相対性理論 レポート No.10

佐々木良輔

Q74.

$A^\mu B_\mu$ は縮約されてスカラーになっている．したがってスカラーに対する共変微分の要請から

$$\nabla_\nu (A^\mu B_\mu) = \partial_\nu (A^\mu B_\mu) \tag{1}$$

また左辺に対して縮約と微分が可換であることと Leibniz 則から

$$\begin{aligned} \nabla_\nu (A^\mu B_\mu) &= \nabla_\nu A^\mu B_\mu \\ &= (\nabla_\nu A^\mu) B_\mu + A^\mu (\nabla_\nu B_\mu) \end{aligned} \tag{2}$$

(1), (2) 式から

$$\partial_\nu (A^\mu B_\mu) = (\nabla_\nu A^\mu) B_\mu + A^\mu (\nabla_\nu B_\mu) \tag{3}$$

ここで反変ベクトルに関する共変微分

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu - X^\mu{}_{\nu\lambda} A^\lambda \tag{4}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \partial_\nu (A^\mu B_\mu) &= (\partial_\nu A^\mu - X^\mu{}_{\nu\lambda} A^\lambda) B_\mu + A^\mu (\nabla_\nu B_\mu) \\ A^\mu (\nabla_\nu B_\mu) &= \partial_\nu (A^\mu B_\mu) - (\partial_\nu A^\mu) B_\mu + X^\mu{}_{\nu\lambda} A^\lambda B_\mu \\ A^\mu (\nabla_\nu B_\mu) &= A^\mu \partial_\nu B_\mu + X^\mu{}_{\nu\lambda} A^\lambda B_\mu \end{aligned} \tag{5}$$

この両辺が任意の A^μ について等しくあるべきなので

$$\nabla_\nu B_\mu = \partial_\nu B_\mu + X^\lambda{}_{\nu\mu} B_\lambda \tag{6}$$

となる．