流体弾性体力学 期末レポート

61908697 佐々木良輔

レポート 1

ナビエ方程式は

$$\rho(\boldsymbol{r})\partial_t^2\boldsymbol{u} = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{1}$$

である. また変位ベクトルは

$$\boldsymbol{u}(x,z) = \begin{pmatrix} \sum_\nu A\mathrm{e}^{\nu z}\mathrm{e}^{ik(x-vt)} \\ 0 \\ \sum_\nu B\mathrm{e}^{\nu z}\mathrm{e}^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \sum_\nu Af(\nu,x,z) \\ 0 \\ \sum_\nu Bf(\nu,x,z) \end{pmatrix} \tag{2}$$

の実部である. ここで $f(\nu,x,z) = \mathrm{e}^{\nu z}\mathrm{e}^{ik(x-vt)}$ とした. このとき

$$\partial_t^2\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \sum_\nu A(-ikv)^2 f(\nu,x,z) \\ 0 \\ \sum_\nu B(-ikv)^2 f(\nu,x,z) \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) &= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x u_x + \partial_z u_z) \\ 0 \\ \partial_z(\partial_x u_x + \partial_z u_z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_\nu ik(ikA+\nu B)f(\nu,x,z) \\ 0 \\ \sum_\nu \nu(ikA+\nu B)f(\nu,x,z) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\boldsymbol{u} &= \begin{pmatrix} (\partial_x^2+\partial_z^2)u_x \\ 0 \\ (\partial_x^2+\partial_z^2)u_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_\nu((ik)^2+\nu^2)Af(\nu,x,z) \\ 0 \\ \sum_\nu((ik)^2+\nu^2)Bf(\nu,x,z) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

これらを (1) に代入して $f(\nu,x,z)$ の係数を比較すると x 成分については

$$\sum_\nu \big(\rho k^2v^2A + (\lambda+\mu)(-k^2A+ik\nu B) + \mu(\nu^2-k^2)A\big) = 0 \tag{6}$$

同様に z 成分については

$$\sum_{\nu}\left(\rho k^2 v^2 B + (\lambda+\mu)(ik\nu A + \nu^2 B) + \mu(\nu^2 - k^2)B\right) \tag{7}$$

それぞれ ν について独立であるとすると

$$\rho k^2 v^2 A + (\lambda+\mu)(-k^2 A + ik\nu B) + \mu(\nu^2 - k^2)A = 0 \tag{8}$$

$$\rho k^2 v^2 B + (\lambda+\mu)(ik\nu A + \nu^2 B) + \mu(\nu^2 - k^2)B = 0 \tag{9}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \rho k^2 v^2 - k^2(\lambda+\mu) + \mu(\nu^2 - k^2) & ik\nu(\lambda+\mu) \\ ik\nu(\lambda+\mu) & \rho k^2 v^2 + \nu^2(\lambda+\mu) + \mu(\nu^2 - k^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{10}$$

となる. これが非自明な解を持つためには

$$\begin{vmatrix} \rho k^2 v^2 - k^2(\lambda+\mu) + \mu(\nu^2 - k^2) & ik\nu(\lambda+\mu) \\ ik\nu(\lambda+\mu) & \rho k^2 v^2 + \nu^2(\lambda+\mu) + \mu(\nu^2 - k^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

これを整理すると

$$\left(\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)\mu\right)\left(\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)(\lambda + 2\mu)\right) = 0 \tag{12}$$

となる. ここで

$$c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},\ c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{13}$$

を用いると

$$\left(c_t^2 \nu^2 - k^2(c_t^2 - v^2)\right)\left(c_l^2 \nu^2 - k^2(c_l^2 - v^2)\right) = 0 \tag{14}$$

となるので

$$\nu_1^2 = k^2\left(1 - \frac{v^2}{c_l^2}\right),\ \nu_2^2 = k^2\left(1 - \frac{v^2}{c_t^2}\right) \tag{15}$$

となる. これを用いると (8), (9) は

$$\frac{B}{A} = \frac{k^2(v^2 - c_l^2) + \nu^2 c_t^2}{-ik\nu(c_l^2 - c_t^2)} \tag{16}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{-ik\nu(c_l^2 - c_t^2)}{k^2(v^2 - c_t^2) + \nu^2 c_l^2} \tag{17}$$

更に ν_1, ν_2 を代入したときの A, B を A_1, B_1 及び A_2, B_2 とすると

$$\frac{B_1}{A_1} = -\frac{i\nu_1}{k},\ \frac{B_2}{A_2} = \frac{k}{i\nu_2} \tag{18}$$

