

さて 1 次電流が一定に維持されているとするが、1 次の直線導線が 2 次の直線導線に近づけられたとする。接近のあいだ、1 次の反対方向に 2 次電流があるであろう。

1 次回路が 2 次から離されたなら、1 次電流と同じ方向に 2 次電流があるであろう。

3. 2 次回路の運動による誘導。

2 次回路が動かされたとき、2 次電流は 2 次導線が 1 次導線に近付くとき反対方向で、遠ざかるとき同じ方向である。

すべての場合で、2 次電流の方向は 2 導体のあいだの機械的な力の作用が運動の方向に反対であるようなもので、導線が近付くとき斥力、遠ざかるとき引力である。この非常に重要な事実はレンツ^{註 4}によって確立された。

4. 磁石と 2 次回路の相対運動による誘導。

もし 1 次回路の代わりに板磁石を置き、板の縁が 1 次回路の形と一致し、その強さが回路中の電流の強さに数値的に等しく、その austral(南) 面が回路の正の面に対応するとすると、この板と 2 次回路の相対運動によって生成された現象は 1 次回路の場合に観測されるものと同じである。

531.] これらの現象のすべては 1 つの法則にまとめられる。2 次回路を正の方向に通る磁気誘導線の数が変わったとき、回路のまわりに駆電力が働き、その駆電力は回路を貫く磁気誘導の減少率によって測られる。

532.] たとえば、鉄道のレールが地表から絶縁されているとする。終端駅で電流計をとおして繋がれており、回路は終端から距離 x にある列車の車輪、車軸により終わっているとする。レールの水準からの車軸の高さを無視すると、第 2 回路をつらぬく誘導は地磁気の垂直成分によるもので、それは北緯では下を向いている。したがって、 b が鉄道のゲージなら、回路の水平面積は bx であり、それを貫く磁気誘導の面積分は Zbx である。ここで Z は地球の磁力の鉛直成分で、回路の下面が正と数えられ、回路自身の正の方向は北東南西、つまり太陽のみかけの日周経路の方向である。

さて列車が動き始めたとすると、 x が変わり、回路中に値が $-Zb\frac{dx}{dt}$ の駆電力があるだろう。

もし x が増えると、つまり、もし列車が駅から離れて行くと、駆電力は負の方向、つまり、北西南東である。したがって、車軸をとおるこの力の方向は右から左である。もし x が減少したなら、力の絶対方向は逆転したであろう。しかし、列車の運動方向も逆転するから、列車の中の観測者は常に進行

p. 180

^{註 4} Pogg., Ann. xxxi. p. 483 (1834).

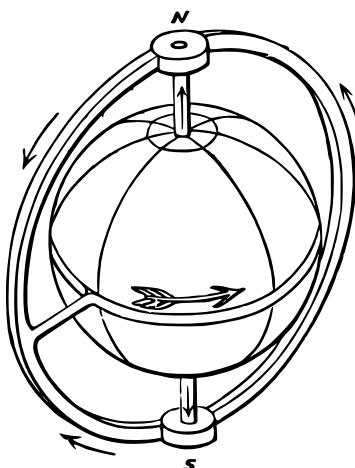
方向にむいているとすると、車軸上の駆電力はまだ右から左である。南緯では、磁針は南極が沈み、駆電力は左から右である。

したがって磁力の場をとおして動く導線上の駆電力を決めるための次の規則を得る。想像上、頭と足を、それぞれ、北と南を指す羅針盤の針の終端によって占められる位置に置く。顔を運動方向にまわすと、運動による駆電力は左から右であろう。

533.] この方向関係は重要なので、他の説明をしよう。金属の帯が赤道で地球に巻かれており、金属導線がグリニッヂの経線に沿って赤道から北極へ敷かれているとする。

金属の大きな四分儀の弧が作られたとする。その一端は北極上で回転し、他方は赤道のまわりに運ばれ、地球の大きな帯の上を滑り、太陽の日周経路にしたがう。このとき運動する四分儀にそって極から赤道に向かって作用する駆電力がある。

p. 181



図：31

地球が静止して四分儀が東から西へ動くと考えても、四分儀が静止して地球が西から東へ回ると考えても、駆電力は同じであろう。もし地球が回ると考えるなら、空間中に固定され、一端が極の一つに触れ、他端が赤道に触れている回路部分の形がどうであれ、同じであろう、回路のこの部分の電流は極から赤道へである。

地球にかんして固定されている回路の他の部分はどのような形であっても、地球の内外どちらでもよい。この部分では電流は赤道からどちらかの極へである。

534.] 磁気電気誘導の駆電力の強度はその中で駆電力が働く導体の性質には、また、誘導電流を運ぶ導体の性質にも、まったく独立である。

これを示すため、ファラディ^{註5}は絹被覆によって絶縁され、互いに捩ら

^{註5} *Exp. Res.*, 195.

れ、一端ではんだ付けされた、異なる金属の2導線からなる導体を作った。導線の他端は電流計によって結ばれている。このようにして導線は1次回路にかんして相似に置かれているが、もし駆電力が一方の導線で他方より強かつたなら、それは電流を生成し、それが電流計によって示されたであろう。しかし、そのような組合せは、電流計が影響を受けずに、誘導によるもっとも強い駆電力のもとにありうることを見出した。彼はまた複合導体が2金属からできていようと、金属と電解質からできていようと、電流計は影響を受けなかった^{註6}ことを見出した。

p. 182

したがって、どの導体上の駆電力も導体の形と運動とともに、場の中の電流の強さ、形、運動にのみ依存する。

535.] その他の駆電力の否定的な性質は駆電力はそれ自身ではどのような物体の機械的な運動を引き起す傾向をもたず、その中で電気の電流を引き起こすだけであることである。

もしそれが実際に物体中に電流を生じさせるなら、流れによる機械的な力の作用があるが、もし電流が形成されることを防ぐと、物体それ自身への機械的作用はないであろう。しかし、もし物体が帶電したなら、静電気で記述したように、駆電力は物体を動かすであろう。

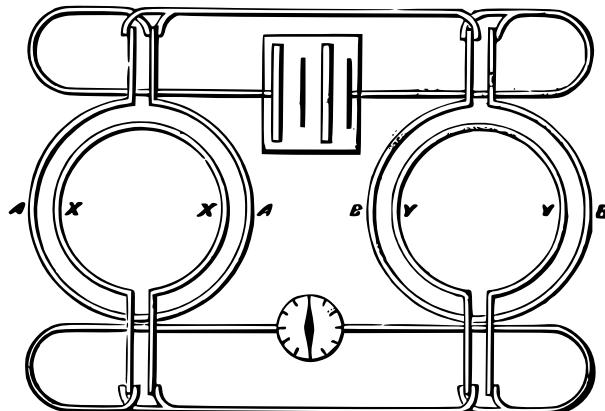


図 32.

^{註6} 同, 200.

536.] 固定された回路での電流の誘導法則の実験的な研究は、検流計の回路の中の駆電力を、それゆえ、電流を零にするような方法によって精密に行うことができる。

たとえば、コイル A のコイル X への誘導がコイル B のコイル X への誘導に等しいことを示そうと望むなら、コイル A とコイル X の第 1 の組を第 2 の組 B と Y から十分離れた所に置く。そして A と B をボルタ電池と結び、正の方向に A をとおり、負の方向に B をとおる同じ大きさの 1 次電流を流させることができるようとする。また X と Y を電流計と結び、2 次電流が、もし存在すれば、 Z , Y を次々ととおって同じ方向に流れるようとする。

そのとき、もし A の X への誘導が B の X への誘導と等しければ、電池回路を断続しても、電流計は誘導電流を示さないであろう。

この方法の正確さは 1 次電流の強さとともに、そして、瞬間流への電流計の感度とともに増加する。実験は導体自体が纖細に吊るされなければならぬ電磁引力に關係した実験と較べてより簡単に行われる。

この種の良く工夫された非常に有益な一連の実験がピサのフェリチエ(Felici)教授^{註 7}によって記述されている。この方法により証明されるいくつかの法則を指し示すだけにしよう。

(1) ある回路の他の回路への誘導の駆電力は導体の断面の面積には独立であり、それが作られた素材^{註 8} には独立である。なぜなら実験で、結果を変えずに、回路の一方を同じ形だが異なる断面で異なる素材の他の回路と交換できるからである。

(2) 回路 A の回路 X への誘導は X の A への誘導に等しい。なぜなら、もし A を検流計の入った回路に置き、 X を電池の入った回路に置いても、駆電力の平衡は乱されないからである。

(3) 誘導は誘導する電流に比例する。なぜなら、もし A の X への誘導が B の Y への誘導に等しく、また C の Z への誘導に等しいことを確かめたなら、電池の電流をまず A をとおして流し、それから電流を任意の割合で B と C のあいだで分割する。そのときもし X を逆に、 Y , Z を順方向に、すべて直列に、電流計に繋いだなら、 X 中の駆電力は Y , Z 中の駆電力の和とつり合

^{註 7} *Annales de Chimie*, xxxiv. p. 64 (1852), および *Nuovo Cimento*, ix. p. 345 (1859).

^{註 8} この記述は素材の一つまたはそれ以上が磁性体なら必ずしも厳密には正しくない。なぜなら、この場合、磁力線の分布が導線によって誘導された磁気によって乱されるからである。

うからである。

幾何学的に相似な系を形成する回路の組で、誘導はその長さの大きさに比例する。なぜならもし上で述べた 3 つの組がすべて相似なら、しかし、もし第 1 の組の長さの大きさが第 2 と第 3 の組の対応する長さの大きさの和なら、そのとき、もし A, B, C が直列に電池に繋がれ、もし電池と X が反対、 X と Y が直列なら、それは平衡にあるだろう。
p. 184

(5) n 巻きのコイル中に m 巻きのコイル中の流れによって生成された駆電力は積 mn に比例する。

537.] 私たちの考えてきた種類の実験にたいして電流計は、ごく小さな遷移流の敏感な示度を与えるように、できるかぎり敏感でなければならず、その針はできるかぎり軽くなければならない。運動による誘導の実験は針がいくぶん長めの周期の振動をもつことが要請され、したがって針が平衡の位置から遠くないあいだに、導体のある運動に影響する時間があるかもしれない。前者の実験では電流計の回路中の駆電力は全時間にわたって平衡で、電流計のコイルを電流は通らなかった。いま記述されている実験では、作用する。電流計をとおして反対方向に引き続いて 2 つの電流を生成するように、駆電力は最初ある方向に、つぎに他の方向に作用する。私たちは、これらの引き続く流れによる電流計への衝撃が、ある場合、同じ大きさで反対方向であることを示さなければならない。

遷移流の測定への電流計の応用の理論は 748 節で詳細に考察されるであろう。いまの所、私たちの目的には電流計の針が平衡位置に近くにあるかぎり、電流の偏向力は電流自身に比例し、電流の作用の全時間が針の振動周期と較べて小さければ、磁石の最終速度が電流のなかの電気量の総計に比例することを観測するだけで十分である。したがって、2 つの電流が急速に引き続いて通り、反対方向に等しい電気量を伝えるなら、針はなんら最終速度なしのまま残るであろう。

こうして、1 次回路を閉じ、切ることによる、2 次回路の誘導電流が合計で同じで、反対方向であることを示すためには、キーに触れることにより電流を 1 次回路をとおして送ることができ、指を離すことにより随意に接触をきくことができるよう、電池と繋がれた 1 次回路を配置できる。もししばらくのあいだキーが押し下げられたら、2 次回路の電流計は、接触した時間
p. 185

に 1 次流と反対の方向の遷移流を示す。もし接触が維持されるなら、誘導電流はたんに通りすぎ、消える。もし接触を切ると、2 次回路をとおって反対方向にもう一つの遷移流が通り、電流計の針は反対方向に衝撃を受ける。

しかし、もし瞬間だけ接触し、接触を切ると、2 つの誘導電流が電流計を非常に急速に引き続いて通り、第 1 の流れによって作用を受けたとき、針は、第 2 によって止められる前にその平衡位置からかなりの距離を動くための時間がなく、これらの遷移流の量のあいだの厳密な等量性のため、針は止まつて動かない。

もし針を注意深く監視するなら、第 1 のごく近くで、静止のある位置から静止の他の位置へ突然引かれるようにみえる。

こうして、誘導電流の電気量は、接触が切られたとき、接触がなされたときの誘導流と厳密に同じ大きさで反対向きであることを証明できる。

538.] この方法のもうひとつの応用は次のようなもので、それは彼の *Researches* の第 2 シリーズでフェリチにより与えられている。

1 次コイル A で接触の断続が B での誘導電流を生成しないような、2 次コイル B の多くの異なる位置を見出すことは常に可能である。そのような場合の 2 つのコイルの位置は互いに共役であると言われる。

B_1 と B_2 がこれらの位置の 2 つであるとする。もしコイル B が突然 B_1 から B_2 へ動かされたなら、コイル B の遷移流の代数和は厳密に零であり、したがって電流計の針は B の運動が完了されたとき、静止したままである。

これは、どのようにしてコイル B を B_1 から B_2 へ動かしても、また 1 次コイル A の電流が一定で続けられようと、運動のあいだに変えられようと、真である。

ふたたび、 B' を A に共役ではない任意の他の位置とし、 B が B' の位置にあるとき、 A での接触の断続が誘導電流を生成するとする。

B が共役の位置 B_1 にあるとき、接触がなされたとすると、誘導電流はないであろう。 B から B' へ動かすと、運動による誘導電流があるだろうが、もし B が急速に B' へ動かされ、1 次の接触が切られたなら、接触の切断による誘導電流は運動による誘導電流の効果を厳密に打ち消し、したがって電流計の針は静止したままである。したがって共役の位置から任意の他の場所への運動による電流は後の位置での接触の切断による電流と同じ大きさで反

対方向である。

接触を作ることの効果はそれを切斷する効果と同じ大きさで反対方向であるから、コイル B が任意の場所 B' にあるとき、接触を作る効果は電流が A を通るあいだコイルを任意の共役位置 B_1 から B' へ運ぶ効果に等しい。

コイルの相対位置の変化が 2 次の代わりに 1 次回路を動かすことによりなされると、結果は同じであることが分かる。

539.] これらの実験から A の A_1 から A_2 への、 B の B_1 から B_2 への同時の運動のあいだの B 中の誘導電流の総計は、 A 中の電流が γ_1 から γ_2 へ変化するが、初期の状態 A_1, B_1, γ_1 と、終状態 A_2, B_2, γ_2 にのみ依存し、系が辿る中間状態にはまったく依存しないことが出てくる。

したがって誘導電流の総計の値は

$$F(A_2, B_2, \gamma_2) - F(A_1, B_1, \gamma_1),$$

の形でなければならない。ここで F は A, B, γ の関数である。

この関数の値にかんして、536 節によって、運動がなく、したがって $A_1 = A_2, B_1 = B_2$ のとき、誘導電流は 1 次電流に比例することを知っている。したがって γ はたんに因子として入り、他の因子は回路 A と B の形と位置の関数である。

私たちはまたこの関数の値は A と B の絶対位置ではなく相対位置に依存することを、したがって回路が組み立てられるいろいろな要素の距離の関数として、また、これらの要素が互いに作る角度の関数として表示されうることがわかっている。

M をこの関数とすると、誘導電流の総計は

$$C\{M_1\gamma_1 - M_2\gamma_2\},$$

と書くことができる。ここで C は 2 次回路の伝導度であり、 M_1, γ_1 は元の、 M_2, γ_2 は最後の M と γ の値である。

p. 187

それゆえ、これらの実験は誘導電流の総計はある量 $M\gamma$ に起こる変化に依存し、この変化は 1 次電流の変化からか、もしくは M を変える 1 次または 2 次回路の任意の運動から生じうることを示している。

540.] ある量があり、誘導電流はその量の変化に依存し、その量の絶対的な

大きさには依存しない。そのような量の概念がファラディに、彼の研究^{註9}の初期段階で生じた。彼は 2 次回路は、一定強度に維持された電磁場中で静止しているとき、なんの電気的な効果も示さないが、もしそれと同じ場の状態が突然生成されたなら、電流が存在することを観測した。さらに、もし 1 次電流が場から取り除かれたら、もしくは磁力をなくしたら、反対方向の電流が存在する。それゆえ、彼は 2 次回路に、電磁場のなかにあるとき、「物質の特異な電気的条件」があることを認め、それに電気緊張状態の名前を与えた。彼はのちほど磁力線^{註10}にもとづく考察をつかってこのアイデアを不要にできることを見出ましたが、彼のもっとも後期の研究^{註11}の中できえ、「何度も何度も電気緊張状態^{註12}のアイデアを心の中で使いたいと考えた」と述べている。

ファラディの心の中のこのアイデアの全歴史は、かれの出版された研究で示されており、十分に調べる価値がある。彼は、研究の過程で、数学的な計算の助けなしに、この考えを強力に押し進めることによって、私たちが、今日、数学的な電磁気理論の基本量と呼ぶことさえできている量の存在に導かれた。しかし、かれは純粹に実験的な経路によってこの概念に達したので、彼はそれを物理的な存在に帰した。それを物質の特異な状態であると考えていたが、なにかより親しみのある思考形式で現象を説明できれば、ただちに、この理論を捨てる用意はできていた。

はるか後、他の研究者は純粹に数学的な経路をたどって同じアイデアに導かれたが、私の知るかぎり、彼らのだれも、2 回路のポテンシャルの洗練された数学的なアイデアの中で、電気緊張状態についてのファラディの大膽な仮定を分かってはいない。それゆえ、その法則を数学形式に始めて還元したこれらの秀でた研究者が示した仕方でこの問題に近づいたものには、しばしば、ファラディが彼の研究の最初の 2 集で素晴らしい完結度で与えた法則の内容の科学的な正確さを真に認めることが困難であった。

電気緊張状態のファラディの概念の科学的な価値は、その量の変化に現実の現象が依存する、ある量をしっかりと把握するように心向けることにある。

註9 *Exp. Res.*, series i. 60.

註10 同, series ii. 242.

註11 同, 3269

註12 同, 60, 1114, 1661, 1729, 1733.

ファラディが与えたよりもずっと大きな発展度なしには、この概念は容易には現象の説明には役立たない。584節で、もう一度、この主題に立ち戻ろう。

541.] ファラディの用いた、はるかに強力な方法は磁力線の使用であった。磁力線は磁石や電流を考えるとき、彼の心の目のなかに常にあり、鉄粉を使ったその描写を彼は正しく実験家へのもっとも価値ある助けだとみなしていた^{註 13}。

ファラディはこれらの線をその方向で磁力の方向を表示するだけではなく、線の数と混み方によって力の強度を表示するものとみなしていた。そして、彼の後の研究^{註 14}で彼は力線の単位をどのように考えるかを示している。私はこの書のいろいろな部分で、ファラディが力線のなかに認めた性質と、電気力と磁気力の数学条件のあいだの関係を説明してきた。そして、ある限度のなかで単位の線の概念と線の数のファラディの概念がどのように数学的に正確なものにできるかを説明してきた。

彼の研究の第1集^{註 15}で、彼は、その一部が動くことのできる、伝導回路のなかの電流の方向がどのように動いている部分が磁力線を切る様式に依存するかを明らかに示している。

第2集で^{註 16} 彼は電流や磁石の強さの変化によってどのように現象が生成されるのかを、力線の系が、導線や磁石の活力の上昇下降にしたがって、導線や磁石に向かって近付き、それから拡がるかを考えることによって、説明できるのかを示した。

後ほど彼によって非常に明瞭に述べられた^{註 17}、運動する導体は、力線を切るとき、力線の面積、つまり断面による作用を足しあげるという学説を、そのとき彼がどれくらい明らかに懷いていたかは分からない。しかし、これは第2集^{註 18}での研究が考慮に入れられた後の事例での新しい観点であるとは思えない。

p. 189

ファラディが持っていた力線の連続性の概念は以前になにも無かった所で突然存在し始める可能性を排除している。それゆえ、もし伝導回路を通りす

^{註 13} *Exp. Res.*, 3234.

^{註 14} 同, 3122.

^{註 15} 同, 114.

^{註 16} 同, 238.

^{註 17} 同, 3082, 3087, 3118.

^{註 18} *Exp. Res.*, 217, &c.

ぎる線の数が変えられたなら、回路が力線を横切ることによってのみ可能であり、そうでなければ、導線を横切って力線が動くことによるのである。いずれの場合でも、電流が回路中で生成されている。

任意の瞬間に回路を通りすぎる力線の数は回路の電気緊張状態のファラディの初期の概念に数学的に等価であり、量 $M\gamma$ によって表現される。

69 節、274 節での駆電力の定義とその測定がより正確になされて始めて、電気磁気誘導の真の法則を次のように完全に系統立てて述べることができる:—

任意の瞬間に回路をまわって作用する駆電力の総計は回路を通りすぎる磁力線の数の減少率によって測られる。

時間にかんして積分されたとき、この言明はつぎのようになる:—

任意の回路をまわって作用する駆電力の総計の時間積分は、回路を通りすぎる磁力線の数と合わせて、一定の量である。

磁力線の数について話す代わりに回路をとおる磁気誘導、つまり、回路によって限られた任意の面にわたって拡がった磁気誘導の面積分について話してもよい。

ファラディのこの方法にもう一度戻ろう。しばらく、他の考察に基づく誘導理論を數え上げなければならない。

レンツの法則。

542.] 1834 年、レンツ^{註 19} はアンペールの公式によって定義されているような電流の機械的力の作用の現象と、導体の相対運動による電流の誘導のあいだの以下のような注目すべき関係を公表した。そのような関係を述べた初期の試みは同じ年の 1 月にリッチ (Ritchie) によって *Philosophical Magazine* で与えられているが、誘導電流の方向はどの場合も誤って述べられている。レンツの法則は以下の通りである:—

もし一定の電流が 1 次回路 A を流れしており、そしてもし、 A の運動、または 2 次回路 B の運動によって、 B に電流が誘導されるなら、この誘導電流の方向は、その A への電磁作用によって、回路の相対運動を妨げようとする方向である。

^{註 19} Pogg., Ann. xxxi. p. 483 (1834).

この法則の上に、F. E. ノイマン^{註 20} は誘導の数学理論を築き、そこで、1 次または 2 次の導体の運動による誘導電流の数学法則を確立した。彼は私たちがある回路の他の回路上のポテンシャルと呼んできた量 M がある回路の他の回路上の電磁ポテンシャルと同じであることを示している。それについて、私たちは既にアンペールの公式と関連して調べている。それゆえ、私たちは F. E. ノイマンをアンペールがその機械的な作用に適用した数学的な取扱いを誘導電流にたいして完成させたとみなすことができる。

543.] その後すぐ、さらに科学的に重要な歩みがヘルムホルツによって彼の力の保存にかんする論考^{註 21} でなされ、そのしばらく後、ヘルムホルツと独立に W. トムソン卿^{註 22} によってなされた。彼らはファラディによって発見された電流の誘導がエルステッドとアンペールによって発見された電磁作用からエネルギー保存の原理を適用することによって数学的に導かれることを示した。

ヘルムホルツは抵抗 R の伝導回路で、ボルタまたは熱電堆から生じる駆電力 A が作用している場合を取り上げた。任意の瞬間の回路中の電流は I である。彼は回路の近くにある磁石が運動しており、導体にかんする磁石のポテンシャルが V であり、したがって、任意の小時間間隔 dt のあいだに電磁作用によって磁石に伝えられるエネルギーは $I \frac{dV}{dt} dt$ であると考えた。

p. 191

回路中で熱を生成するときになされた仕事は、ジュールの法則、242 節によつて、 $I^2 R dt$ であり、時間 dt のあいだに電流 I を維持するときに駆電力 A によって消費された仕事は $AI dt$ である。したがって、なされた仕事の総計は消費された仕事に等しくなければならないから、

$$AI dt = I^2 R dt + I \frac{dV}{dt} dt,$$

したがって電流の強度が

$$I = \frac{A - \frac{dV}{dt}}{R}$$

であることが分かる。

^{註 20} Berlin .Akad., 1845 および 1847.

^{註 21} ベルリン物理学会、1847 年 7 月 23 日の前に読まれた。Taylor の ‘Scientific Memoirs,’ part ii. p. 114 に翻訳されている。

^{註 22} Trans. Brit. Ass., 1848, および Phil. Mag., Dec. 1851. See also his paper on ‘Transient Electric Currents,’ Phil. Mag., June 1853 の論文もまた見よ。

さて、 A の値は随意のものでよい。それゆえ、 $A = 0$ とすると、

$$I = -\frac{1}{R} \frac{dV}{dt},$$

つまり磁石の運動による電流があり、電流は駆電力 $-\frac{dV}{dt}$ によるものに等しい。

磁石のポテンシャルが V_1 の場所からそのポテンシャルが V_2 の場所への磁石の運動のあいだの誘導電流の総計は

$$\int I dt = -\frac{1}{R} \int \frac{dV}{dt} dt = \frac{1}{R} (V_1 - V_2).$$

であり、それゆえ、電流の総計は磁石の速度や経路に依存せず、その始めの位置と終わりの位置にのみ依存する。

ヘルムホルツは元の研究では流れによって導体中に生成された熱の測定に基づく単位系を採用した。電流の単位を自由だと考えると、抵抗の単位は単位の流れが単位時間に単位の熱を生成する導体の抵抗である。この系の駆電力の単位は単位抵抗の導体中で単位の電流を作りだすために要するものである。この単位系の採用は方程式への量 a の導入を必要とする。 a は熱の単位の機械的な等価物である。私たちは必ず静電単位系か電磁単位系のどちらかを採用しているので、この因子はここで与えられている方程式には現れない。

p. 192

544.] ヘルムホルツはまた伝導回路と一定流を運ぶ回路がお互いに相対的に動かされたときの誘導の電流を導いた²³。 R_1, R_2 を抵抗、 I_1, I_2 を流れ、

p. 193

A_1, A_2 を外部駆電力、 V をそれぞれの単位の流れによる一方の回路の他へのポテンシャルとすると、前と同様、

$$A_1 I_1 + A_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_1 I_2 \frac{dV}{dt}.$$

を得る。

²³ 548 節、544 節で与えられた証明は、流れに任意の変化が起こりうること、また回路の運動による運動エネルギーで起こりうる任意の変化を無視しているので、満足できるものではない。事実、エネルギー保存の原理を越えた原理を使うことなく 2 自由度を持つ系の運動方程式を導くことが困難であったように、エネルギー保存の原理のみから 2 回路の誘導方程式を導くことは不可能である。

もしエネルギー保存の原理を 2 つの電流の場合に適用すると、一つの方程式を得る。それを次のように導くことができる:—

L, M, N を、それぞれ、第 1 の回路の自己誘導係数、2 つの回路の相互誘導係数、第 2 の回路の自己誘導係数とする(578 節)。 T_e を回路をまわる流れによる運動エネルギーとし、残りの

記法は 544 節と同じだとする。このとき (578 節)

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} N I_2^2, \\ \delta T_e &= \frac{dT_e}{dI_1} \delta I_1 + \frac{dT_e}{dI_2} \delta I_2 + \sum \frac{dT_e}{dx} \delta x, \end{aligned} \quad (1)$$

ここで x は回路の位置を固定することを助ける任意の型の座標である。

T_e は I_1, I_2 の 2 次同次関数だから

$$2T_e = I_1 \frac{dT_e}{dI_1} + I_2 \frac{dT_e}{dI_2}.$$

したがって

$$2\delta T_e = \delta I_1 \frac{dT_e}{dI_1} + I_2 \delta \frac{dT_e}{dI_2} + \delta I_2 \frac{dT_e}{dI_2} + I_2 \delta \frac{dT_e}{dI_2}, \quad (2)$$

である。

(2) から (1) を差し引くと

$$\delta T_e = I_1 \delta \frac{dT_e}{dI_1} + I_2 \delta \frac{dT_e}{dI_2} - \sum \frac{dT_e}{dx} \delta x \quad (3)$$

を得る。

しかし、 $\frac{dT_e}{dx}$ は系に作用する x の型の力であり、したがって系に作用する外力はないと考えるから、 $\sum \frac{dT_e}{dx} \delta x$ は系の運動による運動エネルギー T_e を増やすであろう。したがって、(3) は

$$\delta(T_e + T_m) = I_1 \delta \frac{dT_e}{dI_1} + I_2 \delta \frac{dT_e}{dI_2} \quad (4)$$

を与える。

時間 δt に電池によってなされる仕事は

$$A_1 I_1 \delta t + A_2 I_2 \delta t.$$

である。

同じ時間に生成される熱はジュールの法則によって

$$(R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) \delta t.$$

である。

エネルギーの保存によって電池によってなされた仕事は回路中で生成される熱に系のエネルギーの増加を加えたものに等しくなければならない。したがって

$$A_1 I_1 \delta t + A_2 I_2 \delta t = (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) \delta t + \delta(T_2 + T_m)$$

である。

(4) から $\delta(T_e + T_m)$ を代入して

$$I_1 \{ A_1 - R_1 I_1 - \frac{d}{dt} \frac{dT_e}{dI_1} \} + I_2 \{ A_2 - R_2 I_2 - \frac{d}{dt} \frac{dT_e}{dI_2} \} = 0$$

つまり

$$I_1 \{ A_1 - R_1 I_1 - \frac{d}{dt} (L I_2 + M I_2) \} + I_2 \{ A_2 - R_2 I_2 - \frac{d}{dt} (M I_1 + N I_2) \} = 0 \quad (5)$$

を得る。

誘導の方程式は零に等しいとされた波括弧の中の 2 つの量であるが、エネルギー保存の原理は (5) の左辺が零であることを示すだけであり、波括弧のそれぞれが零であることを示すものではない。誘導電流の方程式のきちんとした証明は 581 節で与えられている。

}

I_1 を 1 次電流、 I_2 は I_1 と較べてはるかに小さく、その誘導によって I_1 のどのような感知されうる変更を生成することはなく、 $I_1 = \frac{A_1}{R_1}$ と置くことができるとすると、

$$I_2 = \frac{A_2 - I_1 \frac{dV}{dt}}{R_2}$$

であり、厳密に磁石の場合のように解釈できる結果となる。

もし I_2 を 1 次電流、 I_1 が I_2 より非常に小さいと考えると、 I_1 にたいして

$$I_1 = \frac{A_1 - I_2 \frac{dV}{dt}}{R_1}$$

が成り立つ。

これは等しい大きさの電流に対して、第 1 の回路の第 2 の回路への駆電力は、回路の形がどのようなものであれ、第 2 の回路の第 1 の回路への駆電力に等しいことを示している。

ヘルムホルツはこの報告では 1 次電流の強弱を変えることによる誘導や、電流のそれ自身への誘導の場合は論じていない。トムソンは^{註 24} 同じ原理を電流の機械的作用の値の決定に応用し、仕事が 2 つの一定電流の相互作用によってなされたとき、その機械的な作用が同じ量だけ増加し、したがって回路の抵抗に抗して電流を維持するために必要とされるものに加えて、電池は仕事の 2 倍の量を供給しなければならないことを指摘した。

545.] ウェーバーによる電気量の測定に対する絶対単位系の導入は科学の進歩のもっとも重要な段階の一つである。すでに、ガウスと連携して、磁気量の測定を精度の方法の第一ランクに置いており、ウェーバーは彼の電気力学の測定で採用すべき単位を固定するための健全な原理を作り上げただけではなく、それまで達成できなかった正確度で、これらの単位をつかって特別な電気的な量の決定を行った。電磁単位系と静電単位系はこれらの研究にその発展と実際の応用に負うものである。

ウェーバーはまた電気作用の一般理論を形成し、それから静電力と電磁力を、そしてまた、電流の誘導を導いている。私たちは別の章で、最近の発展とともに、この理論を考察しよう。

^{註 24} Nichol's *Cyclopaedia of Physical Science*, ed. 1860, Article 'Magnetism, Dynamical Relations of,' および *Reprint*, § 571.

第IV章

電流の自己誘導について。

546.] ファラディは研究の第9集を電磁石のコイルを形成する導線中の電流が示す一連の現象の研究に當てた。

ジェンキンス氏は、一組の極板のみからなるボルタ系の直接の作用では知覚できるような衝撃を生成することは不可能だが、もし電流を電磁石のコイルを通させ、もしそれぞれの手に持った2導線の先端のあいだで接触が断たれたら、鋭い衝撃が感じられることを観測している。接触させたときには、そのような衝撃は感じられない。

ファラディは、彼が記しているように、これらの現象は、彼がそれまでに観測してきた電流が隣接する導体に影響を及ぼす現象と同じ、誘導作用によるものであることを示した。しかし、この場合、誘導作用は電流を担っている導体と同じ導体に作用しており、他の導線への作用と違って、導線自体が同じ電流の異なる要素に近付けば近付くほど、より強くなっていくのである。

547.] しかしながら、彼は「最初に心に浮かんだ考えは電気が導線中を運動量や慣性のような何かを持って循環することである」と述べている^{註1}。実際、ある特定の導線だけを考えたとき、現象は満杯の水が絶え間ない水流のなかを流れるパイプの現象にまったく類似している。もし水が流れているとき、パイプの終端を突然閉じたなら、水の運動量が突然の圧力を生成し、それは水頭^{註2}圧よりはるかに大きく、パイプを破るのに十分かもしれない。

もし水が主開孔が閉じられたとき、狭いジェットを通して逃れる手段を持つなら、水頭による速度よりはるかに大きな速度で放出されるであろう。も p. 196

^{註2} 訳註：水柱の高さに換算した水のエネルギー

^{註2} *Exp. Res.*, 1077.

しそれがバルブを通して部屋のなかへ逃れることができるなら、部屋のなかの圧力が水頭による圧力よりも大きいときでさえ、そうなるであろう。

この原理の上に水撃ポンプは組み立てられており、それによってはるかに下の水準から大量の水が流れ落ちることによって、少量の水が大高度まで持ち上げられる。

548.] 管のなかの流体の慣性のこれらの効果は、管をとおして走る流体の量、管の長さ、その長さのいろいろな部分の断面積にのみ依存する。それらは管の外の何にも依存せず、管の長さが同じである限り、管が曲げられる形にもよらない。

電流を運ぶ導線にかんして、これは正しくない、なぜなら、もし長い導線が2倍の長さにされても、効果はごく小さく、もし2つの部分が互いに分離されたら、効果はより大きく、コイルになっているとき、コイルのなかに軟鉄片を置いたなら、もっとも大きいからである。

ふたたび、もし2次導線が1次導線とともに巻き上げられ、1次から絶縁されているなら、そのとき、もし2次導線が閉回路を形成していないなら、現象は前と同じだが、もし2次回路が閉回路を形成すれば、2次導線に誘導流が形成され、1次回路中の自己誘導の効果は遅延する。

549.] これらの結果は、もし現象が運動量によるものなら、運動量は導線中の電気の運動量ではないことをたしかに示している。なぜなら、同じ電流を運ぶ同じ導線がその形にしたがって異なる効果を示すからである。その形が同じままである時でさえ、鉄片や閉じた金属回路のような他の物質の存在が結果に影響を与えるからである。

550.] しかし、自己誘導現象と物体の運動の現象のあいだにひとたび類似性を認めてしまった後では、この類似性の助けをまったく捨てることも、それがまったく表面的なもので誤解を招くものだと認めることも困難である。その運動によって運動量とエネルギーの受容者となることができるという、物質の基礎的な運動のアイデアは私たちの思考形式に織り込まれており、自然の任意の部分にその燃きを捉えたときはいつも、遅かれ早かれ、その主題の完全な理解に導く道が私たちの前にあると感じるのである。

551.] 電流の場合、駆電力が作用し始めたとき、駆電力はただちにすべての電流を生成せず、電流は次第に大きくなっていくことが分かっている。対

抗する抵抗が駆電力につり合うことができない時間のあいだ、駆電力は何をしているのであろうか？それは電流を増やしているのである。

さて、通常の力は、運動の方向に物体に作用すると、その運動量を増やし、物体に運動エネルギーを、つまりその運動のために仕事をするパワーを伝える。

同様に、駆電力の抵抗を受けない部分は電流を増加させるために使われる。こうして生成されたとき、電流は運動量と運動エネルギーのどちらを持つのであろうか？

電流は運動量によく似た何かで、それは突然止められることに抵抗し、短時間のあいだ、大きな駆電力を働くことができることを既に示している。

しかし、その中で電流が起こされている伝導回路はこの電流によって仕事をするパワーを持ち、このパワーは真実実在のエネルギーであるので、このパワーはエネルギーによく似た何かと言うことはできない。

こうして、もし電流が放っておかれるとき、電流は回路の抵抗によって止められるまで、循環し続けるであろう。しかし、電流が止められる前に、電流はある量の熱を生成し、力学の尺度で測ったこの熱の量は電流のなかにもともと存在していたエネルギーに等しい。

さらに、電流が放っておかれたとき、動いている磁石によって力学的な仕事をさせられるかもしれないし、磁石の運動の誘導効果は、レンツの法則によって、回路の抵抗だけが電流を止めたときよりも速く電流を止めるであろう。このようにして、電流のエネルギーの一部は熱の代わりに機械的な仕事に変換されるかもしれない。

552.] それゆえ、電流を含む系はある種のエネルギーの座であるようにみえる。運動学的な現象^{註3}として以外に電流の概念を形成できないので、そのエネルギーは運動エネルギーでなければならない。いわば、その運動のために動いている物体が持つエネルギーでなければならない。

導線中の電気は、運動エネルギーをその中に見つけることのできる、動いている物体とは考えられないことを既に示している。なぜなら、運動物体のエネルギーはそれ自身の外部の何にも依存しないが、電流の近くの他の物体の存在が導線中の電気のエネルギーを変えるからである。

p. 198

註3 Faraday, *Exp. Res.* 283.

私たちは、それゆえ、導線の外の空間でなんらかの運動が進行してはいな
いだろうか、空間が電流によって占められていても、その空間に電流の
電磁効果があらわれるのではないか、との質問へと導かれる。

今のところ、そのような運動に対して、他でもない、この場所を注視する
理由に、つまり、これらの運動は、他でもない、こういう種類の運動だとみ
なす理由に、立ち入るつもりはない。

ここで私がしようと提案していることは電流の現象が運動する系の現象で
あり、運動が力によって系のある部分から他の部分へ伝えられるという仮定
の帰結を検討することであり、任意の連結系にたいしてラグランジによって
与えられた方法によって運動方程式からこれらの力を消去できるので、未だ
定義しようと試みてさていない、その運動の本質と法則を探ることである。

この書の次の 5 章では、ウェーバーやその他の研究者を多くの注目すべき
発見と実験へ導き、大胆で美しい概念に導いた道筋を追うのではなく、この
種の力学的な仮定から電気の理論の主構造を導くことを提案する。私にはよ
り満足にみえ、それと同時に、直接の遠隔作用の仮定の上に進展した方法よ
りも、この本の前の部分で従った方法と、より整合性のある、他の現象の見
方が存在することを示したいので、私はこの方法を選んだのである。

第V章

結合系の運動方程式について。

553.] 解析力学の第2部4節でラグランジは結合系の部分部分の運動の通常の力学方程式を系の自由度に等しい数まで減らす方法を与えた^{註1}。

結合系の運動方程式はハミルトンによっていろいろな形で与えられており^{註2}、純粹な力学の高度な部分を大きく拡張してきた^{註3}。

電気現象を力学的範疇に持ち込もうと努力するとき、私たちの力学的なアイデアを物理的な問題の直接的な応用に適した状態にすることが必要であることが分かるであろう。

554.] ラグランジの目的は力学を解析学を使って考えることであった。彼は基本的な力学の関係をそれに対応する純粹に代数的な量の関係式を使って表示することから始めた。このようにして得られた方程式から純粹に代数的な過程によって最終的な方程式を導いた。ある量（物理的な結合によりでてくる部分間の反作用を表示する）が系の成分をなす部分部分の運動の方程式に表れるが、数学的な観点から見ると、ラグランジの研究は最終の方程式か

^{註1} 訳註：運動方程式 $ma = F$ は部分部分の運動の原理を慣性系で直交座標系をとって表現したものである。力 F は部分部分の運動を制約する拘束力を含む。

ラグランジは、いろいろな部分の座標を組み合わせて、 $ma = F$ の集まりと同じ原理を運動の自由度の個数で表す、オイラー-ラグランジ方程式と呼ばれる運動方程式の一般形を見出した。565節(20)式がそれである。

^{註2} 訳註：ハミルトンは、オイラー-ラグランジ方程式は位置と運動量のあいだに正準対称性と呼ばれる対称性を持ち、正準対称性を満たす変換をおこなっても、方程式は同じ運動の法則を表すことを見出した。正準対称性が明確に見える形の運動方程式はハミルトン方程式と呼ばれる。561節(4)式および(9)式の組みがそれであるが、物理的なイメージを形成するため、対称性は明示されていない。正準変換は位置と運動量を同等の立場にある変数とみなして、混ぜてしまう。運動方程式の解は、位置、運動量の時間変化が自明となる正準変換を見つけることにより、求めることができる。そのような正準変換を定める方程式はハミルトン-ヤコビ方程式と呼ばれる。

^{註3} ケイレイ教授の‘Report on Theoretical Dynamies,’ *British Association*, 1857; トムソンとティートの *Natural Philosophy* を参照せよ。

p. 200 らこれらの量を消去する方法である。

この消去の段階では、計算だけを考えればよく、それゆえ、力学的なアイデアが入り込むことはない。他方、私たちの目的は力学的なアイデアを鍛磨することである。それゆえ、数学の働きを利用し、その結果を解析学の言葉から力学の言葉へ再翻訳し、私たちの言葉が、代数的な過程のイメージではなく、動いている物体の性質の心的なイメージを呼び起こすようにする。

力学の言語はポピュラーな言葉でエネルギーの保存の原理を説いてきた人々によって大きく拡張されてきた。以下に述べることの多くが、なかでも衝撃力の理論から始まる方法は、トムソンとテイトの著書「自然哲学」(Natural Philosophy) が示唆を与えてることが分かるであろう。

座標、つまり、すべての運動が依存する変数を除いて、系の任意の部分の運動をあからさまに考察することを避けるため、私はこの方法を適用した。学生が系のそれぞれの部分のあいだの運動の結び付きを変数の結び付きを使って追うことができることは疑いもなく重要なことであるが、最終の方程式を得る過程でこれを行うことは決して必要はない。最終式は部分のあいだの結び付きの特殊性からは独立なのである。

変数^{註 4}。

555.] 系の自由度の数はその位置を完全に決めるために与えなければならないデータの数である。これらのデータにはいろいろな形がありうるが、その数は系自身の本質に依存しており、変えることはできない。

私たちのアイデアを定めるため、適当な機構によりいくつかの可動部品が結びついた系を考えることができる。それぞれの部品は直線にそって動くことができ、他の種類の運動はないとする。これらの部品のそれぞれを系と結び付ける想像上の機構は摩擦がなく、慣性を欠き、加えられた力の作用によって歪むことはできないと考えなければならない。この機構を使うのはたんに、位置、速度、運動量をラグランジの研究で純粹に代数的な量として表れるものに帰すにあたって想像力を助けるためである。

註 4 訳註：一般化座標と呼ばれることが多い。

q は部品が運動をする直線上の決まった位置からの距離によって定義される一つの可動部品の位置を表記するとする。

p. 201

いろいろな部品に対する q の値を添字 $1, 2, \&c.$ によって区別する。一部品に属する一組の量を扱うときのみ、添字を省略してよい。

すべての変数 (q) の値が与えられたとき、それぞれの可動部品の位置は知られており、想像上の機構により、系全体の配位は決められている。

速度。

556.] 系が運動するあいだに配位はある決まった仕方で変化し、それぞれの瞬間の配位は変数 (q) の値によって完全に決まっているので、系の各部分の速度は、その配位とともに、もし変数 (q) の値を、その速度

$$\left(\frac{dq}{dt}, \text{ またはニュートンの記法で, } \dot{q} \right)$$

とともに知れば、完全に定義される。

力。

557.] 変数の運動の適当な規制により、結合の性質と矛盾なく、系の任意の運動が生成されうる。可変部品を動かすことによりこの運動を生成するためには、これらの部品に力を働くなければならない。

任意の変数 q_r に加えられなければならない力を F_r と表記しよう。力の系 (F) はそれがどのようなものであれ、実際に運動を生成する力の系に（系の結合によって）力学に等価である。

運動量。

558.] 物体が、物体に作用する力にかんして、配位が常に同じであり続けるように動くとき、(たとえば、力が一粒子にその運動の直線方向に働く場合)

運動力^{註 5} は運動量の増加率により測られる。もし F が運動力、 p が運動量なら

$$F = \frac{dp}{dt},$$

であり、したがって

$$p = \int F dt.$$

である。

p. 202

力の時間積分は力の衝撃^{註 6} と呼ばれる。したがって、運動量は物体を静止の状態から与えられた運動の状態に持っていく力の衝撃であるということができる。

動いている結合系の場合、配位は速度 (\dot{q}) に依存する割合で連続的に変化しており、したがって運動量はそれに作用する力の時間積分であると仮定することはもはやできない。

しかし、任意の変数の増分 δq は $\dot{q}'\delta t$ より大きくはない。ここで δt は増加が起こる時間であり、 \dot{q}' はその時間のあいだの速度の最大値である。つねに同じ方向である力の作用のもとで静止から動く系の場合、これは明らかに最終速度である。

もし最終速度と系の配位が与えられたなら、速度がごく短い時間 δt に系に受け渡されたと考えることができ、最初の配位は最後の配位と量 $\delta q_1, \delta q_2, \&c.$ だけ異なり、それはそれぞれ $\dot{q}_1\delta t, \dot{q}_2\delta t, \&c.$ よりも小さい。

時間の増分 δt が小さいとすればするほど、加えられた力は大きくなければならないが、それぞれの力の時間積分、すなわち衝撃は有限のままである。時間が減らされ究極的に零になるとき、衝撃の極限値は瞬間的な衝撃として定義され、任意の変数 q に対応する運動量 p は、系が静止の状態から運動の与えられた状態へ瞬間に持っていくかれたとき、その変数に対応する衝撃として定義される。

運動量は静止している系のうえへの瞬間的な衝撃により生成できるとの考え方には運動量の大きさを定義する模型としてのみ導入されている。なぜなら

^{註 5} 訳註: たとえば、剛体を構成する分子に働く力のうち、分子を剛体の形に束縛する力は運動にかかる力であり、消去されるべき力である。

^{註 6} 訳註: Impulse. 力積と呼ばれることが多い。

系の運動量は系の瞬間的な運動状態のみに依存し、その状態が生成された過程にはよらないからである。

結合系では任意の変数に対応する運動量は一般にすべての変数の速度の線形関数である。1粒子の運動のときのように、単純に速度に比例するのではない。

系の速度を突然 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ から $\dot{q}'_1, \dot{q}'_2, \dots$ へ変えるために必要とされる衝撃はあきらかに、いくつかの変数の運動量の変化、 $p'_1 - p_1, p'_2 - p_2, \dots$ に等しい。

p. 203

小さな衝撃によってなされる仕事。

559.] 衝撲のあいだに力 F_1 によってなされる仕事は力の空間積分である。
つまり

$$\begin{aligned} W &= \int F_1 dq_1, \\ &= \int F_1 \dot{q}_1 dt. \end{aligned}$$

もし \dot{q}'_1 が力の作用のあいだの速度 \dot{q}_1 の最大値、 \dot{q}''_1 が最小値なら、 W は

$$\dot{q}'_1 \int F dt \quad \text{つまり} \quad \dot{q}'_1 (p'_1 - p_1),$$

より小さくなければならず、

$$\dot{q}''_1 \int F dt \quad \text{つまり} \quad \dot{q}''_1 (p'_1 - p_1).$$

より大きくなければならない。

もし衝撲 $\int F dt$ が限りなく減少すると考えると、 \dot{q}'_1 と \dot{q}''_1 の値は \dot{q}_1 に近付き、究極的に一致する。そして、 $p'_1 - p_1 = \delta p_1$ と書くことができるので、したがって、なされる仕事は究極的に

$$\delta W_1 = \dot{q}_1 \delta p_1,$$

つまり、非常に小さい衝撲によってなされる仕事は究極的に衝撲と速度の積である。

運動エネルギーの増分。

560.] 保存系を運動させようと仕事をすると、エネルギーが系に受け渡され、系がエネルギーを減らして静止するまでに、抵抗に抗して等量の仕事を行えるようになる。

運動があるために系が持っているエネルギーは運動エネルギーと呼ばれ、系を運動状態にする力によってなされる仕事の形で、エネルギーは系に受け渡される。

もし T が系の運動エネルギーなら、そしてもし成分が $\delta p_1, \delta p_2, \&c.$ である無限小衝撃の作用のため、 $T + \delta T$ になるなら、増分 δT は衝撃の成分によってなされた仕事量の和でなければならない。つまり、記号を使うと

$$\begin{aligned}\delta T &= \dot{q}_1 \delta p_1 + \dot{q}_2 \delta p_2 + \&c., \\ &= \sum (\dot{q} \delta p).\end{aligned}\tag{1}$$

瞬間的な系の状態はもし変数と運動量が与えられると完全に定義される。したがって、運動エネルギーは系の瞬間的な状態に依存するが、変数 (q) と運動量 (p) を使って表示できる。これはハミルトンによって導入された T を表示する仕方である。もし T がこのように表示されたとき、それを添字 $_p$ によって区別しよう。こうして T_p と書く。

T_p の全変動は

$$\delta T_p = \sum \left(\frac{dT_p}{dp} \delta p \right) + \sum \left(\frac{dT_p}{dq} \delta q \right).\tag{2}$$

である。

最後の項は

$$\sum \left(\frac{dT_p}{dq} \dot{q} \delta t \right),$$

と書くことができ、それは δt の減少とともに減少し、衝撃が瞬間的になると、それとともに最終的に零になる。したがって、(1) と (2) で δp の係数を等しいとして、

$$\dot{q} = \frac{dT_p}{dp},\tag{3}$$

を得る。つまり、変数 q に対応する速度は対応する運動量 p にかんする T_p の微分係数である。

衝撃力の考察によってこの結果に達した。この方法により力が作用しているあいだの配位の変化の考察を避けた。しかし系の瞬間的状態は、系が静止の状態から与えられた運動状態に衝撃力の瞬間的な適用によって持つてこれらようと、漸次あれどのような方法でその状態に達したとせよ、すべての点で同じである。

言葉を変えると、変数と、対応する速度や運動量は与えられた瞬間の系の実際の運動状態に依存し、それ以前の歴史には依存しない。

したがって、系の運動状態が衝撃力によると考えられようと、どのような仕方によって作用する力によると考えられようと、式(3)は同じように正しい。それゆえ、ここで、その作用のときに課せられた制限や、作用のあいだの配位の変化によって課せられた制限を捨てるとともに、衝撃力の考察をやめる。

p. 205

ハミルトンの運動方程式。

561.] 私たちは既に

$$\frac{dT_p}{dp} = \dot{q}. \quad (4)$$

を示している。

系がその結合によって課される条件にしたがって、任意の仕方で動くとすると、 p と q の変動は

$$\delta p = \frac{dp}{dt} \delta t, \quad \delta q = \dot{q} \delta t, . \quad (5)$$

である。

したがって

$$\begin{aligned} \frac{dT_p}{dp} \delta p &= \frac{dp}{dt} \dot{q} \delta t, \\ &= \frac{dp}{dt} \delta q, \end{aligned} \quad (6)$$

であり、 T_p の全変動は

$$\begin{aligned} \delta T_p &= \sum \left(\frac{dT_p}{dp} \delta p + \frac{dT_p}{dq} \delta q \right), \\ &= \sum \left(\left(\frac{dp}{dt} + \frac{dT_p}{dq} \right) \delta q \right). \end{aligned} \quad (7)$$

である。

しかし、運動エネルギーの変化は加えられた力による仕事から生じる。つまり、

$$\delta T_p = \sum (F \delta q). \quad (8)$$

これら 2 つの式で δq の変動はすべて互いに独立だから、2 つの式 (7) と (8) で、そのそれぞれの係数を等しいとおいてよい。こうして

$$F_r = \frac{dp_r}{dt} + \frac{dT_p}{dq_r}, \quad (9)$$

を得る。ここで運動量 p_r と力 F_r は変数 q_r に属する^{註 7}

存在する変数と同じだけのこの形の方程式がある。これらの式はハミルトンによって与えられた。それらは任意の変数に対する力は 2 つの部分の和であることを示している。第 1 の部分は考えている変数の運動量の時間にかかる増加率である。第 2 の部分は、他の変数やすべての運動量を一定としたときの、変数の単位の増加あたりの運動エネルギーの増加率である。

p. 206

運動量と速度で表示された運動エネルギー。

562.] $p_1, p_2, \&c.$ をある与えられた瞬間の運動量、 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \&c.$ を速度とし、 $p_1, p_2, \&c.$ と $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \&c.$ を運動量と速度のもう一つの系で

$$p_1 = np_1, \quad \dot{q}_1 = n\dot{q}_1, \quad \&c. \quad (10)$$

であるとする。

系 p, q は系 p, q が無矛盾なら無矛盾であることは明らかである。

n を δn だけ変えよう。力 F によってなされた仕事は

$$F_1 \delta q_1 = \dot{q}_1 \delta p_1 = \dot{q}_1 p_1 n \delta n. \quad (11)$$

註 7 { この証明は、 δq が $\dot{q} \delta t$ 、つまり $\frac{dT_p}{dp} \delta t$ に等しいと仮定されているので、決定的だとは思えない。 (7), (8) から正当に導くことができるるのは

$$\sum \left\{ \left(\frac{dp_r}{dt} + \frac{dT_p}{dq_r} - F_r \right) \frac{dT_p}{dp_r} \right\} = 0.$$

}

n を 0 から 1 まで増加させると、系は静止状態から (\dot{q}, p) の運動状態に持つていかれる。この運動を生成するために費やされた全仕事は

$$(\dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + \&c.) \int_0^1 n dn. \quad (12)$$

である。

しかし、

$$\int_0^1 n dn = \frac{1}{2},$$

であり、運動を生成するために費やされた仕事は運動エネルギーに等価である。したがって

$$T_{pq} = \frac{1}{2}(p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \&c.). \quad (13)$$

ここで、 T_{pq} は運動量と速度で表示された運動エネルギーを表記する。変数 $q_1, q_2, \&c.$ はこの式には入らない。

それゆえ、運動エネルギーは運動量と対応する速度の積の和の半分である。

運動エネルギーがこのように表示されたとき、それを T_{pq} と表記しよう。

563.] 運動エネルギーを表示する第 3 の方法があり、実際、一般には、それが基本的なものとみなされている。

方程式 (3) を解くことにより、運動量を速度を使って表示できる。そのとき (13) 式でこれらの値を導入することにより、速度と変数のみを含む T の式を得る。 T がこの形で表されたとき、それを記号 $T_{\dot{q}}$ で指し示す。これがラグランジの方程式で表示される運動エネルギーの形である。

p. 207

564.] $T_p, T_{\dot{q}}, T_{pq}$ は同じものの 3 つの異なった式だから

$$T_p + T_{\dot{q}} - 2T_{pq} = 0,$$

つまり

$$T_p + T_{\dot{q}} - p_1 \dot{q}_1 - p_2 \dot{q}_2 - \&c. = 0. \quad (14)$$

は明らかである。

したがって すべての量 p, q, \dot{q} が変わると、

$$\begin{aligned} & (\frac{dT_p}{dp_1} - \dot{q}_1)\delta p_1 + (\frac{dT_p}{dp_2} - \dot{q}_2)\delta p_2 + \&c. \\ & + (\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} - p_1)\delta \dot{q}_1 + (\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} - p_2)\delta \dot{q}_2 + \&c. \\ & + (\frac{dT_p}{dq_1} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1})\delta q_1 + (\frac{dT_p}{dq_2} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_2})\delta q_2 + \&c. = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

変動 δp は δq と $\delta \dot{q}$ の変動とは独立ではないから、ただちに、これらの式のそれぞれの変動の係数が零であるとは言えない。しかし、方程式 (3) から

$$\frac{dT_p}{dp_1} - \dot{q}_1 = 0, \quad \&c., \quad (16)$$

が分かっており、 δp の変動を含む項はそれ自身で零になる。

残りの変動 $\delta \dot{q}$ と δq は今やすべて独立だから $\delta q_1, \&c.$ の係数を零に等しいとして

$$p_1 = \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1}, \quad p_2 = \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2}, \quad \&c.; \quad (17)$$

であることがわかる。つまり、運動量の成分は対応する速度にかんする $T_{\dot{q}}$ の微分係数である。

ふたたび、 $\delta q_1, \&c.$ の係数を零と等しいとして

$$\frac{dT_p}{dq_1} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} = 0; \quad (18)$$

つまり任意の変数 q_1 にかんする運動エネルギーの微分係数は T を運動量の関数ではなく速度の関数として表示したとき、同じ大きさで反対符号に等しい式 (18) によって、運動方程式 (9) を

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} - \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}, \quad (19)$$

つまり

$$F_1 = \frac{d}{dt} \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} - \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}, \quad (20)$$

と書くことができる。これがラグランジによって与えられた運動方程式の形である。

565.] ここまで的研究で私たちは運動エネルギーを速度の形や運動量の形で表示する関数の形を考察する事を避けてきた。それに割り当てた唯一の明示した形は

$$T_{p\dot{q}} = \frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \&c.), \quad (21)$$

だけで、そこではそれは運動量のそれぞれと対応する速度の積の和の半分として表示されている。

式(3)のように速度を T_p の運動量にかんする微分係数の形で表示できる。

$$T_p = \frac{1}{2}(\dot{p}_1 \frac{dT_p}{dq_1} + \dot{p}_2 \frac{dT_p}{dq_2} + \&c.), \quad (22)$$

これは T_p は運動量 $p_1, p_2, \&c.$ の 2 次の同次関数であることを示している。私たちはまた $T_{\dot{q}}$ を使って運動量を表示でき、

$$T_{\dot{q}} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} + \&c.) \quad (23)$$

であることが分かる。これは $T_{\dot{q}}$ が速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \&c.$ にかんする 2 次の同次関数であることを示している。

もし

$$\frac{d^2 T_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1^2} \text{ を } P_{11}, \quad \frac{d^2 T_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1 d\dot{q}_2} \text{ を } P_{12}, \quad \&c.$$

そして

$$\frac{d^2 T_p}{dp_1^2} \text{ を } Q_{11}, \quad \frac{d^2 T_p}{dp_1 dp_2} \text{ を } Q_{12}, \quad \&c.$$

と書くと、 $T_{\dot{q}}, T_p$ は、それぞれ、 q, p の 2 次の同次関数だから、 P や Q は変数 q のみの関数で、速度や運動量には独立である。こうして T に対する式

$$2T_{\dot{q}} = P_{11}\dot{q}_1^2 + 2P_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \&c., \quad (24)$$

$$2T_p = Q_{11}p_1^2 + 2Q_{12}p_1p_2 + \&c. \quad (25)$$

を得た。

運動量は速度を使って線型方程式

$$p_1 = P_{11}\dot{q}_1 + P_{12}\dot{q}_2 + \&c., \quad (26)$$

によって表示される。速度は運動量を使って線型方程式

$$\dot{q}_1 = Q_{11}p_1 + Q_{12}p_2 + \&c. \quad (27)$$

によって表示される。

剛体の力学についての論文では P_{11} のような添字が同じものにたいする係数は慣性モーメントと呼ばれ、 P_{12} のような添字が異なるものに対応する係数は慣性積と呼ばれる。

p. 209

私たちはこれらの名前を私たちの眼前にあるより一般的な問題に拡張できるが、そこではこれらの量は剛体の場合のような絶対的な定数ではなく、変数 $q_1, q_2, \&c.$ の関数である。

同様にして Q_{11} の形の係数は可動度モーメントと呼び、 Q_{12} の形の係数は可動度積と呼ぶことができる。しかしながら、可動度係数について話す機会はそれほどない。

566.] 系の運動エネルギーは本質的に正または零である量である。したがって、運動エネルギーが速度を使って表示されようと、運動量を使って表示されようと、係数は変数の現実の値がけっして T を負にしないようなものである。

つまり、係数 P の値が満たさなければならない一組の必要条件がある。

量 $P_{11}, P_{12}, \&c.$ はすべて正でなければならない。

行列式

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2n} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & \dots & P_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n} & P_{2n} & P_{3n} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

から、添字 1 を除いて得られる行列式、つぎの、添字 1, 2 を除いて得られる行列式、と順次得られる $n - 1$ 個の行列式はすべて正でなければならない。

n 個の変数にたいする条件は、それゆえ、 $2n - 1$ 個である。

係数 Q も同種の条件に従う。

567.] 結合系の力学の基本原理のこの概要では、系のいろいろな部分が結び付く機構を視野の外においてきた。私たちは系の任意の部分の運動がどのように変数の変化に依存しているかを示す方程式の組を書き下すことさえしなかった。私たちは、変数と、速度と運動量、変数が表す部品に作用する力に注意を集中してきた。私たちの唯一の仮定は、系の結合は時間が条件式にあからさまに含まれないようなものであること、そして、エネルギー保存の原理が系に適用可能であること、だけである。

p. 210

このような純粹力学の方法の記述は必ずしも不必要なことではない。私たちはラグランジやその追随者にこの方法を負うているが、彼らは一般にその正しさを示すことだけに専念し、彼らの前にある記号に注目を集中するため、純粹な量にかんするアイデアを除いて、すべてのアイデアを追放する努力をした。ダイヤグラムをなしで済ますだけではなく、もとの方程式ですべてを記号で取り換えてしまったあと、速度、運動量、エネルギーのアイデアを消し去るよう努力した。私たちは、ふつうの力学の言葉でこの解析の結果を参照できるように、記号を使わなくても意味のある言語にこの方法の主要方程式を再翻訳する努力をした。

純粹数学の考え方と方法の展開は、力学の数学理論を形成することにより、数学の訓練なしには発見できなかった多くの真実を白日のもとに持ってくる事を可能にしてきた。したがって、もし他の科学の力学理論を形成しようとするなら、数学的な方法とともに、これらの力学的な真実を心に染み込ませなければならない。

電気のような、力とその効果を扱うどのような科学でも、それにかんする考え方や言葉を形成するとき、力学という基本科学にふさわしい考え方を常に心に抱いておらなければならず、そうすることによって、科学の最初の展開のあいだ、既に確立したものとの矛盾を避けることができ、また私たちの観点がより明らかになるとき、私たちが採用した言語は障害にはならず、私たちの助けとなることができるであろう。

第VI章

電磁気の力学理論。

568.] 552 節で、電流が伝導回路中に存在するとき、電流はある量の機械的な仕事をするための能力を持ち、機械的仕事が、いかなる外部駆電力とも独立に、流れを維持していることを示した。さて仕事をする能力は、どのような方法でそれが生じるかによらず、エネルギーにほかならず、すべてのエネルギーは同種のものだが、いろいろな形がありうる。電流のエネルギーは現実の物質の運動からなる形のものか、運動を始める能力からなる形のものかのどちらかで、その能力は互いにある相対的な位置に置かれた物体間で作用する力から生じる。

第 1 の種類のエネルギー、動きのエネルギーは運動エネルギーと呼ばれ、ひとたび理解されると、それは自然の基本的事実であるように思われ、それをほかの何かに還元する可能性などほとんど考えることができない。第 2 の種類のエネルギー、位置に依存するエネルギーは、ポテンシャルエネルギーと呼ばれ、力と呼ぶものの作用による、言い替えると、相対位置を変化に向かわせる傾向による。これらの方に関して、私たちはその存在を具体的に示された事実として受け入れているが、この物体を運動させる機構の説明こそが本当の新しく付け加わった知識を形成すると常に感じている。

569.] 電流は運動現象として以外考えることはできない。「電気の流れ」、「電気流体」の言葉にともないがちな、これらの語感の影響からつねに心を開放しようと努力していたファラディでさえ、電気の流れを「たんなる配置ではない、進行するなにか」^{註 1} と話している。

p. 212

電気分解や、ある物体から他の物体への帶電の移送のような電流の効果は、すべて進行する作用で、その完了には時間を使し、それゆえ、本質的に運動

^{註 1} Exp. Res., 283.

である。

電流の速度にかんして、私たちは何も知らないことを示してきた。それは 1 時間に 10 分の 1 インチかもしれないし、1 秒間に数千マイルかもしれない^{註 2}。どのような場合もその絶対的な値を知ることからほど遠いので、私たちが正の方向と呼ぶものが運動の現実の方向か、それとも逆なのかすら知らない。

しかし、私たちがここで仮定していることはすべて電流はある種の運動を含んでいることである。電流の原因であるものは駆電力と呼ばれてきた。この名前は長らく非常に便利に使われてきており、科学の言葉としてなんら矛盾に導くことはなかった。駆電力はつねに、電気が宿る物体ではなく、電気にのみ作用すると理解されている。物体にのみ作用し、その中の電気には作用しない、通常の機械的な力と駆電力は決して混同されることはない。もし電気と通常の物質のあいだの形式的な関係が分れば、おそらく、駆電力と通常の力のあいだの関係もまた分るであろう。

570.] 通常の力が物体に作用し、物体が力に従うとき、力によってなされる仕事は力と物体が動いた量の積で測られる。したがって、パイプをとおして力を受ける水の場合、任意の断面でなされる仕事は断面での流体の圧力に断面を横切る水の量を掛けることによって測られる。

同様に駆電力によってなされる仕事は駆電力と駆電力の作用のもとで導体の断面を横切る電気量の積によって測られる。

駆電力によってなされる仕事は厳密に通常の力によってなされる仕事と同じ種類のものであり、同じ標準、つまり、同じ単位によって測られる。

伝導する回路に作用する駆電力によってなされた仕事の一部は回路の抵抗に打ち勝つために費やされ、仕事のこの部分は、そのとき、熱に変換される。

仕事の他の部分はアンペールによって観測されたように、電磁現象を生成するために費やされ、そのとき、導体は電磁力によって動かされる。仕事の残りの部分は電流の運動エネルギーを増やすために費やされ、作用のこの部分の効果はファラディによって観測された電流の誘導現象で示される。

それゆえ、私たちは電流について十分に知っており、電流を運ぶ物質導体の系で、エネルギーの座である力学系を、一部を運動エネルギー、一部をポ

^{註 2} Exp. Res., 1648.

テンシャルエネルギーとして、理解できる。

この系の部分部分の結合の性質は分っていないが、系の機構の知識を必要としない力学の研究法があるので、それをこの場合に当てはめよう。

まず系の運動エネルギーを表現する関数にたいするもっとも一般的な形式を仮定することの帰結を検討しよう。

571.] 系がいくつかの伝導回路からなるとし、その形と位置は変数 x_1, x_2, \dots の系の値によって決まるとする。変数の数は系の自由度の数に等しい。

もし系の全運動エネルギーがこれら導体の運動によるものだったら、それは

$$T = \frac{1}{2}(x_1 x_1) \dot{x}_1^2 + \dots + (x_1 x_2) \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dots,$$

の形によって表現されたであろう。ここで記号 $(x_1 x_1), \dots$ は私たちが慣性モーメントと呼んだ量を表記し、 $(x_1 x_2), \dots$ は慣性積を表記している。

もし X' が印加された力で、座標 x を増加させようとし、それが実際の運動を生成するために要請されるなら、ラグランジの方程式より

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dx} - \frac{dT}{dx} = X'.$$

が成り立つ。

T が目に見える運動のみによるエネルギーを表すなら、それを添字 $_m$ によって指し示し、 T_m と表そう。

しかし、電流を運ぶ導体系では、運動エネルギーの一部はこれらの電流の存在による。電気の運動、そして電気の運動によって支配されているなんらかの運動は他の変数の組、 y_1, y_2, \dots によって決められているとしよう。このとき T は 2 組の座標のすべての速度の平方とすべての 2 つの速度の積の同次関数であろう。それゆえ、 T を 3 つの部分に分けることができる。その第 1、 T_m には、座標 x の速度のみが出てくる。その第 2 に、 T_e は座標 y の速度のみが出てくる。その第 3、 T_{me} には、それぞれの項は座標の 1 つは x 、もう 1 つは y である 2 つの座標の速度の積を含む。

それゆえ、

$$T = T_m + T_e + T_{me}$$

p. 214

となる。ここで

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{2}(x_1 x_1) \dot{x}_1^2 + \&c. + (x_1 x_2) \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \&c., \\ T_e &= \frac{1}{2}(y_1 y_2) \dot{y}_1^2 + \&c. + (y_1 y_2) \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \&c., \\ T_{me} &= (x_1 y_1) \dot{x}_1 \dot{y}_1 + \&c. \end{aligned}$$

である。

572.] 一般的力学理論では、どの項の係数もすべての座標、 x と y の両方の関数でありうる。しかしながら、電流の場合、 y の類の座標は係数に入らないことは容易くわかる。

なぜなら、もしすべての電流が一定に維持されているなら、そして導体が静止しているなら、場の全状態は一定のままであるからである。しかし、この場合、速度 \dot{y} は一定だが、座標 y は可変である。したがって、座標 y は T の表式に、つまり現実に生じるそのほかのどの表式にも、表れることはできない。

このほかに、連続の式のために、もし導体が線状の回路の性質を持つなら、それぞれの導体中の電流を表示するために 1 変数のみが必要とされる。速度 $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \&c.$ がいくつかの導体中の電流の強さを表現するとしよう。

もし、電流ではなく、たわみやすい管の中を流れる非圧縮性流体の流れなら、これらすべては正しかったであろう。この場合、これらの流れの速度は T にたいする表式に入るであろうが、係数は変数 x のみに依存し、それが管の形と位置を決めるであろう。

流体の場合、ある管の中の流体の運動は他のどのような管の運動にも、その中の流体の運動にも、直接影響を与えることはない。したがって、 T_e の値には、速度 \dot{y} の平方のみがあり、それらの積は出てこない。そして T_{me} には、どの速度 \dot{y} にもその自分自身の管に属する \dot{x} の形の速度のみが伴う。

電流の場合、この制限は成立しないことが分かっている。いろいろな回路の中の電流は互いに作用するからである。したがって $\dot{y}_1 \dot{y}_2$ の形の積を含む項が存在することを認めなければならない。これは運動する何かの存在を含み、その運動は電流 \dot{y}_1, \dot{y}_2 の両方の強さに依存する。この動く物体は、それが何であれ、2 つの電流を担う導体の内部に制限されず、おそらくそのままわりの全空間に拡がっている。

573.] 次に、この場合にラグランジの運動方程式が想定する形式を考えよう。 X' を座標 x に対応する印化された力であるとする。 x は伝導回路の形と位置を決める座標の一つである。これは通常の意味での力で、空間的な位置を変えようとするものである。それは方程式

$$X' = \frac{d}{dt} \frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx}$$

によって与えられる。

この力を系の運動エネルギーを種類分けする 3 つの部分に対応する 3 つの部分の和と考えてもよい。それらを同じ添字で区別することができる。こうして

$$X' = X'_m + X'_e + X'_{me}.$$

である。

部分 X'_m は通常の力学の考察に依存する部分であり、それに留意する必要はない。 T_e は \dot{x} を含んでいないから、 X'_e に対する式の第 1 項は零であり、その値は

$$X'_e = - \frac{dT_e}{dx}.$$

と簡単になる。

これは電磁力を釣合わすために導体に働くといけない機械的な力に対する式であり、座標 x の変化による純電気運動エネルギーの減少率によって測られることを主張している。この外的な機械的な力を働くようにさせる電磁力 X_e は、 X'_e と同じ大きさで反対方向であり、したがって座標 x の増加に対応する電磁エネルギーの増加率によって測定される。 X_e の値は、電流の平方と積に依存するので、すべての電流の方向を逆にしても、同じままである。

X' の第 3 の部分は

$$X'_{me} = \frac{d}{dt} \frac{dT_{me}}{d\dot{x}} - \frac{dT_{me}}{dx}.$$

である。

p. 216

量 T_{me} は $\dot{x}\dot{y}$ の形の積のみを含み、 $\frac{dT_{me}}{d\dot{x}}$ は電流 \dot{y} の強さの線形関数である。それゆえ、第 1 項は電流の強さの変化率に依存し、導体上の機械的な力を指している。その力は電流が一定のとき零であり、電流が強さを増加または減少するにしたがって、正または負である。

第 2 項は、電流の変化ではなく、その実際の強さに依存する。それはこれらの電流に関して線形関数であるので、電流が符号を変えたとき、符号を変える。どの項も速度 \dot{x} を含むので、導体が静止しているとき、それは零である。また $\frac{dT_{me}}{dx}$ の中の \dot{y} の係数の時間変化から生じる項もある。これらの注意はそれらにも当てはまる。

それゆえ、これらの項を別々に調べることができる。もし導体が静止しているなら、第 1 項を扱うだけでよい。もし電流が一定なら第 2 項だけである。

574.] 運動エネルギーのなんらかの部分が通常の速度と電流の強さからなる T_{me} の形であるかどうかを決めるることは非常に重要だから、この問題について実験を注意深く行なうことが欠かせない。

急速な運動をする物体に働く力を決めるることは困難である。それゆえ第 1 項に留意しよう。それは電流の強さの変化に依存する。もし運動エネルギーの任意の部分が通常の速度と電流の強さの積に依存するなら、速度と電流が同じ方向か反対方向であるとき、おそらくもっとも容易に観測されるであろう。それゆえ、何度も巻いた円形コイルを取り、それを巻きが水平であるように細い垂直導線に吊るすと、コイルは垂直軸のまわりに、コイルの中の電流と同じ方向か、反対方向に、回転することができる。

電流は吊下げている導線によってコイルに運ばれ、巻きをとおりすぎた後、吊下げ導線と同じ線上にあり、水銀の容器の中に浸っている導線をとおして下に通ることによってその回路を閉じると考え

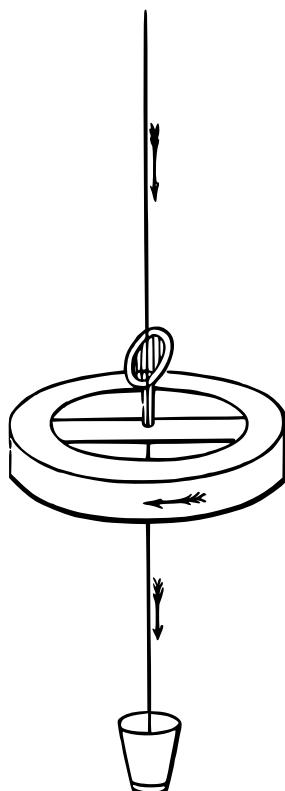


図: 33.

よう。

p. 217

電流がコイルを流れたとき、地磁気の水平成分の作用は水平軸のまわりにこのコイルを回そうとするから、地磁気の水平成分は固定された磁石によって厳密に中性化されていると考えるか、実験が磁極で行われると考えよう。方位角方向の任意の運動を検出するため鉛直を向いた鏡がコイルに取り付けられる。

電流がコイルを北東南西方向に通るようにする。もし電気が水のような流体で、導線を流れるなら、流れの始まった瞬間に、またその速度が増加するかぎり、コイルを回る流体の角運動量を生成するために力が供給されなければならない。そしてこれは吊るす導線の弾性によって供給されなければならぬので、コイルは、最初、反対方向、つまり西南東北方向に回転するであろう。これは鏡を使って検出されるであろう。流れを止めるとき、鏡の他の動きがあり、このときは電流の方向と同じ方向であろう。

この種の現象はいまだ観測されてはいない。そのような作用は、もし存在すれば、つぎのような特異性によって、これまでに知られている電流の作用と容易く区別できるだろう。

- (1) それは、接続されたり、切断されたりしたときのような、電流の強さが変わったときのみ生じる。

既知の電流の機械的作用は電流の強さに依存し、変化率には依存しない。誘導流の場合駆電作用は電磁作用と混同されえない。

- (2) この作用の方向は場の中のすべての電流が逆転したとき、逆転するだろう。

既知の電流の機械的な作用はすべて、電流がすべて逆転したとき、それはこれらの電流の平方と積に依存するから、同じ方向のままである。

p. 218

もしこの種のなんらかの作用が発見されたなら、いわゆる電気の種類の一つを正の種類であれ負の種類であれ、現実の物質であるとみなすことができ、電流を特定の方向のこの物質の真の運動として記述できるはずである。実際、もし電気の運動が通常の物質の運動となんらかの方法で比較可能なら、 T_{me} の形の項が存在し、その存在は機械的な力 X_{me} によって明らかになるだろう。

電流は同じ導体の反対方向に流れる正の電気と負の電気の 2 つの等量の電気からなるというフェヒナーの仮説にしたがうと、第 2 類の項 T_{me} は消え、正の流れに属するそれぞれの項には負の流れに属する同じ大きさの反対符号の項が伴い、これらの項に依存する現象は存在しないであろう。

しかし、電流と物質流体の流れのあいだの多くの類似性の認識から大きな利益を得たが、実験的な証拠に保証されないといかる仮定を作ることも注意深く避けなければならず、電流が現実に物質の流れであるかどうか、二重の流れかどうか、その速度は 1 秒あたりのフィートで測られるように大きいか小さいかを示す実験的な証拠は、未だ、存在しないように思われる。

これらのことについての知識は少なくとも電気の完全な力学理論の始まりになったであろう。そこでは私たちは電気の作用を、この書のように、知られていない原因による現象ではなく、一般的な力学法則のみに従うとみなしたはずである。しかし、物質の既知の部分の既知の運動の結果として、そこでは全効果と最終結果のみならず、中間の全機構と運動の詳細が研究対象ととらえられている。

575.] 第 2 項、つまり $\frac{dT_{me}}{dx}$ の実験的な研究は、急速に動く物体への力の効果の観測を含むので、より困難である。

図 34 で示されている装置は、私が 1861 年に組み立てたものだが、この種の力の存在の検証を意図している。電気磁石 A は水平軸 BB' の回りに回転でき、輪のなかでそれ自身が鉛直軸のまわりを回転する。

A, B, C を、それぞれ、コイルの軸のまわりの、水平軸を BB' まわりの、第 3 軸を CC' まわりの、電磁石の慣性モーメントとする。

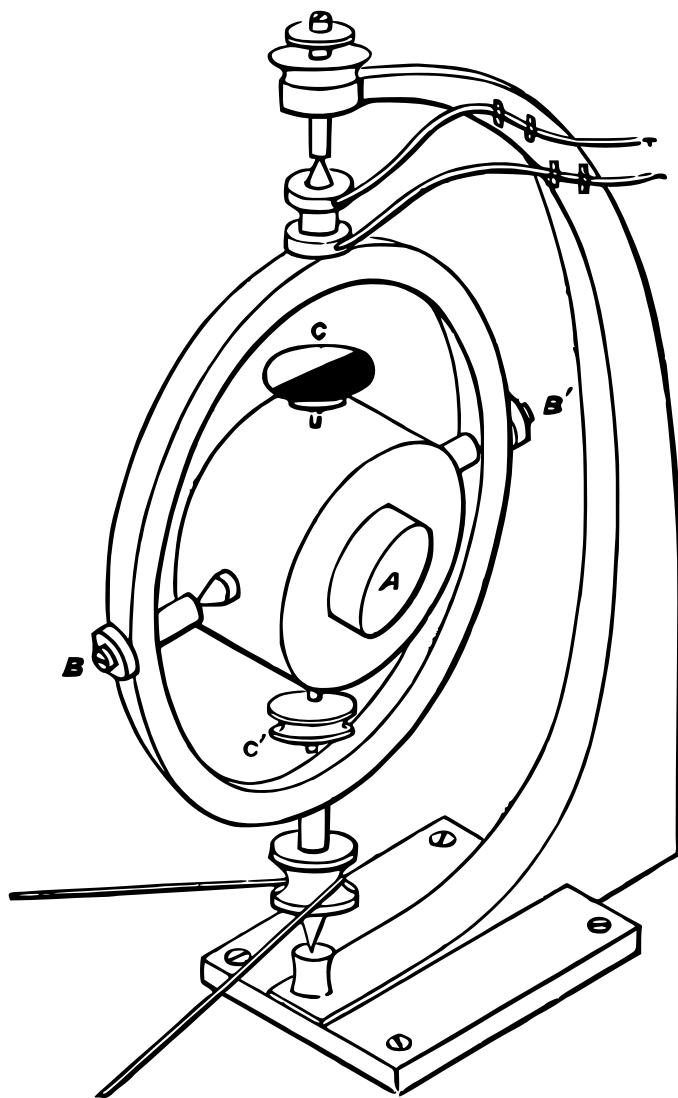
θ を CC' が鉛直となす角、 ϕ を軸 BB' の方位角、 ψ をコイル中の電気の運動が依存する変数とする。

このとき、電磁石の運動エネルギー T は

$$2T = A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + B\dot{\theta}^2 + C\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + E(\dot{\phi} \sin \theta + \dot{\psi})^2,$$

と書くことができる。ここで E はコイル中の電気の慣性モーメントと呼ぶことのできるある量である。

もし Θ が θ を増加させる印加された力のモーメントなら、運動方程式に



図：34

よって

$$\Theta = B \frac{d^2\theta}{dt^2} - ((A - C)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + E\dot{\phi} \cos \theta (\dot{\phi} \sin \theta + \dot{\psi}))^2.$$

を得る。

ψ を増加させる印加された力、 Ψ を零に等しくすると、

$$\dot{\phi} \sin \theta + \dot{\psi} = \gamma,$$

p. 220

コイル中の電流の強さを表現すると考えることのできる一つの定数を得る。

もし C が A よりいくぶん大きければ Θ は零になり、

$$\sin \theta = \frac{E\gamma}{(C - A)\dot{\phi}}.$$

のとき、軸 BB' のまわりの平衡は安定であろう。

θ の値は電流 γ の値に依存し、電流の方向にしたがって正または負である。

電流は B と B' でペアリングによってコイルを通り、それは鉛直軸上に置かれた金属の輪の上で擦るばねによって電池と結合されている。

θ の値を決めるために、紙の円板が C に置かれ、 BB' に平行な直径によって 2 つの部分に分けられている。その一つは赤く塗られ、もう一つは緑に塗られている。

装置が動いているとき θ が正なら C に赤い円が見え、その半径がおよそ θ の値を指している。 θ が負のとき、緑の円が C に見える。

電磁石に付けられたねじの上で働くナットによって、軸 CC' は軸 A まわりの慣性モーメントをちょうど越える慣性モーメントを持つ主軸であるように調整される。

実験の主たる困難は地磁気の擾乱作用から生じる。それは電磁石に伏角計のような作用をさせる。得られる結果はこのために非常に粗いであろうが、それを強力な電磁石とするため、鉄芯をコイルに挿入したときできさえ、 θ のいかなる変化の証拠も得られないであろう。

それゆえ、もし磁石が急速に回転する物質を含むなら、この回転の角運動量は測定可能ないかなる量と較べても非常に小さくなればならず、私たちは、未だ、その力学作用から導かれる項 T_{me} の存在のいかなる証拠も得てはいない。

576.] 次に電気の流れに作用する力、つまり、駆電力を考えよう。

Y を誘導による実効的な駆電力とする。外からそれに釣り合わすために回路に作用しなければならない駆電力は $Y' = -Y$ であり、ラグランジ方程式により

$$Y = -Y' = -\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\dot{y}} + \frac{dT}{dy}.$$

である。

p. 221

T には座標 y を含む項はないから、第 2 項は零であり、 Y はその第 1 項に簡略化される。したがって、駆電力は静止している系、そして一定の電流を持つ系、では存在しない。

再び、もし Y を T の 3 つの部分に対応する 3 つの部分 Y_m , Y_e , Y_{ms} に分割するなら、 T_m は \dot{y} を含まないから、 $Y_m = 0$ であることが分かる。

また

$$Y_e = -\frac{d}{dt} \frac{dT_e}{d\dot{y}}.$$

であることも分かる。

ここで、 $\frac{dT_{me}}{d\dot{y}}$ は電流の線形関数であり、駆電力のこの部分はこの関数の変化率に等しい。これはファラディによって発見された誘導駆電力である。それを後で十分に考察することにしよう。

577.] 速度かける電流に依存する T の部分から

$$Y_{me} = -\frac{d}{dt} \frac{dT_{me}}{d\dot{y}}.$$

が分かる。

さて $\frac{dT_{me}}{d\dot{y}}$ は導体の速度の線形関数である。それゆえ、もし T_{me} のなんらかの項が現実に存在するなら、たんに導体の速度を変えることで、すべての存在する電流とは独立に、駆電力を生成することが可能だったであろう。たとえば、574 節の吊下げられたコイルの場合、もし、コイルが静止しているとき、鉛直軸の回りに突然回転させたなら、この運動の加速度に比例した駆電力を作用させたであろう。それは運動が一様になったとき消え、運動が減速されたとき、逆転したであろう。

さて電流計による電流の存在・非存在を決める以上のこと以上の精度で科学的な観測はほとんどできない。この方法の感度は物体に作用する機械的な力を測定

するためのほとんどの実験配置の感度をはるかに越えている。それゆえ、もしこのようにしてなんらかの電流が生成されたなら、たとえそれが非常に弱いものであっても、検出されたであろう。それらは通常の誘導流から以下の特性により区別されるであろう。

(1) それらはまったく導体の運動に依存し、既に場の中にある電流や磁力の強さにまったく依存しない。

(2) それらは導体の絶対的な速度ではなく、その加速度に依存し、またいろいろな速度の平方や積に依存する。絶対速度が同じでも加速が減速になったとき、それは変化するであろう。

さて、現実に観測されるすべての事例では、誘導流はまったく場の中の電流の強さと変動に依存しており、磁力がなく電流がない場の中では励起されない。それらが導体の運動に依存するかぎり、それらは絶対速度に依存し、導体の運動の速度の変化には依存しない。

このように、 T_{me} の形の項の存在を検出する 3 つの方法を持っているが、そのいずれも何らの肯定的な結果を出していない。眞の電気理論にきわめて強く関連する点について私たちの到達できる範囲で、最大限の確かさに到達することは私に取って非常に重要であると思われるから、私はそれを非常に注意して指摘した。

しかしながら、そのような項についていかなる証拠も未だ得ていないから、それらは存在しない、少なくともそれらは感知できるような効果を生成しないという、私たちに力学理論をかなり簡単なものにする仮定の上で進んで行こう。しかしながら、磁気の光との関係を議論するとき、光を構成する運動が磁気を構成する運動を含む項に因子として入ることができる事を示す機会があるであろう。

第VII章

電気回路の理論。

578.] ここで、電流の強さの平方や 2 電流の強さの積に依存する系の運動エネルギーの部分に注意を集中する。これを電気運動-エネルギーと呼ぶことができる。導体の動きに依存する部分は通常の力学に属し、速度と電流の積に依存する部分は存在しないことを見てきた。

$A_1, A_2, \&c.$ でいろいろな伝導性の回路を表記しよう。その形や相対位置は変数 $x_1, x_2, \&c.$ を使って表示できるとしよう。その数は力学系の自由度の数に等しい。これらを幾何変数と呼ぼう。

y_1 に時間 t の始めから導体 A_1 の与えられた断面を横切った電気量を表記させる。電流の強さはこの量の流率、 \dot{y}_1 、によって表記される。

\dot{y}_1 を実際の電流と呼び、 y_1 を積算電流と呼ぼう。系のそれぞれの回路に対してこの種の一つの変数が存在する。

T で系の電気運動-エネルギーを表記する。それは電流の強さにかんする 2 次の同次関数であり、

$$T = \frac{1}{2} L_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{y}_2^2 + \&c. + M_{12} \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \&c., \quad (1)$$

の形をしている。ここで係数 $L, M, \&c.$ は幾何変数 x_1, x_2 の関数である。電気的な変数 y_1 は表式の中には入らない。

$L_1, L_2, \&c.$ を回路 A_1, A_2 の電気慣性モーメントと呼び、 M_{12} を 2 つの回路 A_1, A_2 の電気慣性積と呼ぼう。力学理論の言葉を避けたいときは L_1 を回路 A_1 の自己誘導係数と呼び、 M_{12} を回路 A_1, A_2 の相互誘導係数と呼ぼう。 M_{12} は回路 A_2 にかんする回路 A_1 のポテンシャルとも呼ばれる。

T を \dot{y}_1 にかんして微分することにより量 p_1 を得る。それは、力学理論では、 y_1 に対する運動量と呼ばれる。電気理論では回路 A_1 の電気運動-運動量

と呼ぼう。その値は

$$p_1 = L\dot{y}_1 + M_{12}\dot{y}_2 + \&c.$$

である。

それゆえ、回路 A_1 の電気運動-運動量はその自分自身の電流とその自己誘導係数との積と、他の回路の電流とそれぞれ A_1 の相互誘導係数や他の回路との積の和からできている。

駆電力。

579.] E を、磁気-電気誘導とは独立に電流を生成するボルタ電池や熱電堆のような、なんらかの原因から生じる、回路 A 中に加えられた駆電力とする。

R を回路の抵抗とする。すると、オームの法則により、抵抗に打ち勝つために駆電力 $R\dot{y}$ が必要となり、回路の運動量を変えるために、駆電力 $E - R\dot{y}$ が使用可能なまま残る。この力を Y' と呼ぶと、一般式によって

$$Y' = \frac{dp}{dt} - \frac{dT}{dy},$$

を得るが、 T は y を含まないので、最後の項は消える。したがって、駆電力の式は

$$E - R\dot{y} = Y' = \frac{dp}{dt},$$

つまり

$$E = R\dot{y} + \frac{dp}{dt}$$

である。

それゆえ、印加された駆電力 E は 2 つの部分の和である。第一の $R\dot{y}$ は抵抗 R に抗して電流 \dot{y} を保つために必要とされる。第二の部分は電磁運動量 p を増加させるために必要とされる。磁気-電気誘導のみから生じる駆電力は明らかに $-\frac{dp}{dt}$ 、つまり電流の電気運動-運動量の減少率である。

電磁力。

580.] X' を外的な原因から生じ、変数 x の増加させる印加された力学的な力とする。一般式より

$$X' = \frac{d}{dt} \frac{dT}{dx} - \frac{dT}{dx}.$$

である。

電気運動-エネルギーにたいする表式は速度 (\dot{x}) を含まないから、右辺の第1項は消え、

$$X' = -\frac{dT}{dx}.$$

であることが分かる。

ここで X' は電気的な原因から生じる力を釣り合わせるために必要とされる外的な力である。この力を電磁力に抗する反作用と考えるのが通常である。その電磁力を X と呼ぶ。それは X' と同じ大きさで反対符号である。

したがって

$$X = \frac{dT}{dx}$$

つまり、任意の変数を増加させる電磁力は、電流は一定に保って、その変数の単位量の増加あたりの電気運動-エネルギーの増加率に等しい。

もし電流が変位のあいだ、電池によって一定に保たれ、その変位で、量 W の仕事が駆電力によってなされているなら、系の電気運動-エネルギーは同時に W だけ増加する。したがって電池は回路中で熱を生成するのに使われるものに加えて、2倍の量のエネルギー、つまり $2W$ が引き出されている。これは、93節の静電気の性質と比較することによって、W. トムソン卿^{註1}によつて、始めて、指摘された。

p. 226

2 回路の場合。

581.] A_1 を1次回路、 A_2 を2次回路と呼ぼう。系の電気運動-エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}L\dot{y}_1^2 + M\dot{y}_1\dot{y}_2 + \frac{1}{2}N\dot{y}_2^2,$$

^{註1} Nichol の Cyclopaedia of the Physical Sciences, ed. 1860, 論文 'Magnetism, Dynamical Relations of.'

