

流体弾性体力学 期末レポート

61908697 佐々木良輔

レポート 1

ナビエ方程式は

$$\rho(\mathbf{r})\partial_t^2\mathbf{u} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} \quad (1)$$

である. また変位ベクトルは

$$\mathbf{u}(x, z) = \begin{pmatrix} \sum_{\nu} A_{x,\nu} e^{\nu z} e^{ik(x-\nu t)} \\ 0 \\ \sum_{\nu} A_{z,\nu} e^{\nu z} e^{ik(x-\nu t)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \sum_{\nu} A_{x,\nu} f(\nu, x, z) \\ 0 \\ \sum_{\nu} A_{z,\nu} f(\nu, x, z) \end{pmatrix} \quad (2)$$

の実部である. ここで $f(\nu, x, z) = e^{\nu z} e^{ik(x-\nu t)}$ とした. このとき

$$\partial_t^2\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sum_{\nu} A_{x,\nu} (-ik\nu)^2 f(\nu, x, z) \\ 0 \\ \sum_{\nu} A_{z,\nu} (-ik\nu)^2 f(\nu, x, z) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x u_x + \partial_z u_z) \\ 0 \\ \partial_z(\partial_x u_x + \partial_z u_z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\nu} ik(ikA_{x,\nu} + \nu A_{z,\nu}) f(\nu, x, z) \\ 0 \\ \sum_{\nu} \nu(ikA_{x,\nu} + \nu A_{z,\nu}) f(\nu, x, z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} (\partial_x^2 + \partial_z^2)u_x \\ 0 \\ (\partial_x^2 + \partial_z^2)u_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\nu} ((ik)^2 + \nu^2) A_{x,\nu} f(\nu, x, z) \\ 0 \\ \sum_{\nu} ((ik)^2 + \nu^2) A_{z,\nu} f(\nu, x, z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

これらを (1) に代入して $f(\nu, x, z)$ の係数を比較すると x 成分については

$$\sum_{\nu} (\rho k^2 \nu^2 A_{x,\nu} + (\lambda + \mu)(-k^2 A_{x,\nu} + ik\nu A_{z,\nu}) + \mu(\nu^2 - k^2) A_{x,\nu}) = 0 \quad (6)$$

同様に z 成分については

$$\sum_{\nu} (\rho k^2 v^2 A_{z,\nu} + (\lambda + \mu)(ik\nu A_{x,\nu} + \nu^2 A_{z,\nu}) + \mu(\nu^2 - k^2)A_{z,\nu}) \quad (7)$$

それぞれ ν について独立であるとする

$$\begin{aligned} \rho k^2 v^2 A_{x,\nu} + (\lambda + \mu)(-k^2 A_{x,\nu} + ik\nu A_{z,\nu}) + \mu(\nu^2 - k^2)A_{x,\nu} &= 0 \\ \rho k^2 v^2 A_{z,\nu} + (\lambda + \mu)(ik\nu A_{x,\nu} + \nu^2 A_{z,\nu}) + \mu(\nu^2 - k^2)A_{z,\nu} &= 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \rho k^2 v^2 - k^2(\lambda + \mu) + \mu(\nu^2 - k^2) & ik\nu(\lambda + \mu) \\ ik\nu(\lambda + \mu) & \rho k^2 v^2 + \nu^2(\lambda + \mu) + \mu(\nu^2 - k^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x,\nu} \\ A_{z,\nu} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (8)$$

となる. これが非自明な解を持つためには

$$\begin{vmatrix} \rho k^2 v^2 - k^2(\lambda + \mu) + \mu(\nu^2 - k^2) & ik\nu(\lambda + \mu) \\ ik\nu(\lambda + \mu) & \rho k^2 v^2 + \nu^2(\lambda + \mu) + \mu(\nu^2 - k^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

これを整理すると

$$(\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)\mu) (\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)(\lambda + 2\mu)) = 0 \quad (10)$$