となる. 以上から $\boldsymbol{u}$ はこれらの線形結合で表されるので

$$\boldsymbol{u}_x = (A_1 \mathrm{e}^{\nu_1 z} + A_2 \mathrm{e}^{\nu_2 z})\, \mathrm{e}^{ik(x-vt)} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{u}_z = \left(-\frac{i\nu_1}{k} A_1 \mathrm{e}^{\nu_1 z} + \frac{k}{i\nu_2} A_2 \mathrm{e}^{\nu_2 z}\right) \mathrm{e}^{ik(x-vt)} \tag{20}$$

となる. また表面においては z 方向の応力が 0 となるべきなので

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \tag{21}$$

すなわち

$$\lambda(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2\mu u_{zz} = (\lambda + 2\mu) u_{zz} + \lambda u_{xx} = 0 \tag{22}$$

および

$$u_{xz} + u_{zx} = 0 \tag{23}$$

となる. これに (19), (20) を用いると表面では $z = 0$ であることから

$$(\lambda + 2\mu)\left(-\frac{i\nu_1^2}{k} A_1 + \frac{k}{i} A_2\right) + \lambda ik(A_1 + A_2) = 0 \tag{24}$$

$$2\nu_1 A_1 + \left(\nu_2 + \frac{k^2}{\nu_2}\right) A_2 = 0 \tag{25}$$

(24) に c_l, c_t を用いると

$$\begin{aligned} c_l^2 \left(k\left(1 - \frac{v^2}{c_l^2}\right) A_1 + k A_2\right) - k(c_l^2 + 2c_t^2)(A_1 + A_2) = 0 \\ (2 - \frac{v^2}{c_t^2}) A_1 + 2A_2 = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

また (25) は

$$2\nu_1 A_1 + \frac{k^2}{\nu_2}\left(2 - \frac{v^2}{c_t^2}\right) A_2 = 0 \tag{27}$$

以上から (26), (27) は

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{v^2}{c_t^2} & 2\nu_2 \\ 2\nu_1 & k^2 \left(2 - \frac{v^2}{c_t^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2/\nu_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{28}$$

これが非自明な解を持つためには

$$\begin{aligned} k^2 \left(2 - \frac{v^2}{c_t^2}\right)^2 &= 4\nu_1 \nu_2 \\ k^4 \left(2 - \frac{v^2}{c_t^2}\right)^4 &= 16 k^4 \left(1 - \frac{v^2}{c_l^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c_t^2}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

ここで $v = c_t x$, $c_t/c_l = \gamma$ とすると

$$\begin{aligned} 0 &= 16(1-x^2)(1-\gamma^2 x^2) - (2-x^2)^4 \\ &= -x^8 + 8x^6 - (16a^2 - 24)x^4 + 16(1-a^2)x^2 \end{aligned} \tag{30}$$

したがって

$$0 = x^6 - 8x^4 - 8x^2(2\gamma^2 - 3) + 16(\gamma^2 - 1) \tag{31}$$

を得る.

レポート 2

流体に粘性が無いことから動径方向の流速が一定とする. さらに流体の速度が x 方向のみであることから, 流体は渦なしである. したがって管内の流体は渦なし非圧縮流体となり, ベルヌーイの定理を適用できる. 断面積の変化は十分遅く, 流れポテンシャルの変化は十分小さいものとする. すなわち

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \simeq 0 \tag{32}$$

とする. ここで図 1 のように断面積が S_0 の位置で速度 v_0, 断面積が $S_0 + \delta S(x,t)$ の位置で速度 v とおく. するとベルヌーイの定理から

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} = \frac{v(x)^2}{2} + \frac{P_0 + \nu \delta S(x,t)}{\rho}$$

$$v(x)^2 = v_0^2 - \frac{2\nu \delta S(x,t)}{\rho} \tag{33}$$

よって

$$v(x) = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{2\nu \delta S(x,t)}{\rho}} \tag{34}$$

となる. ここで十分長い距離 L で v^2 を平均すると (33) 式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}\int_0^L v(x)^2 dx &= \frac{1}{L}\int_0^L v_0^2 - \frac{2\nu \delta S(x,t)}{\rho} dx \\ &= v_0^2 - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{2\nu \delta S(x,t)}{\rho} dx \end{aligned} \tag{35}$$

δS は十分な長さに渡って平均すれば 0 になると考えられるので

$$\frac{1}{L}\int_0^L v(x)^2 dx = v_0^2 \tag{36}$$

となる．このことから断面積 S_0 の位置での速度 v_0 は位置 x での速度 v の平均値に一致すると考えられる．速度の平均値が 0 であると仮定すると

$$\begin{aligned} v(x) &= \pm\sqrt{0 - \frac{2\nu\delta S(x,t)}{\rho}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{2\nu|\delta S(x,t)|}{\rho}} \end{aligned} \tag{37}$$

