熱統計力学 2 レポート No.3

佐々木良輔

問 1

$\Gamma_\triangle$ は

$$\Gamma_\triangle = -\frac{\beta^3\rho^2}{6}\int d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_3\ v(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)v(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3)v(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1) \tag{1}$$

である. ここで $\boldsymbol{R}_{12}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{R}_{23}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3$ として, また v を Fourier 変換すると積分項は

$$\begin{aligned}
&\int d\boldsymbol{R}_{12}d\boldsymbol{R}_{23}\ \sum_{\boldsymbol{p}}\frac{v_{\boldsymbol{p}}}{V}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}_{12}}\sum_{\boldsymbol{p}'}\frac{v'_{\boldsymbol{p}}}{V}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}''\cdot\boldsymbol{R}_{23}}\sum_{\boldsymbol{p}''}\frac{v''_{\boldsymbol{p}}}{V}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}''\cdot(\boldsymbol{R}_{23}-\boldsymbol{R}_{12})}\\
=&\frac{1}{V^3}\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}''}v_{\boldsymbol{p}}v_{\boldsymbol{p}'}v_{\boldsymbol{p}''}\int d\boldsymbol{R}_{12}d\boldsymbol{R}_{23}\ \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{R}_{12}}\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{R}_{23}}\\
=&\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}''}v_{\boldsymbol{p}}v_{\boldsymbol{p}'}v_{\boldsymbol{p}''}\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}''}\delta_{\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}''}\\
=&\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}v_{\boldsymbol{p}}^3
\end{aligned} \tag{2}$$

以上から

$$\Gamma_\triangle = -\frac{\beta^3\rho^2}{6}\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}v_{\boldsymbol{p}}^3 \tag{3}$$

となる.

問 2

$$\Gamma = \frac{1}{4\rho\pi^2}\int_0^\infty dp\ p^2\left(\frac{\kappa^2}{p^2}-\log\left(1+\frac{\kappa^2}{p^2}\right)\right) \tag{4}$$

であった. ここで積分範囲を $[0,D]$ までとし, 計算後に $D\to\infty$ とすることで計算を行う. すると積

分項は

$$
\begin{aligned}
&\lim_{D\to\infty}\left(\int_0^D dp\ \kappa^2 - \int_0^D dp\ p^2\log\left(1+\frac{\kappa^2}{p^2}\right)\right) \\
=&\lim_{D\to\infty}\left(\kappa^2 D - \int_0^D dp\ p^2\log\left(1+\frac{\kappa^2}{p^2}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ここで第 2 項について部分積分を行う.

$$
\begin{aligned}
\int_0^D dp\ p^2\log\left(1+\frac{\kappa^2}{p^2}\right) &= \left[\frac{p^3}{3}\log\left(1+\frac{\kappa^2}{p^2}\right)\right]_0^D + \int_0^D dp\ \frac{2}{3}\frac{\kappa^2 p^2}{\kappa^2+p^2} \\
&=\frac{D^3}{3}\log\left(1+\frac{\kappa^2}{D^2}\right) + \frac{2\kappa^2}{3}\left[p-\kappa\arctan\frac{p}{\kappa}\right]_0^D \\
&=\frac{D^3}{3}\log\left(1+\frac{\kappa^2}{D^2}\right) + \frac{2\kappa^2 D}{3} - \frac{2\kappa^3}{3}\arctan\frac{D}{\kappa}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

第 1 項を展開すると

$$
\begin{aligned}
\frac{D^3}{3}\log\left(1+\frac{\kappa^2}{D^2}\right) &= \frac{D^3}{3}\left(\frac{\kappa^2}{D^2} + O(D^{-4})\right) \\
&=\frac{\kappa^2 D}{3} + O(D^{-1})
\end{aligned}
\tag{7}
$$

したがって (5) 式は

$$
\begin{aligned}
&\lim_{D\to\infty}\left(k^2 D - \frac{\kappa^2 D}{3} - \frac{2\kappa^2 D}{3} + \frac{2\kappa^3}{3}\arctan\frac{D}{\kappa} + O(D^{-1})\right) \\
=&\frac{\kappa^3\pi}{3}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

以上より

$$
\Gamma = \frac{1}{4\rho\pi^2}\frac{\kappa^3\pi}{3} = \frac{\kappa^3}{12\rho\pi}
\tag{9}
$$

となる.