天体物理学レポート No.5

61908697 佐々木良輔

Friedmann 方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho \tag{1}$$

であり両辺に a^2 を掛けて $\tau = H_0 t$ と変換すれば

$$\begin{aligned}\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 &= -\frac{Kc^2}{H_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} + \frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2}\rho a^2 \\ &= -k_0 + \lambda_0 a^2 + \frac{\rho}{\rho_c}a^2\end{aligned} \tag{2}$$

ここでエネルギー方程式

$$\dot{\rho} = -3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\rho + P) \tag{3}$$

を考える, 相対論的 (すなわち輻射的) な時には $P = \rho/3$ であるので

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{4\rho}{3} \\ \frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -4\frac{\dot{a}}{a} \\ \frac{d}{dt}\log\rho &= -4\frac{d}{dt}\log a \\ \therefore\ \rho &\propto a^{-4}\end{aligned} \tag{4}$$

一方で非相対論的 (すなわち物質的) な時には $\rho \gg P$ として

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\rho \\ \frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -3\frac{\dot{a}}{a} \\ \therefore\ \rho &\propto a^{-3}\end{aligned} \tag{5}$$

となり ρ は a^{-4} の輻射成分と a^{-3} の物質成分に分離できることが期待できるので

$$\rho = \rho_{0r}a^{-4} + \rho_{0m}a^{-3} \tag{6}$$

と置く. さらに

$$\Omega_{0r}=\frac{\rho_{0r}}{\rho_c},\ \Omega_{0m}=\frac{\rho_{0m}}{\rho_c} \tag{7}$$

とすれば (2) 式は

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2=\Omega_{0r}a^{-2}+\Omega_{0m}a^{-1}-k_0+\lambda_0a^2 \tag{8}$$

となる. 以下では $\Lambda=0$ の場合を取り扱うので

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2=\Omega_{0r}a^{-2}+\Omega_{0m}a^{-1}-k_0 \tag{9}$$

となる.

(i) $k_0=0$ のとき

(a) 輻射優勢なとき

輻射優勢なときには $\Omega_{0r}\gg\Omega_{0m}$ なので

$$\begin{aligned}\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2&=\Omega_{0r}a^{-2}\\ \frac{da}{d\tau}a&=\sqrt{\Omega_{0r}}\end{aligned} \tag{10}$$

両辺積分すれば

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{2}&=\sqrt{\Omega_{0r}}\tau+C\\ a(\tau)&=\sqrt{2(\sqrt{\Omega_{0r}}\tau+C)}\end{aligned} \tag{11}$$

ここで現在時刻を $\tau=0$ とすると現在のスケール因子は 1 と定義されるので

$$C=\frac{1}{2} \tag{12}$$

となる. 以上から

$$a(t)=\sqrt{2H_0\sqrt{\Omega_{0r}}t+1} \tag{13}$$

である. したがって宇宙は時間の 1/2 乗程度のスケールで膨張する.

(b)　物質優勢なとき

物質優勢なときには $\Omega_{0m} \gg \Omega_{0r}$ なので

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 &= \Omega_{0m} a^{-1} \\
\frac{da}{d\tau}\sqrt{a} &= \sqrt{\Omega_{0m}} \\
\frac{2}{3}a^{3/2} &= \sqrt{\Omega_{0m}}\tau + C
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$a(0) = 1$ とすれば

$$
a(\tau) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{0m}}\tau + 1\right)^{2/3} \tag{15}
$$

したがって

$$
a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_{0m}}t + 1\right)^{2/3} \tag{16}
$$

したがって宇宙は時間の 2/3 乗程度のスケールで膨張する．

(ii)　$k_0 \neq 0$ のとき

Friedmann 方程式は

$$
\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 - \frac{\Omega_{0r}}{a^2} - \frac{\Omega_{0m}}{a} = -k_0 \tag{17}
$$

ここで

$$
U(a) = -\frac{\Omega_{0r}}{a^2} - \frac{\Omega_{0m}}{a} \tag{18}
$$

とすると (17) はポテンシャル $U(a)$ 下での質点 a の運動と考えられる．ここで Ω_{0r}，$\Omega_{0m} > 0$ とすると $U(a)$ は図 1 のような概形になる．したがって $k_0 > 0$ のとき $a(t)$ は最初増加し, 途中で減少に転じるとわかる．一方で $k_0 < 0$ のとき $a(t)$ は増加し続けると考えられる．

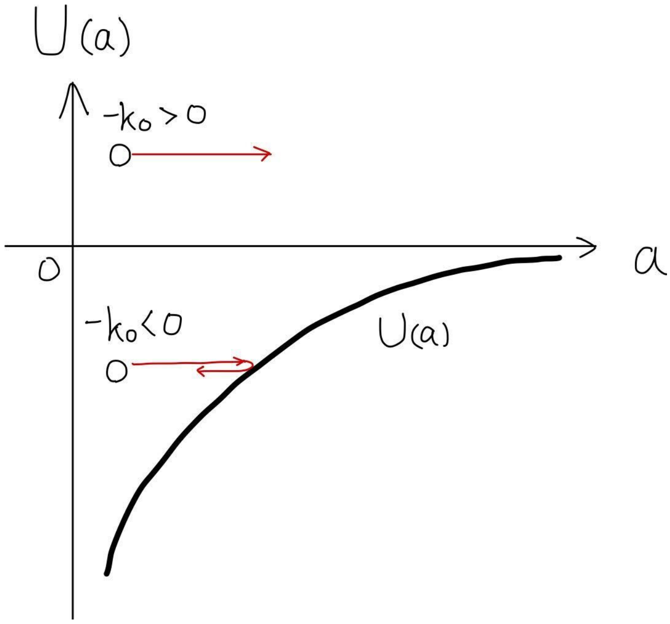

図 1　$U(a)$ の概形