となる．

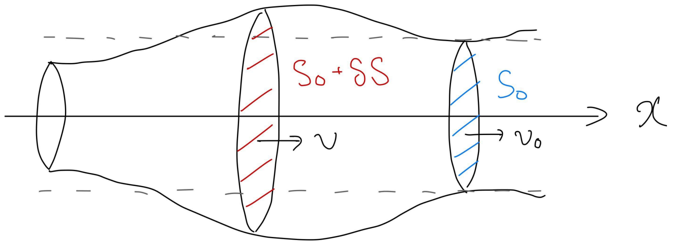

図 1　断面積の変化

レポート 3

d 次元空間の任意の閉曲面 S に囲まれた領域 D を考える．D に含まれる粒子の全運動量の i 成分は, 速度場と密度場の存在を仮定すれば

$$\int_D \rho(\boldsymbol{r},t)v_i(\boldsymbol{r},t)dV \tag{38}$$

となる．この時間変化は

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)dV \tag{39}$$

である．一方で領域 D を出入りする粒子により増減する運動量の i 成分はその流束が

$$\boldsymbol{j}_i = \boldsymbol{v}\rho v_i \tag{40}$$

と書けることから曲面 S の法線ベクトル $\hat{n}$ を用いて

$$-\int_S \rho v_i \boldsymbol{v}\cdot\hat{n}dS \tag{41}$$

と書ける．ただし符号は流入を正とするためにつけている．ガウスの発散定理を用いると

$$-\int_S \rho v_i \boldsymbol{v}\cdot\hat{n}dS = -\int_D \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i)dV \tag{42}$$

となる．ここで ∇ は d 次元でのナブラベクトルであり第 n 次元の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_n$ として

$$\nabla = \sum_{n=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_n}\boldsymbol{e}_n \tag{43}$$

と表される. また運動量は外力によっても変化するので, これを計算する. まず体積力を $\boldsymbol{g}$ とすると領域 D にかかる力は

$$\int_D \rho(\boldsymbol{r}, t)\boldsymbol{g}dV \tag{44}$$

次に曲面 S を通じて加わる圧力は

$$-\int_S P(\boldsymbol{r})dS = -\int_D \nabla P(\boldsymbol{r})dV \tag{45}$$

となる. 以上から (42), (44), (45) の総和が運動量の時間変化に等しいので

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)dV &= \int_D -\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i) + \rho g_i - (\nabla P)_i dV \\ \int_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i)dV &= \int_D \rho g_i - (\nabla P)_i dV \end{aligned} \tag{46}$$

積分領域が等しいことから

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i) = \rho g_i - (\nabla P)_i \tag{47}$$

ここで左辺について

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho)\right)v_i + \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\rho)\cdot\nabla v_i \tag{48}$$

この右辺第 1 項は連続の式から 0 になるので (47) は

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\rho)\cdot\nabla v_i = \rho g_i - (\nabla P)_i \tag{49}$$

以上から

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v} = -\nabla P + \rho\boldsymbol{g} \tag{50}$$

を得る.

レポート 4

非圧縮渦なし完全流体であることから流れポテンシャルは

$$\Delta\phi = 0 \tag{51}$$

のラプラス方程式を満たす. またベルヌーイの定理が適用でき

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \mathrm{Const} \tag{52}$$

ここで定数として $P_0/\rho + gh_0$ と置けば

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + g(z - h_0) = \frac{1}{\rho}(P_0 - P) \tag{53}$$

となる. これは水面において

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gh(x,t) = \frac{f}{\rho}\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \tag{54}$$

となる. ここで v が十分小さいとして左辺第 2 項を無視すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -gh + \frac{f}{\rho}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{55}$$

両辺 t で微分すると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{f}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{56}$$

また水面付近での z, x 方向の速度を $\tilde{v}_z$, $\tilde{v}_x$ とすると

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \tilde{v}_z - \frac{\partial h}{\partial x}\tilde{v}_x \tag{57}$$

ここで右辺第 2 項は微小量の 2 次なので無視すると

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \tilde{v}_z = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \tag{58}$$

よって (56) 式は水面近傍においては

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} = -g\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} + \frac{f}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \tag{59}$$

ここで ϕ を

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = R(z)\sin(k(x - ct)) \tag{60}$$

と展開する. ラプラス方程式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\sin(k(x-ct)) - k^2 R(z)\sin(k(x-ct)) &= 0 \\ \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - k^2 R &= 0 \end{aligned} \tag{61}$$

