量子力学3 期末レポート

61908697 佐々木良輔

1.

(a)

動径方向の波動関数 $R_l(r)$ は

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}-U(r)+k^2\right)R_l(r)=0 \tag{1}$$

$$U(r)=\frac{2\mu}{\hbar^2}V(r), \qquad \mu=\frac{MM}{M+M}=\frac{M}{2} \tag{2}$$

を満たす. まず $b<r$ のとき $U(r)=0$ より

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}+k^2\right)R_l(r)=0 \tag{3}$$

ここで s 波 $(l=0)$ では

$$\left(\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}\right)^2 r+k^2\right)R_0(r)=0 \tag{4}$$

$rR_0(r)=u_0(r)$ とおくと

$$\left(\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)+k^2\right)u_0(r)=0 \tag{5}$$

したがって一般解は

$$u_0(r)=B\sin k(r+\alpha_1) \tag{6}$$

となる. 次に $c<r<b$ においては $U(r)=-2\mu V_0/\hbar^2=:-U_0$ より $k'^2=2\mu(E+V_0)/\hbar^2$ とすると

$$\left(\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}\right)^2 r+k'^2\right)R_0(r)=0 \tag{7}$$

で同型の方程式になので一般解は

$$u_0(r) = A\sin k'(r+\alpha_2) \tag{8}$$

である．ここで $r=c$ において $u_0(r)=0$ となるべきなので

$$u_0(r) = A\sin k'(r-c) \tag{9}$$

となる．以上から一般解は

$$R_0(r) = \begin{cases} A\sin k'(r-c)/r & (c<r<b) \\ B\sin(kr+\delta_0)/r & (b<r) \end{cases} \tag{10}$$

(b)

$r=b$ において

$$\frac{1}{R_0}\frac{dR_0}{dr} \tag{11}$$

が一致すべきである．$c<r<b$ では

$$\begin{aligned} \left.\frac{1}{R_0}\frac{dR_0}{dr}\right|_{r=b} &= \frac{k'b\cos k'(b-c) - \sin k'(b-c)}{b\sin k'(b-c)} \\ &= k'\cot k'(b-c) - \frac{1}{b} =: \gamma_0 \end{aligned}$$

となり γ_0 は k に依らない．一方で $b<r$ では

$$\left.\frac{1}{R_0}\frac{dR_0}{dr}\right|_{r=b} = \frac{\frac{d}{dr}\left(\frac{\sin kr\cos\delta_0+\cos kr\sin\delta_0}{r}\right)}{\frac{\sin kr\cos\delta_0+\cos kr\sin\delta_0}{r}}$$

これが γ_0 に一致するので

$$\begin{aligned} \gamma_0\frac{\sin kb\cos\delta_0+\cos kb\sin\delta_0}{b} &= \frac{d}{dr}\left(\frac{\sin kb\cos\delta_0+\cos kb\sin\delta_0}{b}\right) \\ \gamma_0\left(j_0(kb)+n_0(kb)\tan\delta_0\right) &= j_0'(kb)+n_0'(kb)\tan\delta_0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \tan\delta_0 &= -\frac{j_0'(kb)-\gamma_0 j_0(kb)}{n_0'(kb)-\gamma_0 n_0(kb)} \\ &= -\frac{kb\cos kb - \sin kb - \gamma_0 b\sin kb}{kb\sin kb+\cos kb+\gamma_0 b\cos kb} \end{aligned}$$

以上から

$$\cot\delta_0 = -\frac{kb\sin kb+\cos kb+\gamma_0 b\cos kb}{kb\cos kb-\sin kb-\gamma_0 b\sin kb} \tag{12}$$

(c)

(12) を $k \simeq 0$ で近似すると

$$\cot\delta_0 \simeq -\frac{k^2b^2+1+\gamma_0 b}{kb-kb-\gamma_0 kb^2} \simeq \frac{1+\gamma_0 b}{\gamma_0 kb^2}$$

両辺に k をかければ

$$k\cot\delta_0 \simeq \frac{1+\gamma_0 b}{\gamma_0 b^2} = -\frac{1}{a}$$

したがって

$$a = -\frac{\gamma_0 b^2}{1+\gamma_0 b} = -\frac{k'b\cot k'(b-c)-1}{k'\cot k'(b-c)}$$

