天体物理学レポート No.1

61908697 佐々木良輔

(1)

Poisson 方程式の Green 関数は以下のように与えられる.

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

したがって与式のポテンシャルは

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= -4\pi Gm\int\frac{\delta(\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\ &= -\frac{Gm}{|\boldsymbol{r}|} \propto \frac{1}{r}\end{aligned}$$

(2)

$\phi(\boldsymbol{r})$ と $\delta(\boldsymbol{r})$ をそれぞれ Fourier 変換すると

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\phi(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k} \\ \delta(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

したがって与式は

$$\begin{aligned}(\nabla^2-\mu^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int\phi(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k} &= \frac{4\pi Gm}{(2\pi)^3}\int\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k} \\ (-k^2-\mu^2)\phi(\boldsymbol{k}) &= 4\pi Gm \\ \phi(\boldsymbol{k}) &= -\frac{4\pi Gm}{k^2+\mu^2}\end{aligned}$$

よってポテンシャルは上式の逆 Fourier 変換で与えられ

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{4\pi Gm}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot r}}{k^2+\mu^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

ここで積分を球座標に移す

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot r}}{k^2+\mu^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k} &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\frac{\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}}{k^2+\mu^2}k^2\sin\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\left[-\frac{\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}}{ikr(k^2+\mu^2)}k^2\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2\pi}{ir}\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k(\mathrm{e}^{ikr}-\mathrm{e}^{-ikr})}{k^2+\mu^2} \\
&= \frac{2\pi}{ir}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k\mathrm{e}^{ikr}}{k^2+\mu^2}-\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k\mathrm{e}^{-ikr}}{k^2+\mu^2}\right) \\
&= \frac{(2\pi)^2}{r}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k\mathrm{e}^{ikr}}{k^2+\mu^2}
\end{aligned}
$$

これは上半平面において $k=i\mu$ の留数を持つので, 留数定理から

$$
\int \frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot r}}{k^2+\mu^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k} = \frac{(2\pi^2)}{r}\frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{2}
$$

以上からポテンシャルは

$$
\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{Gm}{r}\mathrm{e}^{-\mu r}
$$

を得る. この解は $r\to 0$ では $\mathrm{e}^{-\mu r}$ が早く 1 に漸近するため $\phi(\boldsymbol{r})\propto 1/r$ という挙動をとる. 一方で $r\to\infty$ では $\mathrm{e}^{-\mu r}$ が早く 0 に漸近するため, 前問のポテンシャルよりも減衰が早いと考えられる.