と書くことができる。ここで L , N は、それぞれ、1 次および 2 次の自己誘導係数であり、 M はそれらの相互誘導係数である。

1 次電流の誘導によるものを除いて 2 次回路にはどのような駆電力も作用していないと考えよう。そのとき

$$E_2 = R_2 \dot{y}_2 + \frac{d}{dt} (M \dot{y}_1 + N \dot{y}_2) = 0$$

を得る。

t にかんしてこの式を積分すると、

$$R_2 y_2 + M \dot{y}_1 + N \dot{y}_2 = C, \text{ ある定数},$$

を得る。ここで y_2 は 2 次回路中の積算電流である。短期間の積算電流を測る方法は 748 節で記述される。2 次電流の持続時間がごく短いことを確実にすることはほとんどの場合、容易い。

時間 t の最後で、式のなかの可変量の値にダッシュ記号をつけよう。このとき、もし y_2 が積算電流なら、つまり時間 t のあいだに 2 次回路の断面を通って流れる電気の全量なら

$$R_2 y_2 = M \dot{y}_1 + N \dot{y}_2 - (M' \dot{y}'_1 + N' \dot{y}'_2).$$

である。

もし 2 次電流が完全に誘導から生じるなら、もし 1 次電流が一定で時間 t の始まりの前、導体が静止状態なら、その初期値 \dot{y}_2 は零でなければならず、もし時間 t が 2 次電流が亡くなることを許すのに十分なら、その最後の値、 \dot{y}'_2 も零であり、したがって方程式は

$$R_2 y_2 = M \dot{y}_1 - M' \dot{y}'_1.$$

となる。

2 次回路の積算電流は、この場合、 $M \dot{y}_1$ の初期および最終の値に依存する。

誘導された電流。

582.] 1 次回路が切断されており、つまり、 $\dot{y}_1 = 0$ であり、回路が閉じられたとき電流 \dot{y}'_1 が確立されたと考えることから始めよう。

2次積算電流を決める式は

$$R_2 y_2 = -M' \dot{y}_1.$$

である。

回路が並んで同じ方向に置かれたとき、 M' は正の量である。したがって、1次回路で閉じられたとき、負の電流が2次回路に誘導される。1次回路で接觸が絶たれたとき、1次電流は止まり、誘導積算電流は y_2 である。ここで

$$R_2 y_2 = M \dot{y}_1.$$

である。

この場合 2 次電流は正である。

もし 1 次電流が一定に保たれ、回路の形や相対位置が変えられ、 M が M' になるなら、積分 2 次電流は y_2 である。ここで

$$R_2 y_2 = (M - M') \dot{y}_1.$$

である。

2 回路が並んで同じ方向に置かれた場合、回路間の距離が増加すると M は減少する。したがって、誘導された電流はこの距離が増加したとき正であり、減少したとき負である。

これらは 530 節で記述された誘導された電流の基本的な事例である。

2回路のあいだの力学的な作用。

583.] x を幾何変数の任意の一つで、それに回路の形や相互位置が依存するなら、 x を増加させようとする電磁力は

$$X = \frac{1}{2} \dot{y}_1^2 \frac{dL}{dx} + \dot{y}_1 \dot{y}_2 \frac{dM}{dx} + \frac{1}{2} \dot{y}_2^2 \frac{dN}{dx}.$$

である。

もし x の変化に対応する系の運動がそれぞれの回路が剛体として動くようなものなら、 L と N は x に独立で、方程式は

$$X = \dot{y}_1 \dot{y}_2 \frac{dM}{dx}.$$

の形へ還元するだろう。

したがって、もし 1 次電流と 2 次電流が同じ符号なら、回路間に働く力 X は M を増加させるように、それらを動かそうとするだろう。

もし回路が並んで置かれ、電流が同じ方向に巡るなら、互いにより近くへ運ばれることによって M は増加するだろう。したがってこの場合、力 X は引力である。

584.] 2 回路の相互作用のすべての現象は、電流の誘導であれ、それらのあいだの力学的な力であれ、量 M に依存する。それを私たちは相互誘導係数と呼んできた。回路の幾何学的な関係からこの量を計算する方法は 524 節で与えられているが、次章の研究ではこの量の数学形式の知識は仮定しない。たとえば、2 次回路が急に与えられた位置から無限遠や

$$M = 0.$$

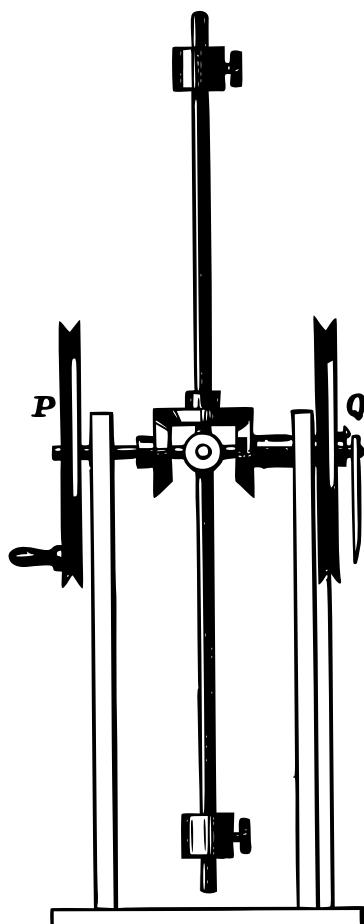
であることが分かっている任意の点 Q まで動かされたときに積算電流を観測するというような誘導にかんする実験から導かれたと考えよう。

註.—{ キャベンディッシュ研究所には誘導流の法則をきわめて明確に説明するマクスウェルによって設計された模型が存在する。

それは図 34.a に表されている。 P と Q は 2 枚の円盤である。 P の回転は 1 次電流を表し、 Q の回転は 2 次電流を表す。これらの円盤は差動歯車によって互いに結びつけられている。中間の輪ははずみ車を担っており、その慣性モーメントは重りを内外へ動かすこと

図 : 34a

により変えることができる。2 次回路の抵抗は Q の上をとおる糸の摩擦により表され、弾性のある帶び紐で堅く結ばれている。もし円盤 P を回転させた



なら（1次側で電流が開始された）、円盤 Q は反対方向に回転するであろう（1次が開始されたとき逆流）。 P の回転速度が一様になると Q は静止している（1次電流が一定のとき、2次には電流なし）。もし円盤 P が止められたなら、 Q は P がそれまで動いていた方向に回転を始める（回路を切ったとき、2次回路に正の電流）。鉄芯の誘導を増加させる効果ははずみ車の慣性モーメントの増加によって説明できる。}

第VIII章

2次回路を使った場の探求

585.] 582, 583, 564 節で 1 次回路と 2 次回路のあいだの電磁作用は M と表記される量に依存し、それは 2 つの回路の形と相対位置の関数であることを証明した。

磁気および電磁現象から 423, 492, 521, 539 節で 2 回路のポテンシャルの数学的な形とその性質を導いたが、この量 M は、実際、そのポテンシャルと同じものである。しかし、ここではこれらの結果を参照せず、VII 章で述べられた力学理論でおいた仮定以外のどのような仮定もせずに、新しい基礎から再び始めよう。

2 次回路の電気運動の運動量は 2 つの部分からなる (578 節)。その一つは Mi_1 で 1 次の電流 i_1 に依存し、他の一つは Ni_2 で、2 次の電流に依存する。私たちはここで第一の部分を調べることとし、それを p と表記しよう。ここで

$$p = Mi_1, \quad (1)$$

である。

私たちはまた 1 次回路は固定されており、1 次の電流は一定であると考えよう。2 次回路の電気運動-運動量、 p は、この場合 2 次回路の形と位置のみに依存し、したがってもし任意の閉じた曲線を 2 次回路として考えるなら、そしてもし、この曲線に沿った方向を選び、それを正として勘定すると、この閉じた曲線に対する p の値は決まる。もし曲線に沿って反対方向が正の方向として選ばれたなら、量 p の符号は逆になったであろう。

p. 230

586.] 量 p は回路の形と位置に依存するから、回路のそれぞれの部分が p の値になんらかの寄与をし、 p の回路のそれぞれの部分が寄与した部分は、回

路のその部分の形と位置のみに依存し、回路の他の部分の位置には依存しないと考えられる^{註1}。

この仮定は正当である。なぜなら、電流の各部分は互いに作用しあうことができ、実際、そうしているが、私たちはここでは電流を考えているのではなく、単なる回路、つまり、それに沿って電流が流れることのできる閉じた回路を考えており、それは純粹に幾何学的な形であり、その部分は互いにどのような物理的な作用を持つとは考えられないからである。

私たちは、それゆえ、 p の回路要素 ds が寄与する部分は Jds であると仮定することができる。ここで J は要素 ds の位置と方向に依存する量である。したがって、 p の値は線積分

$$p = \int J ds, \quad (2)$$

と表現することができる。ここで積分は回路一周にわたる。

587.] 次に量 J の形を決めなければならない。まず、もし ds の方向を逆転すると、 J は符号を変える。したがってもし 2 つの回路 $ABCE$ と $AECD$ が弧 AEC を共通に持つが、2 つの回路で反対方向に勘定されるなら、2 つの回路 $ABCE$ と $AECD$ に対する p の値の和は 2 つの回路からなる回路 $ABCD$ に対する p の値に等しいであろう。

註1 訳註：マクスウェルは、ここで、2 次回路を幾何学的線要素に分割し、二次回路の線要素 $d\vec{p}$ の 1 次回路による 2 次回路の電気運動-運動量 $dp_1(2)$ への寄与は $\vec{A} \cdot d\vec{p}$ であるとして、(7) 式でベクトルポテンシャル \vec{A} を導入し、電気運動-運動エネルギー T を使って、ベクトルポテンシャルと駆電力の関係を導いている。

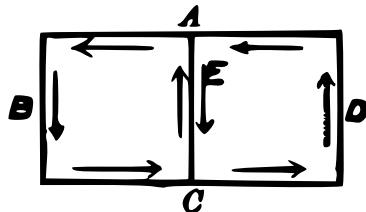
しかし、ベクトルポテンシャルは閉じた回路にかんする積分を使って定義されていることに注意すべきである。一周積分すれば消える量の不定性、つまり、あるベクトルの全微分の不定性を残している。

ベクトルポテンシャルは局所的に定義された量ではない。もしそうであるなら、ベクトルポテンシャル、 \vec{A} 、の場の中の電流密度 \vec{j} の系のエネルギー密度は $dT = \vec{A} \cdot \vec{j} dV$ であるから、体積要素 dV に働く力は

$$\frac{\vec{F}}{dV} = \nabla(\vec{j} \cdot \vec{A}) = \vec{j} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{j} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \sum_i A_i \vec{\nabla} j_i,$$

となるはずである。

第 1 項は電磁力、いわゆる、ローレンツの力であるが、それ以外に第 2 項、第 3 項が現れる。回路が剛体枠に閉じ込められているなら、第 3 項は 0 となる。しかし、第 2 項が残る。ラモアは、この項は、シリンドーに巻いた輪ゴムの張力のように、回路全体にわたって積分すると零になるが、観測可能な力を表していることを示唆した。しかし、そのような力は観測されていない。



図：35

弧 AEC に依存する線積分の部分は 2 つの部分回路で同じ大きさで反対符号だから、和が取られたとき、それらは互いに打ち消し合い、外部境界 $ABCD$ の依存する線積分の部分のみを残すからである。

同じようにして、閉じた曲線を境界とするある面が任意個数の部分に分割され、もしこれらのそれぞれの部分の

境界が回路として考察されるなら、各回路をまわる正の方向を外部閉曲線をまわる方向と同じとして、閉じた曲線に対する p の値はすべての回路に対する p の値の和に等しい。

588.] ここで、ある面のある部分を考えよう。その大きさは面の主曲率半径とくらべて非常に小さく、この部分の中で法線の方向の変化は無視できるとする。私たちはまたもし任意の非常に小さい回路がこの位置の一つの部分から他の部分へ平行に運ばれたなら、小さな回路に対する p の値はほとんど変わらないと考えることとしよう。これはもし面のその部分の大きさが主回路からの距離と較べて十分に小さいなら、あきらかになりたつ。

もし任意の閉曲線が面のこの部分に描かれたなら、 p の値はその面積に比例するだろう。

なぜなら、任意の 2 回路の面積はすべて同じ大きさの小さな要素に分割することができ、同じ p の値を持つからである。2 つの回路の面積はそれらが含むこれらの要素の数の比例し、そして、2 回路に対する p の値もまた同じ割合である。

したがって、任意の面要素 dS を開む回路に対する p の値は

$$IdS,$$

の形である。ここで I は dS の位置と法線の方向に依存する。それゆえ、私たちは p に対する新しい表式

$$p = \iint IdS, \quad (3)$$

を得る。ここで二重積分は回路によって囲まれた任意の面全体にわたる。

589.] $ABCD$ をある回路とし、その AC は基本部分であり、非常に小さく、直線と考えることができるとする。 APB と CQB を同じ面にある小さくて等しい面積とすると、 p の値は小さな回路 APB と CQB で同じ、つまり

$$p(APB) = p(CQB)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} p(APBQCD) &= p(ABQCD) + p(APB). \\ &= p(ABQCD) + p(CQB), \\ &= p(ABCD), \end{aligned}$$

つまり、回路の面積がほとんど変わらないなら、 p の値は直線 AC に対して鉤形の線 $APQC$ への置き換えによって変化しない。実際、これはアンペールの第 2 実験（506 節）によって確立された原理で、そこで、回路の鉤形部分は鉤形のどの部分も直線部分からほとんど離れていないなら、直線部分に等価であることが示されている。

それゆえ、もし私たちが要素 ds の代わりに 3 つの小要素 dx, dy, dz を要素 ds の始めから終りまで連続的な経路を形成するように次々と描いて代入するなら、そしてもし Fdx, Gdy, Hdz がそれぞれ dx, dy, dz に対応する線積分の要素を表記するなら、

$$Jds = Fdx + Gdy + Hdz, \quad (4)$$

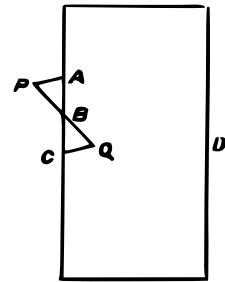
である。

590.] さて私たちは量 J が要素 ds の方向に依存する仕方を決めることができる。なぜなら、(4) によって

$$J = F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds}, \quad (5)$$

だから。

これはあるベクトルの、 ds の方向へ分解された部分の表式で、ベクトルの成分は、それぞれ、 x, y, z 軸の方向へ分解すると F, G, H である。



図：36

もしこのベクトルを \mathfrak{A} と表し、原点から回路のある点へのベクトルを ρ で表記すると回路の要素は $d\rho$ であり、 Jds に対する四元数表式は

$$-S.\mathfrak{A}d\rho$$

であろう。

ここで私たちは式 (2) を

$$p = \int (F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds}) ds, \quad (6)$$

つまり

$$p = - \int S.\mathfrak{A}d\rho, \quad (7)$$

と書くことができる^{註2}。

ベクトル \mathfrak{A} とその成分 F, G, H は場の中の ds の部分に依存し、 ds が描かれた方向には依存しない。それゆえ、それらは ds の座標 x, y, z の関数であり、 ds の方向余弦 l, m, n の関数ではない。

ベクトル \mathfrak{A} はもし 1 次電流が突然止められたなら点 (x, y, z) に置かれた粒子が経験したであろう駆電強度の時間積分を方向と大きさで表現している。それゆえ、それを点 (x, y, z) での電気運動-運動量と呼ぼう。それは磁気誘導のベクトルポテンシャルの名前で 405 節で研究した量と同一である。

任意の有限の線つまり回路の電気運動の運動量は同じ線のそれぞれの点で電気運動の運動量の分解された部分の、線つまり回路に沿って広がった線積分である。

p. 233

591.] 次に 辺が dy, dz であり、正の方向が y 軸の方向から z 軸の方向である基本長方形 $ABCD$ に対する p の値を決めよう。

要素の重心 O の座標を x_0, y_0, z_0 とし G_0, H_0 をこの点での G および H の値とする。

長方形の第一辺の中点 A の座標は y_0 と $z_0 - \frac{1}{2}dz$ である。 G の対応する値は

$$G = G_0 - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} dz + \&c., \quad (8)$$

^{註2} 訳註: $S.$ は 2 つの 4 元数の積のスカラー部分を表す。2 つの 4 元数がベクトル部のみからなるとき、ベクトルの内積に -1 をかけたものである。

(7) 式はベクトル形式で $p = \int \vec{A} \cdot d\vec{\rho}$ に対応する。ここで、 \vec{A} はベクトルポテンシャル、 $\vec{\rho}$ は 2 次回路の位置ベクトルである。

であり、辺 A から生じる p の値の部分は近似的に

$$G_0 dy - \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} dy dz, \quad (9)$$

である。

同様に、 B に対して、

$$H_0 dz + \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} dy dz,$$

C に対して、

$$-G_0 dy - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} dy dz$$

D に対して、

$$-H_0 dz + \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} dy dz.$$

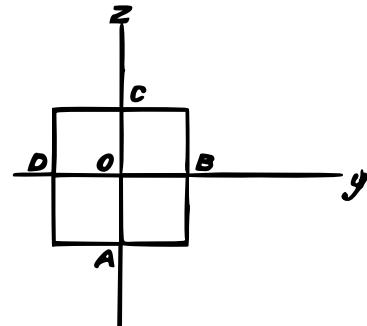


図: 37.

である。

これら 4 つの量を加え会わせると、長方形に対する p の値、すなわち

$$p = \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) dy dz, \quad (10)$$

が分る。

ここでもし私たちが 3 つの新しい量 a, b, c を

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}, \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

のようなものと仮定し、これらを新しいベクトル \mathfrak{B} の成分と考えると、24 節、定理 IV によって \mathfrak{A} の任意の回路をまわる線積分は回路によって囲まれた面上の面積分の形で表現できる。こうして

$$p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds = \iint (la + mb + nc) dS, \quad (11)$$

つまり

$$p = \int T \cdot \mathfrak{A} \cos \epsilon ds = \iint T \cdot \mathfrak{B} \cos \eta dS, \quad (12)$$

がなりたつ。ここで ϵ は \mathfrak{A} と ds の間の角であり、 η は \mathfrak{B} と方向余弦が l, m, n である dS の法線の間の角であり、 $T \cdot \mathfrak{A}, T \cdot \mathfrak{B}$ は \mathfrak{A} と \mathfrak{B} のベクトルの大きさを表記する^{註3}。

この結果を式(3)と比較すると、その方程式の量 I は $\mathfrak{B} \cos \eta$ 、つまり \mathfrak{B} の dS の法線へ分解された部分であることは明らかである。

592.] 私たちは既に、ファラディの理論にしたがって、回路中の電磁力と誘導の現象は回路を貫く磁気誘導線の数の変化に依存することを見ている(490、541節)。さて、これらの線の数は数学的に回路によって囲まれた任意の面を通る磁気誘導の面積分によって表現できる。したがって、ベクトル \mathfrak{B} とその成分 a, b, c を磁気誘導とその成分として既知のものを表しているとみなさなければならない。

この研究で私たちはこのベクトルの性質を、できるかぎり実験に訴えることなく、前の章で述べられた力学原理から導くことを提案する。

このベクトルを磁気誘導と同定するとき、このベクトルは数学的な研究の結果として現れている。磁気誘導は磁石の実験から学びとった性質であるが、私たちはこの実験的な方法から出発していない。私たちは理論になんら新しい事実を導入しておらず、私たちは数学的な量に名前を与えるだけであり、そういう名付けた性質は、名前によって指示される物理量の関係と数学的な量の関係の一致によって判断できるからである。

ベクトル \mathfrak{B} は、それは面積分のなかで起こるから、12節で記述されたフラックスのカテゴリーに明らかに属する。他方、ベクトル \mathfrak{A} は、線積分に現れるから、力のカテゴリーに属する。

593.] 私たちはここで正負の量と方向についての約束を思い出さなければならない。そのいくつかは23節で述べられている。私たちは座標軸に右手系を採用するので、もし右ねじが x 軸の方向に置かれ、このねじの上のナット

^{註3} 訳註： T はテンソルと読む。ハミルトンのテンソルは4元数のノルムを意味し、現在の線形代数のテンソルとは異なるものである。

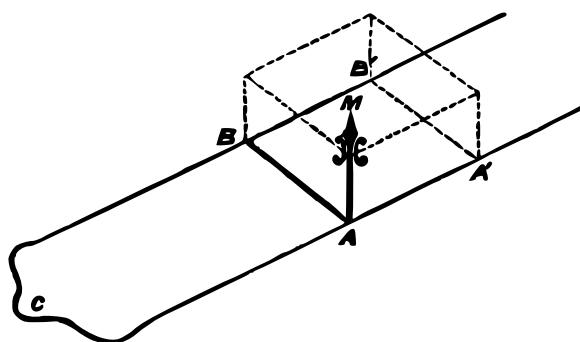
(12) 式はベクトル表記で $p = \iint |\vec{B}| \cos \eta dS$ 。ここで、 B は磁気誘導である。つまり、電気運動-運動量は磁束である。

p. 235

が回転の正の方向に、つまり y から x へ回されると、それは x の正の方向にねじに沿って動くであろう。

私たちはまたガラス電気と austral(南) 磁気を正と考える。電流の正の方向、または電気誘導線の正の方向は正の電気が動く、または動こうとする方向であり、磁気誘導線の正の方向はコンパスの針がその端を北にむけてまわつて指す方向である。498 節図 24,501 節 25 図を見よ。

学生にはこれらの約束を記憶に間違いなく留めるためにもっとも有効と思えるなんらかの方法を選ぶことを勧める。それまで差異のなかった 2 つの仕方のどちらで言明すべきかを決める規則を覚えることは、多くの中から一つを選ぶ規則を覚えるよりはるかに困難であるからである。



594.] つぎに力学原理から磁場中で電流を運ぶ導体に働く電磁力に対する表式を導き、磁場中を動く物体中の電気に働く駆電力に対する表式を導かねばならない。私たちが採用しようとしている数学的な方法は、導線を使って場を探索するにあたってファラディ^{註 4} によって使われた実験的な方法や、実験の基づく方法によって既に 490 節でなされたものと較べることができ、ここで行わなければならないことは、2 次回路の電気運動の運動量 p の値に対する、回路の形の与えられた変更による効果を決めることである。

AA' , BB' を、曲線導体 C と直線導体 AB によって結ばれた 2 つの平行直線導体とする。 C はどのような形であってもよい。導体 AB はそれ自身に平行に AA' , BB' に沿って滑り動くことができる。

p. 236

^{註 4} Exp. Res., 3082, 3087, 3118.

こうして構成された回路を 2 次回路と考え、方向 ABC をそれをまわる正の方向と仮定しよう。

滑動する部品が位置 AB から位置 $A'B'$ まで、それ自身に平行に動くとしよう。滑動する部品のこの変位による電気運動-運動量 p の変化を決めなければならない。

2 次回路は ABC から $A'B'C$ に変わっており、したがって、587 節によって

$$p(A'B'C) - p(ABC) = p(AA'B'B), \quad (13)$$

である。

それゆえ、平行四辺形 $AA'B'B$ に対する p の値を決めなければならない。もしこの平行四辺形が非常に小さく、その平面のいろいろな点での磁気誘導の方向と大きさの変化を無視できるなら、 p の値は、591 節によって、 $\mathfrak{B} \cos \eta \cdot AA'B'B$ である。ここで \mathfrak{B} は磁気誘導、 η は平行四辺形 $AA'B'B$ の法線の正の方向となす角である。

私たちは平行六面体の体積によって結果を幾何学的に表現できる。その底面は平行四辺形 $AA'B'B$ であり、その一辺が AM であり、それは磁気誘導 \mathfrak{B} を方向と大きさで表現している。もし平行四辺形が紙の面内にあり、もし AM が紙から上方へ描かれたら、またはより一般的に、もし回路 AB の方向、磁気誘導 AM に方向、変位 AA' の方向が、循環的な順序で取られたとき、右手系を形成するなら、平行六面体の体積を正と考えることができる。

この平行六面体の体積は AB から $A'B'$ への滑動する部品の変位による 2 次回路に対する p の値の増加を表す。

滑り動く部分に働く駆電力。

595.] 滑動部分の運動による 2 次回路に生成される駆電力は 579 節によって

$$E = -\frac{dp}{dt}, \quad (14)$$

である。

もし AA' を単位時間の変位と考えるなら、 AA' は速度を表し、平行六面体は $\frac{dp}{dt}$ を表し、それゆえ、(14) 式によって負の方向 BA の駆電力を表す。 p. 237

したがって、滑動部分 AB に作用する駆電力は磁場中での運動の帰結として、平行六面体の体積によって表される。その辺は方向と大きさで、速度、磁気誘導、滑動部分を表し、これら 3 つの方向が循環順に右手系をなすとき正である。

滑動部分に作用する電磁力。

596.] i_2 を正の方向 ABC 中の 2 次回路中の電流を表記すると、位置 AB から位置 $A'B'$ まで滑動する間に AB 上の電磁力によってなされた仕事は $(M' - M)i_1 i_2$ である。ここで M 、 M' は初めと終わりの M_{12} の値である。しかし、 $(M' - M)i_1$ は $p' - p$ に等しく、これは AB, AM, AA' 上の平行六面体の体積によって表現される。したがって、もし量 $AB \cdot i_2$ を表現するため AB へ平行線を描くと、この線と、磁気誘導 AM と変位 AA' によって含まれる平行六面体はこの変位の間になされる仕事を表す。

与えられた変位距離に対して、これは変位が AB, AM を辺とする平行四辺形に垂直なとき、もっとも大きいだろう。それゆえ、電磁力は AB, AM 上の平行四辺形の面積かける i_2 で表され、この平行四辺形の法線の方向にあり、 AB, AM と法線が循環順に右手系をなすように描かれる。

磁気誘導線の 4 つの定義。

597.] もし、滑動部分の運動が起こる方向、 AA' が磁気誘導の方向、 AM と一致するなら、 AB の方向がどちらを向いていても、滑動部分の運動は駆電力を働かせることはなく、もし AB が電流を運ぶなら、 AA' に沿って滑動する傾向はないであろう。

再び、もし滑動部分、 AB が磁気誘導の方向、 AM と一致するなら、どのような AB の運動を引き起こすような駆電力はなく、 AB をとおる電流は AB に力学的な力を作用させることはないであろう。

それゆえ、磁気誘導線を 4 つの異なる方法で定義することができる。それはつぎのような線である。

- (1) もし導体を磁気誘導線に沿って導体自身に平行に動かしても、導体は駆電力を受けない。
- (2) もし電流を運ぶ導体が磁気誘導線に沿って自由に動くとしても、導体は動こうとしない。
- (3) もし直線状導体を磁気誘導線の方向と一致し、任意の方向にそれ自身に平行に動かしても、その長さの方向に駆電力を受けない。
- (4) もし電流を運ぶ直線状導体が磁気誘導線と方向が一致するなら、それはどんな力学的な力も受けない。

駆電強度の一般式。

598.] 2次回路に作用する誘導による駆電力、 E は $-\frac{dp}{dt}$ に等しいことを見てきた。ここで

$$p = \int (F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds}) ds, \quad (1)$$

である。

E の値を決めるために、もし 2 次回路が運動しているなら x, y, z は時間の関数であることを覚えておいて、積分記号下の量を t にかんして微分しよう。私たちは

$$\begin{aligned} E = & - \int \left(\frac{dF}{dt} \frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dt} \frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dt} \frac{dz}{ds} \right) ds \\ & - \int \left(\frac{dF}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dx} \frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dx} \frac{dz}{ds} \right) \frac{dx}{dt} ds \\ & - \int \left(\frac{dF}{dy} \frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dy} \frac{dz}{ds} \right) \frac{dy}{dt} ds \\ & - \int \left(\frac{dF}{dz} \frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dz} \frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dz} \frac{dz}{ds} \right) \frac{dz}{dt} ds \\ & - \int (F \frac{d^2x}{dsdt} + G \frac{d^2y}{dsdt} + H \frac{d^2z}{dsdt}) ds, \end{aligned} \quad (2)$$

を得る。

さて積分の第 2 行を考えて、591 節、式 (A) から $\frac{dG}{dx}$ 、 $\frac{dH}{dx}$ の値を代入しよう。このとき、この行は

$$-\int \left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds} + \frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds} \right) \frac{dx}{dt} ds,$$

となり、それは

$$-\int \left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds} + \frac{dF}{ds} \right) \frac{dx}{dt} ds.$$

と書くことができる。

3 行、4 行を同じ様に扱って、 $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ 中の項を集め、

$$\int \left(\frac{dF}{ds} \frac{dx}{dt} + F \frac{d^2x}{dsdt} \right) ds = F \frac{dx}{dt}, \quad (3)$$

したがって、積分は、閉じた回路を一周したとき、零になることを覚えておくと、

$$\begin{aligned} E &= \int \left(c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} \right) \frac{dx}{ds} ds \\ &+ \int \left(a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} \right) \frac{dy}{ds} ds \\ &+ \int \left(b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} \right) \frac{dz}{ds} ds \end{aligned} \quad (4)$$

である。

この式は

$$E = \int \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} + R \frac{dz}{ds} \right) ds, \quad (5)$$

の形に書くことができる。ここで

$$\left. \begin{aligned} P &= c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \\ Q &= a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \\ R &= b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}, \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{駆電力} \\ \text{強度の} \\ \text{式。} \end{array} \quad (B)$$

である。

新しい量 Ψ を含む項が P, Q, R に対する式に一般性を与えるために導入されている。それらは閉じた回路一周に広げたとき、積分から消滅する。それゆえ、量 Ψ は、今私たちが扱っているような、回路を一周する駆電力を決める問題にかんするかぎり、不確定である。しかしながら、問題の状況をすべて知っているとき、 Ψ に確定した値を指定することができ、それは、ある定義にしたがって、点 (x, y, z) での電気ポテンシャルを表すことがわかるであろう。

p. 240

式(5)の積分記号下の量は回路の要素 ds に作用する駆電強度を表す。

もし $T \cdot \mathbf{E}$ によって P, Q, R の合成ベクトルの数値を、 ϵ によってこの合成ベクトルの方向と要素 ds の間の角を表記すると、式(5)を

$$E = \int T \cdot \mathbf{E} \cos \epsilon ds, \quad (6)$$

と書くことができる。

ベクトル \mathbf{E} は動いている要素 ds での駆電強度である。その方向と大きさは ds の位置と運動に依存し、また磁場の変化に依存するが、 ds の方向には依存しない。したがって、ここで ds が回路の一部を形成する状況を無視してもよく、それをたんに駆電強度 E が作用する、動いている物体の一部と考えることができる。駆電力はすでに 68 節で定義されている。それは、その点に置かれた正の単位電気が受ける力であり、合成駆電強度とも呼ばれている。私たちはここで可変電気系による磁場中を動く物体の場合にこの量のもっとも一般的な値を得た。

もし物体が導体なら、駆電力は電流を生成する；もしそれが誘電体なら、駆電力は電気変位を生成するのみである。

駆電強度、つまり粒子上の力は、曲線の弧に沿った駆電力と注意深く区別されなければならない。駆電力は駆電強度の線積分である。69 節参照。

599.] 駆電強度は、その成分は式(B)で定義されているが、3つの状況に依存している。これらの最初のものは磁場中の粒子の運動である。力のこの運動に依存する部分はそれぞれの式の右辺の最初の2項によって表示されている。それは磁気誘導線を横切る粒子の速度に依存する。もし \mathbf{v} が速度を表現するベクトルであり、 \mathbf{B} が磁気誘導を表現するほかのベクトルなら、もし \mathbf{E}_1

が駆電強度の運動に依存する部分なら

$$\mathfrak{E}_1 = V \cdot \mathfrak{GB}, \quad (7)$$

p. 241

つまり駆電強度は速度かける磁気誘導の四元数ベクトル部分であり、いわば、駆電強度の大きさは平行四辺形の面積であり、その辺は速度と磁気誘導を表現し、その方向はこの平行四辺形の法線であり、速度、磁気誘導、駆電強度が循環順に右手系をなすように描かれている^{註5}。

式 (B) のそれぞれの第 3 項は場の時間変化に依存している。これは第一の回路の電流の時間変化によっても、または第一の回路の動きによってもよい。 \mathfrak{E}_2 を駆電強度のこれらの項に依存する部分とする。その成分は

$$-\frac{dF}{dt}, \quad -\frac{dG}{dt}, \quad -\frac{dH}{dt},$$

であり、これらはベクトル $-\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ つまり $-\dot{\mathfrak{A}}$ の成分である。したがって

$$\mathfrak{E}_2 = -\dot{\mathfrak{A}}, \quad (8)$$

である。

式 (B) のそれぞれの最後の項は場のいろいろな部分での関数 Ψ の変化による。駆電力強度の第 3 部は、この原因によるが

$$\mathfrak{E}_3 = -\nabla\Psi, \quad (9)$$

である。

それゆえ、駆電力強度を、式 (B) で定義されているように、四元数の形で

$$\mathfrak{E} = V \cdot \mathfrak{GB} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi, \quad (10)$$

と書くことができる^{註6}。

^{註5} 訳註: $V.$ は 2 つの 4 元数の積のベクトル部分を表す。(7) 式はベクトル表示で $\vec{E} = \vec{G} \times \vec{B}$ に対応する。ここで、 \vec{G} は粒子の速度である。

^{註6} 訳註: (10) 式、すなわち 598 節 (B) 式をベクトルで教示すると $\vec{E} = \vec{G} \times \vec{B} - \frac{d\vec{A}}{dt} - \text{grad } \Psi$ となる。ここで \vec{G} は第 2 回路の速度、 \vec{A} はベクトルポテンシャル、 Ψ は電気ポテンシャルである。これは 591 節 (A) 式、 $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ とあわせて、マックスウェル方程式第 1 組みと呼ばれる

それらが参照する軸が空間中で動いているときの駆電強度の式の修正について

600.] x', y', z' を空間中を動く直交軸系を参照する点の座標とする。

動いている系の原点の速度の成分を u, v, w とし、その角速度の固定された軸系にかんする成分を $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とし、固定軸を動軸と与えられた瞬間に一致するように選ぶと 2 つの軸系に対して異なる唯一の量は時間にかんして微分されたものであろう。もし $\frac{\delta x}{\delta t}$ が動軸と剛体的に結び付いて動く点の速度成分を表記し、 $\frac{dx}{dt}$ と $\frac{dx'}{dt}$ はそれぞれ固定軸、動軸にかんして、同じ瞬間 p. 242 的な位置をもつ任意の動点の速度成分を表記するなら、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{dx'}{\delta t}, \quad (1)$$

であり、他の成分にたいしても同様である。

形の変わらない物体の運動の理論によって

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\delta x}{\delta t} = u + \omega_2 z - \omega_3 y, \\ \frac{\delta y}{\delta t} = v + \omega_3 x - \omega_1 z, \\ \frac{\delta z}{\delta t} = w + \omega_1 y - \omega_2 x, \end{array} \right\} \quad (2)$$

である。

F は x に平行な向きのある量の成分だから、もし $\frac{dF'}{dt}$ が動軸にかんする $\frac{dF}{dt}$ の値なら、

$$\frac{dF'}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{dF}{dy} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{dF}{dz} \frac{\delta z}{\delta t} + G\omega_3 - H\omega_2 + \frac{dF}{dt}, \quad (3)$$

ことが多い。

K' 系が系に対して速度 \vec{V} で動いているとき、 V が光速度 c と較べて十分小さければ、 K 系の \vec{E}, \vec{B} と K' 系の \vec{E}', \vec{B}' のあいだに、 (V/c) 展開の 1 次の次数で、変換式 $\vec{E}' = \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{B} + \vec{E}$, $\vec{B}' = -\frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{E} + \vec{B}$, がなりたつことに注意しておこう。ただし、この式は (V/c) 依存性を明らかにするため、ガウス単位系で示されている。

を示すことができる。

$\frac{dF}{dy}$ と $\frac{dF}{dz}$ に対して磁気誘導の式 (A) から導かれる値を代入し、(2) によって

$$\frac{d}{dx} \frac{\delta x}{\delta t} = 0, \quad \frac{d}{dx} \frac{\delta y}{\delta t} = \omega_3, \quad \frac{d}{dx} \frac{\delta z}{\delta t} = -\omega_2, \quad (4)$$

を思い出すと、

$$\begin{aligned} \frac{dF'}{dx} &= \frac{dF}{dx} \frac{\delta x}{\delta t} + F \frac{d}{dx} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{dG}{dx} \frac{\delta y}{\delta t} + G \frac{d}{dx} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{dH}{dx} \frac{\delta z}{\delta t} + H \frac{d}{dx} \frac{\delta z}{\delta t} \\ &\quad - c \frac{\delta y}{\delta t} + b \frac{\delta z}{\delta t} + \frac{dF}{dt}, \end{aligned} \quad (5)$$

であることが分かる。

ここでもし

$$-\Psi' = F \frac{\delta x}{\delta t} + G \frac{\delta y}{\delta t} + H \frac{\delta z}{\delta t}, \quad (6)$$

とおくと、

$$\frac{dF'}{dt} = -\frac{d\Psi'}{dx} - c \frac{\delta y}{\delta t} + b \frac{\delta z}{\delta t} + \frac{dF}{dt}, \quad (7)$$

である。

x に平行な駆電強度の成分 P に対する式は、(B) によって、固定軸にかんして

$$P = c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \quad (8)$$

p. 243

であり、動軸にかんする P の値に対して

$$P' = c \frac{dy'}{dt} - b \frac{dz'}{dt} - \frac{dF'}{dt} - \frac{d(\Psi + \Psi')}{dx}, \quad (9)$$

がなりたつ。

601.] このことから駆電強度は、導体の運動が固定軸のかんするものであろうと、空間中を動く軸にかんするものであろうと、同じ型の公式によって表示され、公式の間の唯一の差は同軸の場合、電気ポテンシャル Ψ が $\Psi + \Psi'$ に変えられなければならないことだと思われる。

電流が伝導性の回路中で生成するすべての場合、駆電力は曲線をまわって取られた線積分

$$E = \int (P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} + R \frac{dz}{ds}) ds, \quad (10)$$

である。 Ψ の値は積分から消えるので、 Ψ の導入はその値に影響しない。それゆえ、閉じた回路とその中の電流にかんするすべての現象で、私たちが参照する系の軸が静止していようと運動していようと、無関係である。668 節参照。

磁場中で電流を運ぶ導体に作用する電磁力について

602.] 582 節の一般的な研究で、もし x_1 が 2 次回路の位置と形を決める変数の一つなら、そしてもし X_1 がこの変数を増加させようとする 2 次回路に作用する力なら、

$$X_1 = \frac{dM}{dx_1} i_1 i_2, \quad (1)$$

である。

i_1 は x_1 とは独立だから、

$$Mi_1 = p = \int (F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds}) ds, \quad (2)$$

と書くことができ、 X_1 の値に対して

$$X_1 = i_2 \frac{d}{dx_1} \int (F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds}) ds. \quad (3)$$

を得る。

さて変位は x の方向に距離 δx をとおる回路の各動点からなり、 δx は s の任意の連続関数で、回路のいろいろな部分は互いに独立に動くが、回路は連續で閉じたままであると考えよう。

p. 244

また X を x の方向の回路の $s = 0$ から $s = s$ までの部分に作用する全ての力とすると、要素 ds に対応する部分は $\frac{dX}{ds} ds$ となるであろう。すると、この変位のあいだに力によってなされた仕事に対する次の式

$$\int \frac{dX}{ds} \delta x ds = i_2 \int \frac{d}{d\delta x} (F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds}) \delta x ds, \quad (4)$$

を得る。ここで積分は、 δx は s の任意の関数であることを思い起こすと、閉じた曲線一周にわたることができる。それゆえ、

$$\frac{dx}{d\delta x} = 1, \quad \frac{dy}{d\delta x} = 0, \quad \frac{dz}{d\delta x} = 0, \quad (5)$$

を思い出すと、598 節で t にかんして微分したのと同様の方法で、 δx にかんして微分することができる。

こうして

$$\int \frac{dX}{ds} \delta x ds = i_2 \int (c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds}) \delta x ds + i_2 \int \frac{d}{ds} (F \delta x) ds, \quad (6)$$

であることが分かる。

積分が閉じた曲線一周にわたるとき最後の項は消え、方程式は関数 δx のすべての形にたいして成り立たなくてはならないので、回路の任意の単位要素上の x に平行な力を与える式

$$\frac{dX}{ds} = i_2 (c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds}), \quad (7)$$

が成り立たなければならない。 y, z に平行な力は

$$\frac{dY}{ds} = i_2 (a \frac{dz}{ds} - c \frac{dx}{ds}), \quad (8)$$

$$\frac{dZ}{ds} = i_2 (b \frac{dx}{ds} - a \frac{dy}{ds}), \quad (9)$$

である。

要素上の合力は方向と大きさについて四元数の式 $i_2 V.d\rho \mathfrak{B}$ によって与えられる。ここで i_2 は電流の数値的な尺度であり、 $d\rho$ と \mathfrak{B} は回路の要素と磁気誘導を表現するベクトルであり、かけ算はハミルトンの意味で理解するべきである。

603.] もし導体を線ではなく、物体として取り扱うべきなら、線要素上の力と全断面をとおる電流を、単位体積あたりの力と単位面積あたりの電流を表記する記号をつけて表示しなければならない。

p. 245

X, Y, Z を単位体積にかんする力の成分、 u, v, w を単位面積にかんする電流の成分を表現するとしよう。そのとき、もし S が小さいと考えている導体の断面を表現するなら、要素 ds の体積は Sds で、 $u = \frac{i_2}{S} \frac{dx}{ds}$ であろう。したがって、式 (7) は

$$\frac{XSds}{ds} = S(vc - wb), \quad (10)$$

つまり

$$\left. \begin{array}{l} X = vc - wb, \\ Y = wa - uc, \\ Z = ub - va, \end{array} \right\} \quad (\text{電磁力の式}) \quad (\text{C})$$

となるだろう。

ここで X, Y, Z は導体の要素上の電磁力をその要素の体積で割った成分である; u, v, w は単位面積にかんする要素をとおる電流の成分であり、 a, b, c はその要素での磁気誘導の成分であり、それもまた単位面積にかんするものである。

もし \mathfrak{F} が導体の単位体積に働く力を大きさと方向で表現するなら、そして \mathfrak{E} がそれをとおって流れる電流を表現するなら、

$$\mathfrak{F} = V \cdot \mathfrak{EB}, \quad (11)$$

である^{註7}。

[598 節の式 (B) は電磁場の力学理論についてのマクスウェル教授の回顧録、 *Phil. Trans.* 1865, pp. 459-512. から得られ、次の方法によって証明できる。]

$-p$ の時間変化が 2 つの部分に分けられ、その一方は回路の運動に依存し、他方は依存しない。後者の部分はあきらかに

$$-\int \left(\frac{dF}{dt} dx + \frac{dG}{dt} dy + \frac{dH}{dt} dz \right).$$

である。

前者を見出すため、回路の一部を形成する弧 δs を考えよう。そして、この弧はレールに沿って動くと想像しよう。動きは平行と考えることができ、要素が $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ である速度 v で動き、回路の残りの部分はしばらくのあいだ定常だと考えよう。そうすると小さな平行四辺形が弧の動きにより生成されると考えることができ、その法線の方向余弦は

$$\lambda, \mu, \nu = \frac{n\dot{y} - m\dot{z}}{v \sin \theta}, \quad \frac{l\dot{z} - n\dot{x}}{v \sin \theta}, \quad \frac{m\dot{x} - l\dot{y}}{v \sin \theta},$$

^{註7} 訳註: (11) 式、すなわち基本方程式 (C) をベクトルで表記すると、 $\vec{F} = \vec{C} \times \vec{B}$ 。ここで C は電流密度、 F は単位体積あたりに働く力である。体積を断面積かける長さとすると、 C は線電流、 F は単位長さあたりに働く力となる。

である。ここで l, m, n は δs の方向余弦であり、 θ は v と δs の間の角である。

λ, μ, ν の符号を確かめるため、 $m = -l, \dot{x} = v$ と置くことができる。このとき、それらは右手系の軸にかんしてそあるように、 $0, 0, -1$ となる。

a, b, c を磁気誘導の成分とすると、時間 t での δs の運動によって

$$\delta p = (a\lambda + b\mu + cv)v\delta t\delta s \sin\theta,$$

がなりたつ。

もし回路のそれぞれの部分が同じ様に動くと考えると、結果の効果は回路の全体としての運動であろう。レール中の電流は 2 つの隣り合う弧のそれぞれの場合に釣合を形成する。回路の運動による $-p$ の時間変化は

$$-\int \{a(n\dot{y} - m\dot{z}) + 2 \text{ つの同様の項}\} ds$$

であり、回路の一一周をとって

$$= \int (c\dot{y} - b\dot{z}) dx + 2 \text{ つの同様の積分}$$

である。

p. 246

電磁力にたいする 602 節の結果は δp に対する上の式から導かれる; つまり、弧 δs が方向 l', m', n' に距離 $\delta s'$ だけ変位されたとすると、

$$\delta p = \{l'(cm - bn) + 2 \text{ つの同様の項}\} \delta s \delta x'.$$

である。

さて、 X を弧 s 上の力の x 成分とすると、単位電流にたいして、596 節より

$$\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= \frac{dp}{dx} \\ &= cm - bn. \end{aligned}$$

であることが分る。]

電磁場の方程式。

{ もし電流がつねに閉じた回路を流れていると仮定するなら、ベクトルポテンシャルを導入せずに、電磁場の状態を決める方程式を導くことができる。

なぜなら i を任意の回路をまわる電流の強さとしよう。回路は静止していると仮定する。この電流による電気運動のエネルギー T は

$$i \iint (la + mb + nc) dS,$$

である。ここで dS は電流によって囲まれた面の要素である。

したがって、 i を増加させようとする回路を巡る全駆電力、 $-\frac{d}{dt} \frac{dT}{di}$ 、は

$$-\iint (l \frac{da}{dt} + m \frac{db}{dt} + n \frac{dc}{dt}) dS;$$

に等しく、したがって、もし X, Y, Z が駆電力の強度の成分なら

$$\int (X dx + Y dy + Z dz) = - \iint (l \frac{da}{dt} + m \frac{db}{dt} + n \frac{dc}{dt}) dS; \quad (1)$$

であるが、ストークスの定理により、この式の左辺は

$$\iint \{ l(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}) + m(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}) + n(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}) \} dS.$$

に等しい。

この積分を式 (1) に右辺と等値すると、電流を閉じる面はまったく任意だから、

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} &= -\frac{da}{dt}, \\ \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} &= -\frac{db}{dt}, \\ \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} &= -\frac{dc}{dt}, \end{aligned}$$

である。

これらは、関係式

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}, \end{aligned}$$

と、比抵抗が σ である導体中で

$$u = \frac{X}{\sigma}, \quad v = \frac{Y}{\sigma}, \quad w = \frac{Z}{\sigma}$$

または、比誘導容量が K である絶縁体中で

$$u = \frac{K}{4\pi} \frac{dX}{dt}, \quad v = \frac{K}{4\pi} \frac{dY}{dt}, \quad w = \frac{K}{4\pi} \frac{dZ}{dt},$$

とあわせて、電磁場の状態を決めるのに十分である。任意の面の境界条件は面に垂直な磁気誘導は連続的で、面に平行な磁力もまた連続であるべきである。

電磁場のこの研究方法は単純性の利点をもつ。これはヘビサイド氏によつて強く支持されてきた。しかしながら、それはテキスト中の方法ほど一般的ではない。テキストの方法は電流が閉じた回路を常に流れていなくても適用することができる。}

第IX章

電磁場の一般式

604.] 電気力学の理論的な議論で、私たちは電流を運ぶ回路の系は力学系であり、その系では電流を一般化速度とみなすことができ、一般化速度に対応する一般化座標それ自身は方程式に表れないと仮定することから始めた。これから、系の運動エネルギーは、電流への依存性にかんするかぎり、電流の2次の同次関数であり、その係数は回路の形と相対的な位置のみに依存することが出てくる。実験や、その他の方法によって、これらの係数が知られていると仮定して、純粹に力学的な推論によって電流の誘導の法則と電磁的な引力の法則を導いた。この研究で電流の系の電気運動エネルギー、電流の電磁モーメント、2つの回路の相互ポテンシャルの概念を導入した。

次に2次回路のいろいろな配位法を使って場の探索を進め、こうして、場の与えられた任意の点で決まった大きさと方向を持つ、ベクトル \mathfrak{A} の概念に導かれた。私たちはこのベクトルをその点での電磁運動量と呼んだ。この量は場からすべての電流を、突然、取り除くことによってその点に生成されるはずの駆電強度の時間積分と考えることができる。それは405節で磁気誘導のベクトルポテンシャルとして既に研究された量と同じものである。その x, y, z に平行な成分は F, G, H である。回路の電磁運動量は回路をまわる \mathfrak{A} の線積分である。

p. 248

つぎに、24節、定理IVによって、 \mathfrak{A} の線積分を成分が a, b, c であるもう一つのベクトル、 \mathfrak{B} の面積分に変換し、導体の運動による誘導現象と電磁力の現象は \mathfrak{B} を使って表現できることが分かった。私たちは \mathfrak{B} に磁気誘導という名前を与えた。その性質はファラディによって研究された磁気誘導線の性質と同じであるからである。

また、私たちは 3 組の式を確立した：第 1 組、(A)、は磁気誘導式であり、それを電磁運動量を使って表している。第 2 組、(B)、は駆電強度の式であり、それを磁気誘導線を横切る導体の動きと、電磁運動量の変化率を使って表している。第 3 組、(C)、は電磁気力の式であり、それを電流と磁気誘導を使って表している。

これらすべての場合で、電流は現実の電流として理解されるべきで、それは伝導電流のみならず、電気変位の変化による電流も含んでいる。

磁気誘導 \mathfrak{B} は既に 400 節で考察した量である。それは磁化されていない物体では単位磁極に働く力と同一であるが、永久的であれ誘導によるものであれ、もし物体が磁化されているなら、単位の極が物体中の狭いクレバス中に置かれ、クレバスの壁が磁化の方向に垂直なら、単位磁極に働いたはずの力である。 \mathfrak{B} の成分は a, b, c である。

a, b, c が定義されている式 (A) から^{註 1}

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0,$$

が出てくる。

403 節で磁気誘導の性質が示されている。

605.] 磁石の中の磁力は、磁気誘導と区別されるので、磁化の方向に平行に切られた狭いクレバス中に置かれた単位磁極の上の力であると定義した。この量は \mathfrak{H} によって表記され、その成分は α, β, γ である。398 節参照。

もし \mathfrak{J} が磁化の強さで、 A, B, C がその成分なら、400 節により、

$$\left. \begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A, \\ b &= \beta + 4\pi B, \\ c &= \gamma + 4\pi C, \end{aligned} \right\} \text{(磁化の式)} \quad (\text{D})$$

である。

私たちはこれらを磁化の式と呼ぶことができ、それらは電磁系ではベクトルと考えられた磁気誘導 \mathfrak{B} は、ハミルトンの意味で、磁力 \mathfrak{H} と磁化 \mathfrak{J} の 4π

^{註 1} 訳註: $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ より $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. マックスウェル方程式第 1 組は (A) 式の div をとり、(B) 式の rot をとり、ベクトルポテンシャル \vec{A} 、電気ポテンシャル Ψ を消去した形で提示されることが多い。

倍の和であることを指し示している。つまり、

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J},$$

である^{註2}。

ある物質では、磁化は磁力に依存し、これは 426、435 節で与えられた誘導磁気の方程式系によって表現される。

606.] 私たちの研究では、この点まで、電気または磁気の定量的な実験をまったく参照することなく、すべてを純粋に力学的な考察から演繹してきた。私たちが使った唯一つの実験的な知識は、理論から導かれた抽象的な量の中に、実験によって発見された具体的な量を認めることであり、その数学的な生成より、むしろ、その物理的な関係を指す名前によって表記することである。

このようにしてその大きさと方向がある部分から他の部分へと移ると変わるベクトルとして電磁運動量 \mathfrak{A} の存在を指摘し、これから、数学的な過程によって、磁気誘導 \mathfrak{B} をベクトルとして導いた。しかしながら、場のなかの電流の分布から \mathfrak{A} または \mathfrak{B} のいずれかを決めるための、どのようなデータも得てはいない。この目的のために、これらの量と電流のあいだの数学的なつながりをみつけなければならない。

永久磁石の存在を認め、その相互作用はエネルギー保存の原理を満たしていることから始める。この原理から出てくる法則、すなわち、磁極に働く力をポテンシャルから導くことができることを除いて、磁気力の法則に関するいかなる仮定も行わない。

p. 250

このとき、電流と磁石のあいだの作用を観測し、もしその強度、形、位置が適当に調整されたなら、見かけ上、電流が、他の磁石が作用したであろうと同じ仕方で磁石に作用することが分かり、磁石が他の電流と同じ仕方で電流に作用することができる。これらの観測は力の実際の測定を伴っていると考える必要はない。それゆえ、それらは数値データを与えていたと考えられるべきではなく、我々の考察に対する疑問を示唆するうえでのみ有益である。

これらの観測が示唆する疑問は電流によって生成される磁場は、永久磁石によって生成されるものと似ているので、ポテンシャルへの関係でも、それに似ているかどうかである。

^{註2} 訳註: (D) 式は磁化 \vec{I} を使った磁気誘導の式 $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I}$. 電気分極 \vec{P} を使った電気誘導の式は $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$.

電気回路が、それを取りまく空間中に磁気効果を、回路によって囲われた磁気板によって生成されるのとちょうど同じように生成する証拠は 482–485 節で述べられている。

磁気板の場合、ポテンシャルが存在し、それは板の物質の外側のすべての点で確定した値を持つが、板の反対側にある隣り合う 2 点の値は有限量だけ異なることを知っている。

もし電流の近傍の磁場が磁気板の近傍のそれと似ているなら、磁気ポテンシャルは、磁力の線積分によって見出されたように、これらの線の一つを他の線に電流を切ることなく連続的な動きで他の線に変形できるならば、任意の 2 つの線積分は同じであろう。

しかしながら、もし一つの積分の線を他の線に電流を切ることなく変形できないなら、この一つの線に沿った磁力の線積分は他の線に沿った積分とは電流の強さに依存した量だけ異なるであろう。それゆえ、電流による磁気ポテンシャルは、線積分の経路に依存した特定の値である、共通の差を持つ値の無限列を持つ関数である。

607.] 電流の磁気作用はこの種の磁気ポテンシャルを持つと仮定して、この結果を数学的に表現することに進む。

まず、任意の閉じた曲線をまわる磁力の線積分は、閉じた曲線が電流によって囲まれていないかぎり、零である。

つぎに、電流が正の方向に閉じた曲線をただ一回通ると、線積分は決まった値を持ち、この値を電流の強さの尺度として使うことができる。

電磁的な測定系では、閉じた曲線をまわる磁力の線積分は閉じた曲線を通る電流に 4π をかけたものに数値的に等しい。

もし閉じた曲線として辺が dy 、 dz である長方形をとると、平行四辺形をまわる磁力の線積分は

$$\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) dy dz,$$

であり、 u 、 v 、 w が電気の流れの成分なら、平行四辺形を通る電流は

$$udy dz,$$

である。

これに 4π をかけ、その結果を線積分と等しいと置いて、私たちは方程式

$$\left. \begin{array}{l} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\text{電流の} \\ \text{方程式,}) \end{array} \quad (\text{E})$$

同様の方程式にかんして

を得^{註3}、それは各点の磁力が与えられたとき、電流の大きさと方向を決める。
電流がないとき、これらの方程式は条件

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = -D\Omega,$$

電流がない所の場のすべての点で磁気ポテンシャルから導かれることに等価である。

方程式 (E) を、それぞれ、 x, y, z にかんして微分し、結果をたし合わせることにより、方程式

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

を得、それは成分が u, v, w である電流は非圧縮性流体の運動の条件にしたがい、必然的に閉じた回路を流れなければならないことを指し示している。

p. 252

この方程式は u, v, w を、真の伝導とともに、電気変位の変動による成分を考えたときのみ、真である。

誘電体中の電気変位の変動による電流の直接の電磁的な作用に関する実験的な証拠はほとんどないが、閉じていない回路を流れる電流の存在と電磁気の法則を調整する極度の難しさが、電気変位の変化による遷移流の存在を私たちが受け入れなければならない多くの理由のなかの一つの理由である。その重要性は光の電磁理論にたつしたとき分かるであろう。

608.] 私たちはここでエルステッド、アンペール、ファラディによって発見された現象に関する主要量の関係を決定した。これらをこの書のこれまでの

^{註3} 訳註: 式 (E) $4\pi\vec{C} = \text{rot } \vec{H}$ は、612 節式 (J) とあわせて、マックスウェル方程式の第 2 組みを構成する。 \vec{C} は伝導電流密度ではなく、610 節式 (H) で与えられる変位電流を含む真の電流密度である。

部分で記述された現象と関係づけるため、いくつかの付加的な関係が必要である。

駆電強度が物体に作用するとき、ファラディの誘導と伝導と呼ばれる二つの効果を生成する。それは物体中に、第一のものは誘電体で、第二のものは導体ではっきり見える、

この書では、静的な電気誘導は電気変位と呼んできたものによって測定されている。電気変位は \mathfrak{D} と表記した方向を持つ量、つまりベクトルであり、その成分を f, g, h と表記したものである。

等方的な物質では、変位は変位を生成する駆電強度と同じ方向にあり、少なくとも、その強度が小さい値であるときは、それに比例する。これは式

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}, \quad (\text{電気変位の式}) \quad (F)$$

によって表現される⁴。ここで K は物質の誘電容量である。68 節を見よ。

等方ではない物質中では、電気変位 \mathfrak{D} の成分 f, g, h は駆電強度 \mathfrak{E} の成分 P, Q, R の線形関数である。

電気変位の式の形は 298 節で与えられた伝導の式の形と同様のものである。

これらの関係は K は等方物体ではスカラー量であると言うことによって表現されるが、他の物体ではベクトル \mathfrak{E} に作用する線形ベクトル関数である。

609.] 駆電強度のもう一つの効果は伝導である。駆電強度の結果としての伝導法則はオームによって確立されており、この書の第二部、241 節で説明されている。これらは方程式

$$\mathfrak{K} = C \mathfrak{E}, \quad (\text{伝導の式}) \quad (G)$$

にまとめられる⁵。ここで \mathfrak{E} はその点での駆電強度であり、 \mathfrak{K} は伝導電流の密度であり、その成分は p, q, r であり、 C はその物質の伝導度であり、それは等方物質の場合、単純なスカラー量であるが、その他の物質ではベクトル

⁴ (F) 式は 誘電率 ϵ と \vec{D} の関係をあたえる 3 つのマックスウェルの基本構成方程式の一つ。最近、比例定数 K は ϵ と書かれることが多い。

電流や磁束などの束はシリンドラーの横断面を通る量を使って定義されているが、電束だけは閉じた球面を通る量で定義されている。このため、因子 4π が現れている。この因子は SI 単位系では \vec{E}, \vec{H} に組み込まれるが、静電単位系、電磁単位系はクーロン則を測定の基本にとってるので、組み込みは行われない。

静電単位系では、 $\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} \vec{D}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ と表記することが多い。

\mathfrak{C} に作用する線形ベクトル関数となる。この関数の形はデカルト座標で 298 節で与えられている。

610.] この書の一つの主要な特異性はそれが主張する学説が、電磁現象が依存する真の電流 \mathfrak{C} は伝導電流 \mathfrak{K} と同じものではなく、電気変位 \mathfrak{D} の時間変化が電気の全体の動きを評価するとき考慮されなければならず、したがって、私たちは

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}, \quad (\text{真の電流の式}) \quad (\text{H})$$

つまり、成分をつかって

$$\left. \begin{array}{l} u = p + \frac{df}{dx}, \\ v = q + \frac{dg}{dx}, \\ w = r + \frac{dh}{dx}, \end{array} \right\} \quad (\text{H}^*)$$

と書かねばならない点にある^{註 6}。

611.] \mathfrak{K} と \mathfrak{D} の両者とも駆電強度 \mathfrak{E} に依存するから、真の電流 \mathfrak{C} を駆電強度を使って表現できる。こうして、

$$\mathfrak{C} = (C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt}) \mathfrak{E}, \quad (\text{I})$$

つまり C と K が定数の場合、

$$\left. \begin{array}{l} u = CP + \frac{1}{4\pi} K \frac{dP}{dt}, \\ v = CQ + \frac{1}{4\pi} K \frac{dQ}{dt}, \\ w = CR + \frac{1}{4\pi} K \frac{dR}{dt}, \end{array} \right\} \quad (\text{I}^*)$$

である。

p. 254

註 5 式 (G) は駆電強度（電場） \vec{E} と伝導電流密度 \vec{K} の関係を与えるマックスウェルの構成方程式 3 つのうちの 1 つ。オームの法則と呼ばれることが多い。電気伝導度 C は σ と書かれることが多い。 $\vec{K} = \sigma \vec{E}$

註 6 訳註：マックスウェル方程式第 2 組に現れる電流 \vec{C} は (H) 式 $\vec{C} = \vec{K} + \frac{1}{4\pi} \dot{\vec{D}}$ である。

612.] 任意の点での自由電気の体積密度は電気変位の成分から方程式

$$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}, \quad (\text{J})$$

であると分かる^{註 7}。

613.] 電気の面密度は

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h', \quad (\text{K})$$

である。ここで l, m, n は面から変位の成分が f, g, h である媒質に向かって引かれた法線の方向余弦であり、 l', m', n' は面からそれらが f', g', h' である媒質に向かって引かれた法線の方向余弦である。

614.] 媒質の磁化がすべてそれに作用する磁気力によって誘導されると、誘導された磁気の方程式を

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad (\text{L})$$

と書くことができる^{註 8}。ここで μ は磁気の透磁性の係数であり、媒質が等方であるかないかにしたがって、それはスカラー量と考えてもよく、 \mathfrak{H} に作用する線形ベクトル関数であると考えてもよい。

615.] これらは私たちが考察してきた量のあいだの主要関係とみなすことができる。これらはこれらの量のいくつかを消去するように組み合わせることができるが、ここでの私たちの目的は数学的な公式の簡潔さを得ることではなく、私たちがなんらかの知識をもっているすべての関係を表現することである。有益なアイデアを表現する量を消去することはこの探求段階では得よりむしろ失が多いであろう。

しかしながら、方程式 (A) と (E) を組み合わせることによって得られる一つの結論があり、それは非常に重要なものである。

もし電気回路の形の中を除いた場の中に磁石が存在しないと考えると、磁力と磁気誘導のあいだでこれまで維持してきた区別は、これらの量が互いに異なるのは磁化された物質中のみであるから、消え去る。

アンペールの仮説に従うと、それは 833 節で説明されるが、磁化された物質と呼ぶものの性質は分子電気回路によるものであり、したがって我々が物

^{註 7} 訳註: 方程式 (J) $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$ はマックスウェル方程式第 2 組みの 2 式のうちの 1 つ。

^{註 8} 訳註: (L) 式はマックスウェルの構成方程式 3 つの 1 つ。 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 。ここで μ は透磁率。

質を巨視的に見るときのみ、我々の磁化理論が適用でき、もし我々の数学的な方法が個々の分子内で進むことを考慮することができると考えると、電気回路以外の何も発見せず、磁気力と磁気誘導はいかなる所でも同一であることが分かるであろう。しかしながら、随意に静電系または電磁測定系を使うことができるために、電磁系では μ の値が 1 であることを覚えておいて、係数 μ を保持することとする。

p. 255

616.] 磁気誘導の成分は 591 節、式 (A) によって

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}, \end{aligned} \right\}$$

である。

電流の成分は 607 節、式 (E) によって

$$\left. \begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}, \end{aligned} \right\}$$

である。

私たちの仮説にしたがって、 a, b, c は、それぞれ、 $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$ と同一である、それゆえ、私たちは { μ が定数のとき }

$$4\pi\mu u - \frac{d^2G}{dxdy} - \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{d^2H}{dzdx}, \quad (1)$$

を得る。

もし

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}, \quad (2)$$

および^{註 9}

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right), \quad (3)$$

と書くと、式 (1) を

$$\left. \begin{aligned} \pi\mu u &= \frac{dJ}{dx} + \nabla^2 F, \\ \text{同様に, } 4\pi\mu v &= \frac{dJ}{dy} + \nabla^2 G, \\ 4\pi\mu w &= \frac{dJ}{dz} + \nabla^2 H, \end{aligned} \right\}$$

p. 256

と書くことができる。

もし

$$\left. \begin{aligned} F' &= \mu \iiint \frac{u}{r} dx dy dz, \\ G' &= \mu \iiint \frac{v}{r} dx dy dz, \\ H' &= \mu \iiint \frac{w}{r} dx dy dz, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{J}{r} dx dy dz, \quad (6)$$

と書くと、ここで r は要素 (x, y, z) から与えられた点までの距離であり、積分は全空間にわたって拡張されるが、このとき、

$$\left. \begin{aligned} F &= F' - \frac{d\chi}{dx}, \\ G &= G' - \frac{d\chi}{dy}, \\ H &= H' - \frac{d\chi}{dz}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

が成り立つ。

量 χ は式 (A) から消え、それはいかなる物理現象にも関係していない。もしそれがどこにおいても零であると考えると、 J もまたどこにおいても零で

^{註 9} ここでは我々の表式を四元数で採用されるものと首尾一貫したものにするため。負の符号が採用されている。

あり、式(5)は、ダッシュ記号を省いて、 \mathfrak{A} の成分の真の値を与えるであろう。

617.] 私たちはそれゆえ \mathfrak{A} の定義として、それが電流のベクトルポテンシャルであることを採用する^{註10}。ベクトルポテンシャルは、ある物質のポテンシャルであるスカラーポテンシャルがその物質と関係しているのと同じように電流と関係しており、同様の積分の過程をとおして得られる。したがって、次のように記述することができる:—

与えられた点からベクトルを引こう。そのベクトルは大きさと方向で与えられた電流要素を表し、与えられた点から要素への距離の数値で割られている。電流の各要素にたいしてこれを行おう。こうして見出されたすべてのベクトルの和が全ての電流のポテンシャルである。電流はベクトル量であるので、そのポテンシャルもまたベクトルである。422節参照。

電流の分布が与えられたとき、 \mathfrak{A} はどこでも有限で連続的であり、方程式

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi\mu\mathfrak{C}, \quad S \cdot \nabla \mathfrak{A} = 0,$$

を満たし、電気系からの無限の距離で零になるような、 \mathfrak{A} の唯一の分布がある。この値は式(5)によって与えられるものであり、

p. 257

$$\mathfrak{A} = \mu \iiint \frac{\mathfrak{C}}{r} dx dy dz$$

の四元数形式で書くことができる。

電磁方程式に対する四元数表式。

618.] この書で、私たちは四元数の微積分の知識を読者に強いるいかなる過程も避けるように努めてきた。同時に、そうすることが必要なときはベクトルの概念を導入することをためらわなかった。ベクトルを記号によって表記する機会があるときにはドイツ文字を使ってきた。いろいろなベクトルの

^{註10} 訳註: (x, y, z) の関数 χ を使って $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \chi$ と変換しても、 \vec{E} も \vec{B} も変わらない。しかし、なんらかの条件を付けなければ、 \vec{A}' が定義できない。そこで、マクスウェルは $\text{div } \vec{A} = 0$ の条件をつけることによって、 \vec{A}' を定義した。今日、このことをクーロンゲージにしたがってゲージを固定したという。もし χ が時間の関数であることを許すなら、さらに、 $\Psi' = \Psi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ と変換すれば、 \vec{B} , \vec{E} ともに変わらない。

数は非常に多く、ハミルトン好みの記号はただちに尽きてしまったであろう。それゆえ、ドイツ文字が使われるときはいつも、それはハミルトンのベクトルを表し、その大きさのみならず方向も指す。ベクトルの成分はローマ文字またはギリシャ文字によって記される。

考察しなければならない主要ベクトルは
ベクトルの

	記号	成分。
ある点の動径ベクトル	ρ	$x \ y \ z$
ある点での電磁運動量	\mathfrak{A}	$F \ G \ H$
磁気誘導	\mathfrak{B}	$a \ b \ c$
(全) 電流	\mathfrak{C}	$u \ v \ w$
電気変位	\mathfrak{D}	$f \ g \ h$
駆電強度	\mathfrak{E}	$P \ Q \ R$
機械的な力	\mathfrak{F}	$X \ Y \ Z$
ある点での速度	\mathfrak{G} または $\dot{\rho}$	$\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}$
磁力	\mathfrak{H}	$\alpha \ \beta \ \gamma$
磁化の強度	\mathfrak{I}	$A \ B \ O$
伝導電流	\mathfrak{K}	$p \ q \ r$

また次のスカラー関数がある：

電気ポテンシャル Ψ .

磁気ポテンシャル（存在する所で） Ω .

電気の密度 ϵ .

磁気‘物質’の密度 m .

この他に、各点の媒質の物理的な性質を指す、次の量がある：…

C , 電流に対する伝導度。

K , 誘電誘導容量。

μ , 磁気誘導容量。

p. 258

これらの量は、等方媒質では、 ρ のたんなるスカラー関数であるが、一般にはそれが適用されるベクトル関数上の線形ベクトル作用素である。 K と μ は確実に常に自己共役であり、 C もまたおそらくそうである。

619.] 磁気誘導の式 (A)、その第一式は

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$

であるが

$$\mathfrak{B} = V \cdot \nabla \mathfrak{A}$$

と書くことができる。ここで ∇ は作用素

$$i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz},$$

であり、 V はこの演算の結果のベクトル部分がとられることを示している。

\mathfrak{A} は条件 $S \cdot \nabla \mathfrak{A} = 0$ に従うから、 $\nabla \mathfrak{A}$ は純ベクトルであり、記号 V は不要である。

駆電力の式 (B) は、その第一式は

$$P = c\dot{y} - b\dot{z} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx},$$

であるが、

$$\mathfrak{E} = V \cdot \mathfrak{G} \mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla \Psi.$$

となる。

機械的な力の式 (C) の第一式は

$$X = cv - bw + eP - m \frac{d\Omega}{dx}, \text{ 註 11}$$

であり、

$$\mathfrak{F} = V \cdot \mathfrak{E} \mathfrak{B} + e\mathfrak{E} - m\nabla\Omega,$$

となる。

磁化の式 (D) は、その第一式は

$$a = \alpha + 4\pi A,$$

註 11 { この仕事の 1 版、2 版でこの式の P に対して $-\frac{d\Psi}{dz}$ が書かれている。この修正は Prof. G. F. Fitzgerald, *Tran. R. S. Dublin*, 1883. による。 }

であるが、

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J},$$

となる。

電流の式 (E) は、その第一式は

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$

であるが、

$$4\pi\mathfrak{E} = V \cdot \nabla \mathfrak{H},$$

となる。

伝導電流の式は、オームの法則によって、

$$\mathfrak{K} = C\mathfrak{E},$$

である。

電気変位の式は

$$D = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E},$$

p. 259

である。

伝導とともに電気変位の変化から生じる全電流の式は

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}},$$

である。

磁化が磁気誘導から生じるとき、

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H},$$

である。

私たちはまた電気の体積密度を

$$\mathfrak{e} = S \cdot \nabla \mathfrak{D},$$

を決めなければならない。

磁気体積密度を決めるために

$$\mathfrak{m} = S \cdot \nabla \mathfrak{J},$$

である。

磁力をポテンシャルから導くことができるとき

$$\mathfrak{H} = -\nabla \Omega,$$

である。

IX 章の付録

もし電磁気の場が透磁率の異なる物質を含むなら、式(5)は一般には正確ではない。なぜなら、その場合、透磁率の異なる2つの物質の境界面に一般には自由磁気がありうるからである；これはp. 181の式(22)で与えられるベクトルポテンシャルに対する表式にいくつかの項を寄与するであろう。透磁率が μ_1 と μ_2 である2つの媒質を分離する面での境界方程式は、 F_1, G_1, H_1 と F_2, G_2, H_2 が分離面の2つの側面上のベクトルポテンシャルの成分の値を表記し、 l, m, n がこの面の法線の方向余弦として、法線誘導は連続であるから、(1)

$$\begin{aligned} & l\left(\frac{dH_1}{dy} - \frac{dG_1}{dz}\right) + m\left(\frac{dF_1}{dz} - \frac{dH_1}{dx}\right) + n\left(\frac{dG_1}{dx} - \frac{dF_1}{dy}\right) \\ &= l\left(\frac{dH_2}{dy} - \frac{dG_2}{dz}\right) + m\left(\frac{dF_2}{dz} - \frac{dH_2}{dx}\right) + n\left(\frac{dG_2}{dx} - \frac{dF_2}{dy}\right), \end{aligned}$$

であり、面に沿う磁力は連続だから、(2)

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{dH_1}{dy} - \frac{dG_1}{dz}\right) - \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{dH_2}{dy} - \frac{dG_2}{dz}\right)}{l}, \\ &= \frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{dF_1}{dz} - \frac{dH_1}{dx}\right) - \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{dF_2}{dz} - \frac{dH_2}{dx}\right)}{m}, \\ &= \frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{dG_1}{dx} - \frac{dF_1}{dy}\right) - \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{dG_2}{dx} - \frac{dF_2}{dy}\right)}{n}, \end{aligned}$$

である。式(5)は一般にはこれらの表面条件の両方を満たさない。それゆえ、p. 260 F, G, H は方程式

$$\nabla^2 F = 4\pi\mu u,$$

$$\nabla^2 G = 4\pi\mu v,$$

$$\nabla^2 H = 4\pi\mu w,$$

と、前述の境界条件によって与えられるとみなすのが最良である。}

{ 導体が動いているとき、方程式(B)で Ψ が静電ポテンシャルを表すと仮定することは正当とはみえない。なぜなら、これらの式を導くとき、マクスウェルは、閉じた回路をまわって積分したとき消えるので、項

$$-\frac{d}{ds}(F\frac{dx}{dt} + G\frac{dy}{dt} + H\frac{dz}{dt}),$$

を無視しているからである。もしこの項を挿入すると Ψ はもはや静電ポテンシャルではなく、このポテンシャルと

$$F\frac{dx}{dt} + G\frac{dy}{dt} + H\frac{dz}{dt},$$

の和である。

これは多くの注意を引きつけた問題、磁力が鉛直で c に等しい一様な磁場中での鉛直な軸のまわりの角速度 ω で回転する球の問題に、重要な応用を持つ^{註 12}。式(B)はこの場合、球は定常状態に落ち着いたとして、

$$P = c\omega x - \frac{d\Psi}{dx},$$

$$Q = c\omega y - \frac{d\Psi}{dy},$$

$$R = -\frac{d\Psi}{dz},$$

である。

球は導体であり、定常状態であるから、そして、 $\frac{P}{\sigma}, \frac{Q}{\sigma}, \frac{R}{\sigma}$ が電流の成分であるから、

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = 0;$$

^{註 12} 訳註： 単極誘導として知られている現象である。 P/σ などで現れる σ は電気伝導度をあらわす。回転のようなガリレイ変換で速度を 0 とできないような場合にも、時間に依存するゲージ変換で(B)式から速度に依存する項を消すことができる。

であり、したがって

$$2c\omega = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2},$$

である。この式は、通常、球全体で体積密度が $-c\omega/2\pi$ である電気の分布が存在することを意味すると解釈されてきたが、もし Ψ が静電ポテンシャルと仮定したときのみこれは正当である。

方程式 (B) が導かれた考察に従って Φ が静電ポテンシャルであると仮定したなら、

$$\Psi = \Phi + F \frac{dx}{dt} + G \frac{dy}{dt} + H \frac{dz}{dt},$$

つまり、この場合、

p. 261

$$\Psi = \Phi + \omega(Gx - Fy),$$

であり、このとき

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) (Gx - Fy) &= 2 \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right), \\ &= 2c \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} &= 2c\omega, \\ \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} &= 0; \end{aligned}$$

つまり、球の体積にわたる電気の分布はないことが分かる。

それゆえ、電磁場の方程式中には、回転球が自由電気を含むと考えさせるものは何もない。

極座標および円柱座標で表された電磁場の方程式。

もし F, G, H が、それぞれ、動径ベクトル、子午線、経度の平行線に沿ったベクトルポテンシャルの成分で、 a, b, c が磁気誘導の成分、 α, β, γ が磁力

の成分、 u, v, w がこれらの方向の電流の線分なら、簡単に

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{d}{d\theta} (r \sin \theta H) - \frac{d}{d\phi} (r G) \right\}, \\ b &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{dF}{d\phi} - \frac{d}{dr} (r \sin \theta H) \right\}, \\ c &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{d}{dr} (r G) - \frac{dF}{d\theta} \right\}; \\ 4\pi u &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{d}{d\theta} (r \sin \theta \gamma) - \frac{d}{d\phi} (r \beta) \right\}, \\ 4\pi v &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{d\alpha}{d\phi} - \frac{d}{dr} (r \sin \theta \gamma) \right\}, \\ 4\pi w &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{d}{dr} (r \beta) - \frac{d\alpha}{d\theta} \right\}; \end{aligned}$$

を証明することができる。

もし P, Q, R が動径ベクトル、子午線、経度方向の平行線に沿った駆電強度の成分なら

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{d}{d\theta} (r \sin \theta R) - \frac{d}{d\phi} (r Q) \right\}, \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{dP}{d\phi} - \frac{d}{dr} (r \sin \theta R) \right\}, \\ \frac{dc}{dt} &= -\frac{1}{r} \left\{ \frac{d}{dr} (r Q) - \frac{dP}{d\theta} \right\}; \end{aligned}$$

p. 262

である。

もし円柱座標が ρ, θ, z であり、もし F, G, H が ρ, θ, z に平行なベクトルポテンシャルの成分、 a, b, c が磁気誘導の成分、 α, β, γ が磁力の成分、 $u,$

v, w がこれらの方向の電流の成分なら

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{dH}{d\theta} - \frac{d}{dz}(\rho G) \right\} \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{d\rho}, \\ c &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{d}{d\rho}(\rho G) - \frac{dF}{d\theta} \right\} \\ 4\pi u &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{d\gamma}{d\theta} - \frac{d}{dz}(\rho \beta) \right\} \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{d\rho}, \\ 4\pi w &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{d}{d\rho}(\rho \beta) - \frac{d\alpha}{d\theta} \right\} \end{aligned}$$

である。

もし P, Q, R が ρ, θ, z に平行な駆電強度の成分なら

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{dR}{d\theta} - \frac{d}{dz}(\rho Q) \right\}, \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{d\rho}, \\ \frac{dc}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{d}{d\rho}(\rho Q) - \frac{dP}{d\theta} \right\}, \end{aligned}$$

である。

第 X 章

電気の単位の次元。

620.] どの電磁気量も長さ、質量、時間の基本単位を参照して定義されている。第 65 節で与えられたように、電気の単位の定義から始めると、電磁気量が電気の量とともにに入る方程式によって、他のすべての電磁気量の単位の定義を得ることができる。こうして得られた単位系は静電単位系と呼ばれる。

他方、第 374 節で与えられたように、磁極の単位の定義から始めると、同じ量の組の異なる単位系を得る。この単位系は前者の系とは首尾一貫しておらず^{註 1}、電磁単位系と呼ばれる。

両方の系に共通ないろいろな単位のあいだの関係を述べることから始めよう。そして、それぞれの系にしたがって単位の次元の表を作ろう。

621.] 組にして考えなければならない基本的な量を整理しよう。最初の 3 組では、それぞれの組の 2 つの量の積はエネルギーまたは仕事量である。第 2 の 3 組では、それぞれの組の積は単位体積あたりのエネルギーである。

第 1 の 3 組。

静電気の組。

記号。

(1) 電気量 e

^{註 1} 訳註： 1888 年に H. ヘルツは電磁気の基礎方程式で時間を時間 \times 光速度、電流密度を電流密度/光速度で置き換えれば、静電単位系と電磁単位系の間の矛盾がなくなることを指摘した。静電単位系の無次元量である真空の誘電率 K を 1 とすると、電磁単位系の無次元量である真空の透磁率は静電単位系で μ を $1/\text{光速度}^2$ となるが、これを磁束密度の定義に繰り込むことにより、無矛盾に $\mu = 1$ を回復できる。こうして得られた単位系はガウス単位系と呼ばれる。この単位系では電場、電気変位、磁束密度、磁場がおなじ次元を持ち、理論の構造を見通しやすいという利点を持つ。しかし、ウェーバー以来、精密な電磁測定は電磁単位系を用いて行われてきたので、物理量の実験的なイメージを結びにくいという欠点を持つ。

p. 264

- (2) 駆電力、つまり、電気ポテンシャル。 *E*

磁気の組

- (3) 自由磁気量、つまり、磁極の強さ。 *m*
 (4) 磁気ポテンシャル Ω

電気運動の組。

- (5) 回路の電気運動-運動量。 *p*
 (6) 電流。 *C*

第 2 の 3 組。

静電気の組。

- (7) 電気変位 (面密度によって測られた) \mathfrak{D}
 (8) 駆電強度 \mathfrak{E}

磁気の組。

- (9) 磁気誘導 \mathfrak{B}
 (10) 磁力 \mathfrak{H}

電気運動の組。

- (11) 1 点での電流強度 \mathfrak{C}
 (12) 電流のベクトルポテンシャル \mathfrak{A}

622.] 以下の関係がこれらの量のあいだに存在する。第 1 に、エネルギーの次元は $[\frac{L^2 M}{T^2}]$ 、単位体積あたりのエネルギーの次元は $[\frac{M}{LT^2}]$ だから、以下の次元式がなりたつ。

$$[eE] = [m\Omega] = [pC] = \left[\frac{L^2 M}{T^2} \right], \quad (1)$$

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{E}] = [\mathfrak{W}\mathfrak{H}] = [\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \left[\frac{M}{LT^2} \right] \quad (2)$$

第2に、 e, p, \mathfrak{A} は、それぞれ、 C, E, \mathfrak{E} の時間積分であるから、

$$\left[\frac{e}{C} \right] = \left[\frac{p}{E} \right] = \left[\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}} \right] = [T]. \quad (3)$$

(3)

p. 265

第3に、 E, Ω, p は、それぞれ、 $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A}$ の線積分だから、

$$\left[\frac{E}{\mathfrak{E}} \right] = \left[\frac{\Omega}{\mathfrak{H}} \right] = \left[\frac{p}{\mathfrak{A}} \right] = [L]. \text{ 註 } 2 \quad (4)$$

最後に、 e, C, m は、それぞれ、 $\mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ の面積分だから、

$$\left[\frac{e}{\mathfrak{D}} \right] = \left[\frac{C}{\mathfrak{C}} \right] = \left[\frac{m}{\mathfrak{B}} \right] = [L^2]. \quad (5)$$

623.] これら15個の量は独立ではない。そこに含まれる12個の単位を導くには、1つの付加方程式が必要となる。しかし、もし、 e または m を独立な単位とすると、残りの次元をこれらのどちらかを使って導くことができる^{註3}。

註2 $\left[\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \right] = [L]$ も成り立つ。]

註3 訳註：静電単位系は、すべての電磁気現象は電荷 e によって決まっていると考え、まず、すべての電磁気量を電荷、時間、空間、質量の次元を使って表し、クーロンの法則、 $F = \frac{ee'}{r^2}$ から電荷を力 F を通して時間、空間、質量の次元であらわすことにより、すべての電磁気量を質量、空間、時間の単位を使って数値化して測っている。

クーロンの法則を、 $F = \frac{ee'}{4\pi r^2}$ として電荷 e を数値化するとき、有理静電単位系という。

すべての電磁気現象は磁気量 m によって決まっていると考えたとき、電磁単位系という。磁気にかんするクーロンの法則を $F = \frac{mm'}{r^2}$ とするとき、無理電磁単位系、 $F = \frac{ee'}{4\pi r^2}$ とするとき、有理電磁単位系という。

距離 b 離れた長さ a の平行電流 C, C' に働く力は無理電磁単位系で $F = 2\mu_0 CC' \frac{a}{b}$ 、有理電磁単位系で $F = \mu_0 CC' \frac{a}{2\pi b}$ である。

現在、標準として使われているSI単位系は、ウェーバーの電磁単位系、ヘビサイドの有理単位系、英國協会実用単位系に由来する。

SI系では、すべての電磁気現象は線電流 C によって決まっていると考え、電流、質量、空間、時間の次元を使って表し、電磁気量を力学の次元にまで還元しない。電流は真空の透磁率を $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ であると決めて、新しい次元の単位、アンペアを導入して、数値化されている。

$$(1) \quad [e] = [e] = \left[\frac{L^2 M}{m T} \right],$$

$$(2) \quad [E] = \left[\frac{L^2 M}{e T^2} \right] = \left[\frac{m}{T} \right],$$

$$(3) \text{ および } (5) \quad [p] = [m] = \left[\frac{L^2 M}{e T} \right] = [m],$$

$$(4) \text{ および } (6) \quad [C] = [\Omega] = \left[\frac{e}{T} \right] = \left[\frac{L^2 M}{m T^2} \right],$$

$$(7) \quad [\mathfrak{D}] = \left[\frac{e}{L^2} \right] = \left[\frac{M}{m T} \right],$$

$$(8) \quad [\mathfrak{E}] = \left[\frac{LM}{e T^2} \right] = \left[\frac{m}{LT} \right],$$

$$(9) \quad [\mathfrak{B}] = \left[\frac{M}{e T} \right] = \left[\frac{m}{L^2} \right],$$

$$(10) \quad [\mathfrak{H}] = \left[\frac{e}{LT} \right] = \left[\frac{LM}{m T^2} \right].$$

$$(11) \quad [\mathfrak{C}] = \left[\frac{e}{L^2 T} \right] = \left[\frac{M}{m T^2} \right],$$

$$(12) \quad [\mathfrak{A}] = \left[\frac{LM}{e T} \right] = \left[\frac{m}{L} \right].$$

p. 266

624.] これらの量の最初の 10 個の関係は次のように配置することによって示すことができる。

$$\begin{array}{lll|lll} e, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{H}, & C \text{ および } \Omega. & E, & \mathfrak{E}, & \mathfrak{B}, & m \text{ および } p. \\ m \text{ および } p, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{E}, & E. & C \text{ および } \Omega, & \mathfrak{H}, & \mathfrak{D}, & e. \end{array}$$

第 1 行の量は、第 2 行の対応する量が m から導かれたのと同じ操作によって e から導かれる。

上に与えられた関係はどのような単位系を採用しようと真である。

625.] 科学的に調べる価値のある系は静電系と電磁系のみである。静電系は 41, 42 節の電気の単位の定義に基づき、方程式

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{L^2},$$

から導くことができる。この式は、距離 L で電気量 e の作用による、任意の

点での合成電気強度 \mathfrak{E} は e を L^2 で割れば見出されることを表示している。次元式 (1) と (8) に代入すると、

$$\left[\frac{LM}{eT^2} \right] = \left[\frac{e}{L^2} \right], \quad \left[\frac{m}{LT} \right] = \left[\frac{M}{mT} \right],$$

であることがわかる。したがって、静電系では

$$[e] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}], \quad m = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}],$$

である。

電磁系は、374 節の磁極の強さの単位と正確に相似した定義に基づき、方程式

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{L^2},$$

へと導く。したがって、電磁系では

$$\left[\frac{e}{LT} \right] = \left[\frac{M}{eT} \right], \quad \left[\frac{LM}{mT^2} \right] = \left[\frac{m}{L^2} \right]$$

かつ

$$[e] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}], \quad [m] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

である。

p. 267

626.]