ここで

$$k' = \sqrt{\frac{M(E_0+V_0)}{\hbar^2}}$$

だが $E_0 \ll V_0$ なので

$$k' = K_0$$

とできる. したがって

$$a = \frac{1-K_0 b\cot K_0(b-c)}{K_0\cot K_0(b-c)} \tag{13}$$

また (12) を $kb = x$ としてテイラー展開すると

$$\cot\delta_0 = -\frac{x(x-x^3/6)+1-x^2/2+\gamma_0 b(1-x^2/2)}{x(1-x^2/2)-x+x^3/6-\gamma_0 b(x-x^3/6)} \tag{14}$$

したがって

$$k\cot\delta_0 = -\frac{1}{b}\left(\frac{1+\gamma_0 b}{-\gamma_0 b+x^2(\gamma_0 b/6-1/3)} + \frac{(1/2-\gamma_0 b/2)x^2}{-\gamma_0 b+x^2(\gamma_0 b/6-1/3)} + O(x^3)\right)$$

各項をテイラー展開して整理すると

$$k\cot\delta_0 = \frac{1+\gamma_0 b}{\gamma_0 b^2} - \frac{1-(\gamma_0 b)^2}{2b(\gamma_0 b)^2}x^2 + O(x^3)$$

したがって

$$\begin{aligned} r_{\text{eff}} &= \frac{1-(\gamma_0 b)^2}{b(\gamma_0 b)^2} \\ &= \frac{1-(K_0\cot K_0(b-c)-1)^2}{b(K_0\cot K_0(b-c)-1)^2} \end{aligned} \tag{15}$$

となる.

(d)

散乱振幅は

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\theta), \qquad f_l = \frac{\mathrm{e}^{i\delta_l}\sin\delta_l}{k}$$

ここで

$$f_l = \frac{1}{k}\frac{\sin\delta_l}{\cos\delta_l - i\sin\delta_l} = \frac{1}{k\cot\delta_l - ik}$$

であり, 今は s 波のみを考えているので

$$f_0 = \frac{1}{-\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_{\mathrm{eff}}k^2 - ik} = \frac{-\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_{\mathrm{eff}}k^2 + ik}{\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_{\mathrm{eff}}k^2\right)^2 + k^2}$$

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

より

$$f(\theta) = \frac{1}{-\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_{\mathrm{eff}}k^2 - ik} \tag{16}$$

したがって微分断面積は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\theta)|^2 \\ &= \frac{1}{\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_{\mathrm{eff}}k^2\right)^2 + k^2} \end{aligned} \tag{17}$$

であり, また全断面積は

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_{\mathrm{eff}}k^2\right)^2 + k^2} \tag{18}$$

となる.

2.

(a)

ベクトルポテンシャルを用いると

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

と表される．ここで Maxwell 方程式

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

において Coulomb ゲージを用いれば

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} = \partial_t \left(-\nabla \phi - \partial_t \vec{A} \right)$$

特に真空中では $\phi = 0$ なので

$$(\partial_t^2 - \nabla^2)\vec{A} = 0$$

となり $\vec{A}$ が波動方程式に従うことがわかる．したがって $\vec{A}$ を波数 k の平面波で展開すると

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hat{e}_{\vec{k},\lambda} \left(A_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + A^\dagger_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right) \tag{19}$$

ここで $\lambda = 1, 2$ は $\vec{k}$ に直行する 2 方向を示す添字である．このとき

$$\vec{E} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hat{e}_{\vec{k},\lambda} \left(i\omega_k A_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - i\omega_k A^\dagger_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right) \tag{20}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \sum_{\vec{k},\lambda} \left(A_{\vec{k},\lambda} (i\vec{k} \times \hat{e}_{\vec{k},\lambda}) \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} A^\dagger_{\vec{k},\lambda} (-i\vec{k} \times \hat{e}_{\vec{k},\lambda}) \mathrm{e}^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right) \tag{21}$$

となる．ここで調和振動子の生成, 消滅演算子を用いると

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad \hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i}$$