したがって

$$R(z) = A\mathrm{e}^{kz} + B\mathrm{e}^{-kz} \tag{62}$$

ここで水底においては流体の速度の鉛直成分は 0 であるべきなので

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} &= 0 \\ (A - B)k\sin(k(x-ct)) &= 0 \end{aligned} \tag{63}$$

したがって

$$A = B \tag{64}$$

であり

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = A\cosh(kz)\sin(k(x - ct)) \tag{65}$$

となる. これと (59) 式から

$$k^2c^2\phi = gkA\sinh(kh_0)\sin(k(x-ct)) + \frac{f}{\rho}k^3A\sinh(kh_0)\sin(k(x-ct)) \tag{66}$$

両辺 ϕ で割ると

$$k^2c^2 = \left(gk + \frac{f}{\rho}k^3\right)\tanh(kh_0) \tag{67}$$

$$\therefore\ c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{f}{\rho}k\right)\tanh(kh_0)} \tag{68}$$

を得る.

レポート 5

ナビエストークス方程式は動粘性係数 ν を用いて

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + g + \nu\Delta\boldsymbol{v} \tag{69}$$

ストークス近似を用いると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + g + \nu\Delta\boldsymbol{v} \tag{70}$$

となる. 更に外力が存在せず, 定常であるとすると

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\boldsymbol{v} \tag{71}$$

ここで一様な流れ $\boldsymbol{V}$ の中の原点に半径 a の球を設置する. 境界条件として非圧縮性から

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{72}$$

物体表面では

$$v = 0 \tag{73}$$

とする. 無限遠での圧力を P_0 として速度場と圧力場は以下で与えられる.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}\left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}\right) - \frac{3}{4}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\boldsymbol{r}\left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{r^3}\right) \tag{74}$$

$$P = P_0 - \frac{3a\rho\nu}{2}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{75}$$

実際 $\boldsymbol{r} \to \infty$ で

$$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{V},\ P \to P_0 \tag{76}$$

を満たす. また物体表面 $(r = a)$ では

$$\boldsymbol{v}|_{r=a} = \boldsymbol{V}\left(1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{a^2}\boldsymbol{r}\,(1-1) = 0 \tag{77}$$

から (73) を満たす. また

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \left(\frac{3\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{4r^3}a - \frac{3\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{4r^5}a^3\right) - \frac{3}{4}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{r^3}\right) = 0 \tag{78}$$

から (72) を満たす. また

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\nabla P &= \frac{3a\nu}{2}\nabla\frac{V\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \\
&= \frac{3a\nu}{2r^5}\begin{pmatrix} V_x r^2 - 3x\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r} \\ V_y r^2 - 3y\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r} \\ V_z r^2 - 3z\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}\end{pmatrix} \\
&= \frac{3a\nu}{2r^5}\left(\boldsymbol{V}r^2 - 3(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\right)
\end{aligned} \tag{79}$$

$$\Delta\frac{1}{r} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{80}$$

ただし球の外部の流れを考えるので

$$\Delta\frac{1}{r} = 0 \tag{81}$$

$$\Delta\frac{1}{r^3} = \frac{6}{r^5} \tag{82}$$

また

$$\begin{aligned}
\left(\Delta\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\boldsymbol{r}\right)_x &= \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\frac{V_x x + V_y y + V_z z}{r^3}x \\
=&\frac{2V_x}{r^3} - 3x\frac{5V_x x + 3V_y y + 3V_z z}{r^5} + 15x\frac{x^2(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^7} \\
&- 3x\frac{V_x x + 3V_y y + V_z z}{r^5} + 15x\frac{y^2(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^7} \\
&- 3x\frac{V_x x + V_y y + 3V_z z}{r^5} + 15x\frac{z^2(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^7} \\
=&\frac{2V_x}{r^3} - x\frac{6(V_x x + V_y y + V_z z)}{r^5}
\end{aligned}$$

より

$$\Delta\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\boldsymbol{r} = \frac{2}{r^5}\left(\boldsymbol{V}r^2 - 3(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\right) \tag{83}$$

また

$$\begin{aligned}
\left(\Delta\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\boldsymbol{r}\right)_x &= \left(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2\right)\frac{V_xx+V_yy+V_zz}{r^5}x \\
&=\frac{2V_x}{r^5} - 5x\frac{V_xx+V_yy+V_zz}{r^7} - 10x\frac{2V_xx+V_yy+V_zz}{r^7} + 35x\frac{x^2(V_xx+V_yy+V_zz)}{r^9} \\
&\quad - 5x\frac{V_xx+V_yy+V_zz}{r^7} - 10x\frac{V_yy}{r^7} + 35x\frac{y^2(V_xx+V_yy+V_zz)}{r^9} \\
&\quad - 5x\frac{V_xx+V_yy+V_zz}{r^7} - 10x\frac{V_zz}{r^7} + 35x\frac{z^2(V_xx+V_yy+V_zz)}{r^9} \\
&=\frac{2V_x}{r^5}
\end{aligned}$$