次元の表。

	記号。	静電系	電磁系	次元
電気量	e	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$.	
駆電強度 の線積分	E	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$.	
磁気量 回路の電気運動- 運動量	$\begin{cases} m \\ p \end{cases}$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.	
電流 磁気ポテンシャル	$\begin{cases} C \\ \Omega \end{cases}$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.	
電気変位 面密度	\mathfrak{D}	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$.	
駆電強度	\mathfrak{E}	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$.	
磁気誘導	\mathfrak{B}	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.	
磁力	\mathfrak{H}	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.	
1 点での流れの強さ ..	\mathfrak{C}	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.	
ベクトルポテンシャル	\mathfrak{A}	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.	

627.] 私たちはこれらの量の積を、すでに、順序立てて考えている。それらの比はある場合には科学的に重要である。こうして

	記号	静電系	電磁系
$\frac{e}{E} = \text{蓄電池の容量} \dots \dots \dots$	q	$[L]$	$[\frac{T^2}{L}]$.
$\frac{p}{C} = \left\{ \begin{array}{l} \text{回路自己誘導の} \\ \text{係数、または、} \\ \text{電磁容量} \end{array} \right\}$	L	$[\frac{T^2}{L}]$	$[\text{L}]$.
$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{誘電体の} \\ \text{比誘導容量} \end{array} \right\} \dots \dots \dots$	K	$[0]$	$[\frac{T^2}{L^2}]$.
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} = \text{磁気誘導容量} \dots \dots \dots$	μ	$[\frac{T^2}{L^2}]$	$[0]$.
$\frac{E}{C} = \text{導体の抵抗} \dots \dots \dots$	R	$[\frac{T}{L}]$	$[\frac{L}{T}]$.
$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{物質の} \\ \text{比抵抗} \end{array} \right\} \dots \dots \dots$	r	$[T]$	$[\frac{L^2}{T}]$.

628.] もし長さ、質量、時間の単位が 2 つの系で同じなら、1 つの電磁単位に含まれる 電気の静電単位の数は数値的にある速度に等しい。この速度は重 p. 268 要な物理量であり、それを記号 v で表記する。

一つの電磁単位中の静電単位の数。

$e, C, \Omega, \mathfrak{D}, \mathfrak{H}, \mathfrak{C}$ に対して	$\dots \dots \dots \dots \dots \dots v.$
$m, p, E, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}$ に対して	$\dots \dots \dots \frac{1}{v}.$
静電容量、誘電誘導容量、伝導度に対して	$\dots \dots \dots v^2.$
電磁容量、磁気誘導容量、抵抗に対して	$\dots \dots \dots \frac{1}{v^2}$

速度 v を決めるいくつかの方法が 768-780 節で与えられる。

静電系で空気の誘電誘導容量は 1 であると仮定される。それゆえ、この量は電磁系で $\frac{1}{v^2}$ によって表現される。

電磁系で比磁気誘導容量は 1 に等しいと仮定される。それゆえ、この量は静電系で $\frac{1}{v^2}$ で表現される。

電気単位の実用系。

629.] 2 単位系のうち、電磁通信を専門とする実務電気技士には、電磁系がよく使われる、しかし、長さ、時間、質量の単位がメートルまたはセンチメートル、秒、グラムのような、他の科学的な仕事で共通に使われているものなら、抵抗の単位、駆電力の単位が非常に小さく、実用で生じる量を表記するためには巨大な数を使わねばならず、電気量や電気容量の単位は非常に大きく、それらの極度に小さな分数のみが実用では生じうる。それゆえ、実務電気技士は大きな長さの単位と小さな質量の単位から電磁系によって導かれる一組の電気単位を採用している。

この目的で使われる長さの単位は 1 千万メートル、つまり近似的に地球の子午線の四分円の長さである。

p. 269 時間の単位は、前同様、1 秒である。

質量の単位は 10^{-11} グラム、つまり、1 億分の 1 ミリグラムである。

これらの基本単位から導かれた電気単位は著明な電気の発見者にちなんで名付けられている。こうして抵抗の実用単位はオーム^{註 4} と呼ばれ、英國協会によって供給された抵抗-コイルによって表現されており、340 節で記述されている。それは電磁系で毎秒 10,000,000 メートルの速度によって電磁系で表示されている。

駆電力の実用単位はボルトと呼ばれ、ダニエル電池の駆電力とそれほど違わない。最近、ラティマー クラーク氏は駆電力がきわめて一定のセルを発明している。その電池の駆電力はほぼ正確に 1.454 ボルトである。

容量の実用単位はファラドと呼ばれる。1 秒間に 1 ボルトの駆電力のもとで 1 オームを通じて流れる電気量は容量が 1 ファラドのコンデンサー中に 1 ボルトの駆電力によって生成される電荷に等しい。

これらの名前の使用は彼らに基づいている特定も基本単位の付加的な言葉で、常につく「電磁単位」の言葉のくり返しよりも実用ではより便利であることが分かっている。

^{註 4} 訳注：英國協会 BAAS がオーム、ボルトを定義したのは 1874 年、このトリーティーズ第 1 版出版の 1 年後である。オーム、ボルトは現在の SI 単位系での定義とは異なっているが、数值的には同じである。1948 年、CGPM によって、同じになるように SI 単位アンペアが定義された。

大きな量が測られるとき、大きな単位がもとの単位に百万をかけてつくられ、名前の前に接頭語メガが置かれる。

同様に接頭語字マイクロによって、もとの単位の百万分の1の小さな単位が作られる。以下の表はいろいろな時期に採用されてきいろいろな実用単位系の値を与えている。

基本 UNITS.	実用 SYSTEM.	B. A. REPORT, 1863.	THOMSON.	WEBER.
長さ	地球の四分円	メートル	センチメートル	ミリメートル
時間	秒	秒	秒	秒
質量	10^{-11} グラム	グラム	グラム	ミリグラム
抵抗	オーム	10^7	10^9	10^{10}
駆電力	ボルト	10^5	10^8	10^{11}
容量	ファラド	10^{-7}	10^{-9}	10^{-10}
電気量	ファラド (1 ボルトで) (荷される)	10^{-2}	10^{-1}	10

第 XI 章

電磁場のエネルギーと応力。

静電エネルギー。

630.] 系のエネルギーはポテンシャルエネルギーと運動エネルギーに分けることができる。

帯電によるポテンシャルエネルギーはすでに 85 節で考察されている。それは

$$W = \frac{1}{2} \Sigma (e\Psi) \quad (1)$$

と書ける。ここで e は電気ポテンシャルが Ψ の場所での電荷であり、和は帯電のある場所全体にわたる。

もし f, g, h が電気変位の成分なら、体積要素 $dxdydz$ 内の電気量は

$$e = \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) dxdydz \quad (2)$$

であり、

$$W = \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) \Psi dxdydz \quad (3)$$

である。ここで積分は全空間にわたる。

631.] この式を部分積分し、有限の帯電系の与えられた点からの距離 r が無限大になったとき、ポテンシャル Ψ は位数 r^{-1} 程度の無限小量となり、 f, g, h は位数 r^{-2} 程度の無限小量となることを思い出すと、この式は

$$W = -\frac{1}{2} \iiint \left(f \frac{d\Psi}{dx} + g \frac{d\Psi}{dy} + h \frac{d\Psi}{dz} \right) dxdydz \quad (4)$$

に簡単化する。ここで積分は全空間にわたる。

もし、ここで、駆電強度の成分に対して、 $-\frac{d\Psi}{dx}$, $-\frac{d\Psi}{dy}$, $-\frac{d\Psi}{dz}$ の代わりに、 P, Q, R と書くと、

$$W = \frac{1}{2} \iiint (Pf + Qg + Rh) dx dy dz^{\text{註 } 1} \quad (5)$$

であることが分る。

したがって、場全体の静電エネルギーは、自由電気が見出される場所に制限されるのではなく、電気力や電気変位が起こる場のすべての部分に宿ると考えても、同じである。

単位体積あたりのエネルギーは駆電力と電気変位の積にこれらのベクトルがなす角の余弦をかけたものの半分である。

四元数の言葉では、それは $-\frac{1}{2} S \cdot \mathcal{E} \mathcal{D}$ である。

磁気エネルギー。

註 2 632.] 磁化によるエネルギーを 85 節で帯電の場合に遂行した方法と同様の方法で扱うことができる。もし A, B, C が磁化の成分で、 α, β, γ が磁力の成分なら、磁石の系のポテンシャルエネルギーは、389 節によって、

$$-\frac{1}{2} \iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dx dy dz \quad (6)$$

である。ここで積分は磁化された物質によって占められた空間にわたる。しかし、この部分は、まもなく得る形の運動エネルギーに含まれるであろう。

633.] 電流がないとき、この式を次の方法で変形できる。

註 1 { 静電エネルギーにたいするこの式は第 1 卷で、静電力はポテンシャル関数から導くことができたであろうという仮定のもので導かれた。この証明は駆電力の一部が電磁誘導によるなら立しないであろう。しかし、エネルギーのこの部分が誘電体の偏りから生じ、単位体積あたり、 $\frac{1}{8\pi K}(f^2 + g^2 + h^2)$ であるとの見解を取るなら、偏りがどのように生成されたとしても、ポテンシャルエネルギーは誘電体の偏りにのみ依存するであろう。こうして、エネルギーは

$$\frac{f}{4\pi K} = P, \frac{g}{4\pi K} = Q, \frac{h}{4\pi K} = R,$$

だから、単位体積あたり $\frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh)$ に等しいであろう。 }

註 2 この章末の付録 I を見よ。

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0 \quad (7)$$

であることが分っている。

p. 272

したがって、97 節によって、もし

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \beta = -\frac{d\Omega}{dy}, \gamma = -\frac{d\Omega}{dz} \quad (8)$$

ならば、磁気現象の場合、つねにそうであるように、電流のない所で、

$$\iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz = 0 \quad (9)$$

である。積分は全空間にわたる。つまり、

$$\iiint \{(\alpha + 4\pi A)\alpha + (\beta + 4\pi B)\beta + (\gamma + 4\pi C)\gamma\} dx dy dz = 0. \quad (10)$$

したがって磁石の系によるエネルギーは

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dx dy dz &= \frac{1}{8\pi} \iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dx dy dz, \\ &= \frac{1}{8\pi} \iiint \mathfrak{H}^2 dx dy dz \end{aligned} \quad (11)$$

である。

電気運動エネルギー。

634.] 私たちはすでに 578 節で電流の系の運動エネルギーを

$$T = \frac{1}{2} \Sigma (pi) \quad (12)$$

の形で表示している。ここで p は回路の電磁運動量であり、 i は回路をまわる電流の強さであり、和はすべての回路にわたる。

しかし、590 節で p は

$$p = \int (F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds}) ds \quad (13)$$

の形の線積分として表示できることを証明している。ここで F, G, H は点 (x, y, z) での電磁運動量 \mathfrak{A} の成分であり、積分は閉じた回路 s の一周にわたる。それゆえ、

$$T = \frac{1}{2} \sum i \int (F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds}) ds \quad (14)$$

であることが分る。

もし u, v, w が回路の任意の点での電流の密度の成分なら、そしてもし S が回路の横断面なら、

$$i \frac{dx}{ds} = uS, \quad i \frac{dy}{ds} = vS, \quad i \frac{dz}{ds} = wS \quad (15)$$

と書くことができ、また体積を

$$Sds = dx dy dz$$

p. 273

と書くことができ、

$$T = \frac{1}{2} \iiint (Fu + Gv + Hw) dx dy dz \quad (16)$$

であることが分る。ここで積分は電流がある空間のすべての部分にわたる。

635.] さて u, v, w に磁力の成分 α, β, γ を使って、607 節の電流の方程式 (E) によって与えられた値で置き換えよう。すると

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint \left\{ F \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + G \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + H \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right\} dx dy dz \quad (17)$$

を得る。ここで積分は電流すべてを含む空間部分にわたる。

もしこれを部分積分し、系から遠く離れた距離 r で α, β, γ が大きさ r^{-3} の程度であり、{2つの媒質を分ける面で F, G, H と磁力の接線成分が連続である}ことを思い出すと、積分を全空間に拡げたとき、式は

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint \left\{ \alpha \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + \beta \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + \gamma \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right\} dx dy dz \quad (18)$$

と簡単になる。

磁気誘導の式、591 節、(A) によって、小括弧のなかの量を磁気誘導の成分 a, b, c で置き換えることができ、したがって運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz \quad (19)$$

と書くことができる。ここで積分は磁力と磁気誘導が零ではない値を持つ空間のすべての部分にわたる。

この式の括弧のなかの量は磁気誘導とその方向に分解された磁力の積である。

四元数の言葉で、これはより簡単に

$$-S \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{H}$$

と書くことができる。ここで \mathfrak{B} は磁気誘導で、その成分は a, b, c であり、 \mathfrak{H} は磁力でその成分は α, β, γ である。

636.] それゆえ、系の電気運動エネルギーは第 1 に電流が存在する所で取られる積分として表示できるし、第 2 に磁力が存在する場のすべての部分にわたって取られる積分としても表示できる。しかし、第 1 の積分は電流が互いに遠隔的に直接作用すると考える理論の自然な表式であり、第 2 の積分は電流のあいだにある空間中でのなんらかの媒介的な作用による電流のあいだの作用を説明しようとする理論にふさわしい。この書では私たちは後者の研究法を採用したので、第 2 の式を運動エネルギーのもっとも重要な形として採用するのが自然である。

p. 274

私たちの仮説にしたがって、運動エネルギーが磁場が存在する所ならどこでも、つまり、一般に、場のあらゆる部分で存在すると仮定する。単位体積あたりのこのエネルギーの総量は $-\frac{1}{8\pi} S \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{H}$ であり、このエネルギーは空間のどの部分にも、ある種の物質の運動の形で存在する。

偏光への磁気の効果のファラディの発見を考察するようになったとき、磁力線が存在するところではどこでも、これらの線のまわりの物質の回転運動があると信じる理由を指摘しよう。

磁気エネルギーと電気運動エネルギーの比較。

637.] 423 節で、それぞれ、強さが ϕ と ϕ' で閉曲線 s と s' を境界とする 2 つの板磁石の相互ポテンシャルエネルギーは

$$-\phi\phi' \iint \frac{\cos \epsilon}{r} dsds'$$

となることを見出した。ここで ϵ は ds と ds' の方向のあいだの角であり、 r はそれらのあいだの距離である。

また、521 節で、電流 i と i' が巡る 2 つの回路の相互エネルギーは

$$ii' \iint \frac{\cos \epsilon}{r} dsds'.$$

であることを見出した。もし i, i' が、それぞれ、 ϕ, ϕ' に等しければ板磁石のあいだの機械的な作用は対応する電気回路のあいだの作用と同じ大きさで、方向も同じである。板磁石の場合、力はそれらの相互ポテンシャルエネルギーを減らそうとし、回路の場合、エネルギーは運動エネルギーなので、力は相互エネルギーを増やそうとする。

p. 275

磁化された物質をどのように配置しても、あらゆる面で電気回路に対応する系を生成することは不可能である。磁気系のポテンシャルは空間のどの点でも一価であるが、電気系のポテンシャルは多価であるからである。

しかし、無限小の電気回路の適切な配置により、任意の磁気系にすべての点で対応する系を生成することは、ポテンシャルを計算するときにしたがう積分線がこれらの小さな回路のどれも通りすぎないようにすれば、可能である。これは 833 節でさらに十分に説明されるであろう。

遠いところでの磁石の作用は電気回路の作用と完全に同一である。それゆえ、私たちは両者を同じ原因まで追跡する努力をしている。電気の流れを磁石によって説明することはできないから、他の選択肢を採用しなければならず、分子電流によって磁石を説明しなければならない。

638.] この書の第 3 部での磁気現象の研究では、磁気の遠隔作用を説明しようとはせず、この作用を基本的な実験事実として扱った。それゆえ、私たちは磁気系のエネルギーはポテンシャルエネルギーであり、このエネルギーは、系のいろいろな部分がそれらに作用する磁力に従って変わると、減少すると仮定した。

しかし、もし磁石を、磁石の性質が磁石の分子内で循環する電流に由来するものだとみなすと、そのエネルギーは運動エネルギーで、それらのあいだの力は、もし電流を一定に制御し維持したなら、それらを運動エネルギーが増加する方向に動かそうとするようなものである。

この磁気の説明法は第 3 部で従った方法を捨てることも要請している。第

3部では磁石を連続で一様な物体とみなし、その最小部分も全体と同じ種類の磁性を持つとみなしている。

磁石は、非常に大きいが有限個数である、電気回路を含むとみなさなければならず、それは基本的に分子構造を持ち、連続的な構造とは区別される。

私たちの数学機械が非常に粗く、積分線は分子回路を線と見ることができないようなもので、体積要素に巨大な数の磁気分子が含まれているなら、第3部の結果と同様の結果に達したであろうが、より細かく見ることができ、分子の内部で進むすべての過程を研究できるなら、磁気の古い理論を諦め、電気回路からなる磁石以外の磁石を認めてはいられないアンペールの理論を採用しなければならない。

p. 276

また、磁気エネルギーも電磁エネルギーも両者とも運動エネルギーとみなさなければならない、635節で与えたように、それに適切な符号を持たせなければならない。

以下では、639節のように、ときに磁気の古い理論を進めようとするかもしれないが、その理論を捨て、644節のように、分子流のアンペール理論を採用したときのみ、完全に首尾一貫した系を得ることが分るであろう。

それゆえ、場のエネルギーは、静電つまりポテンシャルエネルギー

$$W = \frac{1}{2} \iiint (Pf + Qg + Rh) dx dy dz,$$

と電磁つまり運動エネルギー

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz.$$

の2つの部分のみからなる^{註4}。

^{註3} 訳註：式(F): $\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}$ に注意せよ。

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 、 $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$ ではなく、 $-S \cdot \nabla \mathfrak{D} = \rho$ である。

^{註4} 訳註：1884年にJ. H. ポインティングが次のことを示している。

ベクトル $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$ にたいして

$$\operatorname{div} \vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}) = -\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) - \vec{E} \cdot \vec{j}.$$

ここで

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

電磁場内に置かれた物体要素に作用する力について。

磁気要素に作用する力。

註⁵ 639.] 成分が α, β, γ の磁力の場のなかに置かれた強度の成分が A, B, C で磁化された物体の要素 $dxdydz$ のポテンシャルエネルギーは

$$-(A\alpha + B\beta + C\gamma)dxdydz.$$

である。

したがって、もし回転なしに要素を x の方向に動かそうとする力が $X_1dxdydz$ なら、

$$X_1 = A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\beta}{dx} + C \frac{d\gamma}{dx} \quad (1)$$

であり、もし x 軸のまわりに y から z の方向に要素を回転させようとする偶力のモーメントが $Ldxdydz$ なら、

$$L = B\gamma - C\beta \quad (2)$$

である。

y 軸、 z 軸に対応する力とモーメントは適切な代入をすることにより、書き下すことができる。

p. 277
640.] もし磁化された物体が電流を担い、電流の成分が u, v, w なら、603 節、方程式 (C) により、成分が X_2, Y_2, Z_2 の付加的な電磁力が存在するで

を使った。媒質の持つ電磁場の体積あたりの内部エネルギー U を

$$dU = \frac{1}{4\pi}(\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B})$$

とすると、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j}.$$

この式が現れて以降、電磁場のエネルギーは空間の各点に偏在し、電磁場のエネルギーはポインティングベクトル \vec{S} で流れものであると解釈されるようになった。

電磁場のエネルギーが電気変位と磁気誘導の関数であることに注意しよう。

$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$ であるから、 $\frac{1}{4\pi}\vec{E} \cdot d\vec{D}$ は外からエネルギーを与えてマクロな電荷分布を作ったとき、電磁場に蓄えられるエネルギーであり、ポテンシャルエネルギーと解釈できるであろう。

しかし、マクロな電流と直接関係しているのは磁場 \vec{H} であるから、 $\frac{1}{4\pi}\vec{H} \cdot d\vec{B}$ は外からエネルギーを与えて電流分布を作ったとき、蓄えられるポテンシャルエネルギーとは解釈できない。外からエネルギーを与えて磁束を作ったとき、マクロな電流が誘導されたというにすぎない。電流を制御したときに使えるフリーエネルギーは、 $\vec{H} \cdot d\vec{B} = d(\vec{H} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot d\vec{H}$ だから、

であろう。ここで、 X_2 は

$$X_2 = vc - wb \quad (3)$$

で与えられる。

したがって、分子の磁気と、磁化物質を通る電流から生じるすべての力 X は

$$X = A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\beta}{dx} + C \frac{d\gamma}{dx} + vc - wb \quad (4)$$

である。

量 a, b, c は磁気誘導の成分であり、磁力の成分 α, β, γ と、400 節で与えられた式

$$\left. \begin{array}{l} a = \alpha + 4\pi A, \\ b = \beta + 4\pi B, \\ c = \gamma + 4\pi C, \end{array} \right\} \quad (5)$$

によって関係している。

電流の成分 u, v, w は 607 節の式

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{aligned}$$

によって、 α, β, γ を使って表記することができる。

したがって

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4\pi} \left\{ (a - \alpha) \frac{d\alpha}{dx} + (b - \beta) \frac{d\beta}{dx} + (c - \gamma) \frac{d\gamma}{dx} + b \left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + c \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ a \frac{d\alpha}{dx} + b \frac{d\alpha}{dy} + c \frac{d\alpha}{dz} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right\} \end{aligned}$$

である。

403 節によつて

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0. \quad (8)$$

¹ $\frac{1}{4\pi} \vec{B} \cdot d\vec{H}$ である。
註 ⁵ この章末の付録 II を見よ。

この式に α をかけ、 4π で割り、その結果を式(7)に加えると、

$$X = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{d}{dx} [a\alpha - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)] + \frac{d}{dy} [b\alpha] + \frac{d}{dz} [c\alpha] \right\} \quad (9)$$

であることが分り、また(2)によって

$$L = \frac{1}{4\pi} ((b - \beta)\gamma - (c - \gamma)\beta), \quad (10)$$

$$= \frac{1}{4\pi} (b\gamma - c\beta) \quad (11)$$

である。ここで X は x の方向の単位体積あたりの力であり、 L はこの軸のまわりの力のモーメント（単位体積あたり）である。

p. 278

応力状態にある媒質の仮説によるこれらの力の説明について。

641.] 単位面積あたりの任意の種類の応力を P_{hk} の形の記号によって表そう。ここで第1添字, h , は応力が働くと考えられている面の法線が h 軸と平行であることを指し、第2添字, k , は正側の面上にある物体の一部が負側の面上にある物体の一部に作用する応力の方向が k 軸に平行であることを指す。

h と k の方向が同じこともある。この場合、応力は通常の応力である。それらが互いに傾いている場合もある。この場合、応力は斜め応力である。また、それらは互いに垂直かもしれない。この場合、応力は接線応力である。

応力が物体の要素部分にどのような回転も生成させない条件は

$$P_{hk} = P_{kh}.$$

である。

しかし、磁化された物体の場合、回転をさせる傾向があり、それゆえ、応力の通常の理論で成立する、この条件は満たされない。

物体の要素部分 $dxdydz$ の6側面上の応力の効果を、座標原点を重心にとって考えよう。

x の値が $\frac{1}{2}dx$ である正の面 $dydz$ 上で、力は

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ に平行に}, \quad (P_{xx} + \frac{1}{2} \frac{dP_{xx}}{dx} dx) dy dz = X_{+x}, \\ y \text{ に平行に}, \quad (P_{xy} + \frac{1}{2} \frac{dP_{xy}}{dx} dx) dy dz = Y_{+x}, \\ z \text{ に平行に}, \quad (P_{xz} + \frac{1}{2} \frac{dP_{xz}}{dx} dx) dy dz = Z_{+x} \end{array} \right\} \quad (12)$$

である。

反対側面上で作用する力 $-X_{-x}$, $-Y_{-x}$, $-Z_{-x}$, は dx の符号を変えることにより、これらから分る。

p. 279

もし $X dxdydz$ が要素に作用する x に平行な力の全体なら

$$\begin{aligned} X dxdydz &= X_{+x} + X_{+y} + X_{+z} + X_{-x} + X_{-y} + X_{-z}, \\ &= (\frac{dP_{xx}}{dx} + \frac{dP_{yx}}{dy} + \frac{dP_{zx}}{dz}) dxdydz, \end{aligned}$$

であり、したがって

$$X = \frac{d}{dx} P_{xx} + \frac{d}{dy} P_{yx} + \frac{d}{dz} P_{zx} \quad (13)$$

である。

もし $L dxdydz$ が x 軸のまわりに要素を y から z へ回そうとする力のモーメントなら

$$\begin{aligned} L dxdydz &= \frac{1}{2} dy (Z_{+y} - Z_{-y}) - \frac{1}{2} dz (Y_{+z} - Y_{-z}), \\ &= (P_{yz} - P_{xy}) dxdydz, \end{aligned}$$

であり、したがって

$$L = P_{yz} - P_{xy} \quad (14)$$

である。

(9) 式、(10) 式で与えられる X と L の値を (13) 式、(14) 式で与えられる

値と比較して、もし

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{4\pi} \{a\alpha - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\}, \\ P_{yy} &= \frac{1}{4\pi} \{b\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\}, \\ P_{zz} &= \frac{1}{4\pi} \{c\gamma - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\}, \\ P_{yz} &= \frac{1}{4\pi} b\gamma, \quad P_{zy} = \frac{1}{4\pi} c\beta \\ P_{zx} &= \frac{1}{4\pi} c\alpha, \quad P_{xz} = \frac{1}{4\pi} a\gamma \\ P_{xy} &= \frac{1}{4\pi} a\beta, \quad P_{yx} = \frac{1}{4\pi} b\alpha \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

とすると、これらが成分である応力系から生じる力は、物体の各要素上の効果にかんして、磁化や電流から生じる力に静的に等価である。

642.] これらを要素とする応力の性質は、 x 軸に磁力の方向と磁気誘導の方向のあいだの角を 2 等分させ、 y 軸をこれらの方向の面内にとり、磁力の側に向かって測ると、たやすく見出すことができる。

もし磁力の数値に対して \mathfrak{H} と置き、磁気誘導の数値に対して \mathfrak{B} と置き、それらのあいだの角を 2ϵ と置くと、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{H} \cos \epsilon, \quad \beta = -\mathfrak{H} \sin \epsilon, \quad \gamma = 0 \\ a &= \mathfrak{B} \cos \epsilon, \quad b = -\mathfrak{B} \sin \epsilon, \quad c = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{4\pi} (+\mathfrak{B}\mathfrak{H} \cos^2 \epsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2), \\ P_{yy} &= \frac{1}{4\pi} (-\mathfrak{B}\mathfrak{H} \sin^2 \epsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2), \\ P_{zz} &= \frac{1}{4\pi} (-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2), \\ P_{yz} &= P_{zx} = P_{zy} = P_{xz} = 0, \\ P_{xy} &= \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B}\mathfrak{H} \cos \epsilon \sin \epsilon, \\ P_{yz} &= -\frac{1}{4\pi} \mathfrak{B}\mathfrak{H} \cos \epsilon \sin \epsilon, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

である。

したがって、応力状態は次のものの合成であると考えられる。

$$(1) \text{すべての方向に等しい圧力} = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2.$$

$$(2) \text{磁力と磁気誘導のあいだの角の } 2 \text{ 等分線に沿った張力}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B} \mathfrak{H} \cos^2 \epsilon.$$

$$(3) \text{これらの方向の外角の } 2 \text{ 等分線のそった圧力} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B} \mathfrak{H} \sin^2 \epsilon$$

$$(4) \text{2方向の決める面内で物質の各要素を磁気誘導の方向から磁力の方} \\ \text{向へ回そうとする偶力} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B} \mathfrak{H} \sin 2\epsilon.$$

流体や磁化されていない固体で常にそうであるように、磁気誘導が磁力と同じ方向のとき、 $\epsilon = 0$ であり、 x 軸を磁力の方向と一致させると

$$P_{xx} = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{B} \mathfrak{H} - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2), \quad P_{yz} = P_{zx} = -\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \quad (18)$$

であり、接線応力は消える。

それゆえ、此の場合の応力は静水圧 $\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2$ が力線の方向に沿った縦張力 $\frac{1}{4\pi} \mathfrak{B} \mathfrak{H}$ と組み合わされている。

p. 281

643.] 磁化がないとき $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ であり、応力はさらに簡単化され、 $\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2$ に等しい力線にそった張力と、数値的にこれまた $\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2$ に等しい、力線に直角

なすべての方向の圧力が組み合わされている。この重要な場合の応力の成分は

$$\left. \begin{array}{ll} P_{xx} & = \frac{1}{8\pi}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2), \\ P_{yy} & = \frac{1}{8\pi}(\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2), \\ P_{zz} & = \frac{1}{8\pi}(\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2), \\ P_{yz} = P_{zy} & = \frac{1}{4\pi}\beta\gamma, \\ P_{zx} = P_{xz} & = \frac{1}{4\pi}\gamma\alpha, \\ P_{xy} = P_{yx} & = \frac{1}{4\pi}\alpha\beta, \end{array} \right\} \quad (19)$$

である。

体積あたり媒質の要素上のこれらの応力から生じる力の x 成分は

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{dx}P_{xx} + \frac{d}{dy}P_{yx} + \frac{d}{dz}P_{zx}, \\ &= \frac{1}{4\pi}\{\alpha\frac{d\alpha}{dx} - \beta\frac{d\beta}{dx} - \gamma\frac{d\gamma}{dx}\} + \frac{1}{4\pi}\{\alpha\frac{d\beta}{dy} + \beta\frac{d\alpha}{dy}\} + \frac{1}{4\pi}\{\alpha\frac{d\gamma}{dx} + \gamma\frac{d\alpha}{dx}\}, \\ &= \frac{1}{4\pi}\alpha(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}) + \frac{1}{4\pi}\gamma(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}) - \frac{1}{4\pi}\beta(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}) \end{aligned}$$

である。

さて

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} &= 4\pi m, \\ \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi v, \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi w. \end{aligned}$$

である。ここで m は体積あたりの南磁極物質の密度であり、 v, w は、それぞれ、 y, z に垂直な電流の強度である。したがって、

$$\left. \begin{array}{ll} X &= \alpha m + v\gamma - w\beta, \\ \text{同様に} & Y = \beta m + w\alpha - u\gamma, \\ & Z = \gamma m + u\beta - v\alpha \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (\text{電磁力の}) \\ (\text{方程式}) \end{array} \quad (20)$$

である。

644.] もし磁性体、反磁性体の性質にかんして、アンペールとウェーバーの理論を採用し、磁性と反磁性の極性を分子電流によるものと仮定するなら、仮想の磁性物質を取り除き、いたる所で $m = 0$ であることが分り、

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0, \quad (21)$$

だから、電磁力の式は

$$\left. \begin{array}{l} X = v\gamma - w\beta, \\ Y = w\alpha - u\gamma, \\ Z = u\beta - v\alpha \end{array} \right\} \quad (22)$$

となる。

これらは単位体積の物質にかんする機械的な力の成分である。磁力の成分は α, β, γ であり、電流の成分は u, v, w である。これらの方程式は既に確立された方程式と同一である。(603 節、方程式 (C))

645.] 媒質の応力状態による電磁力を説明では、磁力線は短くなろうとし、互いに横に置かれたときは互いに反発するという、ファラディ^{註 6} の考え方には従ったにすぎない。私たちがしたことは、線にそった張力、線に直角な圧力を数学の言葉で表示し、こうして媒質中に存在すると仮定された応力状態が電流を運ぶ導体上に観測される力を現実に生成することを証明したことがすべてである。

しかし、まだ、この応力状態が媒質中でどのように始まり、どのように維持されているかについて、何も言っていない。私たちは、たんに、電流の相互作用が離れた所で直接に即時に作用するのではなく、まわりの媒質中の特殊な応力に依存すると考えることが可能であることを示したにすぎない^{註 7}。

媒質なり何なりの運動による応力状態のどのような更なる説明も理論の別

p. 283

の独立な部分とみなさなければならず、それは私たちの現在の立ち位置に影響を与えることなく、成立もし、潰れもする。

註 6 *Exp. Res.*, 3266, 3267, 3268.

註 7 訳註：応力は面に働く力であり、媒質が保持する体積エネルギーにどのように関係しているのかを知る必要がある。ばねの力にかんするフックの法則は点に働く力であるが、それと対照して考えればよい。弾性体の場合、応力テンソルは体積エネルギーを歪みテンソルで微分したものである。電磁場にたいして、まず、何が歪みであるのかを知る必要がある。

この書の最初の部分、108 節で、観測された静電気力はまわりの媒質の応力状態が媒介することによって作動すると考えることができることを示した。私たちは、今、電磁力に対して同じことを行い、応力状態を支えることのできる媒質の概念が、ほかの知られた現象と無矛盾であるか、それとも、有用ではないと捨て置かざるをえないかを見ることが残されている。

電磁作用と同時に静電気が起こっている場の中では、第 1 部で記述された静電応力は私たちが考えてきた電磁応力に重ね合わされると考えなければならない。

646.] もし全地磁気力が、英國での近似値、10 英国単位(グレイン、フィート、秒)^{註 8} であると考えると、力線にそった張力は平方フィートあたり 0.128 グレイン重である。ジユール^{註 9} による電磁石によって生成された最大磁気張力は平方インチあたり約 140 ポンド重であった。

^{註 8} 訳注: 質量 1 グレイン : 1 gr = 0.06479891 g, 1 ポンド: 1 lp = 7000 gr = 16 oz

長さ 1 ft = 12 in = 1/3 yd = 0.3048 m,

重さ 1 weight = 9.8051 N kg⁻¹ = 32.2 ft s⁻² = 386 in s⁻²

の関係がある。したがって、

地磁気の平均値は $H = 10 \text{ ft}^{-1/2} \text{ gr}^{1/2} \text{ s}^{-1} = 0.145 \text{ kg}^{1/2} \text{ m}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$. (emu).

地磁気の張力は $0.128 \text{ grain weight ft}^{-2} = 4.12 \text{ ft}^{-1} \text{ grain s}^{-2} \simeq \frac{1}{8\pi} H^2$.

現在の単位系で地磁気の大きさは、日本でも、英國でも。ほぼ、

$$\begin{aligned} H_r &= 50000 \text{ nT} = 5 \times 10^{-5} \text{ T} = 5 \times 10^{-5} \text{ kg s}^{-1} \text{ A}^{-1} \\ &= \frac{5 \times 10^{-5} \text{ kg s}^{-1}}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m s}^{-2}}} = 4.46 \times 10^{-2} \text{ kg}^{1/2} \text{ m}^{-1/2} \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

無理単位系では $H = \sqrt{4\pi} H_r = 1.59 \times 10^{-1} \text{ kg}^{1/2} \text{ m}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$.

^{註 9} Sturgeon's Annals of Electricity, vol. v. p.187 (1840); または Philosophical Magazine, Dec.1851.

付録 I。

[以下の註は、クラーク マクスウェル教授によってクリスタル教授に宛てられた手紙に由来し、389 節、632 節に関連して、重要である。]

389 節で磁化成分が A_1, B_1, C_1 であり、磁力の成分が $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ である場のなかに置かれた磁石の存在によるエネルギーは

$$-\iiint (A_1\alpha_2 + B_1\beta_2 + C_1\gamma_2) dx dy dz,$$

である。ここで積分は、磁石以外のあらゆる所で零であるから、磁石に制限される。

しかし、全エネルギーは

$$-\frac{1}{2} \iiint \{(A_1 + A_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + \&c.\} dx dy dz,$$

の形であり、積分は磁化された物体が存在する空間のすべての部分にわたり、 A_2, B_2, C_2 は磁石の外部の任意の点で磁化の成分を記述している。

こうして、全エネルギーは 4 つの部分からなる:—

$$-\frac{1}{2} \iiint (A_1\alpha_1 + \&c.) dx dy dz. \quad (1)$$

これはもし磁石の磁化が硬いなら一定である。

$$-\frac{1}{2} \iiint (A_2\alpha_1 + \&c.) dx dy dz. \quad (2)$$

これは、グリーンの定理によって、

$$-\frac{1}{2} \iiint (A_1\alpha_2 + \&c.) dx dy dz, \quad (3)$$

そして

$$-\frac{1}{2} \iiint (A_2\alpha_2 + \&c.) dx dy dz \quad (4)$$

に等しい。この最後は硬い磁化から生じると考えることができ、それゆえ、一定である。

したがって、可動磁石のエネルギーの変数部分は、硬く磁化されているので、(2), (3) 式の和である。つまり、

$$-\iiint (A_l \alpha_2 + B_1 \beta_2 + C_1 \gamma_1) dx dy dz.$$

磁石の変位は $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ の値を変えるが、 A_1, B_1, C_1 の値は変えず、任意の方向 ϕ での磁石上の力は

$$\iiint (A_1 \frac{d\alpha_2}{d\phi} + B_1 \frac{d\beta_2}{d\phi} + C_1 \frac{d\gamma_2}{d\phi}) dx dy dz.$$

であるところが分る。

もし磁石の代わりに誘導によって磁化された物体があるなら、力の表式は同じでなければならない。つまり、 $A_1 = \kappa \alpha, \&c.$, と書くと、

$$\iiint \kappa (\alpha \frac{d\alpha_2}{d\phi} + \beta \frac{d\beta_2}{d\phi} + \gamma \frac{d\gamma_2}{d\phi}) dx dy dz.$$

を得る。

この式で、 α が $\alpha_1 + \alpha_2, \&c.$ に対して置かれているが、もし磁化された物体が小さいか、 κ が小さければ、 α_2 と較べて、 α_1 を無視することができ、力にたいする式は、440 節でのように、

$$\frac{d}{d\phi} \frac{1}{2} \iiint \kappa (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

である。

小さな誘導容量の物体が、誘導的に磁化され、無限遠まで運び去られるあいだに磁力によってなされた仕事は同じ元の強さまで硬く磁化された同じ物体にたいする仕事の半分にすぎない。誘導された磁石が運び去られるにつれて、それは磁化の強さを失うからである。

XI章の付録 II。

[639 節の磁力から生じる媒質の単位体積あたりのポテンシャルエネルギーにたいする式に対して異義が唱えられてきた。389 節でその式を見出すにあたって力の成分 α, β, γ がポテンシャルから導かれる仮定したが、639 節、640 節ではそうではないという理由からである。この異義は力 X に対する式にまで拡がる。その力はエネルギーの空間的な変化である。この註の目的は本文の正確さを確かめようとするいくつかの考察を進めることにある。]

{ 電流を運ぶ磁性物質片への力は、計算の便宜上、2 つの部分、(1) 電流の存在の結果としての要素上の力、(2) 要素中の磁気による力、に分けられる。第 1 の部分は非磁性物質の要素上の力と同じであり、成分は、それぞれ、

$$\begin{array}{l} \gamma v - \beta w, \\ \alpha w - \gamma u, \\ \beta u - \alpha v, \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} u, v, w \text{ は電流の成分}, \\ \alpha, \beta, \gamma \text{ は磁力の成分}. \end{array} \right.$$

である。

第 2 の力を計算するにあたって、磁性物質から切り出された円柱を想像しよう。円柱の軸は磁化の方向に平行とする。

もし I が磁化の強度なら、単位体積あたりの磁石上の x に平行な力は

$$I \frac{d\alpha}{ds},$$

である。つまり、もし A, B, C が I の成分なら

$$A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\alpha}{dy} + C \frac{d\alpha}{dz},$$

つまり、

$$A \frac{d\alpha}{dx} + B \left(\frac{d\beta}{dx} - 4\pi w \right) + C \left(\frac{d\gamma}{dx} + 4\pi v \right).$$

である。

それゆえ、 x に平行な要素上の力の全体は

$$\gamma v - \beta w + A \frac{d\alpha}{dx} + B \left(\frac{d\beta}{dx} - 4\pi w \right) + C \left(\frac{d\gamma}{dx} + 4\pi v \right),$$

つまり、

$$v(\gamma + 4\pi C) - w(\beta + 4\pi B) + A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\beta}{dx} + C \frac{d\gamma}{dx},$$

すなわち、

$$vc - wb + A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\beta}{dx} + C \frac{d\gamma}{dx},$$

であり、これは本文中の式である。}

第 XII 章

電流シート。

647.] 電流シートとは無限に薄い伝導物質の層であり、両側が絶縁物質によって限られており、したがって電流はシートのなかを流れることができるが、電極と呼ばれる点をのぞいてシートから逃れることができない。電流は電極からシートに入り出す。

有限の電流を伝導するためには、現実のシートは有限の厚さを持たねばならず、それゆえ、3次元の導体を考えるべきである。しかし、多くの場合、現実の伝導シートの性質やコイル状導線の薄い層の電気的な性質を上で定義した電流シートの性質から導くことが実際的には便利である。

それゆえ、任意の形の面を電流シートとみなすことができる。この面の片側を正の側面として選ぶと、常に面上に描かれた任意の線を面の正側から見るものと考えることとする。閉曲面の場合、外側を正と考えよう。294節参照。しかし、そこでは、電流の方向はシートの負の側面から見ていると定義されている。

流れ関数。

648.] 面上の固定点 A を原点として選び、面上に点 A から他の点 P まで線を描こう。単位時間にこの線を左から右へ横切る電気量を ϕ としよう。このとき、 ϕ は点 P での流れ関数と呼ばれる。

流れ関数は点 P の位置にのみ依存し、もしこの線が電極を通りすぎることなく、一方から他方の線へ連続的な動きで変形できるなら、流れ関数は線 AP p. 287 の任意の 2 つの形に対して同じになる。なぜなら、線の 2 つの形はある面領

域を囲み、そのなかには電極はなく、それゆえ、一方の曲線を横切って面領域へ入った電気量は同じだけ、もう一方の曲線を横切って出なければならぬからである。

もし s が線 AP の長さを記述するなら、左から右へ ds を横切る電流は $\frac{d\phi}{ds}ds$ であろう。

もし任意の曲線に対して ϕ が定数なら、その曲線を横切る電流はない。そのような曲線は電流線とか流線と呼ばれる。

649.] ψ をシートの任意の点での電気ポテンシャルとすると、曲線の任意の要素 ds に沿った駆電力は、ポテンシャル差から生ずる駆電力以外の駆電力がなければ、

$$-\frac{d\psi}{ds}ds,$$

である。

任意の曲線にたいして ψ が定数なら、その曲線は等ポテンシャル線と呼ばれる。

650.] シート上の点の位置はその点の ϕ と ψ の値によって定義されると考えることができる。 ds_1 を等ポテンシャル線の 2 つの流線 ϕ 、 $\phi + d\phi$ によって切り出された要素の長さとし、 ds_2 を流線の 2 つの等ポテンシャル線 ψ 、 $\psi + d\psi$ によって切り出された要素の長さとする。 ds_1 と ds_2 をシートの要素 $d\phi d\psi$ の辺と考えることができる。 ds_2 方向の駆電力 $-d\psi$ は ds_1 を横切る電流 $d\phi$ を生成する。

長さが ds_2 、幅が ds_1 のシートの部分の抵抗を

$$\sigma \frac{ds_2}{ds_1},$$

とする。ここで σ は単位面積あたりのシートの比抵抗であり、このとき

$$d\psi = \sigma \frac{ds_2}{ds_1} d\phi,$$

したがって

$$\frac{ds_1}{d\phi} = \sigma \frac{ds_2}{d\psi}$$

である。

もしシートがすべての方向に等しく伝導する物質からなるなら、 ds_1 は ds_2 に垂直である。一様な抵抗のシートの場合、 σ は定数であり、もし $\psi = \sigma\psi'$ とすると、

$$\frac{\delta s_1}{\delta s_2} = \frac{\delta\phi}{\delta\psi'}$$

が成立し、流線と等ポテンシャル線は面を小さな正方形に切り分けるであろう。

このことから、 ϕ_1 と ψ'_1 が ϕ と ψ' の共役関数(183節)ならば、曲線 ϕ_1 はシート中の流線で、曲線 ψ'_1 が対応する等ポテンシャル線となることが出てくる。もちろん、 $\phi_1 = \psi'$ と $\psi'_1 = -\phi$ はその一つの場合である。この場合、等ポテンシャル線は流線となり、流線は等ポテンシャル線となる^{註1}。

もしなんらかの特定の場合に任意の形の一様シート中で電流分布の解を得たなら、190節で与えられた方法にしたがって、適当な共役関数の変換によって、他の任意の場合の分布を導くことができる。

652.] つぎに電流シートの磁気作用を決定しなければならない。シート中では電流は完全にシートに閉じ込められ、電流をシートから外へ運び、中に運び込む電極はないとする。

この場合、流れ関数 ϕ は各点で決まった値を持ち、流線は閉じた曲線で、どの1つの流線も、自分自身と交わってもよいが、互いに交わらない。

流線 ϕ , $\phi + \delta\phi$ にあいだにあるシートの輪状の部分を考えよう。シートのこの部分は伝導回路で、その中で強さ $\delta\phi$ の電流が、 ϕ が与えられた値よりも大きいシートの部分を、正の方向に循環する。この電流の磁気効果は、板の内部の物質に含まれていない任意の点で、強さ $\delta\phi$ の板磁石の磁気効果と同じである。板は、与えられた流線の ϕ の値より大きな ϕ の値を持つ電流シートの部分と一致すると考えよう。

ϕ が最大値をもつ流線から始めて、最小値をもつ流線で終わる、一連の流線をすべて描くことにより、電流シートを回路列に分ける。それぞれの回路を対応する板磁石で置き換えると、板の厚みのなかに含まれない任意の点での流れシートの磁気効果は複合板磁石の磁気効果と同じであり、任意の点でのその強さは $C + \phi$ であることが分かる。ここで C は定数である。

もし電流シートに境界があるなら、境界線で $C + \phi = 0$ としなければならない。もしシートが閉じた面もしくは無限に拡がる面ならば、定数 C の値を

p. 289

^{註1} Thomson, Camb. Math. Journ., vol. iii. p. 286 を見よ。

決めるものはない。

653.] 電流シートのどちらかの側面の任意の点での磁気ポテンシャルは、415 節のように、式

$$\Omega = \iint \frac{1}{r^2} \phi \cos \theta dS,$$

によって与えられる。ここで r は面要素 dS から与えられた点への距離であり、 θ は r の方向と dS の正の側から描かれた法線のあいだの角度である。

この式は電流シートの厚みに含まれていないすべての点にたいする磁気ポテンシャルを与えていた。そして、私たちは電流を担う導体中の点にたいしては磁気ポテンシャルのようなものはないことを知っている。

Ω の値は電流シートで不連続である。もし Ω_1 がちょうど電流シートのなかの点での磁気ポテンシャルの値で、 Ω_2 が第 1 の点に近いが、電流シートのすぐ外の点での値なら、

$$\Omega_2 = \Omega_1 + 4\pi\phi,$$

である。ここで ϕ はシートの点での流れ関数である。シートの法線方向の磁力の成分は連続であり、面の両側で同じである。

流線に平行な磁力の成分も連続であるが、流線に垂直な接線成分はシートで不連続である。もし s がシート上に描かれた曲線の長さなら、 ds 方向の磁力の成分は負の側にたいして、 $-\frac{d\Omega_1}{ds}$ 、正の側で $-\frac{d\Omega_2}{ds} = -\frac{d\Omega_1}{ds} - 4\pi\frac{d\phi}{ds}$ である。

それゆえ、正側で磁力の成分は負側での成分を $-4\pi\frac{d\phi}{ds}$ だけ越える。与えられた点で、この量は ds が流線に垂直のとき、最大である。

p. 290

無限伝導度シート中の電流の誘導について。

654.] 579 節で、任意の回路中で

$$E = \frac{dp}{dt} + Ri,$$

であることが示されている。ここで E は印加された駆電力、 p は回路の電気運動の運動量、 R は回路の抵抗、 i は回路をまわる電流である。もし印加された駆電力がなく、抵抗がないなら、 $\frac{dp}{dt} = 0$ 、つまり p は定数である。

588 節で、回路の電気運動の運動量, p , は回路を貫く磁気誘導の面積分によって測ることができることが示されている。したがって、抵抗のない電流シートの場合、面上に描かれた任意の閉曲線を貫く磁気誘導の面積分は定数でなければならず、これは磁気誘導の法線成分は電流シートの各点で一定のままである。

655.] それゆえ、磁石の運動や近くの電流の変化によって、磁場が任意の方法で変わるなら、電流が電流シート内に生成され、その磁気効果が、磁石の効果つまり場のなかの電流の効果と組み合わされて、シートの各点で磁気誘導の法線成分が変わらずに維持される。もし最初に磁気作用がなく、シート中に電流がないなら、磁気誘導の法線成分はシートの各点でつねに零である。

それゆえ、シートは磁気誘導を浸透させず、磁気誘導線はシートにより曲げられるとみなすことができる。それは無限で一様な伝導体中の電流の流線が無限抵抗の物質からなる同じ形のシートの導入によって曲げられるのとまったく同じである。

もしシートが閉じた面や無限面を形成するなら、シートの片側で起こりうるどのような磁気作用も他の側にいかなる磁気作用も生成しない。

p. 291

平面電流シートの理論。

656.] 電流シートの外部での磁気作用は任意の点での強度が数値的に流れ関数 ϕ に等しい板磁石の作用に等価であることを見てきた。シートが平面のとき、1 値関数, P , を使って電磁効果を決めるために要するすべての量を表記できる。 P は面密度 ϕ で平面上に拡がる仮想物体のシートによるポテンシャルである。 P の値はもちろん

$$P = \iint \frac{\phi}{r} dx' dy', \quad (1)$$

である。ここで r は P が計算される点 (x, y, z) からシート平面の点 $(x', y', 0)$ までの距離で、その点で要素 $dx' dy'$ が取られる。

磁気ポテンシャルを見出すためには、板磁石を平面 xy に平行な 2 面からなり、第 1 の面は面の式が $z = \frac{1}{2}c$ で、面密度 $\frac{\phi}{c}$ を持ち、第 2 面は式が $z = -\frac{1}{2}c$ で面密度 $-\frac{\phi}{c}$ を持つとみなすことができる。

これらの面によるポテンシャルは、それぞれ、

$$\frac{1}{c}P_{(z-\frac{c}{2})}, \quad \frac{1}{c}P_{(z+\frac{c}{2})}$$

である。ここで添字は第 1 式で z にたいして $z - \frac{c}{2}$ と置かれ、第 2 式で z にたいして $z + \frac{c}{2}$ と置かれることを指し示す。テイラーラの定理によってこれらの式を展開し、それらをたし合わせ、 c を無限に小さくすると、シート外部の任意の点でのシートによる磁気ポテンシャル

$$\Omega = -\frac{dP}{dz}. \quad (2)$$

を得る。

657.] 量 P はシート面にかんして対称であり、それゆえ、 z を $-z$ で置き換えて同じである。

磁気ポテンシャル、 Ω 、は z の $-z$ を入れたとき符号を変える。

シートの正の面で

$$\Omega = -\frac{dP}{dz} = 2\pi\phi \quad (3)$$

p. 292

である。

シートの負の面で

$$\Omega = -\frac{dP}{dz} = -2\pi\phi \quad (4)$$

である。

シートのなかで、もしその物質の磁化から磁気効果が生じるなら、磁気ポテンシャルは正の面での $2\pi\phi$ から負の面での $-2\pi\phi$ へ連続的に変化する。

もしシートが電流を含むなら、その内部の磁力はポテンシャルを持つ条件を満たさない。しかし、シートの内部の磁力は完全に決められている。

法線成分

$$\gamma = -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{d^2P}{dz^2}, \quad (5)$$

はシートの両側でシートの物質全体にわたって同じである。

もし正の面で、 α, β が x, y に平行な磁力の成分で負の面で α', β' が磁力の成分なら、

$$\alpha = -2\pi \frac{d\phi}{dx} = -\alpha', \quad (6)$$

$$\beta = -2\pi \frac{d\phi}{dy} = -\beta' \quad (7)$$

である。

シートの中では、成分が α, β から α', β' へ連続的に変わる。

方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dx} &= -\frac{d\Omega}{dx}, \\ \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} &= -\frac{d\Omega}{dy}, \\ \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} &= -\frac{d\Omega}{dz}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

は電流シートによるベクトルポテンシャルの成分 F, G, H をスカラーポテンシャル Ω と結びつけるが、それはもし

$$F = \frac{dP}{dy}, \quad G = -\frac{dP}{dx}, \quad H = 0. \quad (9)$$

とすると、満たされる。

これらの値を直接の積分によって得ることもでき、 F について { いたる所で μ が 1 に等しいなら、616 節によって }

$$\begin{aligned} F &= \iint \frac{u}{r} dx' dy' = \iint \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dy'} dx' dy', \\ &= \int \frac{\phi}{r} dx' - \iint \phi \frac{d}{dy} \frac{1}{r} dx' dy' \end{aligned}$$

である。

p. 293

積分は無限平面シートにわたって評価されるので、また、第 1 項は無限遠で消えるので、式は第 2 項に簡単化する。代入

$$-\frac{d}{dy'} \frac{1}{r} \text{ に対して } \frac{d}{dy} \frac{1}{r},$$

を行い、 ϕ は x', y' に依存するが、 x, y, z には依存しないことを思い出すと

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dy} \iint \frac{\phi}{r} dx' dy', \\ &= \frac{dP}{dy}, \quad (1) \text{ によって} \end{aligned}$$

を得る。

もし Ω' がシート外部の任意の磁気または電気系による磁気ポテンシャルなら

$$P' = - \int \Omega' dz, \quad (10)$$

と書くことができ、この系によるベクトルポテンシャルにたいして

$$F' = \frac{dP'}{dy}, \quad G' = -\frac{dP'}{dx}, \quad H' = 0. \quad (11)$$

を得る。

658.] シートが固定されていると考えて、シートの任意の点での駆電力を決めよう。

X, Y を、それぞれ、 x, y に平行な駆電力の成分とすると、598 節によつて、 $\{\Psi$ の代わりに ψ と書いて }

$$X = -\frac{d}{dt}(F + F') - \frac{d\psi}{dx}, \quad (12)$$

$$Y = -\frac{d}{dt}(G + G') - \frac{d\psi}{dy} \quad (13)$$

がなりたつ。

もしシートの電気抵抗が一様で σ に等しければ、

$$X = \sigma u, \quad Y = \sigma v, \quad (14)$$

である。ここで u, v は電流の成分であり、もし ϕ が流れ関数なら

$$u = \frac{d\phi}{dy}, \quad v = -\frac{d\phi}{dx} \quad (15)$$

である。

しかし、式(3)によって、電流シートの正の面で $2\pi\phi = -\frac{dP}{dx}$ である。したがつて、式(12)、(13)は

$$-\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^2 P}{dydz} = -\frac{d^2}{dydt}(P + P') - \frac{d\psi}{dx}, \quad (16)$$

$$\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^2 P}{dxdz} = -\frac{d^2}{dxdt}(P + P') - \frac{d\psi}{dy}, \quad (17)$$

である。ここで式の値はシートの正の面の対応する値である。

もしこれらの式の第1を x にかんして微分し、第2を y にかんして微分し、結果を加えて

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0 \quad (18)$$

がなりたつ。

この式を満たし、平面の各点で有限で連続で、無限遠で消える ψ の唯一の値は

$$\psi = 0 \quad (19)$$

である。

したがって、一様伝導度の無限平面シートの電流の誘導はシートのいろいろな部分での電気ポテンシャルの差を伴わない。

ψ のこの値を代入し、(16)、(17) 式を積分すると

$$\frac{\sigma}{2\pi} \frac{dP}{dz} - \frac{dP}{dt} - \frac{dP'}{dt} = f(x, t) \quad (20)$$

を得る。

シート中の電流の値は x または y にかんして微分することによって見出されるので、 z と t の不定関数は消える。したがって、それを考察の外に置いておく。

またもし $\frac{\sigma}{2\pi}$ にたいして、一つの記号 R を書くと、それはある速度を表現し、 P と P' のあいだの式は

$$R \frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dt} + \frac{dP'}{dt} \quad (21)$$

となる。

659.] まず電流シートに作用する外部磁気系がないと考える。それゆえ、 $P' = 0$ と考えることができる。この場合はシート中の電流系はそのまで、相互誘導によって互いに作用しあい、同時にシートの抵抗によりエネルギーを損失している場合になる。結果は式

$$R \frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dt}, \quad (22)$$

によって表示され、その解は

$$P = F\{x, y, (z + Rt)\}, \quad (23)$$

である。

p. 295

註² したがって、座標が x, y, z であるシートの正側の任意の点で、時間 t での P の値は $t = 0$ の瞬間の点 $x, y, (z + Rt)$ での P の値に等しい。

それゆえ、もし電流の系が無限に拡がる一様な平面シート中で励起され、そのまま維持されると、シートの正側の任意の点でその磁気効果は、もし電流の系がシート中で一定に保たれ、シートが一定速度 R で負側から法線方向に動いたときと同じである。電磁力の減少は、現実には電流の減衰から生じるが、それは仮想の場合の距離の増加による力の減少によって正確に表現される。

660.] 式 (21) を t にかんして積分すると、

$$P + P' = \int R \frac{dP}{dz} dt \quad (24)$$

を得る。

もし最初 P と P' が両方とも零で、磁石や電磁石が、瞬間に、磁化されたり無限遠から持ってこられ、 P' の値が、瞬間に、零から P' に変わったと考えると、(24) の第 2 遍時間積分は時間にかんして消えるので、シートの表面で最初の瞬間に $P = -P'$ が成り立たなければならないからである。

したがって、 P' は系の瞬間的な導入によるが、その導入によってシート中で励起された電流の系はシートの面でこの系の磁気効果を厳密に中性化するようなものである。

それゆえ、シート面で、そしてその結果としてシートの負側のすべての点で、初期の電流の系は正側の磁気系の効果に厳密に同じ大きさで反対方向の効果を生成する。私たちはこれを電流の効果はその系と位置が一致する磁気

註² [式 (29), (21) は $z = 0$ に対するシートの面でのみ真であることが証明できる。式 (23) は一般に (22) を満たし、それゆえ、シートの面でも満たす。それはまた問題の他の条件も満たし、それゆえ、解である。他の任意の解はこれから閉じた電流の系だけ異なり、シートの初期条件に依存するが、外部的な原因にはよらず、それゆえ、急速に減衰しなければならない。したがって、私たちは過去の永遠性を仮定するので、これが問題の唯一の解である。クラーク マクスウェル教授の論文、Royal Soc. Proc., xx. pp. 160-168 を見よ。]

系の像の効果と等価であり、磁化および電流の方向にかんして反対であると言うことによって表示できる。そのような像は負の像と呼ばれる。

その正側の点でシート中の電流の効果はシートの負側の磁気系の正の像の効果に等価である。対応する点を結ぶ線はシートによって直角に2分される。

p. 296

それゆえ、シート中の電流によるシートのどちらかの側の点での作用はその点の反対側のシート面上の磁気系の像によるもので、この像は点がシートの正側または負側にあるかにしたがって、正または負の像であるとみなすことができる。

661.] もしシートが無限伝導度なら $R = 0$ で、(24) の右辺は零であり、したがって像は任意の時間でシート中の電流の効果を表現する。

現実のシートの場合、抵抗 R はある有限値を持つ。それゆえ、ここで記述された像は、磁気系の瞬間的な導入後の最初の瞬間だけ、電流の効果を表現する。電流はただちに減衰し始め、この減衰の効果は、もし2つの像が元の位置から一定の速度 R で、シートから外へ描かれた法線の方向に動くと考えると、正確に表現できる。

662.] シートの正側の磁石または電磁石の任意の系、 M 、によってシート中に誘導された電流の系の研究に着手する。磁石や電磁石の位置と強さは任意の仕方で変わる。

前と同様、 P' を系の直接作用が式(3)、(9)、&c. によって導かれる関数であるとすると、 $\frac{dP'}{dt}\delta t$ は $\frac{dM}{dt}\delta t$ によって表現される系に対応する関数である。この量は時間 δt の M の増分だが、それは、それ自身、磁気系を表現するとみなすことができる。

もし時間 t に系の正像 $\frac{dM}{dt}\delta t$ がシートの負側に形成されると考えるなら、この像によるシートの正側の任意の点での磁気作用は変化後の最初の瞬間の M の変化により励起されたシート中の電流によるものと等価であり、もし、それが形成されればすぐに、それが一定速度 R で z の負の方向に動き出したなら、像はシート中の電流に等価でありつづけるであろう。

もし引き続くどの時間要素でもこの種の像が形成され、形成されたらすぐに速度 R でシートから遠ざかり始めるなら、像の軌跡の概念を得、その最後は形成の過程だが、その残りはすべて速度 R でシートからはなれていく剛体のように動いている。

663.] もし P' は、なんであれ、磁気系の作用から生じる任意の関数を記述するなら、シート中の電流から生じる対応する関数, P , を以下の過程により見出すことができる。それはたんに像の軌跡の理論にたいする記号式にすぎない。

P_τ は点 $(x, y, z + R\tau)$ 、時間 $t - \tau$ での (シート中の電流から生じる関数) P の値を表すとし、 P'_τ は $(x, y, -(z + R\tau))$ 、時間 $t - \tau$ での (磁気系から生じる関数) P' の値を表すとする。このとき

$$\frac{dP_\tau}{d\tau} = R \frac{dP_\tau}{dz} - \frac{dP_\tau}{dt}, \quad (25)$$

であり、式 (21) は

$$\frac{dP_\tau}{d\tau} = \frac{dP'_\tau}{dt}, \quad (26)$$

となり、 τ にかんして、 $\tau = 0$ から $\tau = \infty$ まで積分することにより、関数 P の値として

$$P = - \int_0^\infty \frac{dP'_\tau}{dt} d\tau \quad (27)$$

を得る。こうして、式 (3), (9), &c. でのように、微分によって電流シートのすべての性質を得る^{註 3}。

註 3 { この証明は次のように整理できる: \mathfrak{P}_τ を点 $x, y, -(z + R\tau)$ 、時間 $t - \tau$ での P の値とする。他の記法は本文と同じとする。 \mathfrak{P}_τ は $x, y, z + R\tau, t - \tau$ の関数であるから、

$$\frac{\mathfrak{P}_\tau}{d\tau} = R \frac{\mathfrak{P}_\tau}{dz} - \frac{d\mathfrak{P}_\tau}{dt};$$

であり、294 ページの脚注より、式 (21) は、たんに平面内だけではなく、場のすべての点で満たされるから、

$$\frac{d\mathfrak{P}_\tau}{d\tau} = \frac{dP'_\tau}{dt},$$

したがって

$$\mathfrak{P}_\tau = - \int_0^\infty \frac{dP'_\tau}{dt} d\tau;$$

であるが、 P はシート面での点の像と任意の点で同じ値を持つから

$$\mathfrak{P}_\tau = P_r$$

であり、したがって

$$P_r = - \int_0^\infty \frac{dP'_\tau}{dt} d\tau$$

である。}

664.] ここで指し示された過程の例として、強さ 1 の一つの磁極が直線上を一様速度で動いている場合を取り上げよう。

時間 t での極の座標を

$$\xi = \mathbf{u}t, \quad \eta = 0, \quad \zeta = c + \mathbf{w}t$$

とする。

時間 $t - \tau$ で形成された極の像の座標を

$$\xi = \mathbf{u}(t - \tau), \quad \eta = 0, \quad \zeta = -(c + \mathbf{w}(t - \tau) + R\tau),$$

とする。もし r がこの像の点 (x, y, z) から距離なら

$$r^2 = (x - \mathbf{u}(t - \tau))^2 + y^2 + (z + c + \mathbf{w}(t - \tau) + R\tau)^2,$$

である。

像の跡によるポテンシャルを得るために

$$-\frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{d\tau}{r}$$

を計算しなければならない。

もし

$$Q^2 = \mathbf{u}^2 + (R - \mathbf{w})^2,$$

と書くと、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d\tau}{r} &= -\frac{1}{Q} \log \{ Qr + \mathbf{u}(x - \mathbf{u}t) + (R - \mathbf{w})(z + c + \mathbf{w}t) \} \\ &\quad + t \text{ にかんして微分すると消えるが無限大の項}, \end{aligned}$$

であり、この式の r の値は上に与えられた r の式で $\tau = 0$ とすることにより見出される。

この式を t にかんして微分し、 $t = 0$ と置くと、像の軌跡による磁気ポテンシャル

$$\Omega = \frac{1}{Q} \frac{Q \frac{\mathbf{w}(z + c) - \mathbf{u}x}{r} - \mathbf{u}^2 - \mathbf{w}^2 + R\mathbf{w}}{Qr + \mathbf{u}x + (R - \mathbf{w})(z + c)}.$$

を得る。

この式を x や z にかんして微分することにより、任意の点の磁力の、それぞれ、 x または z に平行な成分を得、これらの式で $x = 0, z = c, r = 2c$ と置くことにより、動いている極自身に作用する力の成分の以下の値

$$X = -\frac{1}{4c^2} \frac{\mathfrak{u}}{Q + R - \mathfrak{w}} \left\{ 1 + \frac{\mathfrak{w}}{Q} - \frac{\mathfrak{u}^2}{Q(Q + R - \mathfrak{w})} \right\},$$

$$Z = -\frac{1}{4c^2} \left\{ \frac{\mathfrak{w}}{Q} - \frac{\mathfrak{u}^2}{Q(Q + R - \mathfrak{w})} \right\}^{\text{註 } 4}$$

を得る。

665.] これらの式で、運動は考えている時間以前の無限の時間にわたって進んでいると考えなければならないことを思い出さなければならない。したがって \mathfrak{w} は正の量と取ってはならない。この場合、極は有限の時間でシートを通りすぎなければならないからである。

もし $\mathfrak{u} = 0$ 、 \mathfrak{w} は負なら、 $X = 0$,

$$Z = \frac{1}{4c^2} \frac{\mathfrak{w}}{R + \mathfrak{w}},$$

つまり、極はシートに近付くにつれてシートから斥けられる。

もし $\mathfrak{w} = 0$ とすると、 $Q^2 = u^2 + R^2$ 、であり、

$$X = -\frac{1}{4c^2} \frac{\mathfrak{u}R}{Q(Q + R)} \quad \text{かつ} \quad Z = \frac{1}{4c^2} \frac{\mathfrak{u}^2}{Q(Q + R)}$$

である。

成分 X は極の運動の方向の反対方向に極に働く遅延力を表現する。与えられた R の値に対して、 X は $\mathfrak{u} = 1.27R$ のとき最大である。

シートが絶縁体のとき、 $R = \infty$ 、 $X = 0$ である。

シートが完全導体のとき、 $R = 0$ 、 $X = 0$ である。

註 4 { これらの式はより簡単な形で

$$X = -\frac{1}{4c^2} \frac{R}{Q} \frac{\mathfrak{u}}{Q + R - \mathfrak{w}},$$

$$Z = \frac{1}{4c^2} \left(1 - \frac{R}{Q} \right)$$

と書ける。}

成分 Z は極のシートからの斥力を表現する。それは速度 u の増加とともに増加し、速度が無限大のとき、極限で $\frac{1}{4c^2}$ となる。それは R が零のときの値と同じである。

666.] 磁極がシートに平行な曲線を動くとき、計算はより複雑になるが、像の軌跡の最近接部分の効果は極の運動の方向の反対方向に極に作用する力を生成することはたやすく分かる。軌跡のこのすぐ後ろの部分の効果はいかで前時間での極の運動の方向に平行な軸をもつ磁石の効果と同種のものである。この磁石のもっとも近い極は動いている極と同じ名前であるから、力は、一部、斥力で、一部、運動の以前の方向に平行だが、後ろむきの力からなる。これは遅延力と、運動する極の経路の凹側に向かう力に分解することができる。

667.] 私たちの研究では、伝導シートの不連続性や境界のために、電流の系が完全に形成されない場合、解くことはできない。

しかし、もし極がシートの縁に平行に動いているなら縁の隣りの側での電流は弱められる。したがってこれらの電流による力はより小さく、より小さな遅延力があるだけではなく、斥力は縁に隣り合う側で最小であるから、極は縁に向かって引かれるであろう。p. 300

アラゴの回転円盤の理論。

668.] アラゴは回転する金属円盤の近くに置かれた磁石は、円盤が静止しているとき、円盤と磁石のあいだに作用はないにもかかわらず、磁石を円盤の運動に従わせようとするを感じることを発見した^{註5}。

この回転円盤の作用は、ファラディ^{註6}がそれを磁力の場をとおる円盤の運動によって円盤のなかに誘導された電流によって説明するまで、新種の誘導磁気に帰されていた。

これらの誘導電流の分布とその磁石への効果を決定するため、動いている磁石が作用している静止伝導シートにたいして既に見出されている結果を使うことができるであろう。運動座標軸系を参照して電磁方程式を扱うために600節で与えた方法を使うのである。しかし、この場合は特に重要なので、そ

^{註5} *Annalea de Chimie et de Physique*, Tome 32, pp. 213-223, 1826.

^{註6} *Exp. Res.*, 81.

れを直接的な方法で扱い、磁極が円盤の縁から非常に遠く、伝導シートの拡がりが限られていることの効果は無視できると仮定することから始める。

前の節 (656-667) と同じ記法を使うことにより、 x, y に平行な駆電力の成分にたいして、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \sigma u &= \gamma \frac{dy}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \\ \sigma v &= -\gamma \frac{dx}{dt} - \frac{d\psi}{dy}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

であることがわかる。{ Ψ のかわりに ψ と書き、§598, 13 式 } ここで γ は磁力の円盤の法線へ分解された部分である。

さて、もし u, v を流れ関数 ϕ を使って表示すると

$$u = \frac{d\phi}{dy}, \quad v = -\frac{d\phi}{dx}, \quad (2)$$

であり、もし円盤が角速度 ω で z 軸のまわりに回転しているなら

$$\frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad (3)$$

p. 301

である。

これらの値を式 (1) に代入すると

$$\sigma \frac{d\phi}{dy} = \gamma \omega x - \frac{d\psi}{dx}, \quad (4)$$

$$-\sigma \frac{d\phi}{dx} = \gamma \omega y - \frac{d\psi}{dy} \quad (5)$$

となる。

(4) 式に x をかけ、(5) 式に y をかけ、加えあわすと、

$$\sigma \left(x \frac{d\phi}{dy} - y \frac{d\phi}{dx} \right) = \gamma \omega (x^2 + y^2) - \left(x \frac{d\psi}{dx} + y \frac{d\psi}{dy} \right). \quad (6)$$

を得る。

(4) 式に y をかけ、(5) 式に $-x$ をかけ、加えあわすと、

$$\sigma \left(x \frac{d\phi}{dx} + y \frac{d\phi}{dy} \right) = x \frac{d\psi}{dy} - y \frac{d\psi}{dx} \quad (7)$$

を得る。

もしこれらの式を r と θ を使って表示すると

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (8)$$

だから、それらは

$$\sigma \frac{d\phi}{dr} = \gamma \omega r^2 - r \frac{d\psi}{dr}, \quad (9)$$

$$\sigma r \frac{d\phi}{dr} = \frac{d\psi}{d\theta}, \quad (10)$$

となる。

式 (10) は r と θ の任意の関数 χ を仮定し、

$$\phi = \frac{d\chi}{d\theta}, \quad (11)$$

$$\psi = \sigma r \frac{d\chi}{dr}, \quad (12)$$

とすると満たされる。

式 (9) にこれらの値を代入すると

$$\sigma \left(\frac{d^2\chi}{d\theta^2} + r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} \right) \right) = \gamma \omega r^2, \quad (13)$$

となる。

σr^2 で割り、座標 x, y を戻すと、この式は

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} = \frac{\omega}{\sigma} \gamma, \quad (14)$$

となる。

これが理論の基礎方程式であり、関数 χ と円盤の法線方向に分解された磁力の成分 γ のあいだの関係を表示している。

Q を円盤の正面の任意の点で面密度 χ で円盤全体にわたって分布する仮想の引力をもつ物質によるポテンシャルとする。

円盤の正面で

$$\frac{dQ}{dz} = -2\pi\chi \quad (15)$$

である。

p. 302

したがって、式(14)の第1辺は

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} \right) \quad (16)$$

となる。

しかし Q は円盤の外部のすべての点でラプラス方程式を満たすから、

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} = -\frac{d^2Q}{dz^2}, \quad (17)$$

であり、式(14)は

$$\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^3Q}{dz^3} = \omega\gamma \quad (18)$$

となる。

ふたたび、 Q は分布 χ によるポテンシャルだから、分布 ϕ つまり $\frac{d\chi}{d\theta}$ によるポテンシャルは $\frac{dQ}{d\theta}$ となる。これから、円盤のなかの電流による磁気ポテンシャルにたいして

$$\Omega_1 = -\frac{d^2Q}{d\theta dz}, \quad (19)$$

を得、電流による円盤の法線方向の磁力の成分に対して

$$\gamma_1 = -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{d^3Q}{d\theta dz^2}, \quad (20)$$

を得る。

もし Ω_2 が外部の磁石による磁気ポテンシャルなら、それでもし

$$P' = - \int \Omega_2 dz, \quad (21)$$

と書くなら、磁石による円盤の法線方向の磁力の成分は

$$\gamma_2 = \frac{d^2P'}{dz^2}, \quad (22)$$

となる。

さて、

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2,$$

を思い出すと、式(18)を

$$\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^3 Q}{dz^3} - \omega \frac{d^3 Q}{d\theta dz^2} = \omega \frac{d^2 P'}{dz^2}, \quad (23)$$

と書くことができる。

z にかんして2回積分して、 $\frac{\sigma}{2\pi}$ を R と書くと、

$$(R \frac{d}{dz} - \omega \frac{d}{d\theta})Q = \omega P', \quad (24)$$

である。

もし P 、 Q の値を、円盤の軸からの距離 r と、

$$2\xi = z + \frac{R}{\omega}\theta, \quad 2\zeta = z - \frac{R}{\omega}\theta, \quad (25)$$

となるような新しい2変数、 ξ と ζ を使って表示すると、式(24)は ζ にかん p. 303 して積分することにより

$$Q = \int \frac{\omega}{R} P' d\zeta, \quad (26)$$

となる。

669.] この式の形は、662節の方法と結び付けて考えると、円盤中の電流の磁気作用は螺旋形の磁気系の像の軌跡の磁気作用と等価であることを示している。

もし磁気系が強さ1の1つの磁極からなるなら、螺旋は円盤の軸を軸とする円柱状にあり、磁極を通りぬけさせる。螺旋は円盤中の極の光学像の位置から始まる。軸に平行な一連の螺旋のコイルのあいだの距離は $2\pi \frac{R}{\omega}$ である。跡の磁気効果は、もしこの螺旋が、到る所、円柱の軸に垂直な円柱の接線方向に磁化され、その強度が任意の小部分の磁気モーメントが円盤上の射影の長さに数値的に等しいものであれば、同じであろう。

磁極の効果の計算は複雑だが、次のものからなることを見るのはたやすい——

(1) 円盤の運動方向に平行な抗力。

(2) 円盤から作用する斥力。

(3) 円盤の軸へ向かう力。

極が円盤の縁に近いとき、この第3の力は、667節^{註7}で指示されているように、円盤の縁に向かう力によって打ち消されるかもしれない。

これらの力は、すべて、アラゴによって観測されており、彼によって *Annales de Chimie*, 1826, に記述されている。トルトリニの *Annales*, iv' p. 173 (1853), および v, p. 35 にあるフェリチ、および、*Crelle's Journal*, lxiii, pp. 158 および 329 にある E. ヨッホマンを見よ。またポゲンドルフの *Ann.* cxxii, p. 214 (1864) も参照。後者の論文では、電流の自己誘導を決めるために必要な式が与えられているが、作用のこの部分はそのあとの結果の計算では省かれている。ここで与えられた像の方法は *Proceedings of the Royal Society*, Feb. 15, 1872, に出版されている。

p. 304

球面電流シート

670.] ϕ を球面電流シートの任意の点 Q での流れ関数とし、 P を与えられた点でのポテンシャルで、面密度 ϕ で球上に分布した仮想物質のシートによるものとすると、 P を使って磁気ポテンシャルと電流シートのベクトルポテンシャルを見出すことが必要となる。

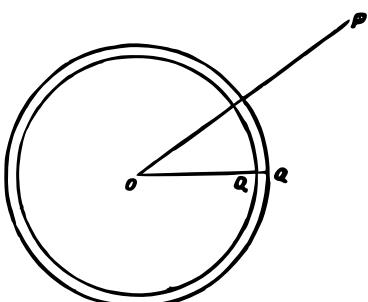


図 : 39

a が球の半径を表し、 r が中心から与えられた点までの距離、 p が流れ関数が ϕ である球面上の点 Q から与えられた点までの距離の逆数とする。

シートの物質中にはない任意の点の電流シートの作用は任意の点での強さが流れ関数に数値的に等しい板磁石の作用と同一である。板磁石と点 P に置かれた単位の極のあいだの相互ポテンシャルは、410節によって

$$\Omega = \iint \phi \frac{dp}{da} dS$$

註7 {もし a が極の円盤の軸からの距離。 c が極の円盤からの高さなら、小さな ω の値に対して極の抗力は $m^2 a \omega / 8c^2 R$ 、斥力は $m^2 a^2 \omega^2 / 8c^2 R^2$ 、軸へ向かう力は $m^2 a \omega^2 / 4cR^2$ である。}

である。

p は r と a にかんして次数 -1 の同次関数であるから、

$$a \frac{dp}{da} + r \frac{dp}{dr} = -p,$$

つまり

$$\frac{dp}{da} = -\frac{1}{a} \frac{d}{dr}(pr),$$

そして

$$\Omega = - \iint \frac{\phi}{a} \frac{d}{dr}(pr) dS,$$

である。

r と a は面積分では一定だから

$$\Omega = -\frac{1}{a} \frac{d}{dr}(r \iint \phi p dS),$$

である。

しかし、 P は面密度 ϕ の仮想物質のシートによるポテンシャルなら

$$P = \iint \phi p dS,$$

であり、電流シートの磁気ポテンシャル、 Ω 、は P を使って

$$\Omega = -\frac{1}{a} \frac{d}{dr}(Pr),$$

と表示できる。

p. 305

671.] ベクトルポテンシャルの x 成分 F を 416 節で与えた式

$$F = \iint \phi \left(m \frac{dp}{d\xi} - n \frac{dp}{d\eta} \right) dS,$$

から決めよう。ここで ξ, η, ζ は要素 dS の座標であり、 l, m, n は法線の方向余弦である。

シートは球であるので、法線の方向余弦は

$$l = \frac{\xi}{a}, \quad m = \frac{\eta}{a}, \quad n = \frac{\zeta}{a},$$

である。

しかし、

$$\frac{dp}{d\zeta} = (z - \zeta)p^3 = -\frac{dp}{dz},$$

であり、

$$\frac{dp}{d\eta} = (y - \eta)p^3 = -\frac{dp}{dy},$$

だから

$$\begin{aligned} m \frac{dp}{d\zeta} - n \frac{dp}{d\eta} &= \{(\eta(z - \zeta) - \zeta(y - \eta))\} \frac{p^3}{a}, \\ &= \{(z(\eta - y) - y(\zeta - z))\} \frac{p^3}{a}, \\ &= \frac{z}{a} \frac{dp}{dy} - \frac{y}{a} \frac{dp}{dz}, \end{aligned}$$

である。 ϕdS をかけ、球面上で積分すると、

$$F = \frac{z}{a} \frac{dP}{dy} - \frac{y}{a} \frac{dP}{dz},$$

$$\text{同様に } G = \frac{x}{a} \frac{dP}{dz} - \frac{z}{a} \frac{dP}{dx},$$

$$H = \frac{y}{a} \frac{dP}{dx} - \frac{x}{a} \frac{dP}{dy},$$

であることが分る。

ベクトル \mathfrak{A} は成分が F, G, H であり、それはあきらかに動径ベクトル r に垂直であり、 $\frac{dP}{dx}, \frac{dP}{dy}, \frac{dP}{dz}$ を成分とするベクトルに垂直である。もし半径 r の球面と、等差数列をなす P の値に対応する一連の等ポテンシャル面との交線を決めると、これらの線はその方向によって \mathfrak{A} の方向を示し、込み具合によってこのベクトルの大きさを示す。

4 元数の言葉で

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{a} V \cdot \rho \nabla P,$$

である。

672.] もし球内の P の値として

$$P = A \left(\frac{r}{a} \right)^i Y_i,$$

を仮定すれば、ここで Y_i は次数 i の球面調和関数であるが、球の外部では

$$P' = A\left(\frac{a}{r}\right)^{i+1} Y_i,$$

である。

流れ関数 ϕ は、 $(\frac{dP}{dr} - \frac{dP'}{dr})_{r=a} = 4\pi\phi$ であるから、式

$$\phi = \frac{2i+1}{4\pi} \frac{1}{a} A Y_i,$$

で与えられる。

球内の磁気ポテンシャルは

$$\Omega = -(i+l) \frac{1}{a} A \left(\frac{r}{a}\right)^i Y_i,$$

球外のそれは

$$\Omega' = i \frac{1}{a} A \left(\frac{a}{r}\right)^{i+1} Y_i,$$

である。

例えば、球殻形コイルにされた導線によって、球殻のなかに一様な磁力 M を生成することが必要だとする。殻内の磁気ポテンシャルは、この場合、

$$\Omega = -Mr \cos \theta,$$

の形の 1 次の体調和関数である。ここで、 M は磁力である。したがって $A = \frac{1}{2}a^2M$ 、であり、

$$\phi = \frac{3}{8\pi} Ma \cos \theta,$$

である。

それ故、流れ関数は球の赤道面からの距離に比例し、それゆえ、任意の 2 小円のあいだの巻数はこれらの円の面のあいだの距離に比例しなければならない。

もし N が全巻き数で、もし γ が各巻きの電流の強さなら、

$$\phi = \frac{1}{2} N \gamma \cos \theta,$$

である。

したがってコイルのなかの磁力は

$$M = \frac{4\pi}{3} \frac{N\gamma}{a},$$

である。

673.] つぎに球の内部に 2 次体帯域調和関数の形の磁気ポテンシャル

$$\Omega = -3 \frac{1}{a} A \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right).$$

p. 307

を生成するように、導線を巻く方法を見つけよう。ここで

$$\phi = \frac{5}{4\pi} \frac{A}{a} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

である。

もし全巻き数が N なら、極と極距離 θ のあいだの数は $\frac{1}{2} N \sin^2 \theta$ である。

巻きは緯度 45° でもっとも密である。赤道で巻く方向が変わり、異なる半球では巻きは反対方向である。

γ を導線中の電流の強さとすると、殻内で

$$\Omega = -\frac{4\pi}{5} N \gamma \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right),$$

である。

殻のなかの任意の場所に面を軸に垂直に置かれている平面閉曲線の形の導体を考えよう。誘導係数を決めるためには、 $\gamma = 1$ と置いて、曲線を境界とする面上の $-\frac{d\Omega}{dz}$ の面積分を見いださなければならない。

さて

$$\Omega = -\frac{4\pi}{5a^2} N \left\{ z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right\},$$

であり、

$$-\frac{d\Omega}{dz} = \frac{8\pi}{5a^2} Nz,$$

である。

したがって、もし S が閉曲線の面積なら、その誘導係数は

$$M = \frac{8\pi}{5a^2} NSz,$$

である。

もしこの導体中の電流が γ' なら、583 節によって、力 Z があり、導体を z 方向に動かそうとする。ここで

$$Z = \gamma\gamma' \frac{dM}{dz} = \frac{8\pi}{5a^2} NS\gamma\gamma',$$

であり、これは x, y, z とは独立だから、力は回路が殻のどの部分に置かれても同じである。

674.] ポアソンによって与えられ、437 節で記述された方法が、強度が I で z 方向に一様に磁化されていると考えられる物体に代えて、物体の面の形を持ち、流れ関数が

$$\phi = Iz, \quad (1)$$

である電流シートに適用できる。シート中の電流は xy 面に平行な面のなかにあり、厚さ dz の薄片をまわる電流の強度は Idz である。

p. 308

電流シートによる外部の任意の点での磁気ポテンシャルは

$$\Omega = -I \frac{dV}{dz}; \quad (2)$$

である。{ ここで V は面密度が 1 である時のシートによる重力ポテンシャルである。 }

シート内部の任意の点で、それは

$$\Omega = -4\pi Iz - I \frac{dV}{dz}, \quad (3)$$

である。

ベクトルポテンシャルの成分は

$$F = I \frac{dV}{dy}, \quad G = -I \frac{dV}{dx}, \quad H = 0, \quad (4)$$

である。

これらの結果は現実に起こるいくつかの場合に適用できる。

675.] (1) 任意の形の平面電気回路。

V は任意の形の面密度 1 の平面シートによるポテンシャルとすると、もしこのシートの代わりに強さ I の板磁石か、その境界をまわる強さ I の電流で置き換えるなら、 Ω や F, G, H の値は上で与えられたものである。

(2) 半径 a の固体球にたいして

$$V = \frac{4\pi}{3} \frac{a^3}{r} \quad r \text{ が } a \text{ より大きいとき}, \quad (5)$$

$$\text{かつ } V = \frac{2\pi}{3} (3a^2 - r^2) \quad r \text{ が } a \text{ より小さいとき}, \quad (6)$$

がなりたつ。

したがって、もしそのような球が強度 I で z に平行に磁化されているなら、磁気ポテンシャルは

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} I \frac{a^3}{r^3} z \quad \text{球外}, \quad (7)$$

$$\text{かつ } \Omega = \frac{d\pi}{3} I z \quad \text{球内}, \quad (8)$$

である。

もし、磁化される代わりに、等間隔の円形導線で巻かれて球コイルが作られ、面が単位距離にある 2 つの小円のあいだの電流の全強度が I ならば、球の外で Ω の値は前の通りだが、球の内部では

$$\Omega = -\frac{8\pi}{3} I z, \quad (9)$$

である。

これは 672 節すでに論じられている。

(3) 与えられた線に平行に一様に磁化された樁円体の場合は 437 節で論じられている。

もし平行で等間隔の面内にある導線で樁円体コイルが作られているなら、樁円体のなかの磁力は一様であろう。

(4) 円柱磁石、つまり、ソレノイド。

676.] もし物体が任意の形の断面を持ち、母線に垂直な面で限られている円柱なら、そして、もし V_1 は点 (x, y, z) でのポテンシャルで、ソレノイドの正の終端で一致する面密度 1 の平面領域によるものなら、そして V_2 は同じ点で負の終端で一致する面密度 1 の平面領域によるものなら、そのとき、もし円柱が一様に縦に強度 1 で磁化されているなら、点 (x, y, z) でのポテンシャルは

$$\Omega = V_1 - V_2, \quad (10)$$

である。

もし円柱が、磁化物体ではなく、導線で一様に巻かれ、したがって単位長さの導線の n 巻きがあるなら、そして電流 γ がこの導線をとおして流されるなら、ソレノイド外の磁気ポテンシャルは、前と同様、

$$\Omega = n\gamma(V_1 - V_2), \quad (11)$$

であるが、ソレノイドとその終端平面を境界とする空間のなかでは、

$$\Omega = n\gamma(-4\pi z + V_1 - V_2), \quad (5)$$

である。

磁気ポテンシャルは終端平面で不連続だが、磁力は連続である。

r_1, r_2 は、それぞれ、正および負の終端平面の慣性の中心の (x, y, z) からの距離とすると、もし r_1, r_2 がソレノイドの横方向と較べて非常に大きければ、

$$V_1 = \frac{A}{r_1}, \quad V_2 = \frac{A}{r_2}, \quad (13)$$

と書くことができる。ここで A はどちらかの断面の面積である。

それゆえ、ソレノイドの外部の磁力は非常に小さく、ソレノイド内部の力は近似的に $4\pi n\gamma$ に等しく、正の方向に軸に平行な力である。

もしソレノイドの断面が半径 a の円なら、 V_1, V_2 の値はトムソンとティトの *Natural Philosophy*、546 節、例 II で与えられている球面調和関数の級数で表示できる。

$$V = 2\pi\left\{-rP_1 + a + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a}P_2 - \frac{1.1}{2.4}\frac{r^4}{a^3}P_4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{r^6}{a^5}P_6 - \&c.\right\}$$