であったが, これらと (19), (20) は同様の形をしている．このことから調和振動子と電磁場には類似性があり, 電磁場もまた生成, 消滅演算子を用いて表すことができることを示唆している．ここで電磁場のエネルギーは

$$U = \int \varepsilon \vec{E}^2 dV$$

ここで $\exp(2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t))$ の項は全空間で積分した時に 0 になり, クロスタームのみが残るので

$$\begin{aligned} U &= \varepsilon \int dV \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_k^2 (A_{\vec{k},\lambda} A^\dagger_{\vec{k},\lambda} + A^\dagger_{\vec{k},\lambda} A_{\vec{k},\lambda}) \\ &= \sum_{\vec{k},\lambda} V \varepsilon \omega_k^2 (A_{\vec{k},\lambda} A^\dagger_{\vec{k},\lambda} + A^\dagger_{\vec{k},\lambda} A_{\vec{k},\lambda}) \end{aligned}$$

ここで

$$\sqrt{V\varepsilon}\omega_k A_{\vec{k},\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}$$

と置き直せば

$$\sum_{\vec{k},\lambda} \frac{\hbar\omega_k}{2}(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}\hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\hat{a}_{\vec{k},\lambda})$$

となり, これは調和振動子のハミルトニアンそのものである. ここで生成消滅演算子の交換関係

$$[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}] = 1$$

を用いれば

$$\sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}\hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$

とできる. ここで $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}\hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda} = \hat{N}$ の個数演算子であるのでハミルトニアンを固有状態に作用すると

$$\sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}\hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega \left(n_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}\right) \tag{22}$$

となり n が光子数に対応する. このことから $n = 0$ の真空状態でもエネルギーは 0 にならず, 零点振動のようにエネルギーを持っていることがわかる. このことを真空場ゆらぎと呼ぶ. 古典電磁気学では光は波として扱われたが, 以上によって光が量子化され光子という粒子性が現れた.

(b)

$$\hat{A} = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k L^3}} \boldsymbol{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{i(kx-\omega_x t)} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{-i(kx-\omega_x t)}\right)$$

とすると

$$\hat{E} = -\partial_t \hat{A} = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k L^3}} \boldsymbol{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} \left(i\omega_k \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{i(kx-\omega_x t)} - i\omega_k \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{-i(kx-\omega_x t)}\right)$$

なので

$$
\begin{aligned}
\hat{E}(t=0)\times\hat{A}(t=0) =& \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar}{2\omega_k L^3} \sum_{\lambda} \boldsymbol{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} \left(i\omega_k \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{ikx} - i\omega_k \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{-ikx} \right) \\
& \times \sum_{\lambda'} \boldsymbol{\epsilon}_{\vec{k},\lambda'} \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda'} \mathrm{e}^{ikx} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda'} \mathrm{e}^{-ikx} \right) \\
=& \sum_{\vec{k}} \frac{i\hbar}{2L^3} \Bigg(0 \\
& + \boldsymbol{\epsilon}_{\vec{k},1} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\vec{k},2} \left(\hat{a}_{\vec{k},1} \mathrm{e}^{ikx} - \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},1} \mathrm{e}^{-ikx} \right) \left(\hat{a}_{\vec{k},2} \mathrm{e}^{ikx} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},2} \mathrm{e}^{-ikx} \right) \\
& + \boldsymbol{\epsilon}_{\vec{k},2} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\vec{k},1} \left(\hat{a}_{\vec{k},2} \mathrm{e}^{ikx} - \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},2} \mathrm{e}^{-ikx} \right) \left(\hat{a}_{\vec{k},1} \mathrm{e}^{ikx} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},1} \mathrm{e}^{-ikx} \right) \\
& + 0 \Bigg)
\end{aligned}
$$

ここで前問と同様に $\exp(2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t))$ の残った項は全空間で積分した時に 0 になるので

$$
\begin{aligned}
\hat{S} =& \sum_{\vec{k}} \frac{i\hbar}{2L^3} \int dV \hat{E}(t=0)\times\hat{A}(t=0) \\
=& \sum_{\vec{k}} \frac{i\hbar}{2L^3} \int dV \hat{k} \Bigg(\left(\hat{a}_{\vec{k},1} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},2} - \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},1} \hat{a}_{\vec{k},2} \right) \\
& - \left(\hat{a}_{\vec{k},2} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},1} - \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},2} \hat{a}_{\vec{k},1} \right) \Bigg) \\
=& \sum_{\vec{k}} \frac{i\hbar\hat{k}}{L^3} \int dV \left(\hat{a}_{\vec{k},1} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},2} - \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},1} \hat{a}_{\vec{k},2} \right) \\
=& i \sum_{\vec{k}} \hbar\hat{k} \left(\hat{a}_{\vec{k},1} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},2} - \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},1} \hat{a}_{\vec{k},2} \right)
\end{aligned} \tag{23}
$$

となる.

