物性物理学 No.4

61908697 佐々木良輔

問 1

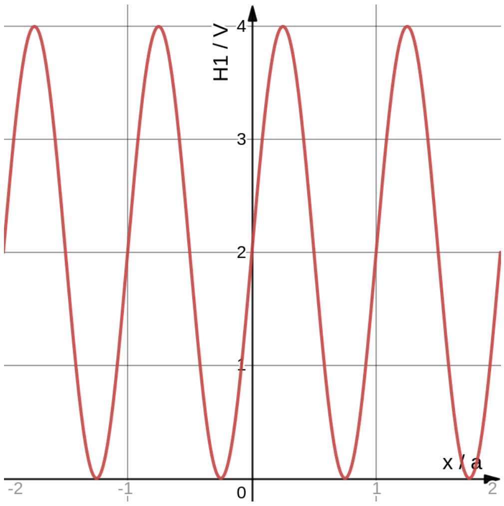

図 1　H_1 のグラフ

問 2

$V = 0$ のとき $H_1 = 0$ なので Schrödinger 方程式は

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_\pm(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{\sqrt{L}}\mathrm{e}^{\pm i(\pi/a)x} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\frac{1}{\sqrt{L}}\mathrm{e}^{\pm i(\pi/a)x} \\ &= E\psi_\pm(x) \end{aligned} \tag{1}$$

よって

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \tag{2}$$

問 3

$$
\begin{aligned}
0 &= (H_0 + H_1 - E)(A\psi_-(x) + B\psi_+(x)) \\
&= \left(E_0 - E + 2V\left(1 + \sin\frac{2\pi}{a}x\right)\right)(A\psi_-(x) + B\psi_+(x)) \\
&= \left(E_0 - E + 2V + \frac{V}{i}(\mathrm{e}^{i(2\pi/a)x} - \mathrm{e}^{-i(2\pi/a)x})\right)(A\psi_-(x) + B\psi_+(x)) \\
&= (E_0 - E + 2V)(A\psi_-(x) + B\psi_+(x)) \\
&\quad + \frac{V}{i\sqrt{L}}\left(A\mathrm{e}^{i(\pi/a)x} + B\mathrm{e}^{i(3\pi/a)x} - A\mathrm{e}^{-i(3\pi/a)x} - B\mathrm{e}^{-i(\pi/a)x}\right)
\end{aligned} \tag{3}
$$

ここで $\mathrm{e}^{ik(\pi/a)x}/\sqrt{L} = |k\rangle$ と表記する. このとき $\langle k'|k\rangle = \delta_{kk'}$ である.

$$
0 = (E_0 - E + 2V)(A\,|{-1}\rangle + B\,|1\rangle) + \frac{V}{i}(A\,|1\rangle + B\,|3\rangle - A\,|{-3}\rangle - B\,|{-1}\rangle) \tag{4}
$$

両辺に $\langle -1|$ を掛けると

$$
0 = (E_0 - E + 2V)A - \frac{V}{i}B \tag{5}
$$

両辺に $\langle 1|$ を掛けると

$$
0 = (E_0 - E + 2V)B + \frac{V}{i}A \tag{6}
$$

すなわち

$$
\begin{pmatrix} E_0 - E + 2V & -V/i \\ V/i & E_0 - E + 2V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{7}
$$

これが非自明な解を持つ時

$$
\begin{vmatrix} E_0 - E + 2V & -V/i \\ V/i & E_0 - E + 2V \end{vmatrix} = 0 \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_0 + V \\
E_2 &= E_0 + 3V
\end{aligned} \tag{9}
$$

問 4

E_1 に対応する固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{10}
$$

このとき固有関数は

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}(\mathrm{e}^{-i(\pi/a)x} + i\mathrm{e}^{i(\pi/a)x}) \tag{11}$$

したがって

$$\begin{aligned} |\psi_1(x)|^2 &= \frac{1}{L}(\mathrm{e}^{-i(\pi/a)x} + i\mathrm{e}^{i(\pi/a)x})(\mathrm{e}^{i(\pi/a)x} - i\mathrm{e}^{-i(\pi/a)x}) \qquad (12) \\ &= 2\left(1 - \sin\frac{2\pi}{a}x\right) \qquad (13) \end{aligned}$$

同様に E_2 に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{14}$$

このとき固有関数は

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}(\mathrm{e}^{-i(\pi/a)x} - i\mathrm{e}^{i(\pi/a)x}) \tag{15}$$

したがって

$$|\psi_2(x)|^2 = 2\left(1 + \sin\frac{2\pi}{a}x\right) \tag{16}$$

である．$|\psi(x)|^2$ のグラフは下図のようになる．

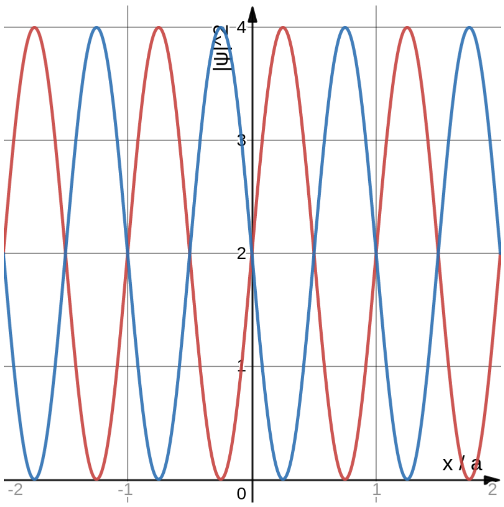

図 2　$|\psi(x)|^2$ のグラフ (青:$|\psi_1|^2$, 赤:$|\psi_2|^2$)

問 5

図 1 と図 2 から $|\psi_2|^2$ と H_1 は同位相, $|\psi_1|^2$ と H_1 は逆位相とわかる．すなわち $|\psi_1|^2$ はエネルギーが高い場所に局在し, $|\psi_2|^2$ はエネルギーが低い場所に局在している．これによって 2 つの準位にエネルギー差が生じていると言える．