$r < a$ のとき, \quad (14)

$$V = 2\pi\left\{\frac{1}{2}\frac{a^2}{r} - \frac{1.1}{2.4}\frac{a^4}{r^3}P_2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{a^6}{r^5}P_4 - \&c.\right\}$$

$r > a$ のとき. \quad (15)

これらの式で r は点 (x, y, z) のソレノイドの終端の円のひとつの中心からの距離であり、帯域調和関数 $P_1, P_2, \&c.$ は r が円柱の軸となす角 θ に対応するものである。

p. 310

これらの式の第一式の z にかんする微分係数は $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき不連続であるが、ソレノイドのなかではこの式から導かれた磁力に縦の力 $4\pi n\gamma$ を加えなければならないことを思い出さなければならない。

677.] ソレノイドが非常に長く、私たちが考察している空間部分で、終端からの距離に依存する項は無視できると考えよう。

ソレノイド内に描かれた閉曲線をとおる磁気誘導は $4\pi n\gamma A'$ である。ここで A' はソレノイドの軸を法線とする平面への曲線の射影の面積である。

もし閉曲線がソレノイドの外部にあるなら、もし閉曲線がソレノイドを囲うなら、ソレノイドを貫く磁気誘導は $4\pi n\gamma A$ である。ここで A はソレノイドの断面積である。もし閉曲線がソレノイドを取り巻かなければそれをつらぬく磁気誘導は零である。

もし導線がソレノイドのまわりを n' 回巻き付くなら。それとソレノイドのあいだの誘導係数は

$$M = 4\pi nn' A, \quad (16)$$

である。

もしこれらの巻き付けがソレノイドの n 卷と一致すると考えると、ソレノイドの単位長さの自己誘導係数はその末端から十分な距離で取られたなら、

$$L = 4\pi n^2 A, \quad (17)$$

である。

ソレノイドの終端近くで、ソレノイドの終端面上での磁気の仮想の分布に依存する項を考慮しなければならない。これらの項の効果はソレノイドとソレノイドを囲む回路のあいだの誘導係数を $4\pi nA$ の値より小さくすることであり、回路がどちらの終端からも大きな距離にある非常に長いソレノイドを囲むとき誘導係数はその値を持つ。

2つの同じ長さ l の円形共軸ソレノイドの場合を考える。外側ソレノイドの半径は c_1 で、単位長さに n_1 巻きになるように導線が巻かれているとする。内側ソレノイドの半径は c_2 で単位長さあたりの巻数を n_2 とすると、ソレノイド間の誘導係数は、もし終端の効果を無視すると、

$$M = Gg, \quad (18)$$

である。ここで

$$G = 4\pi n_1, \quad (19)$$

であり、

$$g = \pi c_2^2 l n_2, \quad (20)$$

である。

678.] ソレノイドの正の終端の効果を決めるためには内側ソレノイドの終端を形成する円盤による外側ソレノイド上への誘導係数を計算しなければならない。この目的に対して、式(15)で与えるように、 V にたいする第2式を取り、それを r にかんして微分する。これは半径方向の磁力を与える。この式に $2\pi r^2 d\mu$ をかけ、 μ にかんして $\mu = 1$ から $\mu = \frac{z}{\sqrt{z^2 + c_1^2}}$ まで積分する。これは正の終端から距離 z の外側ソレノイドの1巻にかんする誘導係数を与える。これに dz をかけ、 $z = l$ から $z = 0$ まで積分する。最終的に、結果に $n_1 n_2$ をかけ、一方の終端の効果は誘導係数を減らしていることが分る。

こうして2つの円柱間の相互誘導係数の値 M にたいして

$$M = 4\pi^2 n_1 n_2 c_2^2 (l - 2c_1 \alpha), \quad (21)$$

が見出される。ここで

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \frac{c_1 + l - r}{c_1} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{2.3} \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(1 - \frac{c_1^2}{r^3}\right) \\ &\quad + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{4.5} \frac{c_2^4}{c_1^4} \left(-\frac{1}{2} - 2 \frac{c_1^5}{r^5} + \frac{5}{2} \frac{c_1^7}{r^7}\right) + \&c. \end{aligned} \quad (22)$$

であり、簡単のため、 $\sqrt{l^2 + c_1^2}$ の代わりに r と置かれている。

これから、2つの共軸ソレノイドの相互誘導を計算するとき、式(20)で真の値 l の代わりに補正された長さ $l - 2c_1 \alpha$ を使わなければならないよう見え、そこでは、 ac_1 に等しい部分がそれぞれの終端で切り落とされると考えられる。ソレノイドがその外部半径と較べて非常に長いとき

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{128} \frac{c_2^4}{c_1^4} + \&c, \quad (23)$$

である。

679.] ソレノイドが単位長さあたり n 層あるような直径を持つ何層もの導線からなるとき、厚さ dr の層の数は $n dr$ であり、

$$G = 4\pi \int n^2 dr, \quad g = nl \int n^2 r^2 dr. \quad (24)$$

p. 312

が成り立つ。

もし導線の厚さが一定で、もし誘導が外側および中側の半径がそれぞれ x, y である外部コイルと外側および中側の半径がそれぞれ y, z である内側コイルのあいだで起こるなら、終端の効果を無視して、

$$Gg = \frac{3}{4}\pi^2 \ln_1^2 n_2^2 (x - y)(y^3 - z^3), \quad (25)$$

である。

x と z が一定で、 y が変数のとき、この式が最大なら

$$x = \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}\frac{z^3}{y^2}, \quad (26)$$

である。

この式は鉄芯がないとき、誘導機の 1 次および 2 次コイルの厚さのあいだの最良の関係を与える。

もし半径 z の鉄芯があれば、 G は前のままだが、

$$g = nl \int n^2 (r^2 + 4\pi\kappa z^2) dr, \quad (27)$$

$$= \pi ln^2 \left(\frac{y^3 - z^3}{3} + 4\pi\kappa z^2 (y - z) \right). \quad (28)$$

である。

もし y が与えられているなら、 g の最大値を与える z の値は

$$z = \frac{2}{3}y \frac{12\pi\kappa}{12\pi\kappa + 1},$$

である。鉄の場合のように、 κ が大きい数なら、近似的に $z = \frac{2}{3}y$ である。

もし x を一定にし、 y, z を変数にするなら、 κ を大きいとして、 Gg の最大値を

$$x : y : z :: 4 : 3 : 2, \quad (30)$$

のとき得る。

長いソレノイドの自己誘導係数は、その外半径、内半径を x, y として、半径 z の長い鉄芯を持つとき、単位長さあたり

$$\begin{aligned} & 4\pi \int_y^x \{\pi \int_\rho^\rho n^2(\rho^2 + 4\pi\kappa z^2)dr + \pi \int_y^\rho n^2(r^2 + 4\pi\kappa z^2)dr\}n^2 d\rho, \\ & = \frac{2}{3}\pi^2 n^4(x-y)^2(x^2 + 2xy + 3y^2 + 24\pi\kappa z^2), \end{aligned} \quad (31)$$

である。

680.] これまで導線は一様な太さであると考えてきた。与えられた1次および2次コイルの抵抗値に対して、相互誘導係数の値が最大であるために、厚さがいろいろな層で変わらなければならないが、それが従う法則を決めよう。

n 巻きがソレノイドの単位長さを占めるような導線の単位長さの抵抗を ρn^2 とする。

p. 313

全ソレノイドの抵抗は

$$R = 2\pi\rho l \int n^4 r dr, \quad (32)$$

である。

R の与えられた値にたいして G が最大である条件は $\frac{dG}{dr} = C \frac{dR}{dr}$ である。ここで C はある定数である。

これは n^2 が $\frac{1}{r}$ に比例することを与える。つまり。外側コイルの導線の厚さは層の半径の平方根に比例しなければならない。

R の与えられた値にたいして、 g が最大であるためには

$$n^2 = C(r + \frac{4\pi\kappa z^2}{r}), \quad (33)$$

である。

したがって、もし鉄芯がなければ、内側コイルの導線の厚さは層の半径の平方根に逆比例するが、もし高い磁化容量を持つ鉄芯があれば、導線の厚さはほぼ半径の平方根に直接に比例するはずである。

端のないソレノイド。

681.] もし立体が面積 A の平面をそれを含む平面内にあるがその面を切らない軸のまわりに回転することによって生成されるなら、立体はリングの形を持つであろう。もしこのリングが導線によってコイル化され、したがってコイルの巻き線がリングの軸をとる面の中にあるなら、もし n が全巻数なら導線の層の流れ関数は $\phi = \frac{1}{2\pi}n\gamma\theta$ である。ここで θ はリングの軸のまわりの方位角である。

もし Ω がリング内部の磁気ポテンシャル、 Ω' がリング外部の磁気ポテンシャルなら、 $\Omega - \Omega' = -4\pi\phi + C = -2n\gamma\theta + C$ である。リングの外で、 Ω' はラプラス方程式を満たさなければならず、無限遠で消えなければならない。問題の性質から、それは θ のみの関数でなければならない。これらの条件を満たす Ω' の唯一の値は零である。したがって

$$\Omega' = 0, \quad \Omega = -2n\gamma\theta + C.$$

である。

リング内の任意の点での磁力は軸を貫く面に垂直であり、 $2n\gamma\frac{1}{r}$ に等しい。ここで r は軸からの距離である。リングの外には磁力はない。

p. 314

もし閉曲線の形が、固定点からの長さ、 s の関数としての軌跡の点を座標 z, r, θ によって与えられるなら、閉じた曲線を貫く磁気誘導はベクトルポテンシャルの曲線をまわる積分によって見出される。そのベクトルポテンシャルの成分は

$$F = 2n\gamma\frac{xz}{r^2}, \quad G = 2n\gamma\frac{yz}{r^2}, \quad H = 0,$$

である。

曲線が完全にリングの内側にあると、曲線一周をとって

$$2n\gamma \int_0^s \frac{z}{r} \frac{dr}{ds} ds$$

であることがわかる。もし曲線がまったくリングの外で、リングを抱き込んでいるなら、曲線を貫く磁気誘導は

$$2n\gamma \int_0^{s'} \frac{z'}{r'} \frac{dr'}{ds'} ds' = 2n\gamma a,$$

である。ここで a は線形量 $\int_0^{s'} \frac{z'}{r'} \frac{dr'}{ds'} ds'$, であり、ダッシュつきの座標は閉曲線ではなく、ソレノイドの一周期を参照している。

それゆえ、リングを囲い込む任意の閉曲線を貫く磁気誘導は同じであり、 $2n\gamma a$ に等しい。もし閉曲線がリングを囲い込んでいなければ、それを貫く磁気誘導は零である。

第 2 の導線がリングのまわりで必ずしもリングと接触せずに任意の仕方でコイルにされ、リングを n' 回囲い込むとする。この導線を貫く誘導は $2nn'\gamma a$ であり、それゆえ、1 つのコイルの他のコイルに対する誘導係数, M , は $M = 2nn'a$ である。

これは第 2 の導線の位置や特定の形にはまったく独立なので、電流が通り抜けたとき、導線はそれらのあいだに作用する機械的な力を感じない。第 2 の導線を第 1 の導線と一致させると。リングコイルの自己誘導係数として

$$L = 2n^2 a.$$

を得る。

第 XIII 章

平行電流。

円柱形導体。

682.] 非常に重要な電気配置に、電流が丸い一様断面の導線を通って伝導し、導線は直線か、導体の軸の曲率半径が導体の横断面と較べて十分に大きいものがある。そのような配置を数学的に扱う準備をするために、回路が 2 つの非常に長い平行な導体からできている場合から考え始めよう。2 つの導体はその終端で結合しているとし、導体の終端から非常に遠く、それらが無限に長くないという事実が力の分布に無視できないような変化をもたらさない回路部分に注目する。

導体の方向に z 軸を取ると、考慮する場の部分の配置の対称性から、すべてベクトルポテンシャルの z 成分、 H に依存する。

磁気誘導の成分は、式 (A) により

$$a = \frac{dH}{dy}, \quad (1)$$

$$b = -\frac{dH}{dx}, \quad (2)$$

$$c = 0,$$

である。一般性のため、磁気誘導係数は μ であると考える。したがって、 $a = \mu\alpha$, $b = \mu\beta$ である。ここで α , β は磁力の成分である。

電流の式 (E)、607 節、は

$$u = 0, \quad v = 0, \quad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}, \quad (3)$$

を与える。

683.] もし電流が z 軸からの距離、 r の関数で、もし

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (4)$$

と書き、磁力にたいする β は θ が z 軸を含む平面に垂直に測られた方向にあるとすると、

$$4\pi w = \frac{d\beta}{dr} + \frac{1}{r}\beta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(\beta r), \quad (5)$$

が成り立つ。

もし C が xy 面内の円を境界とする断面を通る電流の総計で、円の中心が原点、半径が r なら

$$C = \int_0^r 2\pi r w dr = \frac{1}{2} \beta r, \quad (6)$$

である。

それゆえ、 z 軸を共通の軸とする円柱層に配置された電流による与えられた点での磁力は与えられた点と軸のあいだにある層をとおる電流の強さの総計にのみ依存し、いろいろな円柱層のあいだの電流の分布には依存しない。

たとえば、導体を半径 a の一様な導線とし、それをとおる全電流が C とすると、もし電流が断面のすべての部分に一様に分布しているなら、 w は定数で、

$$C = \pi w a^2, \quad (7)$$

である。

r は a より小さいとすると、半径 r の円断面をとおる電流は $C' = \pi w r^2$ である。したがって導体のなかの任意の点で

$$\beta = \frac{2C'}{r} = 2C \frac{r}{a^2}, \quad (8)$$

である。導線の外では

$$\beta = 2 \frac{C}{r}, \quad (9)$$

である。

導線の物質中では磁気ポテンシャルは存在しない。電流を運ぶ導体中では磁力はポテンシャルをもつ条件を満たさないからである。

導体の外で磁気ポテンシャルは

$$\Omega = -2C\theta \quad (10)$$

である。

導線の代わりに外半径および内半径が a_1, a_2 である金属管を考えると、もし C が管状導体をとおる電流なら

$$C = \pi w(a_1^2 - a_2^2), \quad (11)$$

である。

p. 317

管のなかの磁力は零である。管の金属中では、 r は a_1, a_2 の間であり、

$$\beta = 2C \frac{1}{a_1^2 - a_2^2} \left(r - \frac{a_2^2}{r} \right), \quad (12)$$

であり、管の外では

$$\beta = 2 \frac{C}{r}, \quad (13)$$

であり、これは電流が中心まで満たされた導線を通るときと同じである。

684.] 任意の点で磁気誘導は $b = \mu\beta$ であり、式 (2) によって

$$b = -\frac{dH}{dr}, \quad (14)$$

だから、

$$H = - \int \mu\beta dr, \quad (15)$$

である。

管の外での H の値は

$$A - 2\mu_0 C \log r, \quad (16)$$

である。ここで μ_0 は管の外の空間での μ の値であり、 A は定数で、その値は帰還流の位置に依存する。

管の物質中では

$$H = A - 2\mu_0 C \log a_1 + \frac{\mu C}{a_1^2 - a_2^2} \left(a_1^2 - r^2 + 2a_2^2 \log \frac{r}{a_1} \right), \quad (17)$$

である。

管の内部空間では H は定数で

$$H = A - 2\mu_0 C \log a_1 + \mu C \left(1 + \frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \log \frac{a_2}{a_1}\right) \quad (18)$$

である。

685.] 回路が帰還流で完結するとする。帰還流は最初の電流に平行な管や導線を流れ、2つの電流の軸は距離 b 離れた所にあるとする。系の運動エネルギーを決めるために積分

$$T = \frac{1}{2} \iiint H w dx dy dz, \quad (19)$$

を計算しなければならない。

互いに距離 l 離れた導体の軸に垂直な 2 平面間にある系の部分に注意を制限すると、式は

$$T = \frac{1}{2} l \iint H w dx dy. \quad (20)$$

となる。

帰還流に属する量をダッシュ記号で区別すると

$$\frac{2T}{l} = \iint H' w' dx' dy' + \iint H' w dx dy + \iint H w dx dy + \iint H' w' dx' dy', \quad (21)$$

p. 318

と書くことができる。

管の外の任意の点への電流の作用は同じだけの電流が管の軸に集中させても同じなので、帰還流の断面にたいする H の平均値は $A - 2\mu_0 C \log b$ であり、正の電流の断面にたいする H' の平均値は $A' - 2\mu_0 C' \log b$ である。

したがって、 T にたいする式で、最初の 2 項は $AC' - 2\mu_0 CC' \log b$, $A'C - 2\mu_0 CC' \log b$ と書ける。

後の 2 項を通常の方法で積分し、結果を加え合わせ、 $C + C' = 0$ を思い出すと、運動エネルギー T の値を得る。これを $\frac{1}{2}LC^2$ と書く。ここで L は 2 導体系の自己誘導係数である。系の長さ l にたいして L の値として

$$\begin{aligned} \frac{L}{l} &= 2\mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a'_1} + \frac{1}{2} \mu \left[\frac{a_1^2 - 3a_2^2}{a_1^2 - q_2^2} + \frac{4a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \log \frac{a_1}{a_2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mu' \left[\frac{a_1'^2 - 3a_2'^2}{a_1'^2 - a_2'^2} + \frac{4a_2'^4}{(a_1'^2 - a_2'^2)^2} \log \frac{a_1^2}{a_2^2} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

であることが分かる。

もし導体が中までつまつた導線なら a_2, a'_2 は零であり、

$$\frac{L}{l} = 2\mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a'_1} + \frac{1}{2}(\mu + \mu'), \text{ 註 } 1 \quad (23)$$

である。

自己誘導の計算にあたり磁気誘導を考慮する必要があるのは鉄の導線の場合だけである。他の場合、 μ_0, μ, μ' はすべて 1 とできる。導線の半径が小さくなればなるほど、また、導線間の距離が大きくなればなるほど、自己誘導は大きくなる。

導線の 2 つの部分間の斥力 X を見つける。

686.] 580 節によって、 b を増加させようとする力にたいして

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \frac{dL}{db} C^2, \\ &= 2\mu_0 \frac{l}{b} C^2, \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。この式は、空気中のような、 $\mu_0 = 1$ のとき、アンペールの公式と一致する。

687.] 導線の長さが導体間の距離と較べて大きいなら、電流の作用から生じる導体の張力を決めるために自己誘導係数を使うことができる。

p. 319

もし Z がこの張力なら、

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} \frac{dL}{dt} C^2, \\ &= C^2 \left\{ \mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a'_1} + \frac{\mu + \mu'}{4} \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

である。

あるアンペールの実験で、平行導体は導体の浮遊橋で結ばれた 2 つの水銀槽でできているものがある。電流が槽の一端から入れられ、槽にそって浮遊

註 1 { もし導線が磁性体なら、そのなかに誘導された磁気が磁場を乱し、前述の推論を適用できない。式 (22), (23), (25) は厳密には $\mu = \mu' = \mu_0$ のときのみ真である。 }

導体の一端にたっするまで流され、浮遊橋をとおって他の槽へ通され、第 2 の槽にそって戻される。このとき、浮遊橋は槽にそって動き、水銀の電流が横切る部分を長くする。

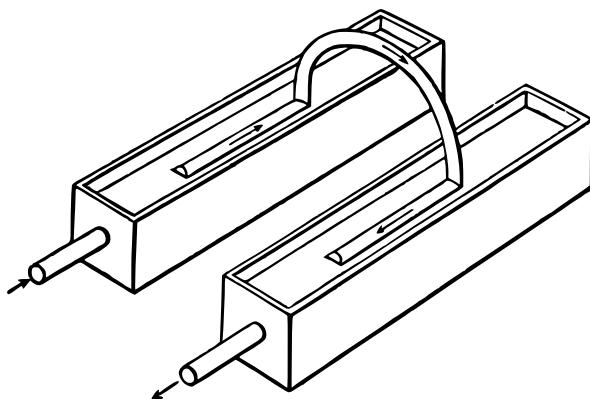


図: 40.

テイト教授はこの実験の電気的な条件を簡単化し、導線を水銀で満たされたガラスのサイフォンで置き換え、電流がその経路全体で水銀の中を流れるようにした。

この実験はしばしば同じ直線中の電流が互いに反発しあう例として挙げられる。共線要素の反発を指すアンペールの公式が、同じ直線中の 2 要素のあいだでなんら作用を与えないグラスマンの公式より正確であることを示す例として挙げられる。526 節。

しかし、アンペールの公式、グラスマンの公式とも閉じた回路にたいして同じ結果を与えるので、そして閉じた回路の実験しかないので、どの実験結果もどちらの理論が他の理論よりよいということはできない。

事実、すでに与えたように、両公式とも非常によく似た斥力の値をだす。ここでは、平行導体間の距離 b が重要な要素である。

導体の長さが導体間の距離と較べてそれほど大きくないとき、 L の値の形は幾分複雑になる。

688.] 導体のあいだの距離が減少するにつれ、 L の値は減少する。この減少の限度は導線が接触するとき、つまり、 $b = a_1 + a'_1$ のときである。この場

合、もし $\mu_0 = \mu = \mu' = 1$ ならば、

$$L = 2l \left\{ \log \frac{(a_1 + a'_1)^2}{a_1 a'_1} + \frac{1}{2} \right\}, \quad (26)$$

である。

これは $a_1 = a'_1$ のとき、最小であり、それは

$$\begin{aligned} L &= 2l \left(\log 4 + \frac{1}{2} \right), \\ &= 2l(1.8863), \\ &= 3.7726l, \end{aligned} \quad (27)$$

である。

これは自分自身のうえに重ねられた丸い導線の自己誘導の最小値であり、導線の全長は $2l$ である。

導線の 2 部分は互いに絶縁されなければならないので、自己誘導は現実にはけっしてこの極限値には達しない。丸い導線のかわりに広い平坦な金属片を使うことにより、自己エネルギーは無限に減少させることができる。

円柱導体にそった電流の変化を生成するために要する駆電力について。

689.] 導線中の電流の強度が変化するとき、電流の自分自身への誘導から生じる駆電力は導線の断面のいろいろな部分で異なり、一般に時間の関数であるとともに、導線の軸からの距離の関数である。もし円柱導体が導線の束からできており、そのすべてが同じ回路の部分を形成しているなら、これまで使ってきた計算法が厳密に適用できたであろう。しかし、もし円柱導体を中空ではないと考え、そのなかを電流が駆電力にしたがって自由に流れるなら、電流の強度は円柱軸からの距離が異なれば同じではなく、駆電力それ自身も導線のいろいろな円柱層での電流の分布に依存するであろう。

任意の点でのベクトルポテンシャル H 、電流密度 w 、駆電力は時間と導線軸からの距離の関数と考えなければならない。

p. 321

導線の断面をとおる全電流 C と、回路一周に作用する全駆電力 E は変数と考えるべきで、それらの関係を見いださなければならない。

H の値として

$$H = S + T_0 + T_1 r^2 + \&c. + T_n r^{2n} + \dots, \quad (1)$$

を仮定しよう。ここで $S, T_0, T_1, \&c.$ は時間の関数である。このとき、式、

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} = -4\pi w, \quad (2)$$

から

$$-\pi = T_1 + \&c. + n^2 T_n r^{2n-2} + \dots \quad (3)$$

であることが分る。

もし ρ が単位体積あたりの比抵抗を表記するなら、任意の点での駆電力強度は ρw であり、598 節、式 (B) によって電気ポテンシャルとベクトルポテンシャルを使って

$$\rho w = -\frac{d\Psi}{dz} - \frac{dH}{dt}, \quad (4)$$

つまり

$$-\rho w = \frac{d\Psi}{dz} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT_0}{dt} + \frac{dT_1}{dt} r^2 + \&c. + \frac{dT_n}{dt} r^{2n} + \dots \quad (5)$$

と表示できる。

(3), (5) 式で r の同じ幕の係数を比較すると

$$T_1 = \frac{\pi}{\rho} \left(\frac{d\Psi}{dz} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT_0}{dt} \right), \quad (6)$$

$$T_2 = \frac{\pi}{\rho} \frac{1}{2^2} \frac{dT_1}{dt}, \quad (7)$$

$$T_3 = \frac{\pi}{\rho} \frac{1}{n^2} \frac{dT_{n-1}}{dt}, \quad (8)$$

である。

したがって、

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{d\Psi}{dz}, \quad (9)$$

$$T_0 = T, \quad T_1 = \frac{\pi}{\rho} \frac{dT}{dt}, \quad \dots \quad T_n = \frac{\pi^n}{\rho^n} \frac{1}{(n!)^2} \frac{d^n T}{dt^n}, \quad (10)$$

と書ける。

p. 322

690.] 全電流 C を見出すためには、半径 a の導線の断面にわたって積分しなければならない。

$$C = 2\pi \int_0^a wrdr. \quad (11)$$

式 (3) から πw の値を代入して、

$$C = -(T_1 a^2 + \&c. + n T_n a^{2n} + \dots), \quad (12)$$

を得る。

導線外の任意の点での H の値は全電流にのみ依存し、導線内で電流の分布の仕方には依存しない。したがって導線の表面での H の値は AC であると仮定できる。ここで A は回路の一般的な形から計算によって決められる定数である。 $r = a$ のとき、 $H = AC$ とおいて、

$$AC = S + T_0 + T_1 a^2 + \&c. + T_n a^{2n} + \dots \quad (13)$$

を得る。

もし $\frac{\pi a^2}{\rho} = \alpha$ と書くと、 α は導線の単位長さあたりの抵抗値であり、

$$C = -(\alpha \frac{dT}{dt} + \frac{2\alpha^2}{1^2 \cdot 2^2} \frac{d^2 T}{dt^2} + \&c. + \frac{n\alpha^n}{(n!)^2} \frac{d^n T}{dt^n} + \&c.), \quad (14)$$

$$AC - S = T + \alpha \frac{dT}{dt} + \frac{\alpha^2}{1^2 \cdot 2^2} \frac{d^2 T}{dt^2} + \&c. + \frac{\alpha^n}{(n!)^2} \frac{d^n T}{dt^n} + \&c. \quad (15)$$

が成り立つ。

これらの式から T を消去するため、まず、級数 (14) を逆にしなければならない。こうして

$$\alpha \frac{dT}{dt} = -C + \frac{1}{2} \alpha \frac{dC}{dt} - \frac{1}{6} \alpha^2 \frac{d^2 C}{dt^2} + \frac{7}{144} \alpha^3 \frac{d^3 C}{dt^3} - \frac{39}{2880} \alpha^4 \frac{d^4 C}{dt^4} + \&c,$$

がわかる。

(14), (15) 式から

$$\alpha(A \frac{dC}{dt} - \frac{dS}{dt}) + C = \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2T}{dt^2} + \frac{1}{6}\alpha^3 \frac{d^3T}{dt^3} + \frac{1}{48}\alpha^4 \frac{d^4T}{dt^4} + \frac{1}{725}\alpha^5 \frac{d^5T}{dt^5} + \&c. = 0,$$

も成り立つ。

最後の 2 式から

$$\alpha(A \frac{dC}{dt} - \frac{dS}{dt}) + C + \frac{1}{2}\alpha \frac{dC}{dt} - \frac{1}{12}\alpha^2 \frac{d^2C}{dt^2} + \frac{1}{48}\alpha^3 \frac{d^3C}{dt^3} - \frac{1}{180}\alpha^4 \frac{d^4C}{dt^4} + \&c. = 0, \quad (16)$$

であることが分る。

もし l が回路の全長、 R が抵抗、 E が電流の自分自身への誘導以外の原因による駆電力なら、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{E}{l}, \quad \alpha = \frac{l}{R}, \quad (17)$$

$$E = RC + l(A + \frac{1}{2}) \frac{dC}{dt} - \frac{1}{12} \frac{l^2}{R} \frac{d^2C}{dt^2} + \frac{1}{48} \frac{l^3}{R^2} \frac{d^3C}{dt^3} - \frac{1}{180} \frac{l^4}{R^3} \frac{d^4C}{dt^4} + \&c, \quad (18)$$

である。

この式の右辺の第 1 項、 RC はオームの法則にしたがって抵抗に打ち勝つために要する駆電力を表示する。

第 2 項、 $l(A + \frac{1}{2}) \frac{dC}{dt}$ 、は、導線の断面の各点で電流は一様強度であるとの仮定のもとで、回路の電気運動の運動量を増加させるために使われたはずの駆電力を表示する。

他の項はこの値への補正を表示し、導体の軸からいろいろな距離で電流が一様強度でない事実から生じる。現実の電流の系は、電流が断面全体のわたって一様な強度を持つように制約されている仮定の系よりも、大きな自由度を持つ。したがって電流の強さの急速な変化を生成するために要する駆電力はこの仮定のもとで要する駆電力よりもいくぶん小さい。

駆電力の時間積分と電流の時間積分のあいだの関係は

$$\int E dt = R \int C dt + l(A + \frac{1}{2})C - \frac{1}{12} \frac{l^2}{R} \frac{dC}{dt} + \&c, \quad (19)$$

である。

始めの時間以前の電流が一定値 C_0 を持ち、ある時間のあいだに電流が値 C_1 の上昇し、そのあとその値で一定に維持されるなら、 C の微分係数を含む

項は両極限で零になり、

$$\int Edt = R \int Cdt + l(A + \frac{1}{2})(C_1 - C_0), \quad (20)$$

であるが、これは電流が導線全体で一様であったときの駆電力の力積と同じ値である^{註2}。

^{註2} {もし導線をとおる電流が周期的で $e^{i\omega t}$ のように変化するなら、(18) に対応する式は μ がもはや 1 と仮定できないとき

$$E = (R + \frac{1}{12} \frac{\mu^2 l^2 p^2}{R} - \frac{1}{180} \frac{\mu^4 l^4 p^4}{R^3} + \dots)C \\ + \{(lA + \mu \frac{l}{2}) - \frac{1}{48} \frac{\mu^3 l^3 p^2}{R^2} + \dots\} \frac{dC}{dt},$$

と書くことができる。

こうして系はあたかも抵抗が

$$R + \frac{1}{12} \frac{\mu^2 l^2 p^2}{R} - \frac{1}{180} \frac{\mu^4 l^4 p^4}{R^3} + \dots,$$

であり、自己誘導が

$$lA + \mu \frac{l}{2} - \frac{1}{48} \frac{\mu^3 l^3 p^2}{R^2} \dots,$$

であるかのように振る舞う。

こうして、有効抵抗は、電流が振動的で、自己誘導が減少するとき、増加する。マクスウェルが指摘したように、この効果は電流の分布が変わることによる。電流が変わると、電流はもはや導体の断面に等しく分布せず、中央から去り、導体の表面に向かって集まる傾向がある。そうすることにより自己誘導、それゆえ、運動エネルギーを減少させるからである。系の慣性は、力学的一般則にしたがって、電流を分散させようとし、任意の断面を横切る全流が与えられているとの条件を満たしながら、運動エネルギーは可能なかぎり小さくなる。そして、この傾向は、系の運動量が反転される速さが増加すればするほど、より強力になる。685 節、式 {22} を検討すると、系の自己誘導は、それゆえ、与えられた電流に対する運動エネルギーは、導線の内部よりも表面近くで電流が密にすると減少することが示される。これは管をとおる電流の場合に対応し、式 {22} は管にたいする自己誘導は同じ半径の中まで固い導線よりも小さいからである。管の側面への電流の割合は電流がとおる断面を小さくしてしまうので、定常流とくらべて抵抗が増加することは容易に理解できる。この問題は非常に重要なので、さらなる結果を、いくつか、ここで与える。その証明は付録の巻で与えよう。レイリーの Phil. Mag. XXI, p. 381 も参照せよ。

電流と駆電力のあいだの関係は式

$$\frac{E}{l} = -\frac{C\rho}{2\pi a^2} \frac{ina J_0(ina)}{J'_0(ina)} + A \frac{dC}{dt}, \quad (1)$$

p. 324

で表示される。ここで $n^2 = 4\pi\mu ip/\rho$ であり、 J_0 は 0 次のベッセル関数である。
この関数がみたす微分方程式によって

$$\frac{J_0''(x)}{J_0'(a)} + \frac{1}{x} + \frac{J_0'(x)}{J_0'(x)} = 0,$$

であるから、

$$\begin{aligned} x \frac{J_0(a)}{J_0'(a)} &= -1 - x \frac{d}{dx} \log J_0'(x) \\ &= -2 + 2x^2 S_2 + 2x^4 S_4 + 2x^6 S_6 + \dots, \end{aligned}$$

がなりたつ。ここで $S_2, S_4, S_6 \dots$ は式

$$\frac{J_0'(x)}{x} = 0,$$

つまり

$$1 - \frac{x^2}{2.4} + \frac{x^4}{2.4.4.6} - \frac{x^6}{2.4.6.4.6.8} + \dots = 0,$$

の根の 2 次、4 次、6 次、… の幕の逆数の和である。

したがって、ニュートン法により

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}, \\ S_4 &= \frac{1}{4^2} \times \frac{1}{12}, \\ S_6 &= \frac{1}{4^3} \times \frac{1}{48}, \\ S_8 &= \frac{1}{4^4} \times \frac{1}{180}, \\ S_{10} &= \frac{1}{4^5} \times \frac{13}{8640}, \\ &\dots, \end{aligned}$$

である。

したがって式 (1) で $\frac{ina}{J_0'(ina)}$ にこの値を代入し、

$$\begin{aligned} \frac{E}{l} &= \frac{C\rho}{\pi a^2} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi \mu p a^2}{\rho} \right)^2 - \frac{1}{180} \left(\frac{\pi \mu p a^2}{\rho} \right)^4 + \dots \right\} \\ &+ iCp \left\{ A + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{48} \frac{\pi^2 \mu^3 p^2 a^4}{\rho^2} + \frac{13}{8640} \frac{\pi^4 \mu^5 p^4 a^8}{\rho^4} - \dots \right\}, \end{aligned}$$

を得るが、それは(18)と $\mu=1$ のとき、一致する。この級数は na が大きいとき便利ではないが、その場合は $J'_0(ina) = -iJ_0(ina)$ である；ハイネ、超幾何関数、p. 248, 2nd Edition。したがって、振動の割合が急激なとき、 $\frac{\mu pa^2}{\rho}$ は大きな量であり、

$$\frac{E}{l} = \frac{C\rho}{2\pi a}n + AipC;$$

であり、

$$n^2 = 4\frac{\pi\mu ip}{\rho},$$

だから

$$\frac{E}{l} = \sqrt{\frac{\rho p \mu}{2\pi a^2}} C + ipC(A + \sqrt{\frac{\rho \mu}{2\pi a^2 p}}),$$

である。

こうして、単位長さあたりの抵抗は

$$\left\{ \frac{\rho p \mu}{2\pi a^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

であり、 p が増えるにつれ、無限に増加する。

単位長さあたりの自己誘導は

$$A + \sqrt{\frac{\rho \mu}{2\pi a^2 p}},$$

であり、 p が無限大のとき、極限 A に近付く。

導線内の点での磁力は

$$\frac{2C}{a} \frac{J'_0(inr)}{J'_0(ina)},$$

であることを示すことができる。

na が大きいとき、

$$J'_0(ina) = -i \frac{e^{na}}{\sqrt{\pi 2na}},$$

である。したがって、もし $r = a - z$ なら、導線の表面から距離 x での磁力は

$$\frac{2C}{\sqrt{a(a-x)}} e^{-nx},$$

である。

こうして、もし n が非常に大きいと、磁力は、それゆえ、電流の強度は、表面から遠ざかるにつれて急激に減少し、したがって導線の内部は磁力や電流がない。 n に $\mu^{\frac{1}{2}}$ がでてくるので、これらの効果は非磁性金属で作られた導線よりも鉄の導線により明らかになる。}

2つの平面図形の幾何学的平均距離について。^{註3}

691.] 与えられた任意の形の断面をもつ直線導体を流れる電流の平行な導体中の電流への電磁作用の計算では、平行な導体の断面の形も与えられているとき、積分

$$\iiint \log r dx dy dx' dy',$$

を見つけなければならない。ここで $dx dy$ は第 1 の断面の面積要素で、 $dx' dy'$ は第 2 断面の要素であり、 r はこれらの要素間の距離で、積分はまず第 1 断面の各要素にわたり、つぎに第 2 の各要素にわたる。

p. 325
p. 326

A_1, A_2 を 2 つの断面の面積として、もしこの積分が

$$A_1 A_2 \log R,$$

に等しくなるように線分 R を決めるなら、 R の長さはどのような長さの単位を採用しようと、また、どのような対数の底を使おうと同じである。もし断面が同じ大きさの要素に分割されたと考えると、 R の対数かける要素の組の数は、要素のすべての組の距離の対数の和に等しい。ここで、 R は要素の組のあいだのすべての距離の幾何平均を考えることができる。 R の値は r の最大値と最小値の中間でなければならないことはあきらかである。

もし R_A, R_B が第 3 図形、 C 、から 2 つの図形 A, B への幾何平均距離で、もし R_{A+B} が C から 2 図形の和への幾何平均距離なら、

$$(A + B) \log R_{A+B} = A \log R_A + B \log R_B,$$

である。

この関係によって、図の部分にたいする R を知っているとき、複合した図形に対する R を決めることができる。

692.]

例^{註4}

(1) R を点 O から線分 AB への平均距離とする。 OP を AB へ下ろした垂線とすると、

$$\overline{AB}(\log R + 1) = AP \log OA + PB \log OB + \widehat{OPAOB},$$

註3 Trans. R. S. Edin., 1871-2.

註4 { これらの例では対数はすべて自然対数である。 }

である。

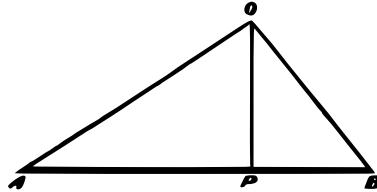


図: 41.

(2) 端点を結ぶ長さ c の線分に垂直に、その線分の同じ側に描かれた長さ a, b の 2 つの線分(図 42)にたいして、

$$\begin{aligned} ab(2 \log R + 3) = & (c^2 - (a-b)^2) \log \sqrt{c^2 + (a-b)^2} + c^2 \log c \\ & + (a^2 - c^2) \log \sqrt{a^2 + c^2} + (b^2 - c^2) \log \sqrt{b^2 + c^2} \\ & - c(a-b) \tan^{-1} \frac{a-b}{c} + ac \tan^{-1} \frac{a}{c} + bc \tan^{-1} \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

である。

p. 327

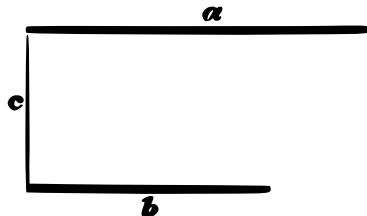


図: 42.

(3) 延長腺が O で交わる 2 線分 PQ と RS (図 43) に対して

$$\begin{aligned} PQ.RS(2 \log R + 3) = & \log PR(2OP. OR \sin^2 O - PR^2 \cos O) \\ & + \log QS(2OQ. OS \sin^2 O - QS^2 \cos O) \\ & - \log PS(2OP. OS \sin^2 O - PS^2 \cos O) \\ & - \log QR(2OQ. OR \sin^2 O - QR^2 \cos O) \\ & - \sin O \{OP^2 \widehat{SPR} - OQ^2 \widehat{SQR} + OR^2 \widehat{PRQ} - OS^2 \widehat{PSQ}\}, \end{aligned}$$

である。

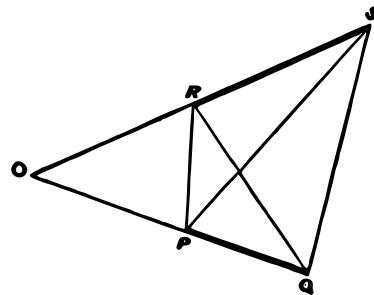


図: 43

(4) 点 O と長方形 $ABCD$ (図 44) にたいして、 OP, OQ, OR, OS を辺にたいする垂線とするとき

$$\begin{aligned} AB \cdot AD (2 \log R + 3) &= 2 \cdot OP \cdot OQ \log OA + 2 \cdot OQ \cdot OR \log OB \\ &\quad + 2 \cdot OR \cdot OS \log OC + 2 \cdot OS \cdot OP \log OD \\ &\quad + OP^2 \widehat{DOA} + OQ^2 \widehat{AOB} \\ &\quad + OR^2 \widehat{BOC} + OS^2 \widehat{COD}, \end{aligned}$$

である。

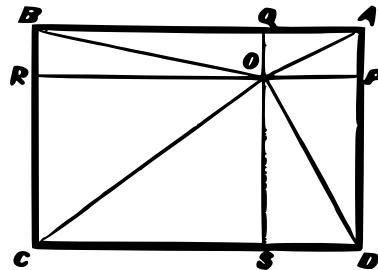


図: 44.

(5) かならずしも、2つの図形が異なる図形である必要はない。同じ図形上の点の各組のあいだの距離の幾何平均をみつけることができるからである。

こうして、長さ a の直線にたいして、

$$\begin{aligned}\log R &= \log a - \frac{3}{2}, \\ \text{つまり } R &= ae^{-\frac{3}{2}}, \\ R &= 0.22313a,\end{aligned}$$

である。

p. 328

(6) 辺の長さが a, b の長方形の面にたいして

$$\begin{aligned}\log R &= \log \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{1}{6} \frac{a^2}{b^2} \log \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2} \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \\ &\quad + \frac{2}{3} \frac{a}{b} \tan^{-1} \frac{b}{a} + \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{a}{b} - \frac{2}{1} \frac{5}{2},\end{aligned}$$

である。辺の長さが a の正方形にたいして

$$\begin{aligned}\log R &= \log a + \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{2}{1} \frac{5}{2}, \\ R &= 0.44705a,\end{aligned}$$

である。

(7) 円周からある点への幾何平均距離は、円の中心からの距離と、円の半径の 2 つの量の大きい方である。

(8) したがって 2 つの共心円を境界とするリングからの任意の図形への幾何平均距離は、もしその図形が完全にリングの外にあるなら、中心からその図形の幾何平均距離に等しいが、完全にリングの中にあるなら、

$$\log R = \frac{a_1^2 \log a_1 - a_2^2 \log a_2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{1}{2},$$

である。ここで a_1, a_2 はリングの外径および内径である。この場合の R はリング内の図形の形から独立である。

リング内の点のすべての組の幾何平均距離は方程式

$$\log R = \log a_1 - \frac{a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \log \frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{4} \frac{3a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 - a_2^2},$$

から分る。

半径 a の円形の面にたいして、これは

$$\begin{aligned}\log R &= \log a - \frac{1}{4}, \\ \text{つまり } R &= ae^{-\frac{1}{4}}, \\ R &= 0.7788a,\end{aligned}$$

である。

円周にたいして

$$R = a$$

となる。 { 半軸 a, b の楕円面にたいして

$$\log R = \log \frac{a+b}{2} - \frac{1}{4},$$

である。 }

693.] 曲率半径が横断面の大きさと較べて大きい、一様断面のコイルの自己誘導係数を計算するとき、既に記述した方法によって断面の点の各組みの距離の幾何平均をまず決め、つぎにこの幾何平均距離離れて置かれた、与えられた形の 2 つの直線導体のあいだの相互誘導係数を計算する。

コイル中の全電流が 1 で、断面のすべての点で電流が一様なとき、これは自己誘導係数である。

しかし、コイルに n 巻きあるとき、すでに得られている係数に n^2 かけなければならず、こうして伝導導線の巻きがコイルの全断面を満たしていると仮定して自己誘導係数を得る。

しかし導線は円柱的で絶縁物質で被覆されており、したがって電流は断面全体に一様に分布する代わりに、断面のある部分に集中し、これが自己誘導係数を増加させる。これに加えて、隣接する導線中の電流は一様に分布する電流とは与えられた導線中の電流への同じ作用は持ち得ない。

これらの考察から生じる補正是幾何平均距離の方法により決めることができる。その補正是コイルの全導線の長さに比例し、数値として表示でき、自

己誘導の係数の補正を得るために、導線の長さにその数値をかけなければならぬ。

導線の直径を d とする。導線は絶縁物質で覆われ、巻かれてコイルになっている。導線の断面は、図 45 のように、正方形にきちんと並んでおり、それぞれの導線の軸のあいだの距離、隣との距離は D であり、それはコイルの幅や奥行きの方向によらないと考えよう。 D はあきらかに d よりも大きい。

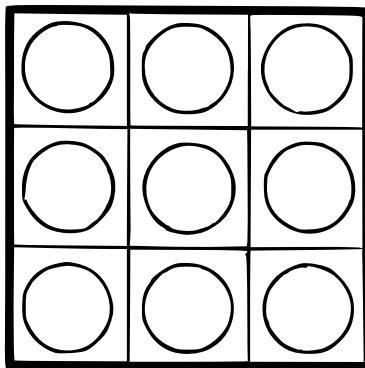


図: 45.

まず直径 d の円柱導線の単位長さの自己誘導の、一辺 D の正方導線の単位長さの誘導にたいする過剰分、つまり

p. 330

$$\begin{aligned} & 2 \log \frac{\text{正方形にたいする } R}{\text{円にたいする } R} \\ &= 2 \left(\log \frac{D}{d} + \frac{4}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{11}{6} \right) \\ &= 2 \left(\log \frac{D}{d} + 0.1380606 \right), \end{aligned}$$

を決めなければならない。

いま考察している最近接の 8 つの丸断面導線の誘導作用は対応する最近接 8 正方断面導線の誘導作用よりも、中央で、 $2 \times (.01971)$ 倍小さい^{註 5}。

おおきな距離での導線にたいする補正是無視でき、全補正是

$$2 \left(\log_e \frac{D}{d} + 0.11835 \right).$$

と書くことができる。

したがって自己誘導の最終的な値は

$$L = n^2 M + 2l \left(\log_e \frac{D}{d} + 0.11835 \right),$$

である。ここで n は巻き数であり、 l は導線の長さ、 M は互いに距離 R に置かれた平均的な導線の形の 2 回路の相互誘導である。ただし、 R は断面の点の組みの間の幾何平均距離である。 D は平行した導線のあいだの距離であり、 d は導線の直径である。

註 5 { この結果を得るために、一周する導線の平均距離がその中心のあいだの距離であることに注意せよ。横に並べて置かれた 2 つの正方形導線にたいする平均距離は $.99401D$ 、2 つの正方形にたいする角から角への平均距離は $1.0011 \times \sqrt{2}D$ である。マクスウェル、*Trans. B. S. Edinburgh*, p. 783, 1871-72 参照。クリー氏はこの補正を計算しなおしてくれ、マクスウェルの数値をそのまま取ると、 $2 \times .019671$ ではなく $2 \times .019685$ であることを見つけた。この仕事は次のようである。

8 正方導線にたいして

$$8 \log_{10} R_1 = 4 \log_{10} (.99401D) + 4 \log_{10} (1.0011\sqrt{2}D).$$

8 丸導線にたいして

$$8 \log_{10} R_1 = 4 \log_{10} D + 4 \log_{10} \sqrt{2}D;$$

したがって

$$8 \log_{10} \frac{R_1}{R} = .0085272;$$

そして

$$8 \log_e \frac{R_1}{R} = .019685.$$

これは全補正を

$$2 \left\{ \log_e \frac{D}{d} + 0.118425 \right\}.$$

とする。

しかしこの補正の計算で、マクスウェルは平均距離にたいして彼の論文で与えているよりも大きな桁数で正しい数値を使った可能性がある。

}

第 XIV 章

円形電流。

円形電流による磁気ポテンシャル。

694.] 単位の電流を運ぶ回路による与えられた点での磁気ポテンシャルは与えられた点で回路によって張られる立体角に数値的に等しい。409, 485 節参照。回路が円形のとき、立体角は 2 次式で表される錐の立体角であり、与えられた点が円の軸上にあるとき、錐は直円錐となる。点が軸上にないとき、錐は橢円錐であり、その立体角は半径 1 の球面上に描かれた橜円の面積に数値的に等しい。

この面積は第 3 種橜円積分を使って有限項で表示できる。球面調和関数の無限級数の形でこの面積を展開することがより便利であることがわかる。そのような級数の一般項に使うことのできる数学演算の利器は実用的な正確さを確保するために十分な数の項を計算する困難を埋めあわせるからである。

一般性のため、原点は円の軸上の任意の点、つまり、円の面に垂直な中心をとおる直線上の点に仮定する。

O (図 46) を円の中心、 C を軸上の点で、その点を原点と仮定する。 H を円上の点とする。

C を中心、 CH を半径とする球を描く。

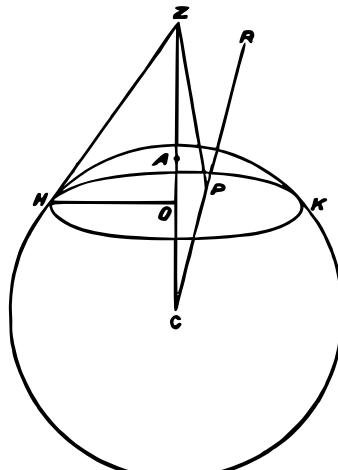


図: 46

p. 332

円はこの球上にあり、角半径 α の球の小円を形成する。

$$\begin{aligned} CH &= c, \\ OC &= b = c \cos \alpha, \\ OH &= a = c \sin \alpha, \end{aligned}$$

とする。A を球の極、Z を軸上の任意の点、そして CZ = c とする。

R を空間中の任意の点とし、CR = r, ACR = θ とする。

P を CR が球を切る点とする。

円形電流による磁気ポテンシャルは電流を境界とする強さ 1 の板磁石による磁気ポテンシャルに等しい。板の面の形は、板が円を境界とするかぎり、差がないので、それは球の面に一致すると考えてよい。

670 節で、もし V が小円内の球面に拡がる面密度 1 の物質の層によるポテンシャルなら、強さが 1 で同じ円を境界とする板磁石によるポテンシャル ω は

$$\omega = -\frac{1}{c} \frac{d}{dr}(rV),$$

であることを示している。

それゆえ、まず、V を見つけなければならない。

与えられた点が円の軸上の Z にあるとすると、P での球面の要素 dS による Z でのポテンシャルの部分は

$$\frac{dS}{ZP},$$

である。

これは球面調和関数の 2 つの級数の一方で展開され、

$$\frac{dS}{c} \left\{ P_0 + P_1 \frac{z}{c} + \&c. + P_i \frac{z^i}{c^i} + \&c. \right\}$$

または

$$\frac{dS}{z} \left\{ P_0 + P_1 \frac{c}{z} + \&c. + P_i \frac{c^i}{z^i} + \&c. \right\}$$

となる。最初の級数は z が c より小さいとき収束し、第 2 の級数は z が c より大きいとき収束する。

$$dS = -c^2 d\mu d\phi,$$

と書き、 ϕ にかんして 0 から 2π の間で、 μ にかんして積分限界 $\cos \alpha$ と 1 の間で積分すると、

$$V = 2\pi c \left\{ \int_{\cos \alpha}^1 P_0 d\mu + \&c. + \frac{z^i}{c^i} \int_{\cos \alpha}^1 P_i d\mu + \&c. \right\} \quad (1)$$

つまり

$$V = 2\pi \frac{c^2}{z} \left\{ \int_{\cos \alpha}^1 P_0 d\mu + \&c. + \frac{c^i}{z^i} \int_{\cos \alpha}^1 P_i d\mu + \&c. \right\} \quad (1')$$

であることが分かる。

p. 333

P_i の特性方程式により、

$$i(i+1)P_i + \frac{d}{d\mu} [(1-\mu^2) \frac{dP_i}{d\mu}] = 0,$$

したがって

$$\int_{\mu}^1 P_i d\mu = \frac{1-\mu^2}{i(i+1)} \frac{dP_i}{d\mu}, \quad (2)$$

である。

この式は $i=0$ のとき成り立たないが、 $P_0 = 1$ であるから

$$\int_{\mu}^1 P_0 d\mu = 1 - \mu, \quad (3)$$

である。

関数 $\frac{dP_i}{d\mu}$ がこの研究のあらゆる部分で出てくるので、それを省略記法で記号 P'_i で表記する。 i のいくつかの値に対応する P'_i の値は 698 節で与えられている。

軸上にあるなしにかかわらず、任意の点 R にたいする V の値を、 z に r を代入し、それぞれの項に同じ次数の θ の帯域調和関数をかけることによって書き下すことができる。 V は適当な係数をもつ θ の帯域調和関数の級数に展開できなければならないからである。 $\theta = 0$ のとき、帯域調和関数のそれぞ

れば 1 に等しくなり、点 R は軸上にある。したがって係数は軸上の点にたいする V の展開項である。こうして 2 つの級数

$$V = 2\pi c \{1 - \cos \alpha + \&c. + \frac{\sin^2 \alpha}{i(i+1)} \frac{r^i}{c^i} P'_i(\alpha) P_i(\theta) + \&c.\}, \quad (4)$$

または

$$V' = 2\pi \frac{c^2}{r} \{1 - \cos \alpha + \&c. + \frac{\sin^2 \alpha}{i(i+1)} \frac{c^i}{r^i} P'_i(\alpha) P_i(\theta) + \&c.\}, \quad (4')$$

を得る。

695.] 方程式

$$\omega = -\frac{1}{c} \frac{d}{dr} (Vr). \quad (5)$$

から、670 節の方法によって、回路の磁気ポテンシャル ω を見出すことができる。

こうして 2 つの級数

$$\omega = -2\pi \{1 - \cos \alpha + \&c. + \frac{\sin^2 \alpha}{i} \frac{r^i}{c^i} P'_i(\alpha) P_i(\theta) + \&c.\}, \quad (6)$$

または

$$\omega' = 2\pi \sin^2 \alpha \left\{ \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} P'_1(\alpha) P_1(\theta) + \&c. + \frac{1}{i+1} \frac{c^{i+1}}{r^{i+1}} P'_i(\alpha) P_i(\theta) + \&c. \right\}, \quad (6')$$

を得る。

級数 (6) は r の c より小さいすべての値にたいして収束し、(6') は r の c より大きいすべての値にたいして収束する。球面では $r = c$ であるが、2 つの級数は θ が α より大きいとき、つまり、板磁石によって占められていないとき、同じ値を与えるが、 θ が α より小さいとき板磁石上の点で

$$\omega' = \omega + 4\pi, \quad (7)$$

を与える。

もし円の中心 O を座標原点と仮定すると、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ と置かねばならず、級数は

$$\omega = -2\pi \left\{ 1 + \frac{r}{c} P_1(\theta) + \&c. + (-)^s \frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{2 \cdot 4 \dots 2s} \frac{r^{2s+1}}{c^{2s+1}} P_{2s+1}(\theta) + \&c. \right\}, \quad (8)$$

$$\omega = +2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} P_1(\theta) + \&c. + (-)^s \frac{1.3 \dots (2s+1)}{2.4 \dots (2s+2)} \frac{c^{2s+2}}{r^{2s+2}} P_{2s+1}(\theta) + \&c. \right\}, \quad (8')$$

となる。ここで調和関数の次数はすべて奇数である^{註1}。

2円形電流のポテンシャルエネルギー。

696.] 電流に等価な 2 つの板磁石が 2 つの共心球の一部であると考えることから始める。その半径は c_1, c_2 で c_1 がより大きいとする。(図 47)

また 2 つの板の軸は一致するとし、 α_1 は第 1 の板の半径によって張られる角、 α_2 が中心 C で第 2 の板の半径が張るとする。

ω_1 を板磁石の中の任意の点で第 1 の板によるポテンシャルとすると、第 2 の板を無限の距離に運ぶために要する仕事は第 2 の板にわたって拡がる面積分

$$M = - \iint \frac{d\omega_1}{dr} dS$$

の値である。したがって

p. 335

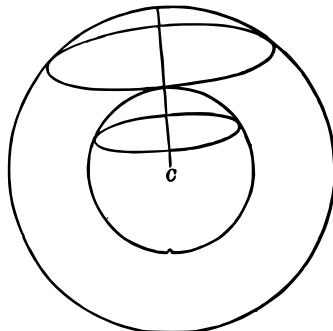


図: 47

$$M = \int_{\mu_2}^1 \frac{d\omega_1}{dr} 2\pi c_2^2 d\mu_2,$$

^{註1} 円によって張られる立体角の値はより直接的に次のように得られる:—
軸内の点 Z で円によって張られる立体角は

$$\omega = 2\pi \left(1 - \frac{z - \cos \alpha}{HZ} \right).$$

であることがたやすく示される。

この式を球面調和関数で展開すると、それぞれ z が c より小さいときと、大きいときの、軸上の点に対する ω の展開として、

$$\omega_1 = 2\pi \left\{ (\cos \alpha + 1) + (P_1(\alpha) \cos \alpha - P_0(\alpha)) \frac{z}{c} + \&c. + (P_i(\alpha) \cos \alpha - P_{i-l}(\alpha)) \frac{z^i}{c^i} + \&c. \right\},$$

$$\omega' = 2\pi \left\{ (P_0(\alpha) \cos \alpha - P_1(\alpha)) \frac{c}{z} + \&c. + (P_i(\alpha) \cos \alpha - P_{i+l}(\alpha)) \frac{c^{i+1}}{z^{i+1}} + \&c. \right\},$$

であることが分かる。この結果が本文中の結果と一致することは簡単に示される。

$$= 4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 c_2^2 \left\{ \frac{1}{c_1} P'_1(\alpha_1) \int_{\mu_2}^1 P_1(\theta) d\mu_2 + \&c. + \frac{c_2^{i-1}}{c^i} P'_i(\alpha_1) \int_{\mu_2}^1 P_i(\theta) d\mu_2 + \&c. \right\},$$

または、694 節、(2) 式から積分の値を代入して

$$M = 4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 c_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P'_1(\alpha_1) P'_1(\alpha_2) + \&c. + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P'_i(\alpha_1) P'_i(\alpha_2) + \&c. \right\}^{\text{註 } 2}$$

である。

697.] つぎに、一方の板の軸が C を中心として、そのまわりに回され、他方の板の軸と角度 θ をなす(図 48)と考えよう。この式に M にたいする θ の帯域調和関数を導入するだけによく、 M のより一般の値として

$$M = 4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 c_2^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P'_1(\alpha_1) P'_1(\alpha_2) P_1(\theta) + \&c. + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P'_i(\alpha_1) P'_i(\alpha_2) P_i(\theta) \right\}^{\text{註 } 3}$$

であることが分かる。

これは単位の強さの 2 つの円形電流の相互作用によるポテンシャルエネルギーの値であり、電流は円の中心をとおる法線が点 C で角度 θ で交わり、点 C から円周への距離が c_1 、 c_2 となるように置かれている。ただし、 c_1 の方が大きい。

もし任意の変位 dx が M の値を変えるなら、変位の方向に働く力は

$$X = \frac{dM}{dx},$$

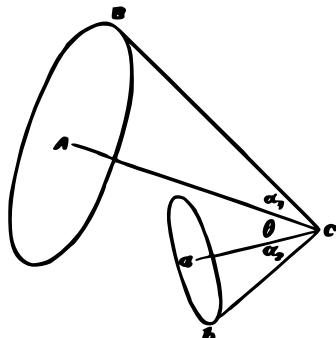


図: 48

註 2 { これは帯域調和関数 $P_i(\theta)$ を表示することにより簡単に証明できる。調和関数は式 (6) の ω_1 にたいする式に、 Ca を軸として、帯域および方域調和関数に和として現れ、公式

$$M = \int_{\mu_2}^1 \frac{d\omega_1}{dr} 2\pi c_2^2 d\mu_2,$$

を使う。

}

である。

たとえば、もし一方の板の軸が点 C のまわりに自由に回転し、 θ を変化させるなら、 θ を増加させようとする力のモーメントは Θ である。ここで

$$\Theta = \frac{dM}{d\theta},$$

である。

p. 336

微分を行い、

$$\frac{dP_i(\theta)}{d\theta} = -\sin \theta P'_i(\theta),$$

を思い出すと、

$$\begin{aligned} \Theta = -4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 \sin \theta c_2 & \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P'_1(\alpha_1) P'_1(\alpha_2) P'_i(\theta) + \&c. \right. \\ & \left. + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P'_i(\alpha_1) P'_1(\alpha_2) P'_i(\theta) \right\}. \end{aligned}$$

である。ただし、 P'_i はこれまでの式と同じ意味を持つ。

698.] P'_i の値がしばしばこれらの計算にててくるので、以下の最初の 6 次の値の表が役に立つであろう。この表で、 μ は $\cos \theta$ 、 ν は $\sin \theta$ を表す。

$$P'_1 = 1,$$

$$P'_2 = 3\mu,$$

$$P'_3 = \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1) = 6(\mu^2 - \frac{1}{4}\nu^2),$$

$$P'_4 = \frac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3) = 10\mu(\mu^2 - \frac{3}{4}\nu^2),$$

$$P'_5 = \frac{15}{8}(21\mu^4 - 14\mu^2 + 1) = 15(\mu^4 - \frac{3}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{1}{8}\nu^4),$$

$$P'_6 = \frac{21}{8}\mu(33\mu^4 - 30\mu^2 + 5) = 21\mu(\mu^4 - \frac{5}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{5}{8}\nu^4).$$

699.] 以下のように、 M を線分の量を使って級数表示すると便利なことがある。

a を小円の半径、 b を原点からその面への距離、そして $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ とする。 A, B, C を大円にたいする対応する量とする。

M にたいする級数は

$$\begin{aligned} M = & 1 \cdot 2 \cdot \pi^2 \frac{A^2}{C^3} a^2 \cos \theta \\ & + 2 \cdot 3 \cdot \pi^2 \frac{A^2 B}{C^5} a^2 b (\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta) \\ & + 3 \cdot 4 \cdot \pi^2 \frac{A^2 (B^2 - \frac{1}{4} A^2)}{C^7} a^2 (b^2 - \frac{1}{4} a^2) (\cos^3 \theta - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \cos \theta) \\ & + \&c. \end{aligned}$$

と書ける。

もし $\theta = 0$ とすると、2つの円は平行で同軸になる。それらの間の引力を決めるためには、 M を b にかんして微分すればよい。こうして

$$\frac{dM}{db} = \pi^2 \frac{A^2 a^2}{C^4} \{2 \cdot 3 \frac{B}{C} + 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{B^2 - \frac{1}{4} A^2}{C^3} b + \&c.\}$$

p. 337

がわかる。

700.] 矩形断面のコイルの効果を計算するとき、すでに見出されている式をコイルの半径、 A 、および原点から平面への距離、 B 、にかんして積分し、積分をコイルの幅と厚さに広げなければならない。

直接積分がより便利な場合もあるが、以下の近似法がより便利な結果に導く場合もある。

P を x, y の任意の関数とし、 \bar{P} の値を見出すことが必要であるとしよう。ここで

$$\bar{P} xy = \int_{-\frac{1}{2}x}^{+\frac{1}{2}x} \int_{-\frac{1}{2}y}^{+\frac{1}{2}y} P dx dy.$$

である。

この式で \bar{P} は積分区間内の P の平均値である。

P_0 を $x = 0, y = 0$ のときの P の値とすると、 P をテイラーの定理によつて展開すると

$$P = P_0 + x \frac{dP_0}{dx} + y \frac{dP_0}{dy} + \frac{1}{2} x^2 \frac{d^2 P_0}{dx^2} + \&c,$$

である。

この式を積分限界の間で積分し、結果を xy で割ると、 \bar{P} の値として

$$\begin{aligned}\bar{P} = P_0 + \frac{1}{24}(x^2 \frac{d^2 P_0}{dx^2} + y^2 \frac{d^2 P_0}{dy^2}) \\ + \frac{1}{1920}(x^4 \frac{d^4 P_0}{dx^4} + y^4 \frac{d^4 P_0}{dy^4}) + \frac{1}{576}x^2y^2 \frac{d^4 P_0}{dx^2 dy^2} + \&c,\end{aligned}$$

を得る。

コイルの場合、内径および外径を、それぞれ、 $A + \frac{1}{2}\xi$, $A - \frac{1}{2}\xi$ とし、巻き面の原点からの距離は $B + \frac{1}{2}\eta$ と $B - \frac{1}{2}\eta$ のあいだにあるとすると、コイルの幅 η , 深さ ξ であり、それらの量は A, C とくらべて小さい。

そのようなコイルの磁気効果を計算するために、695 節の級数 (6), (6') の一連の項を次のように書くことができる:—

$$\begin{aligned}G_0 &= \pi \frac{B}{C} \left(1 + \frac{1}{24} \frac{2A^2 - B^2}{C^4} \xi^2 - \frac{1}{8} \frac{A^2}{C^4} \eta^2 + \dots \right), \\ G_1 &= 2\pi \frac{A^2}{C^3} \left\{ 1 + \frac{1}{24} \left(\frac{2}{A^2} - 15 \frac{B^2}{C^4} \right) \xi^2 + \frac{1}{8} \frac{4B^2 - A^2}{C^4} \eta + \dots \right\}, \\ G_2 &= 3\pi \frac{A^2 B}{C^5} \left\{ 1 + \frac{1}{24} \left(\frac{2}{A^2} - \frac{25}{C^2} + \frac{35A^2}{C^4} \right) \xi^2 + \frac{5}{24} \frac{4B^2 - 3A^2}{C^4} \eta^2 + \dots \right\}, \\ G_3 &= 4\pi \frac{A^2 (B^2 - \frac{1}{4}A^2)}{C^7} + \frac{\pi}{24} \frac{\xi^2}{C^{11}} \left\{ C^4 (8B^2 - 12A^2) + 35A^2 B^2 (5A^2 - 4B^2) \right\} \\ &\quad + \frac{5}{8} \frac{\pi \eta^2}{C^{11}} A^2 \{ A^4 - 12A^2 B^2 + 8B^4 \}, \\ &\&c., \&c.;\end{aligned}$$

p. 338

$$\begin{aligned}g_1 &= \pi a^2 &+ \frac{1}{12} \pi \xi^2, \\ g_2 &= 2\pi a^2 b &+ \frac{1}{6} \pi b \xi^2, \\ g_3 &= 3\pi a^2 \left(b^2 - \frac{1}{4}a^2 \right) + \frac{\pi}{8} \xi^2 (2b^2 - 3a^2) + \frac{\pi}{4} \eta^2 a^2, \\ &\&c., \&c.\end{aligned}$$

量 $G_0, G_1, G_2, \&c.$ は大きいコイルに属す。 r が C よりも小さい点で ω の値は

$$\omega = -2\pi + 2G_0 - G_1 r P_1(\theta) - G_2 r^2 P_2(\theta) - \&c,$$

である。

量 $g_1, g_2, \&c.$ は小さいコイルに属す。 r が c よりも大きい点での ω の値は

$$\omega' = g_1 \frac{1}{r^2} P_1(\theta) + g_2 \frac{1}{r^3} P_2(\theta) + \&c,$$

である。

それぞれのコイルの断面をとおる全電流が 1 であるとき、一方のコイルの他方に対するポテンシャルは

$$M = G_1 g_1 P_1(\theta) + G_2 g_2 P_2(\theta) + \&c,$$

である。

橿円積分によって M を見出す。

701.] 2 円の円周のあいだの距離が小さいほうの円の半径と較べてあまり小さくないとき、すでに与えた級数は急速には収束しない。しかし、どのような場合でも 2 つの平行な円にたいして M の値を橿円積分によって見出すことができる。

b を円の中心を結ぶ線の長さとし、この線は 2 円の面に垂直とし、 A と a を円の半径とすると、

$$M = \iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds',$$

である。積分は両曲線一周にわたる。

この場合、

$$r^2 = A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa \cos(\phi - \phi'),$$

$$\epsilon = \phi - \phi', \quad ds = ad\phi, \quad ds' = Ad\phi',$$

p. 339

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Aa \cos(\phi - \phi') d\phi d\phi'}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa \cos(\phi - \phi')}} \\ &= -4\pi\sqrt{Aa} \left\{ \left(c - \frac{2}{c} \right) F + \frac{2}{c} E \right\}, \end{aligned}$$

である。ここで

$$c = \frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + b^2}},$$

であり、 F と E は母数 c の完全橿円積分である。

これから、

$$\frac{dF}{dc} = \frac{1}{c(1-c^2)} \{E - (1-c^2)F\}, \quad \frac{dE}{dc} = \frac{1}{c}(E-F),$$

であること、 c は b の関数であることを思い出すと、

$$\frac{dM}{db} = \frac{\pi}{\sqrt{Aa}} \frac{bc}{1-c^2} \{(2-c^2)E - 2(1-c^2)F\},$$

であることが分かる。

もし r_1 と r_2 が r の最大、最小値を表記するなら

$$r_1^2 = (A+a)^2 + b^2, \quad r_2^2 = (A-a)^2 + b^2,$$

であり、もし角 γ が $\cos \gamma = \frac{r_2}{r_1}$ となるように取られたなら、

$$\frac{dM}{db} = -\pi \frac{b \sin \gamma}{\sqrt{Aa}} \{2F_\gamma - (1 + \sec^2 \gamma)E_\gamma\},$$

である。ここで F_γ と E_γ は母数が $\sin \gamma$ の第 1 種および第 2 種の完全橿円積分である。

もし $A = a$ なら $\cot \gamma = \frac{b}{2a}$ であり、

$$\frac{dM}{db} = -2\pi \cos \gamma \{2F_\gamma - (1 + \sec^2 \gamma)E_\gamma\},$$

である。

量 $-\frac{dM}{db}$ はそれぞれの電流が 1 である 2 つの平行円回路のあいだの引力を表す。

電磁気の計算での量 M の重要性のため、 $\log(M/4\pi\sqrt{Aa})$ の値は c の関数で、したがって γ のみの関数であるが、その値が角 γ の値が 60 度と 90 度のあいだで 6' ごとに作表されている。表はこの章の付録に見出される。

p. 340

M にたいする第 2 式。

しばしばより便利な M の式が $c_1 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$ とすることにより得られる。
この場合

$$\text{註}^4 M = 8\pi\sqrt{Aa} \frac{1}{\sqrt{c_1}} \{F(c_1) - E(c_1)\},$$

である。

円形電流にたいする磁力線を描く。

702.] 磁力線はあきらかに円の軸をとおる平面上にあり、これらの線のそれぞれで M の値は定数である。

十分な数の θ の値にたいしてルジャンドルの表から $K_\theta = \frac{\sin \theta}{(F_{\sin \theta} - E_{\sin \theta})^2}$ の値を計算する。

紙面に直交軸 x, z を描く。{ 原点は円の中心、 z 軸は円の軸である。 } $x = \frac{1}{2}a(\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta)$ を中心に半径 $\frac{1}{2}a(\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta)$ の円を描く。この円のすべての点で c_1 の値は $\sin \theta$ となる。したがって、この円上のすべての点で

$$M = 8\pi\sqrt{Aa} \frac{1}{\sqrt{K_\theta}}, \quad A = \frac{1}{64\pi^2} \frac{M^2 K_\theta}{a}$$

である。

さて、 A は M の値が見出された x の値である。したがって、もし $x = A$ である直線を描くと、その直線は M の与えられた値を持つ 2 点で円を切る。

M に等差数列の値を与えると、 A の値は 2 乗の数列となる。それゆえ、 x が A にたいして見出された値を持つ z に平行な直線列を描くと、これらの直線が円を切る点は対応する力線が円を切る点である。

註 4 [M にたいする第 2 式は第 1 式から楕円積分のつぎの変換によって導かれる：—
もし

$$\sqrt{1 - c^2} = \frac{1 - c_1}{1 + c_2}, \quad \text{つまり} \quad c = \frac{2\sqrt{c_1}}{1 + c_1}.$$

なら、

$$\begin{aligned} F(c) &= (1 + c_1)F(c_1), \\ E(c) &= \frac{2}{1 + c_1}E(c_1) - (1 - c_1)F(c_1), \end{aligned}$$

である。]

もし $m = 8\pi a$, $M = nm$ と置くと、

$$A = x = n^2 K_\theta a,$$

である。 n を力線の指数と呼ぶことができる。

これらの線の形は巻末の図 XVIII で与えられている。これらは W. トムソン卿の論文「渦運動」に与えられている図からコピーされたものである^{註5}。

703.] もし与えられた軸を持つ円の位置が軸上の固定点からの中心の距離 b と円の半径 a によって定義されているとみなすと、磁石または電流の任意の系にかんする円の誘導係数 M は次の方程式

$$\frac{d^2 M}{da^2} + \frac{d^2 M}{db^2} - \frac{1}{a} \frac{dM}{da} = 0, \quad (1)$$

にしたがう。

これを証明するために、 a または b が変化させられたとき、円によって切られた磁力線の数を考えよう。

(1) a が $a + \delta a$ となり、 b が一定に維持されるとする。この変化のあいだ、円は、膨らみながら、自分自身の平面のなかで、幅 δa の輪状の面を掃いて行く。

もし V が任意の点での磁気ポテンシャルで、 y 軸が円の軸と平行なら、リング面に垂直な磁力は $-\frac{dV}{dy}$ である。

輪状面をとおる磁気誘導を見出すためには積分

$$-\int_0^{2\pi} a \delta a \frac{dV}{dy} d\theta,$$

を行わなければならない。ここで θ はリング上の点の角位置である。

しかし、この量は a の変化による M の変化、つまり $\frac{dM}{da} \delta a$ を表現している。したがって

$$\frac{dM}{da} = - \int_0^{2\pi} a \frac{dV}{dy} d\theta, \quad (2)$$

である。

^{註5} Trans. R. S. Edin., vol. xxv. p. 217 (1869).

(2) b が $b + \delta b$ となり、 a が一定に維持されるとする。この変化のあいだ、円は半径 a で長さ δb の円柱面を掃く。{ この面を通る力線は円を通らなくなつた力線である。 }

任意の点でこの面に垂直な磁力は $-\frac{dV}{dr}$ である。ここで r は軸からの距離である。したがつて

$$\frac{dM}{db} = \int_0^{2\pi} a \frac{dV}{dr} d\theta, \quad (3)$$

p. 342

である。

式 (2) を a にかんして、(3) を b にかんして微分すると、

$$\frac{dM^2}{da^2} = - \int_0^{2\pi} \frac{dV}{dy} d\theta - \int_0^{2\pi} a \frac{d^2V}{dr dy} d\theta, \quad (4)$$

$$\frac{d^2M}{db^2} = \int_0^{2\pi} a \frac{d^2V}{dr dy} d\theta. \quad (5)$$

したがつて

$$\begin{aligned} \frac{d^2M}{da^2} + \frac{d^2M}{db^2} &= - \int_0^{2\pi} \frac{dV}{dy} d\theta, \\ &= \frac{1}{a} \frac{dM}{da}, \quad (2) \text{ によって} \end{aligned} \quad (6)$$

である。

最後の項を移項して、式 (1) を得る。

弧のあいだの距離がどちらの円の半径とくらべても小さいときの 2 平行円の誘導係数。

704.] この場合の M の値は母数が 1 に近いときすでに与えられた橿円積分の展開から導くことができたであろう。しかし、以下の方法は電気の原理のより直接的な応用である。

第1近似。

a と $a+c$ を円の半径。 b をそれらの面のあいだの距離とする。その周のあいだの最短距離は

$$r = \sqrt{c^2 + b^2},$$

で与えられる。

他方の円の単位の電流による一方の円をとおる磁気誘導を見出さなければならない。

2円が一つの平面内にあると考えることから始めよう。半径が $a+c$ の円の小要素 δs を考える。 δs の方向と角 θ をなす方向に測って、 δs の中心からの距離 ρ である円の面のなかの点で δs による磁力は面に垂直で、

$$\frac{1}{\rho^2} \sin \theta \delta s,$$

に等しい。

半径 a の円内にある空間にわたるこの力の面積分を計算するために積分の値

$$2\delta s \int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\sin \theta}{\rho} d\theta d\rho,$$

を見出さなければならない。ここで、 r_1, r_2 は方程式

p. 343

$$r_1^2 - 2(a+c) \sin \theta r + c^2 + 2ac = 0,$$

の解、すなわち

$$r_1 = (a+c) \sin \theta + \sqrt{(a+c)^2 \sin^2 \theta - c^2 - 2ac},$$

$$r_2 = (a+c) \sin \theta - \sqrt{(a+c)^2 \sin^2 \theta - c^2 - 2ac},$$

そして

$$\sin^2 \theta_1 = \frac{c^2 + 2ac}{(c+a)^2},$$

である。

a と較べて c が小さいとき、

$$\begin{aligned} r_1 &= 2a \sin \theta, \\ r_2 &= c / \sin \theta, \end{aligned}$$

と置く。 ρ にかんして積分すると

$$\begin{aligned} 2\delta s \int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{2a}{c} \sin^2 \theta\right) \cdot \sin \theta d\theta &= \\ 2\delta s \left[\cos \theta \left\{ 2 - \log\left(\frac{2a}{c} \sin^2 \theta\right) \right\} + 2 \log \tan \frac{\theta}{2} \right]_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} &= \\ 2\delta s \left(\log_e \frac{8a}{c} - 2 \right), \text{ 近似的に} & \end{aligned}$$

である。

こうして全誘導

$$M_{ac} = 4\pi a \left(\log_e \frac{8a}{c} - 2 \right).$$

がわかる。

曲がった導線からの距離が曲率半径と較べて小さい任意の点での磁力は、もし導線が直線であったときの磁力とほとんど同じであるから、半径が $a - c$ である円と円 A をとおる誘導のあいだの差は公式

$$M_{aA} - M_{ac} = 4\pi a \{ \log_e c - \log_e r \},$$

によって計算できる (684 節)。

したがって A と a のあいだの誘導の値は、もし円のあいだの最短距離 r が a と較べて小さいとすると、近似的に、

$$M_{Aa} = 4\pi a \left(\log_e 8a - \log_e r - 2 \right)$$

であることがわかる。

705.] 同じコイルの 2 巻きのあいだの相互誘導は実験結果の計算で非常に重要な量であるから、この場合の M の値の近似を任意の必要な精度まで行う方法を記述しよう。

M の値が

$$M = 4\pi \left\{ A \log_e \frac{8a}{r} + B \right\},$$

の形であると仮定する。ここで

$$\begin{aligned} A &= a + A_1 x + A_2 \frac{x^2}{a} + A'_2 \frac{y^2}{a} + A_3 \frac{x^3}{a^2} + A'_3 \frac{xy^2}{a^2} + \&c. \\ &+ a^{-(n-1)} \left\{ x^n A_n + x^{n-2} y^2 A'_n + x^{n-4} y^4 A''_n + \dots \right\} + \&c., \end{aligned}$$

そして

$$B = -2a + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{a} + B'_2 \frac{y^2}{a} + B_3 \frac{x^3}{a^2} + B'_2 \frac{xy^2}{a^2} + \&c.,$$

である。ここで a と $a+x$ は円の半径であり、 y はその面のあいだの距離である。

係数 A と B の値を決めなければならない。 y の偶数幕のみがこの量のなかで出現しうる。もし y の符号を極にするなら M の値は同じままでなければならないからである。

誘導係数の相反性から他の組の条件をえる。それはどちらの回路を 1 次回路と考えても同じままである。 M の値はそれゆえ上の式で a を $a+x$ で置き換え、 x を $-x$ としても同じでなければならない。

x と y の相似の組合せの係数を等しいと置くことによって以下の相反条件がわかる。

$$A_1 = 1 - A_1, \quad B_1 = 1 - 2 - B_1,$$

$$A_3 = -A_2 - A_3, \quad B_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} A_1 + A_2 - B_2 - B_3,$$

$$A'_3 = -A'_2 - A'_3, \quad B'_3 = -A'_2 - B'_2 - B'_3;$$

$$(-)^n A_n = A_2 + (n-2) A_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} A_4 + \&c. + A_n,$$

$$\begin{aligned} (-)^n B_n &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} A_1 - \frac{1}{n-2} A_2 + \&c. + (-)^n A_n \\ &+ B_2 + (n-2) B_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} B_4 + \&c. + B_n. \end{aligned}$$

M の一般式、703 節、

$$\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{d^2M}{dy^2} - \frac{1}{a+x} \frac{dM}{dx} = 0,$$

から、その他の条件の組

$$\begin{aligned} 2A_2 + 2A'_2 &= A_1, \\ 2A_2 + 2A'_2 + 6A_3 + 2A'_3 &= 2A_2; \\ n(n-1)A_n + (n+1)n.A_{n+1} + 1 \cdot 2A'_n + 1 \cdot 2A'_{n+1} &= nA_n, \\ \text{註 } 6 \quad (n-1)(n-2)A'_n + n(n-1)A'_{n+1} + 2 \cdot 3A''_n + 2 \cdot 3.A''_{n+1} \\ &= (n-2)A'_n, \&c.; \\ 4A_2 + A_1 &= 2B_2 + 2B'_2 - B_1 = 4.A'_2, \\ 6A_3 + 3A_2 &= 2B'_2 + 6B_3 + 2B'_3 = 6A'_3 + 3A'_2, \end{aligned}$$

p. 345

$$\begin{aligned} (2n-1)A_n + (2n+2)A_{n+1} &= (2n-1)A'_n + (2n+2)A'_{n+1} \\ &= n(n-2)B_n + (n+1)nB_{n+1} + 1 \cdot 2B'_n + 1 \cdot 2B'_{n+1}, \end{aligned}$$

を得る。

この式を解き、係数の値を代入すると、 M の級数は

$$\begin{aligned} \text{註 } 7 \quad M &= 4\pi a \log \frac{8a}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{x^2 + 3y^3}{16a^2} - \frac{x^3 + 3xy^2}{32a^3} + \&c. \right\} \\ &\quad + 4\pi a \left\{ -2 - \frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{3x^2 - y^2}{16a^2} - \frac{x^3 - 6xy^2}{48a^3} + \&c. \right\}, \end{aligned}$$

となる。

註 6 { クリー氏はこの式が

$$(n-2)(n-3)A'_n + (n-1)(n-2)A'_{n+1} + 3 \cdot 4A''_n + 3 \cdot 4A''_{n+1} = (n-2)A'_n$$

であることを見つけている。}.

註 7 [この結果は 704 節で示唆されている方法、すなわち、701 節で見出された M の式で橢円積分の展開を行うことにより、直接に得ることができる。ケイレイの橢円関数、76 節を見よ。]

導線の全長と太さが与えられているとき、自己誘導係数が最大となるコイルの形を見つける。

706.] 705 節の補正をのぞいて、693 節で

$$L = 4\pi n^2 a \left(\log \frac{8a}{R} - 2 \right),$$

であることが分っている。ここで n は導線の巻き数、 a はコイルの平均半径、 R はコイルの溝の横断面のそれ自身からの幾何平均距離である。もしこの断面がつねにそれ自身に相似なら、 R はその 1 次元的な大きさに比例し、 n は R^2 のように変化する。

導線の全長は $2\pi an$ だから、 a は n に逆比例する。したがって、

$$\frac{dn}{n} = 2 \frac{dR}{R}, \quad \frac{da}{a} = -2 \frac{dR}{R},$$

であり、 L が最大である条件は

$$\log \frac{8a}{R} = \frac{7}{2}$$

であることが分る。

もしコイルの溝の横断面が半径 c の円なら、692 節によって、

$$\log \frac{R}{c} = -\frac{1}{4},$$

そして

$$\log \frac{8a}{c} = \frac{13}{4},$$

したがって

$$a = 3.22c;$$

である。つまり。コイルが最大自己誘導係数を持つためにはコイルの平均半径はコイルの溝の横断面の半径の 3.22 倍のはずである。この結果はガウスにより見出された^{註 8}。

コイルが巻かれている溝が正方形横断面を持つなら、コイルの平均直径は溝の正方断面の辺の 3.7 倍のはずである。

^{註 8} *Werke*, Gottingen edition, 1867, bd. v. p. 622.

XIV 章の付録 I。

$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$ の値の表 (701 節).