(c)

交換関係を計算する.

$$
\begin{aligned}
[\hat{a}_{\vec{k},+}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}',+}] &= \frac{1}{2} \left([\hat{a}_{\vec{k},1}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}',1}] - i[\hat{a}_{\vec{k},2}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}',1}] + i[\hat{a}_{\vec{k},1}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}',2}] + [\hat{a}_{\vec{k},2}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}',2}] \right) \\
&= \delta_{\vec{k},\vec{k}'}
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
[\hat{a}_{\vec{k},+}, \hat{a}_{\vec{k}',-}] &= \frac{1}{2} \left([\hat{a}_{\vec{k},1}, \hat{a}_{\vec{k}',1}] - i[\hat{a}_{\vec{k},2}, \hat{a}_{\vec{k}',1}] + i[\hat{a}_{\vec{k},1}, \hat{a}_{\vec{k}',2}] + [\hat{a}_{\vec{k},2}, \hat{a}_{\vec{k}',2}] \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{25}
$$

ここで

$$
\hat{a}_{\vec{k},+} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},+} = \hat{a}_{\vec{k},-} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},-} = \frac{1}{2} \left(\hat{a}_{\vec{k},1} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},1} + i\hat{a}_{\vec{k},1} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},2} - i\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},1} \hat{a}_{\vec{k},2} + \hat{a}_{\vec{k},2} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},2} \right)
$$

より

$$i\left(\hat{a}_{\vec{k},1}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},2}-\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},1}\hat{a}_{\vec{k},2}\right)=2\left(\hat{a}_{\vec{k},+}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},+}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{S}=2\sum_{\vec{k}}\hbar\vec{k}\left(\hat{a}_{\vec{k},+}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},+}-\frac{1}{2}\right) \tag{26}$$

となる. これは調和振動子のエネルギーであるため $\hat{S}$ は電磁場のエネルギーであると考えられる.

(3)

(a)

(1)

ディラック方程式から

$$i\gamma^0\partial_0=-i\gamma^1\partial_1+-i\gamma^2\partial_2+-i\gamma^3\partial_3+m$$

ここで

$$\boldsymbol{\alpha}=\gamma_0\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}$$

とすれば

$$i\partial_0=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P}+\gamma_0 m$$

であり $-\partial_t=H$ なので

$$H_{\mathrm{Dirac}}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P}+\gamma_0 m \tag{27}$$

を得る.

(2)

交換関係を計算する. $L^i=\varepsilon_{ijk}x_jP_k$ から

$$\begin{aligned}[H_{\mathrm{Dirac}},L^i]&=[\alpha_lP_l,\varepsilon_{ijk}x_jP_k]\\&=\varepsilon_{ijk}\alpha_l\left(x_j[P_l,P_k]+[P_l,x_j]P_k\right)\\&=-i\varepsilon_{ijk}\alpha_jP_k\end{aligned}$$

である. また

$$\gamma_0\gamma^i=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma^i\\ -\sigma^i & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma^i\\ \sigma^i & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

より

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ \sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

である. ここで

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

また

$$\alpha^i S^j = S^j \alpha^i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i\sigma_j \\ \sigma_i\sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{aligned} [H_{\text{Dirac}}, S^j] &= [\alpha_i P_i, S^j] \\ &= [\alpha_i, S^j] P_i \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i \\ \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} P_i \\ &= i\varepsilon_{ijk}\alpha_k P_i \\ &= i\varepsilon_{jki}\alpha_k P_i \end{aligned} \tag{28}$$

となる. 以上から

$$[H_{\text{Dirac}}, J_i + S_i] i\varepsilon_{ijk}(\alpha_j P_k - \alpha_j P_k) = 0 \tag{29}$$

となり, 全角運動量が保存していることがわかる.

(b)