より

$$\Delta\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\boldsymbol{r} = \frac{2\boldsymbol{V}}{r^5} \tag{84}$$

以上から (71) は

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\boldsymbol{v} =&\frac{3a\nu}{2r^5}\left(\boldsymbol{V}r^2 - 3(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\right) - \frac{a^3\nu\boldsymbol{V}}{4}\frac{6}{r^5} \\
&-\frac{3a\nu}{4}\frac{2}{r^5}\left(\boldsymbol{V}r^2 - 3(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\right) + \frac{3a^3\nu}{4}\frac{2\boldsymbol{V}}{r^5} \\
=&0
\end{aligned} \tag{85}$$

となり, この解はナビエストークス方程式を満たす.

次にストークス抵抗を求める. ここで $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{V}$ のなす各を θ とすると (75) は

$$P = P_0 - \frac{3a\rho\nu}{2}\frac{V\cos\theta}{r^2} \tag{86}$$

となる. 球にかかる力は対称性から $\boldsymbol{V}$ に平行な方向にかかるべきである. よって球にかかる全圧力は圧力の $\boldsymbol{V}$ に平行な成分 $P\cos\theta$ を球面で積分すれば良いので

$$\begin{aligned}
F_p &= \int_{\text{球表面}} -P\cos\theta\ dS \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(P_0 - \frac{3a\rho\nu}{2}\frac{V\cos\theta}{r^2}\right)\cos\theta a^2\sin\theta d\theta d\phi \\
&= -2\pi a^2 P_0\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta + 2\pi\frac{3\rho\nu a}{2}V\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta \\
&= -2\pi a^2 P_0\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi} + 3\pi\rho\nu a V\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \\
&= 0 + 3\pi\rho\nu a V\frac{2}{3} = 2\pi\rho\nu a V
\end{aligned}$$

となる.

次に粘性応力を考える. $\boldsymbol{V}$ を z 方向にとっても一般性を失わないため, 以下では $\boldsymbol{V} \parallel z$ とする. $\boldsymbol{v}$ の r 成分は

$$\begin{aligned} v_r = \boldsymbol{v} \cdot \hat{e}_r &= V \cos\theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}\right) - \frac{3}{4}\frac{Vr\cos\theta}{r^2} r \left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{r^3}\right) \\ &= V\cos\theta\left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}\right) \end{aligned} \tag{87}$$

θ 成分は

$$v_\theta = \boldsymbol{v} \cdot \hat{e}_\theta = V \sin\theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}\right) \tag{88}$$

ϕ 成分は

$$v_\phi = \boldsymbol{v} \cdot \hat{e}_\phi = 0 \tag{89}$$

となる. 球面において応力は常に r 面に加わる. よって球面上での接線方向の応力は

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta r} &= \eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\theta}{r}\right)\Bigg|_{r=a} \\ &= \eta\left(\frac{1}{a}\right)(-V\sin\theta)\left(1 - \frac{3a}{2a} + \frac{a^3}{2a^3}\right) + a(-V\sin\theta)\left(-\frac{1}{a^2} + \frac{3a}{2a^3} + \frac{a^3}{a^5}\right) \\ &= -\frac{3\eta}{2a}V\sin\theta \end{aligned} \tag{90}$$

この応力の $\boldsymbol{V}$ に平行な成分 $-\sigma_{\theta r}\sin\theta$ を面積分すると, ワイスの公式を用いて

$$\begin{aligned} F_v &= \int_{\text{球表面}} -\sigma_{\theta r}\sin\theta dS \\ &= 2\pi\frac{3\eta}{2a}V\int_0^\pi \sin^2\theta a^2 \sin\theta d\theta \\ &= 3\pi\rho\nu a V\left(\left[-\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{3}\right]_0^\pi + 2\frac{2}{3}\right) \\ &= 4\pi\rho\nu a V \end{aligned} \tag{91}$$

以上から球の受ける全力は

$$F = F_p + F_v = 6\pi\rho\nu a V \tag{92}$$

となる.[1]

参考文献

[1] 中野徹 —中央大学. ナヴィエ=ストークス方程式. `https://www.phys.chuo-u.ac.jp/labs/nakano/hydrod/sec8(2010).pdf`, 2010. (Accessed on 01/24/2022).