対数の底は 10 である。

p. 347

		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$
60°	0'	1.4994783	63°	30' 1.5963782	67°	0. 1.6927081
	6'	1.5022651		36' 1.5991329		6' 1.6954642
	12'	1.5050505		42' 1.6018871		12' 1.6982209
	18'	1.5078345		48' 1.6046408		18' 1.7009782
	24'	1.5106173		54' 1.6073942		24' 1.7037362
	30'	1.5133989		64° 0' 1.6101472		30' 1.7064949
	36'	1.5161791		6' 1.6128998		36' 1.7092544
	42'	1.5189582		12' 1.6156522		42' 1.7120146
	48'	1.5217361		18' 1.6184042		48' 1.7147756
	54'	1.5245128		24' 1.6211560		54' 1.7175375
61°	0'	1.5272883		30' 1.6239076	68°	0' 1.7203003
	6'	1.5300628		36' 1.6266589		6' 1.7230640
	12'	1.5328361		42' 1.6294101		12' 1.7258286
	18'	1.5356084		48' 1.6321612		18' 1.7285942
	24'	1.5383796		54' 1.6349121		24' 1.7313609
	30'	1.5411498		65° 0' 1.6376629		30' 1.7341287
	36'	1.5439190		6' 1.6404137		36' 1.7368975
	42'	1.5466872		12' 1.6431645		42' 1.7396675
	48'	1.5494545		18' 1.6459153		48' 1.7424387
	54'	1.5522209		24' 1.6486660		54' 1.7452111
62°	0'	1.5549864		30' 1.6514169	69°	0' 1.7479848
	6'	1.5577510		36' 1.6541678		6' 1.7507597
	12'	1.5605147		42' 1.6569189		12' 1.7535361
	18'	1.5632776		48' 1.6596701		18' 1.7563138
	24'	1.5660398		54' 1.6624215		24' 1.7590929
	30'	1.5688011		66° 0' 1.6651732		30' 1.7618735
	36'	1.5715618		6' 1.6679250		36' 1.7646556
	42'	1.5743217		12' 1.6706772		42' 1.7674392
	48'	1.5770809		18' 1.6734296		48' 1.7702245
	54'	1.5798394		24' 1.6761824		54' 1.7730114
63°	0'	1.5825973		30' 1.6789356	70°	0' 1.7758000
	6'	1.5853546		36' 1.6816891		6' 1.7785903
	12'	1.5881113		42' 1.6844431		12' 1.7813823
	18'	1.5908675		48' 1.6871976		18' 1.7841762
	24'	1.5936231		54' 1.6899526		24' 1.7869720

		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		
70°	30'	1.7897696	75°	0'	1.9185141	79°	30'	.0576136
	36'	1.7925692		6'	1.9214613		36'	.0609037
	42'	1.7953709		12'	1.9244135		42'	.0642054
	48'	1.7981745		18'	1.9273707		48'	.0675187
	54'	1.8009803		24'	1.9303330		54'	.0708441
	0'	1.8037882		30'	1.9333005		80°	0'
	6'	1.8065983		36'	1.9362733		6'	.0775316
	12'	1.8094107		42'	1.9392515		12'	.0808944
	18'	1.8122253		48'	1.9422352		18'	.0842702
	24'	1.8150423		54'	1.9452246		24'	.0876592
71°	30'	1.8178617	76°	0'	1.9482196	81°	30'	.0910619
	36'	1.8206836		6'	1.9512205		36'	.0944784
	42'	1.8235080		12'	1.9542272		42'	.0979091
	48'	1.8263349		18'	1.9572400		48'	.1013542
	54'	1.8291645		24'	1.9602590		54'	.1048142
	0'	1.8319967		30'	1.9632841		0'	.1082893
	6'	1.8348316		36'	1.9663157		6'	.1117799
	12'	1.8376693		42'	1.9693537		12'	.1152863
	18'	1.8405099		48'	1.9723983		18'	.1188089
	24'	1.8433534		54'	1.9754497		24'	.1223481
72°	30'	1.8461998	77°	0'	1.9785079	82°	30'	.1259043
	36'	1.8490493		6'	1.9815731		36'	.1294778
	42'	1.8519018		12'	1.9846454		42'	.1330691
	48'	1.8547575		18'	1.9877249		48'	.1366786
	54'	1.8576164		24'	1.9908118		54'	.1403067
	0'	1.8604785		30'	1.9939062		0'	.1439539
	6'	1.8633440		36'	1.9970082		6'	.1476207
	12'	1.8662129		42'	.0001181		12'	.1513075
	18'	1.8690852		48'	.0032359		18'	.1550149
	24'	1.8719611		54'	.0063618		24'	.1587434
73°	30'	1.8748406	78°	0'	.0094959	83°	30'	.1624935
	36'	1.8777237		6'	.0126385		36'	.1662658
	42'	1.8806106		12'	.0157896		42'	.1700609
	48'	1.8835013		18'	.0189494		48'	.1738794
	54'	1.8863958		24'	.0221181		54'	.1777219
	0'	1.8892943		30'	.0252959		0'	.1815890
	6'	1.8921969		36'	.0284830		6'	.1854815
	12'	1.8951036		42'	.0316794		12'	.1894001
	18'	1.8980144		48'	.0348855		18'	.1933455
	24'	1.9009295		54'	.0381014		24'	.1973184
74°	30'	1.9038489	79°	0'	.0413273	83°	30'	.2013197
	36'	1.9067728		6'	.0445633		36'	.2053502
	42'	1.9097012		12'	.0478098		42'	.2094108
	48'	1.9126341		18'	.0510668		48'	.2135026
	54'	1.9155717		24'	.0543347		54'	.2176259

p. 350

		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$			$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		
84°	0'	.2217823	86°	0'	.3139097	88°	0'
	6'	.2259728		6'	.3191092		6'
	12'	.2301983		12'	.3243843		12'
	18'	.2344600		18'	.3297387		18'
	24'	.2387591		24'	.3351762		24'
	30'	.2430970		30'	.3407012		30'
	36'	.2474748		36'	.3463184		36'
	42'	.2518940		42'	.3520327		42'
	48'	.2563561		48'	.3578495		48'
	54'	.2608626		54'	.3637749		54'
	0'	.2654152	87°	0'	.3698153	89°	0'
	6'	.2700156		61	.3759777		6'
	12'	.2746655		12'	.3822700		12'
	18'	.2793670		18'	.3887006		18'
	24'	.2841221		24'	.3952792		24'
	30'	.2889329		30'	.4020162		30'
	36'	.2938018		36'	.4089234		36'
	42'	.2987312		42'	.4160138		42'
	48'	.3037238		48'	.4233022		48'
	54'	.3087823		54'	.4308053		54'

XIV 章の付録 II。

2つの円形共軸コイルという非常に重要な場合に、レイリー卿は前述の表の使用にあたって非常に便利な近似公式を示唆した。任意個の変数に適用できる公式はメリーフィールド氏の求積と内挿にかんする英國協会への報告、1880に出ており、故 H. J. パーキス氏に帰されている。今の例では変数の数は 4 である。

n, n' をコイルの巻数、

a, a' を中心の巻きの半径、

b を中心館の距離、

$2h, 2h'$ をコイルの半径の幅、

$2k, 2k'$ を軸幅

とする。また $f(a, a', b)$ を中心の巻きにたいする相互誘導係数とする。そのとき、2つのコイルの相互誘導係数は

$$\frac{1}{6}nn' \left\{ \begin{array}{l} f(a + h, a', b) + f(a - h, a', b) \\ + f(a, a' + h', b) + f(a, a' - h', b) \\ + f(a, a', b + k) + f(a, a', b - k) \\ + f(a, a', b + k') + f(a, a', b - k') \\ - 2f(a, a', b) \end{array} \right.$$

である。]

XIV 章の付録-Ill。

方形断面の円形コイルの自己誘導。

もし a が軸幅が b , 動径幅が c の n 卷のコイルの平均半径とすると、705 節の級数によって計算された自己誘導はワインスタイン ウィード、Ann. xxi 329 に

$$L = 4\pi n^2(a\lambda + \mu).$$

であることが示されている。ここで b/c のかわりに x と書くと

$$\begin{aligned} \lambda &= \log \frac{8a}{c} + \frac{1}{12} - \frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + \frac{1}{12x^2} \log(1 + x^2) \\ &\quad + \frac{1}{12} x^2 \log(1 + \frac{1}{x^2}) + \frac{2}{3} (x - \frac{1}{x}) \tan^{-1} x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{c^2}{96a} \left[(\log \frac{8a}{c} - \frac{1}{2} \log(1 + x^2))(1 + 3x^2) + 3.45x^2 + \frac{221}{60} - 1.6\pi x^2 + \right. \\ &\quad \left. 3.2x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{10} \frac{1}{x^2} \log(1 + x^2) + \frac{1}{2} x^4 \log(1 + \frac{1}{x^2}) \right]. \end{aligned}$$

である。

}

第 XV 章

電磁測定機器。

検流器

707.] 検流器は磁気の作用によって電流の存在を示し、測るための機器である。機器が弱い電流の存在を示すことを意図しているとき、それは高感度検流器と呼ばれる。

標準単位をつかって最大限の正確さで電流を測ることを意図しているとき、それは標準検流器と呼ばれる。

検流器はすべてシュヴァイガー (Johan Schweigger, 1779–1857) の倍増原理に基づいている。そこでは、電流は導線を通して流れ、導線はコイルにされ、開いた空間の周りを何度も通り、その空間の中に磁石が吊るされ、この空間の中で電磁力が生成され、電磁力の強度が磁石によって指示される。

高感度検流器では、コイルはその巻き線が磁石への効果が最大になる位置を占めるように配置される。それゆえ、コイルは磁石に近くなるように、互いに密に詰め込まれる。

標準検流器はすべての固定部品の大きさと相対位置が正確に知られるよう、そして可動部品の位置の僅かな不確かさが計算に最小限の誤差しか導入しないように、組み立てられる。

高感度検流器を組み立てるとき、磁石が吊下げられる電磁力の場を可能な限り強くすることを目指す。標準検流器を設計するとき、磁石の近くの磁力の場を可能な限り一様にし、電流の強さを使ったその厳密な強度を知ることをのぞむ。

標準検流器。

708.] 標準検流器では電流の強さは懸架磁石に働く力から決められなければならない。磁石のなかの磁気の分布や、吊下げられたときの磁石の中心はそれほどの精度で決めるることはできない。したがってコイルをうまく配置して磁石が可能な運動をしているあいだ磁石によって占められる全空間にわたってほとんど一様な力の場を生成する必要がある。それゆえ、一般に、コイルの大きさは磁石の大きさよりはるかに大きくなければならない。

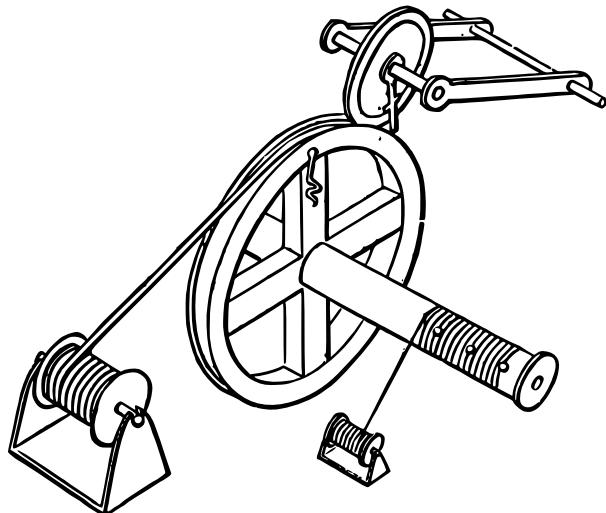


図 49.

いくつかのコイルを適切に配置することによってコイル中の力の場はただ一つのコイルが使われているときよりも、よりいっそう、一様にすることができる、機器の大きさを減少させ、その感度を増加させることができる。しかし、距離の測定の誤差は大きな装置よりも小さな装置にたいして電気定数の値に大きな不確定性を導入する。それゆえ、小さな機器の電気定数を、機器の大きさの直接測定ではなく、大きさが正確に知られている大きな標準機器との電気的な比較によって決めることが最良である。

標準検流器では、すべて、コイルは円である。コイルが巻かれる溝輪は注意深く回される。コイルの幅は被覆導線の直径の n 倍に等しくしている。溝

の横に穴が穿かれそこから導線が入る。被覆導線の一方の終端がこの穴から押し出され、コイルの内部結線が形成される。溝輪は旋盤上に置かれ、木の軸が旋盤に固定される。図 49 参照。長い糸の端が円周の導線の入口と同じ部分に鉛留めされる。つぎに全体が回転させられ、導線は滑らかに規則正しく、 n 巻きで完全に覆われるまで、溝の底に敷かれる。この過程のあいだ、糸は木の軸のまわりを n 回巻きつき、 n 回転目に鉛が糸に打ち込まれる。糸の巻きつきは露出し続けられ、簡単に数えることができる。巻きの第 1 層の外部円周が測定され、新しい層が始まり、適切な数の層が巻かれるまで続く。もしなんらかの理由によって、コイルの一部を巻き戻さなければならないから、糸も巻き戻され、コイルの実際の巻数の勘定を失うことはない。鉛はそれぞれの層の巻数を区別するために役立つ。

それぞれの周の円周の測定は巻きの規則性の検証を与え、コイルの電気定数の計算を可能にする。もし溝と外層の円周の算術平均をとるなら、これにすべての中間層の円周を加え、層の数で割ると、平均円周を得、これからコイルの平均半径を導くことができる。それぞれの層の円周は鉄の巻尺、またはより良くは、巻く過程でコイルが回るのにともなって、コイル上を転がる目盛付の車によって測ることができる。巻尺や車の目盛の値は直線定規との比較によって確かめなければならない。

709.] コイル中の単位の電流が吊下げられた装置に作用する力のモーメントは級数

$$G_1 g_1 \sin \theta + G_2 g_2 \sin \theta P'_2(\theta) + \&c.,$$

によって表示できる。ここで係数 G はコイルに、係数 g は吊下げられた装置にかんするものであり、 θ はコイルの軸と吊下げられた装置の軸のあいだの角度である。

p. 354

吊下げられた装置が長さ $2l$ で単位の強さの細い一様に縦方向に磁化された棒磁石で、中央で吊下げられているとき、

$$g_1 = 2l, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 2l^3, \&c.$$

である。

任意の他の方法で磁化された長さ $2l$ の棒磁石に対する係数値は一様に磁化されたときよりも小さい。

710.] 装置が正接検流器として使われるなら、コイルはコイル面を鉛直にして地球の磁気の方向に平行に固定される。この場合、磁石の平衡の式は

$$mg_1 H \cos \theta = m\gamma \sin \theta \{G_1 g_1 + G_2 g_2 P'_2(\theta) + \&c.\},$$

である。ここで mg_1 は磁石の磁気モーメント、 H は地磁気力の水平成分、 γ はコイル中の電流の強さである、磁石の長さがコイルの半径と較べて小さいとき、 G と g の最初の項以降の項は無視でき、

$$\gamma = \frac{H}{G_1} \cot \theta,$$

であることが分かる。

角度は通常磁石の振れ、 δ によって測られ、それは θ の余角であり、 $\cot \theta = \tan \delta$ である。こうして電流は振れの正接に比例し、それゆえ、この機器は正接検流器と呼ばれる。

もう一つの方法は鉛直軸まわりに全装置を可動にし、磁石の軸をコイル面に平行にして磁石が平行になるまで回すことである。もしコイル面と磁気子午線のあいだの角が δ なら、平衡の式は

$$mg_1 H \sin \delta = m\gamma \{G_1 g_1 - \frac{3}{2} G_3 g_3 + \&c.\},$$

であり、したがって

$$\gamma = \frac{H}{(G_1 - \&c.)} \sin \delta,$$

である。

電流が振れの正弦で測られるので、このように使われたとき、機器は正弦検電器と呼ばれる。正弦法は電流が定常で、機器が調整され磁石が平衡になるまでのあいだ、定数であるとみなすことができるときのみ、適用できる。

711.] つぎに標準検流器のコイルの配置を考えなければならない。

もっとも単純な形はそのなかに 1 つのコイルがあり、磁石は中心で吊下げられている。

A をコイルの平均半径とし、 ξ を深さ、 η を幅、 n を巻数とすると、係数値は

$$G_1 = \frac{2\pi n}{A} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \frac{\xi^2}{A^2} - \frac{1}{8} \frac{\eta^2}{A^2} \right\},$$

$$G_2 = 0,$$

$$G_3 = -\frac{\pi n}{A^3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{A^2} - \frac{5}{8} \frac{\eta^2}{A^2} \right\},$$

$$G_4 = 0, \&c,$$

である。主補正は G_3 から生じる補正である。級数

$$G_1 g_1 + G_3 g_3 P'_3(\theta),$$

は、近似的に

$$G_1 g_1 \left(1 - 3 \frac{1}{A^2} \frac{g_3}{g_1} (\cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta) \right),$$

となる。

磁石が一様に磁化され、 $\theta = 0$ のとき、結合因子はまったく 1 とは異なる。この場合、それは $1 - 3 \frac{l^2}{A^2}$ となる。それは $\tan \theta = 2$ のとき、つまり振れが $\tan^{-1} \frac{1}{2}$ 、または $26^\circ 34'$ のとき、零になる。それゆえ、観測される振れをできるかぎりこの角度に近付けるように実験を配置する観測者もいる。しかし、最良の方法はコイルの半径と較べて短く、補正がまったく無視できる磁石を使うことである。

吊下げられた磁石は注意深く調整され、磁石の中心はできるかぎり近くコイルの中心に一致する。しかし、もしこの調整が完全ではなく、もしコイルの中心に相対的な磁石の中心の座標が、 z をコイルの軸と平行に測って、 x, y, z なら、補正因子は

$$\left(1 + \frac{3}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{A^2} \right), \text{ 註 } 1$$

である。

コイルの半径が大きく、磁石の調整が注意深くなされたとき、この補正是気づかない程度だと仮定することができる。

p. 356

註 1 { 磁石の軸がコイルの軸と角 θ をなすとき、棒磁石上の偶力は

$$ml[\sin \theta \{G_1 + G_3 \frac{3}{2}(2z^2 - (x^2 + y^2))\} + 3 \cos \theta G_3 z \sqrt{x^2 + y^2}].$$

ゴーガンの配置。

712.] G_3 に依存する補正を取り除くために、ゴーガン (M. J. M. Gaugain) は磁石をコイルの中心ではなく、中心からコイルの半径の半分に等しい距離の軸上の点に磁石を吊ることによって G_3 項を零にする検流器を作った。 G_3 の形は

$$G_3 = 4\pi \frac{A^2(B^2 - \frac{1}{2}A^2)}{C^7},$$

であり、この配置では $B = \frac{1}{2}A$ なので、 $G_3 = 0$ である。

もし吊り下げられた磁石の中心が厳密にこのように定義された点にあることを確実にできるなら、この配置は最初の形にたいする改良であったであろう。しかし、磁石の中心の位置はつねに不確定であり、この不確定さは G_2 に依存した分からない量の $(1 - \frac{6}{5}\frac{z}{A})$ の形の補正因子を導入する。ここで z はコイル面から磁石の中心への距離の分からない超過分である。この補正是 $\frac{z}{A}$ の 1 次幂に依存する。したがって、中心をずらせて吊られた磁石をもつゴーガンのコイルは古い形よりもより大きな不確定性に従う。

ヘルムホルツの配置。

713.] ヘルムホルツはゴーガンの検流器を、第 1 コイルと同じ第 2 コイルを磁石の反対側に同じ距離離して置くことにより、信頼できる機器に変えた。

コイルを磁石の両側に対称的に置くことにより、偶数次の項を一挙に除くことができる。

である。 $G_1 + G_3 \frac{3}{2}(2z^2 - (x^2 + y^2))$ はコイルの軸に平行な x, y, z での力であり、

$$3G_3 z \sqrt{x^2 + y^2}$$

は軸に直角な力だからである。配置が正弦検流器として使われたとき、補正因子は

$$1 + \frac{G_3}{G_1} \frac{3}{2}(2z^2 - (x^2 + y^2))$$

であり、それは $1 - \frac{3}{4} \frac{1}{A^2} \{2z^2 - (x^2 + y^2)\}$ に等しい。}

A を一方のコイルの平均半径とし、その平均平面間の距離を A と等しくし、磁石をコイルの共通軸の中点に吊るす。係数は

$$G_1 = \frac{16\pi n}{5\sqrt{5}} \frac{1}{A} \left(1 - \frac{1}{60} \frac{\xi^2}{A^2}\right),$$

$$G_2 = 0,$$

$$G_3 = 0.0512 \frac{\pi n}{3\sqrt{5}A^5} (31\xi^2 - 36\eta^2),$$

$$G_4 = 0,$$

$$G_5 = -0.73728 \frac{\pi n}{\sqrt{5}A^5},$$

である。ここで n は両方のコイルを合わせた巻数を表記する。

p. 357

これらの結果から、もしコイルの溝の断面が矩形なら、深さを ξ 、幅を η として、 G_3 の値は、断面の有限の大きさの補正を行ったとき、小さくなり、 ξ^2 対 η^2 が 36 対 31 のとき、零になる。

それゆえ、幾人かの機器製作者が行ってきたような、円錐面上でコイルを巻くといった試みはまったく不要である。条件は矩形断面のコイルによって満たすことができ、矩形断面は鈍角円錐上でコイルを巻くよりはるかに正確に製作できるからである。

ヘルムホルツの 2 重検流器のコイル配置は 725 節、図 53 に表示されている。

2 重コイルによる力の場は巻末の図 XIX に断面図が表示されている。

4 コイル検流器。

714.] 4 コイルを組み合わせることにより、係数 G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 を取り除くことができる。4 コイルを同じ球に属する平行な円とし、対応する角度を $\theta, \phi, \pi - \phi, \pi - \theta$ とする。

第 1 および第 4 のコイルの巻数を n とし、第 3 および第 4 の巻数を pn とする。 $G_3 = 0$ となる組み合わせ条件は

$$n \sin^2 \theta P'_3(\theta) + pn \sin^2 \phi P'_3(\phi) = 0, \quad (1)$$

を与え、 $G_5 = 0$ に対する条件は

$$n \sin^2 \theta P'_5(\theta) + pn \sin^2 \phi P'_5(\phi) = 0, \quad (2)$$

を与える。

$$\sin^2 \theta = x, \quad \sin^2 \phi = y, \quad (3)$$

と置き、 P'_3 、 P'_5 (698 節) をこれらの量を使って表示すると、(1)、(2) は

$$4x - 5x^2 + 4py - 5py^2 = 0, \quad (4)$$

$$8x - 28x^2 + 21x^3 + 8py - 28py^2 + 21py^3 = 0, \quad (5)$$

となる。

(5) から (4) の 2 倍を引いて、3 で割ると、

$$6x^2 - 7x^3 + 6py^3 - 7py^3 = 0.$$

を得る。

したがって、(4) と (6) から

$$p = \frac{x}{y} \frac{5x - 4}{4 - 5y} = \frac{x^2}{y^2} \frac{7x - 6}{6 - 7y},$$

であり、

$$y = \frac{4}{7} \frac{7x - 6}{5x - 4}, \quad \frac{1}{p} = \frac{32}{49x} \frac{7x - 6}{(5x - 4)^3},$$

を得る。

x, y は両者とも角度の正弦の平方であり、それゆえ、0 と 1 の間になければならない。したがって、 x が 0 と $\frac{4}{7}$ の間にあるか、この場合、 y は $\frac{6}{7}$ と 1 のあいだにあるが、そうでなければ、 x は $\frac{6}{7}$ と 1 の間にあり、この場合、 y は 0 と $\frac{4}{7}$ にあり、 $1/p$ は 0 と $\frac{3}{4} \frac{2}{9}$ のあいだにある。

3 コイル検流器。

715.] もっとも便利な配置は $x = 1$ となるものである。このとき、コイルの 2 つが一致し、半径が C の大円を形成する。この複合コイルの巻数は 64 である。他の 2 コイルは球の小円を形成する。そのそれぞれの半径は $\sqrt{\frac{4}{7}}C$

である。第 1 の平面からその一方への距離は $\sqrt{\frac{3}{7}}C$ である。これらのコイルのそれぞれの巻数は 49 である。

G_1 の値は $\frac{240\pi}{C}$ である。

このコイル配置は図 50 に表現されている。

この 3 コイル検流器では、 G_1 のあと、有限値を持つ最初の項は G_7 であるから、球面上にコイルが置かれている球の大部分で、ひじょうに一様な力の場を形成する。

もし、672 節で記述されているように、球面全体で導線を巻くことができたなら、完全に一様な力の場を得たはずである。しかし、十分な精度で球面上で巻きを分布させることは、たとえそのようなコイルが閉じた面を形成しており、その内部に入ることができないという異議を却下したとしても、実際上、不可能である。

中央のコイルを回路の外に置き、2 つの側面コイルに反対方向に電流を通せることにより、コイルの軸を磁石やその中に吊るされたコイルの軸と一致させると、その軸方向にほとんど一様な作用を及ぼす力の場を得ることになる。673 節 p. 359 参照。この場合、すべての奇数次の係数が消え、

$$\mu = \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad P'_4 = \frac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3) = 0,$$

だからである。

したがって、コイルの中心近くの磁気ポテンシャルに対する、695 節、式 (6) は、それぞれのコイルに n 巻きあるとすると、

$$\omega = \frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\pi n\left\{-3\frac{r^2}{C^2}P_2(\theta) + \frac{11}{7}\frac{r^6}{C^6}P_6(\theta) + \&c.\right\},$$

である。

外部抵抗が与えられているときの検流器の導線の適切な太さ。

716.] 検流器のコイルが巻かれる溝の形が与えられているとし、溝が長く細い導線で埋められるべきか、短く太い導線で埋められるべきか、決めることが要請されているとする。

l を導線の長さ、 y を導線の半径、 $y + b$ を被覆されたときの導線の半径、 ρ を導線の比抵抗、 g を導線の単位の長さに対する G の値、 r を検流器と独立な抵抗の部分とする。

検流器の導線の抵抗は

$$R = \frac{\rho}{\pi} \frac{l}{y^2},$$

である。

コイルの体積は

$$V = \pi l(y + b)^2,$$

である。

電磁力は γG である。ここで γ は電流の強さであり、

$$G = gl$$

である。

もし E が抵抗が $R + r$ の回路に働く駆電力なら、

$$E = \gamma(R + r),$$

である。

この駆電力による電磁力は

$$E \frac{G}{R + r}$$

であり、それを y と l を変化させることによって最大にしなければならない。

分数を反転して、

$$\frac{\rho}{\pi g} \frac{1}{y^2} + \frac{r}{gl}$$

が最小にされるべきものであることが分かる。したがって

$$2 \frac{\rho}{\pi} \frac{dy}{y^3} + \frac{rdl}{l^2} = 0,$$

である。

もしコイルの体積が一定なら、

$$\frac{dl}{l} + 2 \frac{dy}{y+b} = 0,$$

である。

dl と dy を消去して、

$$\frac{\rho}{\pi} \frac{y+b}{y^3} = \frac{r}{l},$$

つまり

$$\frac{r}{R} = \frac{y+b}{y},$$

を得る。

したがって、検流器の導線の太さは外部抵抗の検流器コイルの抵抗に対する比が被覆された導線の直径の導線それ自身の直径に対する比となるようなものであるべきである。

高感度検流器。

717.] 高感度検流器を製作するとき、各部品の配置目的はコイルの電極間に作用する与えられた小さな駆電力によって可能な限り大きい磁石の振れを作りだすことである。

導線が吊下げられた磁石に可能な限り近くに位置したとき、導線をとおる電流は最大の効果を生成する。しかし、磁石は振動する自由が残されなければならない、それゆえ、コイルのなかに空虚なまま残さなければならない空間がある。これがコイルの内部境界を定義する。

この空間の外側で、それぞれの巻きが磁石に可能な限り最大の効果を持つように置かれなければならない。巻数が増加するにつれて、もっとも有利な位置は埋められてしまい、最後には新しい巻きで増加した抵抗が、以前の巻きのなかの電流の効果が新しい巻きがそれに加えるよりも効果を減少させる。内側の巻きよりもより太い導線の外側の巻きを作ることにより、与えられた駆電力から最大の磁気効果を得る。

718.] 検流器の巻きが円であり、検流器の軸がその面に直角にこの円の中心をとおると考えよう。

$r \sin \theta$ をこれらの円の一つの半径、 $r \cos \theta$ を検流器の中心からその円までの距離とすると、もし l がこの円と一致する導線部分の長さで、 γ がそれを巡る電流なら、検流器の中心での軸の方向に分解された磁力は

$$\gamma l \frac{\sin \theta}{r^2},$$

である。

もし

$$r^2 = x^2 \sin \theta, \quad (1)$$

と書くと、この式は $\gamma \frac{l}{x^2}$ となる。

しかし、もし図 51 に断面が表現された面に相似で、その極方程式が、 x_1 を任意の定数として、

$$r^2 = x_1^2 \sin \theta, \quad (2)$$

である面を構成すると、円弧の形に曲げられた与えられた長さの導線は、導線がこの面のなかにある時、それがその外にある時よりも、より大きな磁気効果を生成する。これから、導線の任意の層の外面は x の一定値を持つはずである。なぜならもし x が導線の他の場所ではなくある場所で大きければ、検流器の中心で力を増すように、始めの場所から第 2 の場所へ輸送されただろうからである。

コイルによる力の全体は γG である。ここで

$$G = \int \frac{dl}{x}, \quad (3)$$

であり、積分は導線の全長にわたって括り、 x は l の関数と考えられている。

719.] y を導線の半径とすると、横断面は πy^2 である。 ρ を導線が作られている物質の単位体積にかんする比抵抗とすると、長さ l の抵抗は $\frac{l\rho}{\pi y^2}$ であ

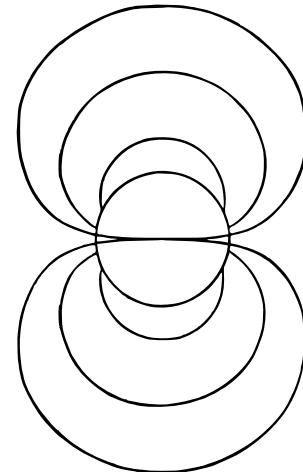


図: 51.

り、コイルの全抵抗は

$$R = \frac{\rho}{\pi} \int \frac{dl}{y^2}, \quad (4)$$

である。ここで y は l の関数と考えられている。

Y^2 をかどが 4 つの隣接する導線の軸の軸をとおる面による断面である四辺形の面積とすると、 $Y^2 l$ は長さ l の導線と絶縁被覆の両方によって占められる体積であり、コイルの巻きのあいだに残された空隙を含んでいる。した p. 362 がってコイルの全体積は

$$V = \int Y^2 dl, \quad (5)$$

である。ここで Y は l の関数と考えられている。

しかし、コイルは回転体であるから

$$V = 2\pi \iint r^2 \sin \theta dr d\theta, \quad (6)$$

または、式(1)によって r を x を使って表示すると

$$V = 2\pi \iint x^2 (\sin \theta)^{\frac{5}{2}} dx d\theta, \quad (7)$$

である。さて $2\pi \int_0^\pi (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta$ は数値量であるから、それを N と呼ぶと、

$$V = \frac{1}{3} N x^3 - V_0, \quad (8)$$

である。ここで V_0 は磁石に残された内部空間の体積である。

面 x と $x + dx$ のあいだに含まれるコイルの層を考えよう。

この層の体積は

$$dV = Nx^2 dx = Y^2 dl, \quad (9)$$

である。ここで dl はこの層の導線の長さである。

これは dx を使った dl を与える。式(3)、(4)でこれを代入すると

$$dG = N \frac{dx}{Y^2}, \quad (10)$$

$$dR = N \frac{\rho}{\pi} \frac{x^2 dx}{Y^2 y^2}, \quad (11)$$

であることが分かる。ここで、 dG と dR は G の値と R の値のコイルのこの層による部分を表現する。

さて、もし E が与えられた駆電力なら、

$$E = \gamma(R + r),$$

である。ここで r は回路の外部部分の抵抗であり、それは検流器とは独立で、中心での力は

$$\gamma G = E \frac{G}{R + r}.$$

である。

それゆえ、それぞれの層の導線の断面を適切に調節することによって、 $\frac{G}{R + r}$ を最大にしなければならない。

p. 363

G_0 と R_0 を、与えられた層が計算から除外されたときの、 G と $R + r$ の値とする。このとき

$$\frac{G}{R + r} = \frac{G_0 + dG}{R_0 + dR}, \quad (12)$$

であり、与えられた層に対する y の値を変えることによって、これを最大にするためには

$$\frac{\frac{d}{dy} \cdot dG}{\frac{d}{dy} \cdot dR} = \frac{G_0 + dG}{R_0 + dR} = \frac{G}{R + r}, \quad (13)$$

でなければならない。

dx は非常に小さく、極限で零になるので、 $\frac{G_0}{R_0}$ はほとんど、極限では厳密に、どの層が排除されても同じになり、それゆえ、それを定数とみなすことができる。それゆえ、(10)、(11) によって

$$\frac{\rho}{\pi} \frac{x^2}{y^2} \left(1 + \frac{Y}{y} \frac{dy}{dY}\right) = \frac{R + r}{G} = \text{定数}, \quad (14)$$

がなりたつ。

もし導線の被覆法や巻き方が、導線の金属によって占められた空間が、導線が太くても細くても、導線間の空間と同じ割合を持つなら、

$$\frac{Y}{y} \frac{dy}{dY} = 1,$$

であり、 y 、 Y ともに x に比例させなければならず、いわば、任意の層の導線の直径はその層の寸法に比例しなければならない。

もし絶縁被覆の厚さが一定で b に等しく、導線が柵目のように配列されているなら、

$$Y = 2(y + b), \quad (15)$$

であり、条件は

$$\frac{x^2(2y + b)}{y^3} = \text{定数}, \quad (16)$$

である。

この場合、導線の直径は、それが作る層の直径とともに増加するが、それほど大きな率ではない。

もしこれら2つの仮定のうち、最初のものを採用すると、それはもし導線自体が全空間をほとんど埋めつくしていれば、その仮定は真だが、このとき

$$y = \alpha x, \quad Y = \beta y,$$

と置くことができる。ここで α 、 β は一定の数値量であり、{(10)、(11)に p. 364 よって}

$$G = N \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} \right),$$

$$R = N \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{\alpha^4 \beta^2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} \right),$$

である。ここで α はコイルの内部に残された自由空間の大きさと形に依存する定数である。

したがって、もし導線の太さを x と同じ割合で変えると、外的な大きさが内部の大きさの大きな倍数となったあと、コイルの外的な大きさを増加しても、ほとんど利点はない。

720.] 外部抵抗が検流器の抵抗よりはるかに大きいときのように、もしくは、唯一の目的が強い力の場を作るときのように、もし抵抗の増加を欠点とみなさないなら、 y 、 Y を一定にすることができる。このとき、

$$G = \frac{N}{Y^2} (x - \alpha),$$

$$R = \frac{1}{3} \frac{N}{Y^2 y^2} \frac{\rho}{\pi} (x^3 - \alpha^3),$$

である。ここで α はコイルの内部の空隙に依存する定数である。この場合、 G の値はコイルの大きさとともに一様に増加し、コイルをつくる労力と費用以外に G の値を制限するものはない。

懸架コイル。

721.] 通常の検流器では、懸架磁石が固定コイルの作用を受ける。しかし、コイルを十分に精巧に吊ることができれば、平衡の位置からの振れによって、懸架コイルに対する磁石の作用や他のコイルの作用を決めることができる。

しかし、電池の電極とコイルの導線の端子のあいだに金属的な結合がないかぎり、電流を導入することができない。この結合は、二本吊りか、逆方向導線という、2 つの異なった方法で作ることができる。

二本吊りはすでに 459 節で磁石への応用として記述されている。懸架の上部の配置は図 54 に示されている。コイルに応用したとき、2 つの糸はもはや絹ではなく金属であり、コイルを支え、電流を伝えることのできる金属導線の捩じりは絹糸の捩じりよりも大きないので、特別に考慮しなければならない。この懸架はウェーバーによって構成された機器で完璧に完成された。

もう一つの吊り方はコイルの一端に繋がれた 1 導線によるものである。コイルの他の端点はもう一つの導線に繋がれ、726 節、図 56 に示されているように、その導線は始めの導線と同じ鉛直線にそって水銀容器まで吊り下げられる。ときに、2 導線がコイルの重心を通ることに注意して、2 導体の先端を 2 導線をしっかりと伸ばす部品に結びつけると

p. 365

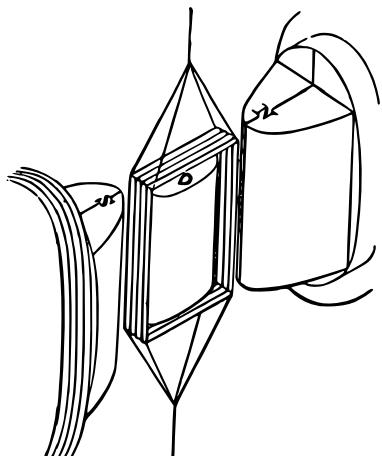


図: 52.

便利である。この形の装置は軸が鉛直でないとき、使うことができる。図 52 参照

722.] 懸架コイルは極めて高感度検流器として用いることができる。コイルが吊られている場の磁力の強度を増加することにより、コイル中の弱い電流による力がコイルの質量を増やすことなく大きく増すからである。このための磁力を永久磁石を使って生成することができ、補助流によって励起された電磁石によって生成することができる。この磁力は軟鉄の継電器によって懸架コイル上に強力に集中される。こうして、W. トムソン卿の記録的な装置、図 52、では、コイルは電磁石の反対の極、 N と S のあいだに吊り下げる、コイルの鉛直側へ磁力線を集中させるために、軟鉄片、 D が磁石の極のあいだに固定される。この鉄は誘導によって磁化され、それと 2 つの磁石のあいだの区間に非常に強力な力の場を生成し、それを通してコイルの鉛直側は自由に動き、したがってコイルは、それを通る電流が非常に微弱であるときでさえ、それを鉛直軸のまわりに回そうとする、かなりの力によって作用を受ける。

p. 366

723.] 懸架コイルのもう一つの応用は正接検流器との比較によって、地磁気の水平成分を決めることである。

コイルはその面が磁気子午面に平行なとき安定な平衡になるように吊られている。電流 γ がコイルを通り、それを新しい平衡位置まで振らせ、磁気子午面と角 θ を作る。もし吊りが二本吊りなら、この振れを引き起こす偶力のモーメントは $F \sin \theta$ で、これは $H\gamma g \cos \theta$ に等しくなければならない。ここで H は地磁気の水平成分であり、 γ はコイル内の電流、 g はコイルのすべての巻きの面積の和である。したがって

$$H\gamma = \frac{F}{g} \tan \theta,$$

である。

もし A がコイルの懸架軸にかんするコイルの慣性モーメントで、 T が振動の半周期なら電流が通っていないとき、

$$FT^2 = \pi^2 A,$$

であり、

$$H\gamma = \frac{\pi^2}{T^2} \frac{A}{g} \tan \theta,$$

をえる。

正接検流器のコイルを同じ電流が通るなら、そして角 ϕ だけ磁石を振るなら、

$$\frac{\gamma}{H} = \frac{1}{G} \tan \phi,$$

である。ここで G は正接検流器、710 節の主定数である。

これら 2 式から

$$H = \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{AG \tan \theta}{g \tan \phi}}, \quad \gamma = \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{A \tan \theta \tan \phi}{Gg}},$$

を得る。この方法は F. コールラウシュによって与えられた^{註 2}。

724.] ウィリアムトムソン卿は一つの機器を組み立て、それによって、 H と γ の決定に要する観測が同じ観測者によって、同時になされた。

コイルはその面を磁気子午面にして平衡状態になるよう吊るされており、コイルを電流が通るときこの位置から振れる。非常に小さな磁石がコイルの中央に吊るされ、電流によってコイルの振れの方向と反対の方向に振らされる。コイルの振れを θ 、磁石の振れを ϕ とすると、系のエネルギーの可変部分は

$$-H\gamma g \sin \theta - m\gamma G \sin(\theta - \phi) - Hm \cos \phi - F \cos \theta,$$

である。

θ と ϕ にかんして微分して、それぞれ、コイルの平衡の式と磁石の平衡の式

$$-H\gamma g \cos \theta - m\gamma G \cos(\theta - \phi) + F \sin \theta = 0,$$

$$m\gamma G \cos(\theta - \phi) + Hm \sin \phi = 0,$$

を得る。

これらの式から、 H と γ を消去して 2 次方程式を見出し、それから γ や H が分かる。もし懸架磁石の磁気モーメント m が非常に小さいなら、以下の近

^{註 2} Pogg., Ann. cxxxviii, pp. 1-10, Aug. 1869.

似値

$$H = \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{-AG \sin \theta \cos(\theta - \phi)}{g \cos \theta \sin \phi}} - \frac{1}{2} \frac{mG}{g} \frac{\cos(\theta - \phi)}{\cos \theta},$$

$$\gamma = -\frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{-A \sin \theta \sin \phi}{Gg \cos \theta \cos(\theta - \phi)}} + \frac{1}{2} \frac{m \sin \phi}{g \cos \theta},$$

を得る。

これらの式で、 G 、 g はコイルの主電気定数、 A は慣性モーメント、 T は振動の半周期、 m は磁石の磁気モーメント、 H は水平磁力の強度、 γ は電流の強さ、 θ はコイルの振れ、 ϕ は磁石の振れである。

コイルの振れは磁石の振れの反対方向であるから、 H と γ のこれらの値は常に実である。

ウェーバーの電力計。

725.] この機器では、小さなコイルが固定された大きなコイル内で 2 導線によって吊られている。電流を両コイルを通して流したとき、懸架コイルは固定コイルと平行になろうとする。この傾向は 2 本吊り懸架から生じる力のモーメントによって反作用をうける。それは懸架コイルへの地磁気の効果によっても影響される。

機器の通常の使用では、2 コイルの面は互いにほとんど直角で、コイル中の電流の相互作用は可能なかぎり大きくなりえる。懸架コイルの面は磁気子午面にほとんど直角で、地磁気の効果は可能なかぎり小さくできる。

p. 368

固定コイルの面の磁気方位角を α とし、懸架コイルの軸が固定コイルの面となす角を $\theta + \beta$ とする。ここで β はコイルが平衡状態で電流がないときのこの角の値である。平衡の式は、 γ_1 を固定コイルの電流、 γ_2 を可動コイルの電流として、

$$Gg\gamma_1\gamma_2 \cos(\theta + \beta) - Hg\gamma_2 \sin(\theta + \beta + \alpha) - F \sin \theta = 0,$$

である。

機器が α 、 β が両方共非常に小さくなるよう調整され、 $Hg\gamma_2$ が F とくらべて小さいと考えよう。この場合、近似的に、

$$\tan \theta = \frac{Gg\gamma_1\gamma_2 \cos \beta}{F} - \frac{Hg\gamma_2 \sin(\alpha + \beta)}{F} - \frac{HGg^2\gamma_1\gamma_2^2}{F^2} - \frac{G^2g^2\gamma_1^2\gamma_2^2 \sin \beta}{F^2}$$

が成り立つ。

γ_1 、 γ_2 の符号が変化したとき、振れはつぎのとおりである。

θ_1	γ_1 が	+	で γ_2	+	のとき,
θ_2	"	-	"	-	"
θ_3	"	+	"	-	"
θ_4	"	-	"	+	"

このとき

$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{1}{4} \frac{F}{Gg \cos \beta} (\tan \theta_1 + \tan \theta_2 - \tan \theta_3 - \tan \theta_4),$$

であることが分かる。

もし両コイルをとおる電流が同じなら、 $\gamma_1\gamma_2 = \gamma^2$ と置くことができ、 γ の値を得る。

電流がそれほど一定でないとき、この方法を採用することが最良である。この方法は正接法と呼ばれる。

もし電流が非常に一定で機器の振れ頭の角度、 β を調整できるなら、正弦法によりただちに地軸にたいする補正を取り除くことができる。

この方法では β は振れが零になるまで調整されるので、

$$\theta = -\beta$$

である。もし γ_1 、 γ_2 の符号が前と同様に β の添字により指示されるなら、

$$F \sin \beta_1 = -F \sin \beta_3 = -Gg\gamma_1\gamma_2 + Hg\gamma_2 \sin \alpha,$$

$$F \sin \beta_2 = -F \sin \beta_4 = -Gg\gamma_1\gamma_2 - Hg\gamma_2 \sin \alpha,$$

$$\gamma_1\gamma_2 = -\frac{F}{4Gg} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2 - \sin \beta_3 - \sin \beta_4),$$

である。

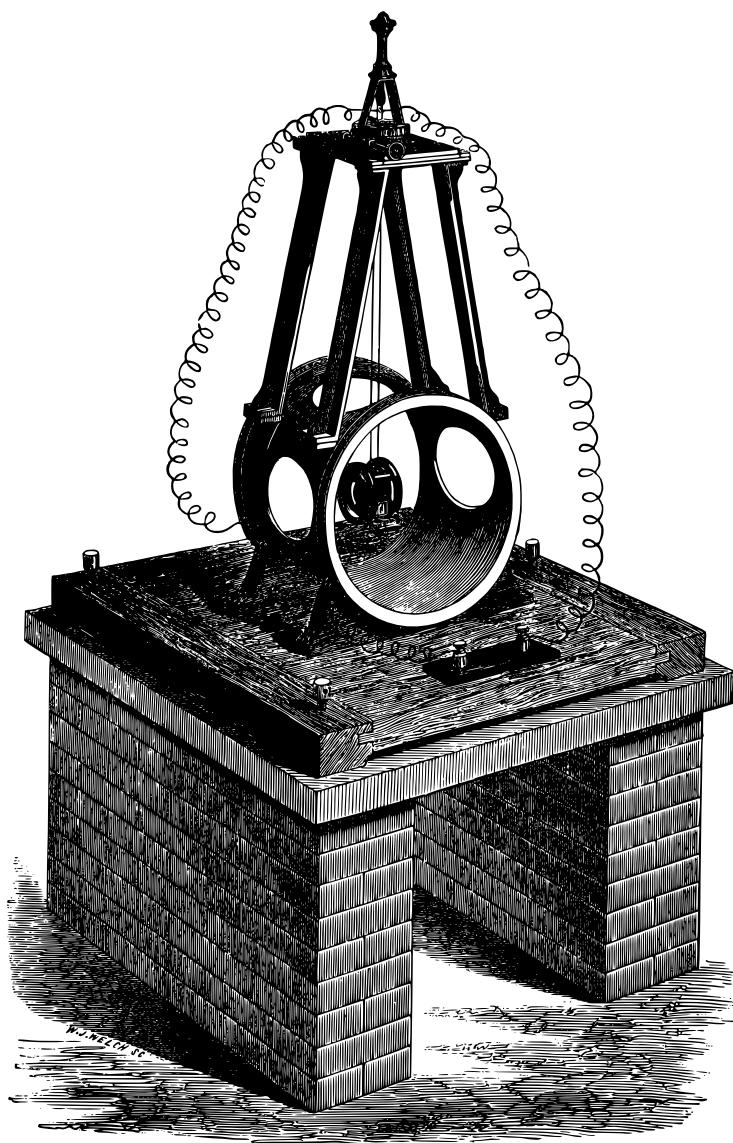


図: 53.

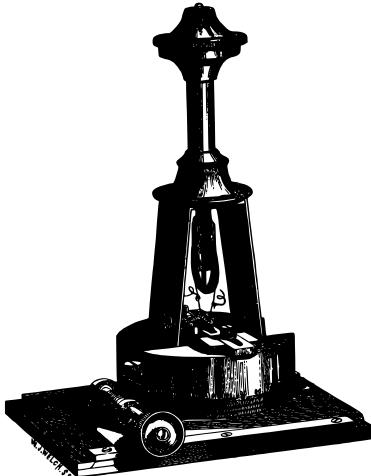


図 54.

p. 370

これがラティマー クラーク氏が英國協会電気委員会によって組み立てられた機器を使うとき採用した方法である。私たちは図 53 の電力計の図面をクラーク氏によっており、そこでは、2 コイルのヘルムホルツ配置が固定コイルにも懸架コイルにも採用されている^{註 3}。装置のねじり頭^{註 4}によって 2 本吊り懸架が調整されるが、それが図 54 に表現されている。懸架導線の捩じりの等しさは、それらが車の上を通る絹糸の端に取り付けられることにより保証されており、それらの距離は 2 つの案内車によって規制され、案内車は適切な距離に設定できる。懸架コイルは懸架車に作用する捩子によって鉛直に動くことができ、図 54 の下部に示された滑る部品によって 2 方向に水平に動くことができる。それは捩じるねじによって方位角中で調整され、ねじは鉛直軸のまわりに捩り頭を回す。懸架コイルの方向角は鏡の目盛の反射を観測することによって確かめられる。鏡は懸架コイルの軸の真下に示されている。

p. 359

最初にウェーバーによって構成された機器はウェーバーの *Elektrodynamische Maasbestimmungen* (電気力学測定) で記述されている。それは小さな電流の

^{註 4} 訳註: 捣り秤の部品名。そこから金属線や絹糸が吊るされる。

^{註 4} 現実の測定では、コイルへ、コイルから電流を伝える導線は図に示されるように拡がっておらず、それぞれの電磁作用を中性化するよう、できるかぎり密接に保たれている。

測定を意図しており、それゆえ、固定、懸架コイルとも多数の巻き線からできており、懸架コイルは固定コイル中の大きな部分を占め、基本的に標準機器であることを意図し、より高感度機器と比較できる英國協会のものよりも大きい。彼がそれを使って行った実験は、閉じた電流に適用されたアンペールの公式のもっとも完結した実験的な証明を与えていた。ウェーバーが精度について非常に高いランクまで電気量の数値決定を上げた研究の重要な部分を形成している。

電力計のウェーバーの形式では、一方のコイルが他のコイルの中で吊るされ、鉛直軸の回りにコイルを回そうとする偶力が作用しているが、おそらく、その形式は絶対測定にもっとも適している。そのような配置定数の計算法は700節に与えられている。

726.] しかし、微弱な電流によって、かなりの電気力を生成したいなら、懸架コイルを固定コイルと平行におき、固定コイルへの、またはそれからの運動を可能にするほうがよい。

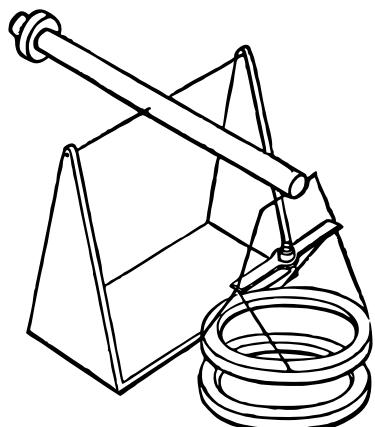


図: 55.

図 55 のジュール博士の電流重量計での懸架コイルは水平で、鉛直運動を行うことができる。懸架コイルと固定コイルのあいだの力は重りによって評価できる。重りは、固定コイルにかんして、電流がないとき懸架コイルがもっていた位置と同じ相対位置に懸架コイルを運ぶために、コイルに加えたり除いたりしなければならない。

図 56 のように、懸架コイルは捩じり秤の水平腕の端に結びつけ、一方は懸架コイルをひきつけ、他方は斥ける、2つの固定コイルのあいだに置くことができる。

コイルを 729 節で記述されているように配置することにより、懸架コイルに作用する力は平衡位置の小さな距離内でほとんど一様にすることができる。

他のコイルは捩じり秤の腕の外端に固定し、2つの固定コイルのあいだに

置くことができる。もし 2 つの懸架コイルが同様のものだが、電流が反対方向なら、振り子の腕の位置での地磁気の効果は完全に消去できる。

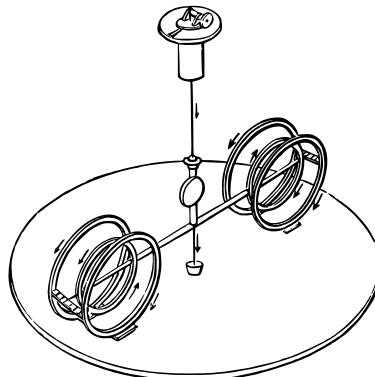


図 56.

727.] もし吊りコイルが長いソレノイド形の中に入り、ソレノイドの軸に平行に動くことができ、同じ軸を持つ、より大きな固定されたソレノイドの内部に通すなら、そのとき、もし電流が両ソレノイドで同じ方向なら、吊られたソレノイドは、どのソレノイドの端が互いに近くにはないかぎりほとんど一様な力で、固定されたソレノイドに吸い込まれるであろう。

728.] はるかに大きい 2 つの同等なコイルのあいだに置かれた小さなコイルへの一様な縦方向の力を生成するために、大きなコイルの直径のそれらの面のあいだの距離の比を 2 対 $\sqrt{3}$ とすべきである。もしこれらのコイルに反対方向に同じ大きさの電流を送ると、 ω にたいする式で、 r の奇数冪を含む項は消え、 $\sin^2 \alpha = \frac{4}{7}$ 、 $\cos^2 \alpha = \frac{3}{7}$ であるから、 r^4 を含む項も消え、715 節によって、 ω の可変部分として

$$\frac{8}{7} \sqrt{\frac{3}{7}} \pi n \gamma \left\{ 3 \frac{r^2}{c^2} P_2(\theta) - \frac{11}{7} \frac{r^6}{c^6} P_6(\theta) + \&c \right\}$$

p. 373

が成り立ち、それは小さなコイル上のほとんど一様な力を指し示している。この場合のコイルの配置は 715 節で記述された、3 コイルをもつ検流器の 2 つの外部配置である。図 50 参照。

729.] コイルを 2 コイルのあいだに吊るしたいとする。2 コイルはそのコイルに非常に近くに置かれ相互作用導体のあいだの距離がそれらのコイルの半

径と較べて小さいとするなら、もっとも一様な力は外側のコイルの半径を中央のコイルの半径を、中央と外側のコイル面のあいだの距離の $\frac{1}{\sqrt{3}}$ だけ越えるようにすることによって得られる。これは 2 つの円形流のあいだの相互誘導にかんする 705 節で証明された式から出てくる。

註 4 { この場合、もし M が内部のコイルと外部のコイルの一つとの相互ポテンシャルエネルギーなら、705 節の記法を使うと、変位 g にたいする力の変化は、コイルは対称的に置かれているから、 $\frac{d^3 M}{dy^3}$ に比例する。この式のいちばん重要な項は $d^3 \log r/dy^3$ であり、それは $3x^2 = y^2$ のとき零になる。 }

第 XVI 章

電磁観測。

730.] 非常に多くの電気に関連した量の測定が振動体の運動の観測に依存しているので、この運動の性質に注目し、それを観測する最良の方法を考えよう。

安定な平衡位置のまわりの物体の小振動は、一般に、固定点からの距離に比例して変化する力の作用する点の運動と相似している。私たちの知っている振動体の場合、運動への抵抗が存在し、抵抗は空気の粘性や、懸架纖維の粘性のような、さまざまな原因に依存する。多くの電気にかんする測定では、それ以外の抵抗の原因が存在する。つまり、振動する磁石の近傍に置かれた伝導回路によって誘導された電流の反射作用である。これらの電流は磁石の運動により誘導され、電流の磁石への作用は、レンツの法則により、つねに磁石の運動に対抗する。多くの場合、これが抵抗の主要部である。

減衰器と呼ばれる金属回路を磁石の振動を減衰させ、消し去るために、磁石の近くに置くことがある。それゆえ、この種の抵抗を減衰抵抗と呼ぶことにする。

たやすく観測できるような遅い振動の場合、全抵抗は、それがどのような原因から生じるとしても、速度に比例するようにみえる。速度の二乗に比例する抵抗の証拠があるのは、速度が電磁的装置の通常の振動よりもはるかに大きいときのみである。

それゆえ、距離に比例する引力に従い、速度に比例する抵抗に従う物体の運動を調べなければならない。

p. 375

731.] 以下の、テイト教授による^{註 1}、ホドグラフの原理の応用により、等

^{註 1} Proc. R. S. Edin., Dec. 16, 1867.

角螺旋を使った、ごく簡単な方法で、この種の運動を調べることができる。

極のまわりの一様な角速度をもつ、対数、つまり、等角螺旋を描く粒子の加速度を見つけることが必要である。

この螺旋の特性は、接線 PT が動径ベクトルと一定角度 α をなすことである。もし v が点 P での速度なら、

$$v \cdot \sin \alpha = \omega \cdot SP, \quad (1)$$

である。

したがって、もし BP' を PT に平行に BP と同じ大きさで描くと、 P での速度は大きさと方向の両方が

$$v = \frac{\omega}{\sin \alpha} SP', \quad (2)$$

によって与えられる。

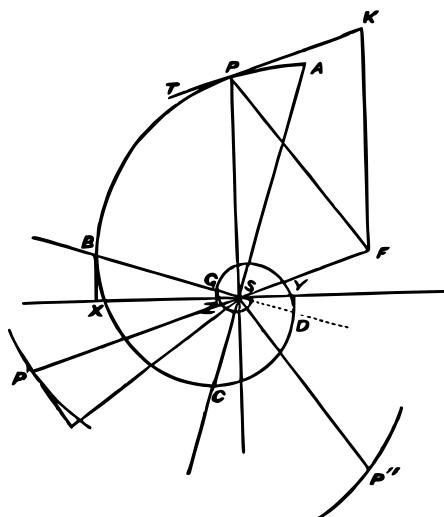


図 57.

したがって、 P' はホドグラフ^{註 2} の点である。しかし、 SP' は SP を一定角度 $\pi - \alpha$ まわしたものであり、 P' により記述されるホドグラフは元の螺旋

を極の回りに角度 $\pi - \alpha$ まわしたものと同じものである。

P での加速度は、大きさと方向について、 P' での速度と同じ因子 $\frac{\omega}{\sin \alpha}$ をかけることによって表現される。

p. 376

したがって、もし SP' に角 $\pi - \alpha$ まわす同じ操作をおこなって SP'' の位置へ持っていくと、 P での加速度は大きさと方向について

$$\frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} SP''$$

に等しい。ここで SP'' は角 $2\pi - 2\alpha$ まわした SP に等しい。

もし PF を SP'' に平行で等しく描くと、加速度は $\frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} PF$ であり、それは

$$\frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} PS \text{ および } \frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} PK,$$

に分解できる。

これらの第1成分は S に向かう、距離に比例する中心加速度である。

第2成分は速度の反対方向を向き、

$$PK = 2 \cos \alpha P'S = -2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\omega} v,$$

であるから、この加速度は

$$-2 \frac{\omega \cos \alpha}{\sin \alpha} v,$$

と書くことができる。

粒子の加速度は、それゆえ、2つの部分の複合したものである。その第1は引力 μr によるものであり、 S の方向に向き、距離に比例する。その第2は速度に比例する運動への抵抗、 $-2kv$ 、である。ここで

$$\mu = \frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha}, \quad k = \omega \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

である。

もし、これらの式で、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ とすると、軌道は円になり、 $\mu_0 = \omega_0^2$, $k = 0$ となる。

註² 訳註: 速度ベクトルの先端が描く図形。プラドレイの位置天文学の影響のもとでハミルトンがギリシャ語 ὁδός(道) から造った語。

したがって、もし単位距離での力が同じままであれば $\mu = \mu_0$ であり、

$$\omega = \omega_0 \sin \alpha,$$

つまり、同じ引力の法則をもついろいろな螺旋での角速度は螺旋の角度の正弦に比例する。

732.] もし動点 P の水平線 XY への射影点の運動を考えるなら、射影点の S からの距離と速度は、 P の距離と速度の水平成分であることが分かる。したがって、この点の加速度もまた S への引力で、 μ と S からの距離の積に等しく、減速度は $2k$ と速度の積に等しい。

p. 377

それゆえ、固定点からの距離に比例する引力に従い、速度に比例する抵抗に従う点の直線運動を完全に構成したことになる。そのような点の運動はたんに対数螺旋を一様角速度で動くもう一つの点の運動の水平成分にすぎない。

733.] 螺旋の方程式は

$$r = C e^{-\phi \cot \alpha},$$

である。

水平運動を決定するために、

$$\phi = \omega t, \quad x = a + r \sin \phi,$$

と置く。ここで a は平衡点での x の値である。

もし鉛直線と角 α をなす BSD を描くと、接線 $BX, DY, GZ, \&c.$ は鉛直で、 $X, Y, Z, \&c.$ は一連の振動の端点である。

734.] 振動体になされる観測は—

(1) 停留点での目盛の読み。これは伸び量^{註 3} と呼ばれる。

(2) 目盛の決まった分点を正または負の方向に通りすぎる時間。

(3) ある決まった時間での目盛の読み。この種の観測は長周期振動^{註 4} の場合をのぞいて、それほど行われない。

^{註 3} 訳註： Elongation は位置天文学由來の用語で、そこでは、離角と訳される。惑星の離角は地球から見た太陽と惑星の距離が最大になる位置を角度で示したもの。

決めなければならない量は

- (1) 平衡位置での目盛の読み。
- (2) 振動の対数減衰率。
- (3) 振動の時間 (周期)。

連続 3 伸び量から平衡位置の読みを決定する。

735.] x_1, x_2, x_3 は伸び量 X, Y, Z , にたいする観測された目盛の読みとし、 a を平衡位置 S での読みとし、 r_1 を SB の値とすると

$$\begin{aligned}x_1 - a &= r_1 \sin \alpha, \\x_2 - a &= -r_1 \sin \alpha e^{-\pi \cot \alpha}, \\x_3 - a &= r_1 \sin \alpha e^{-2\pi \cot \alpha},\end{aligned}$$

である。

p. 378

これらの値から

$$(x_1 - a)(x_3 - a) = (x_2 - a)^2,$$

である。したがって

$$a = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 + x_3 - 2x_2},$$

である。

x_3 が x_1 とほとんど変わらないなら、近似公式として

$$a = \frac{1}{4}(x_1 + 2x_2 + x_3),$$

を使うことができる。

^{註 4} Gauss and W. Weber, *Resultate du magnetischen Vereins*, (磁気協会の成果), 1886. Chap. II. pp. 84-50, 参照。

対数減衰率の決定。

736.] 振動の振幅の次に続く振動の振幅にたいする比の対数は対数減衰率と呼ばれる。この比を r と書くと

$$\rho = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2}, \quad L = \log_{10} \rho, \quad \lambda = \log_e \rho,$$

である。 L は常用対数減衰率と呼ばれ、 λ は自然対数減衰率と呼ばれる。あきらかに

$$\lambda = L \log_e 10 = \pi \cot \alpha,$$

である。

したがって

$$\alpha = \cot^{-1} \frac{\lambda}{\pi},$$

であり、これは対数螺旋の角度を決めている。

λ を特別に決定するとき、物体にかなりの回数の振動を行わせる。もし c_1 が第 1 振幅、 c_n が第 n 振幅なら、

$$\lambda = \frac{1}{n-1} \log_e \left(\frac{c_1}{c_n} \right),$$

である。

もし観測精度が小さな振動と大きな振動で同じであると考えると、 λ の最良値をえるためには c_1 の c_n にたいする比がほとんど e に等しくなるまで、振動を落ち着かせるべきである。これは n にたいして $\frac{1}{\lambda} + 1$ にもっとも近い整数を与える。

しかし、多くの場合、時間は貴重だから、振幅の減少がそこまで進むまえに、第 2 組の観測を行うことが最良である。

737.] ある場合には、対数減衰率が特別な実験から知られているとして、2 つの引き続いた伸び量から、平衡位置を決めなければならないかもしれない。そのとき、

$$\alpha = \frac{x_1 + e^\lambda x_2}{1 + e^\lambda},$$

がなりたつ。

振動時間。

738.] 平衡点の目盛の読みを決めたので、明確なマークを目盛のその点、もしくはできるかぎり、その近くに置く。このマークを通りすぎる時間を、連続的に、何度か記録する。

マークが平衡点の正側に、分かってはいないが、小さな距離 x だけ離れた点に置かれたと考えよう。 t_1 を正の方向へのマークの最初の通過の観測された時間とし、引き続く通過時間を t_2, t_3, \dots とする。

もし T が振動の時間 { すなわち、平衡点を引き続いて 2 度、通りすぎる時間 } であり、 P_1, P_2, P_3, \dots が真の平衡点の通過時間なら、

$$t_1 = P_1 + \frac{x}{v_1}, \quad t_2 = P_2 + \frac{x}{v_2}, \quad P_2 - P_1 = P_3 - P_2 = T,$$

である。ここで、 v_1, v_2, \dots は引き続く通過速度であり、それはごく小さな距離 x では一様であると考えられる。

もし ρ が振動の振幅の次の振幅にたいする比なら、

$$v_2 = -\frac{1}{\rho}v_1, \quad \frac{x}{v_2} = -\rho \frac{x}{v_1},$$

である。

もし 3 回の通過が t_1, t_2, t_3 , に観測されたなら

$$\frac{x}{v_1} = \frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{(\rho + 1)^2},$$

である。

振動の時間はそれゆえ

$$T = \frac{1}{2}(t_3 - t_1) - \frac{1}{2} \frac{\rho - 1}{\rho + 1} (t_1 - 2t_2 + t_3),$$

である。

平衡点の 2 度目の通過時間は

$$P_2 = \frac{1}{4}(t_1 + 2t_2 + t_3) - \frac{1}{4} \frac{(\rho - 1)^2}{(\rho + 1)^2} (t_1 - 2t_2 + t_3),$$

である。

3 回の通過がこれら 3 つの量の決定には十分であるが、いくら多数でも最小 2 乗法によって組み合わせることができる。こうして、5 回の通過にたいしては

$$T = \frac{1}{10}(2t_5 + t_4 - t_2 - 2t_1) - \frac{1}{10}(t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5) \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \left(2 - \frac{\rho}{1 + \rho^2}\right),$$

となる。

3 度目の通過の時間は

$$P_3 = \frac{1}{8}(t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2t_4 + t_5) - \frac{1}{8}(t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5) \frac{(\rho - 1)^2}{(\rho + 1)^2},$$

である。

739.] 同じ方法が一連の任意の数の振動に拡張できる。もし振動が非常に速くて、通過時間を記録しきれないなら、引き続く通過方向は反対方法であることに注意して、3 回ごと、5 回ごとの時間を記録できる。もし長時間にわたって振動が規則正しく続くなら、全時間にわたって観測する必要はない。振動の時間、 T を近似的に決めるために十分な数の通過を観測することから始め、通過の中間時間、 P を観測し、この通過が正の方向か負の方向か書き留める。つぎに通過時間を記録せずに振動を続けるか、器具を監視しないで放置できる。つぎに、2 度目の通過系列を観測し、通過の方向を注意して、振動時間、 T' と通過の中間時間 P' を導く。

もし 2 組の観測から導かれた振動の時間 T, T' がほとんど等しいなら、2 系列の観測を組み合わせて、より正確な周期の決定へと進むことができる。

$P' - P$ を T で割ると、商は整数にごく近いはずで、通過 P, P' が同じ方向か反対方向かにしたがって偶数、奇数である。もしこうなっていなければ、観測系列は無価値だが、もし結果が整数 n にひじょうに近いなら、 $P' - P$ を n で割り、揺れの全時間にわたって T の平均値が分る。

740.] こうして見つけられた振動の時間 T は振動の実際の平均値で、減衰のない無限に小さい弧のなかの振動時間をそれから導きたいときには補正を行う必要がある。

観測された時間を無限小の弧の時間に戻すには、振幅 c の静止から静止への振動の時間は一般に

$$T = T_1(1 + \kappa c^2),$$

の形をしている。ここで、 κ はある係数で、ふつうの振子の場合、 $\frac{1}{64}$ である。一連の振動の振幅は $c, c\rho^{-1}, c\rho^{-2}, \dots c\rho^{1-n}$ であり、 n 回振動の全時間は

$$nT = T_1(n + \kappa \frac{c_1^2 \rho^2 - c_n^2}{\rho^2 - 1}),$$

である。ここで T は観測から導かれた時間である。

したがって、無限小の弧の時間 T_1 を見出すためには、近似的に

$$T_1 = T \left\{ 1 - \frac{\kappa}{n} \frac{c_1^2 \rho^2 - c_n^2}{\rho^2 - 1} \right\},$$

がなりたっている。

p. 381

減衰がないとき、時間 T_0 を見出すためには、731 節の

$$\begin{aligned} T_0 &= T_1 \sin \alpha \\ &= T_1 \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \kappa^2}}, \end{aligned}$$

がある。

741.] 固定点へ { 距離に比例する力によって引きつけられ、 } 速度とともに変化する力によって抵抗される物体の直線運動の式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + \omega^2(x - a) = 0. \quad (1)$$

である。ここで x は時間 t での物体の座標であり、 a は平衡位置の座標である。

この方程式を解くために、

$$x - a = e^{-kt} y; \quad (2)$$

とすると、

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega^2 - k^2)y = 0; \quad (3)$$

であり、その解は

$$y = C \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2} t + \alpha), \quad k \text{ が } \omega \text{ より小さいとき}; \quad (4)$$

$$y = A + Bt, \quad k \text{ が } \omega \text{ と等しいとき}; \quad (5)$$

$$\text{そして } y = C' \cosh(\sqrt{k^2 - \omega^2} t + \alpha'), \quad k \text{ が } \omega \text{ より大きいとき}, \quad (6)$$

である。

x の値は式 (2) によって y の値から得られる。 k が ω より小さいとき、運動は無限系列の振動からなり、一定周期だが、振幅を連續的に減少させる。 k が増えると、周期時間は長くなり、振幅の消滅はより急激になる。

k (抵抗係数の半分) が ω (平衡位置から単位距離での加速度の平方根) と等しいか、より大きいとき、運動は振動的であることを止め、全運動にわたって、物体は一度だけ平衡点を通りすぎることができ、そのあと、最大伸び量の位置にたつし、平衡の位置に向かって戻って行き、近付きつづけるが、けっしてそれには達しない。

抵抗が大きく、運動がこの種のものである検流器は速示検流計と呼ばれる。それは多くの実験で役に立つが、特に電信で役に立つ。自由振動の存在は観測しようとしている運動を隠蔽するからである。

p. 382

k, ω の値がどのようなものであれ、平衡点での目盛の読み、 a は公式

$$a = \frac{q(rs - qt) + r(pt - r^2) + s(qr - ps)}{(p - 2q + r)(r - 2s + t) - (q - 2r + s)^2}$$

によって、等時間間隔で取られた 5 つの目盛の読み、 p, q, r, s, t から導くことができる、

検流器の観測について。

742.] 一定流を正接検流計で測定するには、装置を調整して、コイル面を磁気子午線に平行にし、零点の読みを取る。電流がコイルを通され、新しい平衡位置に対応する磁石の振れを観測する。この振れを ϕ と表記しよう。

もし H が水平磁力、 G が検流計の係数なら、電流の強さ γ は

$$\gamma = \frac{H}{G} \tan \phi, \quad (1)$$

である。

もし懸架繊維の捻れ係数が $\tau M H$ なら (452 節参照)、補正された公式

$$\gamma = \frac{H}{G} (\tan \phi + \tau \phi \sec \phi), \quad (2)$$

を使わなくてはならない。

振れの最良値。

734.] 検流計のなかには、電流を通すコイルの巻数を自由に変えることのできるものがある。分流器と呼ばれる導体によって、電流の既知の割合を検流計から迂回させることができるものもある。どちらの場合も磁石への単位の電流の効果、 G の値は変えられる。

G の値を決め、与えられた振れの観測誤差が導かれた電流の強さの値の最小値に対応させる。

式(1)を微分すると、

$$\frac{d\gamma}{d\phi} = \frac{H}{G} \sec^2 \phi, \quad (3)$$

が分る。

G を消去すると

$$\frac{d\phi}{d\gamma} = \frac{1}{2\gamma} \sin 2\phi, \quad (4)$$

である。

これは与えられた γ 値にたいして、振れが 45° のとき、最大である。それゆえ G の値を $G\gamma$ ができるかぎり、 H に等しくなるまで調整するべきである。 p. 383

電流に適用する最良の方法。

744.] 観測者が、挿込スイッチを使って、任意の瞬間に連結させたり、絶たせたりできるとき、挿込スイッチを使って、磁石を最小限の速度で平衡位置へ到達させるように操作することが勧められる。以下の方法はガウスにより工夫されたものである。

磁石が平衡位置にあり、電流がないと考えよう。そこで、観測者が短時間、接触を行い、磁石を新しい平衡位置に向かって運動させる。つぎに接触を絶つ。力はもとの平衡位置に向かっており、運動は遅延している。もしこれが厳密に新しい平衡位置で静止するように処理され、もし観測者がふたたびその瞬間に接触を行い、接触を維持すると、磁石は新しい位置で静止を維持するであろう。

もし抵抗の効果を無視し、新旧の位置で作用するすべての力の不等性も無視するなら、新しい力がその最初の作用の時間のあいだに、回路が絶たれて

いるあいだにもとの力が壊すのと同じ大きさの運動エネルギーを生成したいのだから、磁石が最初の位置から第 2 の位置への距離の半分を動くまで、電流の最初の作用を延長しなければならない。もしもとの力が磁石がその経路のもう半分を動くあいだ作用するなら、それは厳密にそれを止めるであろう。最大伸び量の点から平衡位置への半分の点まで通るのに要する時間は静止から静止へ、周期の $1/3$ である。

それゆえ、前もって静止から静止への振動の時間を確かめている操作者は、その時間の $1/3$ 接触し、同じ時間のもう $1/3$ 接触を絶ち、実験を続けるあいだ、ふたたび、接触をなす。そのとき、磁石は静止しているか、もしくは、その振動はひじょうに小さく、運動が消えざるまで待つことなく、ただちに観測ができる。この目的のため、メトロノームが磁石の振動のそれぞれにたいして、3 回搏つように調整できる。

抵抗が十分に大きく、それを考慮しなければならないとき、規則はいくぶん複雑になるが、この場合、振動は非常に速く消えざるので、規則に補正を加えることは不必要である。

磁石がもとの位置へ戻されるとき、回路は振動の $1/3$ にたいして切断され、同じ時間、接触され、最終的に切断される。これで磁石が以前の静止位置に残される。

もし直接の読みのあと、ただちに逆読みが取られるなら、回路は 1 振動の時間絶たれ、つぎに逆転させる。これは磁石を逆位置に静止させる。

第 1 振による測定。

745.] 1 回以上の観測をする時間がないとき、磁石の最初の振れで観測された極大伸び量を測ることによって電流を測ることができる。もし抵抗がないとき、永続的な振れ ϕ は極大伸び量の半分である。もし抵抗が 1 振動の次にたいする比が ρ のようなものであり、もし θ_0 が零の読み、 θ_1 が最初の振れの極大伸び量なら、平衡点にたいする振れ、 ϕ は

$$\phi = \frac{\theta_0 + \rho\theta_1}{1 + \rho}.$$

である。

このようにして、磁石が平衡点に静止することを待つことなく、振れが計算できる。

一連の観測を行うこと。

746.] 多数回の一定流の測定を行う最良の方法は、電流が正の方向のあいだに 3 つの伸び量を観測し、つぎに、およそ 1 振動の時間のあいだ接触を絶ち、磁石を負の振れの位置に振らせ、つぎに電流を反転し負側で 3 つの引き続く伸び量を観測し、つぎに 1 振動の時間のあいだ接触を絶ち、正の側で観測を繰り返し、それを十分な数の観測が得られるまで繰り返すことによるものである。この方法によって、観測の時間のあいだの地球の磁気力の方向の変化から生じる誤差が消去される。注意深く接触の断続の時間を合わせることにより、操作者はたやすく振動の範囲を規制でき、不明瞭さなしに範囲を十分に小さくできる。磁石の運動は図式的に図 58 に表現される。ここで横軸は時間を、縦軸は磁石の振れを表現する。もし、 $\theta_1 \dots \theta_6$ が観測された伸び量の代数値なら、振れは方程式

p. 385

$$8\phi = \theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - 2\theta_5 - \theta_6,$$

によって与えられる。

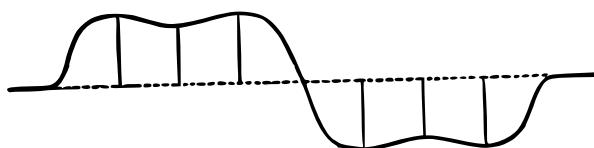


図: 58.

乗算法。

747.] 検流器の振れが非常に小さいとき、適切な間隔で電流を反転し、磁石に揺れ運動を起こさせて、目に見える効果を増大させることが推奨されることもある。この目的のため、磁石の 1 振動の時間 { すなわち、静止から静止への時間 } T を確かめた後、時間 T のあいだ、電流が正の方向に送られ、

つぎに、同じ時間反対方向に送られ、それを繰り返す。磁石の運動が目に見えるものになったとき、観測された最大伸び量の時間に電流の反転を行うことができる。

磁石を正の伸び量 θ_0 に置き、電流をコイルを通して反対方向に送る。このとき、平衡点は $-\phi$ であり、磁石は負の伸び量 θ_1 に向けて揺れ、

$$-\rho(\phi + \theta_1) = (\theta_0 + \phi),$$

つまり

$$-\rho\theta_1 = \theta_0 + (\rho + 1)\phi,$$

となる。

同様に、磁石が θ_2 にむけて振れているあいだ、電流を正にするなら、

$$\rho\theta_2 = -\theta_1 + (\rho + l)\phi,$$

つまり

$$\rho^2\theta_2 = \theta_0 + (\rho + 1)2\phi;$$

であり、もし次々と電流が n 回、反転されると、

$$(-1)^n\theta_n = \rho^{-n}\theta_0 + \frac{\rho + 1}{\rho - 1}(1 - \rho^{-n})\phi,$$

p. 386 であることが分かる。したがって、 ϕ の形は

$$\phi = (\theta_n - \rho^{-n}\theta_0) \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \frac{1}{1 - \rho^{-n}},$$

であることが分かる。

もし n が非常に大きく、 ρ^{-n} を無視することができるなら、式は

$$\phi = \theta_0 \frac{\rho - 1}{\rho + 1}.$$

となる。

厳密測定にこの方法を適用するには、磁石が蒙る抵抗の影響化で磁石の 1 振動のつぎにたいする比、 ρ の正確な知識が必要である。 ρ の値の不規則性を避ける困難から生じる不確定性が、一般に、大角伸び量の利点を打ち消してしまう。この方法が本当に価値があるのは、針の目にみえる運動を生成させることにより非常に小さい電流の存在を確立したい場合のみである。

過渡流の測定。

748.] 検流器磁石の振動周期のごく短い時間だけ、電流が続くとき、電流によって輸送された全電気量を電流の通過時に磁石に伝えられた角速度によって測ることができ、この角速度は磁石の最初の振動の伸び量から決めることができる。

もし磁石の振動を減衰させる抵抗を無視するなら、研究はごく簡単になる。 γ を任意の瞬間の電流の強度とし、 Q を電流が伝えた電気量とすると、

$$Q = \int \gamma dt, \quad (1)$$

である。

M を磁気モーメントとし、 A を磁石と懸架機器の慣性モーメントとし、 θ を磁石がコイル面となす角とすると、

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + MH \sin \theta = MG\gamma \cos \theta, \quad (2)$$

である。

もし電流の通過時間がひじょうに小さいなら、 θ は変化しないとみなして、この短い時間のあいだ、 t にかんして積分でき、

$$A \frac{d\theta}{dt} = MG \cos \theta_0 \int \gamma dt + C = MGQ \cos \theta_0 + C, \quad (3)$$

がわかる。

p. 387

これは量 Q の通過が磁石に $MGQ \cos \theta_0$ の角運動量を生成することを示している。ここで、 θ_0 は電流が通過する瞬間の θ の値である。もし初期に磁石が平衡にあると、 $\theta_0 = 0, C = 0$ と置くことができる。

このとき磁石は自由に揺れ、伸び量 θ_1 に達する。もし抵抗がなければ、この揺れのあいだに磁力の抗する仕事は $MH(1 - \cos \theta_1)$ である。

電流によって磁石に伝えられたエネルギーは

$$\frac{1}{2} A \left. \frac{d\theta}{dt} \right|^2,$$

である。

これらの量を等しいとおくと、

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|^2 = 2 \frac{MH}{A} (l - \cos \theta_1), \quad (4)$$

であることが分かる。したがって

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{MH}{A}} \sin \frac{1}{2} \theta_1 \\ &= \frac{MG}{A} Q \quad (3) \text{ によって}, \end{aligned} \quad (5)$$

である。

しかし、もし T が磁石の静止から静止までの 1 振動の時間なら、

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{MH}}, \quad (6)$$

であり、

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin \frac{1}{2} \theta_1, \quad (7)$$

であることが分かる。ここで H は水平磁気分力、 G は検流器の係数、 T は 1 振動の時間、 θ_1 は磁石の第 1 伸び量である。

749.] 実際の多くの実験では、伸び量は小角度であり、そのときは、抵抗の効果を考慮することは簡単である。

磁石を平衡位置に静止しているとし、角速度 v が磁石に瞬間に伝えられるとし。第 1 伸び量が θ_1 であるとする。

運動方程式は

$$\theta = Ce^{-\omega_1 \tan \beta} \sin \omega_1 t, \quad (8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = C \omega_1 \sec \beta e^{-\omega_1 t \tan \beta} \cos(\omega_1 t + \beta), \quad (9)$$

である。

p. 388
 $t = 0$ のとき、 $\theta = 0$ 、 $\frac{d\theta}{dt} = C \omega_1 = v$ である。
 $\omega_1 t + \beta = \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\theta = Ce^{-(\frac{\pi}{2} - \beta) \tan \beta} \cos \beta = \theta_1, \quad (10)$$

である。したがって

$$\theta_1 = \frac{v}{\omega_1} e^{-(\frac{\pi}{2}-\beta) \tan \beta} \cos \beta, \quad (11)$$

である。

さて、(741) 節により、

$$\frac{MH}{A} = \omega^2 = \omega_1^2 \sec^2 \beta, \quad (11)$$

である。

$$\tan \beta = \frac{\lambda}{\pi}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{T_1}, \quad (13)$$

であり、式(5)により

$$v = \frac{MG}{A} Q, \quad (14)$$

である。したがって

$$\theta_1 = \frac{QG}{H} \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{T_1} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \tan^{-1} \frac{\pi}{\lambda}}, \quad (15)$$

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T_1 \theta_1}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi} \tan^{-1} \frac{\pi}{\lambda}}, \quad (16)$$

であり、それは過渡流の電気量を使った第1伸び量を与え、逆に、ここでは、実際の減衰の抵抗に影響された1振動の観測された時間である。 λ が小さいとき、近似公式

$$Q = \frac{H T}{G \pi} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda\right) \theta_1, \quad (17)$$

を使うことができる。

反跳法。

750.] 上で与えた方法は過渡流がコイルを通るとき、磁石は平衡位置に静止していると考えている。もし実験を繰り返したいなら、磁石がもう一度静止するまで待たなければならない。しかし、同じ強度の過渡流を生成でき、必

要な時にそうすることができるような場合には、ウェーバー^{註5}によって記述された以下の方法が連続的な観測系列を作るとき、もっとも便利である。

磁石を大きさが Q_0 の過渡流によって振らせると考えよう。もし、簡単のため、

$$\frac{G}{H} \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{T_1} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \tan^{-1} \frac{\pi}{\lambda}} = K, \quad (18)$$

と書くと、最初の伸び量は

$$\theta_1 = K Q_0 = a_1 \text{ (たとえば)}, \quad (19)$$

p. 389

である。

開始時に磁石に瞬間的に伝えられた速度は

$$v_0 = \frac{MG}{A} Q_0, \quad (20)$$

である。

それが戻り、平衡点を負の方向に通るとき、その速度は

$$v_1 = -v e^{-\lambda}, \quad (21)$$

である。

つぎの負の伸び量は

$$\theta_2 = -\theta_1 e^{-\lambda} = b_1, \quad (22)$$

である。

磁石が平衡位置に戻ったとき、その速度は

$$v_2 = v_0 e^{-2\lambda}, \quad (23)$$

であろう。

さて、磁石が零点にある瞬間に瞬間的な電流がコイルをとおして伝えられたとする。その全量は $-Q$ とする。それは速度 v_2 を $v_2 - v$ に変える。ここで

$$v = \frac{MG}{A} Q, \quad (24)$$

^{註5} Gauss & Weber, *Resultate des Magnetischen Vereins*, 1888, p. 98.

である。

もし Q が $Q_0 e^{-2\lambda}$ より大きければ、新しい速度は負で

$$-\frac{MG}{A}(Q - Q_0 e^{-2\lambda}),$$

に等しい。

磁石の運動は反転され、つぎの伸び量は負で、

$$\theta_3 = -K(Q - Q_0 e^{-2\lambda}) = c_1 = -KQ + \theta_1 e^{-2\lambda}, \quad (25)$$

となろう。

つぎに磁石は正の伸び量になることが許され、

$$\theta_4 = -\theta_3 e^{-\lambda} = d_1 = e^{-\lambda}(KQ - a_1 e^{-2\lambda}), \quad (26)$$

となる。それがふたたび平衡位置に達したとき、 Q の量の正の電流が伝えられる。これが磁石を正の方向へ戻し、正の伸び量

$$\theta_5 = KQ + \theta_3 e^{-2\lambda}; \quad (27)$$

へもっていく。これを 4 つの第 2 系列の最初の伸び量と呼ぶと、

$$a_2 = KQ(1 - e^{-2\lambda}) + a_1 e^{-4\lambda}, \quad (28)$$

である。

2 つの伸び量 $+$ と $-$ を観測することによって、この方法を進め、つぎに、負の電流を送って、2 つの伸び量 $-$ と $+$ を観測し、つぎに、正の電流を送り、そして、と続けると、4 つの伸び量の組からなる系列を得る。そのそれで、

$$\frac{d - b}{a - c} = e^{-\lambda}, \quad (29)$$

そして

$$KQ = \frac{(a - b)e^{-2\lambda} + d - c}{1 + e^{-\lambda}}, \quad (30)$$

である。

p. 390

もし n 系列の伸び量が観測されたなら、式

$$\frac{\Sigma(d) - \Sigma(b)}{\Sigma(a) - \Sigma(c)} = e^{-\lambda}, \quad (31)$$

から対数減衰率がわかり、式

$$\begin{aligned} & KQ(1 + e^{-\lambda})(2n - 1) \\ &= \Sigma_n(a - b - c + d)(1 + e^{-2\lambda}) - (a_1 - b_1) - (d_n - c_n)e^{-2\lambda}. \end{aligned} \quad (32)$$

から Q が分る。

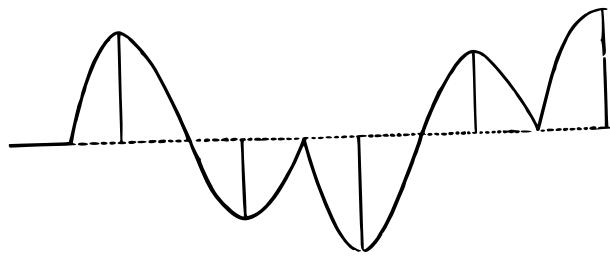


図 59.