となる. また境界条件から

$$\sigma_{ij} = 0 = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}|_{z=0} \quad (11)$$

両辺 $i = j$ で和を取ると $\text{Tr } \epsilon = \nabla \cdot \mathbf{u}$ から

$$0 = (3\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u}|_{z=0} \quad (12)$$

したがって

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}|_{z=0} &= 0 \\ ikA_{x,\nu} + \nu A_{z,\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

となる. 以上から

$$\begin{aligned} 0 &= (\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)\mu) (\rho k^2 v^2 + (\nu^2 - k^2)(\lambda + 2\mu)) \\ 0 &= ikA_{x,\nu} + \nu A_{z,\nu} \end{aligned} \quad (14)$$

が満たすべき方程式である.

レポート 2

流体に粘性が無いことから動径方向の流速が一定とする. さらに流体の速度が x 方向のみであることから, 流体は渦なしである. したがって管内の流体は渦なし非圧縮流体となり, ベルヌーイの定

理を適用できる. 断面積の変化は十分遅く, 流れポテンシャルの変化は十分小さいものとする. すなわち

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \simeq 0 \quad (15)$$

とする. ここで図 1 のように断面積が S_0 の位置で速度 v_0 , 断面積が $S_0 + \delta S(x, t)$ の位置で速度 v とおく. するとベルヌーイの定理から

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} &= \frac{v(x)^2}{2} + \frac{P_0 + \nu \delta S(x, t)}{\rho} \\ v(x)^2 &= v_0^2 - \frac{2\nu \delta S(x, t)}{\rho} \end{aligned} \quad (16)$$

よって

$$v(x) = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{2\nu \delta S(x, t)}{\rho}} \quad (17)$$

となる. ここで十分長い距離 L で v^2 を平均すると (16) 式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_0^L v(x)^2 dx &= \frac{1}{L} \int_0^L v_0^2 - \frac{2\nu \delta S(x, t)}{\rho} dx \\ &= v_0^2 - \frac{1}{L} \int_0^L \frac{2\nu \delta S(x, t)}{\rho} dx \end{aligned} \quad (18)$$

δS は十分な長さに渡って平均すれば 0 になると考えられるので

$$\frac{1}{L} \int_0^L v(x)^2 dx = v_0^2 \quad (19)$$

となる. このことから断面積 S_0 の位置での速度 v_0 は位置 x での速度 v の平均値に一致すると考えられる. 速度の平均値が 0 であると仮定すると

$$\begin{aligned} v(x) &= \pm \sqrt{0 - \frac{2\nu \delta S(x, t)}{\rho}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{2\nu |\delta S(x, t)|}{\rho}} \end{aligned} \quad (20)$$

となる.

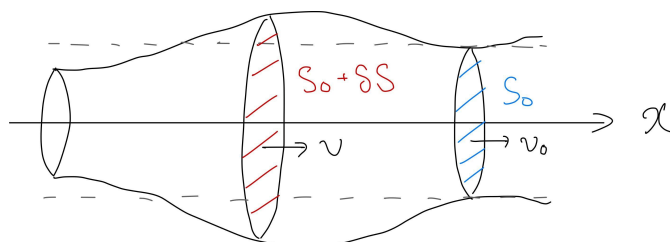


図 1 断面積の変化

レポート 3

d 次元空間の任意の閉曲面 S に囲まれた領域 D を考える. D に含まれる粒子の全運動量の i 成分は, 速度場と密度場の存在を仮定すれば

$$\int_D \rho(\mathbf{r}, t) v_i(\mathbf{r}, t) dV \quad (21)$$

となる. この時間変化は

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV \quad (22)$$

である. 一方で領域 D を出入りする粒子により増減する運動量の i 成分はその流束が

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{v} \rho v_i \quad (23)$$

と書けることから曲面 S の法線ベクトル \hat{n} を用いて

$$- \int_S \rho v_i \mathbf{v} \cdot \hat{n} dS \quad (24)$$

と書ける. ただし符号は流入を正とするためにつけている. ガウスの発散定理を用いると

$$- \int_S \rho v_i \mathbf{v} \cdot \hat{n} dS = - \int_D \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho v_i) dV \quad (25)$$

