相対性理論 レポート No.6

佐々木良輔

(1)

荷電粒子の受ける力は

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1}$$

であった. 慣性系 S' において速度の空間成分は 0 であった. したがって 4 元力の空間成分は

$$F'^i = eE'^i \tag{2}$$

となる. また時間成分は定義から

$$F'^0 = 0 \tag{3}$$

である.

(2)

$f'_{\mu\nu}$ は

$$f'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x/c & -E'_y/c & -E'_z/c \\ E'_x/c & 0 & B'_z & -B'_y \\ E'_y/c & -B'_z & 0 & B'_x \\ E'_z/c & B'_y & -B'_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

なので $f'^{\mu\nu} = f'_{\rho\sigma}\eta'^{\rho\mu}\eta'^{\sigma\nu}$ は

$$f'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E'_x/c & E'_y/c & E'_z/c \\ -E'_x/c & 0 & B'_z & -B'_y \\ -E'_y/c & -B'_z & 0 & B'_x \\ -E'_z/c & B'_y & -B'_x & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

したがって (2) 式, (3) 式は

$$F'^\mu = -ecf'^{\mu 0} = ecf'^{0\mu} \tag{6}$$

である.

(3)

$S \to S'$ の Lorentz 変換係数を $a^{\mu}{}_{\nu}$, 逆変換を $b^{\mu}{}_{\nu}$ とする．このとき $\delta^{\mu}{}_{\nu} = a^{\mu}{}_{\rho} b^{\rho}{}_{\nu}$ である. 以上より (6) 式は

$$\begin{aligned} F^{\mu} &= b^{\mu}{}_{\nu} F'^{\nu} \\ &= ecb^{\mu}{}_{\nu} a^{0}{}_{\rho} a^{\nu}{}_{\sigma} f^{\rho\sigma} \\ &= ec\delta^{\mu}{}_{\sigma} a^{0}{}_{\rho} f^{\rho\sigma} \\ &= eca^{0}{}_{\rho} f^{\rho\mu} \end{aligned} \tag{7}$$

ここで $u^{\mu} = ca_{0}{}^{\mu}$ だった．$a_{0}{}^{\mu} = -a^{0}{}_{\mu}$ より

$$u_{\mu} = -ca^{0}{}_{\mu} \tag{8}$$

なので

$$\begin{aligned} F^{\mu} &= -ef^{\rho\mu} u_{\rho} \\ &= ef^{\mu\rho} u_{\rho} \end{aligned} \tag{9}$$

となる.

(4)

(9) 式の空間成分は

$$F^{i} = ef^{i0} u_{0} + ef^{i1} u_{1} + ef^{i2} u_{2} + ef^{i3} u_{3} \tag{10}$$

ここで $u_{\mu} = \eta_{\mu\nu} u^{\nu}$ より

$$\begin{aligned} u_{0} &= -u^{0} = -\gamma c \\ u_{i} &= u^{i} = \gamma v_{i} \ (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{11}$$

であったので

$$F^{i} = e\gamma(E_{i} + \epsilon_{ijk} v_{j} B_{k}) \tag{12}$$

となる.

(5)

古典的な陽子の受ける力は (1) 式から

$$\vec{K} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{13}$$

であった.

(6)

(12) 式と (13) 式から

$$F^i = \gamma K^i \tag{14}$$

となる.

(7)

Lorentz 力による仕事率 P は

$$P = \vec{K} \cdot \vec{v} \tag{15}$$

(8)

$u_\mu F^\mu = 0$ 及び (11) 式から

$$-cF^0 + \sum_{i=1}^{3} v_i F^i = 0 \tag{16}$$

ここで (14) 式より

$$\vec{K} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i K^i = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{3} v_i F^i \tag{17}$$

以上から

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{3} v_i F^i = \frac{c}{\gamma} F^0 \tag{18}$$

したがって

$$P = \frac{c}{\gamma} F^0 = cF^0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{19}$$