反跳法の磁石の運動はグラフ的に図 59 に表現されている。ここで横軸は時間、縦軸はその時間の磁石の振れである。

乗算法。

751.] 磁石が零点を通りすぎることに過渡流を通し、つねに磁石の速度を増加させるようにするなら、そのとき、もし $\theta_1, \theta_2, \&c.$ が引き続く伸び量なら、

$$\theta_2 = -KQ - e^{-\lambda}\theta_1, \quad (33)$$

$$\theta_3 = +KQ - e^{-\lambda}\theta_2, \quad (34)$$

である。

非常に多くの振動のあと伸び量が向かう最終的な値は $\theta_n = -\theta_{n-1}$ と置くことにより見出される。したがって

$$\theta = \pm \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} KQ, \quad (35)$$

であることが分かる。

もし λ が小さいなら、最終的な伸び量の値は大きいかもしれないが、これは長く続く実験を必要とし、 λ の注意深い決定を必要とするので、また λ の小さな誤差が Q の決定に大きな誤差を招くので、この方法は数値的な決定にはほとんど役に立たず、直接観測にはあまりにも小さい電流の存在、非存在の証拠を得るために取っておくべきである。

過渡流を検流器の動く磁石に作用させる実験ではすべて、磁石の零点からの距離が全伸び量の小さな割合であり続けるあいだ、全ての電流を通すことが本質的である。振動の時間は、それゆえ、電流を生成するために要する時間とくらべて大きいはずであり、磁石の平衡点を通る磁石の通過の瞬間にによって電流の通過の瞬間を調整するよう操作者はその目を磁石の運動へむけるべきである。

適切な瞬間に電流を生成するために操作者の失敗によって導入される誤差の評価をするため、伸び量を増加させるとの衝撃の効果は

$$e^{\phi \tan \beta} \cos(\phi + \beta), \text{ 註 } 6$$

のように変わり、これは $\phi = 0$ のとき最大であることを観測する。したがって、電流のタイミングの誤りから生じる誤差はつねにその値の過小評価へと導き、誤差の合計は電流の通過時の振動の位相の余弦を 1 とくらべることにより評価できる。

p. 391

註 6 { 私はこの式を確かめることができていない。748 節の記法を使って、衝撃が ϕ に適用されたときの伸び量は $\phi = 0$ のときの同じ衝撃で生成された伸び量にたいして、比

$$e^{\frac{A\omega_1}{MGQ}\phi \tan \beta} \left\{ 1 + \frac{A\omega_1 \phi \tan \beta}{MGQ} \right\},$$

を持つことが分かる。ここで ϕ は非常に小さくてその 2 乗や高次の幂は無視できると仮定されている。}

第 XVII 章

コイルの比較。

コイルの電気定数の実験的決定。

752.] 717 節で、高感度検流器は、コイルは小さな半径で、何回も巻かれた導線を含まなければならないことを見てきた。そのようなコイルの電気定数をコイルの形と大きさを直接観測から決めるることは、コイルを測定するために、たとえ、すべての巻き導線を測定できたとしても、非常に困難であろう。しかし、事実、巻き数を大きくすると、ほとんどの巻き線が外の巻き線によって完全に隠されるだけではなく、導線をコイルにした後、外の巻き線の圧力が内側の巻き線の形を変えてしまっているかも分からぬ。

それゆえ、コイルの電気定数を定数の分っている標準コイルと比較することによって決定する方がよい。

標準コイルの大きさは、実際の測定によって決定しなければならないので、直徑や周囲の測定に伴う避けられない誤差が測定量と較べて可能なかぎり小さくできるよう、標準コイルはかなりの大きさにしなければならない。コイルが巻かれる溝は矩形断面にするべきで、断面の大きさはコイルの半径と較べて小さくないといけない。

これは断面の大きさの補正を減少させるよりも、外部巻き線によって隠されているコイルのこれらの巻き位置の不確定性を避けるために必要である^{註1}。 p. 393

^{註1} 大きな正接検流器がかなりの太さの一つの円形導体輪で作られることがある。その輪は支持なしにその形を維持するよう十分に硬い。標準装置にたいしてはこれはあまりよい考えではない。導体中の電流の分布はいろいろな部分の相対的な伝導率に依存する。したがって、金属の連続性の隠れた傷が電気の主要流を円形輪の内部近くや外部近くで流れさせるかもしれない。こうして電流の真の経路が不確かになる。これに加えて、電流が円を 1 度だけ回るとき、円に入りする途中の電流による懸架磁石への作用を避けるために特段の注意が必要である。電極中の電流は円内の電流と同じだけあるからである。多くの装置を組み立てるとき、この部分の電流の作

753.] G_1 の決定。実用検流器は標準コイルとくらべて非常に小さいから、実用検流器を標準コイル内に、中心が一致し、両コイルの面が鉛直で、地球の磁力に平行になるように、置く。こうして一方のコイルが標準コイルである差動検流器を手にいれた。標準コイルにたいしては G_1 は分かっており、もう 1 つのコイルの定数は G'_1 で、私たちはその値を決めなくてはならない。

検流器コイルの中心に懸架された磁石は両コイル中の電流によって作用を受ける。もし標準コイル中の電流の強さが γ で、検流器中の電流の強さが γ' なら、そのとき、もし反対方向に流れる電流が磁石の振れ角 δ を生成するなら、

$$H \tan \delta = G'_1 \gamma' - G_1 \gamma, \quad (1)$$

である。ここで H は地磁気の水平分力である。

もし振れを生成しないように電流を用意したなら、 G'_1 は式

$$G'_1 = \frac{\gamma}{\gamma'} G_1. \quad (2)$$

から分かる。

γ の γ' にたいする比はいくつかの方法で決めることができる。 G_1 の値は一般に標準コイルよりも検流器にたいして大きいので、すべての電流が標準コイルを通ったあと、 γ' が検流器と合成抵抗 R_1 の巻き線抵抗を通るように分け、残りの $\gamma - \gamma'$ は合成抵抗が R_2 のもう一つの組の抵抗を通って流れるよう、回路を配置することができる。

このとき、276 節によつて、

$$\gamma' R_1 = (\gamma - \gamma') R_2, \quad (3)$$

つまり

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}, \quad (4)$$

$$G'_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} G_1, \quad (5)$$

用はまったく視界から失われていた。

もっとも完全な方法は電極の一方を金属管の形にし、他方を絶縁物質で被覆された導線にし、それを管の内部に置き、同心にすることである。このように配置されたとき、683 節によつて、電極の外部作用は零である。

がなりたつ。

もし検流器のコイルの現実の抵抗に(たとえば、その温度にかんする不確定性のために)なんらかの不確定性があれば、検流器に巻き線抵抗を加え、検流器自身の抵抗が R_1 のわずかな部分を形成するだけにし、最終結果にほとんど不確定性を導入しないようにできる。

754.] 小コイルを流れる単位量の電流によるコイルの磁気モーメント, g_1 , を決めるために、磁石を標準コイルの中心に静かに吊るす。小さなコイルを両コイルの共通の軸にそって平行性を保って、コイルを反対方向に流れる同じ電流が磁石が振れなくなるまで動かす。もしコイルの中心間の距離が r なら、

$$G_1 = 2\frac{g_1}{r^3} + 3\frac{g_2}{r^4} + 4\frac{g_3}{r^5} + \&c. \quad (6)$$

がなりたつ。(700 節)

標準コイルの反対側でも小コイルを使った同じ実験を繰り返し、小コイルの 2 つの位置のあいだの距離を測ることによって、磁石と小コイルの中心の位置の決定値の不確定誤差を消去し、 $g_2, g_4, \&c.$ 中の項を除去する。

もし標準コイルを電流が半数の巻き線をとおるように配置し、 G_1 にいろいろな値を与えることができるなら、新しい r の値を決めることができ、454 節の方法で、 g_3 を含む項を消去することができる。

しかし、小コイルの直接観測によって十分な精度で g_3 を決め、式

$$g_1 = \frac{1}{2}G_1r^2 - 2\frac{g_3}{r^2}, \quad (7)$$

の g_1 に適用される補正值の計算で g_3 を使えるようにすることが、しばしば、可能である。ただし、(7) 式で、700 節によって、

$$g_3 = -\frac{1}{8}\pi a^2(6a^2 + 3\xi^2 - 2\eta^2),$$

である。

p. 395

誘導係数の比較。

755.] 回路の形と位置から誘導係数の直接計算が簡単に行われるのはわずかな場合しかない。十分な精度を達成するためには、回路間の距離が厳密に

測定ができなければならない。しかし、回路間の距離を十分にとり、測定誤差が結果に大きな誤差を導入させないようにすると、誘導係数自身の大きさが必然的に非常に小さくなる。ここでは、多くの実験にたいして誘導係数を大きくすることが必要であり、回路を互いに近付けることによってのみ、大きくすることができるので、直接測定法は不可能になり、誘導係数を決めるためには、それらの係数が直接測定と計算から得ることができるように整備されたコイル対の係数と較べなければならない。

これは以下のように行われる：

A と a を標準コイル対とし、 B と b をそれと較べられるコイルとする。 A と B を 1 回路で結びつけ、検流器の電極 G を P と Q に置き、 PAQ の抵抗を R 、 QBP の抵抗を S とする。 K は検流器の抵抗である。 a と b を電池ととともに 1 回路に結合する。

A での電流を x 、 B での電流を y 、検流器での電流を $x - y$ 、電池回路での電流を γ とする。

このとき、もし M_1 が A と a のあいだの誘導係数、 M_2 が B と b のあいだの誘導係数なら、電池回路を断ったときに検流器をとおった積算誘導流は

$$x - y = \gamma \frac{\frac{M_2}{S} - \frac{M_1}{R}}{1 + \frac{K}{R} + \frac{K}{S}}, \quad (8)$$

である。

電池回路を断続したとき、検流器を通る電流がなくなるまで、抵抗 R 、 S を調整することにより、 M_2 の M_1 にたいする比が S の R にたいする比を測定することによって決定できる。

註² [式 (8) は次のように証明できる： L_1, L_2, N, Γ を、それぞれ、 A, B, ab 、および検流器の自己誘導係数とする。このとき、系の運動エネルギー T

註² [角括弧内の研究は、クラーク マックスウェル教授の講義のフレミングのノートからとられたものであるが、教授によって行われた最終講義の一部として、感傷的な関心が持たれている。

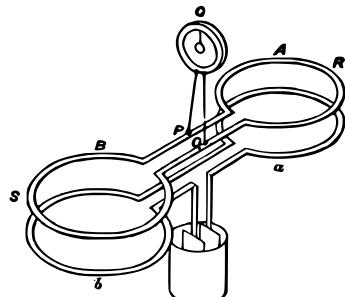


図: 60.

は近似的に

$$\frac{1}{2}L_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\Gamma(\dot{x} - \dot{y})^2 + \frac{1}{2}N\gamma^2 + M_1\dot{x}\gamma + M_2\dot{y}\gamma,$$

である。

散逸関数 F 、つまり、電流のエネルギーがコイルの加熱で消費される率の半分は、(レイリー卿の音の理論、i 卷 p. 78 参照)

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2R + \frac{1}{2}\dot{y}^2S + \frac{1}{2}(\dot{x} - \dot{y})^2K + \frac{1}{2}\gamma^2Q,$$

である。ここで Q は電池と電池コイルの抵抗である。

任意の変数 x に対応する電流の式は

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dx} - \frac{dT}{dx} + \frac{dF}{dx} = \xi,$$

の形をしている。ここで ξ は対応する駆電力である。

したがって

$$L_1\ddot{x} + \Gamma(\ddot{x} - \ddot{y}) + M_1\dot{\gamma} + R\dot{x} + K(\dot{x} - \dot{y}) = 0,$$

$$L_2\ddot{y} - \Gamma(\ddot{x} - \ddot{y}) + M_2\dot{\gamma} + S\dot{y} - K(\dot{x} - \dot{y}) = 0.$$

がなりたつ。

これらの式は t にかんしてただちに積分できる。 $x, \dot{x}, y, \dot{y}, \gamma$ が初期に零であることを観測すると、もし $x - y = z$ と書くと、 y を消去して、

$$A\dot{z} + B\ddot{z} + Cz = D\dot{\gamma} + E\gamma, \quad (8')$$

の形の式が分かる。

電池が接続された後、短い時間で、電流 γ は定常になり、電流 \dot{z} は消え去っているであろう。したがって、

$$Cz = E\gamma.$$

である。

フレミング氏のノートでは、実験計画はテキストで与えられたものと、電池と検流器が交換されている点で異なっている。]

p. 397

これが上の式(8)を与える。これは検流器を通りすぎる全電気量が零のとき、 $E = 0$ 、つまり $M_2R - M_1S = 0$ がなりたなければならないことを示している。さらに、式(8')は検流器にまったく電流がなければ、 $D = 0$ 、つまり $M_2L_1 - M_1L_2 = 0$ も成り立たなければならない。]註3

自己誘導係数と相互誘導係数の比較。

756.] ホイートストーン橋の枝 AF にコイルが挿入されたとし、その自己誘導係数を見つけたいとする。それを L と呼ぼう。

A と電池のあいだの結合導線に、もう一つのコイルが挿入される。このコイルと AF のコイルの相互誘導係数は M である。それは 755 節で記述された方法によって測定することができる。

もし A から F への電流が x で、 A から H への電流が y なら、 B を通る Z から A への電流は $x + y$ である。 A から F への外部駆電力は

$$A - F = Px + L \frac{dx}{dt} + M \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right), \quad (9)$$

である。

AH に沿う外部駆電力は

$$A - H = Qy, \quad (10)$$

である。

F と H のあいだに置かれた検流器が、過渡流であれ、永続流であれ、電流を指し示さなければ、そのとき、(9) と (10) によって、 $H - F = 0$ だから、

$$Px = Qy; \quad (11)$$

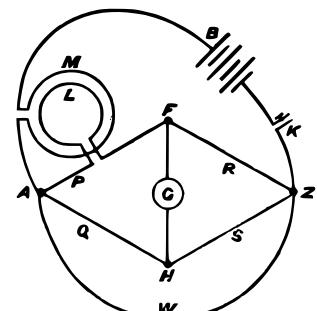


図 : 61.

註3 { 条件 $M_2L_1 - M_1L_2 = 0$ が近似的に満たされていないかぎり、過渡流によって検流器の零に生じる非定常性が電池回路を閉じたとき検電器の反動があるのかどうか、正確に決定することができない。 }

かつ

$$L \frac{dx}{dt} + M \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right) = 0, \quad (12)$$

である。ここで

$$L = -\left(1 + \frac{P}{Q}\right)M, \quad (13)$$

である。

L はつねに正であるから、 M は負でなければならず、それゆえ、電流は P 中と B 中に置かれたコイルをとおって反対方向に巡らなければならない。実験を行うにあたって、これは永続流がなくてもよい条件

$$PS = QR, \quad (14)$$

がなりたつように抵抗を調節することから始め、つぎに電池の断続時に検流器が過渡流を指示することを止めるまでコイル間の距離を調節するか、それとも、もしこの距離が調整できないなら、抵抗 Q と S を Q の S にたいする比を一定に保って変えることによって過渡流をなくすことから始めてよい。

p. 398

もしこの 2 重調整があまりにも面倒なら、第 3 の方法を探ることもできる。自己誘導による過渡流が相互誘導による過渡流をほとんど越えない配置から始め、 A と Z のあいだに抵抗が W である導体を挿入することによって不等性を除去することができる。検流器を通る永続流がない条件は W の導入によって影響されない。それゆえ、過渡流を抵抗 W の調整のみによって除去することができる。これが行われたとき、 L の値は

$$L = -\left(1 + \frac{P}{Q} + \frac{P+R}{W}\right)M, \quad (15)$$

である。

2 コイルの自己誘導係数の比較。

757.] ホイートストーン橋の隣接する 2 つの枝にコイルを挿入する。 L と N を、それぞれ、 P と R に挿入されたコイルの自己誘導係数とすると、図 61 の検流器の電流が無い条件は

$$(Px + L \frac{dx}{dt})Sy = Qy(Rx + N \frac{dx}{dt}), \quad (16)$$

であり、したがって、

$$PS = QR, \text{ 永続流のない場合}, \quad (17)$$

および

$$\frac{L}{P} = \frac{N}{R}, \text{ 過渡流のない場合}, \quad (18)$$

である。

したがって、抵抗を適当に調整することによって、永久流と過渡流の両方を除去することができ、そのとき L の N にたいする比は抵抗の比較によって決めることができる。

p. 399

XVII 章の付録。

{ コイルの自己誘導係数の測定法はマクスウェルの論文、電磁場の力学理論、*Phil. Trans.* 155, pp. 475-477, からの以下の抜き書きに記述されている。

「電気天秤による誘導係数の決定について。」

電気天秤は 4 点 A, C, D, E , の 2 つと 2 つを結ぶ 6 導体からなる。

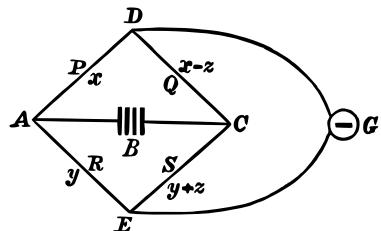


図 62.

これらの点の 1 対 AC は電池 B をとおして結ばれている。反対の対 DE は検電器 G をとおして結ばれている。そのとき、もし 4 つの残りの抵抗が P, Q, R, S によって、そのなかの電流が $x, x - z, y, y + z$, によって表現される

なら、 G をとおる電流は z であろう。4 点のポテンシャルを A, C, D, E とする。そのとき、定常電流の条件は式

$$\left. \begin{array}{l} Px = A - D, \quad Q(x - z) = D - C, \\ Ry = A - E, \quad S(y + z) = E - C, \\ Gz = D - E, \quad B(x + y) = -A + C + F, \end{array} \right\}$$

から分かる。

これらの式を z について解くと

$$z \left\{ \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} + \frac{1}{S} + B \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{R} \right) \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{S} \right) + G \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} \right) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S} \right) \right. \\ \left. + P \frac{BG}{PQRS} (P + Q + R + s) \right\} = F \left(\frac{1}{PS} - \frac{1}{QR} \right), \quad (22)$$

が分かる。

この式で、 F は電池の駆電力、 z は検流器が定常になったときの検流器を通る電流、 P, Q, R, S は 4 つの腕の抵抗、 B は電池と電極の抵抗、 G は検流器の抵抗である。
p. 400

(44) もし $PS = QR$ なら、 $z = 0$ であり、定常電流はないであろうが、検流器を通る過渡流は誘導のため回路を断続したときに生成されるかもしれない、検流器の指示はもし誘導が生じたときの作用を理解しているなら、誘導係数の決定に使うことができる。十分な時間が許容されたとき電流 z が消えるように、 $PS = QR$ あると考え、

$$x(P + Q) = y(R + S) = \frac{F(P + Q)(R + S)}{(P + Q)(R + S) + B(P + Q + R + S)}, \quad (23)$$

としよう。

P, Q, R, S 間の誘導係数は以下の表により与えられ、 P のそれ自身への誘導係数は p 、 P と Q のあいだは h 、等々としよう。

	P	Q	R	s
P	p	h	k	l
Q	h	q	m	n
R	k	m	r	o
S	l	n	o	s

g を検流器のそれ自身への誘導係数とし、 P, Q, R, S の誘導の影響の到達範囲外であるとする。 (P, Q, R, S) の指針への直接作用を避けるために、そうでなければならないからである。) X, Y, Z を t にかんする x, y, z の積分とする。接続時、 x, y, z は零である。ある時間が経つと、 z はなくなり、 x と y は一定値に達する。それぞれの導体にたいする式は、それゆえ、

$$\left. \begin{aligned} PX + (p+h)x + (k+l)y &= \int Adt - \int Ddt, \\ Q(X-Z) + (h+q)x + (m+n)y &= \int Ddt - \int Cdt, \\ RY + (k+m)x + (r+o)y &= \int Adt - \int Edt, \\ S(Y+Z) + (l+n)x + (o+s)y &= \int Edt - \int Cdt, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$GZ = \int Ddt - \int Edt,$$

となる。

これらの式を Z にたいして解くと、

$$\begin{aligned} Z\{\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} + \frac{1}{S} + B(\frac{1}{P} + \frac{1}{R})(\frac{1}{Q} + \frac{1}{S}) + G(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q})(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}) \\ + \frac{BG}{PQRS}(P+Q+R+S)\} = -F\frac{1}{PS}\{\frac{p}{P} - \frac{q}{Q} - \frac{r}{R} + \frac{s}{S} \\ + h(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}) + k(\frac{1}{R} - \frac{1}{P}) + l(\frac{1}{R} + \frac{1}{Q}) - m(\frac{1}{P} + \frac{1}{S}) \\ + n(\frac{1}{Q} - \frac{1}{S}) + o(\frac{1}{S} - \frac{1}{R})\} \end{aligned} \quad (25)$$

p. 401

であることが分かる。

強度が $\{$ 積算で $\}Z$ である瞬間的な電流による検流器の振れを a とする。 PS の QR にたいする比を 1 ではなく、 ρ とすることによって生成される永続的な振れを θ とする。

また、静止から静止までの検流器の針の振動時間を T とする。このとき、量

$$\begin{aligned} \frac{p}{P} - \frac{q}{Q} - \frac{r}{R} + \frac{s}{S} + h(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}) + k(\frac{1}{R} - \frac{1}{P}) + l(\frac{1}{R} + \frac{1}{Q}) \\ - m(\frac{1}{P} + \frac{1}{S}) + n(\frac{1}{Q} - \frac{1}{S}) + o(\frac{1}{S} - \frac{1}{R}) = \tau, \end{aligned} \quad (26)$$

と呼ぶと、

$$\frac{Z}{z} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha T}{\tan \theta \pi} = \frac{\tau}{\rho - 1}, \quad (27)$$

が分かる。

実験により τ を決めるとき、1つの腕の抵抗の変更を、1863 年度の英國協会の報告中のジェンキン氏によって記述された配置法によって行うのが最良である。そこでは 1 から 1.01 までの ρ の任意の値を正確に測ることができる。

検流器が回路中にある時の誘導の衝撃による最大の振れの { 到達値 }{ α } を、接続をおこなったとき、抵抗を永久電流がなくなるように調整して、観測する。

つぎに、検流器を電池が接続された少し後まで回路から外して、一つの腕の抵抗の比を ρ から 1 に増やしたとき永久電流によって生成された最大の振れの { 到達値 }、{ β } を観測する。

空気の抵抗の効果を消去するために、 ρ を $\beta = 2\alpha$ 近くまで変化させるのが最良である。そのとき

$$\tau = T \frac{1}{\pi} (\rho - 1) \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}{\tan \frac{1}{2}\beta},$$

である。

もし P 以外のすべての天秤の腕がコイル化される前に 2 重にされたそれほど長さのない非常に細い導線でできたコイルの抵抗からなるなら、これらのコイルに属する誘導係数は、無視できる程度のもので、 τ は p/P まで下げる。それゆえ、電気天秤は抵抗が知られている任意の回路の自己誘導の測定法を与える。

第 XVIII 章

抵抗の電磁単位。

電磁的な尺度でのコイルの抵抗の決定。

758.] 導体の抵抗は、起電力が導体中に生成する電流の数値に対する、起電力の数値の比である。地球の磁力の値が分っているとき、電磁的な尺度での電流の値の決定は標準検流器を使って行うことができる。駆電力の値の決定は更に難しい。駆電力が既知の磁気系にかんする回路の相対運動から生じるときのみ、駆電力の値を直接計算できるからである。

759.] 電磁的な尺度での導線の抵抗を始めて決定したのはキルヒホフ^{註1}である。彼は形の知られている 2 つのコイル A_1, A_2 を採用し、その形と位置の幾何学的なデータから相互誘導係数を計算した。これらのコイルは検流器 G と電池 P を持つ回路中に置かれ、コイル間の P 、電池と検流器のあいだの Q の回路の 2 点が抵抗が R である導線によって結ばれており、その導線の抵抗 R が測られるべきものである。

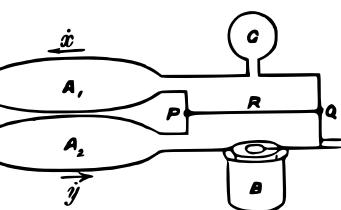


図: 63.

電流が定常であるとき、電流は、導線と検流器回路のあいだで分割され、検流器の永続的なある大きさの振れを作る。もしコイル A_1 が A_2 からすればやく取り去られ、 A_1 と A_2 のあいだの相互誘導係数が零である位置に置かれ

p. 403

^{註1} ‘Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt.’ 「誘導電流強度が依存する定数の決定」. Pogg., Ann., lxxvi (April 1849), .

る(538 節)なら、誘導電流が両回路中に生成され、検流器の針は衝撃を受け、ある大きさの過渡的な振れ^{註 2}を生成する。

導線の抵抗, R , は定常流による永続振れと過渡振れのあいだの比較から導かれる。

QGA_1P の抵抗を K 、 PA_2BQ の抵抗を B 、 PQ の抵抗を R とする。

A_1 と A_2 の誘導係数を L, M, N とする。

G 中の電流を \dot{x} 、 B 中の電流を \dot{y} とすると、 P から Q への電流は $\dot{x} - \dot{y}$ である。

E を電池の駆電力とすると、

$$(K + R)\dot{x} - R\dot{y} + \frac{d}{dt}(L\dot{x} + M\dot{y}) = 0, \quad (1)$$

$$-R\dot{x} + (B + R)\dot{y} + \frac{d}{dt}(M\dot{x} + N\dot{y}) = E \quad (2)$$

である。

電流が一定で、すべてが静止しているとき、

$$(K + R)\dot{x} - R\dot{y} = 0, \quad (3)$$

である。

A_1 の A_2 からの分離によってもし M が零になれば、そのとき、 t にかんして積分すると、

$$(K + R)x - Ry - M\dot{y} = 0, \quad (4)$$

$$-Rx + (B + R)y - M\dot{x} = \int E dt = 0; \quad (5)$$

したがって

$$x = M \frac{(B + R)\dot{y} + R\dot{x}}{(B + R)(K + R) - R^2}, \quad (6)$$

である。

註 2 { コイル A_1 を取り除くかわりに、 A_2 を通る電流を逆転する方が便利である。この場合、衝撃検流計を通りすぎる電気量はテキストで与えられたものの 2 倍である。キルヒホフの方法は絶対測定で抵抗を決めるために Messrs. Glazebrook, Sargent and Dodds らによって使われてきた。Phil. Trans. 1888, pp. 223-268. }

(3) から \dot{x} をつかって \dot{y} の値を代入すると

$$\frac{x}{\dot{x}} = \frac{M}{R} \frac{(B+R)(K+R) + R^2}{(B+R)(K+R) - R^2} \quad (7)$$

$$= \frac{M}{R} \left\{ 1 + \frac{2R^2}{(B+R)(K+R)} + \&c. \right\}, \quad (8)$$

であることが分かる。

p. 404

キルヒホフの実験のように、 B, K の両方が R と較べて大きいとき、この式は

$$\frac{x}{\dot{x}} = \frac{M}{R}, \quad (9)$$

に簡略化する。

これらの量のうち、 x は誘導電流による検電器の衝撃振れから分かる。748 節参照。永続電流、 \dot{x} 、は定常流による永久振れから分かる。746 節参照。 M は幾何学データから直接計算によっても分かり、この計算が行われてきたコイル対との比較によっても分かる。

これらの方針は検流計磁石の振動周期と振動の対数減衰率の決定を含む。

過渡流によるウェーバーの方法^{註3}。

760.] かなりの大きさのコイルが、鉛直な直径を軸として回転できるように軸上に装着される。このコイルの導線が、1つの回路を形成するように、正接検流計の導線と結合される。この回路の抵抗を R とする。大きなコイルをその正の面を磁気子午面に垂直に置き、それをすばやく半回転させよう。地球の磁力による誘導電流が存在し、電磁的な尺度でのこの電流の全電気量は

$$Q = \frac{2g_1 H}{R}, \quad (1)$$

であろう。ここで g_1 は単位量の電流にたいするコイルの磁気モーメントであり、大きなコイルの場合、それはコイルの大きさを測定し、その巻きの面積の和を計算することにより、直接に決定できる。 H は地磁気の水平成分であり、 R はコイルと検流計をあわせて形成された回路の抵抗である。この電流が検流計の磁石を運動させる。

^{註3} Elekt. Maasb.; または Pogg., Ann., lxxxii. pp. 337-369 (1851).

p. 405

もし磁石が始めに静止しているなら、そしてもしこイルの運動が磁石の振動時間のわずかな部分しか占めないなら、そのとき、もし磁石の運動への抵抗を無視するなら、748 節により、

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin \frac{1}{2} \theta, \quad (2)$$

が成り立つ。ここで、 G は検流計の定数、 T は磁石の振動の時間、 θ は観測された離角（伸長）である。これらの式から

$$R = \pi G g_1 \frac{1}{T \sin \frac{1}{2} \theta}, \quad (3)$$

を得る。

H の値は、コイルの位置と検流計の位置で同じなら、この結果には現れない。これが正しいと仮定してはならず、同じ磁石の振動時間を、最初にこれらの場所の 1 つで、つぎに他の場所で比較することによって検証すべきである。

761.] 一連の観測をするために、ウェーバーは磁気子午線に平行なコイルから始めた。つぎにコイルの正の面を北に向け、負の電流による最初の離角を観測した。つぎに自由に揺れる磁石の第 2 の離角を観測し、平衡点を通って磁石が戻るとき、コイルの正の面を南に向けた。これは磁石を正の側に反跳させる。この系列が 750 節によく続けられ、結果が抵抗を補正する。このようにして、コイルと検流計の結合回路の抵抗値が確かめられる。

そのような実験すべてで、十分に大きな振れを得るためにには銅の導線を作ることが必要だが、銅は最良の導体にもかかわらず、温度の変化により抵抗がかなり変わるという不都合さを持つ金属である。また装置の各部分の温度を確かめることは非常に困難である。したがって、そのような実験から永久的な値の結果を得るためにには実験回路の抵抗はそれぞれの実験の前後に注意深く構成された抵抗コイルの抵抗と比較すべきである。

磁石の振動の減少率の観測によるウェーバーの方法。

p. 406

762.] かなりの磁気モーメントの磁石が検流計のコイルの中心に懸架されている。振動周期と振動の対数減少率が、まず検流計の回路を開いて、つぎに

回路を閉じて、観測され、検流計のコイルの伝導率が磁石の運動によってコイルに誘導される電流が磁石の運動に抵抗するなかで持つ効果から導かれる。

もし T が 1 振動の観測された時間で、 A が各 1 振動にたいする自然対数減少率なら、そのとき、もし

$$\omega = \frac{\pi}{T}, \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{T}, \quad (2)$$

と書くと、磁石の運動の式は

$$\phi = Ce^{-at} \cos(\omega t + \beta), \quad (3)$$

の形になる。

これは観測によって決められた運動の性質を表示する。これを運動の力学式と較べなければならない。

M を検流計のコイルと懸架磁石のあいだの誘導係数としよう。それは

$$M = G_1 g_1 P_1(\theta) + G_2 g_2 P_2(\theta) + \&c., \quad (4)$$

の形をしている。ここで $G_1, G_2, \&c.$ はコイルに属する係数であり、 $g_1, g_2, \&c.$ は磁石に属する係数であり、 $P_1(\theta), P_2(\theta)$ はコイルの軸と磁石のあいだの角度の帯域調和関数である。700 節参照。検流計のコイルの適切な配置によって、また、いくつかの磁石を適切な距離で並べた懸架磁石を構成することによって、 M の第 1 項以降のすべての項を第 1 項とくらべて無視することができる。もし $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$ と置くと、

$$M = Gm \sin \phi, \quad (5)$$

と書くことができる。ここで、 $G\{= G_1\}$ は検流計の主係数であり、 m は磁石の磁気モーメント、 ϕ は磁石の軸とコイル面のあいだの角度であり、この実験では、それは常に小さい角度である。

もし L がコイルの自己誘導係数で、 R がその抵抗、 g がコイル中の電流なら、

$$\frac{d}{dt}(L\gamma + M) + R\gamma = 0, \quad (6)$$

つまり

$$L \frac{d\gamma}{dt} + Ry + Gm \cos \phi \frac{d\phi}{dt} = 0, \quad (7)$$

p. 407

である。

電流 γ が磁石に作用する力のモーメントは $\gamma \frac{dM}{d\phi}$ 、つまり $Gm\gamma \cos \phi$ である。角度 ϕ は、この実験では非常に小さいので、 $\cos \phi = 1$ と考えることができる。

回路が断たれたとき、磁石の運動方程式は

$$A \frac{d^2\phi}{dt^2} + B \frac{d\phi}{dt} + C\phi = 0, \quad (8)$$

であると考えよう。ここで、 A は懸架された装置の慣性能率であり、 $B \frac{d\phi}{dt}$ は空気と懸架繊維の粘性から生じる抵抗を表示し、 $C\phi$ は地磁気や懸架された装置の振れ、その他から生じる力のモーメントで、磁石をその平衡位置へ戻そうとする。

電流が影響をおよぼすとき、運動方程式は

$$A \frac{d^2\phi}{dt^2} + B \frac{d\phi}{dt} + C\phi = Gm\gamma, \quad (9)$$

となる。

磁石の運動を決めるために、この式を (7) と結びあわせて、 γ を消去しなければならない。結果は

$$(L \frac{d}{dt} + R)(A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + C)\phi + G^2 m^2 \frac{d\phi}{dt} = 0, \quad (10)$$

で、3 階線形微分方程式である。

しかし、この方程式を解くことはない。問題のデータは磁石の運動の観測された要素であり、これらから R の値を決めなければならないからである。

a_0 と ω_0 を回路が断たれたときの式 (3) の a と ω の値とする。この場合、 R は無限大で、式 (10) は形 (8) に簡略化する。こうして

$$B = 2Aa_0, \quad C = A(a_0^2 + \omega_0^2), \quad (11)$$

が分かる。

式(10)を R にたいして解き、

$$\frac{d}{dt} = -(a + i\omega), \text{ ただし } i = \sqrt{-1}, \quad (12)$$

と書くと

$$R = \frac{G^2 m^2}{A} \frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega - 2\alpha_0(\alpha + i\omega) + \alpha_0^2 + \omega_0^2} + L(\alpha + i\omega), \quad (13)$$

であることが分かる。

p. 408

一般に ω の値は α の値とくらべてはるかに大きいので、 R の最良値は $i\omega$ 中の項を等値すると

$$R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + \frac{1}{2}L\left(3\alpha - \alpha_0 - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha - \alpha_0}\right), \quad (14)$$

であることがわかる。

i を含まない項を等値することによっても、 R の値を得ることができるが、これらの項は小さいので、方程式は観測精度を検証する手段として役に立つだけである。これらの式から、以下の検証用の式

$$\begin{aligned} & G^2 m^2 \{\alpha^2 + \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2\} \\ &= LA\{(\alpha - \alpha_0)^4 + 2(\alpha - \alpha_0)^2(\omega^2 + \omega_0^2) + (\omega^2 - \omega_0^2)^2\}, \end{aligned} \quad (15)$$

が分かる。

$LA\omega^2$ は $G^2 m^2$ とくらべて非常に小さいので、この式は

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \alpha_0^2 - \alpha^2; \quad (16)$$

を与える。(14)式は

$$R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + 2L\alpha. \quad (17)$$

と書くことができる。

この式で G は検流計コイルの長さの計測から決めるか、より良くは753節の方法にしたがって、標準コイルとの比較によって決めることが可能である。 A は磁石とその懸架装置の慣性モーメントであり、それは適切な力学的方法により見出すことができる。 $\omega, \omega_0, \alpha, \alpha_0$ は観測によって与えられる。

懸架された磁石の磁気モーメント, m , の値の決定は研究のもっとも困難な部分である。それは温度、地球磁気、力学的な歪曲に影響され、したがって、磁石が、振動しているときとまったく同じ状況にあるときにこの量を測定するように非常な注意を払わなければならないからである。

L を含む R の第 2 項は、第 1 項と較べて一般に小さいので、それほど重要ではない。 L の値はコイルの既知の形から計算によって決めるか、誘導過剩電流についての実験から決めることができる。756 節参照。

回転コイルによるトムソンの方法。

763.] この方法はトムソンが英國電氣標準協会委員会に示唆したもので、実験はバルフォア ステウワート (MM. Balfour Stewart, 1828–1887)、フレーミング ジエンキン (Fleeming Jenkin, 1833–1885), および著者によって 1863 年になされた註⁴。

p. 409
円形コイルが鉛直軸のまわりに一様速度で回転させられる。小さな磁石がコイルの中心で絹糸によって懸架される。電流が地磁気によって、また懸架磁石によっても、コイル中に誘導される。この電流は周期的で、地球の回転のいろいろな部分のあいだにコイルの導線を通って反対方向に流れるが、懸架された磁石への電流の効果はコイルの回転の方向に磁気子午面からの振れを生成する。

764.] H を地磁気の水平成分とする。

γ をコイル中の電流の強さとする。

g をすべての巻き導線に囲まれた全面積とする。

G を単位量の電流によるコイルの中心での磁力とする。

L をコイルの自己誘導係数とする。

M を懸架された磁石の磁気モーメントとする。

θ をコイル面と磁気子午面のあいだの角度とする。

註⁴ Report of the British Association for 1863, pp. 111-176 参照。

ϕ を懸架された磁石の軸と磁気子午面のあいだの角度とする。

A を懸架された磁石の慣性モーメントとする。

$MH\tau$ を懸架纖維の捩れ係数とする。

α を捩れのないときの磁石の方位角とする。

R をコイルの抵抗とする。

系の運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}L\gamma^2 - Hg\gamma \sin \theta - MG\gamma \sin(\theta - \phi) + MH \cos \phi + \frac{1}{2}A\dot{\phi}^2, \quad (1)$$

である。

第1項, $\frac{1}{2}L\gamma^2$, はコイル自身に依存する電流のエネルギーを表示する。第2項は電流の相互作用と地磁気に依存し、第3項は電流の相互作用と懸架磁石の磁気に依存し、第4項は懸架磁石の磁気と地磁気に依存し、最後の項は磁石と磁石とともに動く懸架装置の複合物質の運動エネルギーを表示する。

纖維の捩れから生じる懸架された装置のポテンシャルエネルギー { の可変部分 } は

$$V = \frac{MH}{2}\tau(\phi^2 - 2\phi\alpha). \quad (2)$$

である。

p. 410

電流の電磁運動量は

$$p = \frac{dT}{d\gamma} = L\gamma - Hg \sin \theta - MG \sin(\theta - \phi), \quad (3)$$

であり、もし R がコイルの抵抗なら、電流の式は

$$R\gamma + \frac{d^2T}{dtd\gamma} = 0, \quad (4)$$

つまり、

$$\theta = \omega t, \quad (5)$$

であるから、

$$(R + L\frac{d}{dt})\gamma = Hg\omega \cos \theta + MG(\omega - \dot{\phi}) \cos(\theta - \phi), \quad (6)$$

である。

765.] 磁石の方位角, ϕ , は 2 種類の周期変動に従うことは、理論でも観測でも同様の結果である。これらの 1 つは自由振動で、その周期は地磁気の強さに依存し、実験では、数秒である。もう 1 つは強制振動で、その周期は回転するコイルの周期の半分で、その振幅は、これから見るように、ほとんどみえない。従って、 γ を決めるとき、 ϕ をほとんど定数として扱うことができる。

こうして、

$$\gamma = \frac{HG\omega}{R^2 + L^2\omega^2} (R \cos \theta + L\omega \sin \theta) \quad (7)$$

$$+ \frac{MG\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \{R \cos(\theta - \phi) + L\omega \sin(\theta - \phi)\}, \quad (8)$$

$$+ Ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad (9)$$

であることが分かる。

回転が一様に続くとき、この式の最後の項はすぐに消え去る。

懸架磁石の運動方程式は

$$\frac{d^2T}{dt d\dot{\phi}} - \frac{dT}{d\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (10)$$

である。したがって、

$$A\ddot{\phi} - MG\gamma \cos(\theta - \phi) + MH(\sin \phi + \tau(\phi - \alpha)) = 0, \quad (11)$$

である。

γ の値を代入し、 θ の倍数の関数にしたがって項を整理すると、観察から

$$\phi = \phi_0 + be^{-lt} \cos nt + c \cos 2(\theta - \beta), \quad (12)$$

である。ここで、 ϕ_0 は ϕ の平均値であり、第 2 項は次第に減衰する自由振動を表示し、第 3 項は振れの電流の変動から生じる強制振動を表示する。

θ を含まず、ひとまとめで零にならなければならない (11) の項から始めると、近似的に

$$\begin{aligned} & \frac{MG\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \{Hg(R \cos \phi_0 + L\omega \sin \phi_0) + GMR\} \\ &= 2MH(\sin \phi_0 + \tau(\phi_0 - \alpha)), \end{aligned} \quad (13)$$

が分かる。

$L \tan \phi_0$ は一般に $Gg\{$ そして $GM \sec \phi$ with $gH,$ $\}$ と較べて小さいから、2 次式 (13) の解は近似的に

$$R = \frac{GM\omega}{2 \tan \phi_0 (1 + \tau \frac{\phi_0 - \alpha}{\sin \phi_0})} \left\{ 1 + \frac{GM}{gH} \sec \phi_0 - \frac{2L}{Gg} \left(\frac{2L}{Gg} - 1 \right) \tan^2 \phi_0 - \left(\frac{2L}{Gg} \right)^2 \left(\frac{2L}{Gg} - 1 \right)^2 \tan^4 \phi_0 \right\} \quad (14)$$

を与える。

(7), (8), (11) 式でもしこの式の主要項を採ると^{註5} (12) 式の n の値は $\sqrt{\frac{HM}{A} \sec \phi_0}$ であることが分かるであろう。強制振動の振幅、 c は $\frac{1}{4} \frac{n^2}{\omega^2} \sin \phi_0$ である。したがって、磁石の 1 自由振動のあいだに何回も回転するとき、磁石の強制振動の振幅は非常に小さく、(11) で c を含む項を無視することができる。

766.] こうして抵抗が速度 ω と偏差 ϕ を使って電磁的な尺度で決められる。水平地球磁力 H は、実験のあいだ一定に保たれているなら、決める必要はない。

$\frac{M}{H}$ を決めるためには、454 節で記述されたように、磁力計の磁石を振らすために懸架磁石を使わなければならない。この実験では、 M は小さいはずで、この補正は二次的に重要になる。

この実験で要請されるそのほかの補正にたいして、*Report of the British Association for 1863*, p. 168 を参照せよ。

ジューールの熱量法。

767.] 抵抗 R の導体を通る電流 γ によって生成された熱は、242 節、ジューールの法則により

$$h = \frac{1}{J} \int R \gamma^2 dt, \quad (1)$$

である。ここで、 J は採用された単位量の熱の力学当量である。したがって、p. 412

^{註5} { 式 (6) で $L = 0$ と置き、(11) 式で γ の対応する値を代入する方が、短く、精密である。 }

もし R が実験中一定であるなら、その値は

$$R = \frac{Jh}{\int \gamma^2 dt}, \quad (2)$$

である。

この R の決定法は、与えられた時間に電流によって生成される熱、 h の決定と、電流の強さの 2 乗、 γ^2 の決定を含む。

ジュールの実験^{註 6} では、 h は導線が沈められた容器中の水の温度の上昇によって決められた。それは導線を電流が通らない別の実験によって輻射の効果の補正がなされた。

電流の強さは正接検流計を使って測定された。この方法は地磁気の強度の決定を含み、それは 457 節で記述された方法によってなされた。これらの測定は、726 節で記述された、電流重量計によつても検証され、それは γ^2 を直接に測定している。しかしながら、 $\int \gamma^2 dt$ の測定のもつとも直接的な方法は γ^2 に比例した読みを与える尺を持つ自己作用電力計 (725 節) を通し、等時間隔で観測をおこなうことである。それは実験^{註 7} の全過程のあいだ、機器の各振動の極点で読みとることによって近似的に行うことができる。

^{註 6} Report on Standards of Electrical Resistance of the British Association for 1867, pp. 474-522.

^{註 7} { 抵抗の絶対的な尺度を見出す様々な方法の相対的な利点にたいして、読者はレイリー卿の論文、Phil. Mag. Nov. 188 を参照せよ。ローレンツによるテキスト中で与えられていない優れた方法が Phil. Trans. 1883, Part I, pp. 295-322 でレイリー卿とシドウイック夫人によって完全に記述されている。読者はまた同じ著者による「絶対尺度での抵抗の英國協会単位の値を決定する実験」Phil. Trans. 1882, Part II, pp. 661-697 と題された論文を調べよ。

}

第 XIX 章

静電単位と電磁単位の比較。

1 電磁単位中の静電単位の数の決定。

768.] 静電系、電磁系での電気の単位の絶対的な大きさは、長さ、時間、質量の単位として何を採用するかに依存しており、これらの単位への依存の仕方は 2 つの系で異なっており、2 つの系の電気の単位の比は、長さ、時間の単位の違いにしたがって、異なる数で表示される。

628 節の次元の表から、電気の 1 電磁単位中の静電単位の数は、私たちが採用した長さの単位の大きさの逆数に比例し、時間の単位の大きさに比例するように見える。

それゆえ、もしこの数によって数値的に表現される速度を決めるなら、そのとき、たとえ新しい長さ、時間の単位を採用しても、この速度を表現する数は、やはり、新しい測定系にしたがって、電気の 1 電磁単位中の静電単位の数である。

それゆえ、静電現象と電磁現象のあいだの関係を指すこの速度は確定した大きさの自然な量であり、この量の測定は電気にかんするもっとも重要な研究課題の一つである。

私たちが探し求めている量が本当に速度であることを示すためには、2 平行流の場合、それらの一方の長さ a の受ける引力は 686 節によって

$$F = 2CC' \frac{a}{b}$$

であることを観察すればよい。ここで C, C' は電磁測度での電流の数値であり、 b はそれらのあいだの距離である。もし $b = 2a$ とすると

$$F = CC',$$

p. 414

である。

さて、時間 t のあいだに電流 C によって運ばれる電気量は電磁尺度で Ct 、または、もし n が 1 電磁単位での静電単位の数なら、静電尺度で nCt である。

2 つの小さな導体が時間 t のあいだに 2 つの電流によって伝えられた電気量で荷電され、たがいに距離 r の位置に置かれたとする。それらのあいだの斥力は

$$F' = \frac{CC'n^2t^2}{r^2},$$

であろう。

この斥力が電流の引力と等しくなるように距離 r が選ばれたとすると、

$$\frac{CC'n^2t^2}{r^2} = CC',$$

である。したがって

$$r = nt,$$

すなわち、距離 r は n の割合で時間 t とともに増加しなければならない。

769.] この速度の物理的な意味を手にいれるために、静電面密度 σ まで荷電された平面を想像し、その面内で面を速度 v で動かす。この動く帶電面は電流シートと等価で、単位の面幅をとおる電流の強さは静電尺度で σv 、または n が 1 電磁単位中の静電単位の数なら、電磁尺度で $\frac{1}{n}\sigma v$ である。もし最初の面に平行なもう一つの平面が面密度 σ' で帶電され、同じ方向に速度 v' で動くなら、それは第 2 の電流シートに等価である。

2 帯電面のあいだの静電斥力は、124 節によって、反対面の各単位面積にたいして $2\pi\sigma\sigma'$ である。

2 つの電流シートのあいだの電磁引力は、653 節によって、各単位面積にたいして $2\pi uu'$ である。ここで u と u' は電磁尺度での電流の面密度である。

しかし、 $u = \frac{1}{n}\sigma v$, $u' = \frac{1}{n}\sigma'v'$, であるから、引力は

$$2\pi\sigma\sigma' \frac{vv'}{n^2}$$

である。

引力の斥力にたいする比は vv' の n^2 にたいする比に等しい。したがって、引力と斥力は同種の量であるから、 n は v と、つまり、速度と同種の量でなけ

ればならない。もしそれぞれの運動面の速度が n に等しいと考えると、引力は斥力と同じ大きさであり、それらのあいだに力学作用はないであろう。したがって、同じ方向にこの速度で動く 2 帯電面が相互作用しないことによって、電気の単位の比を速度であると定義することができる。この速度は 1 秒あたり、おおよそ、300000 キロメーターであるから、上で記述された実験を行うことは不可能である。

770.] もし電気面密度と速度を非常に大きくすることができ、磁力が観測可能な量になると、少なくとも運動する帯電物体は電流に等価であるという仮説を立証することができる。

空気中の帯電面は電気力 $2\pi\sigma$ が値 130 にたつしたとき、火花放電¹を始めると仮定することができる。電流シートによる磁力は $2\pi\sigma \frac{v}{n}$ である。英國における水平磁力はおおよそ 0.175 である。したがって、最大限帯電し、1 秒あたり 100 メートルの速度で動く面は地球の水平分力のおおよそ $1/4000$ に等しい力で磁石に作用するはずである。これは測定可能な大きさの量である。帯電面は磁気子午面内で回転する非伝導性円盤面で、磁石は円盤の上昇または下降部分近くに置かれ、金属の遮蔽板によって静電作用から保護されている。この実験がこれまで試みられたかどうかは知らない²。

p. 416

I. 電気の単位の比較。

771.] 電気の電磁単位の静電単位にたいする比は速度で表現されるから、今後、それを記号 v で表示する。この速度の数値を最初に決定したのはウェーバーとコウルラウシュ (Friedrich Kohlraush, 1840–1910) である³。

彼らの方法は同じ量の電気の、まず静電尺度で、つぎに電磁尺度での測定に基づく。

測定された電気量はライデン瓶の電荷である。それは静電尺度で瓶の電気容量と瓶の両面の被覆間のポテンシャル差の積として測られた。瓶の容量は

¹ Sir W. Thomson, *R. S. Proc.* またはリプリント, Art. xix. pp. 247–259.

² { この効果はローランド教授により 1876 年に発見された。この主題にかんするその後の実験については、つぎの論文を参照せよ。Rowland and Hutchinson, *Phil. Mag.* 27. 445 (1887); Röntgen, *Wied. Ann.* 40. 93; Himstedt, *Wied. Ann.* 40. 720. }

³ Elektrodynamische Maasbestimmungen; and Pogg., Ann., xeix (Aug. pp. 10–25, 1856).

他の物体から離れた距離にある開いた空間中に吊るされた球の容量と比較することによって決められた。そのような球の容量は静電尺度で球の半径で表示される。こうして、瓶の容量はある長さで分り、表示できる。227 節参照。

瓶の被覆のポテンシャル差は電位計の電極と被覆を結ぶことによって測定され、電位計の定数は注意深く決められ、したがってポテンシャル差、 E 、は静電測度で分る。

このポテンシャル差に瓶の容量、 c 、をかけて、瓶の電荷は静電尺度で表示される。

電磁尺度で電荷の値を決めるために、瓶は検流計のコイルをとおして放電された。過渡電流の検流計の磁石への効果は磁石にある大きさの角速度を伝える。このとき磁石はある偏りまで揺れ、そこで、磁石の速度は地磁気の反対作用によって完全に消失させられる。

磁石の極大偏差を観測することにより、放電の電気量が電磁尺度で、748 節のように、公式

$$Q = \frac{H T}{G \pi} 2 \sin \frac{1}{2} \theta,$$

により決められる。ここで Q は電磁尺度での電気量である。それゆえ、以下の量を決めなければならない:—

H , 地磁気の水平成分の強度。456 節参照。

G , 検流器の主定数。700 節参照。

T , 磁石の 1 振動の時間。

θ , 過渡電流による振れ角。

MM. ウエーバーとコウルラウシュによる v の値は

$$v = 310740000 \text{ メートル/秒}$$

である。

電気吸収と名付けられている固体誘電体の性質がライデン瓶の容量を正確に評価することを困難にしている。見かけの容量は瓶の荷電放電とポテンシャル測定のあいだに経過した時間にしたがって変化し、時間が長くなればなるほど、瓶の容量として得られる値が大きくなる。

したがって、電位計の読みを得るために占められる時間が検流計をとおつて放電が起こる時間と較べて大きいので、静電尺度での放電の評価があまりにも大きく、それから導かれた v の値もまた、大きすぎるかもしれない。

抵抗として表示された「 v 」。

772.] v の決定にたいする他の 2 つの方法は与えられた導体の抵抗を使った v の値の表式へと導き、その抵抗は電磁系で速度としても表示される。

ウイリアムトムソン卿の実験形式では、一定流が大きな抵抗の導線を通って流される。導線を通って電流を駆動する駆電力が絶対電位計, 217 節, 218 節, の電極と導線の端点を結合することにより静電的に測定される。導線中の電流の強さは電流が通る電力計, 725 節, の懸架コイルの振れによって電磁測度で測定される。回路の抵抗は標準コイルまたはオームとの比較によって電磁尺度で知られている。電流の強さにこの抵抗をかけることによって、電磁尺度で駆電力を得、静電尺度での駆電力との比較から v の値が得られる。

p. 418

この方法は 2 つの力の、それぞれ電位計と電力計を使った同時測定を必要とし、結果に現れるのはこれらの力の比のみである。

773.] 著者は、これらの力が、別々に測られるのではなく、互いに直接に対抗している、もう一つの方法を採用した。大きな抵抗のコイルの終端が 2 つの平行な円盤に結合され、円盤の一方が動くことができる。大きな抵抗をとおして電流を送るポテンシャル差と同じポテンシャル差がこれらの円盤のあいだの引力を引き起す。同時に、実際の実験では、1 次電流とは区別される電流が 2 つのコイルをとおして送られ、1 方のコイルは固定円盤の裏に、他方のコイルは可動円盤の裏に留められる。電流はこれらのコイルを通して反対方向に流れるので、電流は互いに反発する。2 つの円盤の距離を調節することにより、引力は斥力と厳密に釣りあうが、同時に、もう一人の観測者が、分流器を持つ差動検流器を使って、1 次電流の 2 次電流に対する比を決める。

この実験では、物質標準を参照しなければならない測定は大きな抵抗の測定のみであるが、それはオームとの比較によって絶対測定で決めなくてはならない。その他の測定は比の決定のみが必要とされ、それゆえ、任意の単位を使って決めることができる。

こうして 2 つの力の比は同じものの比である。
 2 つの電流の比は差動検流器の振れがないときの抵抗の比から分る。
 引力は円盤の直径の円盤間の距離にたいする比の 2 乗に依存する。
 斥力はコイルの直径のコイル間の距離に対する比に依存する。
 それゆえ、 v の値は直接大きなコイルの抵抗を使って表示され、その抵抗
 p. 419 はそれ自身オームと比較される。

トムソンの方法によって見出された v の値は 28.2 オーム^{註 4}、マクスウェルは 28.8 オーム^{註 5} である^{註 6}。

III. 電磁尺度での静電容量。

774.] コンデンサーの容量は電磁尺度では、電荷を生成する駆電力と、放電流の電気量の比較によって確かめられる。ボルタ電池を使って、電流が大きな抵抗のコイルを含む回路をとおって維持される。コンデンサーはコンデンサーの電極を巻き線抵抗の電極とともに置くことによって荷電される。コイルを通る電流は電流が検流器中に生成する振れによって測られる。この振れを ϕ とすると、742 節によって、電流は

$$\gamma = \frac{H}{G} \tan \phi,$$

である。ここで H は地磁気の水平成分であり、 G は検流器の主定数である。
 もし R がこの電流が流されるコイルの抵抗とすると、コイルの両端での電位差は

$$E = R\gamma,$$

であり、電磁尺度での容量が C であるコンデンサー中に生成される電荷は

$$Q = EC,$$

^{註 4} Report of British Association, 1869, p. 434.

^{註 5} Phil. Trans., 1868. p. 643; および Report of British Association, 1869, p. 436.

^{註 6} 訳註： 実用単位 1 オームは $1\Omega = 10^9 \text{ cm s}^{-1}$ (emu) と定義されている。

したがって $30\Omega = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ (emu) である。

SI 単位系で真空のインピーダンスは 376.730313461Ω である。

$$376\Omega = 376 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-2} = \frac{376 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m s}^{-2}} = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

であろう。

さて、コンデンサーの電極と、つぎに検流器の電極を回路から切り離し、検流器の磁石を平衡位置で静止させよう。つぎにコンデンサーの電極を検流器の電極と結合する。過渡電流が検流器を通って流れ、磁石を極大振れ θ まで揺らす。そのとき、748 節によって、もし放電が荷電と等しいなら、

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin \frac{1}{2}\theta,$$

である。

こうして電磁尺度でのコンデンサーの容量の値として

$$C = \frac{T}{\pi} \frac{1}{R} \frac{2 \sin \frac{1}{2}\theta}{\tan \phi},$$

を得る。

p. 420

コンデンサーの容量は次の量を使って決められる：—

T , 検流器の磁石の静止から静止までの振動の時間（周期）。

R , コイルの抵抗。

θ , 放電によって生成された揺れの最大限度。

ϕ , コイル R を通る電流による一定の振れ。

この方法は電磁尺度でコンデンサーの容量を決めるためにフレーミング ジェンキン教授 (Fleeming Jenkin, 1833–1885) によって採用された^{註7}。

もし c が同じコンデンサーの静電尺度での容量なら、容量がその幾何学データから計算できるコンデンサーと比較して決められるので、

$$c = v^2 C,$$

である。したがって

$$v^2 = \pi R \frac{c}{T} \frac{\tan \phi}{2 \sin \frac{1}{2}\theta},$$

である。

それゆえ、量 v はこの方法で見出される。それは電磁尺度での R の決定に依存するが、それは R の平方根のみを含むので、この決定での誤差は v の値に 772, 773 節の方法ほど影響しない。

^{註7} Report of British Association, 1867, pp. 483–488.

間欠電流。

775.] もし電池-回路の導線がその任意の点で切斷され、切斷された導線の終端がコンデンサーの電極に結合されたなら、電流がコンデンサーに流れ込む。その強さはコンデンサーの極板間のポテンシャル差が増加するにつれて減少し、導線に作用する駆電力に対応する全電荷をコンデンサーが受けたとき、電流は完全に止まる。

もしコンデンサーの電極が導線の終端から切り離され、再び反対順に導線と結合されるなら、コンデンサーは導線をとおって放電し、反対方向に再荷電され、したがって過渡電流が導線をとおって流れ、その全量はコンデンサーの 2 つの電荷に等しい。

(通常、交換子とかシーソーと呼ばれる) 1 つの仕組みを使ってコンデンサーの結合を反転する操作が、各間隔が T に等しい、規則正しい時間間隔で繰り返えされる。もしこの間隔が十分に長く、コンデンサーを完全に放電させられるなら、各間隔で導線によって伝えられる電気量は $2EC$ である。ここで E は駆電力、 C はコンデンサーの容量である。

もし、回路に含まれる検流器の磁石が、非常にゆっくりと揺れ、磁石の 1 自由振動の時間中にコンデンサーの非常に大きな放電が起こるように装着されるなら、引き続いて起こる放電が $\frac{2EC}{T}$ の定常流のように、磁石に作用する。

もしコンデンサーが取り省かれ、巻き線抵抗がその代わりに代入され、検流計をとおる定常流が放電の連続と同じ振れを生成するまで調整されると、もし R がこれが成り立つときの全回路の抵抗なら、

$$\frac{E}{R} = \frac{2EC}{T}; \quad (1)$$

つまり

$$R = \frac{T}{2C}, \quad (2)$$

である。

こうして動いている交換子をもつコンデンサーをある電気抵抗の導線と比較することができ、この抵抗を決めるために、345, 357 節で記述された抵抗のいろいろな測定法を使うことができる。

776.] この目的のため、346 節の差分検流器の方法で、または、347 節のホイートストンブリッジの方法で、任意の一つの導線を、交換子を持つコンデ

ンサーで置き換えることができる。まずコンデンサーと交換子にかんして、つぎにその場所でのコイルの抵抗 R_1 にかんして、どちらの場合でも、検流器の零の振れが得られていると考えよう。このとき量 $\frac{T}{2C}$ がコイル R_1 がその一部をなす回路の抵抗を使って測定される。その回路は電池を含む導体系の残り部分によって完結している。したがって、計算しなければならない抵抗, R , は巻き線抵抗の抵抗, R_1 , と(電池を含む)系の残りの抵抗, R_2 と合わせたものに等しい。抵抗コイルの終端は系の電極と考える。

差分検流器やホイートストンブリッジの場合、コンデンサーを抵抗で置き換える第2の実験を行ふ必要はない。この目的のために必要とされる抵抗の値は系の他の既知の抵抗から計算によって見つけることができる。

p. 422

347節の記法を使い、ホイートストンブリッジの導体 AO をコンデンサーと交換子で置き換え、 OA に検流器を挿入し、検流器の振れが零であると考えると、振れ零を与える AO に置かれた巻き線コイルは

$$b = \frac{c\gamma}{\beta} = R_1, \quad (3)$$

である。抵抗の他の部分、 R_2 は導体、 AO, OC, AB, BC, OB , の系の抵抗であり、点 A と C は電極と考えられる。したがって、

$$R_2 = \frac{\beta(c+a)(\gamma+\alpha) + ca(\gamma+a) + \gamma\alpha(c+a)}{(c+\alpha)(\gamma+a) + \beta(c+a+\gamma+\alpha)}$$

である。この式で、 a は電池とその接続の内部抵抗を表記し、その値は確実には決めることがないが、そのほかの抵抗とくらべて、小さくすることにより、この不確定性は R_2 の値にわずかしか影響を与えないであろう。

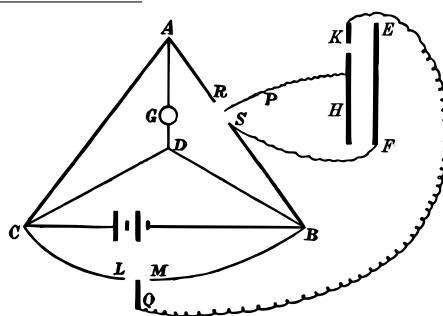
電磁尺度でのコンデンサーの容量の値は

$$C = \frac{T}{2(R_1 + R_2)}, \text{ 註 } 8 \quad (5)$$

である。

p. 423

註 8 { この方法は電磁尺度で蓄電器の容量を測定するとき非常に重要なので、円柱が保護輪を持つ場合に適応して、さらに追加して研究する。
この測定で採用した配置は添付図に表現されている。



$ABCD$ は G に検流器、 B と C のあいだに電池を持つホイートストンブリッジである。腕 AB は R と S で切断され、 R, S は交換子の 2 極であり、交換子は交互にバネ P に接触し、バネはコンデンサーの中央板、 H 、に結合されている。保護輪を持たない板は S に結合されている。点 C と B は、それぞれ、交換子の 2 極 L, M に結合され、交換子は交互にバネ Q の接触し、バネはコンデンサーの保護輪に取り付けられている。系は交換子が働いているとき事象の順序が以下のようになるように配置去れている。

- I. P が S に。コンデンサー放電
 Q が M に。保護輪放電。
 - II. P が R に。コンデンサー荷電開始。
 Q が M に。
 - III. P が R に。コンデンサー、ポテンシャル $(A)-(B)$ まで完全荷電。
 Q が L に。保護輪、ポテンシャル $(C)-(B)$ まで荷電。
 - IV. P が S に。コンデンサー放電開始。
 Q が L に。
 - V. P が S に。コンデンサー放電。
 Q が M に。保護輪放電。

こうして、交換子が働いているとき、電気のコンデンサーへの電流によって、検流器をとおる瞬間的な電流の継起がおこる。これらの瞬間的な電流の検流器への効果が定常流による効果とちょうど釣りあうように抵抗が調整され、検流器の振れはない。

これが成り立っているときに抵抗間の関係を調べるために、保護輪と検流器が荷電されているとき、

$\dot{x} = BC$ をとおる電流.

$\dot{y} = AR$ をとおる電流.

$\dot{z} = AD$ をとおる電流、

$\dot{w} = CL$ をとおる電流,

であると考えよう。

こうして、もし $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ が、それぞれ、腕 BC, AC, AD, BD, CD の抵抗、 L が検流器の自己誘導係数、 E が電池の駆電力なら、回路 ADC と BCD で、それぞれ、

$$L\ddot{z} + (b + \gamma + \alpha)\dot{z} + (b + \gamma)\dot{y} + \gamma\dot{w} - \gamma\dot{x} = 0, \quad (1)$$

$$(\alpha + \gamma + \beta)\dot{x} - (\gamma + \beta)\dot{y} - \gamma\dot{z} - (\gamma + \beta)\dot{w} - E = 0, \quad (2)$$

が成り立つ。

さて、電流が次のような式

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2.$$

$$\dot{z} = \dot{z}_1 + \dot{z}_2.$$

で表示されることは明らかである。ここで、 \dot{x}_1 と \dot{z}_1 は、電気がコンデンサーに流れ込まないときの定常流を表示し、 \dot{x}_2 , \dot{z}_2 は $Ae^{-\lambda t}$, $Be^{-\lambda t}$ の形をとり、コンデンサーの荷電による電流の変動部分を表示している。 \dot{y} , \dot{w} は $C'e^{-\lambda t}$, $De^{-\lambda t}$ の形になるであろう；これらの式すべてで、 t はコンデンサーが荷電を始めてから経過した時間である。

式(1), (2)はこのように、一定の項、 $e^{-\lambda t}$ がかけられる項を含み、後者は別々に零にならねばならず、したがって、

$$L\ddot{z}_2 + (b + \gamma + \alpha)\dot{z}_2 + (b + \gamma)\dot{y} + \gamma\dot{w} - \gamma\dot{x}_2 = 0. \quad (3)$$

$$(\alpha + \gamma + \beta)\dot{x}_2 - (\gamma + \beta)\dot{y} - \gamma\dot{z}_2 - (\gamma + \beta)\dot{w} = 0. \quad (4)$$

が成り立つ。

Z , X を、それぞれ、コンデンサーの荷電の結果、検流器と電池を通りすぎた電気量とする。 Y と W をコンデンサーと保護輪の電荷とする。このとき、コンデンサーが荷電を始める直前から完全に荷電されるまで、このそれぞれの時間で $\dot{z}_2 = 0$ を思い出して、(3), (4) を時間積分すると、

$$(b + \gamma + \alpha)Z + (b + \gamma)Y + \gamma W - \gamma X = 0,$$

$$(a + \gamma + \beta)X - (\gamma + \beta)Y - \gamma Z - (\gamma + \beta)W = 0;$$

を得る。したがって、 X を消去すると

$$Z(b + \gamma + \alpha - \frac{\gamma^2}{\alpha + \gamma + \beta}) + Y(b + \gamma - \frac{\gamma(\gamma + \beta)}{\alpha + \gamma + \beta}) + W\gamma \frac{\gamma}{\alpha + \gamma + \beta} = 0,$$

である。

実際には電池の抵抗は β , b または γ と較べて、まったく小さく、第3項は第2項と較べて無視することができ、電池の抵抗を無視して、

$$Z = -\frac{b}{b + \gamma + \alpha - \frac{\gamma^2}{\gamma + \beta}}Y,$$

を得る。

もし $\{A\}$, $\{B\}$, $\{D\}$ がコンデンサーが完全に荷電されたときの A , B , D のポテンシャルを表記し、 C がコンデンサーの容量なら、

$$Y = C[\{A\} - \{B\}],$$

である。

しかし、

$$\frac{\{A\} - \{B\}}{\alpha + \beta \frac{(b + \alpha + \gamma)}{\gamma}} = \frac{\{A\} - \{D\}}{\alpha}$$

である。

この式の右辺はあきらかに検流計をとおる定常流、 \dot{z}_1 であり、したがって、

$$Y = C\dot{z}_1(\alpha + \beta(\frac{b + \alpha + \gamma}{\gamma})), \quad (5)$$

$$Z = -\dot{z}_1 b C \frac{\{\alpha + \beta \frac{(b + \alpha + \gamma)}{\gamma}\}}{b + \gamma + \alpha - \frac{\gamma^2}{\gamma + \beta}}, \quad (6)$$

p. 424

777.] もしコンデンサーが大きな容量を持ち、交換子が非常に速く働くと、コンデンサーはそれぞれの逆転で十分に放電できないであろう。放電のあいだの電流の式は

$$Q + R_2 C \frac{dQ}{dt} + EC = 0, \quad (6)$$

である。ここで Q は電荷であり、 C はコンデンサーの容量、 R_2 はコンデンサーの電極のあいだの系の残りの抵抗、 E は電池の接続による駆電力である。

したがって、

$$Q = (Q_0 + EC)e^{-\frac{t}{R_2 C}} - EC, \quad (7)$$

p. 425

である。ここで Q_0 は Q の初期値である。

もし τ がそれぞれの放電のあいだ、接触が維持されているあいだの時間なら、それぞれの放電量は

$$Q = 2EC \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{R_2 C}}}{1 + e^{-\frac{\tau}{R_2 C}}}, \quad (8)$$

である。

式 (4) で c, γ を β, a, α とくらべて大きくすることによって、 $R_2 C$ によって表現される時間が τ とくらべて非常に小さくでき、指数式の値を計算するとき、式 (5) の C の値を使うことができる。こうして

$$\frac{\tau}{R_2 C} = 2 \frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{\tau}{T}, \quad (9)$$

が分かる。ここで R_1 は等価効果を生成するためにコンデンサーを置き換えるなければならない抵抗である。 R_2 は系の残りの抵抗であり、 T は放電の始まである。

もしコンデンサーが 1 秒間に n 回、荷電されると、結果として、1 秒間に検流器を通りすぎた電気量は nZ である。もし検流器の針が振れないまま維持されたなら、単位時間に検流器を通りすぎた電気量は零でなければならない。しかし、この量は $nZ + \dot{z}_1$ である。したがって、

$$nZ + \dot{z}_1 = 0,$$

である。式 (6) にこの関係を代入して

$$C = \frac{1}{n} \frac{\gamma}{b\beta} \frac{\{1 - \frac{\gamma^2}{(\gamma+\beta)(b+\alpha+\gamma)}\}}{1 + \frac{\gamma\alpha}{(b+\alpha+\gamma)\beta}}, \quad (7)$$

を得る。

この式から、もし抵抗と速度が分っていれば、容量を計算することができる。J.J. Thomson and Searle, "A Determination of 'v,'" *Phil. Trans.* 1890, A, p. 583 参照。}

りと次の放電の始まりのあいだの間隔であり、 τ はそれぞれの放電の接触の期間である。こうして電磁尺度で C の補正された値

$$C = \frac{1}{2} \frac{T}{R_1 + R_2} \frac{1 + e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}{1 - e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}, \quad (10)$$

を得る。

コンデンサーの静電容量とコイルの自己誘導の容量の比較。

778.] もし 2 点間の抵抗が R である導体回路の 2 点が、容量 C のコンデンサーの電極と結ばれたなら、駆電力が回路に作用したとき、電流の一部が、抵抗 R を通るかわりに、コンデンサーを荷電するために使われるであろう。 R を通る電流は、それゆえ、零から次第に最終値まで上がるであろう。数学理論から R をとおる電流が零からその最終値まで上昇する仕方は電磁石のコイルをとおして一定の駆電力が駆動する電流の値を表示するのとまったく同じ種類の公式によって表示される。したがってコンデンサーと電磁石を、電池回路の断続の瞬間にさえ、検流器をとおる電流がつねに零であるように。ホイートストンブリッジの 2 つの反対の成員に置くことができる。

図で P, Q, R, S を、それぞれ、ホイートストンブリッジの 4 成員の抵抗とする。自己誘導係数が L であるコイルを抵抗が Q の成員 AH の部分を作るとする。容量が C のコンデンサーの電極を点 F と Z と小さな抵抗をもつ部品によつて結合する。簡単のため、電極が F, H と結合されている検流器 G には電流がないと仮定しよう。それゆえ、 F でのポテンシャルが H でのポテンシャルと等しくできる条件を決めなければならない。この条件が満たされないと、検流器をとおる電流を計算する必要があるのは、方

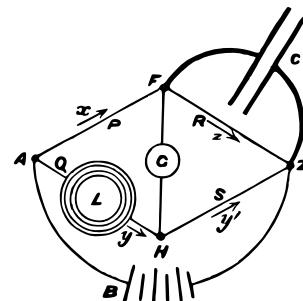


図: 65.

x を成員 AF を通りすぎた電気の総量とし、 z を時間 t のあいだに FZ を通りすぎる電気の総量とすると、 $x - z$ はコンデンサーの電荷になる。コン

デンサーの電極間に作用する駆電力は、オームの法則により、 $R\frac{dz}{dt}$ であり、したがってもしコンデンサーの容量が C ならば、

$$x - z = RC \frac{dz}{dt}, \quad (1)$$

である。

y を成員 AH を通りすぎた電気の総量とすると、 A から H への駆電力は A から F への駆電力に等しくなければならない。つまり、

$$Q \frac{dy}{dt} + L \frac{d^2y}{dt^2} = P \frac{dx}{dt}, \quad (2)$$

である。

検流器をとおる電流はないので、 HZ を通りすぎた量は y でなければならず、

$$S \frac{dy}{dt} = R \frac{dz}{dt}, \quad (3)$$

であることが分かる。

(2) で、(1) から導かれた x の値を置き換え、(3) とくらべると、検流器をとおる電流がない条件として

$$RQ(1 + \frac{L}{Q} \frac{d}{dt})z = SP(1 + RC \frac{d}{dt})z, \quad (4)$$

p. 427

が分かる。

最終的な電流がない条件は、通常のホイートストンブリッジの通常の形で、

$$QR = SP, \quad (5)$$

である。電池の断続で電流がない付加条件は

$$\frac{L}{Q} = RC, \quad (6)$$

である。

ここで、 $\frac{L}{Q}$ と RC はそれぞれ、成員 Q, R の時間定数である。もし、回路を断続するときか、電流が定常であるとき、 Q と R を変化させることによって、検流器が電流のないことを指示するまでホイートストンブリッジの成員

を調節できるなら、コイルの時間定数はコンデンサーの時間定数と等しいことが分かる。

自己誘導係数, L , が幾何データが既知 (756 節) の 2 回路の相互誘導係数との比較から電磁尺度で決めることが出来る。それは長さの次元の量である。

コンデンサーの容量は静電尺度で幾何データが分かっている (229 節) コンデンサーとの比較によって決めることが出来る。この量もまた長さ, c である。容量の電磁尺度は

$$C = \frac{c}{v^2}, \quad (7)$$

である。

式 (6) でこの値を代入することによって、 v^2 の値にたいして

$$v^2 = \frac{c}{L} QR, \quad (8)$$

を得る。ここで c は静電尺度でのコンデンサーの容量であり、 L は電磁尺度での自己誘導係数であり、 Q と R は電磁尺度での抵抗である。この方法で決められた v の値は、第 2 の方法, 772, 773 節と同様、抵抗の単位の決定のみに依存する。

V. コンデンサーの静電容量とコイルの自己誘導の電磁容量の組み合わせ。

779.] C をコンデンサーの容量とする。その面は抵抗 R の導線によって結合されている。この導線中にコイル L と L' が挿入されたとする。 L は自己誘導の容量の和を表記するとする。コイル L' は 2 本吊りでつるされ、鉛直面中の 2 平行コイルからなり、その間を磁石 M を運ぶ鉛直軸がとおり、その軸はコイル LL' 間の水平面中で回転する。コイル L は大きな自己誘導係数を持ち、固定されている。懸架コイル L' は中空ケース内で回転する部品を開むことによって磁石の回転によって引き起こされる空気の電流から保護されている。

磁石の運動はコイル中に誘導流を起こし、これらが磁石によって作用を受け、コイルの懸架面が磁石の回転方向に振れる。誘導流の強さと懸架コイルの振れの大きさを決めよう。

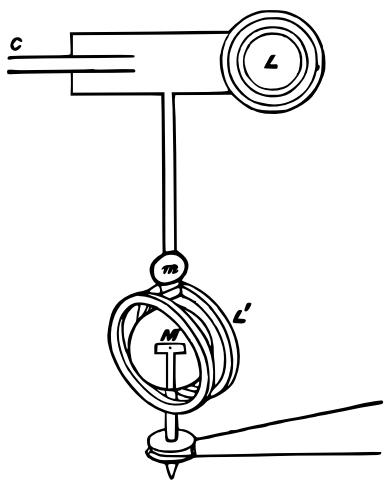


図: 66.

x をコンデンサー C の上面の電荷とする
と、もし E がこの電荷を生成する駆電力な
ら、コンデンサーの理論によって、

$$x = CE, \quad (1)$$

である。

電流の理論によって、

$$R\dot{x} + \frac{d}{dt}(L\dot{x} + M \cos \theta) + E = 0, \quad (2)$$

も成り立つ。ここで、 M は、磁石の軸がコ
イル面の法線であるときの、回路 L' の電磁
運動量であり、 θ は磁石の軸とこの法線の間
の角度である。

x を決める方程式は、それゆえ、

$$CL\frac{d^2x}{dt^2} + CR\frac{dx}{dt} + x = CM \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad (3)$$

である。

もしコイルが平衡の位置にあり、もし磁石の回転が一様で、角速度が n なら、

$$\theta = nt, \quad (4)$$

である。

電流の式は 2 つの部分からなり、その 1 つは式の右辺の項とは独立で、時
間の指數関数にしたがって減少する。他の部分は、強制電流と呼ぶことができるが、 θ の項に全面的に依存し、

$$x = A \sin \theta + B \cos \theta, \quad (5)$$

と書くことができる。

式 (3) への代入によって、 A と B の値を見出して、

$$x = -MCn \frac{RCn \cos \theta - (1 - CLn^2) \sin \theta}{R^2 C^2 n^2 + (1 - CLn^2)^2}. \quad (6)$$

を得る。

磁石がコイル L' に作用する力のモーメントは、そのコイルには電流 \dot{x} が流れしており、コイルは仮定により固定されており、コイルが磁石に作用する力のモーメントの逆向きであるが、

$$\Theta = -\dot{x} \frac{d}{d\theta} (M \cos \theta) = M \sin \theta \frac{dx}{dt}, \quad (7)$$

によって与えられる。

この式を、1回転のあいだ、 t にかんして積分し、時間で割ると、 Θ の平均値に対して

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{2} \frac{M^2 R C^2 n^3}{R^2 Q^2 n^2 + (1 - CLn^2)^2}, \quad (8)$$

であることが分かる。

もしコイルがかなりの慣性モーメントを持つと、その強制振動は非常に小さく、その平均の振れは $\bar{\Theta}$ に比例するであろう。

D_1, D_2, D_3 が磁石の角速度 n_1, n_2, n_3 に対応する観測された振れとすると、一般に

$$P \frac{n}{D} = (\frac{1}{n} - CLn)^2 + R^2 C^2, \quad (9)$$

である。ここで P は定数である。

P と R をこの形の3つの式から消去すると、

$$C^2 L^2 = \frac{1}{n_1^2 n_2^2 n_3^2} \frac{\frac{n_1^3}{D_1} (n_2^2 - n_3^2) + \frac{n_2^3}{D_2} (n_3^2 - n_1^2) + \frac{n_3^3}{D_3} (n_1^2 - n_2^2)}{\frac{n_1}{D_1} (n_2^2 - n_3^2) + \frac{n_2}{D_2} (n_3^2 - n_1^2) + \frac{n_3}{D_3} (n_1^2 - n_2^2)}, \quad (10)$$

であることが分かる。

もし n_2 が $CLn^2 = 1$ のようであれば、 $\frac{n}{D}$ の値は n のこの値にたいして最小であろう。 n_2 よりも、一つは大きく、一つは小さい、 n の他の値を取るべきである。

(10) から決められた CL の値は時間の平方の次元のものである。それを τ^2 と置こう。

もし C_s がコンデンサーの容量の静電尺度、 L_m がコイルの自己誘導の電磁尺度なら、 C_s, L_m とも長さで、積は

p. 430

$$C_s L_m = v^2 C_s L_s = v^2 C_m L_m = v^2 \tau^2; \quad (11)$$

$$v^2 = \frac{C_s L_m}{\tau^2}, \quad (12)$$

である。ここで τ^2 はこの実験で決められた $C^2 L^2$ の値である。 v を決定する方法として示唆されたここでの実験はグローブ卿 (William Robert Grove, 1811–1896) によって *Phil. Mag.*, March 1868, p. 184. に記述されたものと同じ性質のものである。現著者による 1868 年 5 月号 pp. 360–363 に与えられた実験の注釈も参考せよ。

VII. 抵抗の静電測定。(355 節参照)

780.] 容量 C のコンデンサーが抵抗 R の導体をとおして放電されたとする
と、もし x が任意の瞬間の電荷なら、

$$\frac{x}{C} + R \frac{dx}{dt} = 0, \quad (1)$$

である。したがって

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (2)$$

である。

もし、なんらかの方法で、短時間のあいだ接触することができ、その時間が正確に分っており、電流が時間 t のあいだ導体を通って流すことができるなら、そのとき、もし E_0 と E_1 が操作前後のコンデンサーと結合して置かれた電位計の読みなら、

$$RC(\log_e E_0 - \log_e E_1) = t, \quad (3)$$

である。

もし C が長さの量として静電単位で知られているなら、 R はこの式から静電単位で速度の逆数であることが分る。

もし R_s がこのように決められた抵抗の数値で、 R_m が電磁尺度での抵抗の数値なら、

$$v^2 = \frac{R_m}{R_s}, \quad (4)$$

である。

この実験では R が非常に大きいことが必要だから、また、 R は 763 節などの電磁実験では小さくなければならないから、実験は別々の導体上でなされなければならず、また、これらの導体の抵抗は通常の方法で比較されなければならない。

第XX章

光の電磁理論。

781.] この書のいくつかの部分で、電磁現象を、ある物体から他の物体へ、そのあいだの空間を占める媒質によって伝えられる力学作用によって説明しようとしてきた。光の波動理論もまた媒質の存在を仮定している。今や電磁媒質の性質は光の媒質の性質と同一であることを示さなければならない。

なんらかの新しい現象を説明するにあたって全空間を新しい媒質で充たすことは、けっして、哲学的なことではなく、もし科学の2つの異なる分野の研究が独立に媒質というアイデアを示唆したなら、そして、もし電磁現象を説明するために媒質に帰さなければならない性質が光の現象を説明するために光媒質に帰さなければならない性質と同種のものなら、媒質の物理的な存在に対する証拠はかなり強化されるであろう。

しかし、物体の性質は量的な測定が可能である。それゆえ、電磁実験から計算でき、光の場合には直接に観測できる、擾乱が媒質を伝わる速度のようないくつかの性質の数値を手にいれる。もし電磁擾乱の伝搬速度が光速と同じであることが見出されたなら、そしてこれが空气中だけでなく、他の透明な媒質中でもそうなら、光が電磁現象であることを信じる強い理由を持つことになり、光学的な証拠と電気的な証拠の組合せが、感覚的な証拠の組み合わせから、他種の物体の場合に得た確信と同様の媒質の実在にかんする確信を産み出すであろう。

782.] 光が放出されるとき、ある量のエネルギーが発光物体によって消費され、もし光がもう一つの物体によって吸収されるなら、この物体は熱せられ、なにもない所からエネルギーを受けとっていることを示している。最初の物体から光が去った後、第2の物体に到着する前の時間間隔のあいだ、光

はそのあいだの空間にエネルギーとして存在していたはずである。

光放出の理論のしたがうと、エネルギーの伝搬は発光物体から照射された物体への光粒子の実際の移動によって行われる。光粒子は粒子の運動エネルギーとともに、粒子が貯蔵所となりうるそのほかのエネルギーを運ぶ。

波動理論にしたがうと、2 物体間の空間を満たす物質媒質があり、この媒質の近接部分の作用により、ある部分から次の部分へ、エネルギーが照射された物体に着くまで、エネルギーが受け渡される。

それゆえ、光媒質は、光が媒質を通るあいだ、エネルギーの貯蔵所である。波動理論では、ホイヘンス、フレネル、ヤング、グリーン^{註1}、その他によつて展開されたように、このエネルギーの一部はポテンシャルエネルギー、一部は運動エネルギーと考えられる。ポテンシャルエネルギーは媒質の基本部分の歪によると考えられる。それゆえ、媒質を弾性体とみなさなければならぬ。運動エネルギーは媒質の振動運動によると考えられる。それゆえ、媒質を有限の密度を持つものとみなさなければならない。

^{註1} 訳註：光の波動理論では、光の伝搬は弾性体力学に基づいて調べられる、弾性体の微小振動の速度場を \vec{u} とすると、その体積運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2} \rho \sum_i u_i^2$$

である。ここで ρ は媒質の質量密度である。

等方媒質の体積ポテンシャルエネルギー W は、一様速度、一様回転で零になるので、歪みテンソル

$$e_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

のみに依存する。 W の一般形は、2 つの弾性定数、 a, b を使って、

$$W = \frac{1}{2}a(\sum_i \frac{1}{2}e_{ii})^2 + \frac{1}{2}b\sum_{i,j}(e_{ij}e_{ji} - e_{ii}e_{jj})$$

と書ける。(グリーン、1838) この式は

$$W = \frac{1}{2}a(\operatorname{div} \vec{u})^2 + 2b(\operatorname{rot} \vec{v})^2 + 2b\sum_{i,j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \quad (20:1)$$

と書ける。応力テンソルは $\sigma_{i,j} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}$ である。

運動方程式および 2 媒質の境界面での境界条件はハミルトンの原理

$$\delta \int [\int (T - W) dV] dt = 0$$

より求められる。

この書で採用された電気と磁気の理論では、静電および電気運動(630, 636節参照)の2つのエネルギー形式が認められ、それらはたんに帶電や磁化された物体中だけではなく、まわりの空間の、電気力や磁力が働いていることが観測されるなどの部分中にも、エネルギーの存在場所があると考えられる。したがって、私たちの理論は、2つのエネルギー形式の貯蔵所となりうる媒質の存在を仮定する点で、波動理論と合致している^{註2}。

p. 433

783.] 次に、一様媒質をとおる電磁擾乱の伝搬の条件を決めよう。媒質は静止している、つまり、電磁擾乱に含まれうる運動以外の運動を持たないと考える。

C を媒質の比伝導度、 K を静電誘導の比容量、 μ を「透磁率」とする。

電磁擾乱の一般式を得るために、ベクトルポテンシャル \mathfrak{A} と電気ポテンシャル Ψ を使って真の電流 \mathfrak{C} を表示しよう。

真の電流 \mathfrak{C} は伝導電流 \mathfrak{K} と電気変位 \mathfrak{D} の変動からなり、これらの両者とも駆電強度 \mathfrak{E} に依存するから、611節でのように、

$$\mathfrak{C} = (C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt}) \mathfrak{E}, \quad (1)$$

であることが分かる。

しかし、媒質の運動はないので、駆電強度を、599節でのように、

$$\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{A}} - \nabla \Psi. \text{註3} \quad (2)$$

と表示できる。

その運動方程式は

$$\rho \ddot{\vec{u}} = (a - b) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + b \Delta \vec{u}$$

であり、境界面での境界条件は、部分積分の結果現れる表面積分の連続性から

$$u_i = u'_i, \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij}$$

である。

マクスウェルは次章で、ハミルトンの原理に基づいて、弾性波と電磁波の対応を考察している。

註2 「私としては、真空の磁力との関係や、磁石の外での磁気現象の一般的な性質を考えると、力の伝搬では、たんなる遠隔的な引力、斥力であるという考え方たよりも、磁石に外的的な、そのような作用が存在するという考え方たにより傾いている。そのような作用はエーテルの機能かもしれない。もしエーテルが存在すれば、それはたんなる輻射の伝達ではなく、その他の役割があるはずであることは、必ずしも、ありえないことではないからである。」 ファラディ実験研究、3075。

註3 訳注：マクスウェルは基本方程式の第一組として

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A},$$

したがって、

$$\mathfrak{C} = -(C + \frac{1}{4\pi}K \frac{d}{dt})(\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \nabla\Psi), \quad (3)$$

である。

しかし、 \mathfrak{C} と \mathfrak{A} のあいだの関係を、616 節で示されたように、異なった方法で決めることができる^{註 4}。616 節 (4) 式は

$$4\pi\mu\mathfrak{C} = \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J, \text{ 註 } 5 \quad (4)$$

と書くことができる。ここで、

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}, \quad (5)$$

である。

(3) 式、(4) 式を組み合わせて、

$$\mu(4\pi C + K \frac{d}{dt})(\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \nabla\Psi) + \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J = O, \quad (6)$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

を採用している。ここで、 \vec{B} は磁束密度、 \vec{E} は電場であり、ガウス単位系が使われている。この式の発散をとると、

$$\text{div } \vec{B} = 0,$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E}$$

が得られる。この式は変換

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \text{grad } \chi$$

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

に対して不变である。

註 4 訳註：マクスウェルは基本方程式の第 2 組として

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \text{rot } \vec{H}$$

を使っている。 \vec{D} は電束密度、 \vec{H} は磁場、 ρ は電荷密度、 \vec{J} は伝導電流密度であり、ここではガウス単位系を使った。

オームの法則 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ を使って \vec{J} を、 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ を使って、 \vec{D} を、 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ を使って \vec{H} を消去し、第 1 組を使って、第 1 式から \vec{A} の拘束条件を、第 2 式から \vec{A} の時間変化式を導いていく。

註 5 訳註：4 元数の計算からくる ∇^2 の符号規約に注意。 $\text{rot } \text{rot } \vec{A} = \text{grad } \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$.

を得る。これは次のように、3つの式の形で表示できる。

$$\left. \begin{aligned} \mu(4\pi C + K \frac{d}{dt}) \left(\frac{dF}{dt} + \frac{d\Psi}{dx} \right) + \nabla^2 F + \frac{dJ}{dx} &= 0, \\ \mu(4\pi C + K \frac{d}{dt}) \left(\frac{dG}{dt} + \frac{d\Psi}{dx} \right) + \nabla^2 G + \frac{dJ}{dx} &= 0, \\ \mu(4\pi C + K \frac{d}{dt}) \left(\frac{dH}{dt} + \frac{d\Psi}{dx} \right) + \nabla^2 H + \frac{dJ}{dx} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

これらが電磁擾乱の一般式である。

p. 434

もしこれらの式を、それぞれ、 x, y, z にかんして微分し、加え合わすと

$$\mu(4\pi C + K \frac{d}{dt}) \left(\frac{dJ}{dt} - \nabla^2 \Psi \right) = 0. \quad (8)$$

を得る。

もし媒質が非伝導性なら、 $C = 0$ で、 $\nabla^2 \Psi$ は自由電気の体積密度に比例するが、それは t に独立である。したがって、 J は t の線形関数でなければならない。つまり、定数か零である。それゆえ、周期的な擾乱を考えるとき、 J と Ψ を考察の外に残しておく。

非伝導媒質中での波動の伝搬。

784.] この場合、 $C = 0$ であり、方程式は

$$\left. \begin{aligned} K\mu \frac{d^2 F}{dt^2} + \nabla^2 F &= 0, \\ K\mu \frac{d^2 G}{dt^2} + \nabla^2 G &= 0, \\ K\mu \frac{d^2 H}{dt^2} + \nabla^2 H &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる。

この形の方程式は非圧縮弾性体の運動の方程式と相似であり、初期条件が与えられたとき、その解はポアソン^{註6} によって与えられ、ストークスによつて回折の理論^{註7} に応用された。

註6 *Mem. de l'Acad.*, tom. iii. p. 180, et seq.

註7 *Cambridge Transactions*, vol. ix. pp. 1-62 (1849).