となる. ここで ∇ は d 次元でのナブラベクトルであり第 n 次元の基底ベクトルを e_n として

$$\nabla = \sum_{n=1}^d \frac{\partial}{\partial x_n} e_n \quad (26)$$

と表される. また運動量は外力によっても変化するので, これを計算する. まず体積力を \mathbf{g} とすると領域 D にかかる力は

$$\int_D \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{g} dV \quad (27)$$

次に曲面 S を通じて加わる圧力は

$$- \int_S P(\mathbf{r}) dS = - \int_D \nabla P(\mathbf{r}) dV \quad (28)$$

となる. 以上から (25), (27), (28) の総和が運動量の時間変化に等しいので

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV &= \int_D -\nabla \cdot (\mathbf{v} \rho v_i) + \rho g_i - (\nabla P)_i dV \\ \int_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho v_i) dV &= \int_D \rho g_i - (\nabla P)_i dV \end{aligned} \quad (29)$$

積分領域が等しいことから

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho v_i) = \rho g_i - (\nabla P)_i \quad (30)$$

ここで左辺について

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho v_i) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho) \right) v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \rho) \cdot \nabla v_i \quad (31)$$

この右辺第 1 項は連続の式から 0 になるので (30) は

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \rho) \cdot \nabla v_i = \rho g_i - (\nabla P)_i \quad (32)$$

以上から

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (33)$$

を得る.

レポート 4

非圧縮渦なし完全流体であることから流れポテンシャルは

$$\Delta \phi = 0 \quad (34)$$

のラプラス方程式を満たす. またベルヌーイの定理が適用でき

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{Const} \quad (35)$$

ここで定数として $P_0/\rho + gh_0$ と置けば

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + g(z - h_0) = \frac{1}{\rho}(P_0 - P) \quad (36)$$

となる.(36) 式は水面付近において

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gh(x, t) = \frac{f}{\rho} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \quad (37)$$

となる. ここで v が十分小さいとして左辺第 2 項を無視すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -gh + \frac{f}{\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (38)$$

両辺 t で微分すると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (39)$$

また水面付近での z, x 方向の速度を \tilde{v}_z, \tilde{v}_x とすると

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \tilde{v}_z - \frac{\partial h}{\partial x} \tilde{v}_x \quad (40)$$

ここで右辺第 2 項は微小量の 2 次なので無視すると

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \tilde{v}_z = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \quad (41)$$

よって (39) 式は水面近傍においては

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \quad (42)$$

ここで ϕ を

$$\phi(\mathbf{r}, t) = R(z) \sin(k(x - ct)) \quad (43)$$

と展開する. ラプラス方程式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \sin(k(x - ct)) - k^2 R(z) \sin(k(x - ct)) &= 0 \\ \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - k^2 R &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

したがって

$$R(z) = A e^{kz} + B e^{-kz} \quad (45)$$

ここで水底においては流体の速度の鉛直成分は 0 であるべきなので

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \\ (A - B)k \sin(k(x - ct)) &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

したがって

$$A = B \quad (47)$$

であり

$$\phi(\mathbf{r}, t) = A \cosh(kz) \sin(k(x - ct)) \quad (48)$$

となる. これと (42) 式から

$$k^2 c^2 \phi = gkA \sinh(kh_0) \sin(k(x - ct)) + \frac{f}{\rho} k^3 A \sinh(kh_0) \sin(k(x - ct)) \quad (49)$$

両辺 ϕ で割ると

$$k^2 c^2 = \left(gk + \frac{f}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh_0) \quad (50)$$

$$\therefore c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{f}{\rho} k \right) \tanh(kh_0)} \quad (51)$$

を得る.

レポート 5