

相対性理論 レポート No.4

佐々木良輔

Q27.(1)

示すべき式は $\eta_{\mu\nu}$ が座標系に依らないことから

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad (1)$$

である. また (5.1)''' から

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} = a_\mu{}^\rho \quad (2)$$

なので (1) は

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} a_\mu{}^\rho a_\nu{}^\sigma \quad (3)$$

である. また

$$a^\gamma{}_\rho a_\mu{}^\rho = \delta^\gamma{}_\mu \quad (4)$$

であったことから (3) 式の両辺に $a^\gamma{}_\rho a^\kappa{}_\sigma$ を掛けると

$$\eta_{\mu\nu} a^\gamma{}_\rho a^\kappa{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \delta^\gamma{}_\mu \delta^\kappa{}_\nu \quad (5)$$

となる. したがって

$$\eta_{\mu\nu} a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad (6)$$

(5.3) 式から Lorentz 変換に対して (6) は成り立つ. したがって (1) は成り立ち, $\eta_{\mu\nu}$ は共変ベクトルであることが示された.

Q33.

A^μ を Lorentz 変換すると

$$A'^\mu = a^\mu{}_\rho A^\rho \quad (7)$$

であった. したがって Lorentz 変換した先でのノルムは

$$|A'^2| = \eta'_{\mu\nu} a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\sigma A^\rho A^\sigma \quad (8)$$

である. ここで $\eta'_{\mu\nu} a^\mu_\rho a^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$ なので

$$|A'^2| = \eta_{\rho\sigma} A'^\rho A'^\sigma = |A^2| \quad (9)$$

となり, ノルムは保存した.

Q41.

定義から

$$*f^{\mu\nu} = \frac{1}{2!} E^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma} \quad (10)$$

したがって完全反対称テンソルの性質から $\mu = \nu$ のとき

$$*f^{\mu\mu} = \frac{1}{2} E^{\mu\mu\rho\sigma} f_{\rho\sigma} = 0$$

同様に

$$\begin{aligned} *f^{01} &= \frac{1}{2} E^{01\rho\sigma} f_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} (E^{0123} f_{23} + E^{0132} f_{32}) \\ &= f_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *f^{02} &= \frac{1}{2} E^{02\rho\sigma} f_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} (E^{0213} f_{13} + E^{0231} f_{31}) \\ &= f_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *f^{03} &= \frac{1}{2} E^{03\rho\sigma} f_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} (E^{0312} f_{12} + E^{0321} f_{21}) \\ &= f_{12} \end{aligned}$$

$$*f^{10} = f_{32}$$

$$\begin{aligned} *f^{12} &= \frac{1}{2} E^{12\rho\sigma} f_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} (E^{1203} f_{03} + E^{1230} f_{30}) \\ &= f_{03} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*f^{13} &= \frac{1}{2} E^{13\rho\sigma} f_{\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{2} (E^{1302} f_{02} + E^{1320} f_{20}) \\
&= f_{20}
\end{aligned}$$

$$*f^{20} = f_{13}$$

$$*f^{21} = f_{30}$$

$$\begin{aligned}
*f^{23} &= \frac{1}{2} E^{23\rho\sigma} f_{\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{2} (E^{2301} f_{01} + E^{2310} f_{10}) \\
&= f_{01}
\end{aligned}$$

$$*f^{30} = f_{21}$$

$$*f^{31} = f_{02}$$

$$*f^{32} = f_{10}$$