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}. \quad (10)$$

と書こう。

もし F, G, H , の値と、 $\frac{dF}{dt}, \frac{dG}{dt}, \frac{dH}{dt}$ の値が空間のすべての点で時刻 ($t = 0$) で与えられたなら、その後の任意の時間、 t , でのそれらの値を次のように決めることができる。

O を時間 t で F の値を決めたい点とする。 O を中心とし、 Vt を半径として、球を書く。球面のすべての点で F の初期値を見出し、これらすべての値の平均、 \bar{F} をとる。球面のすべての点で $\frac{dF}{dt}$ の初期値も見出し、これらの値の平均を $\frac{d\bar{F}}{dt}$ とする。

点 O での F の値は、時間 t で

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{d}{dt}(\bar{F}t) + t \frac{d\bar{F}}{dt}, \\ \text{同様に } G &= \frac{d}{dt}(\bar{G}t) + t \frac{d\bar{G}}{dt}, \\ H &= \frac{d}{dt}(\bar{H}t) + t \frac{d\bar{H}}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

である。

785.] それゆえ、任意の瞬間での点 O でのものごとの状態は、その前の時間間隔 t と距離 Vt でのものごとの状態に依存し、したがって任意の擾乱は媒質中を速度 V で伝搬するよう見える。

t が零のとき、ある空間 S 中を除いて、 $\mathfrak{A}, \dot{\mathfrak{A}}$ が零であると考えよう。そのとき、それらの時間 t での O での値は、 O を中心とする半径 Vt で描かれた球面が全体にもしくは部分的に空間 S 内にないかぎり、零であろう。もし O が球 S の外部にあれば、 Vt が O から球への最短距離に等しくならないかぎり、 O での擾乱はないであろう。 O での擾乱はそのときに始まり、 Vt が O から S の任意の部分への最大距離になるまで続くであろう。そして、 O での擾乱は永久に止むであろう。

786.] 784 節の量 V は非伝導媒質中での電磁擾乱の伝達速度を表示するが、それは式 (10) によって、 $\frac{1}{\sqrt{K\mu}}$ に等しい。

もし媒質が空気で、静電単位を採用するなら、 $K = 1$ 、 $\mu = \frac{1}{v^2}$ である、したがって $V = v$ 、つまり、伝搬速度は数値的に電気の静電単位の 1 電磁単位中の数に等しい。もし電磁単位を採用すると、 $K = \frac{1}{v^2}$ 、 $\mu = 1$ で、したがって式 $V = v$ はやはり真である。

光が他の電磁作用が伝達される媒質と同じ媒質を伝搬する電磁擾乱であるとの理論では、 V は光の速度でなければならず、その量の値はいくつかの方法で評価されてきた。他方、 v は 1 電磁単位中の静電単位の数であり、この量を決める方法は前章で記述されている。したがって、 V の値と v の値の一一致、不一致が光の電磁理論の検証を与える。
p. 436

787.] 以下の表で、空気または惑星間空間をとおした、光の速度の直接観測の主要結果が、電気単位の比較の主要結果と較べられている^{註 8}。

光速度 (メートル毎秒).	電気単位の比
フィゾー	314000000
光行差など、および 太陽の視差 } ...	308000000
フーコ	298360000
	(メートル毎秒).
ウェーバー	310740000
マクスウェル ...	288000000
トムソン	282000000

註 8 { E.B. Rosa の論文、*Phil. Mag.* 28, p. 315, 1889, から取られた以下の表で、B. A. 単位で誤差を補正された「 v 」の決定値が与えられている。

1856	Weber and Kohlrausch ..	3.107×10^{10}	(cm/s)
1868	Maxwell	2.842×10^{10}	
1869	W. Thomson and King ..	2.808×10^{10}	
1872	M. Kichan	2.896×10^{10}	
1879	Ayrton and Perry	2.960×10^{10}	
1880	Shida	2.955×10^{10}	
1883	J. J. Thomson	2.963×10^{10}	
1884	Klemenčič	3.019×10^{10}	
1888	Himstedt	3.009×10^{10}	
1889	W. Thomson	3.004×10^{10}	
1889	E. B. Rosa	2.9993×10^{10}	
1890	J. J. Thomson and Searle	2.9955×10^{10}	
	空気中の光速度.		
Cornu (1878)	3.003×10^{10}		
Michelson (1879) ..	2.9982×10^{10}		
Michelson (1882) ..	2.9966×10^{10}		
Newcomb (1885) ..	$\left\{ \begin{array}{l} 2.99615 \\ 2.99682 \\ 2.99766 \end{array} \right\} \times 10^{10}$		
}			

光の速度と単位の比が同じ程度の大きさの量であることは明らかである。そのどれも、あるものが他のものより大きいとか小さいとか言えるほどの正確度で決められているとは言えない。さらなる実験で、2つの量の大きさのあいだの関係がより正確に決定されることが望まれる。

私たちの理論はこれら2つの量が等しいことを主張し、これらの量が等しい物理的な理由を与えていたが、今のところ、そのままで、これらの結果の比較とはたしかに矛盾はしていない。

p. 437
788.] 空気以外の媒質では、速度 V は誘電容量と磁気誘導容量の積の平方根に逆比例する。波動理論にしたがうと、異なる媒質中での光の速度はそれらの屈折率に逆比例する。

磁気容量が空気の磁気容量とくらべてごくわずかな割合以上異なる透明な媒質は存在していない。したがってこれらの媒質間の差の主要部分は誘電容量に依存しなければならない。それゆえ、私たちの理論にしたがうと、透明媒質の誘電容量は屈折率の平方に等しいはずである。

しかし、屈折率の値は異なる種類の光では異なり、より速く振動する光にたいして、より大きい。それゆえ、最長周期の波に対応する屈折率を選ばなければならない。これらがその運動が誘電容量を決める遅い過程と比較される唯一の波であるからである。

789.] これまで十分な精度で容量が決められた誘電体はパラフィンだけであり、固体の形態の容量として、ギブソン (MM. Gibson) とバークレイ (Barclay)^{註9} は

$$K = 1.975, \quad (12)$$

を見つけていた。

グラドストン (Gladstone) 博士は A 、 D 、 H フラウンホファー線にたいして、溶解性パラメタ sp. g 0.779 の融解パラフィンの屈折率の以下の値を見出している。

温度	A	D	H
54°C	1.4306	1.4357	1.4499
57°C	1.4294	1.4343	1.4493;

註9 Phil. Trans. 1871, p. 573.

それから無限長の波にたいする屈折率はおおよそ、1.442.

K の平方根は 1.405 である。

これらの数値間の差は観測誤差によって説明できるものよりも大きく、その電気的な性質からその光学的な性質を導く前に、物質構造の理論が大きく改善されなければならないことを示している。同時に、数の一一致は、もしかなりの数の物質の光学的および電気的な性質から導かれた数のあいだでより大きな不一致が見つからなければ、 K の平方根が、屈折率の完全な式ではないかもしれないが、少なくともその式のもっとも重要な項であると保証できるようなものであると私は考えている^{註 10}。

p. 438

平面波。

790.] さて平面波だけに注目することにする。その波面は z 軸向きを法線とすると考える。すべての量は、その変動がそのような波を構成し、 z と t のみの関数であり、 x, y には独立である。したがって磁気誘導の式、591 節 (A) は

$$a = -\frac{dG}{dz}, \quad b = \frac{dF}{dz}, \quad c = 0, \quad (13)$$

と簡単になる。つまり、磁気擾乱は平面波になっている。これは光を構成する擾乱について知識と一致している。

a, b, c に、それぞれ、 $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$ を入れると、607 節の電流の式は

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\mu u &= -\frac{db}{dz} = -\frac{d^2F}{dz^2}, \\ 4\pi\mu v &= \frac{da}{dz} = -\frac{d^2G}{dz^2}, \\ 4\pi\mu w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

註 10 [1877 年 6 月 14 日にロイヤルソサエティで発表された論文で、J. Hopkinson 博士はいろいろな種類のガラスの比誘導容量を決める目的にしてなされた実験の結果を与える。これらの実験はテキスト中で到達した理論的な結論を証明しておらず、それぞれの場合、 K の値は屈折率の平方の値を越えている。1881 年 1 月 6 日に発表された続く論文で、Hopkinson 博士は、もし μ_∞ が無限波長の波の屈折率を表記するなら、炭化水素にたいして $K = \mu_\infty^2$ であるが、動物油や植物油にたいして $K > \mu_\infty^2$ であることを見出している。]

{ 1 秒あたり約 2500 万の振動数を持つ電気振動のもとで、ガラスの比誘導容量は、Thomson, *Proc. Roy. Soc.*, June 20, 1889, および Blondlot, *Comptes Rendus*, May 11, 1891, p. 1058, の実験にしたがうと、 μ^2 に近似している。Lecher (*Wied. Ann.* 42, p. 142) はそのような状況でのばらつきは定常な力にたいするよりも大きいという、反対の結論にたっしている。 }

となる。

したがって、電気擾乱もまた平面波であり、もし磁気擾乱が 1 方向に、たとえば x 方向に、閉じ込められているなら電気擾乱は垂直方向、つまり、 y 方向に閉じ込められている。

しかし、電気擾乱を他の方法でも計算できる。なぜなら、もし f, g, h が非伝導媒質中の電気変位の成分なら

$$u = \frac{df}{dt}, \quad v = \frac{dg}{dt}, \quad w = \frac{dh}{dt}, \quad (15)$$

p. 439

であるからである^{註 11}。

もし P, Q, R が駆電力強度の成分なら

$$f = \frac{K}{4\pi}P, \quad g = \frac{K}{4\pi}Q, \quad h = \frac{K}{4\pi}R, \quad (16)$$

であり^{註 12}、媒質の運動はないから、598 節式 (B) は

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt}, \quad (17)$$

となる^{註 13}。したがって

$$u = -\frac{K}{4\pi} \frac{d^2F}{dt^2}, \quad v = -\frac{K}{4\pi} \frac{d^2G}{dt^2}, \quad w = -\frac{K}{4\pi} \frac{d^2H}{dt^2}, \quad (18)$$

である。これらの値を (14) 式で与えられている値と較べると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2F}{dz^2} &= K\mu \frac{d^2F}{dt^2}, \\ \frac{d^2G}{dz^2} &= K\mu \frac{d^2G}{dt^2}, \\ 0 &= K\mu \frac{d^2H}{dt^2}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

であることが分る。

^{註 11} 訳註: (u, v, w) は変位電流を表す。伝導電流ではない。

^{註 12} 訳註: (P, Q, R) は電場 \vec{E} , (f, g, h) は電気変位 $\frac{1}{4\pi}\vec{D}$ を表す。

^{註 13} 訳註: (F, G, H) はベクトルポテンシャル \vec{A} を表す。

これらの第1式、第2式は平面波の伝搬の式であり、その解はよく知られた

$$\left. \begin{array}{l} F = f_1(z - Vt) + f_2(z + Vt), \\ G = f_3(z - Vt) + f_4(z + Vt), \end{array} \right\}$$

の形をしている。

第3式の解は

$$H = A + Bt, \quad (21)$$

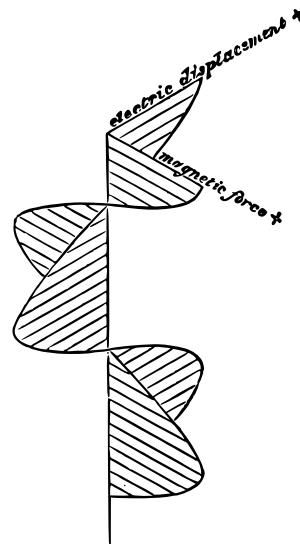
である。ここで A と B は z の関数である。それゆえ、 H は定数であるか、時間に比例して変化するかのどちらかである。どちらの場合も波の伝搬には関与できない。

791.] このことから、磁気擾乱も電気擾乱も両方とも方向が波の面中にあるように見える。それゆえ、擾乱の数学的な形は光を構成する擾乱と一致しており、進行方向の横方向である。

もし $G = 0$ と考えると擾乱は平面偏光した光線に対応する。

この場合の磁力は y 軸に平行で $\frac{1}{\mu} \frac{dF}{dz}$ に等しく、駆電強度は x 軸に平行で $-\frac{dF}{dt}$ に等しい。それゆえ、磁力は電気強度を含む面に垂直な面内にある。

光線のいろいろな点での与えられた瞬間での磁力および駆電強度の値は、1 平面中の単純な調和擾乱の場合にたいして、図 67 に表現されている。これは平面偏光した光線に対応するが、偏光面^{註 14} が磁気擾乱の面に対応するか、電気擾乱の面に対応するか、どちらかはこれから見ていかなければならない。797 節参照。



図：67.

^{註 14} 訳注：1677 年、C. ホイヘンスがアイスランド産方解石の複屈折での偏光現象を指摘した。方解石は平行 6 面体の結晶を作り、その 8 頂点のうち、向かい合う 2 頂点で 3 稲が同じ角度 ($101^{\circ}55'$) で交わる。ホイヘンスは、その 2 頂点の 1 つで、3 稲と同じ角度をなす等分線およびその平行線を主軸、光が入射する結晶面の法線と主軸が決める面を主断面と呼んだ。方解石に入射した光線は 2 つに分れる。

輻射のエネルギーと応力。

792.] 非伝導媒質中の波の任意の点での単位体積あたりの静電エネルギーは

$$\frac{1}{2}fP = \frac{K}{8\pi}P^2 = \frac{K}{8\pi}\left|\frac{dF}{dt}\right|^2, \quad (22)$$

である。

同じ点での電気運動エネルギーは

$$\frac{1}{8\pi}b\beta = \frac{1}{8\pi\mu}b^2 = \frac{1}{8\pi\mu}\left|\frac{dF}{dz}\right|^2, \quad (23)$$

である。

式(20)のために、1つの波にたいして、これら2つの式は同じ大きさであり、したがって、波のどの点においても、媒質の固有のエネルギーは半分が静電、半分が電気運動エネルギーである。

p をこれらの量のどちらかの値とする。つまり、単位体積あたりの静電エネルギーまたは電気運動エネルギーのどちらかとすると、媒質の静電状態のために、 x 軸の方向に平行に大きさが p の張力が存在し、 y, z に平行に、 p に等しい圧力と組み合わさっている。

媒質の電気運動状態のために、 y 方向に平行に p に等しい張力があり、 x, z 方向に平行に p に等しい圧力がある。643節参照。

したがって、静電応力と電気運動応力の組み合わされた効果は波の進行方向の大きさ $2p$ の圧力である。 $2p$ は単位体積の全エネルギーも表示する。

一方の光線は入射方向と面の法線が決める入射面のなかで屈折する。これを正常光線と呼ぶ。もう一方は正常光線を含む主断面内で屈折する。これを異常光線と呼ぶ。

方解石をとおした光線をもう一つの方解石を通す。2つの方解石の断面を平行に置いた場合、正常光線は正常光線として屈折し、正常光線から異常光線は現れない、異常光線は異常光線として屈折し、異常光線から正常光線は現れない。2つの主面を 90° 傾けた場合、正常光線は異常光線として屈折し、正常光線は現れない。異常光線は正常光線として屈折し、異常光線は現れない。それ以外の置き方をした場合、それぞれの光線は2本の光線に分かれれる。

ホイヘンスはこの事実に驚き、理解できないことを率直に述べ、その研究の遂行を他者に委ねた。

1706年、I. ニュートンは「光学」ラテン語版の疑問17（英語第2版1717年、疑問25）でホイヘンスを引用し、光線は側面を持つのではないかという疑問を提出した。

正常光線の偏光面は主断面である。異常光線の偏光面は主断面に直交する面である。

1817年、T. ヤングは、大きな縦波を残したまま、微小な横波を使って複屈折を説明しようとした。1821年、A. フレネルは、弹性体力学を使って、波が横波ならば複屈折を説明できることを示した。1832年、F. ノイマンは、結晶の対称性を使って、偏光現象を論じた。

方解石や石英は主軸のまわりに誘電率が回転対称な1軸性結晶である。

したがって波が伝搬する媒質中には波の法線方向には圧力があり、それは p. 441 数値的には単位体積あたりのエネルギーに等しい。

793.] こうして、もし強い太陽光線中では 1 平方フィートに降り注ぐ光のエネルギーは 1 秒あたり 83.4 フィート ポンドなら^{註 15}、太陽光の 1 立方フィート中の平均エネルギーは約 0.0000000882 フィート ポンドであり、1 平方フィートあたりの平均圧力は 0.0000000882 ポンド重である。太陽光に曝された平らな物体は照射された側面だけにこの圧力を受け、それゆえ、光が照らす側から跳ね返されるであろう。おそらく、電燈の 1 点に集められた光線によってより大きな輻射エネルギーが得られるであろう。真空中に精妙に吊下げられた薄い金属円盤に落ちるそのような光は観測可能な力学的効果を産み出すかもしれない。任意の種類の擾乱が時間とともに変化する角度の正弦や余弦を含む項からなるとき、最大エネルギーは平均エネルギーの倍である。したがって、 P が最大駆電強度で、 β が光の伝搬のあいだに役わりを演じる最大磁力とすると

$$\frac{K}{8\pi}p^2 = \frac{\mu}{8\pi}\beta^2 = \text{単位体積中の平均エネルギー} \quad (24)$$

である。

トムソンの *Trans. R. S. E.*, 1854, に引用されたブイエ (Pouillet) の太陽エネルギーのデータを使うと、この式は電磁尺度で

$$P = 60000000, \text{つまり、メートルあたり } 600 \text{ ダニエル電池};^{\text{註 } 16}$$

$$\beta = 0.193, \text{つまり、英國の水平磁力の } 1/10 \text{ 以上}^{\text{註 } 17}.$$

である。

^{註 16} { 私はこの数値を確かめることができていない。もし $v = 3 \times 10^{10}$ を仮定すると、太陽光の 1 立方センチメートル中の平均エネルギーは、ブイエにしたがうと、トムソンに引用されているように、 3.92×10^{-5} ergs, であり、(24) 式に与えられている対応する P と β の値は

$$P = 9.42 \times 10^8 \text{ つまり } 9.42 \text{ ポルト/センチメートル},$$

$$\beta = 0.0314 \text{ つまり地球の水平磁力の } 1/6 \text{ 以上である。}$$

^{註 15} 訳註： $83.4 \text{ lbf ft}^{-1} \text{ s}^{-1} = 1.09 \text{ kW m}^{-2}$ 。地球の大気圏外で太陽に正対する単位面積が単位時間に受ける太陽の輻射総量、太陽定数は 1.37 kW m^{-2} である。

}

註 17 { 反射面に入射する光が作用する力を異なる観点から見なおす。反射面が金属であると考えると、光が面上に射しこんだとき、磁力の変動が金属中に電流を誘導し、この電流が板に反対の誘導効果を生成し、板のなかの電流、それゆえ、光の強度が、板の表面から後退するにつれて、急激に減少する。板のなかの電流にはそれに直角に磁力が伴い、対応する機械的な力は電流と磁力の両方に直角であり、それゆえ、光の伝搬方向に平行である。もし光が非吸収媒質を通ったなら、この機械的な力は半波長の後、逆転し、有限の時間と距離にわたって積分したとき、合力の効果はなくなるであろう。しかし、面から後退するにつれて急激に電流が消え去っていくとき、表面近くの電流による効果は表面からある距離離れたところでの効果と相殺することなく、したがって、合力効果は零にはならない。

p. 442

この効果の大きさを次のように計算することができる。光が金属板に垂直に入射する場合を考える。板を xy 面にとる。 σ を物質の比抵抗とする。入射光線のベクトルポテンシャルは

$$F = Ae^{i(pt-\alpha z)},$$

反射光線のベクトルポテンシャルは

$$F' = A'e^{i(pt+\alpha z)},$$

屈折光線のベクトルポテンシャルは

$$F'' = A''e^{i(pt-\alpha' z)},$$

で与えられているとすると、空气中では

$$\frac{d^2F}{dz^2} = \frac{1}{V^2} \frac{d^2F}{dt^2},$$

である。ここで、 V は空气中の光の速度であり、したがって

$$\alpha = \frac{p}{V}$$

である。金属中では

$$\frac{d^2F}{dz^2} = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{dF}{dt},$$

であり、それゆえ

$$\alpha'^2 = -\frac{4\pi\mu ip}{\sigma} = -2in^2, \text{ たとえば,}$$

である。こうして

$$\begin{aligned} \alpha' &= n(1-i), \\ F'' &= A''e^{-nx}e^{i(pt-nz)} \end{aligned}$$

である。

表面でベクトルポテンシャルは連続であり、したがって

$$A + A' = A''.$$

である。

面に平行な磁力も連続であり、したがって

$$\alpha(A - A') = \frac{\alpha' A''}{\mu},$$

つまり

$$A'' = \frac{2A}{1 + \frac{\alpha}{a\mu}};$$

つまり, α'/a は非常に大きいから、これを

$$\begin{aligned} A'' &= 2A \frac{a\mu}{\alpha'} \\ &= \frac{2A\mu p}{V\sqrt{2n}} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

と書くことができ、したがって金属中では、ベクトルポテンシャルの実部は

$$F'' = \frac{2A\mu p}{V\sqrt{2n}} e^{-nz} \cos(pt - nz + \frac{\pi}{4}).$$

である。

電流の強度は、 $-\frac{1}{\sigma} \frac{dF''}{dt}$, つまり

$$\frac{2A\mu p^2}{\sigma V\sqrt{2n}} e^{-nz} \sin(pt - nz + \frac{\pi}{4}),$$

である。磁気誘導 $\frac{dF''}{dx}$ は

$$-\frac{2A\mu p}{V\sqrt{2}} e^{-nz} \{ \cos(pt - nz + \frac{\pi}{4}) - \sin(pt - nz + \frac{\pi}{4}) \},$$

である。

z に平行な単位体積あたりの機械的な力はこれら 2 つの量の積、

$$-\frac{2A^2 m^2 p^3}{\sigma V^2 n} e^{-2nz} \{ \frac{1}{2} \sin 2(pt - nz + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2} (1 - \cos 2(pt - nz + \frac{\pi}{4})) \},$$

である。

非周期的な項によって表示されるこの平均値は

$$\frac{A^2 \mu^2 p^3}{\sigma V^2 n} e^{-2nz},$$

に等しい。この式を z にかんして $z = 0$ から $z = \infty$ まで積分すると、単位面積当たり板に働く力は

$$= \frac{1}{2} \frac{A^2 \mu^2 p^2}{\sigma V^2 n^2} = \frac{A^2 \mu p^2}{4\pi V^2},$$

であることが分る。

同様の研究によると、吸収があるとき、光が強い板から光が弱い板へ、吸収媒質上に力が働くことが示される。太陽光の場合、その効果は小さいと思われるが、もし吸収が非常に希薄なガスによって起こされるなら、圧力勾配はかなりの効果を生じるほど大きいかも知れず、この原因が彗星の尾が太陽によってはね返されるときに働いている動因の一つであると示唆されてきた。電気振動がヘルツの実験で生成されたようなものであれば、磁力は太陽光の磁力よりもはるかに大きく、もし振動がともかく連続的に作用させ続けられるなら、この効果は検出できるはずである。

定常的な振動があるとき任意の点の平均値が零でない機械的な力も得る。定常的な振動の例として上の例の反射波、入射波を取り上げる。

空气中でベクトルポテンシャルは、 α/α' は小さいことを思い出すと、

$$Ae^{i(pt-\alpha z)} + A'e^{i(pt+\alpha z)}$$

である。つまり。実部をとると、近似的に $A + A' = 0$ であるから、

$$2A \sin pt \sin \alpha z.$$

である。電流は

$$\frac{1}{4\pi\mu} \frac{d^2 F}{dz^2} = \frac{\alpha^2 A}{2\pi\mu} \sin pt \cos \alpha z;$$

であり、機械的な力は

$$2Aa \sin pt \cos \alpha z,$$

である。それゆえ、機械的な力は

$$\frac{A^2}{2\pi} \frac{a^2}{\mu} (1 - \cos 2pt) \sin \alpha z \cos \alpha z,$$

であり、この平均値は

$$\frac{A^2 \alpha^3}{2\pi\mu} \sin \alpha z \cos \alpha z,$$

である。}

結晶媒質中の平面波の伝搬。

p. 443

794.] 通常の電磁実験によって与えられるデータから、1秒あたり何兆回もの周期的な擾乱から結果としてでてくる電気現象を計算して、媒質が空気や真空と考えられるときでさえ、私たちの理論を非常に厳格な検証のもとに置いている。しかし、私たちの理論を高密度の媒質の場合に拡張しようとすると、分子理論の通常の困難だけではなく、分子の電磁媒質への関係の深遠な謎に係わることになる。

これらの困難を避けるために、ある媒質で静電誘導の比容量がいろいろな方向で異なると仮定しよう。つまり、言葉を代えると、電気変位が駆電強度と同じ方向であり、それに比例するのではなく、297 節で与えられた方程式系と同様の線形方程式系によって関係していると仮定する^{註 18}。436 節と同様、係数系は対称でなければならず、したがって、適当な座標系の選択によつて、方程式は

$$f = \frac{1}{4\pi} K_1 P, \quad g = \frac{1}{4\pi} K_2 Q, \quad h = \frac{1}{4\pi} K_3 R, \quad (1)$$

となる。ここで、 K_1, K_2, K_3 は媒質の主誘導容量である。それゆえ、擾乱の伝搬の方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{d^2 G}{dxdy} - \frac{d^2 H}{dzdx} &= K_1 \mu \left(\frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{d^2 \Psi}{dxdt} \right), \\ \frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{d^2 G}{dx^2} - \frac{d^2 H}{dydz} - \frac{d^2 F}{dxdy} &= K_2 \mu \left(\frac{d^2 G}{dt^2} + \frac{d^2 \Psi}{dydt} \right), \\ \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{d^2 H}{dy^2} - \frac{d^2 F}{dzdx} - \frac{d^2 G}{dydz} &= K_3 \mu \left(\frac{d^2 H}{dt^2} + \frac{d^2 \Psi}{dzdt} \right), \end{aligned} \right\}$$

である。

795.] もし l, m, n が波面の法線の方向余弦で、 V が波の速度なら、そして、もし

$$lx + my + nz - Vt = w, \quad (3)$$

であり、 F, G, H, ψ の w にかんする 2 階微分係数を、それぞれ、 $F'', G'',$

^{註 18} 訳註：異方性媒質中を伝わる角振動数 ω の単色平面波にたいして、波面の法線方向の波数ベクトルを \vec{k} 、屈折率ベクトルを $\vec{n} = \frac{c}{\omega} \vec{k}$ とすると、 $\vec{D} = -\vec{n} \times \vec{H}$, $\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}$ が成り立つ。ここで \vec{D} は電気変位、 \vec{E} は電場、 \vec{H} は磁場である。したがって、磁場ベクトル、電気変位ベクトルは波面の中にある。

偏光面は光線の方向を含む面である。光線の方向はエネルギーの伝わる方向であり、かならずしも平面波の法線方向とは一致しない。

波面の伝搬速度は波の伝わる方向により異なる。それは $\vec{D} = -\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})$ が $D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j$ と両立する解をもつ条件から求まる。その条件式はフレネルの式と呼ばれる。

フレネルの式は (n_x, n_y, n_z) 空間内の 4 次曲面で表示でき、その曲面は波動面と呼ばれる。 \vec{n} 方向の波動面上の点での接平面の法線が光線が伝わる方向である。その方向は $\vec{E} \times \vec{H}$ の方向である。

偏光面は光線の方向と磁場の方向が決める面である。それは、光線の方向と電場の方向が決める面に垂直な面である。

H'' , Ψ'' と書き、 a, b, c を 3 つの主伝搬速度として^{註 19}

$$K_1\mu = \frac{1}{a^2}, \quad K_2\mu = \frac{1}{b^2}, \quad K_2\mu = \frac{1}{c^2}, \quad (4)$$

と置くと、方程式は

$$\left. \begin{aligned} & (m^2 + n^2 - \frac{V^2}{a^2})F'' - lmG'' - nlH'' + V\Psi'' \frac{l}{a^2} = 0, \\ & -lmF'' + (n^2 + l^2 - \frac{V^2}{b^2})G'' - mnH'' + V\Psi'' \frac{m}{b^2} = 0, \\ & -nlF'' - mnG'' + (l^2 + m^2 - \frac{V^2}{c^2})H'' + V\Psi'' \frac{n}{c^2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となる。

796.] もし

$$\frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = U, \quad (6)$$

と書くと、これらの式から

$$\left. \begin{aligned} & VU(VF'' - l\Psi'') = 0, \\ & VU(VG'' - m\Psi'') = 0, \\ & VU(VH'' - n\Psi'') = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を得る。したがって、 $V = 0$ で、波はまったく伝搬しないか、または、 $U = 0$ で、フレネルによって与えられた V の方程式に導かれるか、または、括弧のなかの量が零になるかで、この場合、成分が F'', G'', H'' であるベクトルは波面に垂直で電気体積密度に比例する。媒質は非導体であるから、任意の与えられた点の電気密度は一定であり、それゆえ、これらの式が指す擾乱は周期的ではなく、波を構成できない。それゆえ、波の研究では $\Psi'' = 0$ と考えることができる。

797.] それゆえ、波の伝搬速度は式 $U = 0$ から、つまり

$$\frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = 0, \quad (8)$$

^{註 19} 訳註: (a, b, c) は速度の次元を持つ量である。他の場所と違って、磁気誘導 \vec{B} の成分ではない。

から、完全に決められる。

もし λ, μ, ν が成分が u, v, w , である電流の方向余弦

$$\lambda : \mu : \nu :: \frac{1}{a^2} F'' : \frac{1}{b^2} G'' : \frac{1}{c^2} H'', \quad (9)$$

なら、

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0; \quad (10)$$

つまり、電流は波面内にあり、その波面中での方向は方程式

$$\frac{l}{\lambda}(b^2 - c^2) + \frac{m}{\mu}(c^2 - a^2) + \frac{n}{\nu}(a^2 - b^2) = 0, \quad (11)$$

によって決められる。

これらの方程式はもし偏光面を電気擾乱の面に垂直な光線が進む面と定義すると、フレネルが与えたものと同一である。

ここで述べた複屈折の電磁理論にしたがうと、通説の理論の主たる困難をなしていた、法線方向の擾乱波は存在せず、結晶の主面に偏光している光線が通常波と同じように屈折されるという事実を説明するために新しい仮定は必要とされない^{註 20}。

電気伝導度と不透明度の関係。

798.] もし媒質が、完全な絶縁体ではなく、単位体積あたりの伝導度が C の導体なら、擾乱は電気変位だけではなく伝導電流からなり、その中で電気エネルギーが熱に変換され、したがって波動は媒質に吸収される。

もし擾乱が三角関数によって表示されるなら、

$$F = e^{-pz} \cos(nt - qz), \quad (1)$$

と書くことができる。この式は、もし

p. 446

$$q^2 - p^2 = \mu K n^2, \quad (3)$$

$$2pq = 4\pi\mu C n, \quad (4)$$

^{註 20} ストークスの「複屈折についての報告」*Brit. Assoc. Report*, 1862, p. 253, 参照。

ならば、方程式

$$\frac{d^2F}{dz^2} = \mu K \frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt}, \quad (2)$$

を満たすからである。

伝搬速度は

$$V = \frac{n}{q},$$

であり、吸収係数は

$$p = 2\pi\mu CV, \quad (6)$$

である。

R は長さ l 、幅 b 、厚さ z の板の、{板の長さ方向の電流にたいする} 電磁尺度での抵抗

$$R = \frac{l}{bzC}. \quad (7)$$

とする。この板によって伝えられる入射光の割合は

$$e^{-2pz} = e^{-4\pi\mu \frac{l}{b} \frac{V}{R}}, \quad (8)$$

である。

799.] ほとんどの固体はよい絶縁体であり、よい導体はすべて非常に不透明である。しかし、伝導率が大きくなればなるほど物体の不透明度が大きいという法則には多くの例外がある。

電解質は電流が通るが、そのほとんどは透明である。しかし、光の伝搬中に働いている急速に交替する力の場合には、駆電強度は一方向に非常に短時間のあいだ作用し、結合した分子間を完全に分離させることはできない。振動のもう半分のあいだ、駆電強度が反対方向に作用するとき、それは最初の半分のあいだにしたことをたんに逆転する。こうして、電解質をとおした真的伝導、電気エネルギーの損失、したがって、光の吸収は存在しない。

800.] 金、銀、プラチナはよい導体であるが、極薄の板に成形されたとき、光はそれらの板を通る^{註 21}。金箔の抵抗はホキン氏 (Hockin) によって決定されているが、私が金箔片におこなった実験からは、通常の実験でのように、駆電力がかなりの時間、作用しているときよりも、駆電力が光の各半振動で反転するとき、わずかしかエネルギー損失がないと考えないかぎり、その透明度は、私たちの理論と無矛盾であるよりも、はるかに大きいようにみえる。

801.] つぎに、誘導容量に比例して伝導度が大きい媒質の場合を考えよう。この場合、783節の方程式で K を含む項を省くことができ、それらは

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 F + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt} = 0, \\ \nabla^2 G + 4\pi\mu C \frac{dG}{dt} = 0, \\ \nabla^2 H + 4\pi\mu C \frac{dH}{dt} = 0, \end{array} \right\} \quad (1)$$

になる。これらの式のそれぞれはフーリエの *Traité de la Chaleur*(熱概論) で与えられた拡散方程式と同じ形をしている。

802.] 例として最初の式をとりあげる。量 $4\pi\mu C$ が数値的に物質の熱伝導率の逆数に等しいとして、言い換えると、他面が熱を通さず、2つの対面の温度が1度異なる物質の、単位立方を通る熱によって1度温められる単位体積の数^{註22} だとして、初期条件と表面条件を2つの場合で対応させると、ベクトルポテンシャルの成分 F は一様な固体の温度が時間と位置にしたがって変化するのと同じように、時間と位置にしたがって変化する。

フーリエが解を与えた熱伝導という異なる問題が F, G, H がベクトルの成分だが、フーリエの問題では温度はスカラー量であることを憶えておくと、電磁量の拡散の問題に変換される。

フーリエが完全な解を与えた場合^{註23} の一つ、初期状態が与えられている無限媒質の場合を取り上げよう。

p. 448

時間 t での媒質の任意の点での状態は媒質の各点の状態の平均をとることによってわかる。平均をとるときの任意の部分に指定される重みは

$$e^{-\frac{\pi\mu Cr^2}{t}}$$

である。ここで r は考えている点からその部分までの距離である。この平均

^{註22} マクスウェルの *Theory of Heat*, 第1版 p. 235, 第4版 p. 255 参照。

^{註23} *Traité de la Chaleur*, Art. 384. 点 (α, β, γ) での初期温度 $f(\alpha, \beta, \gamma)$, を使って時間 t 後の点 (x, y, z) での温度を決める式は

$$v = \iiint \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{2^3 \sqrt{k^2 \pi^3 t^3}} e^{-(\frac{(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2}{4kt})} f(\alpha, \beta, \gamma),$$

である。ここで k は熱伝導率である。

は、ベクトル量の場合、ベクトルのそれぞれの成分を別々に考えることによってもっとも便利に取られる。

803.] まず第一に、この問題ではフーリエの媒質の熱伝導率は媒質の電気伝導度の逆比例すると考えるべきであり、したがって、拡散の過程で指定された段階に達するために必要な時間は電気伝導度が高ければ高いほど大きいことに注意しなければならない。このことは、もし無限伝導度の媒質は磁力の拡散過程の完全な障壁を形成しているという 655 節の結果を思い出すと、逆説的には見えないであろう。

つぎに、拡散過程で指定された段階を生成するための要する時間は系の長さの大きさの 2 乗に比例する。

拡散の速度のような定義可能な確定的な速度は存在しない。もしこの速度を擾乱の元からの与えられた距離で与えられた擾乱を生成するために要する時間を確かめることによって測ろうとするなら、擾乱の選択値が小さければ小さいほど、速度は大きいように見え、いかに遠くであれ、いかに小さい時間であれ、擾乱の値は数学的に零とは異なることがわかる。

拡散のこの特異性が拡散を、確定した速度で起こる波の伝搬から区別している。擾乱は与えられた点で波がその点の到達するまで起こらず、波が通りすぎると、擾乱は永遠に止まる。

804.] 電流が直線回路で始まり、流れ続け、回路のまわりの媒質は有限の電気伝導度であるときに起こる過程を研究しよう (660 節とくらべよ。)。

電流が始まるとき、その最初の効果は導線に近い媒質部分の誘導電流を生成することである。この電流の方向は元の電流の反対方向であり、最初の瞬間、その全量は元の電流の量に等しく、したがって媒質のより遠い部分への電磁効果は最初は零であり、媒質の電気抵抗のため誘導流が消えていくとともに、その最終値に上昇するだけである。

しかし、導線に近接する誘導電流が消えていくにしたがって、新しい誘導電流がそれを越えた所の媒質中に生成され、したがって誘導電流の強さは連続的に小さくなるが、誘導電流によって占有された空間は連続的に広がる。

この拡散と誘導電流の減衰は最初、残りの部分より熱いか冷たい媒質からの熱の拡散にまさに類似する現象である。しかし、電流はベクトル量なので、また回路中で電流は回路の反対側の点で反対方向だから、誘導電流の任意の

与えられた成分を計算するとき、問題を温冷等量が隣接する位置から拡散された問題とくらべなければならず、その場合、離れた点への効果はより小さな大きさであろう。

805.] 直線回路の電流が一定に保たれるなら、状態の初期の変化に依存する誘導電流は、次第に拡散して消えていき、熱流の永久状態に類似の、その永久状態に媒質を残す。この状態で、 $\{\mu = 1\}$ のときの回路によって占められた部分をのぞいて、そのなかで、媒質全体にわたって、

$$\nabla^2 F = \nabla^2 G = \nabla^2 H = 0, \quad (2)$$

がなりたつ。

この式は媒質全体で F, G, H の値を決めるのに十分である。それは回路の中以外には電流はなく、磁力はたんに、通常の理論にしたがった回路中の電流によるものにすぎないことを指している。この永久状態が確立される速さは非常に大きく、おそらく銅のような高度に伝導する大質量の媒質の場合をのぞいて、私たちのような実験的な方法では測ることはできないであろう。

註.— ポゲンドルフ²⁴ の *Annalen*, July 1867, pp. 243-263, で出版された論文で、M. ローレンツは電流のキルヒホフの式から、実験結果にまったく影響を与えないある項を加えることによって、電磁場の力の分布は隣接する要素の相互作用から生じると考えられ、横方向の電流からなる波が非伝導媒質中を光の速度と同程度の速度で伝搬することができることを指す、新しい方程式系を導いた。それゆえ、彼は光を構成する擾乱をこれらの電流と同一であるとみなしこれらの電流はそのような輻射にたいして不透明であることを示している。

p. 450

これらの結論はこの章の結論と似ているが、まったく異なる方法で得られている。この章で与えられた理論は最初 *Phil. Trans.* for 1865, pp. 459-512, で出版された。

²⁴ 訳註: Johann Christian Poggendorff, 1796-1877, *Annalen der Physik* の主筆として活躍した (1824-1876).

第XXI章

磁気の光にたいする作用。

806.] 磁気、電気現象と光の現象のあいだの関係を確立するうえで、もっと重要な段階は、ある一組の現象に他の一組の現象が作用を及ぼしている、なんらかの例を発見することにちがいない。そのような現象の探索では、比較したい量の数学的、幾何学的形式にかんして既に手に入れている知識に導かれるはずである。そのとき、サマヴィル夫人 (Mary Fairfax Summerville, 1780–1872) のように、もし光によって針を磁化しようとするなら、磁北と磁南のあいだの違いはたんに方向の問題であり、もし数学的な符号の使い方の規約を逆にしたなら、ただちに方向は逆になったはずであることを思い出さなければならない。酸素が電解槽の一方の極に現れ、水素が他の極に現れるこことを観測することによって正の電気を負の電気から区別することを可能にできるが、そのような電気分解の現象に類似の現象は磁気には存在しない。

したがって、もし光を針の一端にあてても、その端がある名前の極になると期待してはならない。明るさが暗さと異なるように、2極は異なっていないからである。

円偏光を針にあてるこによって、よりよい結果を期待できたかもしれない。右回りの光は一方の端にあたり、左回りの光は他端にあたり、ある見方をすると、この種の光は互いに磁石の極と同じように関係していると言えるかもしれないからである。しかし、これさえ、類推は誤りである。2つの光線は組み合わせても互いに消しあうわけではなく、面偏光した光線を生成するからである。

ファラディは偏光を使って透明な固体中に生成される歪を研究する方法を熟知しており、電解質の伝導や誘電体の誘導の存在する^{註1} 媒質中を偏光が通 p. 452

るとき、偏光へのなんらかの作用を検出する望みを持って多くの実験を行った。しかし、実験は張力の効果を発見するためにもっとも適合するように配置されており、電気力や電流は光線の方向に直角で、偏光面に 45 度の角度ではあったが、彼はこの種のいかなる作用も検出できなかった。ファラディは多くの仕方でこれらの実験を変更してみたが、電解質の電流や静的な電気誘導による光へのいかなる作用も発見することはなかった。

しかし、彼は光と磁気のあいだの関係を確立することに成功し、彼が成功した実験は彼の実験研究の 19 シリーズに記述されている。私たちはファラディの発見を磁気の性質のさらなる研究の出発点としてとりあげ、それゆえ、彼が観測した現象を記述しよう。

807.] 面偏光した光線は透明な反磁性媒質を透過し、媒質から出たとき、その偏光の面は検光子が光線を遮断するときの検光子の位置を観測することにより確かめることができる。そのとき磁力を透明媒質中の磁力の方向が光線の方向と一致するように作用させる。光はただちに再出現するが、もし検光子がある角度回されると、光はふたたび遮断される。これは磁力の効果が光線の方向を軸としてそのまわりに、ある角度だけ、偏光面を回転させることを示し、その角度は光を遮断するために検光子を回さなければならぬ角度によって、測られる。

808.] 偏光面の回転角は

- (1) 媒質中で光線が走る距離に比例する。したがって偏光面は入射位置から出射位置まで連続的に変化する。
- (2) 磁力の光線方向の分力の強さに比例する。
- (3) 回転の総量は媒質の性質に依存する。媒質が空気や、そのほかの任意の気体のとき、回転は観測されていない^{註 2}。

p. 453

これら 3 つの命題は、回転角は光線が媒質に入った点から媒質を出た点までの磁気ポテンシャルが増加した量に、反磁性媒質にたいしては一般に正である係数をかけたものに数値的に等しいという、より一般的な命題に含まれる。

^{註 1} *Experimental Researches*, 951-954 および 2216-2220.

^{註 2} { これが書かれて以後、気体中の回転が H. Becquerel, *Compt. Rendus*, 88, p. 709; 90, p. 1407; Kundt and Röntgen, *Wied. Ann.*, 6, p. 332; 8, p. 278; Bichat, *Compt. Renilus*, 88, p. 712; *Journal de Physique*, 9, p. 275, 1880, によって観測され測定されている。 }

809.] 反磁性物質中では、偏光面が回される方向は、媒質中に実際に存在する磁力の方向と同じ方向に磁力を生成するために、正の電流が光線のまわりに循環しなければならない方向と{一般に}同じである。

しかし、ベルデ (Émile Verdet) は、たとえば、木精やエーテル中の鉄の過塩化物の濃い溶液のような、ある強磁性体では磁力を生成した電流と、回転は反対方向であることを発見した。

このことは、強磁性物質と反磁性物質の差違は、たんに、透磁率が、空気の透磁率と較べて、第1の物質の場合、より大きく、第2の物質の場合、より小さいことから生じるのではなく、2種類の物体の性質が正反対であることを示している。

光の偏光面を回転させる磁力の作用のもとで物質が得る能力は、必ずしも、反磁性や強磁性の磁化率に厳密に比例するものではない。実際、回転は反磁性物質にたいして正、強磁性物質にたいして負であるとの規則には例外がある。カリウムの中性クロム塩は反磁性だが負の回転を生じる。

810.] その他の物質には、磁力の適用とは独立に、光線が物質中を走るとき、偏光面を右や左に回すものがある。これらのなかで、水晶の場合のように、性質が軸と関係しているものもある。その他に、テレピン油や、砂糖水溶液などのように、性質が媒質中の光線の方向には独立なものもある。しかし、これらのすべての物質中で、もし任意の光線の偏光面が媒質中で右ネジのように捻られるなら、もし反対方向に媒質を透過するなら、やはり、右ネジのように捻られるであろう。経路に媒質を導入したあと、光線を消すために検光子を回さなければならない方向は、光線が北から來ようと、南から來ようと、観測者にかんして同じである。空間中の回転方向は、もちろん、光線の方向が逆なら、逆になる。しかし、回転が磁気作用によって生成されるとき、空間中のその方向は光線が北に走ろうと、南に走ろうと、同じである。回転は、つねに、もし媒質が正の類に属すなら、現実の場の磁気状態を生成するか、生成したであろう、電流の方向と同じ方向であり、媒質が負の類に属すなら、反対方向である。

これから、もし光線が、北から南へ媒質を通ったあと、鏡で反射され、南から北へ媒質をとおって戻るなら、回転が磁気作用の結果として生じるときは、2倍になる。テレピン油などのように、回転が媒質の性質のみに依存す

るとき、光線は、媒質中を反射され逆に戻ったとき、媒質の最初の行路での回転が第 2 の行路では厳密に逆転して、それが入ったときと同じ面に偏光して出ていく。

811.] 現象の物理的な説明はかなりの困難を呈する。この困難は、磁气回転にたいしても、ある媒質がそれ自身で示す回転にたいしても、これまで克服できたとは言えない。しかし、私たちは観測事実を解析することによってそのような説明の仕方を用意することができる。

同じ振幅、同じ周期を持つ、同じ面内だが反対方向に回転する 2 つの円振動は、重ね合わされたとき、1 つの直線振動に等価であることは運動学でよく知られた定理である。この振動の周期は円振動の周期に等しく、振幅は 2 倍になり、その方向は同じ円のまわりの反対方向の円運動を記述する 2 粒子が出会う 2 点を結ぶ線の方向である。したがって、もし円振動の一つがその位相を速く進めると、位相の加速の半分に等しい角度だけ、円振動の方向と同じ方向に、直線振動の方向は回されるであろう。

直接の光学実験によって、反対方向に円偏光した同じ強度の 2 光線は、重ねられたとき、面偏光になり、また、もしなんらかの方法によって、円偏光の一つの位相が加速されるなら、合成された光線の偏光面は位相の加速角の半分回されることが、証明できる。

812.] それゆえ、偏光面の回転現象を以下のように表示できる：面偏光した光線が媒質にあたる。これは、(観測者に關して)一方が右手、他方が左手の 2 つの円偏光した光線に等価である。媒質をとおったあと、光線はいまだ面偏光しているが、偏光面は(観測者にかんして)たとえば、右に回転している。したがって、2 つの円偏光した光線について、媒質を通過するあいだに、右まわりの光線は他の光線よりも、その位相が加速されていかなければならない。

言いかえると、右回り光線は、同じ周期を持つ左回り光線よりも多数回の振動を行い、それゆえ、媒質中で、より小さな波長を持つ。

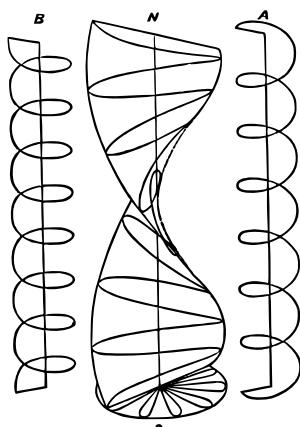
何が起こっているかについての述べ方と光の理論とはまったく独立である。私たちの心の中では波動理論の特定の形式に伴う、波長、円偏光、などを使っているが、推論はこの結びつきとは独立で、実験によって証明される事実のみに依存しているからである。

813.] つぎに、与えられた瞬間のこれらの光線の一方の配位について考えよ

う。それぞれの点での波の運動が円である任意の波動は、螺旋やネジによって表現される。もしネジが縦方向の運動なしに、その軸の回りの回されたなら、それぞれの粒子は円を描き、同時に、波動の伝搬はネジ山に同様に置かれた部分部分の見かけの縦方向の運動によって表現される。もしネジが右ネジで、観測者が観測者へ向かって波が進んでくる端に位置するなら、ネジの運動は観測者にとって左回り、つまり、時計の針の方向と反対方向に見えるであろう。したがって、そのような光線は、元々、フランスの著者によるのだが、今では全科学界で、左回り円偏光と呼ばれている。

右まわり円偏光した光線は、同様に、左
回り螺旋によって表現される。図 68 で、
図の右手の右回り螺旋 A が左回り光線を
表現し、左手の左回り螺旋 B が右回り光
線を表現している^{註3}。

814.] さて、媒質中で同じ波長を持つ、
そのような 2 つの光線を考えよう。それ
らは、一方が他方の、鏡のなかの像のよ
うな、反転である点を除いて、幾何学的
にすべての点で似ている。しかし、その
一方、たとえば、A が他方より短い回転
周期を持つ。もし運動が完全に変位によ
つて働く力によるなら、配位が A のよ
うなものより、B のようなもののとき、より



図：68

大きな力が同じ変位によって働くことを示している。したがって、この場合、

^{註3} 訳註：光源を見たとき、同位相の点が時計回りする光を right-handed circularly-polarized と呼んでいる。最近の光学の文献では、このような偏光は right-circularly polarized と呼ばれている。粒子物理学の右手、左手のヘリシティ概念と左右が逆なので注意を要する。左回りのニュートリノは右偏光している。

右円偏光をしている z 方向に進む単色平面波

$$E_x = E \cos(\omega t - kz), \quad E_y = E \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) = -E \sin(\omega t - kz)$$

について考える。

固定した点 $z = 0$ で、ベクトル \vec{E} も先端点は、時間 t が進むと、右手座標系の $x-y$ 面内を、時計方向に、すなわち、 y 軸から x 軸の方向へ回る。

ある瞬間、 $t = 0$ で空間をみると、ベクトル \vec{E} の先端点は、 z が増えるとき、右回りの螺旋を描いている。

左回り光線が右回り光線よりも加速され、このことは光線が N から S に走ろうと、 S から N に走ろうと正しい。

それゆえ、これがテレピン油などによって生成された現象の説明である。これらの媒質では、円偏光した光線によって引き起こされた変位が、配位が B であるときより、 A であるとき、より大きな回復力を働く。こうして力は配位のみに依存し、運動の方向には依存しない。

しかし、 SN 方向の磁気が作用する反磁性媒質中では、2つのネジ A, B のうち、その運動が、 S から N 向いた目によって見られたとき、時計の方向のように見える方が、常により大きい速度で回転する。したがって、 S から N への光線にたいして、右回り光線 B が最速で走るが、 N から S への光線にたいしては、左回り光線 A が最速で走るであろう。

815.] 一方の光線のみに注意を集中すると、螺旋 B は、それが S から N への光線を表現しようと、 N から S への光線を表現しようと、まったく同じ配位を持っている。しかし、最初の例では、光線は速く走り、それゆえ、螺旋はより急速に回転する。したがって、螺旋が一方を回るとき、他方を回るよりもより大きな力が働く。それゆえ、力はたんに光線の配位に依存するのではなく、それぞれ個々の部分の運動方向にも依存する。

816.] 光を構成する擾乱は、その物理的な性質がどうであれ、光線の方向に垂直なベクトルとしての性質を持つ。このことは、2光線がある条件のもとで暗黒を生成する2光線の干渉の事実と、互いに垂直に面偏光した2光線の非干渉の事実とを結び合わせることから証明される。なぜなら、干渉は偏光面の角位置に依存するから、擾乱は方向を持つ量、つまりベクトルでなければならず、干渉は偏光面が直角のとき止むので、擾乱を表現するベクトルはこれらの面の交線に垂直、つまり光線の方向に垂直でなければならない。

817.] 擾乱はベクトルであり、 z 軸が光線の方向に平行であるとして、 x と y に平行な成分に分解できる。 ξ と η をこれらの成分とすると、一様な円偏光の光線の場合、

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta, \quad (1)$$

である。ここで

$$\theta = nt - qz + \alpha, \quad (2)$$

である。

これらの式で、 r はベクトルの大きさであり、 θ は x 軸の方向となす角である。

擾乱の周期, τ , は

$$n\tau = 2\pi, \quad (3)$$

のようになる。

擾乱の波長, λ , は

$$q\lambda = 2\pi, \quad (4)$$

のようになる。

伝搬速度は $\frac{n}{q}$ である。

t と z が零のときの擾乱の位相は α である。円偏光した光は q の負または正にしたがって右回りか左回りである。

その振動は n の正負にしたがって (x, y) 面内の正または負の向きの回転で p. 458 ある。

光は n と q が同符号か反対符号かにしたがって、 z 軸の正または負の方向に伝搬する。

すべての媒質で、 q が変化するとき n は変化し、 $\frac{dn}{dq}$ はつねに $\frac{n}{q}$ と同符号である。

したがって、もし、与えられた n の数値にたいして、 n が負のときよりも、正のときに、 $\frac{n}{q}$ の値が大きいなら、 q の値にたいして、大きさと符号の両方が与えられたとして、 n の正值は負値より大きいであろう。

さて、これが z 方向に磁力, γ , が作用する、反磁性媒質で { 一般に } 観測されることである。与えられた周期の 2 つの円偏光した光線のうち、 x, y 面中の回転方向が正であるものが加速される。したがって、両方とも左向きで、媒質中で波長が同じ、2 つの円偏光した光線のうち、 xy 面中の回転方向が正のもの、つまり、南から北へ、 z の正の方向へ伝搬する光線が最短の周期を持つ。それゆえ、系の方程式で q と r が与えられたとき、 n の 2 つの値が方程式をみたし、一方が正で他方が負であり、正值が負値より数値的に大きいという事実を説明しなければならない。

818.] 媒質のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの考察から運動方程式を得ることができる。系のポテンシャルエネルギー, V , はその配位、つ

まり、その部分部分の相対位置に依存する。それが円偏光した光による擾乱に依存するかぎり、それは 振幅, r , 捻れの係数, q , のみの関数でなければならぬ。それは同じ数値の q の正負で異なるかもしだれ、それはおそらくそれ自身偏光面を回転させる媒質の場合、そうであろう。

系の運動エネルギー, T は系の速度の 2 次の同次関数であり、いろいろな項の係数は座標の関数である。

819.] 光線が一定強度である、つまり、 r が定数でありうる力学的な条件を考えよう。

r の力に対するラグランジ方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dr} - \frac{dT}{dr} + \frac{dV}{dr} = 0, \quad (5)$$

となる。 r は一定であるから、第 1 項は消える。それゆえ、方程式

$$-\frac{dT}{dr} + \frac{dV}{dr} = 0, \quad (6)$$

がなりたつ。ここで q は与えられていると考えられ、私たちは角速度 $\dot{\theta}$ を決めるうことになる。それは実際の値, n によって表記できる。

運動エネルギー, T , は n^2 を含む一つの項を含んでいる。他の項は n と他の速度の積を含むことができ、その他の項は n に独立である。ポテンシャルエネルギー, V , は、 n には完全に独立である。それゆえ、式 (6) は

$$An^2 + Bn + C = 0, \quad (7)$$

形をしている。これは 2 次方程式であり、2 つの n の値を与える。実験から、値は両方とも実数で、一方は正、他方は負で、正の値が数値的に大きいよう見える。したがって、もし A が正なら、 B, C とも負である。もし n_1, n_2 が方程式の根なら、

$$A(n_1 + n_2) + B = 0, \quad (8)$$

だからである。それゆえ、係数, B , は、少なくとも磁力が媒質に作用しているとき、零ではない。それゆえ、式 Bn を考えなければならない。これは n の最初の幕、擾乱の角速度を含む運動エネルギー部分である。

820.] T のどの項も速度にかんして 2 次元である。したがって、 n を含む項はなにか他の速度を含まなければならない。私たちが考えている場合、 r, q

は定数であるから、この速度は \dot{r} や $\dot{\theta}$ ではありえない。したがって、それは、光を構成する運動に独立に媒質中に存在する速度である。それはまた、 n がかけられたとき、結果がスカラー量であるように、 n と関係した速度でなければならない。スカラー量のみが項として T の値として入りうるからである。したがって、この速度は n と同じ方向、または反対方向でなければならぬ。つまり、それは z 軸まわりの角速度でなければならない。

ふたたび、この速度は磁力と独立ではありえない。もしその速度が媒質中に固定された方向に関係していたなら、もし媒質を端と端をひっくりかえしてたら、現象が異なるであろうが、そうではないからである。
p. 460

それゆえ、この速度は偏光面の磁気回転を示すこれらの媒質中で磁力に不变的に伴うとの結論に導かれる。

821.] 私たちは、ここまで、波動理論での運動の通常の仮説をおそらく過度に示唆する言葉を使わざるをえなかった。しかし、結論をこの仮説から離れた形で述べることは容易い

光がどのようなものであれ、空間の各点で、変位か、回転か、いまだ想像できていないものかもしれないが、何かが進んでいるが、それはたしかにベクトル性、つまり方向を持つ量で、その方向は光線の方向に垂直である。これは干渉現象により、完全に証明されている。

円偏光した光の場合、このベクトルの大きさはつねに同じに維持されているが、その方向は波の 1 周期で 1 回転を終えるように光線の方向のまわりに回転する。このベクトルが偏光面内にあるか、それに垂直かにかんして存在する不確定性はそれがそれぞれ右と左の円偏光した光で回転する方向の知識を広げることはない。ベクトルの物理的な性質や与えられた瞬間でのその絶対的な方向は不確かであるが、このベクトルの方向と角速度は完全に分かっている。

円偏光した光線が磁力の作用のもとで媒質にあたったとき、媒質中のその伝搬は光の回転方向の磁力の方向への関係に影響される。これから、817 節での推論にしたがって、媒質中では、磁力の作用のもとにあるとき、回転軸を磁力の方向として、ある回転運動が進行していると結論する。円偏光の伝搬率は、その振動回転の方向と媒質の磁気回転の方向が同じとき、これらの方向が逆のときの伝搬率と異なると結論する。

p. 461

円偏光が伝搬する媒質と、磁力線がとおる媒質のあいだで迫ることのできる唯一つの類似点は両方とも軸のまわりに回転運動が存在することである。しかし、光学現象の回転は擾乱を表現するベクトルの回転であるから、類似点はここまでである。このベクトルはつねに光線の方向に垂直であり、1秒間に知られた回数だけ、そのまわりに回転する。磁気現象では、回転するものはその側面を区別するような性質を持たず、したがって1秒間に何回、回転するか、決めるることはできない。

それゆえ、磁気現象には波長や光学現象での波の伝搬に対応するものは何もない。一定の磁力が作用している媒質は、その力の帰結として、光が媒質を伝搬するときのように、1方向に走る波で満たされない。光学と磁気現象のあいだの唯一の類似点は媒質のそれぞれの点で磁力の方向の軸のまわりの角速度の性質をもつ何かが存在するということである。

分子渦の仮説について。

822.] これまで見てきたように、磁気の偏光への作用の考察によって、磁力が作用している媒質中で、角速度と同じ数学的な類に属する何かが、その角速度軸を磁力線の方向にして、現象のある部分を形成しているとの結論に導かれる。

この角速度は全体として回転する目に見える大きさの媒質の任意の部分の角速度ではありえない。それゆえ、回転を媒質の非常に小さい部分の回転で、それぞれがそれ自身の軸上で回っていると考えなければならない。

これらの渦の運動は、これまで見てきたように(575節)大きな物体の目に見える運動にそれと分る影響を与えないが、波動理論にしたがうと、光の伝搬が依存する振動運動に影響を与えるようなものでありうる。光の伝搬中、媒質の変位は渦の擾乱を生成し、そのように乱された渦が媒質に反作用して、光線の伝搬の仕方に影響を与えるかもしれない。

p. 462

823.] 渦の性質について現在のなにも知らない状態では、媒質の変位を渦の変化と結びつける法則の形をこれだと言うことは不可能である。それゆえ、媒質の変位によって引き起こされる渦の変化はヘルムホルツが完全流体の渦の変動を規制するため渦運動にかんする彼の偉大な論文⁴ 中で示したもの

と同じ条件にしたがうと仮定しよう。

ヘルムホルツの法則^{註5}はつぎのように述べられる:— P, Q を渦軸中の隣り合う 2 つの粒子とすると、もし流体運動の帰結として、これらの粒子が位置 P', Q' に達するなら、直線 $P'Q'$ は渦軸の新しい方向を表現し、その強さは PQ にたいする $P'Q'$ の比で変化する。

したがって、もし α, β, γ が渦の強さの成分を表記し、もし ξ, η, ζ が媒質の変位を表記するなら、 α, β, γ の値は

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \alpha \frac{d\xi}{dx} + \beta \frac{d\xi}{dy} + \gamma \frac{d\xi}{dz}, \\ \beta' &= \beta + \alpha \frac{d\eta}{dx} + \beta \frac{d\eta}{dy} + \gamma \frac{d\eta}{dz}, \\ \gamma' &= \gamma + \alpha \frac{d\zeta}{dx} + \beta \frac{d\zeta}{dy} + \gamma \frac{d\zeta}{dz}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。

ここで、媒質の小さな変位のあいだ同じ条件が満たされ、媒質中で α, β, γ は、通常の渦の強さの成分ではなく、磁力の成分を表現すると仮定する。

824.] 媒質の要素の角速度の成分は

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。

私たちの仮説の次のステップは媒質の運動エネルギーは

$$2C(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3), \quad (3)$$

註⁴ *Crelle's Journal*, vol. lv. (1858), pp. 25-55. Tait による翻訳, *Phil. Mag.*, June, pp. 485-511, 1867.

註⁵ 訳註: 速度場 \vec{v} にたいして $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$ を渦場、渦ベクトルを接ベクトルとする曲線を渦線、空間中の閉曲線をとおる渦線の作る管を渦管という。ヘルムホルツの渦定理: 粘性がなく、圧力が密度のみの関数である流体では運動とともに動く渦管の断面積 × 渦度は変化しない。すなわち、流れの中の閉曲線を囲む面について、 $\frac{d}{dt} \int \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0$. 流れとともに、積分面が動くことに注意。

p. 463

の形の項を含むとの仮定である^{註6}。

^{註6} 訳註：マクスウェルは電磁場の方程式を、連続媒質の力学と対応つけて、ラグランジ、ハミルトン形式の運動方程式として表すことが、電磁気理論の研究、応用の出発点であると考えていた。

この章では、マクロな電荷、伝導電流がない場合、マクスウェル方程式の第1組、第2組は既知としている。3つの構成方程式のうち、伝導電流はないので、オームの法則は問題にならない。 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ はそのまま認める。しかし、 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ の ϵ が磁場の関数としてどのようなものであれば偏光面の回転を説明できるかの制限を置いてラグランジ方程式を探している。

ここで、渦 $\vec{\omega}$ には磁場 $\vec{H} = (1/\mu) \operatorname{rot} \vec{A}$ を対応させている。変位ベクトル (ξ, η, ζ) には電気変位 \vec{D} を対応させている。

このような解析に鼓舞され、マクスウェリアンたちは、マクスウェル方程式を認めて、電磁場のラグランジアンを探そうとした。

電気伝導度 σ が零の場合、

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H}$$

より

$$\frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \Delta \vec{H}$$

がなりたつ。

変位 \vec{u} の線形運動方程式で記述される一様、等方な弾性体のポテンシャルエネルギーは、一般に、488 頁の訳註のグリーンの式 (20-1) で与えられる。非圧縮性弾性体の場合、 $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ であり、その運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = b \Delta \vec{u}$$

である。

渦理論にしたがって、グレイズブルックは

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad \vec{D} = -\frac{c^2}{2} \Delta \vec{u}, \quad \mu = \rho, \quad \frac{1}{\epsilon} = b$$

の対応を考えた。しかし、エネルギー密度 $\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$, $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ を運動エネルギーにもポテンシャルエネルギーにも対応させられなかった。

ヘビサイドは、

$$\vec{H} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad \mu = \rho, \quad \frac{1}{\epsilon} = b, \quad \vec{D} = c \operatorname{rot} \vec{u}$$

の対応を考えた。このとき、

$$\text{磁気エネルギー密度} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2$$

$$\text{電気エネルギー密度} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{b}{2} \left(c \operatorname{rot} \vec{u} \right)^2$$

が対応する。しかし、電気エネルギー密度には、グリーンのポテンシャルエネルギーのあるべき第3項がない。エネルギーが微分回転のみに蓄えられている。

さらに、ヘビサイドは電気伝導度が零でないとき、電気伝導度が零のとき、上の式に戻り、

$$\rho \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t^2} = -g(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}) + b(\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t})$$

と

$$\mu \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} + \frac{\epsilon}{\sigma} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

これは光の伝搬中、媒質の要素が得た角速度は磁気現象を説明する運動と組み合わせて入ってくる量であると仮定することに等価である。

媒質の運動方程式を形成するために、媒質の各部の速度を使って、その運動エネルギーを表示しなければならない。各部の速度の成分が $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ である。それゆえ、部分積分して

$$\begin{aligned} & 2C \iiint (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3) dx dy dz \\ &= C \iint (\gamma\dot{\eta} - \beta\dot{\zeta}) dy dz + C \iint (\alpha\dot{\zeta} - \gamma\dot{\xi}) dz dx + C \iint (\beta\dot{\xi} - \alpha\dot{\eta}) dx dy \\ &+ C \iiint \left\{ \dot{\xi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + \dot{\eta}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) + \dot{\zeta}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) \right\} dx dy dz \end{aligned}$$

が分る。

2重積分は境界面にかんするものであり、それは無限遠にあると考えることができる。それゆえ、媒質の内部で何が起こっているかを調べるとき、3重積分だけを注目すればよい。

825.] 3重積分で表示された単位体積中の運動エネルギー部分は、

$$4\pi C(\dot{\xi}u + \dot{\eta}v + \dot{\zeta}w) \quad (5)$$

と書くことができる。ここで u, v, w は方程式 (E) で与えられたように電流成分である。

これから、私達の仮説は成分が $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ である媒質の粒子の速度は成分が u, v, w の電流と組になって入ることのできる量であるとの仮定に等価である。

826.] (4) の3重積分記号化の式に戻り、 α, β, γ の値に式 (1) で与えられている、 α', β', γ' の値を代入し、

$$\alpha \frac{d}{dx} + \beta \frac{d}{dy} + \gamma \frac{d}{dz}, \quad (6)$$

を対応させようとしたが、対応を見つけることができなかった。

J.J. トムソンはエネルギーの散逸があるとき、対応がつかなくなる原因を追求し、間欠的な電流の時間平均をとることでエネルギーを散逸させ、散逸系でもラグランジ、ハミルトン形式が作れると考えた。

実際、オームの法則は荷電粒子の平均自由行程がそのラーモア半径よりも小さいときになりつつ法則である。

こうして、マクスウェル方程式は微視的な電磁場、物質場の巨視的な平均をとった方程式であるとの認識が確立していった。

を $\frac{d}{dh}$ と書くと、積分記号下の式は

$$C\{\dot{\xi}\frac{d}{dh}(\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dz})+\dot{\eta}\frac{d}{dh}(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\xi}{dx})+\dot{\zeta}\frac{d}{dh}(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy})\}, \quad (7)$$

となる。

p. 464

z 軸に垂直な平面中の波の場合、変位は z と t のみの関数であり、したがつて $\frac{d}{dh} = \gamma \frac{d}{dz}$ であり、この式は

$$C\gamma(\frac{d^2\xi}{dz^2}\dot{\eta}-\frac{d^2\eta}{dz^2}\dot{\xi}), \quad (8)$$

と簡単になる。

単位体積の運動エネルギーは、それが変位の速度に依存するかぎり、

$$T = \frac{1}{2}\rho(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + C\gamma(\frac{d^2\xi}{dz^2}\dot{\eta}-\frac{d^2\eta}{dz^2}\dot{\xi}), \quad (9)$$

と書くことができる。ここで ρ は媒質の密度である。

827.] 単位体積あたりに加えられた力の成分 X, Y はこの式から、564 節のラグランジ方程式によって導くことができる。 z にかんして 2 回の引き続く部分積分で、境界面での 2 重積分を落として、

$$\iiint \frac{d^2\xi}{dz^2}\dot{\eta} dx dy dz = \iiint \xi \frac{d^3\eta}{dz^2 dt} dx dy dz,$$

を示すことができる。したがって

$$\frac{dT}{d\xi} = C\gamma \frac{d^3\eta}{dz^2 dt},$$

である。

それゆえ、力にたいする式は

$$X = \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2C\gamma \frac{d^3\eta}{dz^2 dt}, \quad (10)$$

$$Y = \rho \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2C\gamma \frac{d^3\xi}{dz^2 dt}, \quad (11)$$

によって与えられる。

これらの力は媒質の残りの部分から考察している要素への作用から生じ、等方媒質の場合、コーシーによって示された形

$$X = A_0 \frac{d^2\xi}{dz^2} + A_1 \frac{d^4\xi}{dz^4} + \&c., \quad (12)$$

$$Y = A_0 \frac{d^2\eta}{dz^2} + A_1 \frac{d^4\eta}{dz^4} + \&c., \quad (13)$$

でなければならない

828.] もし

$$\xi = r \cos(nt - qz), \quad \eta = r \sin(nt - qz), \quad (14)$$

である円偏光した光線の場合をとりあげると、単位体積あたりの運動エネルギーにたいして

$$T = \frac{1}{2} \rho r^2 n^2 - C \gamma r^2 q^2 n; \quad (15)$$

であることがわかり、単位体積あたりのポテンシャルエネルギーにたいして

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} r^2 (A_0 q^2 - A_1 q^4 + \&c.) \\ &= \frac{1}{2} r^2 Q, \end{aligned} \quad (16)$$

がわかる。ここで Q は q^2 の関数である。

p. 465

819 節で与えられた光線の自由伝搬の条件、式 (6) は

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dV}{dr}, \quad (17)$$

であり、それは

$$\rho n^2 - 2C\gamma q^2 n = Q, \quad (18)$$

をあたえる。したがって n の値が q をつかって見つけられる。

磁力が作用する波の周期の与えられた光線の場合、私たちが決めたいものは、 n が一定のときの $\frac{dq}{d\gamma}$ の値であり、 γ が定数のときの $\frac{dq}{dn}$ を使った値である。(18) 式を微分すると

$$(2\rho n - 2C\gamma q^2)dn - (\frac{dQ}{dq} + 4C\gamma q n)dq - 2Cq^2 n d\gamma = 0, \quad (19)$$

である。こうして

$$\frac{dq}{d\gamma} = -\frac{Cq^2n}{\rho n - C\gamma q^2} \frac{dq}{dn}, \quad (20)$$

が分かる。

829.] もし λ が空気中の波長、 v が空気中での速度、 i が対応する媒質中の屈折率とすると、

$$q\lambda = 2\pi i, \quad n\lambda = 2\pi v, \quad (21)$$

である。

{ したがって

$$\frac{dq}{dn} = \frac{1}{v} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right),$$

である。 }

磁気の作用による q の値の変化は、どの場合も、それ自身の値の極めて小さい割合にすぎず、したがって

$$q = q_0 + \frac{dq}{d\gamma} \gamma, \quad (22)$$

と書くことができる。ここで q_0 は磁力が零のときの q の値である。厚さ c の媒質を通ると偏光面が回転する角、 θ は正の qc 値と負の qc 値の和の半分であり、式 (14) で q の符号は負であるから、結果の符号は反対になる。こうして

$$\theta = -c\gamma \frac{dq}{d\gamma}, \quad (23)$$

$$= \frac{4\pi^2 C}{v\rho} c\gamma \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right) \frac{1}{1 - 2\pi C\gamma \frac{i^2}{v\rho\lambda}}, \quad (24)$$

が得られる。

この分数の分母の第 2 項は近似的に $\{\frac{1}{\pi}\}$ かける } { 媒質中の } 半波長に等しい厚さの媒質を光がとおるあいだの偏光面の回転角に等しい。

$$\frac{4\pi^2 C}{v\rho} = m, \quad (25)$$

と書くと、 m を媒質の磁気回転係数と呼ぶことができる。その値を観測から決めなければならない量である。ほとんどの反磁性体にたいして正、いくつ

かの常磁性体媒質にたいして負であることが分っている。それゆえ、私たちの理論の最終結果として

$$\theta = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right), \quad (26)$$

がなりたつ。ここで θ は偏光面の回転角、 m は媒質の観測によって決められる定数、 γ は光線の方向に分解された磁力の強度、 c は媒質中の光線の長さ、 λ は空気中での光の波長、 i は媒質の屈折率である^{註7}。

830.] この理論がこれまでに受けた唯一の検証は、同じ磁力が作用する、同じ媒質を通るいろいろな種類の光に対する θ の値の比較だけである^{註8}。

註7 { ローランド (*Phil. Mag.* xi. p. 254, 1881) は、もしホール効果 (Vol. I, p. 423) が誘電体中に存在すれば、偏光面の磁気回転が生じることを示した。}

註8 訳註： 磁場中の偏光面の回転はファラディ回転と呼ばれ、天文学で星間磁場の評価をおこなうとき、しばしば使われる。また第二種超伝導体の混合状態における磁束量子の測定にも用いられている。

ファラディ回転を始めとする磁気光学効果の理解はこの書を読むものにとっての最大の難関であった。ルーカス講座を引き継いだラーモアが磁場の中で電子が回転するというモデルを作り、電気誘導 \vec{D} の変動を電場 \vec{E} の変動と電子の運動に分けることによって、理解されたものである。

誘電体中の偏光面の回転は電気変位と電場の位相がずれることにより生じる。電気変位と電場の位相差は複素誘電率を使って記述される。

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + i \vec{E} \times \vec{g}.$$

ここで $i^2 = -1$ である。 \vec{g} は旋回ベクトルと呼ばれ、磁場が弱いとき、外部磁場に比例する。このように記述できる物質はジャイロトロピックであると呼ばれる。

偏光面の回転角は光の通った長さ L に比例し、

$$\frac{\omega g}{2cn_0} \cos \theta L,$$

で与えられる。ここで、 n_0 は外部磁場が零のときの屈折率、 ω は光の角振動数、 θ は光の進行方向と旋回ベクトルのなす角である。

実際には電子が置かれた状態によるので、物質ごとにかなり異なった性質を示すが、 $\omega >> \omega_{pe} >> \Omega_e$ のとき、誘電率 ϵ 、旋回ベクトル \vec{g} は非常に速く振動する電場の中での 1 電子の運動方程式を解くことによって求められる。

ここで ω_{pe} は電子プラズマ振動数、 Ω_e は電子サイクロトロン振動数であり、ガウス単位系で、それぞれ、 $\sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}$ 、 $\frac{eB}{m_e c}$ である。

結果は

$$\vec{D} = \left(1 - \frac{\omega_{pe}}{\omega^2} \right) \vec{E} - i \frac{\omega_{pe}^2 \Omega_e}{\omega^3} \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{|B|}$$

であるが、(26) 式に見える波長の逆 2 乗依存性は見えない。星間空間をとおる電波ではまさにこの状態が実現されている。

標準可視光線にたいして、角振動数は $\omega = 8.0 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ 、電子サイクロトロン振動数は $\Omega_e = 1.7 \times 10^{11} (\frac{B}{1 \text{ T}}) \text{ s}^{-1}$ だが、プラズマ振動数は、たとえば金属中の自由電子にたいしては、

これはベルデ^{註 9} によって、かなりの数の媒質にたいしてなされており、ベルデは以下の結論にたっしている:—

- (1) いろいろな色の光線の偏光面の磁気回転は近似的に波長の逆 2 乗法則にしたがう。
- (2) 現象の厳密な法則は、つねに、回転と波長の 2 乗の積はスペクトルの最小屈折端から最大屈折端にたいして増加する。
- (3) この増加がもっとも目立つ物質は最大の分散能をもつ物質である。

ベルデは、また、酒石酸溶液は磁場をかけなくてもそれ自身で偏光面の回転を生成するが、その溶液中で、磁気回転はけっして自然旋光に比例しないことも見出している。

おなじ論文^{註 10} に加えて、ベルデは波長の逆 2 乗則からのずれが明瞭な 2 つの物質、二硫化炭素とクレオソートにたいして非常に注意深い実験結果を与えていた。彼はまた 3 つの異なる仮説

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \theta &= mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right); \\ \text{(II)} \quad \theta &= mc\gamma \frac{1}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right); \\ \text{(III)} \quad \theta &= mc\gamma \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right), \end{aligned}$$

で与えられる数値とこれらの結果を比較している。

これらの公式の最初のもの、(I)，は 829 節、式 (26) で既に得ている公式である。第 2、(II)，は 827 節、式 (10), (11) の運動方程式で $\frac{d^3\eta}{dz^2dt}$, $-\frac{d^3\xi}{dz^3dt}$ の代わりに、 $\frac{d^3\eta}{dt^3}$, $-\frac{d^3\xi}{dt^3}$ の形の項を代入した結果である。なんらかの物理理論で、この方程式の形が示唆されているかどうかは分らない。第 3 公式、(III),

$\omega_{pe} = 10^{16} \text{ s}^{-1}$ 程度であり、電子は 1 粒子としてではなく集団として振る舞う。マクスウェルのモデルはちょうどこの場合に対応している。

^{註 9} Recherches sur les propriétés optiques développées dans les corps transparents par l'action du magnétisme, 4^{me} partie. *Comptes Rendus*, t.lvi. p. 630 (6 April, 1863).

^{註 10} *Comptes Rendus*, lvii. p. 670 (19 Oct., 1863).

は M.C. ノイマンの物理理論^{註 11} の結果で、そこでは運動方程式は $\frac{d\eta}{dt}, -\frac{d\xi}{dt}$ の形の項を含んでいる^{註 12}。

公式 (III) で与えられる θ の値は近似的にも波長の逆 2 乗に比例していない。公式 (I), (II) はこの条件を充たしており、分散能が極端なものではない媒質にたいして観測値は耐えられる水準で一致している。しかしながら二硫化炭素やクレオソートにたいして、(II) で与えられる値は観測値とは非常に異なっている。(I) で与えられる値は観測値との一致はましであるが、二硫化炭素にたいしてはかなり近い値で一致しているが、クレオソートに対する数値は観測誤差で説明できる値と較べて、はるかに大きい量、異なっている。 p. 468

偏光面の磁気回転（ベルデから）。

24°.9 C での二硫化炭素。

スペクトル線	C	D	E	F	G
観測された回転	592	768	1000	1284	1704
I による計算。	589	760	1000	1284	1718
II による計算。	606	772	1000	1216	1640
III による計算。	948	967	1000	1084	1091

光線の回転 $E = 25^\circ 28'$.

註 11 ‘Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizationis per vires electricas vel magneticas declinetur.’ (「電気または磁気の力で傾けられた偏光面について、どのように扱われるようになったか説明。」) Halis Saxonum, 1858.

註 12 運動方程式のこれら 3 つの形は、当時、ファラディによって新しく発見された現象の解析の手段として G. B. エアリー卿 (*Phil. Mag.*, June 1846, p. 477) によって、最初に示唆された。マカラフ (Mac Cullagh) は水晶の現象を数学的に表現するために $\frac{d^3}{dz^3}$ の形の項を含む式を以前に示唆していた。これらの式はマカラフとエアリーによって提示された。「現象の機械的な説明を与えるのではなく、現象が方程式で説明できるかを示すとき、そのような仮定を未だしていないけれども、どちらの式が許容できる力学的な仮定から導かれるようなものに見えるだろうか。」

24°.3 C でのクレオソート.

スペクトル線	C	D	E	F	G
観測された回転	578	758	1000	1241	1728
I による計算。	617	780	1000	1210	1608
II による計算、	628	789	1000	1200	1565
III による計算。	976	998	1000	1017	1041

光線の回転 $E = 21^\circ.58'$.

物体の分子構成についての詳細をほとんど知らないので、光の磁気作用のような特定に現象にかんして、なんらかの満足できる理論を形成できそうにもない。できるとすれば、目に見える現象が、その分子が関与する作用に依存すると分っている、いくつもの異なった事例に基づいた帰納を行うことによって、観測事実の条件を満たすために分子に帰属させなければならない性質について決定的な何かを学んだ後であろう。

前のページで提示された理論はあきらかに暫定的なものであり、実際、分子渦の性質に關係した未証明の仮説と、媒質の変位による影響の受け方の上に立っている。それゆえ、観測事実とのどのような一致も偏光面の磁気回転の理論には、光の電磁理論での価値ほど、それほどの科学的な価値はないとなきなければならない。光の電磁理論は、たしかに媒質の電気的な性質についての仮説を含んではいるが、分子の構成についての推測はしていない。

831.] 註： この章は、すべて、つぎの *Proceedings of the Royal Society*, June 1856 にあるウィリアム トムソン卿のきわめて重要な所説への拡張とみなすことができる。——「ファラディによって発見された磁気の光への影響は運動する粒子の運動方向に依存する。たとえば、運動粒子を持っている媒質中で、磁力線に平行な線上にある粒子が、磁力線を軸として、そのまわりに螺旋をなすように変位され、円を描くような速度を接線として投射されると、その運動が（磁気を生成するコイル中の検流器を流れる電流の名目上の方向と同じ）方向に回るか、反対方向かにしたがって、異なる速度をもつであろう。しかし、媒質の弾性反作用は、粒子の方向や速度のいかんにかかわらず、変位が同じなら同じでなければならない。つまり、発光体の運動が同じ大きさでなくとも、円運動の遠心力とつり合う力は、同じ大きさでなければならない。それゆえ、絶対円運動は同じか、最初に考えていた粒子へ同じ大きさ

の遠心力を伝えるようなものであるから、発光体の運動は運動全体の成分にすぎないことが出てくる。また、1方向のそれほど光らない成分は、光を伝えないとき媒質中に存在する運動と複合して、同じ光らない運動と複合した反対方向のより光る運動のそれと同じ大きさの合力を与えることがでてくる。磁化する力の線に平行な磁化されたガラスを伝わる円偏光した光が、同じ性質をもって、常に右回り、または、常に左回りで、その経路が北磁極が引きよせられる方向またはその反対方向であるかにしたがって、異なった割合で伝搬するという事実のこの力学的な説明以外のなんらかの他の説明を考えることが不可能であると考えるだけではなく、この事実のほかのどのような説明も可能ではないと示すことができていると、私は信じている。したがって、ファラディの光学の発見は磁気の究極の性質のアンペールの説明の正しさの例証を与えているように見える。“分子渦”のランキンの仮説の力学的な扱いに運動量のモーメントの原理（「面積の保存」）の導入は磁化された物質の磁軸として熱運動の合成回転運動量の面（“不変面”）に垂直な直線を指しており、“磁気モーメント”の決定的な尺度として、これらの運動の運動量の合成モーメントを示唆しているように思える。電磁引力または斥力の現象、そして電磁誘導の現象すべての説明は運動が熱を構成する物体の慣性や圧力の中に単純に探すべきである。この物質が電気であるのか、ないのか、この物質が分子の核のあいだの空間にしみわたる連続的な流体であるか、それ自身、分子的にまとまったものかどうか、物体はすべて連続的で、分子の異質性は物体の隣接部分の有限の渦的な運動やその他の相対運動からなるのかどうか、科学の現状では、それを決めるのは不可能で、なんの結果もださずに終わる空論かもしれない。」

私がかなりの時間を費やした分子渦の理論は *Phil. Mag.*, 1861 年 4 月、5 月、1862 年 1 月、2 月に出版されている。

なんらかの回転現象が磁場中で進行しており、この回転を非常に多数のごく小さな物質の部分部分が行っており、そのそれぞれはそれ自身の軸のまわりに回転し、この軸は磁力の方向に平行であり、これらのいろいろな渦度の回転がそれらを結びつけるある種のメカニズムによって互いに依存させられていることを支持する証拠があると、私は思う。

そのとき、私がこのメカニズムの作業模型を想定するために行った試みは、

それが現実あるがまま以上のものではないとみなさるべきで、電磁場の部分部分の実際の結び付きと機械的に等価な結び付きを作りだすことのできるメカニズムを想定できることを実例として示したものだと考えなければならない。系の部分部分の運動のあいだの与えられた種類の結び付きを確立するために要するメカニズムを決める問題はつねに無限個の解を許す。この中で、あるものは他よりぎこちなく、複雑だが、すべて、一般に力学条件を満たさなければならない。

しかしながら、以下に示す理論の結果には高い価値がある。

- (1) 磁力は渦の遠心力の効果である。
- (2) 電流の電磁誘導は渦の速度が変化するとき働くように呼び込まれた力の効果である。
- (3) 駆電力は結合機構の応力から生じる。
- (4) 電気変位は結合機構の電気的な対抗から生じる。

第 XXII 章

分子電流による強磁性と反磁性の説明。

磁気の電磁理論。

832.] 磁石のあいだの相互作用は「磁気物質」と呼ばれる仮想的な物質の引力、斥力によって正確に表現できることを見てきた(380節)。一見したところ、棒を磁化したとき、磁気物質が動いているように見えるのに、この磁気物質が磁石のある部分から他の部分へ、大きな距離を動くと考えてはならない理由を示してきた。そして、磁気物質は厳密に磁気物質の一分子のなかに閉じ込められており、磁化された分子は、反対種類の磁気物質が分子のなかで、多かれ少かれ、分子の反対極に分離されているが、磁気物質のどちらも一部分として分子から実際に分離することはできないという、ポアッソンの仮説へと導かれた。

この議論は、磁化は鉄の大きな塊としての現象ではなく、分子の現象、言いかえれば、非常に小さくて、どのような機械的な方法によっても、南極から分離された北極を得るために、それらを2つに切り分けることができない物質の部分の現象であるという事実を完全に確定している。鉄や鋼を磁化する作用は鉄や鋼を構成している分子に磁化を分与することではなく、これらの分子は磁化されていない鉄のなかでも既に磁化されているが、分子軸がすべての方向にばらばらに向けられており、磁化の作用は分子を回転させて、その軸を一方向にすべて平行にするか、少なくとも、その方向に向けて傾けさせることにあると信じる強い理由のあることを見てきた(442節)。

p. 472

833.] しかし、私たちは未だ磁気分子の本質の説明には至っていない。つまり、私たちがよく知っているほかのこととの類似性を認識していない。それゆえ、分子の磁気は分子中で閉じた経路を循環し続ける電流によるとのア

ンペールの仮説を考えなければならない。

磁石の外面に適当に分布している電流のシートによって、磁石の外の点に、任意の磁石の作用の厳密な模造を作ることができる。しかし、内部の点での磁石の作用は対応する点の電流の作用とはかなり異なる。したがって、アンペールは、もし磁気が電流によって説明されうるなら、これらの電流は磁石の分子中で循環しなければならず、一つの分子から他の分子へ流れてはならないと結論した。分子内部の点での磁気作用を実験的に測定できないので、磁石内で広い範囲に拡がる電流の仮説を反証できないのと同じように、この仮説を反証することはできない。

この他にも、私たちは、電流は導体のある部分から他の部分へ移るとき抵抗を受け、熱を生成することを知っている。したがって、もし磁石のかなりの大きさのふつうの丸い部分に電流があったなら、その電流を維持するためには一定のエネルギーの消費があり、磁石は永続的な熱源であったであろう。回路を分子内に閉じ込めることにより、分子の中では抵抗について何も知られておらず、矛盾を怖れることなく、分子中で循環する電流が抵抗を受けないと主張できる。

それゆえ、アンペールの理論にしたがうと、磁気現象はすべて電流によるものであり、もし磁気分子に内部で磁力の観測をおこなえたら、磁力は他の電気回路で囲まれた領域中での力と厳密に同じ法則にしたがうことを見出しあらう。

p. 473

834.] 395 節では、磁石の内部の力を扱うとき、磁石の物質中にくりぬかれた小さな空隙中で測定が行われると、考えた。こうして、私たちは磁力と磁気誘導という 2 つの異なった量を考えることになる。これらの両方とも磁気物質が取り除かれた空間で観測されると考えられる。私たちは磁気分子の内部に入り、そのなかで力を観測できるとは考えない。

もしアンペールの理論を採用すると、磁石を連続的な物質としてではなく、多数の分子の集まりと考える。連続的な物質なら、磁化は簡単にわかる法則にしたがって点から点へ変化する。分子の集まりなら、分子のそれぞれの中で電流系を循環させ、非常に複雑な磁力の分布を引き起こす。分子の内部で力の方向は一般に近傍の平均的な力の逆方向であり、そして、磁気ポテンシャルは、それが存在する所で、磁石中で分子が存在するのと同じくらい多くの

多重度の関数である。

835.] しかし、見かけの複雑さにもかかわらず、この複雑さはたんに単純な部分部分が多重に共存することから生じるものであり、磁気の数学理論はアンペールの理論を採用し、数学的洞察を分子内部へ拡張することにより非常に単純化されることが分かるであろう。

まず第一に、磁力の2つの定義は1つになる。両者とも磁石の外の空間での定義と同じものになる。次に、磁力の成分は、いずれの場所でも、誘導の成分が従う条件、すなわち、

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0, \quad (1)$$

を満たす。

言葉を代えると、磁力の分布は非圧縮流体の速度分布と同じ性質のものである。つまり、25節で表示したように、磁力は収束性(吸い込み)を持たない。

最後に、3つのベクトル値関数——電磁運動量、磁力、電流——は互いにより単純に関係するようになる。それらはすべて収束性(吸い込み)のないベクトル関数であり、ハミルトンの記号 ∇ によって表記される空間変化を計算するのと同じ過程によって、他のものからその1つをと、順次、導かれる。

p. 474

836.] しかし、私たちは、ここで、物理的な観点から磁気を考察しており、分子電流の物理的な性質を問わなければならない。電流は分子のなかで循環しており、電流は抵抗を受けないと仮定する。もし L が分子電流の自己誘導係数、 M がこの回路と他の回路のあいだの相互誘導係数なら、そのとき、もし γ が分子のなかの流れ、 γ' が他の回路での電流なら、電流 γ の方程式は

$$\frac{d}{dt}(L\gamma + M\gamma') = -R\gamma; \quad (2)$$

であり、仮定により、抵抗はない、 $R = 0$ 、から、積分により

$$L\gamma + M\gamma' = \text{一定}, \quad = L\gamma_0, \text{とする}, \quad (3)$$

を得る。

分子の軸に垂直な面への分子回路の射影の面積が A であると考えよう。分子の軸は射影が最大になる面の法線として定義される。もし、他の電流の作

用が磁力, X , を分子軸への傾角が θ である方向に生成するなら、量 $M\gamma'$ は $XA \cos \theta$ となり、電流の方程式として

$$L\gamma + XA \cos \theta = L\gamma_0, \quad (4)$$

が成り立つ。ここで γ_0 は $X = 0$ のときの γ の値である。

それゆえ、分子電流の強さはまったくその基本的な値、 γ_0 と、他の電流による磁力の強度に依存している。

837.] もし基本的な電流がなく、電流はまったく誘導によると考えると、

$$\gamma = -\frac{XA}{L} \cos \theta, \quad (5)$$

である。

負符号は誘導された電流の方向は誘導する電流の反対方向であり、その磁気作用は回路の内部で磁力の方向の反対方向に作用するようなものであることを示している。言葉をかえると、分子電流はその極が誘導している磁石の同名の極の方向へ回された小さな磁石のように作用する。

これは磁気作用のもとにある鉄分子の作用の逆である作用である。それゆえ、鉄になかの分子電流は誘導によって励起されたものではない。しかし、反磁性物質中では、この種の作用が観測され、事実、これがウェーバーにより最初に与えられた反磁性分極の説明である。

p. 475

ウェーバーの反磁性理論。

838.] ウェーバーの理論にしたがうと、反磁性物質の分子中には電流が抵抗なしに循環する経路が存在する。もしこの経路があらゆる方向に分子を横切ると考えると、これは分子を完全導体にすることになることは明らかである。

分子中の線形回路の仮定から始めると、式(5)によって与えられる電流の強さがある。

電流の磁気モーメントはその強さと回路の面積の積、 γA 、であり、磁力の方向に分解された成分は $\gamma A \cos \theta$ であり、(5) によって

$$-\frac{XA^2}{L} \cos^2 \theta, \quad (6)$$

で与えられる。

もし単位体積中に n 個のそのような分子があれば、そして、それらの分子軸がすべての方向に同じ様に分布しているなら、 $\cos^2 \theta$ の平均値は $\frac{1}{3}$ となり、物質の磁化強度は

$$-\frac{1}{3} \frac{nXA^2}{L}, \quad (7)$$

となる。

それゆえ、ノイマンの磁化係数は

$$\kappa = -\frac{1}{2} \frac{nA^2}{L}, \quad (7)$$

である。

それゆえ、物質の磁化は磁力の反対方向であり、言い換えると、物質は反磁性である。また磁化は厳密に磁力に比例し、通常の磁気誘導の場合のように、有限の極限に向かおうとはしていない。

839.] もし分子経路の軸の方向が、すべての方向で同じではなく、ある方向に重みをつけて、整列したなら、すべての分子にわたる合計

$$\sum \frac{A^2}{L} \cos^2 \theta$$

は θ を測る基準線の方向にしたがって、いろいろな値をとり、いろいろな方向のこれらの値の分布は、同じ点をとおるいろいろな方向の軸まわりの慣性モーメントの値の分布に似ている。そのような分布は、プリュッカー (Julius Plücker, 1801–1868) によって記述された、物体の軸に関する磁気現象を説明し、ファラディはそれを磁気-結晶現象と呼んだ。435 節参照。

p. 476

840.] もし、電流が分子中の経路に閉じ込められる代わりに全分子が完全導体だと考えられたら、何が起こるかを考えよう。

物体の形が非サイクリックである、つまり、環形や穴あき物体の形をしていない場合から始め、この物体がすべての場所で完全導体物質の薄い殻で囲まれているとする。

任意の形の完全伝導性物質の閉じたシートは、はじめに電流がないなら、外部磁場に曝されたとき、電流シートとなり、シートの作用は内部のすべての点で磁力を零にすることを 654 節で証明した。

もしそのような物体の近傍の磁力の分布が同じ形の透水性のない物体の近傍の非圧縮性流体の速度分布に似ていること見ると、この場合の理解を助けることができる。

もし、もう一つの伝導板が最初のものの中に置かれたなら、それは磁力には曝されていないので、その中に電流が励起されることは明らかである。したがって、完全導体物質の固体中で、磁力の効果は物体の面に完全に閉じ込められた電流系を生成することである。

841.] もし導体が半径 r の球形なら、その磁気モーメントは {672 節で与えられた方法によって }

$$-\frac{1}{2}r^3 X,$$

あることを示すことができ、もしくはそのような球が媒質中に分布しており、したがって、単位体積中の伝導物質の体積が k' なら、314 節、式 (17) で、 $k_1 = \infty$, $k_2 = 1$, $p = k'$ と置いて、透磁率をその節の抵抗の逆数と考えれば、透磁率係数は

$$\mu = \frac{2 - 2k'}{2 + k'}, \quad (9)$$

p. 477

あることが分かる。したがって、ボアソンの磁気係数にたいして

$$k = -\frac{1}{2}k', \quad (10)$$

ノイマンの誘導磁化係数にたいして

$$\kappa = -\frac{3}{4\pi} \frac{k'}{2 + k'}, \quad (11)$$

を得る。

完全導体の数学的な考察は通常の導体で観測されるどのような現象ともまったく異なった結果へ導くので、この問題をもう少し追求しよう。

842.] 836 節でのように、面積 A の閉じた曲線の形の伝導経路の場合に戻ると、角 θ を増加させようとする電磁力のモーメントにたいして、

$$\gamma\gamma' \frac{dM}{d\theta} = -\gamma X A \sin \theta \quad (12)$$

$$= \frac{X^2 A^2}{L} \sin \theta \cos \theta, \quad (13)$$

がなりたつ。

この力は θ が直角より小さいか大きいにしたがって、正または負である。したがって完全伝導経路への磁力の効果はその軸を磁力線に直角に、つまり、経路の面が磁力線と平行になるように、回そうとする。

よく似た種類の効果をペニー銅貨や銅リングを電磁石の極の間に置くことによって観測できる。磁石が励起された瞬間、リングはその面を軸方向に回転させるが、銅の抵抗によって電流が止むとすぐにこの力は消える^{註1}。

843.] これまで、分子電流が全面的に外部の磁力によって励起される場合のみを考えてきた。つぎに、アンペールの通常磁気の理論にたいしてウェーバーの分子電流の磁気-電気誘導理論の持つ意味を検討しよう。アンペールとウェーバーにしたがうと、磁性体中の分子電流は外部磁力によって励起されるのではなく、すでにそこにあり、磁力の電流が巡っている伝導回路への電磁作用が分子自体に作用し、分子の向きを変える。アンペールがこの仮説を考えだしたとき、電流の誘導は知られておらず、彼は分子電流の存在を考慮した仮説は作らず、その強さも決めなかった。

p. 478

しかし、私たちはウェーバーが反磁性分子中の電流に適用した同じ法則をこれらの電流に適用しなければならない。電流 γ の原始値が、磁力が働いていないとき、零ではなく、 γ_0 であると考えなければならないだけである。磁力, X , が軸が磁力線にたいして角 θ 傾いている面積 A の分子電流に作用するとき、電流の強さは

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{XA}{L} \cos \theta, \quad (14)$$

であり、 θ を増加させるよう分子を回転させようとする偶力のモーメントは

$$-\gamma_0 X A \sin \theta + \frac{X^2 A^2}{2L} \sin 2\theta, \quad (15)$$

である。

したがって、443 節での研究で

$$A\gamma_0 = m, \quad \frac{A}{L\gamma_0} = B, \quad (16)$$

と置くと、平衡の式は

$$X \sin \theta - BX^2 \sin \theta \cos \theta = D \sin(\alpha - \theta), \quad (17)$$

^{註1} Faraday, *Exp. Res.*, 2310, &c. 参照

となる。

電流の磁気モーメントの X の方向に分解された成分は

$$\gamma A \cos \theta = \gamma_0 A \cos \theta - \frac{XA^2}{L} \cos^2 \theta, \quad (18)$$

$$= m \cos \theta (1 - BX \cos \theta), \quad (19)$$

である。

844.] これらの条件は磁気誘導のウェーバーの理論での条件と、係数 B を含む項だけ異なっている。もし BX が 1 と較べて小さいなら、結果は磁気のウェーバーの理論の結果を近似するだろう。もし BX が 1 と較べて大きいなら、結果は反磁性のウェーバーの理論を近似するであろう。

分子電流の原始値 γ_0 が大きければ大きいほど、 B は小さくなり、もし L も大きければ、これも B を減少させる。もし電流が環状経路を流れるなら、 L の値は $\log \frac{R}{r}$ に依存する。ここで R は経路の平均線の半径であり、 r はその断面の半径である。それゆえ、その面積と較べて経路の断面が小さければ小さいほど、自己誘導係数 L は大きく、現象はウェーバーのもとの理論とより一致がよくなる。しかし、この差があるので、磁化力、 X 、が増加するとともに、一時的な磁気モーメントは最大に達するだけではなく、その後、 X が増加するにつれて減少する。

もし磁化力が連続的に増加するとき、任意の物質の一時的な磁化がまず増加し、つぎに減少することが実験的に証明されたなら、これら分子電流の存在の証拠はほとんど実証のランクまで上ると私は思う^{註2}。

845.] もし反磁性体中の分子電流が確定した経路に閉じ込められるなら、そして、もし分子が磁気物質の電流のように向きが変えられるなら、磁化力が増加するにつれて、磁気分極はつねに増加するが、力が大きいとき、磁化力のようにそれほど速くない。しかし、反磁性係数の小さな絶対値はそれぞれの分子にはたらく向きを変える力は磁気分子に働く力とくらべて小さくなればならず、したがって、この偏向によるどのような結果も感知できそうにない。

^{註2} { エウイング教授が強磁场中でこの効果を探してきたが、この効果の兆候は未だ見つかっていない。Ewing and Low 'On the Magnetisation of Iron and other Magnetic Metals in very Strong Fields,' Phil. Trans. 1889, A. p. 221, 参照。 }

他方、反磁性体中の分子電流は分子の全物質を自由に流れ、反磁性分極は磁化力にきっちりと比例し、その総量は完全伝導の物質塊によって占められた全空間の決定へと導き、もし分子の数が分っているなら、それぞれの大きさを決めることになる。

第 XXIII 章

遠隔作用の理論。

ガウスとウェーバーが与えたアンペールの公式の説明。

846.] 強度 i, i' の電流を担う 2 つの回路の線要素 ds, ds' の間の引力は、アンペールの公式によって、

$$\frac{ii' ds ds'}{r^2} (2 \cos \epsilon + 3 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}), \quad (1)$$

または

$$-\frac{ii' ds ds'}{r^2} (2r \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}), \quad (2)$$

である。ここで電流は電磁単位で評価されている。526 節参照。

これらの式中の意味を解釈しなければならない量は

$$\cos \epsilon, \quad \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}, \quad \text{および} \quad \frac{d^2 r}{ds ds'},$$

であり、電流のあいだの直接的な関係にもとづいて解釈を探すこととなる現象の中で、もっとも明白な現象は 2 要素の電気の相対速度である。

847.] それゆえ、それぞれ、線要素 ds, ds' にそって、一定の速度 v, v' で動く、2 粒子の相対運動を考えよう。これらの粒子の相対速度の 2 乗は

$$u^2 = v^2 - 2vv' \cos \epsilon + v'^2; \quad (3)$$

であり、もし r が粒子間の距離を表記するなら、

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v \frac{dr}{ds} + v' \frac{dr}{ds'}, \quad (4)$$

p. 481

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = v^2 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2vv' \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} + v'^2 \left(\frac{dr}{ds'}\right)^2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 r}{ds^2} + 2vv' \frac{d^2 r}{ds ds'} + v'^2 \frac{d^2 r}{ds'^2}, \quad (6)$$

である。ここで記号 ∂ は、量を時間微分するとき、粒子の座標を時間の関数として表示しなければならないことを指している。

それゆえ、式 (3), (5), (6) の積 vv' を含む項が、私たちが解釈しなければならない、(1), (2) に現れる量を含む。それゆえ、式 (1), (2) を $u^2, \frac{\partial r}{\partial t}^2$, および $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ を使って表示するようとする。しかし、そうするためにには、(3), (5), (6) それぞれの第 1 項と第 3 項を省かなければならない。それらはアンペールの公式に含まれない量を含んでいるからである。したがって、電流を 1 方向の電気のみの輸送として説明することはできず、2 つの反対方向の電流をそれぞれ組み合わせて、 v^2 と v'^2 を含む項の組み合せ効果が零になるようにしなければならない。

848.] それゆえ、第 1 の線要素, ds 中では、速度 v で動く電気粒子 e と、速度 v_1 で動くもう一つの電気粒子 e_1 があり、同様に、それぞれ、速度 v' , v'_1 で動く 2 粒子 e' と e'_1 があると考えよう。

これらの粒子の組み合せ作用に対する v^2 を含む項は

$$\sum(v^2 ee') = (v^2 e + v_1^2 e_1)(e' + e'_1), \quad (7)$$

である。

同様に

$$\sum(v'^2 ee') = (v'^2 e' + v'_1^2 e'_1)(e + e_1); \quad (8)$$

$$\sum(vv' ee') = (ve + v_1 e_1)(v'e' + v'_1 e'_1), \quad (9)$$

である。

$\sum(v^2 ee')$ が零になるためには、

$$e' + e'_1 = 0, \text{ または } v^2 e + v_1^2 e_1 = 0, \quad (10)$$

のどちらかが成り立たなければならない。

フェヒナーの仮説にしたがうと、電流は正方向の正電気の電流と負方向の負電気の電流が組み合わされてできており、2つの電流は、運動中の電気量にかんしても、電気が動く速度にかんしても、数値的に厳密に同じ大きさである。したがって、フェヒナーの仮説は(10)の条件の両方を満たす。

p. 482

しかし、私たちの目的のためには、つぎのどちらかを仮定するだけで十分である。——

それぞれの線要素中の正電気量は負電気量と数値的に等しい；または——正負の電気量はそれらの速度の逆2乗に比例する。

さて、第2の導線を全体として荷電することにより、 $e_1 + e'_1$ を正にも負にもできることが分っている。そのような荷電された導線は、電流がないときでさえ、この公式にしたがうと、 $v^2e + v_1^2e_1$ が零と異なる値をもつ電流を運ぶ第1の導線に作用するであろう。そのような作用はけっして観測されていない。

それゆえ、量 $e' + e'_1$ がつねに零でないことは実験的に証明できるから、また、量 $v^2e + v_1^2e_1$ は実験的に検証できないから、これらの考察にとって、後者の量が不変的に零になると仮定する方がよい。

849.] どのような仮説をとろうとも、第1回路の電気の全輸送量が、代数的に計算して、

$$ve + v_1e_1 = cids,$$

と表現されることに疑いの余地はない。ここで、 c は単位時間に単位電流によって伝えられる静電気の単位の数である。したがって、式(9)を

$$\sum(vv'ee') = c^2ii'dsds', \quad (11)$$

と書くことができる。

したがって(3), (5), (6)の4つの値の合計は

$$\sum(ee'u^2) = -2c^2ii'dsds' \cos \epsilon. \quad (12)$$

$$\sum(ee'(\frac{\partial r}{\partial t})^2) = 2c^2ii'dsds' \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}. \quad (13)$$

$$\sum(ee'r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}) = 2c^2ii'dsds' r \frac{d^2 r}{dsds'}, \quad (14)$$

となり、 ds, ds' のあいだの引力にたいする 2 つの式 (1), (2) を

$$-\frac{1}{c^2} \sum \left[\frac{ee'}{r^2} \left(u^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right], \quad (15)$$

$$-\frac{1}{c^2} \sum \left[\frac{ee'}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right], \quad (16)$$

と書くことができる。

850.] 静電気の理論では、2 つの電気粒子 e, e' の斥力にたいする普通の式
p. 483
は $\frac{ee'}{r^2}$, であり、

$$\sum \left(\frac{ee'}{r^2} \right) = \frac{(e + e_1)(e' + e'_1)}{r^2}, \quad (17)$$

である。これは全体として荷電されている 2 要素間の静電斥力を与える。

したがって、2 粒子間の斥力にたいして、

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(u^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right], \quad (18)$$

または

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right], \text{ 註 } 1 \quad (19)$$

の異なる形のどちらかを仮定すると、これらの式から、普通の静電力とアンペールによって決定された電流のあいだに働く力の両方を導くことができる^{註 2}。

註 1 { この種の他の理論の報告は J.J.Thomson による *Report on Electrical Theories, B. A. Report*, 1885, pp. 97-155, を参考せよ。 }

註 2 訳註：荷電粒子の運動を (v/c) を無限小の位数として展開すると、 $(v/c)^3$ の位数で電磁波の 2 重極放射が現れる。したがって、電磁場の運動を考慮せずに、 $(v/c)^3$ 以上の展開式を求ることはできない。しかし、 $(v/c)^2$ の位数までは、媒質の効果は現れず、2 粒子間の相互作用を遠隔相互作用として記述することが可能である。

この位数までの正しいラグランジアンは 1922 年になって始めて、進化論で著名な生物学者ダーウィンの孫、Charles Galton Darwin によって導かれた。そのラグランジアンはダーウィンラグランジアンと呼ばれている。

このラグランジアンの導出のため、正しく位数展開するには、特殊相対性原理の確立が必要であった。

粒子の静止エネルギーを使って運動エネルギーを表現しなければならない。

また、電磁場のポテンシャルを、相対性原理が明確に見える形で表現しなければならない。マクスウェルは、その方程式の第 1 組 (ファラディの法則と磁気单極不在の法則) をポテンシャル

851.] これらのうち、最初の式 (18) はガウスによって 1835 年 7 月に発見され³、ガウスはそれを電気の作用の基礎法則と解釈した。つまり。「相対運動状態での電気要素は互いに引合い、反発するが、それらが相対的に静止しているときの仕方と同じではない。」この発見は、私が知るかぎりでは、生前に出版されず、ウェーバーが独立に発見し、彼の記念碑的著作 *Elektrodynamische Maasbestimmungen*⁴ の第 1 部で出版された第 2 式が科学界に知らしめられた最初の結果であった。

を使って表現したが、それをゲージ変換

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

に対する対称性を表す式であると認めることなく、いわゆる、クーロンゲージに拘わったが、正しく展開するためには、いわゆる、ローレンツゲージ条件を課す必要がある。マクスウェル方程式がゲージ対称性を持つことが明確に述べられたのは 1918 年であり、H. ワイルによる。

その上で、マクスウェル方程式の第 2 組（アンペールの法則とガウスの法則）を、荷電粒子の運動を既知として、ポテンシャルを決める式

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho \end{aligned}$$

とみなし、いわゆる遅延ポテンシャルを求める。つぎに、必要な位数までの展開を行い、さらに、ゲージ変換を行い、静電ポテンシャルをクーロンのポテンシャルの形へ持っていく。

この答えは、

$$\phi = \frac{e}{r}, \quad \vec{A} = \frac{e\{\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}\}}{2cr}$$

である。 \vec{n} は粒子位置の方向余弦である。こうして、2 体相互作用のポテンシャルエネルギー

$$W = e'\phi - \frac{e'}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}$$

が求められる。

この式を重心系の運動と相対運動に分ける。重心運動を考えるときは、無限大の自己エネルギーを差し引くという、いわゆる、繰り込み操作が必要である。重心系でのハミルトニアンは、2 粒子の運動量を、それぞれ、 $-\vec{p}$, \vec{p} として、

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p^2 - \frac{1}{8c} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) p^4 \\ &\quad + \frac{e_1 e_2}{r} + \frac{e_1 e_2}{2m_1 m_2 c^2 r} \{p^2 + (\vec{p} \cdot \vec{n})^2\} \end{aligned}$$

である。

註³ *Werke* (Göttingen 版, 1867), vol. v. p. 616.

註⁴ *Abh. Leibnizens Ges.*, Leipzig (1846), p. 316.

852.] これら 2 つの式は 2 つの電流間の機械的な力の決定に応用されたとき、まったく同じ結果に導き、この結果はアンペールの結果と同一である。しかし、2 電気粒子のあいだの作用の物理法則の表式と考えたとき、自然界のこれまでに知られている他の事実と首尾一貫しているだろうかという疑問に導かれる。

これらの式は両方とも粒子の相対速度を含んでいる。さて、数学的な推論によって、よく知られたエネルギー保存の原理を確立するとき、一般に、2 粒子間に作用する力は距離のみの関数であると仮定され、もしそれが、時間や、粒子の速度のような、距離以外のなんらかの関数ならば、証明は成り立たないふつうは言われている。

したがって、電気作用の法則は、粒子の速度を含むとき、エネルギー保存の原理と矛盾していると考えられてきた。

853.] ガウスの公式はこの原理と矛盾しており、捨てなければならない。これは有限の系で、物理的な手段によって、エネルギーが無限に生成されるという結論に導くからである。この異議はウェーバーの公式には当てはまらない。2 粒子からなる系のポテンシャルエネルギーとして、

$$\psi = \frac{ee'}{r} [1 - \frac{1}{2c^2} (\frac{\partial r}{\partial t})^2], \quad (20)$$

を仮定すると、2 粒子間の斥力はこの式を r にかんして微分し、符号を変えれば見出されるが、それは (19) 式で与えられるものであることをウェーバー^{註 5} は示しているからである。

したがって、固定された粒子の斥力によって動いている粒子になされた仕事は $\psi_0 - \psi_1$ である。ここで ψ_0 および ψ_1 はその経路の始めと終わりでの ψ の値である。さて、 ψ は距離 r と、 r の方向に分解された速度成分に依存している。それゆえ、もし粒子が閉じた経路を描き、したがってその位置、速度、運動の方向が始めと終わりで同じなら、 ψ_1 は ψ_0 に等しく、一周期の操作のあいだに、全体として、仕事はなされない。

したがって、ウェーバーによって仮定された力の作用のもとでは、周期的に動く粒子によって無限大の仕事が生成されることはない。

854.] しかし、ヘルムホルツは、「静止導体中での電気の運動方程式」^{註 6} に

^{註 5} *Pogg. Ann.*, lxxiii. p. 229 (1848).

^{註 6} *Crelle's Journal*, 72. pp. 57-129 (1870).

についての彼の力溢れる論文で、完全に周期的な操作のあいだになされた仕事にかんしてのみ、ウェーバーの公式はエネルギーの保存原理とは矛盾していないことと示しているが、ウェーバーの法則にしたがって動く、2つの帶電した粒子は、最初、有限の速度を持っているが、互いに有限の距離にある間に、それらは無限大の運動エネルギーを得るかもしれません、無限大の仕事をするかもしれないことを指摘した。

p. 485

これにたいして、ウェーバーは^{註7} ヘルムホルツの示した例の粒子の初期の相対速度は、有限だが、光速度より大きい、また、運動エネルギーが無限大になる距離は、有限だが、知覚できるどのような大きさよりも小さく、したがって、そのような2分子を互いにそれほど近くに持ってくることは物理的に不可能であると応えた。それゆえ、この例は、いかなる実験法によっても、検証できない。

ヘルムホルツ^{註8}は、それゆえ、実験的検証のため、距離があまり小さくなく、速度があまり大きくない場合について論じた。半径 a の固定された非伝導球面が電気によって面密度 σ に一様に荷電されている。質量が m で電荷 e の電気を担う粒子が速度 v で球内を動く。公式(20)から計算された電気力学ポテンシャルは

$$4\pi a\sigma e \left(1 - \frac{v^2}{6c^2}\right), \quad (21)$$

であり、球内の粒子の位置に独立である。この V に、他の力の作用から生じる残りのポテンシャルエネルギーと粒子の運動エネルギー、 $\frac{1}{2}mv^2$ 、を加えて、エネルギー方程式として

$$\frac{1}{2}(m - \frac{3}{4}\frac{\pi a\sigma e}{c^2})v^2 + 4\pi a\sigma e + V = \text{const.} \quad (22)$$

が見出される。面密度 σ を一定に保ったまま、球の半径 a が増加すると、 v^2 の係数の第2項は無限に増加することができるので、 v^2 の係数は負にすることができる。粒子運動の加速はその *vis viva* (活力、運動エネルギー) の現象に対応し、閉じた経路を動き、つねに運動の方向に反対の、摩擦のような力の作用を受ける物体はとどまることなく速度を増し、限度がない。このありえない結果は v^2 の係数に負の項を導入した必然的な帰結である。

^{註7} Elektr. Maasb. insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie.

^{註8} Berlin Monatsbericht, April 1872, pp. 247-256; Phil. Mag., Dec. 1872, Supp., pp. 530-537.

p. 486

855.] しかし、ここでウェーバーの理論の実現可能な現象への応用を考えなければならない。私たちはウェーバーの理論がどのように電流の 2 要素間の引力にたいしてアンペールの式を与えるのかを見てきた。これらの線要素の一方の他方へのポテンシャルが 2 線要素中の正負の電流の 4 つの組み合わせにたいしてポテンシャル ψ の値の和をとることによって見つけられている。結果は、式 (20) によって、 $\frac{\partial r}{\partial t} \Big|_t^2$ の 4 つの値の和をとって

$$-ii'dsds' \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}, \quad (23)$$

であり、一方の閉じた電流の他方へのポテンシャルは

$$-ii' \iint \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} dsds' = ii'M, \quad (24)$$

である。ここで、423, 524 節でのように $M = \iint \frac{\cos \epsilon}{r} dsds'$, である。

閉じた回路の場合、この式は私たちが既に得ている (524 節) 式と一致している^{註 9}。

ウェーバーの電流の誘導理論。

856.] ウェーバーは、電流の要素間の作用にたいするアンペールの公式から動いている電気粒子間の作用にたいする彼自身の公式を導いたあと、彼の公式を応用した電磁誘導による電流の生成の説明へと進んだ。これに彼はすばらしい成功をおさめた。誘導流の法則をウェーバーの公式から導くことができた方法を簡単に示そう。しかし、アンペールによって発見された現象から導かれる法則がファラディが後に発見した現象も説明できる事情は最初にそう思ったほど法則の物理的な正しさへの証拠へのそれほどの付加的な重みを与えるものではない。

ヘルムホルツとトムソンによって、もしアンペールの現象が真なら、そしてもしエネルギー保存の原理が認められるなら、ファラディによって発見された誘導現象は必然的に出てくることが示されているからである。

p. 487

^{註 9} この研究の全体にわたってウェーバーは電気力学単位系を採用している。この書では私たちはつねに電磁単位系を使っている。電流の電磁単位は電気力学単位に対して 1 に対して $\sqrt{2}$ である。

ウェーバーの法則もポテンシャルが存在するかぎりエネルギー保存則と無矛盾であり、これがヘルムホルツとトムソンによる原理を適用するために要するすべてである。したがって、この問題の計算をする以前に、ウェーバーの法則は電流の誘導を説明すると主張できる。それゆえ、計算によって電流の誘導の説明が見出されたことは、法則の物理的な正しさにたいする証拠をまさにもとのままの状態で残している。

他方、ガウスの公式は、電流のあいだの引力現象を説明するが、エネルギーの保存則と矛盾しており、それゆえ、それは誘導現象のすべてを説明することは肯定することはできない。事実、859節で見るよう、ガウスの公式はそういうことができていない。

857.] ds が運動したとき、そして、 ds 中の電流が変化するとき、 ds 中の電流による、線要素 ds' 中の電流を生成しようとする駆電力を考えなければならない。

ウェーバーにしたがうと、 ds' を線要素とする導体の物質への作用はそれが運ぶ電気へのすべての作用の和である。他方、 ds' 中の電気への駆電力は ds' のなかの正と負の電気に作用する電気力の差である。これらの値はすべて要素を結ぶ直線中で作用し、 ds' への駆電力もまたこの直線中にあり、 ds' の方向の駆電力を得るために、力をその方向に分解しなければならない、ウェーバーの公式を適用するために、要素 ds は ds' に相対的に動いており、両要素中の電流は時間的に変化するとの想定のもとで、公式中に現れるいろいろな項を計算しなければならない。こうして見出された表式は $v^2, vv', v'^2, v, v',$ を含む項と、 v や v' を含まない項を含み、それらはすべて ee' がかけられている。以前に行ったように、それぞれの項の 4 つの値を検討し、4 つの値の和から生じる機械的な力をまず考え、考慮しなければならない唯一の項は積 $vv'ee'$ を含む項であることが分かる。

もし第 2 の要素の正負の電気への第 1 要素の作用の差から生じる、第 2 要素中に電流を生じさせようとする力を考えるなら、検討しなければならない唯一の項は vee' を含む項であることが分かる。 $\sum(vee')$ に含まれる 4 項を書くことができ、

$$e'(ve + v_1e_1) \quad \text{および} \quad e'_1(ve + v_1e_1).$$

である。 $e' + e'_1 = 0$ であるから、これらの項から生じる機械的な力は零であ

るが、正の電気 e' に作用する駆電力は $(ve + v_1 e_1)$ であり、負の電気 e'_1 に作用する駆電力はこれに同じ大きさで反対方向である。

858.] 第 1 の要素 ds が ds' に相対的にある方向に速度 V で動いていると考え、 V の方向と、それぞれ、 ds , ds' の方向の間の角を \widehat{Vds} , $\widehat{Vds'}$ と表記しよう。2つの電気粒子の相対速度 u の2乗は

$$u^2 = v^2 + v'^2 + V^2 - 2vv' \cos \epsilon + 2Vv \cos \widehat{Vds} - 2Vv' \cos \widehat{Vds'}, \quad (25)$$

である。 vv' 中の項は式(3)中のものと同じである。駆電力が依存する、 v 中の項は

$$2Vv \cos \widehat{Vds},$$

である。

この場合の r の時間変化の値にたいしても、

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v \frac{dr}{ds} + v' \frac{dr}{ds'} + \frac{dr}{dt}, \quad (26)$$

がなりたつ。ここで $\frac{\partial r}{\partial t}$ は電気粒子の運動に関するものであり、 $\frac{dr}{dt}$ は物質の導体の運動にかんするものである。もしこの量の2乗を作ると、機械的な力が依存する vv' を含む項は、式(5)中で前と同じであり、駆電力が依存する v を含む項は

$$2v \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt},$$

である。

(26) を t にかんして微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} &= v^2 \frac{d^2 r}{ds^2} + 2vv' \frac{d^2 r}{ds ds'} + v'^2 \frac{d^2 r}{ds'^2} + \frac{dv}{dt} \frac{dr}{ds} + \frac{dv'}{dt} \frac{dr}{ds'} \\ &+ v \frac{dv}{ds} \frac{dr}{ds} + v' \frac{dv'}{ds} \frac{dr}{ds'} + 2v \frac{d}{ds} \frac{dr}{dt} + 2v' \frac{d}{ds'} \frac{dr}{dt} + \frac{d^2 r}{dt^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

が分かる。

vv' を含む項は(6)中で前と同じであることが分かる。 v の符号とともに符号を変える項は $\frac{dv}{dt} \frac{dr}{ds}$ と $2v \frac{d}{ds} \frac{dr}{dt}$ である。

註 10 { 1 版、2 版では、項 $2v \frac{d}{ds} \frac{dr}{dt} + 2v' \frac{d}{ds'} \frac{dr}{dt}$ が省かれていた。しかし、 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \{v \frac{d}{ds} +$

859.] もしガウスの公式(式(18))によって第1要素 ds の作用から生じる第2要素の方向の電気合力を計算すると、

$$\frac{1}{r^2} dsds' iV (2 \cos \widehat{Vds} - 3 \cos \widehat{Vr} \cos \widehat{rds}) \cos \widehat{rds'}, \quad (28)$$

を得る。

この式には電流*i*の変化率を含む項はないので、そして1次流の変動が第2回路に誘導作用を生成することが分かっているので、ガウスの公式を電気粒子間の作用の正しい式として受け入れることはできない。

860.] しかし、ウェーバーの公式、(19)を採用すると、

$$\frac{1}{r^2} dsds' (r \frac{dr}{ds} \frac{di}{dt} + 2i \frac{d}{ds} \frac{dr}{dt} - i \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt}) \frac{dr}{ds'}, \quad (29)$$

つまり

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{i}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) dsds' + \frac{i}{r} \left(\frac{d^2 r}{ds dt} \frac{dr}{ds'} - \frac{d^2 r}{ds' dt} \frac{dr}{ds} \right) dsds', \quad (30)$$

を得る、

もしこの式を s と s' にかんして積分すると、第2回路への駆電力として

$$\frac{d}{dt} i \iint \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} dsds' + i \iint \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 r}{ds dt} \frac{dr}{ds'} - \frac{d^2 r}{ds' dt} \frac{dr}{ds} \right) dsds'. \quad (31)$$

を得る。

さて、第1の回路が閉じられたとき

$$\int \frac{d^2 r}{dsds'} = 0,$$

である。

したがって

$$\int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ds = \int \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} + \frac{d^2 r}{dsds'} \right) ds = - \int \frac{\cos \epsilon}{r} ds, \quad (32)$$

である。

$v' \frac{d}{ds'} + \frac{d}{dt}$ }² であるから、それらは含まれるべきだと思われる。しかし、回路が閉じているとき、それは結果には影響を与えない。}

しかし、423. 524 節によって

$$\iint \frac{\cos \epsilon}{r} dsds = M, \quad (33)$$

である。

式 (31) の第 2 項はもし両回路が閉じられたなら、零であるから、第 2 の回路への駆電力を

$$-\frac{d}{dt}(iM), \quad (34)$$

と書くことができるか、それは既に実験で確立したものと一致している。

ある電気粒子からもう一つの粒子へ一定の速度で伝達された作用の結果と考えられた、ウェーバーの公式について。

p. 490

861.] ガウスが W, ウェーバーに宛てた極めて興味深い書簡^{註 11} の中でガウスは、それまで長い間、暖めてきた電気力学の思索に言及している。もしそのときまでに彼が電気力学の真実のかなめ石と考えていたものを確立できていたなら、発表していたはずの考えである。これは、すなわち、電気粒子間で、瞬間的にではなく、光の伝搬と同様に、時間をかけて伝搬する作用の考察から運動する電気粒子間に作用する力を導くことである。ガウスはこの導出に成功せず、電気力学の研究をあきらめた。そして彼はまず第 1 に伝搬が生じる生じ方の首尾一貫した表現を形成することが必要であるとの主観的確信を抱いたのである。

3 人の傑出した数学者が電気力学のかなめ石を与えようと努力した。

862.] 1858 年、ゲッティンゲンの王立協会に提出したが、のちほど、引き下げられ、著者の死後、1867 年にボゲンドルフの *Annalen*, bd. cxxxii. pp. 237-263 で出版されたにすぎない論文で、リーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866) はポアソン方程式の修正形

$$\frac{dV}{dx^2} + \frac{dV}{dy^2} + \frac{dV}{dz^2} + 4\pi\rho = \frac{1}{a^2} \frac{d^2V}{dt^2},$$

から電流の誘導現象を導いた。ここで V は静電ポテンシャル、 a は速度である。

この方程式は弾性媒質中での波やそのほかの擾乱の伝搬を表示する方程式と同じ形である。しかし、著者はそれを通して伝搬が起こるどのような媒質についても表だって発言することを避けているように思われる。

リーマンによって与えられた数学的な研究はクラウジウス (Rudolf Clausius, 1822–1888)^{註 12} によって検証され、クラウジウスは数学的な仮定の健全さを認めず、ポテンシャルが光のように伝搬するとの仮定はウェーバーの公式も、電気力学で知られていた法則も導かないことを示した。

863.] クラウジウスはノイマン (Carl Gottfried Neumann, 1832–1927) による ‘Principles of Electrodynamics’^{註 13} (電気力学の原理) についての、はるかに精巧な研究も検証した。しかし、ノイマンはある電気粒子からもう一つの電気粒子へのポテンシャルの伝達の彼の理論は、ガウスによって提唱されたものとも、リーマンにより採用され、クラウジウスに批判され、伝搬は光の伝搬のようであったものとも異なることを指摘した^{註 14}。反対に、ノイマンによると、ポテンシャルの伝達と光の伝搬の間にはそれ以上ないほどの差違がある。

p. 491

発光体はすべての方向に光を送り出し、その強度は発光体にのみに依存し、それに照射される物体の存在には依存しない。

他方、電気粒子はポテンシャルを送り出し、その値、 $\frac{ee'}{r}$ 、は放射する粒子、 e に依存するだけではなく、受けとる粒子 e' と、放射の瞬間の粒子間の距離、 r に依存する。

光の場合、光が発光体から遠ざかるにつれて強度は減少する。放射されたポテンシャルはそれが作用する物体まで、もとの値を少しも変えることなく流れる。

照射された物体が受け取った光は、一般に、それにやってくる光の一部分にすぎない。引きつけられた物体が受け取るときのポテンシャルは、その到達したポテンシャルと同一、つまり、同じ大きさである。

このほかにも、ポテンシャルの伝達の速度は、光の速度のように、エーテルまたは空間に相対的に一定ではなく、むしろ、投射された粒子のように、放射の瞬間の放射粒子の速度に相対的に一定である。

註 12 Pogg., bd. cxxxv. p. 612.

註 13 Tübingen, 1868.

註 14 *Mathematische Annalen*, i. 317.

それゆえ、ノイマンの理論を理解するためには、光の伝搬を考察するときに慣れ親しんだ過程の表現とは非常に異なったポテンシャルの伝達過程の表現を形成しなければならないようと思われる。ガウスにとって必要に思われた、伝達の過程の ‘construirbar Vorstellung’(構成的表象、無矛盾概念)として受け入れられるかどうか、私はなにも言えないが、私にはノイマン理論の首尾一貫した心象表現を組み立てることはできない。

p. 492
864.] ピサのベッチ (Enrico Betti, 1823–1892) 教授^{註 15} はこの問題を違った方法で扱った。彼は電流が流れる閉じた回路が、要素のそれぞれが周期的に、つまり、等しい時間間隔で、分極する要素からなると考えた。これらの分極した要素は、あたかも軸が回路の接線の方向をむいている小さな磁石であるかのようにもう一つの要素に作用する。この分極の周期時間はすべての電気回路で同じである。ベッチは一方の分極した要素の離れた所にあるもう一つの要素への作用が、瞬間にではなく、要素間の距離に比例した時間のあと、起こると考えた。このようにして、彼はある電気回路のもう一つへの作用の式を得た。それは正しいことがわかっている式に一致している。しかし、クラウジスは、この場合も、数学的な計算のある部分を批判した。ここではそれには立ち入らない。

865.] これらの傑出した人々の心の中には、ある先入観、つまり、先驗的異議が、そのなかで光の輻射や熱や電気作用の現象が遠隔的に起きる媒質の仮説にたいして、あるように思われる。かつて、物理現象の原因について考察した人々はいろいろな種類の遠隔作用を、これらの作用を生成することがその機能であり性質である、特別な天上の流体を使って説明する習慣があったことは事実である。彼らは三重、四重にわたるいろいろな種類のエーテルで全空間を満たした。その性質はたんに「見かけを救う」ために工夫され、したがって、より理性的な質問者たちは、ニュートンの遠隔的な引力の明確な限界を持つ法則だけではなく、遠隔作用は物質の基本的な性質の一つで、この事実以上のより知的な説明はありえないという、コーツ (Roger Cotes, 1682–1716)^{註 16} のドグマさえ、認めようとしてきた。したがって、光の波動理論は、現象を説明できないことに向けてではなく、光が伝搬する媒質の存在の仮定にたいして、大きな異議が申し立てられたのである。

^{註 15} Nuovo Cimento, xxvii (1868).

^{註 16} ニュートンのプリンキピア、第 2 版、コーツの序文。

866.] 電気力学の作用にたいする数学的表式が、ガウスの心の中で、時間をかけた電気作用の伝搬理論が電気力学のかなめ石であると分るであろうとの確信に導いたことを見てきた。さて私たちは時間をかけた伝搬を空間をとおした物質的な実体の飛行か、空間中にすでに存在していた媒質の運動状態、つまり、応力の伝搬として以外に、考えることはできない。ノイマンの理論では、ポテンシャルと呼ばれる数学概念が、私たちはそれを物質的な実体と考えることができないが、ある粒子から他の粒子へ投げられると考えており、その投げられ方は媒質とはまったく独立で、ノイマン自身が指摘しているように、光の伝搬の仕方とはまったく異なっている。リーマンとベッチの理論では、作用が光の伝搬といくぶん似た仕方で伝搬すると考えられている。

p. 493

しかし、これらの理論すべてにたいして疑問が自然にわき起こる。——もし何かがある粒子から離れた場所にあるもう一つの粒子に伝送されたなら、それがある粒子を離れたあと、もう一つの粒子に到達するまで、それはいかなる状態であるのか？もしこれの何かが、ノイマンの理論のように、2粒子のポテンシャルエネルギーなら、ある粒子にも、もう一つの粒子にも対応せず、どのようにして、このエネルギーは空間の点に存在すると考えることができるのか？事実、エネルギーが時間をかけてある物体からもうひとつの物体へ伝達されるときはいつも、エネルギーがある物体を去ったあと、他の物体に着くまで、エネルギーがそのなかにある媒質または物質がなければならない。エネルギーは、トリチエリー (Evangelista Torricelli, 1608–1647) が言うように、「非常に微妙な性質の第5元素で、物質の最奥の実体以外のどのような容器にも含まれえない」^{註17} からである。したがって、これらの理論はすべて伝搬がおこる媒質の概念へと導き、もしこの媒質を仮説として認めるなら、それは私たちの研究のなかで輝かしい地位を占めるはずで、私たちはその作用のすべての詳細にわたって知的な表現を構成するように努力すべきであると、私は考える。これがこの書の私の変わらぬ意図であった。

^{註17} *Lezioni Accademiche* (Firenze, 1715), p. 25.

索引

この総合索引は両巻をカバーしている。参照値は節を示す。第1巻は1節から370節を含む。第2巻は371節から866節を含む。

アーンショウ	Earnshaw, S.	116
アニオン	Anion	237.
アラゴの円盤	Arago's disk	668, 669.
アンペール	Ampère, André Marie	482, 502-528, 638, 687, 833, 846.
イオン	Ion	237, 255.
板、磁気の	Shell, magnetic	409, 484, 485, 606, 652, 670, 694, 696.
一時磁化	Temporary magnetization	444.
イディオスタティック電位計	Idiostatic electrometer	218.
陰極	Cathode	237
引力、電気の	Attraction, electric	27, 38, 103.
—、媒質中の応力によ って説明された		105.
ヴァーレイ	Varley, C. F.	210, 271, 332, 369.
ウイッペ (シーソー)	Wippe	775.

ウェーエル	Whewell, W,	237
ウェーバー	Weber, W.	231, 338, 346.
— 電力計	— electrodynamometer	725.
— 誘導磁気	— induced magnetism	442-448, 838.
— 抵抗の単位	— unit of resistance	760-762.
— 電気単位の比	— ratio of electric units	227
— 電気力学公式	— electrodynamic formula	846-861.
渦、分子	Vortices, molecular	822-831.
運動 方程式	Motion, equation of	553-565.
運動学	Kinetics	553-565.
運動量	Momentum	6.
— 電気運動の	— electrokinetic	578, 585.
ヴィーデマン	Wiedemann, G.	236, 370, 446, 447.
エーテル	AEther	782n.
エアリー卿	Airy, Sir G.B.	454, 830.
エネルギー	Energy	6, 85, 630-638, 782, 792,
エルステッド	Örsted, H. C.	239, 475.
遠隔作用	Action at a distance	103. 641-646, 846- 866.
円柱-の帯電	Cylinder, electrification	189.
— の磁化	— magnetization of	436, 438, 439.
— 中の電流	— currents in	682-690.
円柱コイル	Cylindric coils	676-681.
円電流	Circular currents	694-706.

— によって区切られた	— solid angle sub-	695.
立体角	tended by	
円盤	Disk	177.
—、アラゴの		668, 669.
オーム	Ohm, G. S.	241, 333.
オーム（単位）	Ohm, the	338, 340.
オームの法則	Ohm's Law	241.
応力、静電	Stress, electrostatic	105-111.
—、電気運動		641, 645, 646.
カール	Curl	25
回路、電気	Circuit electric	578-584.
鏡法	Mirror method	450.
拡散、磁力の	Diffusion of magnetic	801.
	force	
風、電気	Wind, electric	55.
傾き	Slope	17.
カチオン	Cation	237
要石、電気力学の	'Keystone of electro-	861.
	dynamics'	
カミング	Cumming, James	252
慣性、電気	Inertia electric	550.
—、のモーメントと積	— ,moments and	565.
	products of	
ガウス	Gauss, C, F,	18, 70, 131, 140, 144, 409, 421, 454, 459, 470, 706, 733, 744, 851.

ガシオット	Gassiot, J. P.	57.
ガラス	Glass	51, 271, 368.
幾何学、位置の	Geometry of position	421.
幾何平均距離	Geometric mean distance	691-693.
規則、電磁気の方向	Rukes of electromagnetic direction	477, 494, 496.
気体 中の放電	Gases, electric discharge	55-77, 370.
— の抵抗	— resistance of	369.
キャベンディッシュ	Cavendish, Henry	38, 74
球	Sphere	125.
球状導体	Spherical conductor	145, 146.
球面調和	— harmonics	128-146, 391, 431.
吸収、電気の	Absorption, electric	53, 227, 329.
—、光の	— of light	798.
共焦二次曲面	Confocal quadratic surfaces	147-154, 192.
強磁性	Ferromagnetic	425, 429, 844.
共役-導体	Conjugate, conductors	282, 347.
— 関数	— functions	182-206.
— 調和関数	— harmonics	136.
極、磁石の	Poles of magnet	373.
— 地球の磁気の	— magnetic of the earth	468.
極性	Polarity	381.
極定義、磁力の	Polar definition of magnetic force	398.

虚磁気物質	Imaginary magnetic matter	380.
キルヒ霍フ	Kirchhoff, Gustav	282, 316, 439, 768.
金属-の抵抗	Metal, resistance of	363.
偽磁極	False magnetic poles	468.
ギブソンとバークレイ	Gibson and Barclay	229, 789.
クーロン	Coulomb, C. A.	38, 74, 215, 223, 373.
クーロンの法則	Coulomb's law	79, 80.
クインケ	Quincke, G	316 n
空間変化	Space-variation	17, 71, 835.
駆電力	Electromotive force	49, 69, 111, 241, 246-254, 358, 569, 579.
クラーク、ラティモア	Clark, Latimer	358.
クラウジウス	Clausius, R.	70, 256.
グッタ-ペルカ	Gutta-percha	51, 367.
グラスマン	Grassmann, H.	526, 687.
グラドストン	Gradstone, Dr. J. H.	789.
グリーン	Green, George	70, 84, 318, 439.
— 関数	Green's function	98.
— の定理	— theorem	96.
グローヴ卿	Grove, Sir W. R.	272, 779.
係数、静電容量と静電誘導の	Coefficient of electrostatic capacity and induction	87, 90, 102.
—、ポテンシャルの	— of potential	87, 90.
—、抵抗と伝導の	— of resistance and conductivity	297, 298.

- 、誘導磁化の — of induced magnetization 426.
- 、電磁誘導の — of electromagnetic induction 755.
- 、自己誘導の — of self-induction 756, 757.
- ケイレイ Caykey, A. 553.
- 系列、観測の Series of observations 746, 750.
- 結晶-中の伝導 Crystal, conduction in 297
- の磁気的性質 — magnetic properties 435, 436, 438.
of
- 中の光の伝搬 — propagation of light 794-797.
in a
- 懸架コイル Suspended coil 721-729.
- 検流器 Galvanometer 240
- 差動 —, differential 346
- 高感度 —, sensitive 717.
- 標準 — standard 708.
- の観測 — observation of 742-751.
- ゲージ電位計 Gauge electrometer 218.
- 減衰振動 Damped vibrations 732-742, 762.
- 減衰器 Damper 730.
- コーシー Cauchy, A. L. 827.
- コーツ Cotes, Roger 865.
- コールラウシュ Kohlrausch, Rudolph 265, 365, 723, 771
- コイル、電磁的 Coil, electromagnetic 694-706.
- の測定 —, measurement of 708.
- の比較 —, comparison of 752-757.
- 高感度検流計 Sensitive galvanometer 717.

格子 の電気効果	Grating, electric effect	203.
	of	
硬鉄	Hard iron	424, 444.
この書の計画	Plan of this Treatise	59
コンデンサー	Condenser	50, 226-228.
— の容量	capacity of —	50, 87, 90, 102, 227- 229, 771, 774-780.
ゴーガン	Gaugain, J. M.	366, 712.
合力、一点における電 気の	Resultant electric force at a point	68
サイクル領域	Cyclic region	18, 113
残留 電荷	Residual charge	327-334
— 磁化	— magnetisation	444.
式、伝導率の	Equations of conductivity	298, 609.
—、連続の	— of continuity	35
—、電流の	— of electric currents	607.
—、全電流の	— of total currents	610.
—、電磁力の	of electromagnetic force	603.
—、駆電力の	of electromotive force	598.
—、ラプラスの	— of Laplace	77.
—、磁気誘導の	— of magnetic induction	591.
—、抵抗の	— of resistance	297
—、磁化の	— of magnetisation	400, 605.
—、ポアソンの	— of Poisson	77
仕事	Work	6
四分円電位計	Quadrant electrometer	219.

周期関数	Periodic function	9
収束	Convergence	25.
主軸	Principal axes	299, 302.
証明、逆二乗法則の	Proof of the law of the	74.
	Inverse Square	
— 面	— Plane	223.
振動 の時間	Vibration, time of	456, 738.
ジーメンス	Siemens, C. W.	336, 361.
ジェンキン	Jenkin, Fleeming	768, 774.
ジェンキンス	Jenkins, William	546, Phi. Mag. 1884, pt. ii, p.351.
磁化 の成分	Magnetisation, components of	384.
— 誘導	— induced	424-430.
— のアンペール理論	— Ampère's theory of	638, 833.
— のポアソン理論	— Poisson's theory of	429.
— のウェーバー理論	— Weber's theory of	442, 838.
時間、振動周期の	Time, periodic, of vibration	456, 738.
時間積分	Time-integral	541, 558.
磁気 - 作用、光の	Magnetic action of light	806.
—、擾乱	— disturbance	473.
— 力 の法則	— force, law of	374.
— — の方向	— — direction of	372, 452.
— — の強度	— — intensity of	458.
— 誘導	— induction	400.
— ‘物質’	— ‘matter’	380.

— 測定	— measurements	449-464.
— 極	— poles	468.
— 変動	— variations	472.
磁気 船舶の	Magnetism of ships	441.
— 地	— terrestrial	465-474.
磁気結晶現象	Magnecrystalline phenomena	425, 485, 839.
次元	Dimensions	2, 42, 88, 278, 620-629.
自己誘導	Self-induction	7.
— の測定	— measurement of	756, 778, 779.
— 最大のコイル	— coil of maximum	706.
磁石、その性質	Magnet, its properties	371.
—、 中心と主軸	— centre and principal axes	392.
—、 軸の方向	— direction of axis	372-390.
— の磁気モーメント	— magnetic moment of	384, 390.
— のポテンシャルエネルギー	— potential energy of	389.
ジュール	Joule, J. P.	242, 262, 448, 457, 463, 726, 767.
重心的	centrobaric	98.
準線	Directrix	517.
常磁性、(強磁性に同じ)	Paramagnetic (same as Ferromagnetic)	425, 429, 844.
スープの泡	Soap bubble	125.
水銀-の抵抗	Mercury, resistance of	361.
水撃ポンプ	Hydraulic ram	550.

スカラー	Scalar	11
ストークス	Stokes, G. G,	24, 115, 784.
ストーニー	Stoney, G, J,	5
ストラット閣下	Strut, Hon, J, W,	102, 306.
スマス	Smith, W. R.	123, 316.
スメー	Smee, A.	272.
正接 検流器	Tangents galvanometer	710.
— 法	— method of	454, 710.
成層導体	Stratified conductors	319
静電-測定	Electrostatic measurements	214-229.
— 分極	— polarization	59, 111
— 引力	— attraction	103-111.
— 単位系	— system of units	620, &c.
正負、規約	Positive and negative, conventions about	23, 27, 36, 37, 63, 68-81, 231, 374, 394, 417, 489, 498.
接触力	Contact force	246.
セレン	Selenium	51, 362.
線-密度	Line-density	64, 81.
— 積分	— -integral	16-20.
—、電気力の	— of electric force	69, 622.
線、平衡の	Lines of equilibrium	112.
—、流れの	— of flow	22, 298.
—、電気誘導の	— of electric induction	404, 489, 529, 541, 597, 702.
遷移電流	Transient currents	232, 530, 536, 537, 582, 748, 758, 760, 771, 776.

扇域調和	Sectorial harmonic	132, 138.
ゼーベック	Seebeck, T. J.	250.
絶縁体	Insulators	29.
零位法	Null methods	214, 346.
零点の読み	Zero reading	735.
双極	Dipolar	173, 381.
相反性、静電気	Reciprocal properties, electrostatic	86.
—、電気運動	— electrokinematic	281, 348.
—、電磁気	— electromagnetic	536.
—、運動学	— kinetic	565.
—、磁気	— magnetic	421, 423.
速示検流器	Dead beat galvanome- ter	741.
測定-の理論	Measurement, theory of	1.
—、電気力の	— of electric force	38.
—、静電容量の	— of electrostatic ca- pacity	226-229.
—、駆電力つまりボテ ンシャルの	— of electromotive force or potential	216, 358.
— 抵抗の	— of resistance	335-357.
— 一定電流の	— of constant currents	746.
— 遷移電流の	— of transient cur- rents	748.
— コイルの	— of coils	708, 752-757.
— 磁気	— magnetic	449-464.
速度、抵抗の単位で表 された	Velocity represented by the units of resis- tance	338, 628, 758.

—、電気の単位の比で	— — by the ration of	768-780.
表された	electric units	
—、電磁擾乱の	— of electromagnetic	784.
	disturbance	
—、光の	— of light	787.
—、電流の	— of the electric current	569.
ソレノイド、磁気	Solenoid, magnetic	407.
—、電磁気	—, electromagnetic	67-682, 727.
ソレノイド分布	Solenoidal distribution	21, 82, 407.
像、電気	Image, electric	119. 155-181, 189
— 磁気	— magnetic	318.
— 動く	— moving	662.
帯域調和	Zonal harmonic	138.
大気の電気	Atmospheric electricity	221.
対流	Convection	55, 238, 248.
多重-導体	Multiple conductors	276, 344.
— 関数	— function	9.
卵型橢円面	Ovary ellipsoid	152.
タレン	Thalèn, Tobias Robert	430.
単位、物理量の	Units of physical quantities	2.
—、3つの基本	three fundamental	3.
—、誘導	— derived	6.
—、静電	— electrostatic	41, 625.
—、磁気	— magnetic	374, 625.
—、電気力学	— electrodynamic	526.

—、電磁	— electromagnetic	526, 620.
— の分類	— classification of	620-629.
—、実用	— practical	629.
—、抵抗の	— of resistance	758-767.
—、2系の—の比	— ratios of the wo systems	768-780.
第一振	First swing	745 .
ダイゴグラム	Dygogram	441.
楕円積分	Elliptic integrals	149, 437, 701.
楕円面	Ellipsoid	150, 302, 437, 439.
ダニエル電池	Daniel's cell	232, 272.
ダランベール	Dalambre, J. . J.	3.
力、電磁	Force, electromagnetic	475, 580, 583.
—、駆電	—, electromotive	49, 111, 233, 241, 246-254, 358, 569, 579, 595, 598.
—、機械的	— mechanical	69, 93, 103-111, 174, 580, 602.
— の測定	— measurement of	6.
—、遠隔作用の	— acting at a distance	108.
— 線	— lines of	82, 117-123, 404.
蓄電器 または コンデンサー	Accumulators or condensers	50, 226-228
地磁気	Earth, magnetism of	465-474.
地磁気	Terrestrial magnetism	465-474.
調整不能曲線	Irreconcileable curves	20
張力、静電	Tension, electrostatic	48, 59, 107, 108.
—、電磁	—, electromagnetic	645, 646.

吊り、2本	Suspension, bifilar	459.
—、ジュール	— Joule's	463.
—、トムソン	— Thomson's	721.
—、1本	— unifilar	449.
抵抗、導体の	Resistance of conductors	51, 276
— の表	— tables of	362-365
— の式	— equation of	297
— の単位	— unit of	758-767.
— の静電測度	— electrostatic measure of	355
定数、コイルの主	Constants, principal, of a coil	700, 753, 754.
テイト	Tait, P, G,	25, 254, 387, 522, 687, 731.
定理、クーロンの	Theorem, Coulomb's	80.
—、アーンショウの	— Earnshaw's	116.
—、ガウスの	— Gauss's	116.
—、グリーンの	— Green's	409.
—、トムソンの	— Thomson's	100.
鉄	Iron	424.
— 過塩化	— perchloride of	800.
点、平衡の	Points of equilibrium	112.
デルマン	Dellmann, F.	221
電圧計	Voltmeter	237.
電位計	Electrometers	214-220
電位計	Electrometer	214-220.

電荷	Charge, electric	81.
電解質	Electrolyte	237, 255.
電解性 伝導	Electrolytic conduction	255-272, 363, 799.
— 分極	— polarization	257, 264-272.
電気-ブラシ	Electric brush	56.
— 荷	— charge	31.
— 伝導	— conduction	29.
— 対流	— convection	211, 238, 248, 255, 259.
— 流	— current	230.
— 放電	— discharge	55-57.
— 変位	— displacement	60, 75, 76, 111, 328-334, 608, 784, 791.
— エネルギー	— energy	84.
— 発光	— glow	55.
— 誘導	— induction	28.
— 機械	— machine	207.
— ポテンシャル	— potential	70.
— 火花	— spark	57.
— 張力	— tension	48, 59, 107, 108, 111.
— 風	— wind	55.
電気緊張状態	Electrotonic stgate	540.
電気分解	Electrolysis	236, 255-272.
電気盆	Electrophorus	208.
電極	Electrode	237.

電信ケーブル	Telegraph cable	332, 689.
電磁 力	Electromagnetic force	475, 580, 583.
— 測定	— measurement	495.
— 運動量	— momentum	585.
— 観測	— observations	730-780 .
— 単位と静電単位の比	768-780.	
較		
— 回転	491.	
電磁気 の力学理論	568-577.	
電磁系、測定の	Electrodynamic system of measurement	526.
電磁擾乱線	Ray of electromagnetic disturbance	791.
電池、ボルタの	Battery, voltaic	232.
伝導	Conduction	29, 241-254.
—、線に沿う	— linear	273-284.
—、面に沿う	— superficial	294.
—、固体中の	— in solids	285-334.
—、電解質の	— electrolytic	255-265.
—、誘電体中の	— in dielectrics	325-334.
伝導率 の方程式	Conductivity, equation of	298, 609.
伝導率と不透明度	— and opacity	282, 347.
電流 -シート	Current - sheet	294, 647-681
—、誘導	— induced	582.
—、遷移	— transient	232, 530, 536, 537, 582, 748, 758, 760, 771, 776.

電流重量計	Current-weigher	727.
電力計	Electrodynamometer	725.
透磁性	Permeability,magnetic	428, 614.
特異点	Singular points	129.
トドハンター	Todhunter	128, 140.
トムソン-卿	Thomson, Sir William	
— 電気像	— electric images	43, 121, 155-181, 173.
— 実験	— experiments	51, 57, 248, 369, 772.
— 装置	— instruments	127, 201, 211, 216- 222, 272, 722, 724.
— 磁気	— magnetism	318, 398, 400, 407- 416, 428.
— 抵抗	— resistance	338, 351, 356, 763.
— 熱電気	— thermo-electricity	207, 242, 249, 252, 253
— 定理	— theorem	100, 263, 299, 304, 652.
— 電気理論	— theory of electricity	27, 37, 543, 831, 856.
— 渦運動	— vortex motion	20, 487, 702.
トムソンとテイトの自然哲学	Thomson and Tait's Natural Philosophy	128, 139, 140, 163, 303, 553, 676.
トリチエリー	Torricelli, Evangelista	866.
銅	copper	51, 360, 362, 761.
動軸	Moving axes	600.
— 導体	— conductors	602.
— 像	— images	662.

導体	Conductor	29, 80, 86.
導体、帯電した導体系	Conductors, system of electrified	84-94.
流、電気の	Current, electric	230
— -関数	— -function	294, 647-681
—、定常	— steady	232.
—、熱電気	— thermoelectric	249-254.
波の伝搬	Wave-propagation	784, 785.
ニコルソンの回転倍増器	Nicholson's Revolving Doubler	209
二次曲面	Quadric surfaces	147-154.
ニッケル	Nickel	425.
二本吊り	Bifilar suspension	459.
捻り計り	Torsion-balance	33, 215, 373, 726.
熱伝導	Heat, conduction of	801.
—、電流によって生成された	— generated by the current	242, 283, 299.
熱電気電流	Thermo-electric current	249-254.
ノイマン C. G.	Neumann, C. G.	190, 830, 863.
ノイマン F. E. 、磁化係数	Neumann, F. E., coefficient of magnetisation	430.
— 楕円体の磁化	— magnetisation of ellipsoid	439.
— 誘導電流の理論	— theory of induced currents	452.
濃度	Concentration	26, 77
伸び長	Elongation	734.

ハイネ	Heine	128, 140.
ハイポサイン	Hyposine	151.
発光、電気	Glow, electric	55.
ハミルトン卿	Hamilton, Sir W.	10, 561.
	Rowan	
ハリス卿	Haris, Sir W. Snow	38, 216.
反磁性	Diamagnetism	429, 440, 838.
反跳 法	Recoil, method of	750.
反転、電気	Inversion, electric	162-181, 188, 316.
場、電気の	Filed, electric	44.
—、電磁	— electromagnetic	585-619.
—、一様な力の	— of uniform force	672.
バークレイとギブソン	Barclay and Gibson	229, 789.
媒質 電磁	Medium electromagnetic	866.
— 発光	— luminiferous	806.
バフ	Buff, Heinrich	271, 368.
パールゾウ	Paalzow, A.	364.
比較、容量の	Comparison of capacities	22.9
—、コイルの	— of coils	752-757.
—、駆電力の	— of electromotive forces	358.
—、抵抗の	— of resistances	345-358.
光、の電磁理論	Light, electromagnetic theory of	781-805.
— と磁気	— and magnetism	806-831.
非サイクル領域	Acyclic region	19, 113

比熱、電気の	— specific, of electric-	253.
	ity	
火花	Spark	57, 370.
比 - 誘導容量	Specific inductive ca-	52, 58, 94, 111,
	pacity	229, 325, 334, 627,
		788.
— 伝導率	— conductivity	278, 627.
—、熱、電気の	— heat of electricity	253.
— 抵抗	— resistance	277, 627.
表、コイルの係数の	Tables of coefficients	700.
	of a coil	
—、次元の	— of dimensions	621-629.
—、駆電力の	— of electromotive	358.
	force	
—、磁気回転の	— of magnetic rota-	880.
	tion	
—、円柱の磁化の	— of magnetisation of	489.
	cylinder	
—、抵抗値の	Table of resistance	363-365.
—、一時および残留磁	— of temporary and	445.
化の	residual magnetization	
—、光と電磁擾乱の速	— of velocity of light	787.
度の	and of electro mag-	
	netic disturbance	
標準-電位計	Standard electrometer	217
— 檢流器	— galvanometer	708.
ビーツ	Beetz, W.	255, 265, 442.
ビスマス	Bismuth	425.
Foucault, L.		787.

フーリエ	Fourier, J. B. J.	2 n, 243, 332, 333, 801-805.
ファラディの-発見	Faraday, M., his discoveries	52, 55, 236, 255, 530, 531, 534, 546, 668, 806.
— の実験	— his experiments	28, 429, 530, 668.
— の方法	— his methods	37, 82, 122, 493, 528, 529, 541, 592, 594, 604.
— の思索	— his speculations	54, 60, 83, 107, 109, 245, 429, 502, 540, 547, 569, 645, 782.
ファラド	Farad	629.
フィゾー	Fizeau, H. L.	787.
フィリップス	Phillips, S. E.	342.
フェヒナー	Fechner, G. T.	231, 274, 848.
フェラース	Ferrers	128, 140
伏角	Dip	461.
Radiation, forces concerned in		792.
不透明度	Opacity	798.
太さ、検流器の導線の	Thickness of galvanometer wire	716, 719.
フラックス	Flux	12.
振れ	deflection	453, 743.
a 不連続性	Discontinuity	8.
ブライト卿	Bright, Sir C., and Clark	354, 367.

ブラシ	Brush	56.
ブリッジ、ホイートス トーンの	Bridge, Wheatstone's	347, 756, 775, 778.
— 静電	— electrostatic	358.
プロディ卿	Sir B. C.	359.
分極、静電	Polarization, electro-	59, 111.
	static	
—、電解質	— electrolytic	257, 264-272.
—、磁気	— magnetic	381.
— 光の	— of light	381, 791.
分子-電荷	Molecular charges of	259.
	electricity	
— 電流	— currents	833.
— 標準	— standards	5.
— 渦	— vortices	822.
分子 の大きさ	Molecules, size of	5.
— 電気	— electric	260.
— 磁気	— magnetic	430, 832-845.
分類、電気的量の	Classification of electri-	620-629.
	cal quantities	
プラティメーター(電気 容量計測器)	Platymeter, electro-	229.
プリュカー	Plücker, Julius	839.
平衡点	Equilibrium, points of	112-117
ヘテロスタティック電位 計	Heterostatic electrom-	218
	eter	
ヘルムホルツ	Helmholtz, H.	202, 421, 543, 713, 823, 854.

変位、電気	Displacement, electric	60, 75, 76, 111, 328-334, 60, 783, 791.
偏光面の回転	Rotation of plane of polarization	806.
—、磁気による現象		821.
変動、磁気要素の	Variation of magnetic elements	472.
ベクトル	Vector	10.
ベクトル ポテンシャル	Vector-potential	405, 422, 590, 617, 657.
ベッティ	Betti, E.	173, 864.
ベルデ	Verdet, M. E.	809, 830 .
ベルトハイム	Wertheim, W.	447.
ペリフラクティック領域	Periphractic region	22, 113
ペルティエ	Peltier, A.	249
ホイートストン-ブリッジ	Wheatstones' Bridge	347.
— 静電	— electrostatic	353, 756 775 778.
ホイヘンス	Huygens, Christian	782.
方域調和	Tesseral harmonics	140.
方向のある量 (または ベクトル)	Directed quantities (or vectors)	10.
放電	Discharge	55.
放物面、共焦	Paraboloids, confocal	154.
補給器	Rephleshner	210
ホキン	Hockin, Charles	352, 360, 800.
保護輪	Guard-ring	201, 217, 228.

保磁力	Coercive force	424, 444.
保存、エネルギーの	Conservation of energy	93, 242, 262, 543.
ホルツの電気機械	Holtz, W., electrical machine	212.
ホルンシュタイン	Hornstein, Karl	471 n.
ボルタ	Volta, A.	246.
ボルダ	Borda, J. C.	3.
ボルト	Volt	629.
ポアソン	Poisson, S. D.	155, 431, 437, 674.
— 方程式	Poisson's equation	77, 148
— 磁気の理論	— theory of magnetism	427, 429, 431, 441, 832.
— 波伝搬の理論	— theory of wave propagation	784.
ポテンシャル	Potential	16
—、 電気	— electric	45, 70, 220
—、 磁気	— magnetic	431-441.
— 磁化の	— of magnetisation	412.
— 2 回路の	— of two circuit.	
— 2 円の	— of two circles	698.
—, ベクトル	— vector-	4-5, 423, 590, 617, 657.
巻き線、抵抗	Coil, resistance	335-344.
マグヌスの法則	Magnus' (G.) law	251.
マティーセン	Matthiessen, Aug.	352, 360.
マンスの方法	Mance's, Henry, method	357.

右手左手、軸系の	Right and left handed system of axes	23
—、円偏光光線の	— circulary-polarized rays	813.
水-の抵抗	Water, resistance of	365.
溝 の電気効果	Groove , electric effect of	199.
ミチエル	Michell, John	38.
密度、電気の	Density electric	64.
—, 電流の	— of a current	285.
— の測定	— measurement of	223.
ミラー	Miller, W. H.	23.
無定位天秤	Astatic balance	504.
面、等ポテンシャル	Surface, equipotential	46.
—、帯電	— electrified	78.
—-積分	—-integral	15, 21, 75, 402.
—-密度	—-density	64, 78, 223.
モソッティ	Mossotti, O. F.	62
物差、鏡による観測で の	Scale for mirror observation	450.
モーメント 磁気	Moment, magnetic	384.
— 慣性	— of inertia	565.
問題、静電気	Problems, electro- static	155-205.
—、電気運動学	— electrokinematic	306-333.
—、磁気	— magnetic	431-441.
— 電磁的	— electromagnetic	647-706.
ヤコビ	Jacobi, M. H.	336

誘電	Dielectric	52, 109, 111, 229, 325-334, 366-370, 784.
誘導電流	Induced current	528-552.
—、平面シート中の		656-669.
—、のウェーバー理論		856.
誘導磁化	Induced magnetisa- tion	434-448.
誘導、静電	Induction, electro- static	28, 75, 76, 111
—、磁気	— magnetic	400.
陽極	Anode	237.
容量(静電)	Capacity (electro- static)	50, 226
—、コンデンサーの	— of condenser	50, 87, 102, 196, 227-229, 771, 774- 780.
— の計算	calculation of —	102, 196
— の測定	measurement of —	227-229
— 電磁測度での	— in electromagnetic measure	774, 775.
容量(電磁)、コイルの	Capacity (electromag- netic) of a coil	706, 756, 778, 779.
ヨッホマン	Jochmann, E.	669.
四元数	Quatanions	11, 303, 490, 522, 618.
ライプニッツ	Leibnitz, G. W.	18, 424.
ラグランジ運動方程式	Lagrange's (J. L.) dy- banucak equation	553-565.

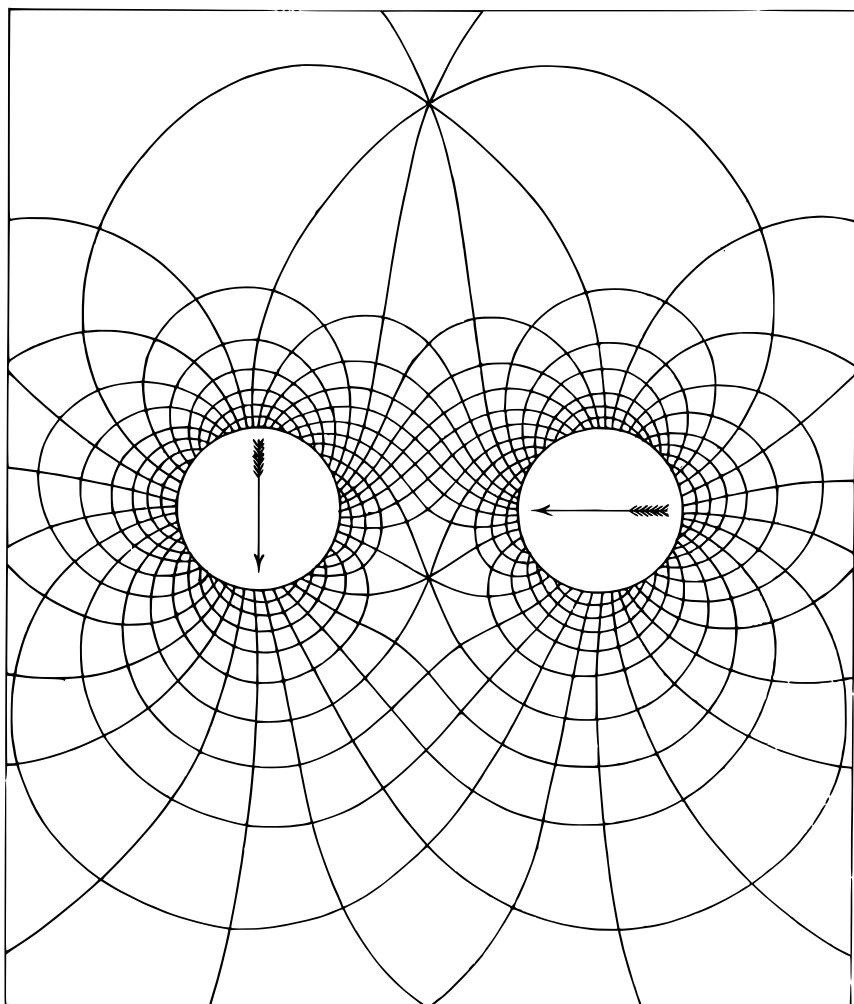
らせん @ 螺旋、対数	Spiral, logarithmic	731.
ラプラス, P. S.	Laplace, P. S.	70.
ラプラス-係数	Laplace's coefficients	128-146.
— 方程式	— equation	26, 77, 301.
— 展開	— expansion	135.
ラメ	Lameé, G.	17, 147
ラメラ磁石		412.
ランキン	Rankin, W. J. M.	115.
リーマン	Riemann, Bernhard	421, 862.
リストティング	Listing, J. ,	18, 23, 421.
リッターの 2 次電堆	Ritter's (J. W.) Secondary Pile	271.
立体角	Solid angle	409, 417-429, 485, 695.
リッチ	Ritchie, W.	542.
リューヴィル	Liouville, J.	178, 176.
リュールマン	Rühlmann, R	370
流体、電気	Fluid, electric	36, 37
— 非圧縮性	— incompressible	61, 111, 295, 320, 334
—、磁気	— magnetic	380.
量、—量 にたいする表式	Quantity, expression for a physical	1.
量、電磁気の一の分類	Quantities, classification of electromagnetic	620-629.
理論、遠隔作用の	Theory of action at distance	103, 641-646, 846-866.
—、一流体の	— of one fluid	37.
—、二流体の	— of two fluids	36.

- 、磁気物質の — of magnetic matter 380.
 —、磁気分子の — of magnetic molecules 480, 832-845.
 —、分子電流の — of molecular currents 833.
 —、分子渦の — of molecular vortices 822.
 リンネ Linnaeus, C. 23.
 ルジャンドル係数 Legendre's coefficient 139.
 — equation of 35, 295.
 連続、時空中での Continuity in time and space 77.
 レンツ Lenz, E. 265, 530, 542.
 ロシュミット Loschmidt, J. 5.
 ローレンツ Lorenz, L. 805 n.
 惑星状橢円体 Planetary ellipsoid 151.
 楠、球形の Bowl, spherical 176-181.

図板

図: XIV.

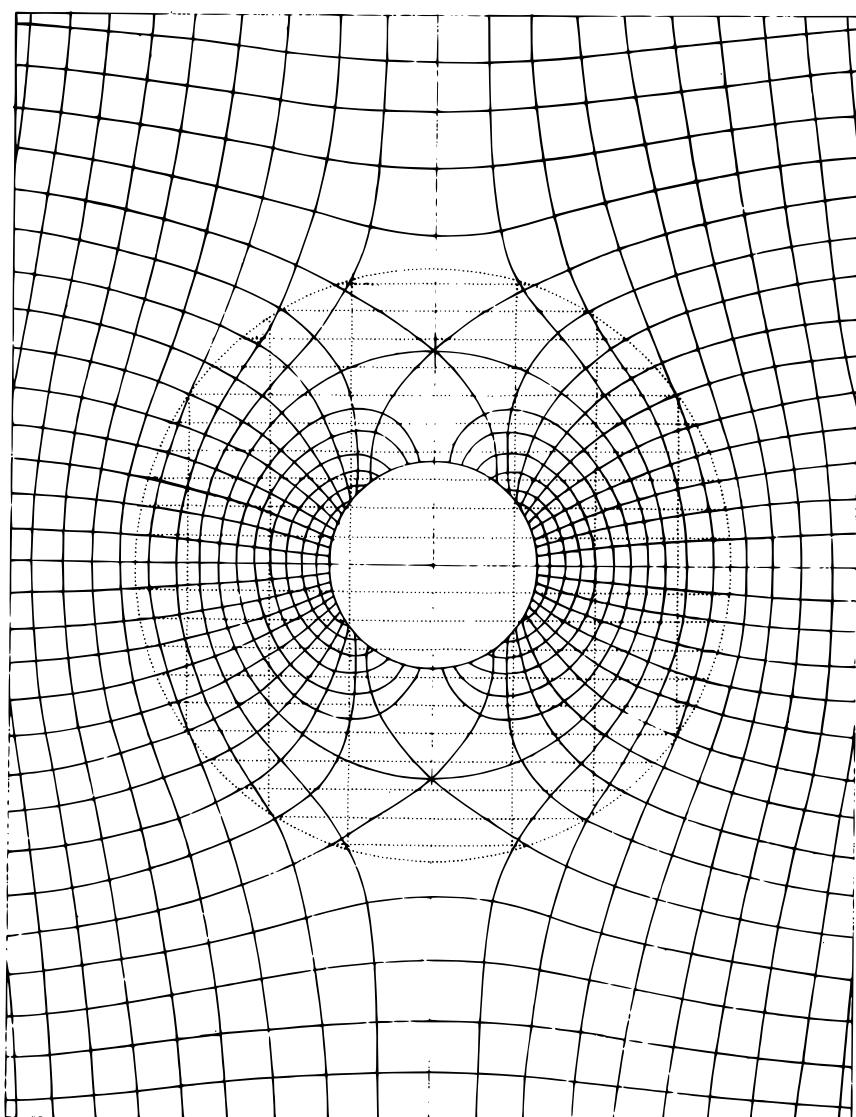
388 節.



横方向に磁化された 2 円柱.

図: XV.

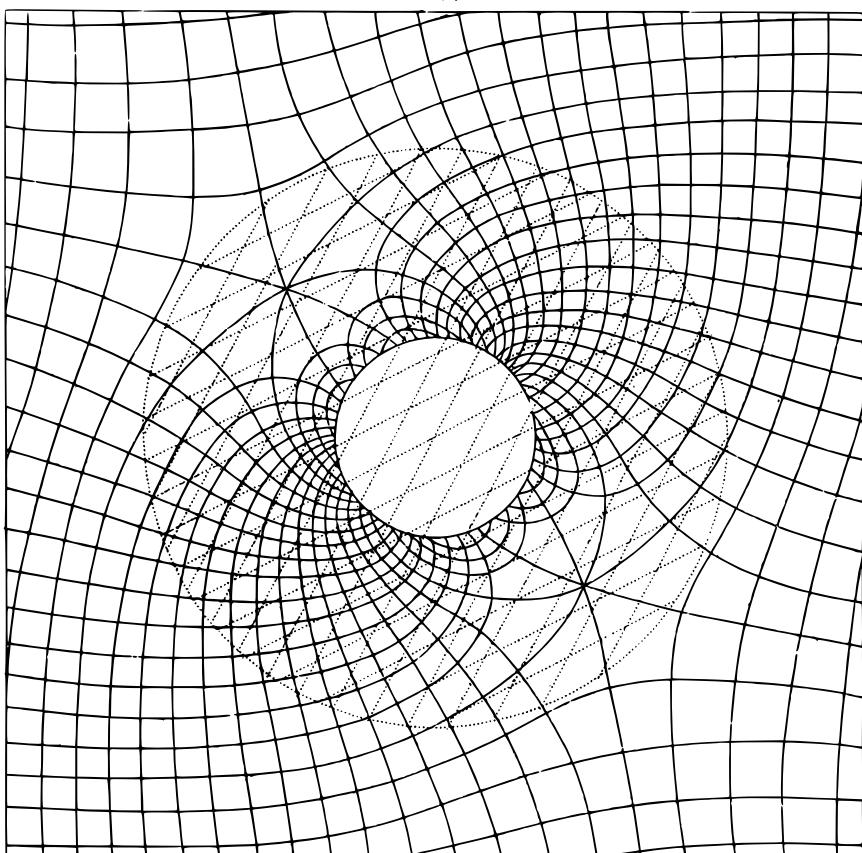
434 節.



南北を一様磁場中に置いた横方向に磁化された円柱.

図: XVI.

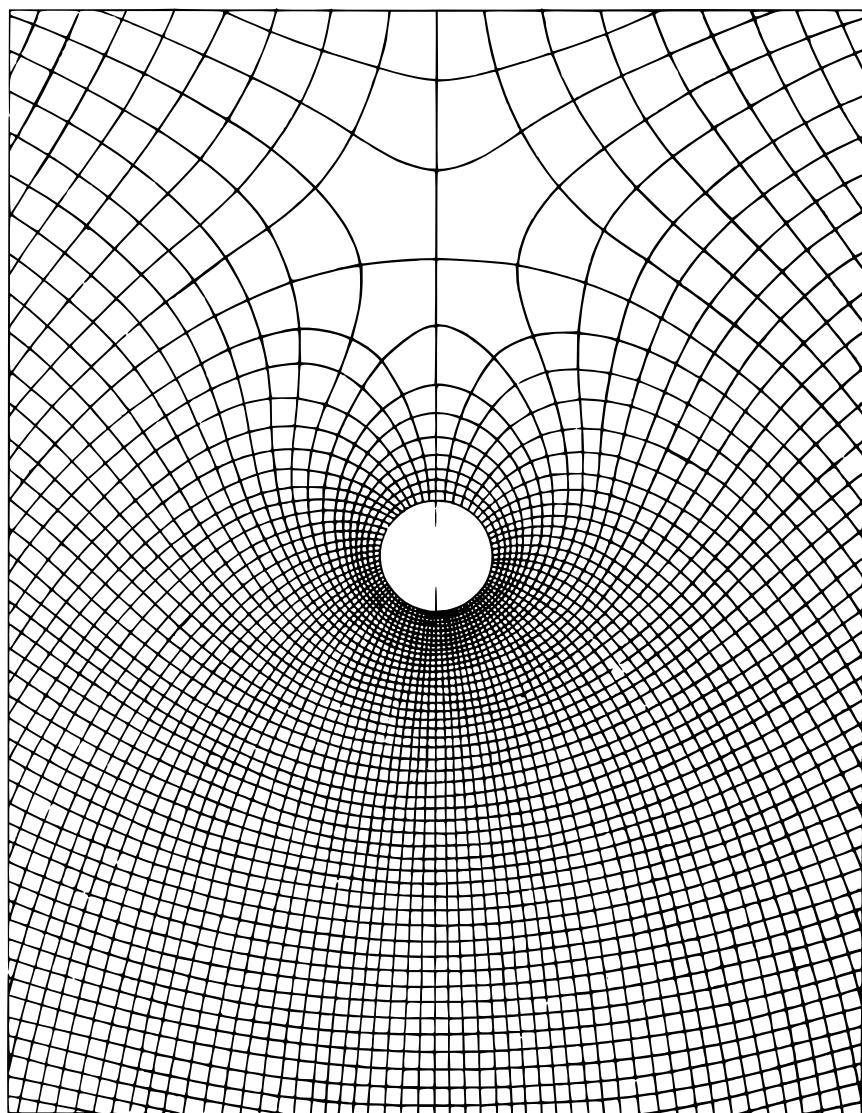
434 節.



東西を一様磁場中に置いた横方向に磁化された円柱。

図: XVII.

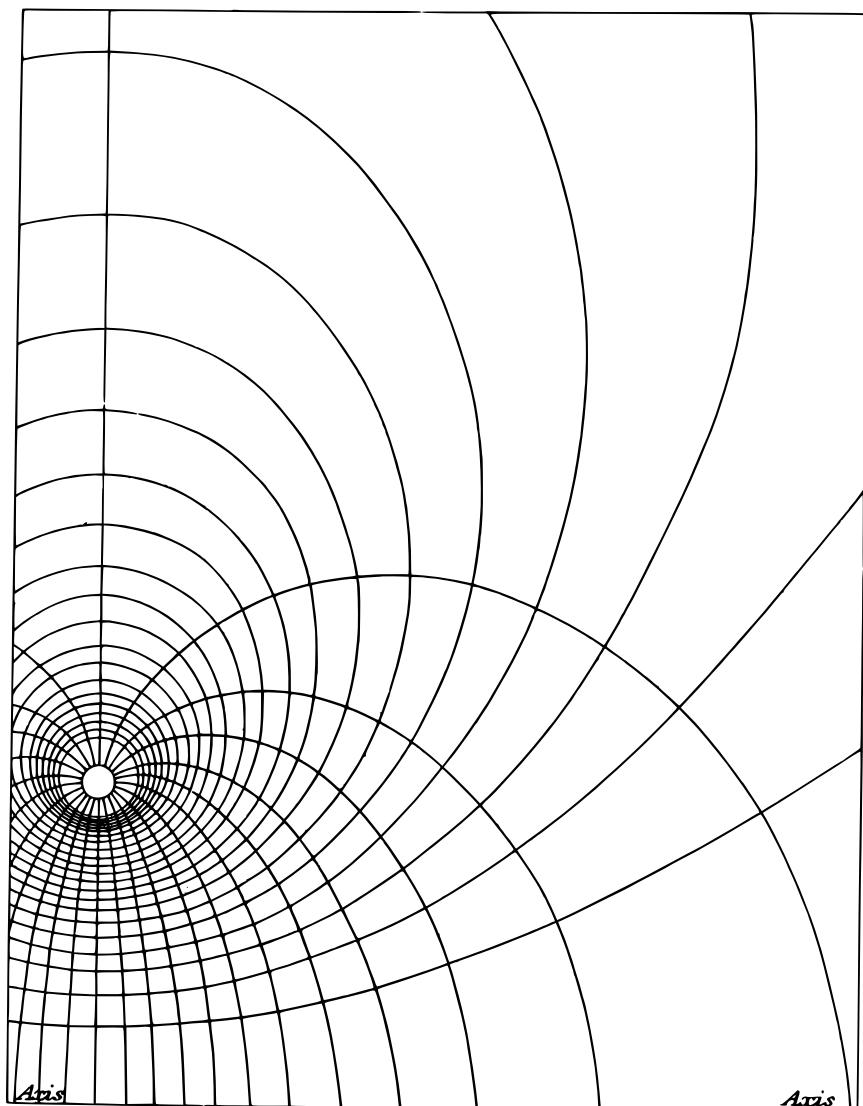
496 節.



直線導体中の電流に擾乱された一様磁場.

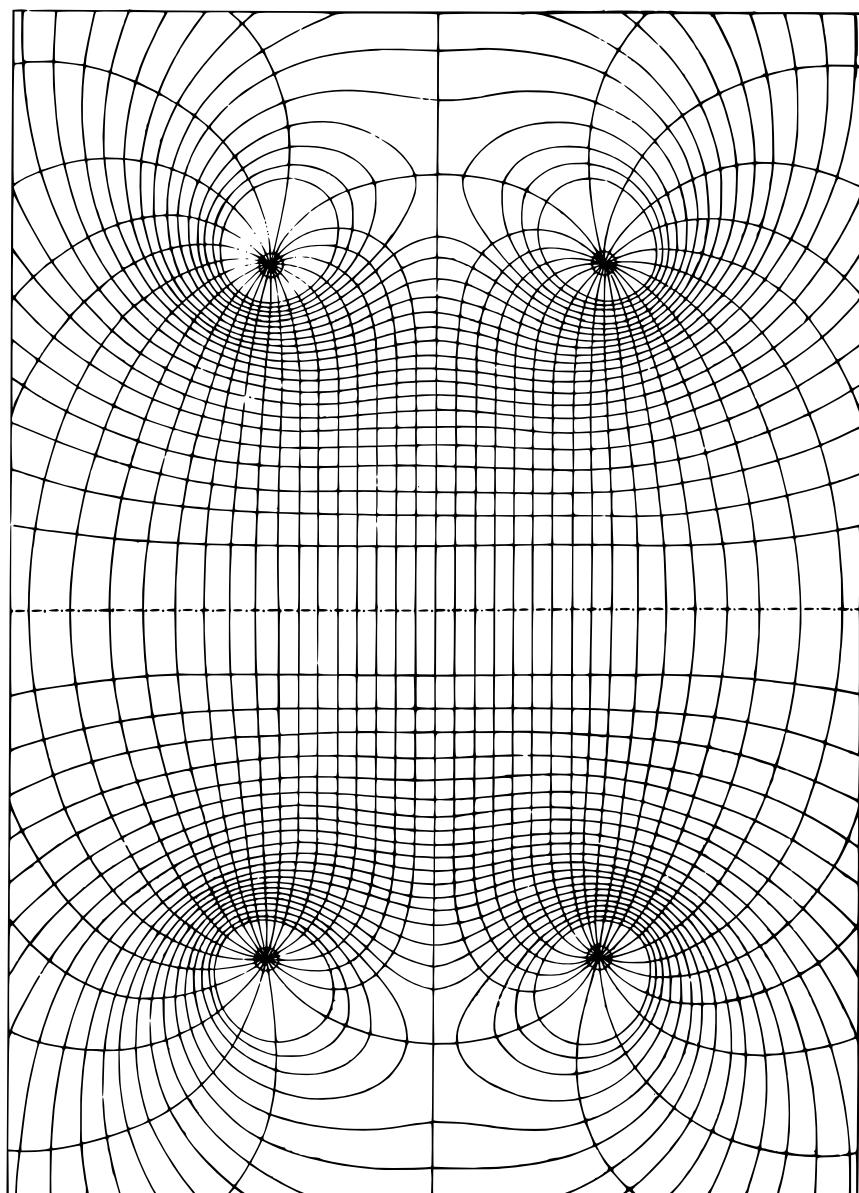
図: XVIII.

487, 702 節.



円電流

図: XIX.
713 節.



2 つの円電流.
593